

### 命題 34 の証明

$k : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  が Hilbert 空間  $H$  の正定値カーネルであるとする。最初に,  $k(x, \cdot)$  ( $x \in E$ ) で張られる線形空間  $H_0$  で,

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^m a_i k(x_i, \cdot), \quad g(\cdot) = \sum_{j=1}^n b_j k(y_j, \cdot) \in H_0 \quad (3.21)$$

に対する操作

$$\langle f, g \rangle_{H_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j k(x_i, y_j)$$

が内積になっていることを示す。まず,

$$\langle f, g \rangle_{H_0} = \sum_{i=1}^m a_i g(x_i) = \sum_{j=1}^n b_j f(x_j)$$

であるから,  $\langle f, g \rangle_{H_0}$  は (3.21) における  $f, g$  の表現によらない。特に,  $\langle f, g \rangle_{H_0}$  は対称である。 $k$  は正定値カーネルであるので,

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i a_j k(x_i, x_j) \geq 0$$

また,

$$|f(x)| = |\langle f(\cdot), k(x, \cdot) \rangle_{H_0}| \leq \|f\|_{H_0} \sqrt{k(x, x)}$$

より,  $\|f\|_{H_0} = 0 \implies f = 0$  が成立する。以下では,  $H_0$  を完備化した線形空間  $H$  を構成する。

$\{f_n\}$  を  $H_0$  における Cauchy 列としたときに, 任意の  $x \in E$ ,  $m, n \geq 1$  で

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_{H_0} \sqrt{k(x, x)}$$

より,  $\{f_n(x)\}$  は Cauchy 列であり, 実数列でもあるので, 必ず収束先をもつ。以下では, 各  $x \in E$  で  $H_0$  の Cauchy 列  $\{f_n\}$  が収束する先が  $f(x)$  であるような  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  の集合を  $H$  とする。一般に,  $H_0$  は  $H$  の部分集合である。以下では,  $H$  における内積を定義し,  $H$  が再生核  $k$  をもつ RKHS であることを証明する。

補題 4  $H_0$  における Cauchy 列  $\{f_n\}$  が各  $x \in E$  で 0 に収束すれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{H_0} = 0$$

が成立する。

補題 4 の証明 Cauchy 列は有界である (例 26) ので,  $\|f_n\| < B$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) となる  $B > 0$  が存在する。また, Cauchy 列であるから, 任意の  $\epsilon > 0$  で  $n > N \implies \|f_n - f_N\| < \epsilon/B$  なる  $N$  が存在する。したがって,  $f_N(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i k(x_i, x) \in H_0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $x_i \in E$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) に対して,  $n > N$  とおけば

$$\|f_n\|_{H_0}^2 = \langle f_n - f_N, f_n \rangle_{H_0} + \langle f_N, f_n \rangle_{H_0} \leq \|f_n - f_N\|_{H_0} \|f_n\|_{H_0} + \sum_{i=1}^p \alpha_i |f_n(x_i)|$$

ときて、第 1 項は  $\epsilon$  未満、また  $n \rightarrow \infty$  とすると各  $i = 1, \dots, p$  で  $f_n(x_i) \rightarrow 0$  とでき、第 2 項は  $\epsilon$  以下にできる。すなわち、補題 4 が成立する。□

$H_0$  における Cauchy 列  $\{f_n\}, \{g_n\}$  に対して、各  $x \in E$  に対する収束先が  $f(x), g(x)$  である  $f, g \in H$  が定義できる。そして、 $\{\langle f_n, g_n \rangle_{H_0}\}$  は

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n \rangle_{H_0} - \langle f_m, g_m \rangle_{H_0}| &= |\langle f_n, g_n - g_m \rangle_{H_0} + \langle f_n - f_m, g_m \rangle_{H_0}| \\ &\leq \|f_n\|_{H_0} \|g_n - g_m\|_{H_0} + \|f_n - f_m\|_{H_0} \|g_m\|_{H_0} \end{aligned}$$

