最短路問題と動的計画法

2023 年度前期 輪読会 #12

髙橋 優輝

2023.5.25

システム数理学講座 M1

目次

1. 動的計画法
    - 最適性の原理と動的計画法
    - 例題
    - コスト最小弾性マッチング問題
2. 最短路問題
    - 用語の定義と最適性の原理
    - 辺の長さが非負のとき
    - 辺の長さが実数のとき
    - 全点対最短路問題

動的計画法

動的計画法

- 効率的に最適解を求める手法の 1 つ
- アイディア
  - 最適になりうる組み合わせ以外を除外して最適な組み合わせを探索する
- 前提
  - 最適性の原理
  - 最適な解は，その 1 部分をとってきても，対応する部分問題の最適解になっている
- 例
  - 最短路問題 $\longrightarrow$7 章
  - コスト最小弾性マッチング問題 $\longrightarrow$8 章
  - ナップサック問題 $\longrightarrow$16 章

動的計画法

最適性の原理と動的計画法

Definition 1.1 (最適性の原理)

次の性質を最適性の原理という：
最適解は，その一部分だけに注目しても，それ自身が対応する小問題の最適解になっている

最適性の原理が成り立つ場面では，小問題の最適解を積み重ねることによって，大問題の最適解を得ることができる．この方針で最適化問題を解く技法を**動的計画法**という．

最適性の原理が成り立つ例）

- 最短路問題 (後で適切な用語を導入した後に証明する)
  - 最短路の一部はやはり最短路である

動的計画法

例題

例）EDPC-A (https://atcoder.jp/contests/dp/tasks/dp_a)

問題文

N 個の足場があります。足場には $1, 2, \ldots, N$ と番号が振られています。各 $i\,(1 \leq i \leq N)$ について、足場 i の高さは h_i です。

最初、足場 1 にカエルがいます。カエルは次の行動を何回か繰り返し、足場 N まで辿り着こうとしています。

- 足場 i にいるとき、足場 $i+1$ または $i+2$ へジャンプする。このとき、ジャンプ先の足場を j とすると、コスト $|h_i - h_j|$ を支払う。

カエルが足場 N に辿り着くまでに支払うコストの総和の最小値を求めてください。

制約

- 入力はすべて整数である。
- $2 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq h_i \leq 10^4$

例）EDPC-A (https://atcoder.jp/contests/dp/tasks/dp_a)

問題文

N 個の足場があります。足場には $1, 2, \ldots, N$ と番号が振られています。各 i $(1 \leq i \leq N)$ について、足場 i の高さは h_i です。

最初、足場 1 にカエルがいます。カエルは次の行動を何回か繰り返し、足場 N まで辿り着こうとしています。

- 足場 i にいるとき、足場 $i+1$ または $i+2$ へジャンプする。このとき、ジャンプ先の足場を j とすると、コスト $|h_i - h_j|$ を支払う。

カエルが足場 N に辿り着くまでに支払うコストの総和の最小値を求めてください。

制約

- 入力はすべて整数である。
- $2 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq h_i \leq 10^4$

$dp[i] :=$（足場 i に辿り着くまでの最小コスト）とする．

足場 i に辿り着くには，足場 $i-2$ からコスト $|h_i - h_{i-2}|$ を払うか，足場 $i-1$ からコスト $|h_i - h_{i-1}|$ を払うか，のどちらかしかない．

よって，

$$dp[i] \leftarrow \min\{dp[i-2] + |h_i - h_{i-2}|, dp[i-1] + |h_i - h_{i-1}|\}$$

とインデックスの小さい順に更新すれば，$dp[N]$ が最適解となる．計算量は $O(N)$.

動的計画法

コスト最小弾性マッチング問題

弾性マッチング

Definition 1.2 (弾性マッチング)

列 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ と列 $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ について，これらの列の要素の対 (a_i, b_j) の集合 T が次の条件を満たすとき，T を A と B の弾性マッチングという．

1. 2 つの列の各要素は T の中の少なくとも 1 つの対に含まれる．
2. T の中の対は列の順序を乱さない．すなわち，$(a_i, b_j), (a_k, b_l) \in T$ でかつ $i < k$ ならば $j \leq l$ が成り立つ．

弾性マッチングの例

コスト最小弾性マッチング問題

Definition 1.3 (コスト最小弾性マッチング問題)

Input:

- 列 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$
- 列 $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$
- 要素の対 (a_i, b_j) に対応するコスト $c(a_i, b_j) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Output: A と B の弾性マッチング T で，コスト

$$\sum_{(a_i, b_j) \in T} c(a_i, b_j)$$

の最小のもの

画像処理や信号処理の分野に応用可能．

コスト最小弾性マッチング問題の解法

$dp[i][j] \coloneqq \big((a_1, a_2, \ldots, a_i)$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_j)$ のコスト最小弾性マッチングのコスト $\big)$

このとき，i, j の小さい順に次のように更新すれば良い．

$$dp[i][j] \leftarrow \min\{dp[i-1][j-1], dp[i-1][j], dp[i][j-1]\} + c(a_i, b_j)$$

