CÁLCULO

Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Sexta edición

Volumen 1

ROLAND E. LARSON

ROBERT P. HOSTETLER

The Pennsylvania State University
The Behrend College

BRUCE H. EDWARDS

University of Florida

Con la colaboración de

DAVID E. HEYD

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Traducción

LORENZO ABELLANAS RAPÚN
Catedrático de Métodos Matemáticos de la Física
Universidad Complutense de Madrid

Consultores

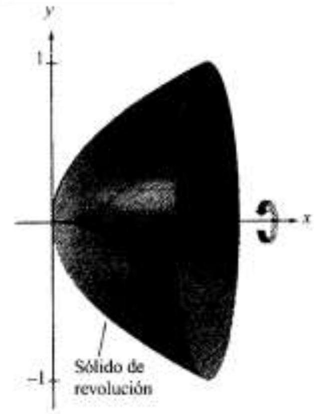
JOSÉ LUIS PÉREZ LÓPEZ
Profesor Titular del Departamento de Matemáticas

ORLANDO LEAL SÁNCHEZ
Docente jubilado

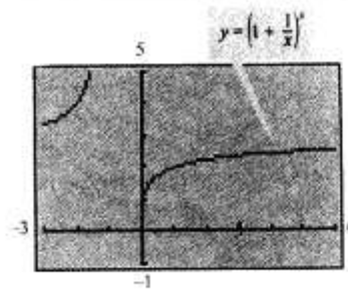
Politécnico Jaime Isaza Cadavid
Medellín, Colombia

McGraw Hill

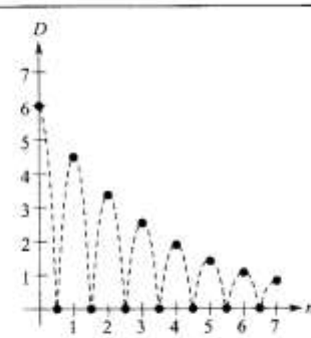
MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO



y
1
-1
x
Sólido de revolución



$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
5
-3
6
-1



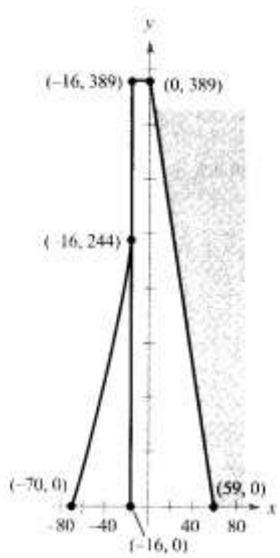
D
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7
n

Capítulo 6

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

HOOVER DAM

La presa Hoover, una de las presas de hormigón más grandes del mundo, se apoya en las paredes del Black Canyon y en su propia estructura para regular las aguas del río Colorado.



Sección de la presa

Construcción de una presa

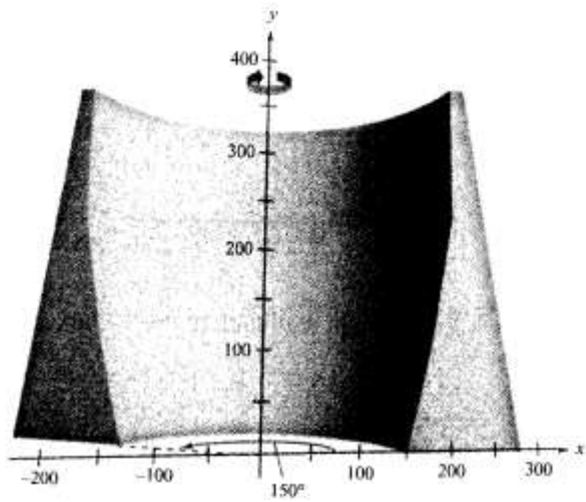
Las presas se proyectaron al principio para asegurar reservas de agua en las épocas de sequía. Conforme los conocimientos técnicos han progresado, han sido dedicadas a otros menesteres, tales como formación de lagos de recreo, saltos generadores de energía o previsión de riadas. Junto con esos beneficios, una presa puede implicar daños ecológicos y obliga a recolocar a las personas e incluso la fauna de la zona. Asimismo, una presa de construcción deficiente supone un riesgo de catástrofe para la región de su entorno.