となり、Cauchy 列であるので、実数列  $\{\langle f_n, g_n \rangle_{H_0}\}$  は収束する（命題 6）。そして、収束先は、 $f(x), g(x) (x \in E)$  のみに依存する。実際、 $\{f'_n\}, \{g'_n\}$  を各  $x \in E$  でそれぞれ  $f, g$  に収束する別の  $H_0$  における Cauchy 列とすれば、 $\{f_n - f'_n\}, \{g_n - g'_n\}$  も Cauchy 列になり、しかも各  $x \in E$  で 0 に収束するので、補題 4 が適用できて、 $n \rightarrow \infty$  で  $\|f_n - f'_n\|_{H_0}, \|g_n - g'_n\|_{H_0} \rightarrow 0$  が成立する。このことは、

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n \rangle_{H_0} - \langle f'_n, g'_n \rangle_{H_0}| &= |\langle f_n, g_n - g'_n \rangle_{H_0} + \langle f_n - f'_n, g'_n \rangle_{H_0}| \\ &\leq \|f_n\|_{H_0} \|g_n - g'_n\|_{H_0} + \|f_n - f'_n\|_{H_0} \|g'_n\|_{H_0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を意味する。すなわち、 $\{\langle f_n, g_n \rangle_{H_0}\}$  の収束先は系列  $\{f_n\}, \{g_n\}$  に依存せず、 $f, g \in H$  のみに依存する。そこで、

$$\langle f, g \rangle_H := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle_{H_0}$$

を  $H$  の内積と定義する。内積の定義を満足していることは、まず、 $\|f\|_H = \langle f, f \rangle_H = 0$  を仮定すると、各  $x \in E$  に対して  $n \rightarrow \infty$  で

$$|f_n(x)| = |\langle f_n(\cdot), k(x, \cdot) \rangle| \leq \sqrt{k(x, x)} \|f_n\|_{H_0} \rightarrow 0$$

なので、 $|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = 0$  となることからわかる。

また、 $f \in H$  を  $H_0$  における Cauchy 列  $\{f_n\}$  の各  $x \in E$  での  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  と定義したので、 $n \rightarrow \infty$  で

$$\|f - f_n\|_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{H_0} \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

となり、 $H_0$  は  $H$  において稠密である。

次に完備であることを示す。 $\{f_n\}$  を  $H$  における Cauchy 列とすると、稠密性から  $H_0$  の列  $\{f'_n\}$  が存在して、

$$\|f_n - f'_n\|_H \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.23)$$

とできる。よって、 $m, n > N$  で  $\|f_n - f'_n\|_H, \|f_m - f'_m\|_H, \|f_n - f_m\|_H < \epsilon/3$  とできて、

$$\|f'_n - f'_m\|_{H_0} = \|f'_n - f'_m\|_H \leq \|f_n - f'_n\|_H + \|f_n - f_m\|_H + \|f_m - f'_m\|_H \leq \epsilon \quad (f'_n, f'_m \in H_0 \subseteq H)$$

したがって、 $\{f'_n\}$  は  $H_0$  の Cauchy 列であって、その各  $x \in E$  での収束  $f(x)$  によって  $f \in H$  を定義できる。そして、(3.22) より、 $\|f - f'_n\|_H \rightarrow 0$  が成立し、これと (3.23) より、 $n \rightarrow \infty$  で

$$\|f - f_n\|_H \leq \|f - f'_n\|_H + \|f'_n - f_n\|_H \rightarrow 0$$

とできる。すなわち、 $H$  は完備である。

次に,  $k$  がその Hilbert 空間  $H$  に対する再生核であることを示す。(3.1) は, 各  $x \in E$  で  
 $k(x, \cdot) \in H_0 \subseteq H$  よりただちに成立する。(3.2) に関しては,  $f \in H$  は  $H_0$  における Cauchy 列  
 $\{f_n\}$  の各  $x \in E$  の極限になるので,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(\cdot), k(x, \cdot) \rangle_{H_0} = \langle f, k(x, \cdot) \rangle_H$$

となり, 成立する。

最後に, そのような  $H$  が一意であることを示す。 $H$  と同じ性質を満足する  $G$  が存在するとすれば,  $H$  は  $H_0$  の閉包であるから,  $G$  は  $H$  を部分空間として含んでいる必要がある。 $H$  は閉であるので, (2.11) より,  $G = H \oplus H^\perp$  と書ける。しかし,  $k(x, \cdot) \in H$  ( $x \in E$ ) であって,  $f \in H^\perp$  に対して  $\langle f(\cdot), k(x, \cdot) \rangle_G = 0$  なので,  $f(x) = 0$  ( $x \in E$ ) が成立する。すなわち,  $H^\perp = \{0\}$  が成立する。□

