16. (a), (b), (c) は閉集合

(d) は閉集合でない。

(d) の集合の閉包は、

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ である。

17. $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$ …(☆)

(☆)と、$a_1 = 1$ より、任意の n に対して、$a_n > 0$ である。

また、(☆)について、$a_n > 0$ $\forall n$ と相加平均と相乗平均の関係から、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_n \cdot \frac{1}{a_n}}$$

$$= \sqrt{2}$$

が成り立つ。

よって、$a_n \geqq \sqrt{2}$ であるので、$\{a_n\}$ は下に有界である。…①

また、$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}a_n$

$$= \frac{2-a_n^2}{2a_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+a_n)(\sqrt{2}-a_n)}{2a_n}$$

$$\leqq 0 \quad (\because a_n \geqq \sqrt{2})$$

よって、$a_{n+1} \leqq a_n$ である。…②

①、②より、$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であるので、収束する。

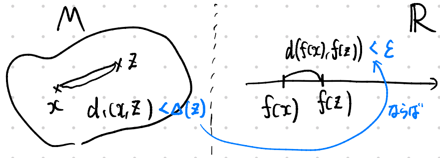
収束先を α とすると、

$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha}$ が成り立つため、$\alpha = \sqrt{2}$ である。

よって、$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ である。

□

18. (a). 命題7より、

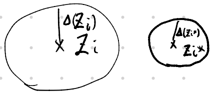


M はコンパクトである。

すなわち、集合 M の各点 p_i に近傍を対応させる $U(\cdot)$ を任意に設定したときに、$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(p_i)$ を満たす添字 $i=1,\dots,m$ が存在する。

この近傍 U_i の取り方は任意であるので、題意は示せた ∎

(b).

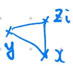


$x, z_i \in U_i \subset M$ であるので、

$$d_1(x,z_i) < \delta = \frac{1}{2}\min_{1\le i\le m}\Delta(z_i) \underset{\text{min 以上}}{\le} \frac{1}{2}\Delta(z_i) \underset{\Delta(z_i)>0}{<} \Delta(z_i)$$ である。

よって、$d_1(x,z_i) < \frac{1}{2}\Delta(z_i) < \Delta(z_i)$

(c). $$d_1(y,z_i) \underset{\text{三角不等式}}{\le} d_1(x,y)+d_1(x,z_i) \underset{x,y\text{の定義と(b).}}{<} \frac{1}{2}\Delta(z_i)+\frac{1}{2}\Delta(z_i) = \Delta(z_i)$$



(d). $d_2(f(x),f(y)) \le d_2(f(x),f(z_i)) + d_2(f(y),f(z_i))$ (∵ d_2についての三角不等式)

$< \varepsilon+\varepsilon$ (∵ (b),(c)より、$x, y\in U_i$ なので、$\Delta(z)$の定義より)

$= 2\varepsilon$.

(e). $\varepsilon>0$ は任意であり、δ は x,y に依存しないので、

x,y の定義と、(d)より、f は一様連続である。∎

19. f を閉区間$[0,1]$で連続な関数とする。さらに、
$x_i := \frac{i}{n}$ $(i=0,\dots,n)$ とする。このとき、任意の $\varepsilon>0$ に対して、

$$\Delta := \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sup_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \inf_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)\right) < \varepsilon \quad \cdots (※)$$

を言えれば、f は積分可能となる。

ここで、fは有界閉集合$[0,1]$で連続な関数なので、一様連続である。
よって、$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, $x,y\in[x_{i-1},x_i]$ を要請されれば、各区間で、
$\delta := x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$ を小さく(すなわち、nを大きく)すればよい。そのようにして、Δを任意の$\varepsilon>0$以内にすることができる　□

20. Vを線形空間とする。このとき、任意の$x, y \in V$, $t \in \mathbb{R}$について、

$$0 \leq \|x+ty\|^2 = \langle x+ty, x+ty \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$$

ここで、tに関する判別式から

$$|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \iff |\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$ である。

また、等号成立は、

$\|x+ty\|^2 = 0 \iff x+ty=0$ が成り立つときである。

このtを$-a$で置き換えれば、$x = ay$である。

$\boxed{証}$

21. (多元環であることの証明)