最小コストは $dp[m][n]$ であり，それを実現する弾性マッチングは $dp[m][n]$ から適切に遡ることで求めることができる．（下図）計算量は $O(mn)$.

dp の遷移

最短路問題

最短路問題

用語の定義と最適性の原理

有向グラフと有向路

Definition 2.1 (有向グラフ)

向きのついた辺を有向辺と呼び，有向辺 e が頂点 u から頂点 v へ向かう辺であることを $e=(u,v)$ と表す．$e=(u,v)$ に対し，u をこの辺の始点，v をこの辺の終点という．有向辺の集合を E で表し，E を辺集合に持つグラフを $G=(V,E)$ と表す．このように，辺に向きの指定がされたグラフを有向グラフという．

Definition 2.2 (有向路)

有向辺の列 $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ を有向路という．

Definition 2.3 (有向路の長さ)

有向グラフ $G=(V,E)$ の各辺に長さ $l(e)(e \in E)$ が与えられたとき，G の有向路 P の長さ $l(P)$ を P に含まれる辺の長さの総和 $\sum_{e \in P} l(e)$ と定義する．また，辺 $e=(u,v)$ の長さ $l(e)$ を $l(u,v)$ と表すこともある．

Definition 2.4 (最短路)

有向グラフ $G = (V, E)$ について，始点 $s \in V$ と終点 $t \in V$ が与えられたとき，s から t への長さ最小の有向路が存在すれば，それを s から t への最短路という．

Definition 2.5 (部分路)

有向路の一部分として含まれる有向路を部分路という．つまり，有向路

$$\big((v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\big)$$

に対して，その部分路とは，ある $i, j (0 \leq i \leq j \leq k)$ に対して，

$$\big((v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_{i+2}), \ldots, (v_{j-1}, v_j)\big)$$

と表される有向路のことである．

Definition 2.6 (単一始点全終点最短路問題)

Input:

- 有向グラフ $G = (V, E)$
- 辺の長さ $l \colon E \to \mathbb{R}$
- 始点 $s \in V$

Output: s からすべての頂点への最短路とその長さ
（ただし，s から各頂点への有向路が存在すると仮定する.）

教科書では無向グラフのみを扱っているが，今回の発表ではより一般の有向グラフを扱う．また，教科書では辺の長さは非負と仮定しているが，今回の発表では辺の重みが任意の実数の値をとる場合についても考える．

最短路問題は最適性の原理を満たす

Theorem 2.1 (最短路の部分路は最短路)

始点 s から終点 t への最短路 P が頂点 v を通るとし，s から v への部分路を P' とする．このとき，P' は s から v への最短路である．

proof

P' が s から v への最短路でないと仮定する．このとき，s から v への最短路 P'' で長さが P' より真に短いものが存在する．ここで，有向路 P において部分路 P' を P'' に置き換えて得られる新たな有向路 $\tilde{P}$ を考えると，$\tilde{P}$ は s から v を経由して t に至る有向路であり，$\tilde{P}$ の長さは P より真に短い．これは P が s から t への最短路であることに矛盾する． □

最短路問題は最適性の原理を満たすことが分かった．この事実より，動的計画法を用いて，最短路問題を解くことが可能である．

（実は，最短路問題のアルゴリズムを与えたベルマンが最適性の原理を提唱した．）

最適化問題での記述（単一始点単一終点最短路問題）

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{(i,j)\in E} l(i,j)x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i:(i,s)\in E} x_{is} - \sum_{j:(s,j)\in E} x_{sj} = -1 \\
& \sum_{i:(i,v)\in E} x_{iv} - \sum_{j:(v,j)\in E} x_{vj} = 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\
& \sum_{i:(i,t)\in E} x_{it} - \sum_{j:(t,j)\in E} = 1 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in E
\end{aligned}
$$

この問題は線形計画問題か？ $\longrightarrow$ No.

$x_{ij} \geq 0$ とすれば，線形計画問題となる．（このとき，最適値は元の問題以下となる．）

緩和 ver. の LP の双対問題の導出

$$
\begin{array}{rll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} l(i,j)x_{ij} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i:(i,s)\in E} x_{is} - \sum_{j:(s,j)\in E} x_{sj} = -1 & \\
& \displaystyle\sum_{i:(i,v)\in E} x_{iv} - \sum_{j:(v,j)\in E} x_{vj} = 0 & \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\
& \displaystyle\sum_{i:(i,t)\in E} x_{it} - \sum_{j:(t,j)\in E} \quad = 1 & \\
& {\color{red} x_{ij} \geq 0} & \forall (i,j) \in E
\end{array}
$$

制約式を上から，$p_s, p_v \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}, p_t (\in \mathbb{R})$ 倍して足し合わせる：

$$\sum_{(i,j)\in E} (p_j - p_i)x_{ij} = p_t - p_s$$

ここで，各 $(i,j) \in E$ に対して，$p_j - p_i \leq l(i,j)$ とすれば，$x_{ij} \geq 0$ より，

$$p_t - p_s = \sum_{(i,j)\in E} (p_j - p_i)x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in E} l(i,j)x_{ij}$$

