確率空間と確率変数

2023 年度前期 輪読会 #1

髙橋 優輝

2023.4.13

システム数理学講座 M1

目次

1. 確率空間
    - 1.1 有限集合と可算集合の確率空間
    - 1.2 実数上の確率空間
    - 1.3 一般化された確率密度関数
2. 確率変数
    - 2.1 確率変数の定義と概念
    - 2.2 確率変数の関係
    - 2.3 独立性
    - 2.4 確率変数の収束

1. 確率空間

確率空間とは？

確率的な現象を考えていきたい．　$\longrightarrow$ 何が必要か？

- 確率的な現象が生じる場所（標本空間）Ω
- 全体集合の部分集合の中で確率が計算できるもの全体（シグマ加法族）$\mathcal{B}$
- 確率の値（確率測度）P

3 組 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間という．

この章の目的は確率空間の概念を掴むことである．

確率空間の例

1,2,3 のいずれかが出る機械から出てくる数字について考える．

- 全体集合

$$\Omega = \{1, 2, 3\} \tag{1}$$

- シグマ加法族

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \tag{2}$$

- 確率測度

事象	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{2,3}	{1,3}	{1,2,3}
$P(\cdot)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

1. 確率空間

1.1 有限集合と可算集合の確率空間

有限集合と可算集合

Definition (有限集合と無限集合)

集合 Ω の要素数が有限であるとき，Ω を**有限集合**であるという．一方，有限集合でない集合は**無限集合**という．

Definition (可算集合と非可算集合)

無限集合 Ω について，全単射の写像 $f\colon \Omega \to \mathbb{N}$ が存在するとき，Ω を**可算集合**であるという．また，Ω が有限集合または可算集合であるとき，Ω を**高々可算集合**であるという．一方，高々可算集合でない集合は**非可算集合**という．

例)

1. 10 以下の自然数全体の集合 $\mathbb{N}_{\leq 10}$ $\longrightarrow$ 有限集合
2. 偶数の自然数全体の集合 $\mathbb{E}$ $\longrightarrow$ 可算集合
3. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ $\longrightarrow$ 可算集合
4. 開区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ 非可算集合

$\mathbb{Q}$ は可算集合である

たとえば，分子と分母の絶対値の和が小さい方から順に（ただし，分子の小さい順に），自然数とペアにすればよい．

$$q_1 = 0, q_2 = -\frac{1}{1}, q_3 = \frac{1}{1}, q_4 = -\frac{2}{1}, q_5 = \frac{1}{2}, q_6 = \frac{1}{2}, q_7 = \frac{2}{1}, \cdots$$

開区間 $(0,1)$ は非可算集合である (1/2)

ざっくりと証明する．無限に続く（有限で終わる場合は，0 を無限に並べる）小数を次のように表す．

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \tag{3}$$

$(0,1)$ から $\mathbb{N}$ への全単射が存在すると仮定すると，開区間 $(0,1)$ のすべての元を次のように並べることができる．

（ただし，$a_i \in (0,1), i \neq j \implies a_i \neq a_j, \forall i, j$）

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ a_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ a_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

開区間 $(0,1)$ は非可算集合である (2/2)

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.\underline{a_{11}}a_{12}a_{13}\cdots \\ a_2 &= 0.a_{21}\underline{a_{22}}a_{23}\cdots \\ a_3 &= 0.a_{31}a_{32}\underline{a_{33}}\cdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5}$$

a_{ii} に注目して，b_i を次のように定める．

$$b_i = \begin{cases} 2 & (a_{ii} = 1) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{6}$$

このとき，$a_{ii} \neq b_i, \forall i$ が成り立つので，

$$b = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots \tag{7}$$

を作ると，明らかに $b \in (0,1)$ であるが，$b \neq a_i, \forall i$ である．

確率関数

Ω を有限集合または可算集合とする．$p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が次の性質を持つとき，p を**確率関数**または**確率分布**という．

1. $p(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$
2. $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

有限集合または可算集合 Ω の部分集合全体の作る集合族を 2^{Ω} と書く．$A \in 2^{\Omega}$ に対して，A の中の要素のいずれかが起こる確率 $P(A)$ は，確率関数 p を用いて，次のように表せる．