1変数多項式環を $\mathbb{R}[x] := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ とする。
このとき、$f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ とする。すなわち、

$$f = \sum_{i=0}^{I} a_i x^i,\ g = \sum_{j=0}^{J} b_j x^j,\ h = \sum_{k=0}^{K} c_k x^k \quad \text{とする。}$$

このとき、

加算を $f + g = \sum_{l=0}^{\max(I,J)} (a_l + b_l) x^l$ (ただし、短い方については、係数0で桁のないように延ばす。)

乗算を $f \cdot g = \sum_{l=0}^{I+J} \left(\sum_{i+j=l} a_i b_j \right) x^l$ で定義する。

和が l となるように、$0 \leq i \leq I$, $0 \leq j \leq J$ の範囲で i と j を動かす。

乗算については、定義より可換である。すなわち、$f \cdot g = g \cdot f$ であることが分かる。
よって、$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$ … ① と $\alpha \in \mathbb{R}$ として、

$\alpha (f \cdot g) = (\alpha f) \cdot g$ … ② を示せば、$\mathbb{R}[x]$ は多元環となる。

(①).
$$\begin{aligned}
f \cdot (g + h) &= f \cdot \left(\sum_{j=0}^{J} b_j x^j + \sum_{k=0}^{K} c_k x^k \right) \\
&= f \cdot \left(\sum_{l=0}^{\max(J,K)} (b_l + c_l) x^l \right) \\
&= \sum_{m=0}^{I+\max(J,K)} \left(\sum_{i+l=m} a_i (b_l + c_l) \right) x^m \\
&= \sum_{m=0}^{I+\max(J,K)} \left(\sum_{i+l=m} a_i b_l \right) x^m + \sum_{m=0}^{I+\max(J,K)} \left(\sum_{i+l=m} a_i c_l \right) x^m \\
&= \sum_{m=0}^{I+J} \left(\sum_{i+l=m} a_i b_l \right) x^m + \sum_{m=0}^{I+K} \left(\sum_{i+l=m} a_i c_l \right) x^m
\end{aligned}$$

($\because$ 短い方は係数0で埋まっている。)

$$= f \cdot g + f \cdot h$$

(②).
$$\begin{aligned}
\alpha (f \cdot g) &= \alpha \left(\sum_{l=0}^{I+J} \left(\sum_{i+j=l} a_i b_j \right) x^l \right) \\
&= \sum_{l=0}^{I+J} \left(\sum_{i+j=l} \alpha a_i b_j \right) x^l \\
&= \sum_{l=0}^{I+J} \left(\sum_{i+j=l} (\alpha a_i) b_j \right) x^l \\
&= (\alpha f) \cdot g.
\end{aligned}$$

以上より、①と②が成立するので、$\mathbb{R}[x]$ は多元環である。 ☒

21.（続き；一様ノルムに対して稠密であることの証明）

$E := [0, 1]$ とすると、E は有界閉集合であるので、命題7から、

E はコンパクトである。また、$\mathbb{R}[x]$ は多元環である。

さらに、命題12の条件について、

(1) $f = 1 \in \mathbb{R}[x]$ を考えると、$f(x) = 0$ を満たす $x \in E$ が存在しないことが
定数関数
分かる。（このfにより(1)は成立）

(2) $x, y \in E$ に対して、$f(x) = x \in \mathbb{R}[x]$ とする。

このとき、$x \neq y$ であれば、$f(x) \neq f(y)$ である。
（このfにより、(2)は成立）

よって、命題12の条件が満たされているので、
E における x に関する多項式 $f(x)$ の集合は
$C(E)$ において、一様ノルムに関して稠密である。 $\blacksquare$

22、

命題 14 の証明

$\{f_n\}$ が L^2 の Cauchy 列，すなわち

(a)

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{m,n\geq N}\|f_m-f_n\|_2=0 \tag{2.18}$$

であると仮定すると，

(b)

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\right\|_2\leq\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_2<\infty$$

なる列 $\{n_k\}$ が存在する。すなわち，ほとんど至るところで，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<\infty \tag{2.19}$$

が成立する。任意の $r<t$ と $x\in E$ について，三角不等式から

(c)

$$|f_{n_r}(x)-f_{n_t}(x)|\leq\sum_{k=r}^{t-1}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|$$