Uno de los diseños empleados en la construcción de presas es la presa de arco. Suele utilizarse en cañones estrechos y se curva hacia el agua que contiene. La fuerza del agua presiona las paredes de la presa contra el cañón, de manera que la roca hace de soporte adicional para la estructura. Eso permite ahorrar materiales en la construcción de la presa, por comparación con las de soporte vertical.

Una sección de una presa de arco típica sigue el modelo del esquema (a la izquierda) y responde a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}03x^2 + 7{,}1x + 350, & -70 \leqslant x \leqslant -16 \\ 389, & -16 < x < 0 \\ -6{,}593x + 389, & 0 \leqslant x \leqslant 59 \end{cases}$$

Al girar esa sección en torno al eje y se forma la presa de arco. El número de grados que se gira y la anchura de la base varían de una a otra, dependiendo sobre todo de las variaciones que pueda sufrir el nivel del agua. Una posible configuración, con giro de 150° y base de 150 pies, se muestra en el esquema de la página siguiente.



CUESTIONES

1. Calcular el área de una sección de la presa.
2. Planificar una estrategia para estimar el volumen de hormigón necesario para construir la presa.
3. Estimar, con esa estrategia, el volumen de hormigón necesario en la construcción de la presa del esquema anterior.

6

Aplicaciones de la integral

CONTENIDO ▪
Áre de una región entre dos curvas ▪
Área de una región entre dos curvas que se cortan ▪

6.1 Área de una región entre dos curvas

Área de una región entre dos curvas

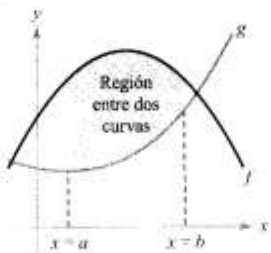
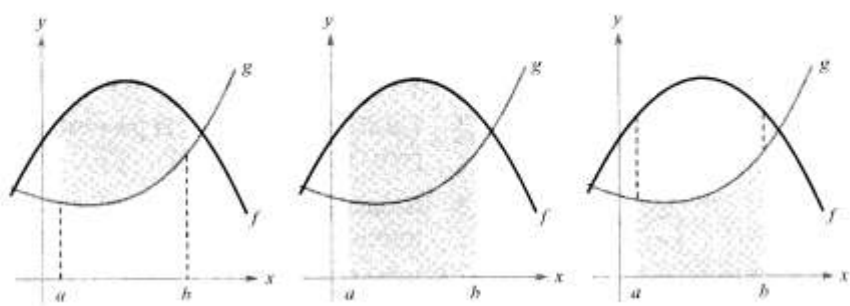


FIGURA 6.1

El cálculo del área de una región *bajo* una curva mediante integrales definidas se extiende sin esfuerzo a regiones comprendidas *entre* dos curvas. Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Si, como sucede en la Figura 6.1, las dos gráficas están por encima del eje x y la de f por encima de la de g, podemos interpretar el área de la región entre ellas como el área bajo f menos el área bajo g, como sugiere la Figura 6.2.



Área de la región entre f y g	=	Área de la región bajo f	−	Área de la región bajo g

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \quad = \quad \int_a^b f(x)\, dx \quad - \quad \int_a^b g(x)\, dx$$

FIGURA 6.2

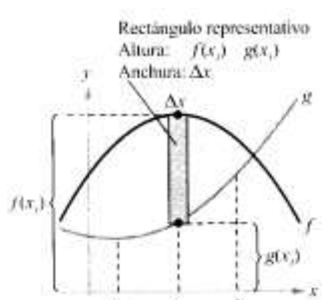


FIGURA 6.3

Con el fin de verificar que el resultado de la Figura 6.2 es razonable, partimos $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de anchura Δx. Entonces, como ilustra la Figura 6.3, formamos un **rectángulo representativo** de anchura Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i está en el i-ésimo subintervalo. El área de ese rectángulo representativo es

$$\Delta A_i = (\text{altura})(\text{anchura}) = [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

Sumando las áreas de los n rectángulos y tomando el límite para $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

Como f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ es continua también, luego el límite existe. Por tanto, el área de la región dada es

$$\text{Área} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leqslant f(x)$ para todo x en $[a, b]$, el área de la región acotada por las gráficas de f y g entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

En la Figura 6.1 las gráficas de f y g estaban por encima del eje x. Pero esa circunstancia no es necesaria. El mismo integrando $[f(x) - g(x)]$ sirve cuando f y g son continuas y $g(x) \leqslant f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Este resultado se ilustra en la Figura 6.4.