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(w) \tag{8}$$

確率関数の例

例) コインを裏が出るまで投げ続けたときのコインを投げた回数について考える．このとき，標本空間は $\Omega = \mathbb{N}$ である．

コインの表裏が等確率であるとして，新しいコイン投げがそれまでの表裏に依存しないならば，確率関数 $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は，

$$p(n) = \frac{1}{2^n} \tag{9}$$

と定めるべきである．実際，これは確率関数の持つ性質を満たしている．

有限集合または可算集合上の確率測度

次の条件をすべて満たすような $P\colon 2^\Omega \to \mathbb{R}$ を有限集合または可算集合上の**確率測度**という．

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in 2^\Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. 任意の可算個の $A_1, A_2, \ldots \in 2^\Omega$ について，「$i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$」のとき，以下の式が成り立つ．

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{10}$$

確率関数と確率測度の一意性

確率関数 p が与えられると確率測度 P が定義されるが，一方，確率測度 P が与えられたとき，要素の個数が 1 個の集合 $\{\omega\}$ の確率測度の値を用いて，$p(\omega) = P(\{\omega\})$ と定義すれば，確率関数 p が一意に定まる．

確率関数 p あるいは確率測度 P のことを**確率分布**という．

有限集合あるいは可算集合の確率空間

次の 3 組 $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ を有限集合あるいは可算集合の**確率空間**という．

- 有限集合あるいは可算集合 Ω
- Ω の部分集合全体が作る集合族 2^{Ω}
- 確率測度 P

統計学の用語

集合 Ω のことを**標本空間**，標本空間の部分集合のことを**事象**と呼ぶ．

全集合のことを**全事象**といい，空集合のことを**空事象**という．

ある事象の補集合のことを**余事象**という．

二つの事象の共通集合が空集合のとき，たがいに**背反な事象**という．

確率的な現象において標本空間の中のいずれかの要素を確率分布に従ってランダムに選び出すことを**試行**と呼び，試行の結果選び出された要素のことを**実現値**と呼ぶ．

1. 確率空間

1.2 実数上の確率空間

確率密度関数

$\mathbb{R}$ 上に確率空間を作りたい．$\mathbb{R}$ は非可算集合であるので，有限集合や可算集合のときのように，各要素が生じる確率を与えるわけにはいかない．そこで，確率を定義するために積分を利用する．

次の条件をすべて満たすような $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を**確率密度関数**あるいは**確率分布**という．

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について，$\int_a^b p(x)dx$ が有限確定である．
3. $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$

確率密度関数 p が与えられたとき，集合 $A \subset \mathbb{R}$ 上の積分値が有限確定であれば，A の中の要素のいずれかが起こる ($x \in A$ となる) 確率 $P(A)$ は以下のように与えられる．

$$P(A) = \int_A p(x)dx \tag{11}$$

シグマ加法族

次の条件をすべて満たすような集合族 $\mathcal{B}$ を**シグマ加法族**または**完全加法族**という．
特に，開集合全体を含む最小のシグマ加法族のことを**ボレル集合族**という．

1. $\Omega \in \mathcal{B}$
2. $A^c \in \mathcal{B}, \forall A \in \mathcal{B}$
3. 任意の可算個の $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ について，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

2. と 3. は合わせて「補集合をとる操作と可算個の和集合をとる操作について閉じている」という．

実数上の確率測度

$\mathcal{B}$ をシグマ加法族とする．このとき，次の条件をすべて満たすような $P\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ を実数上の確率測度という．

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{B}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. 任意の可算個の $A_1, A_2, \cdots$ について，どの二つの集合も共通部分が空集合のとき，次の式が成立する．

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{12}$$

実数上の確率空間

このように定義される 3 組 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ を実数上の確率空間という．

確率密度関数 p あるいは確率測度 P のことを総称して**確率分布**という．積分要素 $p(x)dx$ のことを確率測度ということもある．

N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の場合も同様に確率空間を定義することができる．

almost surely

Ω の部分集合 U で，$P(U) = 1$ を満たすものが与えられ，U の中のすべての元 x について，ある命題 $Prop(x)$ が成り立つとき，

$$Prop(x) \qquad \text{(a.s.)} \tag{13}$$

あるいは

$$\text{確率 } 1 \text{ で } Prop(x) \text{ が成り立つ} \tag{14}$$

という書き方をする．ここで (a.s.) は almost surely の略であり，(a.e.) という記号が用いられることもある (almost everywhere)．