が成立する。これと (2.19) より，ほとんど至るところで，実数列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ が Cauchy 列になる。実数全体は完備（命題 6）であるので，その収束先を $f(x)$ とおき，Cauchy 列にならない x については $f(x)=0$ とおくことにする。そして，任意の $\epsilon>0$ について，n を十分大きくとると，(2.18) より

(d)

$$\|f-f_n\|_2=\int_E|f_n-f|^2d\mu=\int_E\liminf_{k\to\infty}|f_n-f_{n_k}|^2d\mu\leq\liminf_{k\to\infty}\int_E|f_n-f_{n_k}|^2d\mu<\epsilon$$

とできる。ただし，最初の不等式は Fatou の補題によった。また，$f_n, f-f_n\in L^2$ かつ L^2 は線形空間であり，$f\in L^2$ となる。 □

23. $\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right) dx$$

$$= 0.$$

$$\left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right) dx$$

$$= \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = 1,$

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \cos nx \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = 0,$

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \sin mx \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \sin mx \, dx = 0.$

以上より，フーリエ級数の基底は正規直交． ∎

24.

命題 19 の証明

M を H における閉部分空間であるとする。各 $x \in H$ について，$\|x-y\|$ を最小にする y は一意であって，すべての $z \in M$ について

$$\langle x-y, z-y\rangle \le 0 \tag{2.20}$$

を満足することを示す。まず

$$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|^2 = \inf_{y\in M}\|x-y\|^2 \tag{2.21}$$

なる M の列 $\{y_n\}$ が Cauchy 列であることを示す。M は線形空間であるので，$(y_n+y_m)/2 \in M$ であって

$$\|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\underbrace{\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2}_{\text{VI }(\because \inf)} \quad (\because 中線定理)$$

$$\le 2\underbrace{\|x-y_n\|^2}_{\to \inf_{y\in M}\|x-y\|^2 \text{ as } n\to\infty} + 2\underbrace{\|x-y_m\|^2}_{\to \inf_{y\in M}\|x-y\|^2 \text{ as } m\to\infty} - 4\inf_{y\in M}\|x-y\|^2 \to 0 \quad (\text{as } n\to\infty, m\to\infty)$$

が成立し，$\{y_n\}$ は Cauchy 列である。そして，下限となる y が複数あると仮定し，それらを $u \ne v$ とおくと，たとえば $y_{2m-1}\to u$，$y_{2m}\to v$ なる $\{y_n\}$ も (2.21) を満足するが，Cauchy 列にはならないので，これまでの議論と矛盾する。したがって，下限となる y は一意である。以下では，y がその下限であるとする。

次に，任意の $0<a<1$ と $z\in M$ に対して，

$$\|x-\{az+(1-a)y\}\|^2 \ge \|x-y\|^2 \iff 2a\langle x-y, z-y\rangle \le a^2\|z-y\|^2$$

が成立する。このことより，$\langle x-y, z-y\rangle > 0$ であれば，十分小さな a に対して不等式が逆転して矛盾する。

最後に，(2.20) に $z=0, 2y$ を代入すると，$\langle x-y, y\rangle = 0$ が得られる。したがって，(2.20) は，任意の $z\in M$ について，$\langle x-y, z\rangle \le 0$ を意味する。そして，z の代わりに $-z$ を代入して，命題が得られる。 □

(a) (b) (c) (d) (e)

(a): 書き込んでいる.

(b): 式変形するだけ.

$$\|x-\{az+(1-a)y\}\|^2 = \|(x-y)+a(y-z)\|^2$$
$$= \|x-y\|^2 + 2a\langle x-y, y-z\rangle + a^2\|y-z\|^2$$

より，$\|x-\{az+(1-a)y\}\|^2 \ge \|x-y\|^2$

$$\iff \|x-y\|^2 + 2a\langle x-y, y-z\rangle + a^2\|y-z\|^2 \ge \|x-y\|^2$$
$$\iff 2a\langle x-y, y-z\rangle \ge -a^2\|y-z\|^2$$
$$\iff 2a\langle x-y, z-y\rangle \le a^2\|y-z\|^2 = a^2\|z-y\|^2.$$

(c) a は，x, y, z に依存しないことから，矛盾を導ける。

(d) $z=0$: $\langle x-y, -y\rangle \le 0$，$z=2y$: $\langle x-y, y\rangle \le 0$ より，$0 \le \langle x-y, y\rangle \le 0 \iff \langle x-y, y\rangle = 0$，

これは，$\forall z\in M$，$\langle x-y, z\rangle \le 0$ を意味する。($\because$ 2.20)

(e) $\langle x-y, z\rangle \le 0$ かつ $\langle x-y, -z\rangle \le 0$ より，$\langle x-y, z\rangle = 0$.

