Rpta Tutorial 2

1) Hallar las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-2,2,4)$ y es perpendicular al plano $2x - y + 5z = 12$

Solución: Consideramos $P(-2,2,4)$ y para el vector de dirección tomamos la normal del plano:

$$\vec{n} = \langle 2, -1, 5 \rangle = \vec{V}$$

Luego usamos las formas:

simétricas:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x-(-2)}{2} = \frac{y-(2)}{-1} = \frac{z-4}{5}$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{5}$$

$$\frac{x+2}{2} = 2 - y = \frac{z-4}{5}$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= -2 + 2t \\ y &= 2 - t \\ z &= 4 + 4t \end{aligned}$$

2) Encuentre la ecuación del plano que pasa por la recta de la intersección de los planos $x-y=1$, $y+2z=3$ y es perpendicular al plano $x+y-2z=1$.

Solución:

Recta intersección de los planos se puede encontrar asignando un parametro a y y resolviendo en función de t:

$$\begin{cases} x-t=1 \\ t+2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1+t \\ z=\dfrac{3-t}{2} \end{array}$$

Así unas ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

Identificamos que el punto $P(1,0,3/2)$ está sobre la recta y el vector $\vec{v}=\langle 1,1,-1/2\rangle$ es un vector de dirección de la recta intersección de los planos. Como el plano buscado contiene a la recta y es perpendicular al plano $x+y-2z=1$, entonces su vector normal es perpendicular al vector $\vec{v}$ y al vector normal del plano dado.

El vector normal de $x+y-2z=1$ es $\vec{n}_1=\langle 1, 1, -2\rangle$. Luego un vector normal al plano buscado puede ser:

$$\vec{n}=\vec{n}_1 \times \vec{v}$$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{n}=\left(-1/2+2\right)\hat{i}-\left(1/2+2\right)\hat{j}+(1-1)\hat{k}$$

$$=\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}j+0k=\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right\rangle$$

Ecuación del plano:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Tomamos $(x_0, y_0, z_0)=P=(1, 0, 3/2)$

$\frac{3}{2}(x-1)-\frac{3}{2}(y-0)+0\left(z-\frac{3}{2}\right)=0$

$\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y=0$

Multiplicando por $\frac{2}{3}$:

$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}(0)$

$\boxed{x-y-1=0}$

3) Identifique y bosqueje la gráfica de cada superficie. Determine las trazas con los planos coordenados

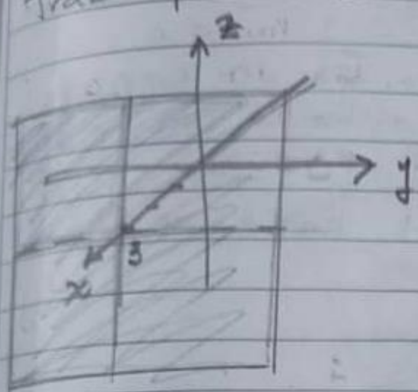
a) $x=3$

Es un plano paralelo al plano YZ que pasa por $x=3$

Traza plano XY: $x=3$ recta paralela al eje Y

Traza plano XZ: $x=3$ recta paralela al eje Z

Traza plano YZ : No hay



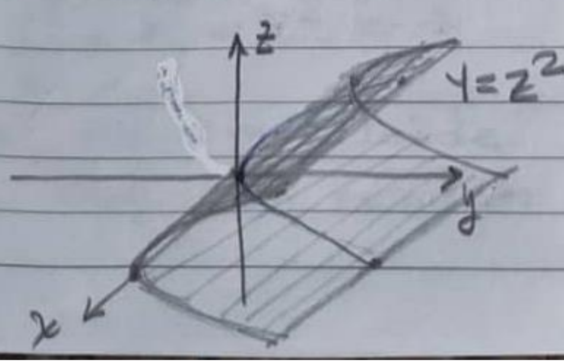
b) $Y = Z^2$

Superficie cilíndrica generada por la curva $Y = Z^2$ en el plano YZ y por rectas paralelas al eje X

Traza Plano XY : $Y = 0$ (Eje X)