例）確率 1 で $f(x) = |x|$ は微分可能である．

1. 確率空間

1.3 一般化された確率密度関数

一般化された確率密度関数 (1/2)

前節で述べた確率密度関数 $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ では，実数上のある値だけを常に取り続けるような確率現象を記述できない．そこで，デルタ関数を導入して，一般化された確率密度関数について考える．

デルタ関数 δ を次のように定義する．

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \tag{15}$$

また，任意の連続関数 f について，次の式が成立するとする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{16}$$

特に，f として，常に 1 の値をとる恒等関数を考えると，次の式が導かれる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{17}$$

1.3 一般化された確率密度関数 (2/2)

デルタ関数を用いると，「確率 1/3 で $x = 0$ に，確率 2/3 で $x = 1$ となるような確率的な現象」は，次のように表せる．

$$p(x) = \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1) \tag{18}$$

一般化された確率密度関数を考えたとき，前節で考えたのと同様にして，確率空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ を構成できる．また，実数上の確率測度はすべて一般化された確率密度関数で表せることが知られている．

累積分布関数

一般化された確率密度関数 $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が与えられとき，関数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$F(x) = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{x-\epsilon} p(y)dy \tag{19}$$

この関数を p の**累積分布関数**あるいは**分布関数**という．定義より，累積分布関数は単調非減少関数であり，$F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$ が成り立つ．また，累積分布関数は左側連続である．すなわち，次の式が成立する．

$$\lim_{\epsilon \to +0} F(x - \epsilon) = F(x) \tag{20}$$

1.4 一般の確率関数

1.2,1.3 節で，有限集合または可算集合上の確率空間，実数上の確率空間を定義した．これ以外の集合上でも，全体集合 Ω,Ω の部分集合の集合が作るシグマ加法族 $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}$ 上の確率測度 P としたとき，3 つ組 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間という．

有限集合でも可算集合でも実数全体でもない集合においては，確率関数や確率密度関数に相当するものが存在するとは限らないので，確率測度 P を設定するためには，その確率空間に応じた方法を作る必要がある．本書では述べないが，関数全体の集合上の確率空間の扱い方について数学的な方法が構築されていて，確率微分方程式を考えるときに用いられている．

2. 確率変数

2. 確率変数

2.1 確率変数の定義と概念

確率変数の定義

以下では，実数の上の確率空間を中心に考えるが，特に断らない限り，有限集合あるいは可算集合の上の確率空間の場合も $\int$ を $\sum$ に置き換えれば，同じように扱うことができる．

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする．

このとき，集合 Ω から集合 Ω^* への関数 $X : \Omega \to \Omega^*$ を Ω^* に値を取る**確率変数**という．本書では，Ω^* として，有限集合，加算集合，実数全体の集合の場合を考える．

可測関数

以下では，Ω^* においても，確率の定義できる集合族 $\mathcal{B}^*$ が用意されているとして，$B^* \in \mathcal{B}^*$ の X による引き戻しの確率が Ω においても測ることができるとする．[1] すなわち，次の式が成立するとする．

$$X^{-1}(B^*) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B^*\} \in \mathcal{B} \tag{21}$$

また，この式を満たす関数 X のことを**可測関数**という．[2]

---

[1] Ω の部分集合で確率が計算できるようなものはどのようなものかという問題は一般には難しい．
[2] どのような関数が可測関数であるかという問題も一般には難しいので，本書では扱わない．
参考：`http://watanabe-www.math.dis.titech.ac.jp/users/swatanab/hikasoku.pdf`
連続関数やその和・積で与えられる関数は可測となる．可測性を心配しなければならない場合として，例えば，2 変数関数 $f(x, y)$ がそれぞれの変数について可測であっても両変数についての可測関数にはならないことがある．

新しい確率空間の構成

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ と確率変数 $X\colon \Omega \to \Omega^*$ が与えられたとき，Ω^* 上の確率測度 P^* を次のように定義することで新しい確率空間 $(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P^*)$ を構成することができる．[3]