25. $T_1, T_2 \in B(X_1, X_2)$ とする。

このとき、$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ を示す。ここで、$\|\bullet\|$ は作用素ノルムである。

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in X_1, \|x\|_1 = 1} \|(T_1 + T_2)x\|_2$$

$$= \sup_{x \in X_1, \|x\|_1 = 1} \|T_1 x + T_2 x\|_2$$

$$\leq \sup_{x \in X_1, \|x\|_1 = 1} \left(\|T_1 x\|_2 + \|T_2 x\|_2\right)$$ ($\because$ $\|\bullet\|_2$ はノルム)

$$= \sup_{x \in X_1, \|x\|_1 = 1} \|T_1 x\|_2 + \sup_{x \in X_1, \|x\|_1 = 1} \|T_2 x\|_2$$

$$= \|T_1\| + \|T_2\|$$

よって、$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ 㱏

26. (有界な線形作用素であることの証明)

$$\left|(Tf)(x)\right|^2 = \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy\right|^2 \quad (\because 積分作用素の定義 (2.13))$$

$$\leq \int_0^1 |K(x,y)f(y)|^2 dy$$

$$= \int_0^1 (K(x,y))^2 (f(y))^2 dy$$

$$= \left|\int_0^1 (K(x,y))^2 (f(y))^2 dy\right|$$

$$\leq \int_0^1 (K(x,y))^2 dy \int_0^1 (f(y))^2 dy \quad (\because \text{Cauchy-Schwarz})$$

$$= \|f\|_2^2 \int_0^1 (K(x,y))^2 dy$$

より、

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^1 |(Tf)(x)|^2 dx$$

$$\leq \|f\|_2^2 \int_0^1 \int_0^1 (K(x,y))^2 dx\,dy$$

$$< \infty \qquad \left(\because \int_0^1\int_0^1 K(x,y))^2 dx\,dy \text{ は有限値}\right).$$

なので、積分作用素 (2.13) は有界である。 ☆

また、$f, g \in L^2[0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ として、

$$(T(f+g))(\cdot) = \int_0^1 K(\cdot,x)(f(x)+g(x))\,dx$$

$$= \int_0^1 K(\cdot,x)f(x)\,dx + \int_0^1 K(\cdot,x)g(x)\,dx$$

$$= (Tf)(\cdot) + (Tg)(\cdot)$$

$$(T(\alpha f))(\cdot) = \int_0^1 K(\cdot,x)(\alpha f(x))\,dx$$

$$= \alpha \int_0^1 K(\cdot,x) f(x)\,dx$$

$$= \alpha (Tf)(\cdot)$$

なので、積分作用素 (2.13) は線形である。 ☆

合わせて証明完了。

□

26. (自己共役であることの証明).

また, Kが対称, すなわち, $K(x,y)=K(y,x)$ が成り立つとすると,

$$
\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_0^1\int_0^1 K(x,y)f(x)g(y)\,dx\,dy \\
&= \left\langle f, \int_0^1 K(y,\cdot)\, g(y)\,dy\right\rangle \quad (\because \text{Fubini の定理}) \\
&= \left\langle f, \int_0^1 K(\cdot,y)\, g(y)\,dy\right\rangle \quad (\because K \text{が対称}) \\
&= \langle f, Tg\rangle
\end{aligned}
$$

よって, T は 自己共役である。

27. 距離空間(M,d)で、$E\subseteq M$が点列コンパクトであることと、Eがコンパクトであることは同値であるので、ここでは、Eが点列コンパクトでないことのみを示す。

(a). 点列$\{a_n\}=\{1-\frac{1}{n}\}\subset E$について考える。

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \notin E$であり、この無限列は$E$の要素に収束する部分列をもたないので、$E=[0,1)$は点列コンパクトでない。

(b). $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}$ $(n\geq 1)$により定まる無限列について考える。このとき、$\{a_n\}\subset \mathbb{Q}$である。一方、$a_n\to\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$（問題17）である。

よって、$E=\mathbb{Q}$は点列コンパクトでない。

28.