緩和 ver. の LP の双対問題

よって，緩和 ver. の LP の双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & p_t - p_s \\ \text{subject to} \quad & p_j - p_i \leq l(i,j) \qquad \forall (i,j) \in E \end{aligned}$$

Definition 2.7 (ポテンシャル)

写像 $p\colon V \to R$ が次の式を満たすとき，p をポテンシャルという．

$$p(v) - p(u) \leq l(u,v) \qquad (\forall (u,v) \in E)$$

ポテンシャルを用いると次のように書ける．

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & p(t) - p(s) \\ \text{subject to} \quad & p \text{ はポテンシャル} \end{aligned}$$

最短路問題

辺の長さが非負のとき

Dijkstra 法

以下では，与えられた有向グラフにおいて始点 s から各頂点への有向路が存在すると仮定する．

辺の長さが非負であるとき，最短路問題は Dijkstra 法というアルゴリズムを用いて解ける．

Dijkstra 法において，$d\colon V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対し，$d(v)$ は $s \in V$ から v までのそれまでに見つかった有向路の長さの最小値もしくは $+\infty$ とする．また，$P(v)$ は空でなければ，長さ $d(v)$ の s から v の有向路を表すとする．

Dijkstra 法のアルゴリズム

Algorithm Dijkstra 法

Step 0 $d(s) \leftarrow 0; d(v) \leftarrow +\infty \quad \forall v \in V \setminus \{s\}; P(v) \leftarrow \emptyset \quad \forall v \in V; S \leftarrow V;$
（S は最短路が未確定の頂点の集合）

Step 1 S の要素の中で $d(v)$ の値が最小の頂点を $u(\in S \subset V)$ として，$S \leftarrow S \setminus \{u\};$

Step 2 **for** $(u, v) \in E$ **do** （頂点 u から出る辺について for-loop）

  if $v \in S$ **and** $d(v) > d(u) + l(u, v)$ **then**

    $d(v) \leftarrow d(u) + l(u, v);$

    $P(v) \leftarrow (P(u)$ の最後に (u, v) を追加したもの$);$

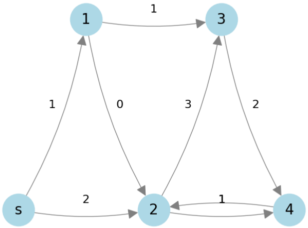
Step 3 **if** $S = \emptyset$ **then**

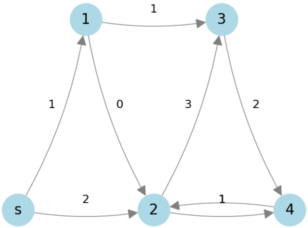
  report $d(v), P(v) \quad \forall v \in V;$

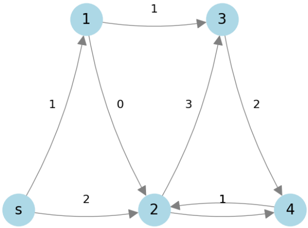
 else

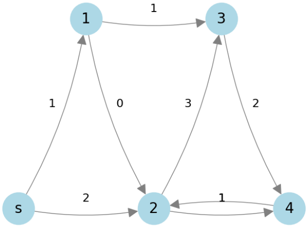
  Step 1 に戻る;

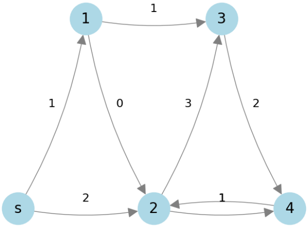
Dijkstra の適用例

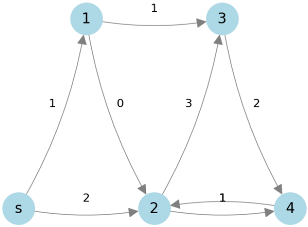












Dijkstra 法の正当性とその証明（概要）

Dijkstra 法について次の定理が成り立つ．

Theorem 2.2 (Dijkstra 法の正当性)

辺長が非負の最短路問題に対して，*Dijkstra* 法は始点から各頂点への最短路長および最短路を求める．

Theorem 2.2 を示すために，次の定理を示す．

Theorem 2.3 (Dijkstra 法の正当性を示すための定理)

Dijkstra 法の第 i 回目の反復の開始時における頂点 $v_j \in V$ の d の値を $d_i(v_j)$ と表し，ステップ *1* で選ばれる頂点を u_i とおく．このとき，各 $i = 1, \ldots, |V|$ に対して，*(i),(ii)* が成り立つ．

(i) $d_1(u_i) \geq d_2(u_i) \geq \cdots \geq d_i(u_i) = d_{i+1}(u_i) = \cdots = d_{|V|}(u_i)$

(ii) $d_i(u_i)$ の値は，s から u_i への最短路の長さに等しい．

Dijkstra 法の正当性とその証明 (i)