Traza Plano YZ : $Y = Z^2$

Traza Plano XZ : $Z^2 = 0 \Rightarrow Z = 0$
(Eje X)



c) $x^2 = y^2 + 4z^2$

$x^2 - y^2 - 4z^2 = 0$ Es un cono centrado con respecto al eje x

Traza plano xy: hacemos $z=0$

$x^2 - y^2 = 0$

$y = \pm x$

Son dos rectas

Traza plano xz: hacemos $y=0$

$x^2 - 4z^2 = 0$

$z = \pm \frac{1}{4} x$

Son dos rectas

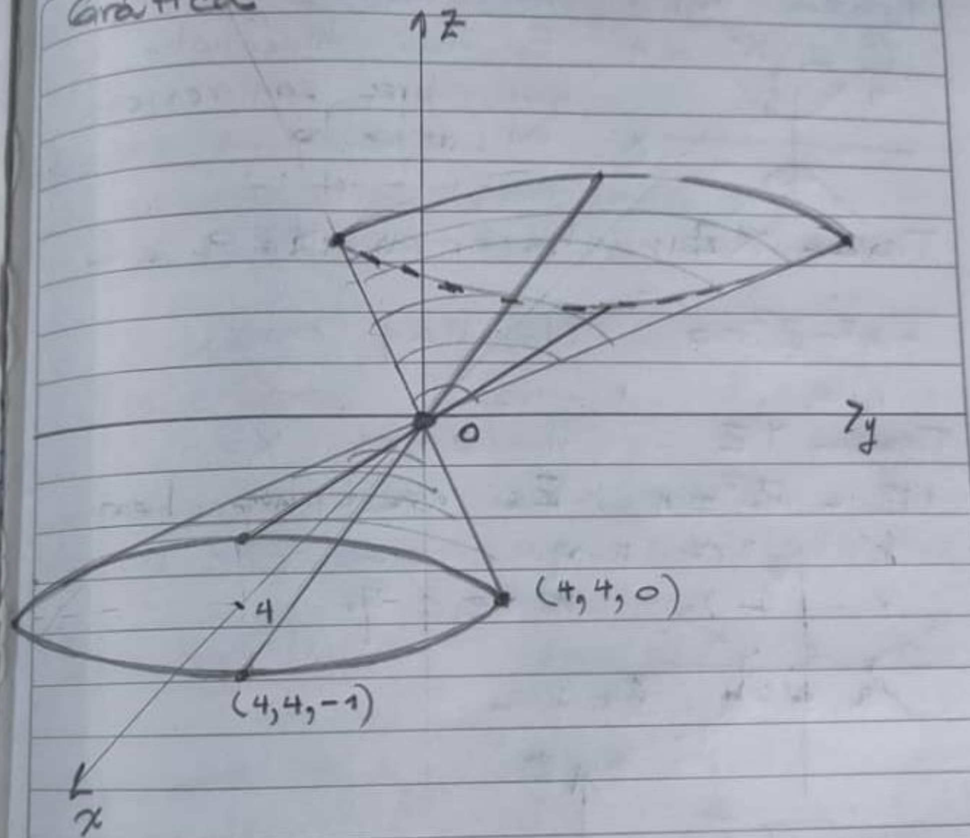
Traza plano yz: Hacemos $x=0$

$-y^2 - 4z^2 = 0$

$y^2 + 4z^2 = 0$

representa al punto $(0,0,0)$

Gráfica



d) $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

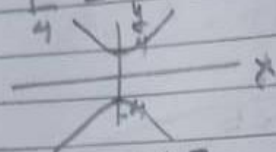
Dividiendo por 4 :

$$\frac{y^2}{4} - x^2 - z^2 = 1$$

Es una hiperloide de dos ramas que abre con respecto al eje Y

Traza XY : Hacemos $Z=0$

$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ Es una hipérbola que abre con respecto al eje Y