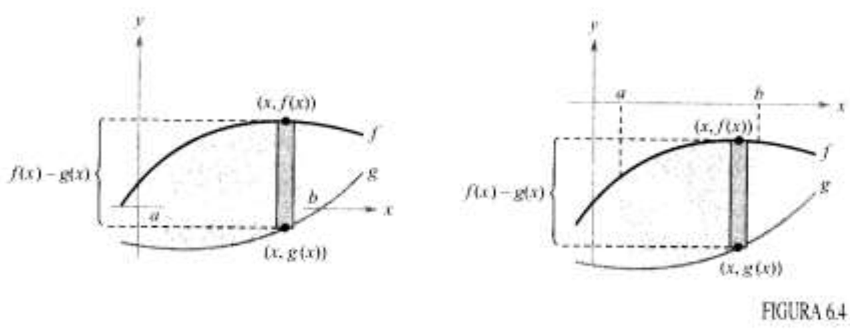


FIGURA 6.4

Nota. La altura de un rectángulo representativo es $f(x) - g(x)$, sea cual sea la posición relativa del eje x, como muestra la Figura 6.4.

Los rectángulos representativos se utilizan en varias aplicaciones a lo largo de este capítulo. Un rectángulo vertical (de anchura Δx) implica integración con respecto a x, mientras un rectángulo horizontal (de anchura Δy) implica integración con respecto a y.

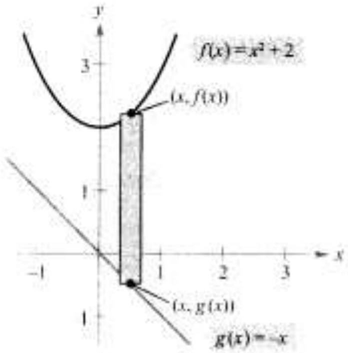


FIGURA 6.5
Región acotada por la gráfica de f, la gráfica de g, $x = 0$, y $x = 1$.

EJEMPLO 1 Cálculo del área de una región entre dos curvas

Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$, y $x = 1$.

Solución: Sean $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \leqslant f(x)$ para todo x en $[0, 1]$ (véase Figura 6.5). Así pues, el área del rectángulo representativo es

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x = [(x^2 + 2) - (-x)]\Delta x$$

y el área de la región

$$\begin{aligned} A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

□

Área de una región entre dos curvas que se cortan

Las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ en el Ejemplo 1 no se cortan y los valores *a* y *b* se han dado explícitamente. Un problema más común consiste en hallar el área de una región comprendida entre dos gráficas que *se cortan*, de manera que los valores de *a* y *b* han de ser calculados previamente.

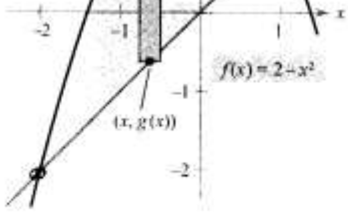


FIGURA 6.6
Región acotada por las gráficas de f y g.

EJEMPLO 2 Una región determinada por dos gráficas que se cortan

Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$.

Solución: En la Figura 6.6 observamos que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para determinar estos puntos, hacemos $f(x) = g(x)$ y despejamos x.

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= x && \text{Igualar } f(x) \text{ con } g(x) \\ -x^2 - x + 2 &= 0 && \text{Expresar en forma canónica} \\ -(x + 2)(x - 1) &= 0 && \text{Factorizar} \\ x &= -2 \text{ o } 1 && \text{Despejar } x \end{aligned}$$

Así pues, $a = -2$ y $b = 1$. Como $g(x) \leqslant f(x)$ para todo x del intervalo $[-2, 1]$, el rectángulo representativo tiene área

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x = [(2 - x^2) - x]\Delta x$$

y el área de la región resulta ser

$$A = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

□

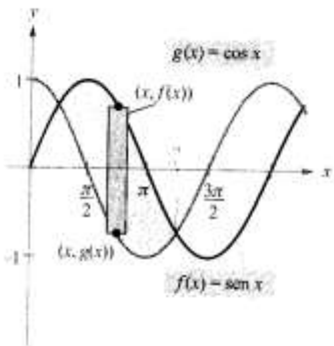


FIGURA 6.7
Una de las regiones acotadas por las gráficas de las funciones seno y coseno.