Theorem 2.4 (Theorem 2.3–(i)–)

Dijkstra 法の第 i 回目の反復の開始時における頂点 $v_j \in V$ の d の値を $d_i(v_j)$ と表し，ステップ *1* で選ばれる頂点を u_i とおく．このとき，各 $i = 1, \ldots, |V|$ に対して，次の式が成り立つ．

$$d_1(u_i) \geq d_2(u_i) \geq \cdots \geq d_i(u_i) = d_{i+1}(u_i) = \cdots = d_{|V|}(u_i)$$

proof.（不等式）

d の値は各反復の Step 2 で更新されるが，更新式より i に対して単調に減少する．このことから，$d_1(u_i) \geq d_2(u_i) \geq \cdots \geq d_i(u_i)$ が成り立つ． □

proof.（等式）

頂点 u_i に対する d の値は，第 i 回目の反復の Step 1 で選ばれた後，$u_i \notin S$ となるので更新されることはない．このことから，$d_i(u_i) = \cdots = d_{|V|}(u_i)$ が成り立つ． □

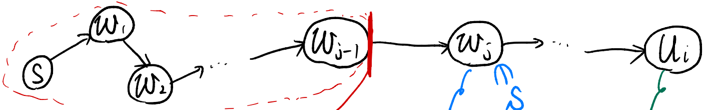
Dijkstra 法の正当性とその証明 (ii)

Theorem 2.5 (Theorem 2.3–(ii)–)

Dijkstra 法の第 i 回目の反復の開始時における頂点 $v_j \in V$ の d の値を $d_i(v_j)$ と表し，ステップ *1* で選ばれる頂点を u_i とおく．このとき，各 $i = 1, \ldots, |V|$ に対して，$d_i(u_i)$ の値は，s から u_i への最短路の長さに等しい．

証明

次ページに証明の概要を，次々ページから証明を示す．

$\hat{P}$: 

任意の有向路 to u_i

$\bar{S} := V \setminus S$

ここまでの部分路 : P'

$w_j \in S$：Sに属する頂点のうち, $\hat{P}$で最初に現れる頂点,

u_i：i回目のStep 1で選ばれる頂点,

① $\ell(P') \geq d_i(w_{j-1})$ (∵確定ずみ, 数学的帰納法の仮定)

② $d_i(w_j) \leq d_i(w_{j-1}) + \ell(w_{j-1}, w_j)$

(∵ ある $i'(<i)$ で, w_{j-1} はStep 1で選ばれており, そのとき, $d(w_j)$ は更新済
(その後さらに更新されているかもしれないので不等号).)

③ $\ell(\hat{P}) \geq \ell(P') + \ell(w_{j-1}, w_j)$

(∵ $P' \sqcup \{(w_{j-1}, w_j)\}$ は $\hat{P}$ の部分路かつ, 辺の重みは非負)

(∵ $w_j, u_i \in S$ かつ, u_i が i回目のStep 1で選ばれる)

以上より, $\ell(\hat{P}) \underset{③}{\geq} \ell(P') + \ell(w_{j-1}, w_j) \underset{①}{\geq} d_i(w_{j-1}) + \ell(w_{j-1}, w_j) \underset{②}{\geq} d_i(w_j) \geq d_i(u_i)$

$\underset{(i)}{=} d_{|V|}(u_i)$

反復回数 i に関する数学的帰納法で示す．

$i = 1$ のとき，$u_1 = s$ であり，$d_1(s) = 0$ であるので命題は成り立つ．

次に，$i > 1$ のときについて考える．反復回数 $i - 1$ までに命題は成り立つと仮定する．このとき，s から u_i への任意の有向路を $\hat{P} := \{(w_0, w_1), (w_1, w_2), \ldots, (w_{k-1}, w_k)\}$ とおき（ただし，$w_0 = s, w_k = u_i$），$d_{|V|}(u_i) \leq l(\hat{P})$ を示す．

第 i 反復開始時の集合 S の補集合を $\bar{S} := V \setminus S$ とする．さらに，有向路 P 上の頂点で，S に含まれ，かつ s に最も近いものを w_j とすると，$1 \leq j \leq k$ かつ $w_{j-1} \in \bar{S}$ が成り立つ．また，有向路 P の s から w_{j-1} への部分路を P' とおく．さらに，頂点 w_{j-1} が Step 1 にて選ばれた反復回数を $i'(< i)$ とおく．このとき，帰納法の仮定と命題 (i) より，s から w_{j-1} への最短路長は $d_{i'}(w_{j-1}) = d_i(w_{j-1})$ に等しいので，次の式が成り立つ．

$$d_i(w_{j-1}) \leq l(P') \tag{1}$$

また，第 i' 反復の Step 2 において w_j の d は次のように更新されている．

$$d_{i'+1} \leftarrow \min\{d_{i'}(w_j), d_{i'}(w_{j-1}) + l(w_{j-1}, w_j)\}$$

これと，命題 (i) から導かれる $d_i(v_j) \leq d_{i'+1}(v_j)$ より，次の式が得られる．

$$d_i(w_j) \leq d_{i'+1}(w_j) \leq d_{i'}(w_{j-1}) + l(w_{j-1}, w_j) = d_i(w_{j-1}) + l(w_{j-1}, w_j) \tag{3}$$