$x = X(\omega)$ について，

$$\Pr[x \in B^*] = \Pr[\omega \in X^{-1}(B^*)] \tag{22}$$

であるので，

$$P^*(B^*) = P(X^{-1}(B^*)) \tag{23}$$

によって，P^* を定義すればよい．

このとき，「確率変数 X は確率測度 P^* に従う」という．

---

[3] Ω^* においても，確率の定義できる集合族 $\mathcal{B}^*$ が用意されており，$X^{-1}(B^*) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B^*\} \in \mathcal{B}, \forall B^* \in \mathcal{B}^*$ が成り立つことが仮定されている．（1スライド前の仮定）

新しい確率密度関数の構成

基の確率空間の上の確率密度関数 $p(\omega)$ と新しい確率空間の上の確率密度関数 $p^*(x)$ の関係について述べる．

Theorem (新しい確率密度関数の構成)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ から実数への確率変数 $X(\omega)$ が与えられたとする．このとき，新たな確率空間 $(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P^*)$ の上の確率密度関数 $p^*(x)$ は次の式で与えられる．

$$p^*(x) = \int_\Omega \delta(x - X(\omega)) p(\omega) d\omega \tag{24}$$

Proof.

証明（飛び道具使用）は教科書を参照． □

直感的な式．

注意書き：X と $X(\omega)$

$x = X(\omega)$ の挙動を見ることだけが目的であるならば，基の確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を忘れて，新しい確率空間 $(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P^*)$ さえ知っていれば十分である．

このため，基の確率空間を明示する必要のないときは，確率変数 X と X が従う確率分布 P^* だけを述べて，

実数に値を取る確率変数 X が確率分布 P^* に従う

というような言い方をする．

実際に，確率変数の平均や分散（３章）などを定義する際に基の確率空間を知っている必要はない．そこで，以下では確率変数 X が関数であることは忘れていても構わない場合は，（多くの教科書でそうであるように）$X(\omega)$ という表記ではなく単に X という表記を用いることがある．

2. 確率変数

2.2 確率変数の関係

同時確率密度関数

確率空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}, P)$ と，実数に値をとる 2 つの確率変数 X, Y が与えられたとする．

Definition (同時確率密度関数)

$(X, Y) \in A \subset \mathbb{R}^2$ となる確率 $P(A)$ が

$$P(A) = \int\int_A p_{X,Y}(x, y) dx dy \tag{25}$$

となるような関数 $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在するとき，$p_{X,Y}$ を X, Y の**同時確率密度関数**という．

３個以上の確率変数についても同様に定義できる．

周辺確率密度関数

確率空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}, P)$ と，実数に値をとる 2 つの確率変数 X, Y が与えられたとする．

Definition (周辺確率密度関数)

$p_{X,Y}$ を X と Y の同時確率密度関数とする．このとき，

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dy \tag{26}$$

を X の**周辺確率密度関数**という．また，Y についても同様で，

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dx \tag{27}$$

を Y の周辺確率密度関数という．

3 個以上の確率変数についても同様に定義できる．

2. 確率変数

2.3 独立性

Definition (確率変数の独立性)

２つの確率変数 X, Y について，それらの同時確率密度関数 $p_{X,Y}$ とそれぞれの周辺確率密度関数 p_X, p_Y が次の関係を満たすとき，X と Y は**独立**であるという．

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \forall x, y \tag{28}$$

３個以上の確率変数についても同様に定義できる．

５章の条件付き確率で述べるように，確率変数の独立性とは，「確率変数の一方を知っても他方についてなにも分からない」という意味を述べたものである．

独立な確率変数の和の従う確率密度関数

実数に値を取る二つの独立な確率変数 X, Y はそれぞれ確率密度関数 $p(x), q(y)$ に従うとする．このとき，新たな確率変数 $Z = X + Y$ の従う確率密度関数 $r(z)$ を求める．

$$P(Z \in A) = \int_{z \in A} r(z) dz = \int \int_{x+y \in A} p(x) q(y) dx dy \tag{29}$$

が成り立つ．ここで，$z = x + y$ とすると，

$$P(Z \in A) = \int_{z \in A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(z-y) q(y) dy \right) dz \tag{30}$$