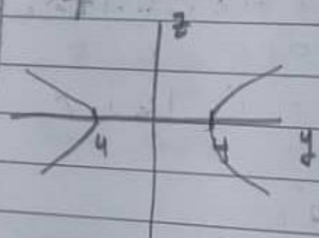


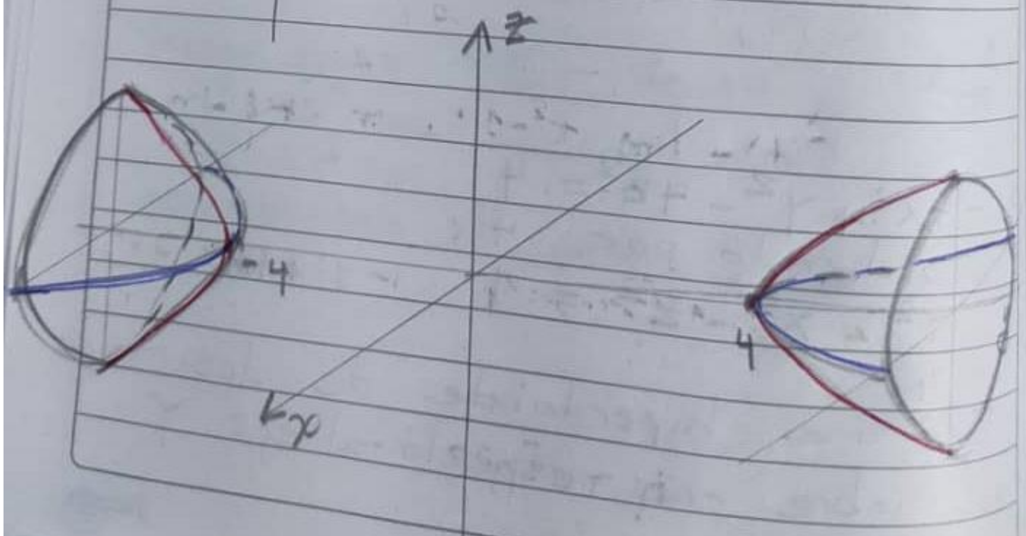
Traza XZ : hacemos $y=0$

$-x^2 - z^2 = 0$ No hay traza

Traza YZ : Hacemos $X=0$

$\frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ Es una hipérbora que abre con respecto al eje y:





a) $\vec{r}(t) = \dfrac{t^2-t}{t-1}\hat{i} + \sqrt{t+8}\,\hat{j} + \dfrac{\operatorname{sen}\pi t}{\ln t}\hat{k}$

Dominio:

Funciones componentes

$f(t) = \dfrac{t^2-t}{t-1}$ $\quad$ $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$

$g(t) = \sqrt{t+8}$ $\quad$ $\operatorname{Dom} g = [-8, +\infty)$

$h(t) = \dfrac{\operatorname{sen}\pi t}{\ln t}$ $\quad$ $\operatorname{Dom} h = t > 0$ y $t \neq 1$

$(0,1) \cup (1, +\infty)$

$\operatorname{Dom} r = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} h$

$= (0,1) \cup (1, +\infty)$

b) $\lim\limits_{t \to 1} \vec{r}(t) = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^2-1}{t-1}\, i + \lim\limits_{t \to 1} \sqrt{t+8}\, j + \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}\pi t}{\ln t}\, k$

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\cancel{(t-1)}(t+1)}{\cancel{t-1}}\, i + \sqrt{1+8}\, j + \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\pi \cos \pi t}{\frac{1}{t}}\, k$

$= (1+1)\, i + 3j + \dfrac{\pi \cos \pi}{\frac{1}{1}}\, k$

$= 2i + 3j - \pi k$

c) Es continua en su dominio.

5) Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ es la intersección de las superficies $z = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$. A partir de este hecho grafique la curva.

Solución Tenemos que demostrar que las ecuaciones paramétricas satisfacen las ecuaciones de las superficies:

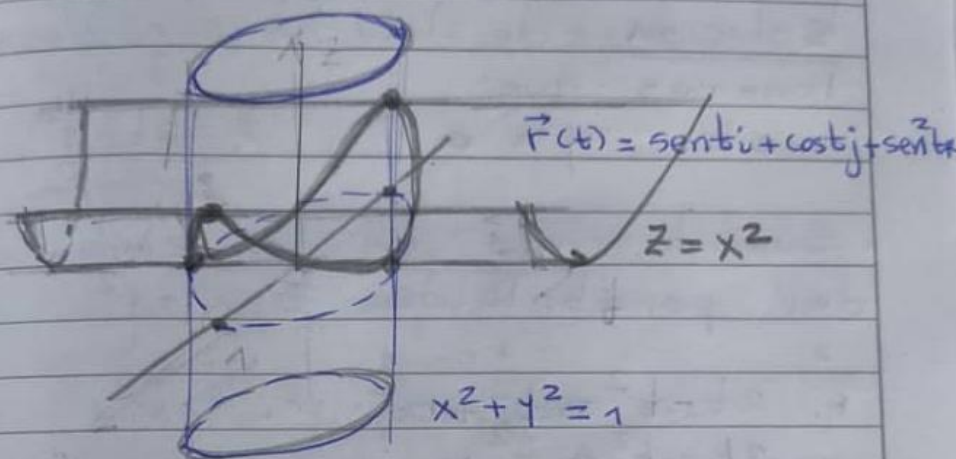
En $z = x^2$, como $x = \operatorname{sen} t$ y $z = \operatorname{sen}^2 t$ vemos que la ecuación se satisface