さらに，辺の重みが非負であることと，有向路 $P' \cap \{(w_{j-1}, w_j)\}$ は $\hat{P}$ の部分路であることから，$l(P') + l(w_{j-1}, w_j) \leq l(\hat{P})$ が成り立つ．これと式 (1), (3) より，次の式が得られる．

$$d_i(w_j) \leq d_i(w_{j-1}) + l(w_{j-1}, w_j) \leq l(P') + l(w_{j-1}, w_j) \leq l(\hat{P}) \tag{1}$$

ここで，第 i 反復の Step 1 で頂点 u_i が選ばれたことから，$d_i(u_i) \leq d_i(v) \forall v \in S$ が成り立つので，次の式が成り立つ．

$$d_i(u_i) \leq l(\hat{P})$$

□

辺の重みが非負の場合の最短路問題の計算量の解析（愚直なアルゴリズム）

辺の重みは非負より，同じ頂点を 2 回通る意味はない．同じ頂点を複数回通らないような全ての有向路を列挙することを考える．特に（最悪ケースとして）完全グラフのときを考える．

- 有向路に含まれる頂点の数は？
  - $0 \sim |V| \longrightarrow k$ とする．
- どの順番で各頂点を通る？
  - $k!$
- 全ての有向路の数は？
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{|V|} k! \qquad (\geq (|V|)!)$

辺の重みが非負の場合の最短路問題の計算量の解析（Dijkstra 法）

Algorithm Dijkstra 法

Step 0 $d(s) \leftarrow 0; d(v) \leftarrow +\infty \quad \forall v \in V \setminus \{s\}; P(v) \leftarrow \emptyset \quad \forall v \in V; S \leftarrow V;$

（S は最短路が未確定の頂点の集合）

Step 1 S の要素の中で $d(v)$ の値が最小の頂点を $u(\in S \subset V)$ として，$S \leftarrow S \setminus \{u\};$

Step 2 **for** $(u, v) \in E$ **do** （頂点 u から出る辺について for-loop）

  if $v \in S$ **and** $d(v) > d(u) + l(u, v)$ **then**

    $d(v) \leftarrow d(u) + l(u, v);$

    $P(v) \leftarrow (P(u)$ の最後に (u, v) を追加したもの$);$

Step 3 **if** $S = \emptyset$ **then**

  report $d(v), P(v) \quad \forall v \in V;$

 else

  Step 1 に戻る;

Step 0: $O(|V|)$

Step 1: （全体で）$O(|V|^2)$（愚直） or $O(|E| \log |E|)$（二分ヒープ） or $O(|E| + |V| \log |V|)$（フィボナッチヒープ）

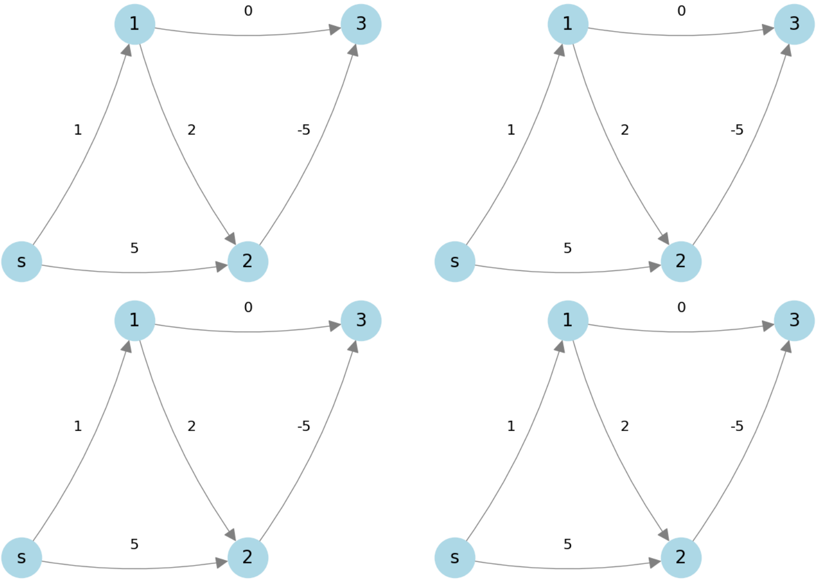
Step 2: （全体で）$O(|E|)$ （$\because$ 全ての辺について高々 1 回見る）

Total: Step 2 がボトルネックとなり，$O(|V|^2)$ or $O(|E| \log |E|)$ or $O(|E| + |V| \log |V|)$