となるから，次の式が成り立つ．

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z-y) q(y) dy = (p * q)(z) \tag{31}$$

2. 確率変数

2.4 確率変数の収束

確率変数の収束 (1/4)〜概収束〜

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ と X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数とする．このとき，確率変数の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束についていくつかの定義がある．

以降，$P(\{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) > 0\})$ のことを $P(f(X) > 0)$ と表記する．

Definition (概収束)

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1 \tag{32}$$

が成り立つとき，X_n は X に**概収束**するといい，次のように表す．

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \text{(a.s.)} \quad \text{or} \quad X_n \xrightarrow{a.s.} X \tag{33}$$

<u>気持ち</u>

n が十分大きいとき，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について（確率 1 で），$X_n(\omega) = X(\omega)$ が成り立つ．大数の強法則で登場．

Definition (r 次平均収束)

$r \geq 1$ とする．

$$\left(\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[|X_n - X|^r\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n(\omega) - X(\omega)|^r p(\omega) d\omega = 0 \tag{34}$$

が成り立つとき，X_n は X に r **次平均収束**するといい，次のように表す．

$$X_n \xrightarrow{L^r} X \tag{35}$$

<u>気持ち</u>

n が十分大きいとき，X_n と X の差の r 乗の期待値が 0 へと収束する．

明らかに，$s \geq t \geq 0$ のとき，$X_n \xrightarrow{L^s} X \implies X_n \xrightarrow{L^t} X$ が成り立つ．（次数は 1 まで下げてもよい．）

Definition (確率収束)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \epsilon\right) = 1, \forall\epsilon > 0 \tag{36}$$

が成り立つとき，X_n は X に**確率収束**するといい，次のように表す．

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X \tag{37}$$

気持ち

n が十分大きいとき，例外的な結果はほとんど起こらない．

大数の弱法則で登場．

確率変数の収束 (4/4)〜法則収束〜

Definition (法則収束)

任意の連続有界関数[4] $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(X_n(\omega))p(\omega)d\omega = \int_\Omega f(X(\omega))p(\omega)d\omega \tag{38}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[f(X_n)] = \mathsf{E}[f(X)]\right) \tag{39}$$

が成り立つとき, X_n は X に**法則収束**するといい, 次のように表す.

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X \tag{40}$$

6 章の中心極限定理で登場.

法則収束するならば, 累積分布関数が収束することが言える.

[4] 関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ が有界である $\iff$ ある $k > 0$ が存在して, $|f(x)| < k, \forall x \in A$ が成立する.

確率変数の収束の関係

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} X_n \xrightarrow{a.s.} X \\ \text{概収束} \end{array} \arrow[drr, Rightarrow] & & & \\
& & \begin{array}{c} X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X \\ \text{確率収束} \end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c} X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X \\ \text{法則収束} \end{array} \\
\begin{array}{c} X_n \xrightarrow{L^s} X \\ \text{s 次平均収束} \end{array} \arrow[r, Rightarrow, "s \geq t \geq 1"] & \begin{array}{c} X_n \xrightarrow{L^t} X \\ \text{t 次平均収束} \end{array} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

証明は大変（しません）.

気になる人は $\longrightarrow$`https://math-note.xyz/analysis/measure-theory/probability-theory/convergence-of-sequence-of-random-variables/#toc7`

r 次平均収束する（すなわち，確率収束する）が，概収束しない例; 章末問題【4】(1/2)

区間 $[0,1]$ 上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を考える．P は一様分布である．関数 $f_{n,k}$ と確率変数 X_m を次のように定める．

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & (k-1)/n < x < k/n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{41}$$

$$X_1(\omega) = f_{1,1}(\omega), X_2(\omega) = f_{2,1}(\omega), X_3(\omega) = f_{2,2}(\omega), X_4(\omega) = f_{3,1}(\omega), \ldots \tag{42}$$

<u>確率収束の成立の確認</u>　$\left(\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \epsilon\right) = 1, \forall\epsilon > 0 \iff X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X\right)$

任意の $n \in \mathbb{N}, k \leq n$ について，$P(|f_{n,k}(\omega) - 0| > \epsilon) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} dx = 1/n, \forall\epsilon > 0$ より，