(f)

(g)

$$32. \underline{\text{BJ55}} \quad J(x,t) = e^{i\omega t}$$

$$\underline{\text{BJ56}} \quad J(x,t) = (t - x)_+^{\circ}$$

$$k(x,y) = \int_E J(y-x,t) d\eta(t) \quad \text{一般的表示}.$$

## 命題38の証明

まず、仮定より、 $k(x, \cdot) = k_1(x, \cdot) + k_2(x, \cdot) \in H$  が各  $x \in E$  で成立する。各  $x \in E$  で  $N^\perp \ni (h_1(x, \cdot), h_2(x, \cdot)) := v^{-1}(k(x, \cdot))$  を定義する。ただし、 $h_1(x, \cdot), h_2(x, \cdot)$  は  $x \in E$  で決まる  $H_1, H_2$  の要素であるが、 $h_1, h_2$  は必ずしも  $H_1, H_2$  の再生核  $k_1, k_2$  ではないものとする。 $k(x, \cdot) = k_1(x, \cdot) + k_2(x, \cdot)$  であるので、

$$h_1(x, \cdot) - k_1(x, \cdot) + h_2(x, \cdot) - k_2(x, \cdot) = k(x, \cdot) - k(x, \cdot) = 0$$

が成立し、 $z := (h_1(x, \cdot) - k_1(x, \cdot), h_2(x, \cdot) - k_2(x, \cdot)) \in N$  が成り立つ、各  $f \in H$  の  $N^\perp \ni (f_1, f_2) := v^{-1}(f)$  について、

$$0 = \langle 0, f \rangle_H = \langle z, (f_1, f_2) \rangle_F$$

が成立する。すなわち、

$$\langle f_1, h_1(x, \cdot) \rangle_1 + \langle f_2, h_2(x, \cdot) \rangle_2 = \langle f_1, k_1(x, \cdot) \rangle_1 + \langle f_2, k_2(x, \cdot) \rangle_2$$

が成り立ち、これは再生性

$$\begin{aligned} \langle f, k(x, \cdot) \rangle_H &= \langle v^{-1}(f), v^{-1}(k(x, \cdot)) \rangle_F = \langle (f_1, f_2), (h_1(x, \cdot), h_2(x, \cdot)) \rangle_F \\ &= \langle (f_1, f_2), (k_1(x, \cdot), k_2(x, \cdot)) \rangle_F = f_1(x) + f_2(x) = f(x) \end{aligned}$$

を意味する。さらに、 $(f_1, f_2) \in F$ ,  $f := f_1 + f_2$ ,  $(g_1, g_2) := (f_1, f_2) - v^{-1}(f)$  とおくと、 $(g_1, g_2) \in N$ ,  $v^{-1}(f) \in N^\perp$  より、

$$\|(f_1, f_2)\|_F^2 = \|v^{-1}(f)\|_F^2 + \|(g_1, g_2)\|_F^2$$

これと、ノルムの定義(3.4),(3.5)より、

$$\|f\|_H^2 = \|v^{-1}(f)\|_F^2 \leq \|(f_1, f_2)\|_F^2 = \|f_1\|_{H_1}^2 + \|f_2\|_{H_2}^2$$

が得られる。ここで、不等式の等号成立は  $(f_1, f_2) = v^{-1}(f)$  のときである。  $\square$

(a)

(b)

(c)

$$34. \int_0^1 G_q(x,y) f^{(q)}(y) dy$$

$$= \left[ G_q(x,y) f^{(q-1)}(y) \right]_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{d}{dy} G_q(x,y) \right) f^{(q-1)}(y) dy$$

(∴ 部分積分)

$$= \underbrace{G_q(x,1)}_{=0} f^{(q-1)}(1) - G_q(x,0) f^{(q-1)}(0)$$

$$- \int_0^1 -G_{q-1}(x,y) f^{(q-1)}(y) dy$$

(∴  $G_q$  の定義)

$$= - \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(0) + \int_0^1 G_{q-1}(x,y) f^{(q-1)}(y) dy$$

↓  $\phi_i$  の定義

$$= - f^{(q-1)}(0) \underbrace{\phi_{q-1}(x)}_{\text{（図より）}} + \int_0^1 G_{q-1}(x,y) f^{(q-1)}(y) dy.$$