最短路問題

辺の長さが実数のとき

非負の辺があるときに Dijkstra 法を適用すると？

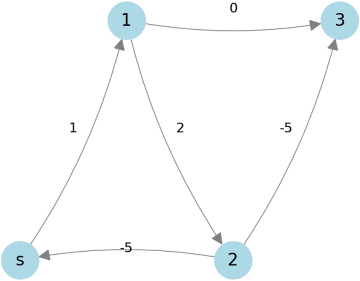


このように，非負の辺が存在するとき，Dijkstra 法はうまく動かないことがある．

また，負閉路が存在するならば，最短路が存在しない．（実は逆も成立．）

Definition 2.8 (負閉路)

始点と終点の等しい有向路のことを有向閉路といい，長さが負の有向閉路のことを負閉路という．



負閉路の存在と最短路の存在

Theorem 2.6 (負閉路が存在 $\Longrightarrow$ 最短路は存在しない)

始点 s から各頂点への有向路が存在すると仮定する．このとき，負閉路が存在するならば，始点 s から頂点 $t \in V$ への最短路が存在しないような t が存在する．

proof.

負閉路が存在するとき，その負閉路を何回も回ることで有向路の長さを無限に小さくできる．よって，負閉路が存在するとき，最短路は存在しない． □

Definition 2.9 (単純有向路)

同じ頂点を 2 回以上通らない有向路のことを単純有向路という．

Theorem 2.7 (最短路が存在しない $\Longrightarrow$ 負閉路が存在)

始点 s から各頂点への有向路が存在すると仮定する．このとき，負閉路が存在しないならば，s から各頂点へ最短路が存在する．とくに，単純有向路であるような最短路が存在する．

proof.

t を任意の頂点として，P を任意の s から t への有向路とする．P が有向閉路を持つとき，P から有向閉路をのぞいた有向路を P^* とする．このとき，P^* は s から t への有向路であり，負閉路が存在しないから，$l(P^*) \leq l(P)$ が成り立つ．よって，s から t への最短路として単純有向路を選ぶことができる．単純有向路は高々 $|V| - 1$ 個の辺からなるので，有限個しか存在しない．よって，s から各頂点への最短路が存在する． □

以上の議論より，「負閉路が存在 $\Longleftrightarrow$ 最短路が存在しない」という命題が言える．

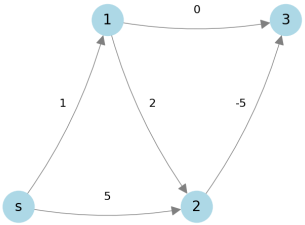
最短路問題にまつわる有用な性質

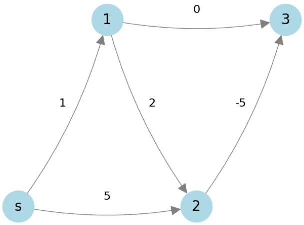
次に，最短路問題を考える上で有用な性質について述べる．その後に，これらの性質を用いて，一般の場合の最短路問題を解くためのアルゴリズムについて説明する．

Definition 2.10 (ポテンシャル，再掲)

写像 $p\colon V \to R$ が次の式を満たすとき，p をポテンシャルという．

$$p(v) - p(u) \leq l(u, v) \qquad (\forall (u, v) \in E)$$





ポテンシャルと最短路の関係

Theorem 2.8 ($l(P) = p(t) - p(s) \implies P$ は s から t への最短路)

ポテンシャル p が与えられたとき，頂点 $s, t \in V$ に対し，s から t への任意の有効路 P について，$l(P) \geq p(t) - p(s)$ が成り立つ．特に，$l(P) = p(t) - p(s)$ が成り立つならば，P は s から t への最短路である．

proof.

$P := \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}(v_0 = s, v_k = t)$ とする．このとき，p の定義より，$i = 1, \ldots, k$ に対して，$p(v_i) - p(v_{i-1}) \leq l(v_{i-1}, v_i)$ が成り立つ．よって，次の式が成り立つ．

$$l(P) = \sum_{i=1}^{k} l(v_{i-1}, v_i) \geq p(v_1) - p(s) + p(v_2) - p(v_1) + \cdots + p(t) - p(v_{k-1}) = p(t) - p(s)$$

また，この式より，$l(P) = p(t) - p(s)$ が成り立つならば，P は s から t への最短路である．

$\square$

ポテンシャルと最短路の関係

Theorem 2.9 (最短路長の長さを返す関数はポテンシャル)

始点 s から各頂点への最短路が存在すると仮定する．このとき，s から各頂点 $v \in V$ への最短路長を $p(v)$ とすると，このように定義された p はポテンシャルである．

proof.