EJEMPLO 3 Una región determinada por dos gráficas que se cortan

Las gráficas del seno y del coseno se cortan infinitas veces, encerrando regiones de áreas iguales (véase Figura 6.7). Calcular el área de una de esas regiones.

Solución:

$\text{sen } x = \cos x$	Igualar $f(x)$ a $g(x)$
$\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = 1$	Dividir por $\cos x$
$\text{tg } x = 1$	Identidad trigonométrica
$x = \dfrac{\pi}{4} \text{ o } \dfrac{5\pi}{4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$	Despejar x

Por tanto, $a = \pi/4$ y $b = 5\pi/4$. Puesto que $\text{sen } x \geqslant \cos x$ en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, el área de la región es

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\text{sen } x - \cos x]dx = \left[-\cos x - \text{sen } x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

□

Si dos curvas se cortan en más de dos puntos, hay que localizar los puntos de intersección y averiguar, en cada uno de los intervalos delimitados por esos puntos, cuál de las gráficas está por encima de la otra.

EJEMPLO 4 Curvas que se cortan en más de dos puntos

Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

Solución: Para empezar, igualamos $f(x)$ a $g(x)$ con el fin de obtener, al despejar x, las coordenadas x de los puntos de intersección.

$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$	Igualar $f(x)$ con $g(x)$
$3x^3 - 12x = 0$	Expresar en forma canónica
$3x(x^2 - 4) = 0$	Factorizar
$x = -2, 0, 2$	Despejar x

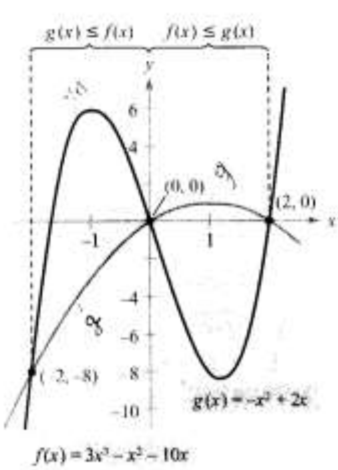


FIGURA 6.8
En $[-2, 0]$, $g(x) \leqslant f(x)$, y en $[0, 2]$, $f(x) \leqslant g(x)$

Así pues, las dos gráficas se cortan en $x = -2$, 0 y 2. En la Figura 6.8 vemos que $g(x) \leqslant f(x)$ en $[-2, 0]$, mientras que $f(x) \leqslant g(x)$ en $[0, 2]$. Por consiguiente, necesitamos dos integrales, una en $[-2, 0]$ y otra en $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx \\ &= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} \\ &= -(12 - 24) + (-12 + 24) \\ &= 24 \end{aligned}$$

□

Nota. En el Ejemplo 4 se obtendría una respuesta incorrecta si se integrase entre −2 y 2, ya que tal integración daría

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{2} (3x^3 - 12x)dx = 0$$

Si una frontera de la región es una función de y, suele ser conveniente usar rectángulos representativos *horizontales* y hallar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se pueden usar

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]dx}_{\text{en la variable } x} \qquad \text{Rectángulos verticales}$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]dy}_{\text{en la variable } y} \qquad \text{Rectángulos horizontales}$$

donde (x_1, y_1) y (x_1, y_2) son puntos adyacentes de intersección de las dos curvas o puntos de las líneas frontera especificadas.

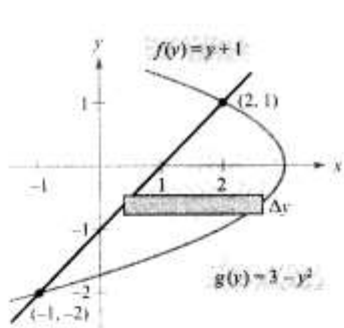


FIGURA 6.9
Rectángulos horizontales (integración con respecto a y).

EJEMPLO 5 Rectángulos representativos horizontales

Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

Solución: Consideremos $g(y) = 3 - y^2$ y $f(y) = y + 1$. Estas dos curvas se cortan cuando $y = -2$ y cuando $y = 1$ (véase Figura 6.9). Como $f(y) \leqslant g(y)$ en ese intervalo, se tiene

$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)]\Delta y$$

Por tanto, el área es

$$\begin{aligned}A &= \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]dy \\ &= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)dy \\ &= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

□

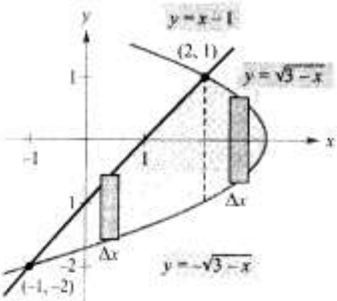


FIGURA 6.10
Rectángulos verticales (integración con respecto a x).