∴ (図より) 通り。

$$= - \sum_{i=1}^{q-1} f^{(i)}(0) \phi_i(x) + \int_0^1 G_1(x,y) f^{(i)}(y) dy$$

右辺を計算する。

||

$$\int_0^1 G_1(x,y) f^{(i)}(y) dy = \int_0^x f^{(i)}(y) dy = f(x) - f(0) \quad \text{（図より）}$$

$$\int_0^1 G_q(x,y) f^{(q)}(y) dy = - \sum_{i=0}^{q-1} f^{(i)}(0) \phi_i(x) + f(x) \quad (\because \phi_0(x) = 1)$$

左辺.  $f(x) = \sum_{i=0}^{q-1} f^{(i)}(0) \phi_i(x) + \int_0^1 G_q(x,y) f^{(q)}(y) dy$

□

$$35. W_q[0,1] = H_0 \oplus H_1 \text{ を示す。}$$

まず,  $H_0 \cap H_1 = \{\phi\}$  を示す。

$$f(x) = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i \phi_i(x) \in H_0 \Rightarrow f = f^{(q)} = 0,$$

$$f(x) = \int_0^x G_q(x,y) f(y) dy \in H_1 \Rightarrow \alpha_0 = f(0) = 0, \dots, \alpha_{q-1} = f^{(q-1)}(0) = 0$$

であるので,  $H_0 \cap H_1 = \{\phi\}$  である。

また, 問題 34 (5).

任意の  $f \in W_q[0,1]$  に対して,  $f = f^{(q)}$

$$f_0(x) := \sum_{i=0}^{q-1} f^{(i)}(0) \phi_i(x) \in H_0 \quad \text{と},$$

$$f_1(x) := \int_0^x G_q(x,y) f^{(q)}(y) dy \in H_1 \quad \text{が存在する},$$

$$f = f_0 + f_1 \quad \text{と表せるので}, \quad W_q[0,1] = H_0 \oplus H_1 \quad \text{である。} \quad \square$$

(集合の両側) の包含関係  $W_q[0,1] \subset H_0 \oplus H_1$ ,  $W_q[0,1] \supset H_0 \oplus H_1$  を示すところに、証明が完了している。

36.  $T_k e_j = \lambda_j e_j$  が成り立つことを確認せよ。

表記の簡単のため,  $k = \frac{(2j-1)\pi}{2}$  とする。

$$\begin{aligned} T_k e_j &= \int_0^x \min\{x, y\} \sqrt{2} \sin(ky) dy \\ &= \int_0^x y \sqrt{2} \sin(ky) dy + \int_x^1 x \sqrt{2} \sin(ky) dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^x y \sin(ky) dy + \sqrt{2} x \int_x^1 \sin(ky) dy \\ &= \sqrt{2} \left[ \frac{\sin(ky) - ky \cos(ky)}{k^2} \right]_0^x + \sqrt{2} x \left[ -\frac{\cos(ky)}{k} \right]_x^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{k^2} (\sin(kx) - kx \cos(kx)) + \frac{\sqrt{2} x}{k} \left( -\cos \frac{kx}{k} + \cancel{\cos kx} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{k^2} \sin(kx) \quad \text{0 } (\because k = \frac{(2j-1)\pi}{2}) \\ &= \frac{4}{((2j-1)\pi)^2} \sqrt{2} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{2} x\right) \\ &= \lambda_j e_j \end{aligned}$$



$$37. \lambda_j := \sqrt{\frac{2a}{A}} B^j$$

$(A = a+b+c, B = \frac{b}{a+b+c})$  が  $\beta = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$  で初期値・公比の等比数列であることを示す。

$$\frac{b}{2a}, C = \sqrt{a^2 + 2ab}$$

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \sqrt{\frac{2a}{a+b+c}} \cdot \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^j \\ &= \left(\frac{1}{2} + \beta + \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta}{\frac{1}{2} + \beta + \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}}\right)^j\end{aligned}$$

よって、初項  $\lambda_0 = \left(\frac{1}{2} + \beta + \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$\text{公比 } r = \left(\frac{\beta}{\frac{1}{2} + \beta + \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}}\right)$$

