Clase 1

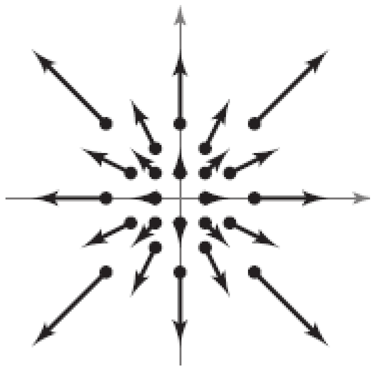
Matemática IV

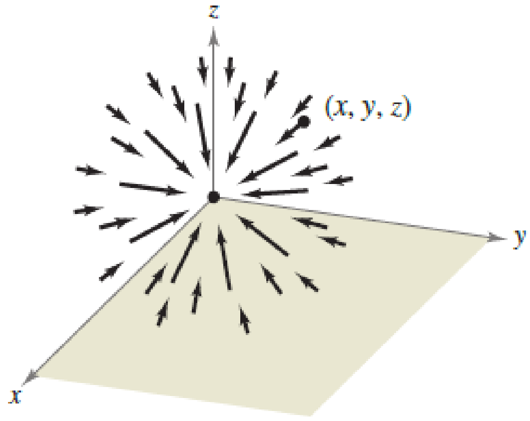
Repasemos algunas definiciones…

DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Un **campo vectorial sobre una región plana *R*** es una función **F** que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y)$ a cada punto en R.

Un **campo vectorial sobre una región sólida *Q* en el espacio** es una función **F** que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ a cada punto en Q.

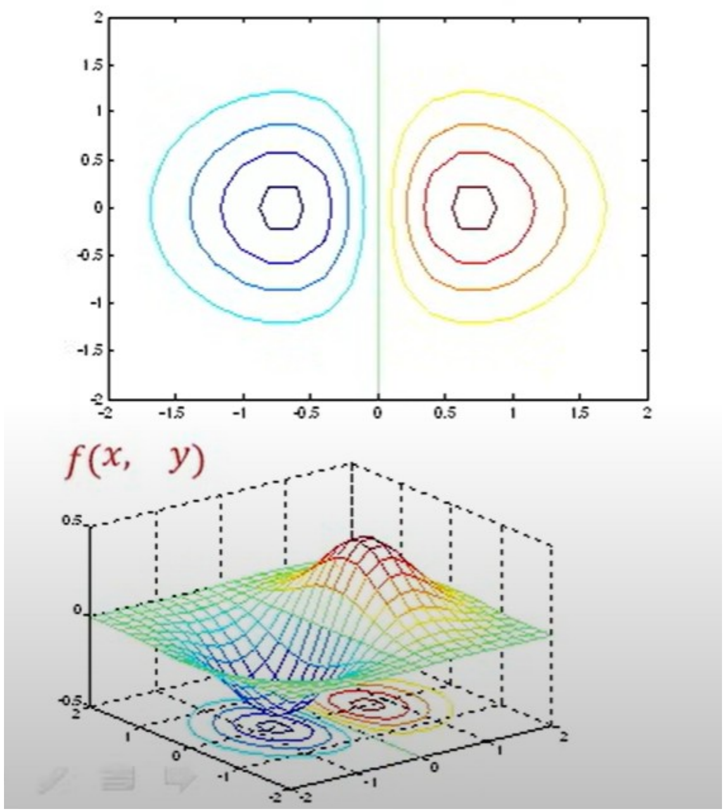




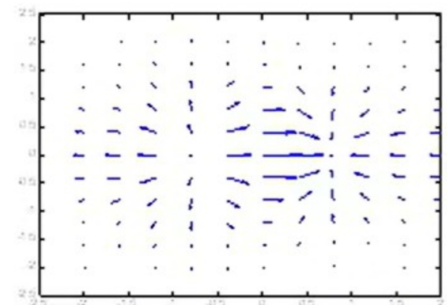
Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.