命題 27 の証明

最初に，

トル

$$(\mathrm{Ker}(T))^{\cancel{\perp}} = (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp} \tag{2.23}$$

(a)

を示す。$x_1 \in \mathrm{Ker}(T)$，$x_2 \in H$ について $\langle x_1, T^*x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = 0$ とでき，x_1 は $\mathrm{Im}(T^*)$ のどの要素とも直交するので，

$$\mathrm{Ker}(T) \subseteq (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp} \quad (\because x_1 \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow x_1 \in \mathrm{Im}(T^*))$$

が成立する。また，$x_1 \in (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp}$ であれば，$T^*(Tx_1) \in \mathrm{Im}(T^*)$ であるので，

$$\|Tx_1\|_2 = \langle x_1, T^*Tx_1\rangle_1 = 0$$

より，$x_1 \in \mathrm{Ker}(T)$ となり，逆側の包含関係も示され，(2.23) が示された。さらに，命題 20 の (3) を適用すると，$(x_1 \in (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp} \Rightarrow x_1 \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T^*)^{\perp} \subseteq \mathrm{Ker}(T))$

両辺 perp をとる。

$$(\mathrm{Ker}(T))^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$$

が成立する。$\mathrm{Ker}(T)$ は H の部分集合 $\mathrm{Im}(T^*)$ の直交補空間であって，命題 20 の (1) および (2.11) が適用できる。そして，$T \in B(H)$ が自己共役 ($T^* = T$) であることから，(2.23) はさらに，

$$H = \mathrm{Ker}(T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(T)}$$

$$(\because H = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\underbrace{T^*}_{=T})})$$

と書ける。

したがって，(2.16) を示すには，次式を示せば十分である。

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = \overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}} \tag{2.24}$$

有限の $n = 1, 2, \ldots$ と $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ について，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1} c_j e_j\right) \quad (\Leftrightarrow v \in \mathrm{span}\{e_i \mid i \geq 1\} \Rightarrow v \in \mathrm{Im}(T))$$

(b)

であって，$\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\} \subseteq \mathrm{Im}(T)$ が成立する。両辺で閉包をとっても包含関係は逆転しないので，$\overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}} \subseteq \overline{\mathrm{Im}(T)}$ が示された。また，(2.11) より，

(b) 以降が (c)

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = \overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}} \oplus N$$

というように分解できる。ただし，$N = \overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}}^{\perp} \cap \overline{\mathrm{Im}(T)}$ である。そして，$y \in \mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}$ に対して $Ty \in \mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}$，また，$T$ が自己共役であるので，$x \in N$ に対して，

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$$

すなわち，$Tx \in N$ が成り立つ。

次に，一般に

$$\|T\| = w(T) := \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \tag{2.25}$$

が成立することに注意する。

(2.25) の proof

T が自己共役より，$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

$$\begin{aligned}
|\langle Tx, y\rangle| &= \left|\frac{1}{4}\langle T(x+y), x+y\rangle - \frac{1}{4}\langle T(x-y), x-y\rangle\right| \\
&\leq \frac{1}{4}|\langle T(x+y), x+y\rangle| + \frac{1}{4}|\langle T(x-y), x-y\rangle| \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{1}{4}w(T)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}w(T)(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

$w(T)$ の定義 (sup)

となり，この両辺について，$\|x\| = \|y\| = 1$ のもとで上限をとると，

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\left\langle Tx, \overbrace{\frac{Tx}{\|Tx\|}}^{\text{ノルム}1}\right\rangle \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle Tx, y\rangle \leq w(T)$$

sup で y も $\|y\|=1$ で動かすので，小さくならない。

他方

$$w(T) \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \cdot \|x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\|$$