であることは等比数列である。

38. 7°D776

```
====問題38=====
from pathlib import Path

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def H(j: int, x: float) -> float:
    """Function H."""
    match j:
        case 0:
            return 1
        case 1:
            return 2 * x
        case 2:
            return -2 + 4 * x**2
        case _:
            return -12 * x + 8 * x**3

def phi(j: int, x: np.ndarray, sigma: float, sigma_hat: float) -> float:
    """Function phi."""
    a = (4 * sigma_hat**2) ** (-1)
    b = (2 * sigma**2) ** (-1)
    c = np.sqrt(a**2 + 2 * a * b)
    return np.exp(-(c - a) * x**2) * H(j, np.sqrt(2 * c) * x)

sigma_list = [1e-1, 1e0, 1e1]
sigma_hat_list = [1e-1, 1e0, 1e1]

out_dir = Path("src/exercise/Chap3/out/problem38")
out_dir.mkdir(parents=True, exist_ok=True)

x = np.linspace(-2, 2, 100)
color = ["b", "g", "r", "b"]

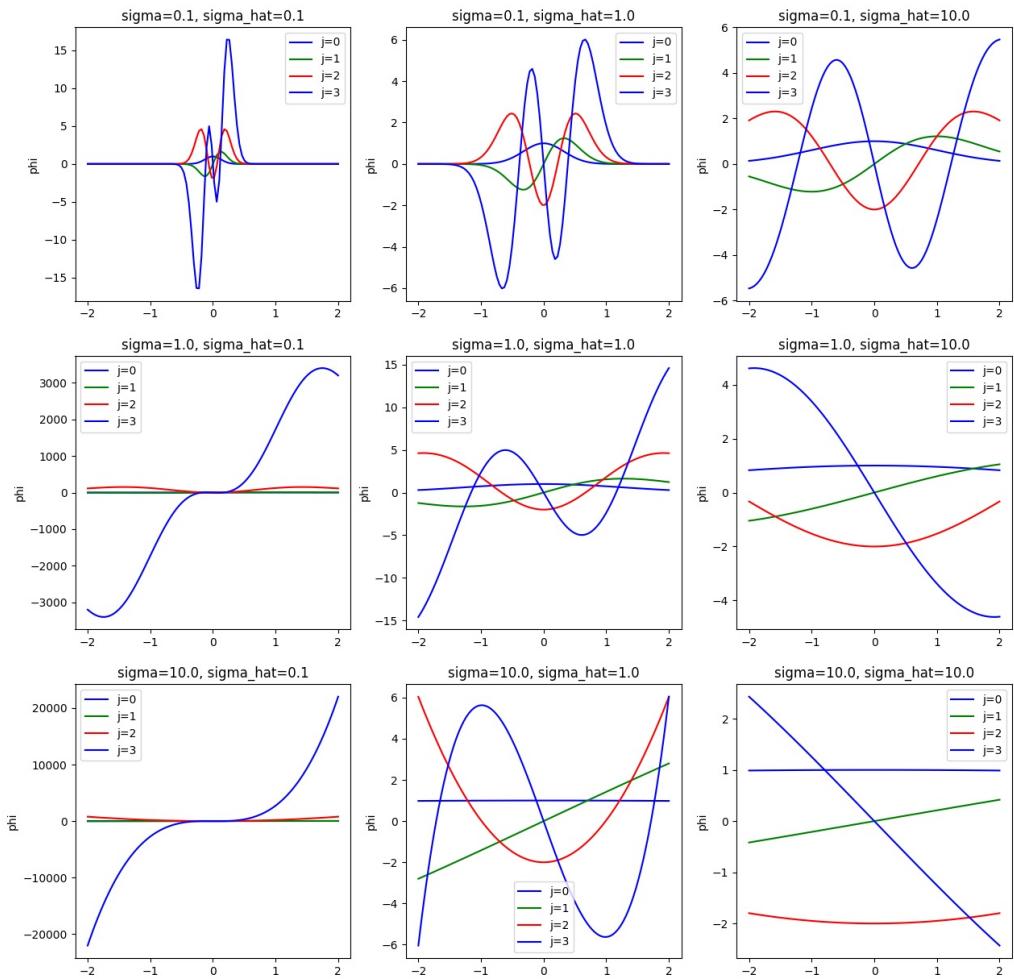
fig, axs = plt.subplots(3, 3, figsize=(15, 15))

for i, sigma in enumerate(sigma_list):
    for ii, sigma_hat in enumerate(sigma_hat_list):
        ax = axs[i, ii]
        for j in range(4):
            ax.plot(x, phi(j, x, sigma, sigma_hat), c=color[j], label=f"{j}={}")
        ax.set_ylabel("phi")
        ax.set_title(f"\{sigma\}, \{sigma_hat\}")
        ax.legend()

plt.suptitle("Characteristic function of Gauss Kernel.")
plt.savefig(Path(out_dir, "result.png"))
plt.close()
```

# 実行結果

Characteristic function of Gauss Kernel.