$\lim_{m\to\infty} P(|X_m| > \epsilon) = 0, \forall\epsilon > 0$ が成り立つので，$X_m \xrightarrow{\mathscr{P}} 0$ が成立．

<u>平均収束の成立の確認</u>　$\left(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n(\omega) - X(\omega)|^r p(\omega) d\omega = 0 \iff X_n \xrightarrow{L^r} X\right)$

$\int_0^1 |f_{n,k}(\omega) - 0|^r p(\omega) d\omega = \int_{(k-1)/n}^{k/n} 1^r \cdot 1 dx = 1/n \to 0$ より，$X_m \xrightarrow{L^r} 0$ が成立．

<u>概収束の不成立の確認</u>　$\left(P\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1 \iff X_n \xrightarrow{a.s.} X\right)$

明らか？

r 次平均収束する（すなわち，確率収束する）が，概収束しない例; 章末問題【4】(2/2)

区間 $[0,1]$ 上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を考える．P は一様分布である．関数 $f_{n,k}$ と確率変数 X_m を次のように定める．

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & (k-1)/n < x < k/n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{43}$$

$$X_1(\omega) = f_{1,1}(\omega), X_2(\omega) = f_{2,1}(\omega), X_3(\omega) = f_{2,2}(\omega), X_4(\omega) = f_{3,1}(\omega), \ldots \tag{44}$$

$\{X_m\}$ から概収束する部分列を取り出せることの確認[5]

$\left(P\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1 \iff X_n \xrightarrow{a.s.} X\right)$

[5] 一般に，確率収束する確率変数の列の中から，概収束する部分列が存在することが知られている．

確率収束するが，r 次平均収束しない例

次のような確率関数 p_n に従う確率変数 X_n について考える．

$$\begin{aligned} p_n(0) &= (n-1)/n \\ p_n(n) &= 1/n \end{aligned} \tag{45}$$

<u>確率収束の成立の確認</u>　$(\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \epsilon\right) = 1, \forall\epsilon > 0 \iff X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X)$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0, \forall\epsilon > 0 \tag{46}$$

より，$X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} 0$ が成立．

<u>平均収束の不成立の確認</u>　$(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n(\omega) - X(\omega)|^r p(\omega)d\omega = 0 \iff X_n \xrightarrow{L^r} X)$

$$\int_\Omega |X_n(\omega) - 0|^r p(\omega)d\omega = n^{r-1} \tag{47}$$

より，$r \geq 1$ のとき，$X_n \xrightarrow{L^r} 0$ は不成立．

法則収束するが，確率収束しない例 (1/2)

確率空間 $([0,1], \mathcal{B}, P)$ で，P は $[0,1]$ 上の一様分布を与える確率測度とする．このとき，次のような確率変数 X_n を考える．

$$\text{if } n \text{ is odd:} \qquad X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{48}$$

$$\text{if } n \text{ is even:} \qquad X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \le \omega \le 1/2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{49}$$

<u>法則収束の成立の確認</u>

$(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(X_n(\omega))p(\omega)d\omega = \int_\Omega f(X(\omega))p(\omega)d\omega, \forall f$: 連続有界関数 $\iff X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X)$

任意の連続有界関数 $f(x)$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ について，

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(X_n(\omega))p(\omega)d\omega &= \int_0^1 f(X_n(\omega))d\omega \\ &= (f(0) + f(1))/2 \end{aligned} \tag{50}$$

が成り立つので，$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X_1$ が成り立つ．

法則収束するが，確率収束しない例 (2/2)

確率空間 $([0,1], \mathcal{B}, P)$ で，P は $[0,1]$ 上の一様分布を与える確率測度とする．このとき，次のような確率変数 X_n を考える．

$$\text{if } n \text{ is odd:} \qquad X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{51}$$

$$\text{if } n \text{ is even:} \qquad X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \le \omega \le 1/2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{52}$$

確率収束の不成立の確認　$(\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \epsilon\right) = 1, \forall \epsilon > 0 \iff X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X)$

n が even のとき，$P(|X_n - X_1| < 1) = 0$ より，$X_n \xrightarrow{\mathscr{P}} X_1$ は不成立．