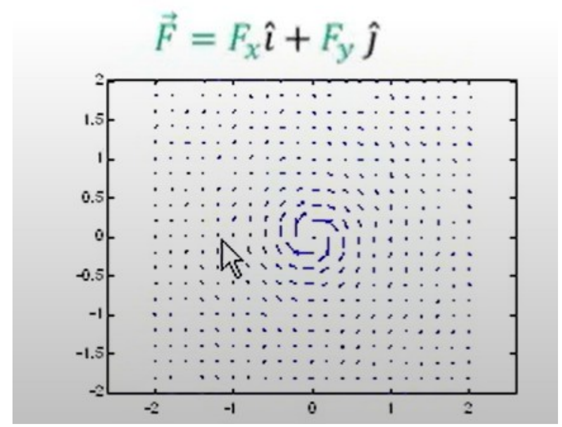
Repasemos algunas definiciones…

Campo escalar



Campo vectorial





Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.
Camacho, Andrés. Uso del cálculo diferencial en campos escalares y vectoriales.

Repasemos algunas definiciones…

EJEMPLO 1 Dibujo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores del campo vectorial dado por

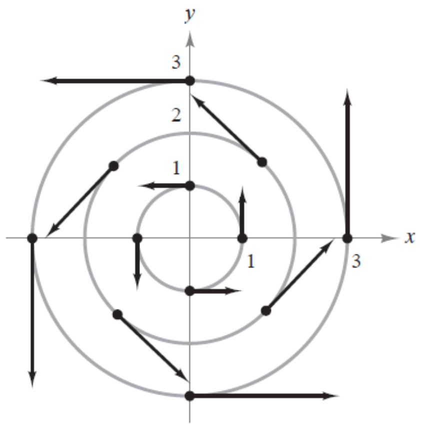
$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Solución Se podrían trazar los vectores en varios puntos del plano, al azar. Sin embargo, es más ilustrativo trazar vectores de magnitud igual. Esto corresponde a encontrar curvas de nivel en los campos escalares. En este caso, vectores de igual magnitud se encuentran en círculos.

$$\|\mathbf{F}\| = c \qquad \text{Vectores de longitud } c.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad \text{Ecuación del círculo.}$$



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Para empezar a hacer el dibujo, se elige un valor de c y se dibujan varios vectores en la circunferencia resultante. Por ejemplo, los vectores siguientes se encuentran en la circunferencia unitaria.

Punto	*Vector*
$(1, 0)$	$\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$
$(0, 1)$	$\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$
$(-1, 0)$	$\mathbf{F}(-1, 0) = -\mathbf{j}$
$(0, -1)$	$\mathbf{F}(0, -1) = \mathbf{i}$

Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.

Repasemos algunas definiciones…

DEFINICIÓN DE CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS
Un campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama **conservativo** si existe una función diferenciable f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se llama **función potencial** para $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 4 Campos vectoriales conservativos

a) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo. Para comprobarlo, considerar la función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Como

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{F}$$

se sigue que $\mathbf{F}$ es conservativo.

Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.

Repasemos algunas definiciones…

DEFINICIÓN DEL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El rotacional de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.

Repasemos algunas definiciones…

TEOREMA 15.2 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL ESPACIO

Suponer que M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en una esfera abierta Q en el espacio. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo si y sólo si

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}.$$

Es decir, $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.

Repasemos algunas definiciones…

DEFINICIÓN DE DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \qquad \text{Plano.}$$

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad \text{Espacio.}$$

Si div $\mathbf{F} = 0$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es de **divergencia nula**.

La notación de producto escalar usada para la divergencia proviene de considerar ∇ como un **operador diferencial**, como sigue.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}\right] \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.

Repasemos algunas definiciones…

Ejemplo

Dado $\widehat{F}(x,y,z) = e^{xz}cos(yz)\,\widehat{\mathbf{i}} + e^{xz}sen(yz)\widehat{\mathbf{j}} - e^{xz}\,\widehat{\mathbf{k}}$. Encuentre $div\,\widehat{F}$ y el $rot\,\widehat{F}$.