$$z = \operatorname{sen}^2 t = x^2 = (\operatorname{sen} t)^2$$

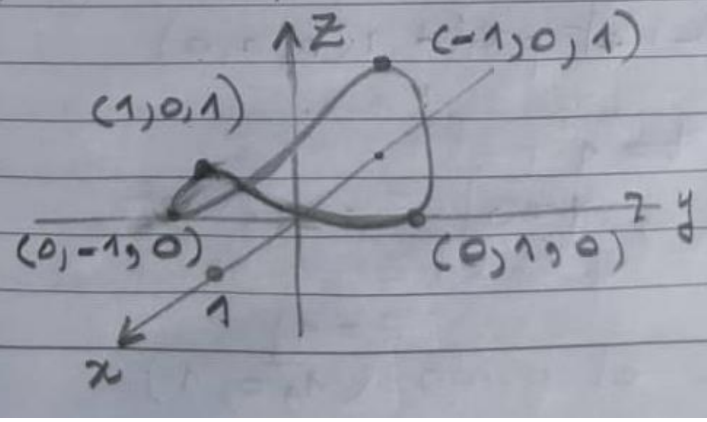
Para $x^2 + y^2 = 1$, al sustituir $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$, nos

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Tenemos que las gráficas de $z=x^2$ y $x^2+y^2=1$ son las superficies cilíndricas



t	$x=\text{sen}\,t$	$y=\cos t$	$z=\text{sen}^2 t$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1
2π	0	1	0



6) ¿En qué puntos corta la curva $\vec{r}(t) = ti + (2t - t^2)k$ al paraboloide $z = x^2 + y^2$?

Solución: de la función vectorial tenemos que:

$x = t \quad y = 0 \quad y \quad z = 2t - t^2$

Sustituyendo en la ecuación del paraboloide. $z = x^2 + y^2$

$$2t - t^2 = t^2 + 0^2$$
$$2t - t^2 = t^2$$
$$2t^2 - 2t = 0$$
$$2t(t-1) = 0$$
$$t = 0 \qquad t = 1$$

Sustituimos en la función vectorial:

Para $t = 0$

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 2(0) - 0^2 = 0$

Resulta el punto $(0,0,0)$

Para $t = 1$

$x = 1, \quad y = 0 \quad z = 2(1) - 1^2$

$z = 2 - 1$

$z = 1$

Resulta el punto $(1, 0, 1)$

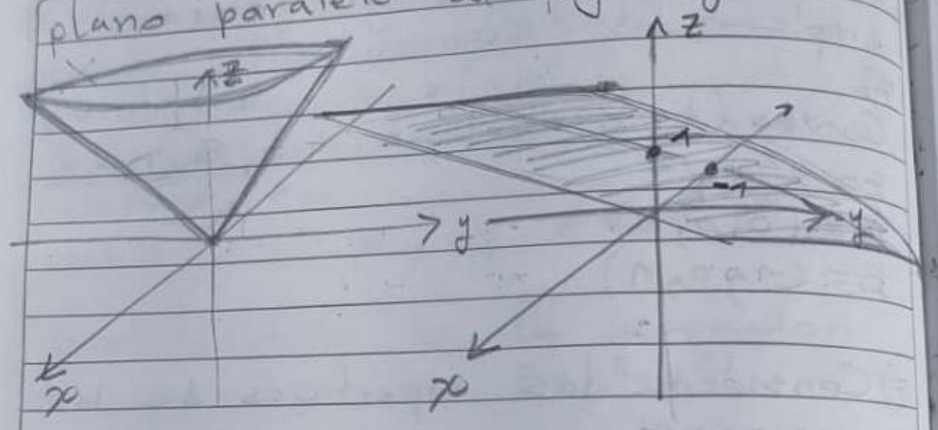
Verificar usando geogebra.
emplea los comandos:

Curva $(t, 0, 2t-t^2, t, -3, 3)$
$z = x^2+y^2$
$A = (0,0,0)$
$B = (1,0,1)$

7) Considere las superficies de las ecuaciones
$z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = x+1$
a) Identifique las superficies y haga un bosquejo de ambas
b) Encuentre una función vectorial $\vec{r}$ que describa la curva C de intersección de ambas superficies para $y \geq 0$
c) Dibuje la curva C y verifique que el punto $(1, \sqrt{3}, 2)$ está en la curva.