39. (a),  $x=0$  のとき  $f_n(x)=0$  である。

$0 < x < 1$  のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(-x)x^{n+1} = 0,$$

であるので,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  である。

$$\text{また, } \frac{d}{dx} f_n(x) = n^2 \left( -x^{n+1} + (n+1)(1-x)x^n \right)$$

$$= n^2 \left( (n+1)x^n - (n+2)x^{n+1} \right)$$

$$= n^2 x^n (n+1 - (n+2)x) \quad (*)$$

$\frac{d}{dx} f_n(x) = 0$  を解く,  $x = \frac{n+1}{n+2}$ , 0 である,  $f_n(x)$  の最大値

達成する  $x$  は  $x = \frac{n+1}{n+2}$  であることを示す。

よって,  $f_n(x)$  の最大値は,

$$n^2 \left( 1 - \frac{n+1}{n+2} \right) \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1}$$

$$= n^2 \frac{1}{n+2} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \rightarrow \infty \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

であるので,  $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$  は収束しない。

$$\begin{aligned}
 (b) \cdot f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (1-x)x^{n+2} - ((-x)x^{n+1}) \\
 &= (-x)x^{n+1}(x-1) \\
 &= -(-x)^2 x^{n+1} \leq 0 \quad (\because 0 \leq x \leq 1)
 \end{aligned}$$

つまり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  であるので,  $f_n$  は各点で  
 単調かつ連続関数である, 常に 0 の値をとる定義  
 関数へ収束する。又, 問題 3 から,  $f_n(x)$  は  
 一様収束する。 $([0, 1] \ni x \mapsto f_n(x))$

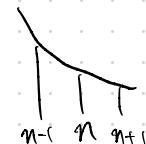
(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$  が絶対収束する

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\frac{3}{2}}$  が収束することを示す。

$f(x) = (x+1)^{-\frac{3}{2}}$  とする。このとき,  $f$  は单調減少

であるので、

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx$$



が成立立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \leq 3.$$

$$\text{よって, } \sqrt{2} + 1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\frac{3}{2}} \leq 3$$

であるので、 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\frac{3}{2}}$  は収束  $\left(\because (n+1)^{-\frac{3}{2}} > 0\right)$ ,

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$  は絶対収束する。

40.  $\phi$  の周期が  $2\pi$  であると  $\phi(x) = \phi(x+2\pi Z)$  を仮定する。このとき、

$e_j(x) = \cos(jx)$  が  $T_k$  の固有関数である実際、 $\phi$  は偶関数である、周期的であるので、

$$\begin{aligned} T_k e_j(x) &= \int_{E=[-\pi, \pi]} \phi(x-y) \cos(jy) dy \quad u=y-x \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \phi(-u) \cos(j(x+u)) du \quad \begin{array}{l} y \mapsto -\pi \rightarrow \pi \\ u \mapsto -\pi-x \rightarrow \pi-x \end{array} \\ &= \int_E \phi(u) \cos(j(x+u)) du \\ &= \left( \int_E \phi(u) \cos(ju) du \right) \cos(jx) \end{aligned}$$

が成り立つため、 $(\int_E \phi(u) \cos(ju) du, \cos(jx))$  は固有対。

$$\lambda_j := \int_E \phi(u) \cos(ju) du \text{ と定義。}$$

$(\lambda_j, \sin(jx))$  も固有対となる。

また、 $\{(\lambda_j, \cos(jx)), (\lambda_j, \sin(jx))\}_{j=1}^{\infty}$  が固有対の列であるので、Mercer の定理から、カーネル  $K$  は

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \{ \cos(jx) \cos(jy) + \sin(jx) \sin(jy) \} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \cos(j(x-y)) \end{aligned}$$