が成立し，(2.25) が成立する。

また，$\pm\|T\|$ のいずれかが T の固有値になることがわかる。実際，(2.25) より，$\langle Tx_n, x_n\rangle \to \|T\|$ もしくは $\langle Tx_n, x_n\rangle \to -\|T\|$ となる H の列 $\{x_n\}$ で $\|x_n\| = 1$ となるものが存在する（上限，下限は，その集合の集積点になる）。前者の場合，

(2.25) はこの部分を示すのに必要。特に下線を引いた命題を言っている。

$$0 \leq \|Tx_n - \|T\|x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 + \|T\|^2\|x_n\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$$

と T のコンパクト性から $Tx_n \to y \in H$ なる $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在し，$Tx_{n_k} - \|T\|x_{n_k} \to 0$ より，$\|T\|x_{n_k} \to \|T\|x$ なる $0 \neq x \in H$ が存在する。$\|T\|x = y = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k}$ より，$Tx = \|T\|x$ が成立し，$\|T\|$ が T の固有値である。後者の場合，$-\|T\|$ が T の固有値となる。

最後に，$\|Tx\| \neq 0$ となる $x \in N$ が存在すると仮定する。T_N を T の N への制限とすると，$\|T_N\| > 0$ となるが，$\|T_N\|$ または $-\|T_N\|$ が T の固有値となり，N 上の固有ベクトルが存在するため，$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ の決め方に矛盾。したがって，$x \in N$ のとき，$Tx = 0$ となり，これは $N \subseteq \overline{\mathrm{Im}(T)} \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ を意味するため，(2.16) が示された。 □

よって (b) の結果と合わせて，$\overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}} = \overline{\mathrm{Im}(T)}$ である。

これは，$x \in N \subseteq \overline{\mathrm{Im}(T)} \cap \mathrm{Ker}(T) \subset \overline{\mathrm{Im}(T)} \Rightarrow x \in \overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j \geq 1\}} \supseteq \overline{\mathrm{Im}(T)}$ を意味している。

29. (HS ノルム)

$T_1, T_2 \in B(H_1, H_2)$ として、

$\|T_1+T_2\|_{HS} \leq \|T_1\|_{HS} + \|T_2\|_{HS}$ を示す。

$$\|T_1+T_2\|_{HS} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|(T_1+T_2)e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ ($\{e_i\}$：正規直交基底)

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_1 e_i + T_2 e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\|T_1 e_i\|_2^2 + \|T_2 e_i\|_2^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_1 e_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \|T_2 e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_1 e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_2 e_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

($\because$ $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$)

$$= \|T_1\|_{HS} + \|T_2\|_{HS}$$

($\because$ 命題29より、HS ノルムは正規直交基底のとり方に依らない)

$\boxtimes$

29. (トレースノルム)

$T_1, T_2 \in B(H)$ として、

$\|T_1+T_2\|_{TR} \leq \|T_1\|_{TR} + \|T_2\|_{TR}$ を示す。

$$\|T_1+T_2\|_{TR} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle (T_1+T_2)e_j, e_j \rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_1 e_j + T_2 e_j, e_j \rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\langle T_1 e_j, e_j \rangle + \langle T_2 e_j, e_j \rangle \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_1 e_j, e_j \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_2 e_j, e_j \rangle$$
$$= \|T_1\|_{TR} + \|T_2\|_{TR}$$

(∵ トレースノルムは正規直交基底のとり方に依らない)

$\boxtimes$

30. $T \in B(H)$ をトレースクラスとして,

(λ_j, e_j) を T の固有対とする。$(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$

このとき, $Te_j = \lambda e_j$ が成り立つ。

よって, $\|T\|_{TR} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Te_j, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ となる。

また, $\|T\|_{HS}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_1 \lambda_j$

λ_1 : 最大固有値, $\lambda_j \geq 0 \ \forall j$

なので, $\|T\|_{HS} \leq \left(\lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\right)^{\frac{1}{2}}$ $(\because)$

$$= \sqrt{\lambda_1 \|T\|_{TR}}$$

が成り立つ。よって, $\|T\|_{HS}$ は有限であるので, T は HS クラスである。

すなわち, $T \in B(H)$ がトレースクラスならば, T は HS クラスである。

よって, HS作用素がコンパクトである(命題30)ことから,

$T \in B(H)$ がトレースクラスであれば, T はコンパクトである。□