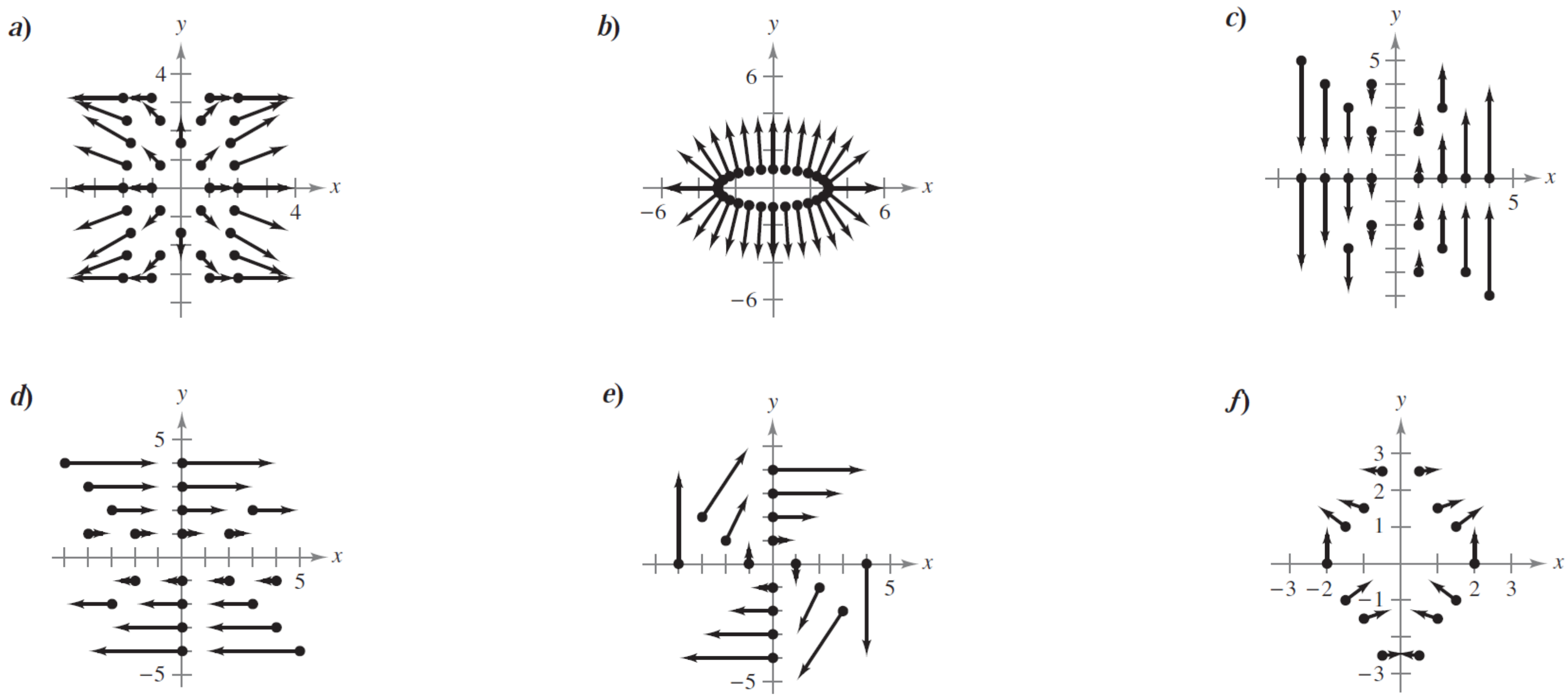
Solución

$$div\,\widehat{F} = \widehat{\nabla}\cdot\widehat{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \Big(2zcos(yz) - x\Big)e^{xz}.$$

$$\begin{aligned} rot\,\widehat{F} &= \widehat{\nabla}\times\widehat{F} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^{xz}cos(yz) & e^{xz}sen(yz) & -e^{xz} \end{vmatrix} \\ &= -e^{xz}\big[xsen(yz) + ycos(yz)\big]\,\widehat{\mathbf{i}} + e^{xz}\Big(z + xcos(yz) - ysen(yz)\Big)\widehat{\mathbf{j}} + 2ze^{xz}sen(yz)\,\widehat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Bibliografía usada: Guerrero, Atilio. Guía de Cálculo Vectorial. UNET 2016

Asocie el campo vectorial con su gráfica:



1. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, \operatorname{sen} y \rangle$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2 \right\rangle$

Bibliografía usada: Ron Larson & Bruce H. Edwars. Cálculo de varias variables. Novena edición. Volumen 2.