$u \in V$ を任意の頂点とする．このとき，各辺 $(u, v) \in E$ に対して，s から u への最短路に辺 (u, v) を追加して得られる有向路は s から v への有向路であるので，その長さは $p(v)$ 以上であり，$p(u) + l(u, v) \geq p(v)$ が成り立つ．よって，p は次のポテンシャルの定義式を満たす．

$$p(v) - p(u) \leq l(u, v) \qquad (\forall (u, v) \in E)$$

□

ポテンシャルと最短路の関係

Theorem 2.8, Theorem 2.9 から，次の定理が導かれる．

Theorem 2.10 (ポテンシャルと最短路の関係)

頂点 s から各頂点 $t \in V$ へ最短路が存在すると仮定する．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\min\{l(P) \mid P \text{ は } s \text{ から } t \text{ への有向路 }\} = \max\{p(t) - p(s) \mid p \text{ はポテンシャル }\}$$

強双対性から，頂点 s から各頂点 $t \in V$ へ最短路が存在するとき，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \text{オリジナルの最短路問題の最適値} &= \text{緩和された最適化問題の双対問題の最適値} \\ &= \text{緩和された最短路問題の最適値} \leq \text{オリジナルの最短路問題の最適値} \end{aligned}$$

このことから，緩和された最短路問題の最適値とオリジナルの最短路問題の最適値が一致することが分かる．

最短路が存在するための必要十分条件

既に，「最短路が存在すること」の必要十分条件が「負閉路が存在しないこと」であることを確認した．

ここでは，「最短路が存在すること」の必要条件が「ポテンシャルが存在すること」であることを示す．

Theorem 2.11 (最短路の存在とポテンシャルの存在の同値性)

始点 s から各頂点への有向路が存在すると仮定する．このとき，s から各頂点へ最短路が存在するための必要十分条件は，ポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$ が存在することである．

proof.

Theorem 2.9 から，各頂点への最短路が存在するならば，その最短路長を使ってポテンシャルを得ることができる．

逆に，ポテンシャル p が存在するとして，$C := \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$ を任意の有向閉路とする (ただし $v_0 = v_k$)．ポテンシャルの定義より，各辺 $(v_{i-1}, v_i)(i = 1, \ldots, k)$ に対して，$p(v_i) - p(v_{i-1}) \leq l(v_{i-1}, v_i)$ が成り立つ．よって，次の式が成り立つ．

$$l(C) = \sum_{i=1}^{k} l(v_{i-1}, v_i) \geq p(v_k) - p(v_0) = 0 \tag{2}$$

つまり，負閉路は存在しない．よって，「最短路が存在すること」の必要十分条件が「負閉路が存在しないこと」であることから，始点 s から各頂点への最短路が存

Bellman–Ford 法

辺の長さが非負とは限らないときでも Bellman–Ford 法を用いて最短路問題を解くことができる．

Bellman–Ford 法において，各頂点 $v \in V$ および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，s から v への辺数 k 以下の有向路の長さの最長値を $d_k(v)$ とする．このとき，次の式が成り立つ．

$$d_k(v) = \min\left\{d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + l(u, v) \mid (u, v) \in E\}\right\}$$

また，$d_k(v)$ を実現する有向路を $P_k(v)$ とする．

Bellman–Ford 法のアルゴリズム

Algorithm Bellman–Ford 法

Step 0 $d_0(s) \leftarrow 0; d_0(v) \leftarrow +\infty \quad \forall v \in V \setminus \{s\}; P_0(v) \leftarrow \emptyset \quad \forall v \in V; k \leftarrow 1;$

Step 1 各 $v \in V$ に対して，

$d_k(v) \leftarrow \min\left\{d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + l(u,v) \mid (u,v) \in E\}\right\};$

if $d_k(v) = d_{k-1}(v)$ **then**

$P_k(v) \leftarrow P_{k-1}(v);$

else

$d_k(v) = d_{k-1}(u) + l(u,v)$ を満たす辺 (u,v) に対して，

$P_k(v) \leftarrow (P_{k-1}(u)$ の最後に (u,v) を追加したもの$);$

Step 2 **if** $k < n - 1$ **then** $k \leftarrow k + 1$; Step 1 に戻る．**else** Step 3 へ．

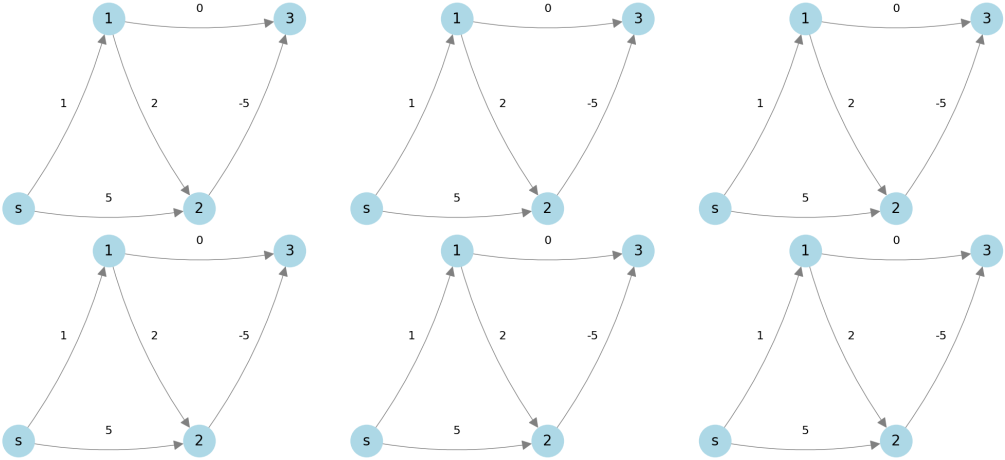
Step 3 **if** $d_{|V|-1}(v) \leq d_{|V|-1}(u) + l(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$ **then**

report $d_{|V|-1}(v), P_{|V|-1}(v) \qquad \forall v \in V;$

else

report 負閉路が存在する;