Solución:
a) $z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2 - x^2 - y^2 = 0$
representa la parte superior de un cono y $z = x+1$ un

plano paralelo al eje y



b) Podemos parametriza C tomando $x = t$:

$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{t^2 + y^2}$

$z = x + 1 \Rightarrow z = t + 1$

Igualando:

$t + 1 = \sqrt{t^2 + y^2}$

$(t+1)^2 = t^2 + y^2$

$y^2 = \cancel{t^2} + 2t + 1 - \cancel{t^2}$

$y = \sqrt{2t+1}$ para $y \geq 0$

$\vec{r}(t) = t\,i + \sqrt{2t+1}\,j + (t+1)\,k$

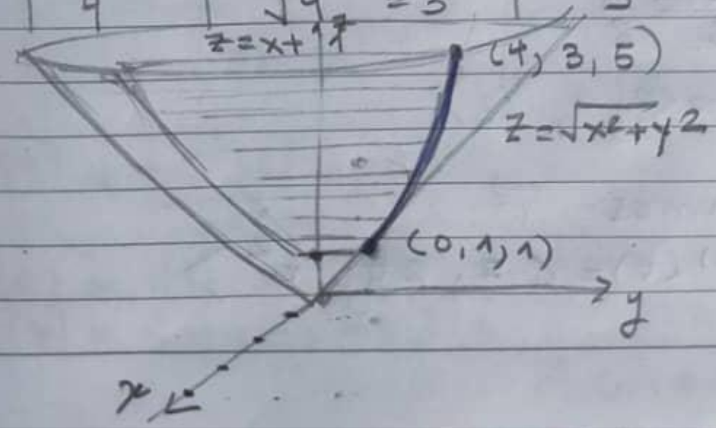
c) Dibuje la curva C y verifique que el punto $(1, \sqrt{3}, 2)$ está en C.

Para saber si $(1, \sqrt{3}, 2) \in C$ buscamos t tal que:

$$\begin{cases} t = 1 \\ \sqrt{2t+1} = \sqrt{3} \\ t+1 = 2 \end{cases}$$

Vemos que para $t = 1$, $\vec{r}(1) = \langle 1, \sqrt{3}, 2 \rangle$

t	$x = t$	$y = \sqrt{2t+1}$	$z = t+1$
0	0	1	1
1	1	$\sqrt{3} = 1.73$	2
2	2	$\sqrt{5} =$	3
3	3	$\sqrt{7} =$	4
4	4	$\sqrt{9} = 3$	5



8) Considere $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$

con $P(0,0,0)$ y $Q(2,1,1/3)$. Hallar

ⓐ ~~Longitud~~ de arco de P a Q

Veamos para que valor de t

i) $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2t=0 \\ t^2=0 \\ \frac{1}{3}t^3=0 \end{array}\right] \Rightarrow t=0$$

Es decir $\vec{r}(0) = (0,0,0)$

ii) $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle = \langle 2, 1, 1/3 \rangle$

$$\left.\begin{array}{l} 2t=2 \\ t^2=1 \\ \frac{t^3}{3}=\frac{1}{3} \end{array}\right] \Rightarrow t=1$$

$\vec{r}(1) = \langle 2, 1, 1/3 \rangle$

Derivamos $\vec{r}$:

$\vec{r}'(t) = \langle 2, 2t, t^2 \rangle$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4t^2 + t^4}$$

$$= \sqrt{(2+t^2)^2}$$

$$= 2 + t^2$$

Luego la longitud de arco es:

$$L = \int_0^1 \|r'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^1 (2+t^2)\, dt$$

$$= 2t + \frac{t^3}{3} \Big]_0^1 = 2 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

b) Curvatura en el punto Q

Es decir $t = 1$.

$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r(t)\|^3}$$

$\vec{r}'(t) = \langle 2, 2t, t^2 \rangle \Rightarrow \vec{r}'(1) = \langle 2, 2, 1 \rangle$

$\vec{r}''(t) = \langle 0, 2, 2t \rangle \Rightarrow \vec{r}''(1) = \langle 0, 2, 2 \rangle$

$\vec{r}(1) = \langle 2, 1, 1/3 \rangle$

$$\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4-2)\hat{i} - (4-0)j + (4-0)k$$

$$= 2\hat{i} - 4j + 4k$$

$$\|\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1)\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 16}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

$$\|\vec{r}'(1)\| = \sqrt{4 + 1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{46}{9}} = \frac{\sqrt{46}}{3}$$

$$K = \frac{6}{\left(\frac{\sqrt{46}}{3}\right)^3} = \frac{6}{\frac{46\sqrt{46}}{27}} = \frac{162}{46\sqrt{46}}$$

$$= 0,52$$

c) Plano normal a la gráfica en el punto $Q(1,1,1)$

El plano normal está definido $\vec{n} = \vec{r}\,'(t)$ y pasa por $Q(1,1,1)$

$\vec{n} = \langle 2,2,1 \rangle$ y $Q(1,1,1)$

$$2(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$2x - 2 + 2y - 2 + z - 1 = 0$$

$$2x + 2y + z - 5 = 0$$