41.  $e(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$  を  $E = [-1, 1]$  の  $C^2$  の  
中で  $K(x, y) = (1 + xy)^3$  の 固有関数を求める。

$$\int_E K(x, y) e(y) dy$$

$$= \int_E e(y) dy + 3 \left( \int_E y e(y) dy \right) x + 3 \left( \int_E y^2 e(y) dy \right) x^2 + \left( \int_E y^3 e(y) dy \right) x^3$$

これが、 $\lambda e(x)$  と等しい。

$$\begin{cases} \int_E (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3) dy = \lambda a_0 \\ 3 \int_E y (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3) dy = \lambda a_1 \\ 3 \int_E y^2 (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3) dy = \lambda a_2 \\ \int_E y^3 (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3) dy = \lambda a_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \int_E dy & \int_E y dy & \int_E y^2 dy & \int_E y^3 dy \\ 3 \int_E y dy & 3 \int_E y^2 dy & 3 \int_E y^3 dy & 3 \int_E y^4 dy \\ 3 \int_E y^2 dy & 3 \int_E y^3 dy & 3 \int_E y^4 dy & 3 \int_E y^5 dy \\ \int_E y^3 dy & \int_E y^4 dy & \int_E y^5 dy & \int_E y^6 dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

この固有方程式を解けば  $a_i$

42.

\*\*\*\*問題42 (Fを出力するとき、入力iは不要であると判断した。) \*\*\*\*

```

from typing import Callable

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def eigen_functions_from_kernel(
    x: np.ndarray,
    k: Callable[[np.ndarray, np.ndarray], float],
) -> Callable[[np.ndarray, int], float]:
    """例62のプログラムの一部"""
    m = x.shape[0]
    K = np.zeros((m, m))
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            K[i, j] = k(x[i], x[j])
    values, vectors = np.linalg.eigh(K)
    alpha = np.zeros((m, m))
    for i in range(m):
        alpha[:, i] = vectors[:, i] * np.sqrt(m) / (values[i] + 1e-16)

    def F(y: np.ndarray, i: int) -> float:
        """Function F."""
        S = 0
        for j in range(m):
            S += alpha[j, i] * k(x[i], y)
        return S

    return F

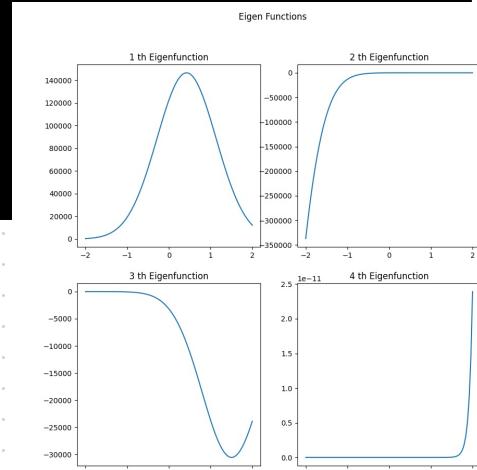
if __name__ == "__main__":
    from pathlib import Path
    # カーネルの定義
    sigma = 1
    def k(x: np.ndarray, y: np.ndarray) -> float:
        """Gaussian kernel."""
        return np.exp(-(x - y)**2 / sigma**2)

    # サンプルの発生
    m = 300
    rs = np.random.RandomState(42)
    x = rs.randn(m) - 2 * rs.randn(m)**2 + 3 * rs.randn(m)**3

    # 実行
    eig_functions = eigen_functions_from_kernel(x, k)
    w = np.linspace(-2, 2, 100)
    fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(10, 10))
    for i, ax in enumerate(axs.flat):
        ax.plot(w, eig_functions(w, i))
        ax.set_title(f"{i+1} th Eigenfunction")
    plt.suptitle("Eigen Functions")
    out_dir = Path("src/exercise/Chap3/out/problem42")
    out_dir.mkdir(parents=True, exist_ok=True)
    plt.savefig(Path(out_dir, "eigenfunctions.png"))
    plt.close()