Bellman–Ford 法の適用例



Theorem 2.12 (Bellman–Ford 法の正当性 (i))

負閉路を持たない有向グラフに関する最短路問題に対して，*Bellman–Ford* 法は始点 s から各頂点 $v \in V$ への最短路長および最短路を求める．

proof.

Theorem 2.7 より，負閉路が存在しないとき，単純有向路であるような最短路が存在し，その辺数は高々 $|V| - 1$ である．また，$d_{|V|-1}(v)$ は s から v への辺数 $|V| - 1$ 本以下の有向路の長さの最小値であるので，この命題は成り立つ． □

Bellman–Ford 法の正当性 (ii)

Theorem 2.13 (Bellman–Ford 法の正当性 (ii))

負閉路を持つ有向グラフに関する最短路問題に対して，*Bellman–Ford* 法は負閉路が存在することを出力する．

proof.

Step 3 において，ある辺について $d_{|V|-1}(v) > d_{|V|-1}(u) + l(u,v)$ が成り立つとき，$k = |V|$ とおいて，もう一度 Step 1 を行うことを考える．このとき，$d_{|V|}(v) < d_{|V|-1}(v)$ が成り立つが，$P_{|V|}(v)$ の辺数は $|V|$ となるので，$P_{|V|}(v)$ は有向閉路を含み，その有向閉路の長さは負である． □

実際，こうして得られた $P_{|V|}(v)$ を辿ることで $O(|V|)$ で閉路の検出が可能である．

Bellman-Ford 法の計算量の解析

Algorithm Bellman–Ford 法

Step 0 $d_0(s) \leftarrow 0; d_0(v) \leftarrow +\infty \quad \forall v \in V \setminus \{s\}; P_0(v) \leftarrow \emptyset \quad \forall v \in V; k \leftarrow 1;$

Step 1 各 $v \in V$ に対して，

$$d_k(v) \leftarrow \min\left\{d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + l(u,v) \mid (u,v) \in E\}\right\};$$

if $d_k(v) = d_{k-1}(v)$ **then**

$P_k(v) \leftarrow P_{k-1}(v);$

else

$d_k(v) = d_{k-1}(u) + l(u,v)$ を満たす辺 (u,v) に対して，

$P_k(v) \leftarrow (P_{k-1}(u)$ の最後に (u,v) を追加したもの$);$

Step 2 **if** $k < n-1$ **then** $k \leftarrow k+1$; Step 1 に戻る．

Step 0: $O(|V|)$

Step 1: 各イテレーションについて，全ての辺について見るので，$O(|E|) \longrightarrow$ 全体で $O(|V||E|)$

Total: Step 1 がボトルネックとなり，$O(|V||E|)$.

最短路問題

全点対最短路問題

全点対最短路問題

ここでは，有向グラフ $G = (V, E)$ の全頂点対の間の最短路を求める問題について考える．

前提として，各辺の重みは実数であるが，負閉路は存在しないとする．

また，$d_k(i, j)$ を「k 番目以下の頂点のみを途中で経由してよいという条件のもとでの，頂点 $i \in V$ から頂点 $j \in V$ への最短路の長さ」と定義する．

このとき，次の式が成り立つ．

$$d_k(i, j) = \min\{d_{k-1}(i, j), d_{k-1}(i, k) + d_{k-1}(k, j)\}$$

全点対最短路問題を効率的に解くためのアルゴリズムとして，Warshall–Floyd 法が知られている．

Algorithm Warshall–Floyd 法

Step 0 $d_0(i,j) \leftarrow +\infty \; \forall i,j \in V; d_0(i,i) \leftarrow 0 \; \forall i \in V; d_0(i,j) \leftarrow l(i,j) \; \forall (i,j) \in E;$

Step 1 **for** $k \leftarrow 1$ **to** n **do**

  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

      $d_k(i,j) = \min\{d_{k-1}(i,j), d_{k-1}(i,k) + d_{k-1}(k,j)\};$

Step 2 **report** $d_n(i,j) \quad \forall i,j \in V;$

Step 1 がボトルネックとなり，計算量は全体で $O(|V|^3)$ である．

頂点対が $O(|V|^2)$ 個であることから，1 組の頂点対あたりの計算量は $O(|V|)$ であり，高速であることが分かる．

参考（全点対最短路問題に適用）

Dijkstra 法の計算量:$O(|V|^2 \log |V| + |V||E|)$

Bellman–Ford 法の計算量:$O(|V|^2|E|)$

Warshall–Floyd 法の適用例