```

↑  
2つ目  
実行結果 →



43.

```
****問題43****
from typing import Callable

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

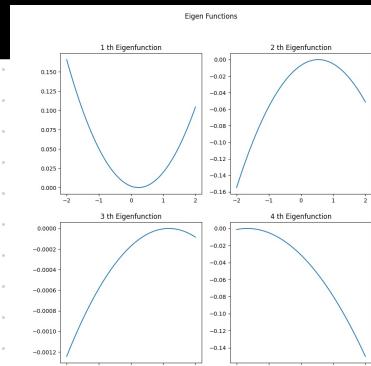
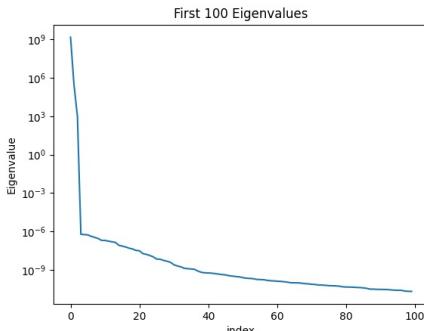
def eigen_values_functions_from_kernel(
    x: np.ndarray,
    k: Callable[[np.ndarray, np.ndarray], float],
) -> tuple[np.ndarray, Callable[[np.ndarray, int], float]]:
    """例62のプログラムの一部"""
    m = x.shape[0]
    K = np.zeros((m, m))
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            K[i, j] = k(x[i], x[j])
    values, vectors = np.linalg.eigh(K)
    alpha = np.zeros((m, m))
    for i in range(m):
        alpha[:, i] = vectors[:, i] * np.sqrt(m) / (values[i] + 1e-16)

    def F(y: np.ndarray, i: int) -> float:
        """Function F."""
        S = 0
        for j in range(m):
            S += alpha[j, i] * k(x[i], y)
        return S

    return values, F

if __name__ == "__main__":
    from pathlib import Path
    # カーネルの定義
    def k(x: np.ndarray, y: np.ndarray) -> float:
        """Gaussian kernel."""
        return (1 + np.dot(x, y)) ** 2
    # サンプルの発生
    m = 1000
    rs = np.random.RandomState(42)
    x = rs.randn(m) - 2 * rs.randn(m)**2 + 3 * rs.randn(m)**3

    # 実行
    eigenvalues, eigfunctions = eigen_values_functions_from_kernel(x, k)
    eigenvalues = np.flip(eigenvalues)
    # 固有値のプロット
    plt.plot(eigenvalues[:100])
    plt.title("First 100 Eigenvalues")
    plt.xlabel("index")
    plt.ylabel("Eigenvalue")
    plt.yscale("log")
    out_dir = Path("src/exercise/Chap3/out/problem43")
    out_dir.mkdir(parents=True, exist_ok=True)
    plt.savefig(Path(out_dir, "eigenvalues.png"))
    plt.close()
    w = np.linspace(-2, 2, 100)
    fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(10, 10))
    for i, ax in enumerate(axes.flat):
        ax.plot(w, eigfunctions(w, i))
        ax.set_title(f"{i+1} th Eigenfunction")
    plt.suptitle("Eigen Functions")
    plt.savefig(Path(out_dir, "eigenfunctions.png"))
    plt.close()
```



$$44. \phi_i(\cdot) = \frac{\sqrt{m}}{\lambda_i^{(m)}} \sum_{j=1}^m K(x_j, \cdot) U_{j,i}$$

$$\left( T_i T_i^* L, K_m \sqcup = \sqcup \Delta, \Delta = \text{diag}(\lambda_1^{(m)}, \dots, \lambda_m^{(m)}), \right)$$

$$\lambda_i^{(m)} = m \lambda_i, \phi_i(x_j) = \sqrt{m} U_{j,i}$$

∴ 7.12.

$$\phi_i(\cdot) = \frac{1}{m \lambda_i} \sum_{j=1}^m K(x_j, \cdot) \phi_i(x_j)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i \phi_i(\cdot) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m K(x_j, \cdot) \phi_i(x_j)$$

が成り立つ。Y 矢量入力すれば、(3.18) の解説を参考して、  
2 次元の場合は、

左辺、右辺

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sqrt{m} U_{i,j} \cdot \sqrt{m} U_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^m U_{i,j} U_{i,k} \\ &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

である。

$$45. \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j^2}{\lambda_j} < \infty \text{ は, } \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 < \infty \text{ と等価な}.$$

であるため、命題42の主張は成り立つ。

$\frac{1}{\lambda_j}$  の最小値 ( $\min_j \frac{1}{\lambda_j}$ ) を  $C$  とするとき、

$$C \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j^2}{\lambda_j} < \infty$$

が成立する。よって、 $C$  は正の定数である。

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 < \infty \text{ が成り立つ。}$$