Nota. En el Ejemplo 5, al integrar en la variable y sólo es necesaria una integral. Si hubiéramos integrado en x, hubieran sido necesarias dos integrales, a saber

$$A = \int_{-1}^{2} [(x - 1) + \sqrt{3 - x}]dx + \int_{2}^{3} (\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x})dx$$

porque la curva dominante cambia en $x = 2$, como muestra la Figura 6.10.

En esta sección hemos desarrollado una integral para el área basada en un rectángulo como *elemento representativo*. En cada nueva aplicación del resto del capítulo, construiremos un elemento representativo adecuado, utilizando fórmulas previas al Cálculo, de sobra conocidas. A partir de ahí se obtendrá cada nueva fórmula integral sumando esos elementos representativos.

Fórmula conocida anterior al Cálculo ⇨ Elemento representativo ⇨ Nueva fórmula de integración

Por ejemplo, en esta sección hemos desarrollado la fórmula para el área así:

$$\boxed{A = (\text{altura})(\text{anchura})}$$

↓

$$\boxed{\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x}$$

↓

$$\boxed{A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx}$$

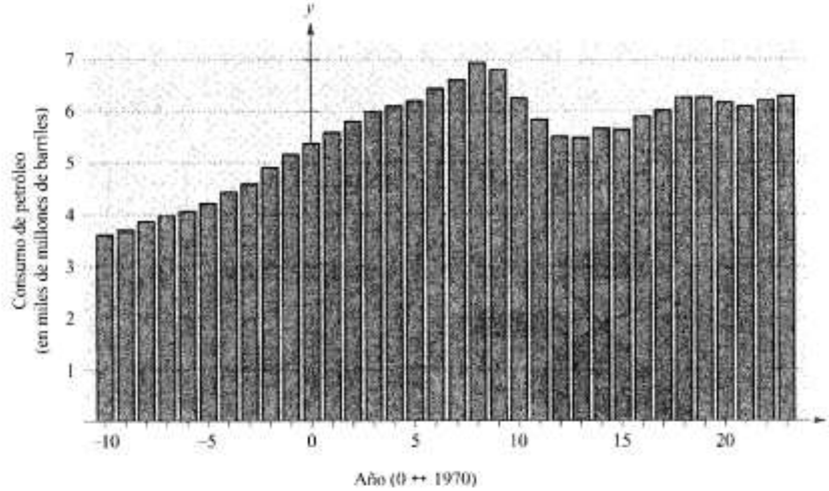


FIGURA 6.11

Entre 1960 y 1979, el consumo de petróleo en EE.UU. siguió aproximadamente una línea recta. Al final de los setenta, sin embargo, el precio del crudo subió drásticamente y el comportamiento del consumo cambió, como recoge el diagrama de barras. *(Fuente: U.S. Energy Information Administration.)*

EJEMPLO 6 Consumo de petróleo

El comportamiento del consumo de petróleo se ha modificado en los últimos años (véase Figura 6.11). El ritmo de consumo (en miles de millones de barriles) de petróleo en EE.UU. entre 1960 y 1979 admite el modelo

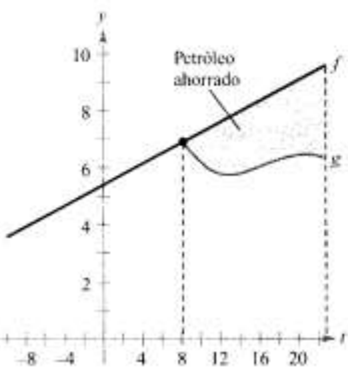


FIGURA 6.12
f: Ritmo de conjunto antes de 1979
g: Ritmo de conjunto después de 1979.

$$f(t) = 0{,}18t + 5{,}38, \qquad -10 \leqslant t \leqslant 9$$

donde $t = 0$ corresponde a 1970. De 1979 a 1993, el consumo admite el modelo

$$g(t) = -0{,}0029t^3 + 0{,}149t^2 - 2{,}42t + 18{,}38, \qquad 9 \leqslant t \leqslant 23$$

como indica la Figura 6.12. Hallar el ahorro total entre 1979 y 1993 como consecuencia de ese nuevo esquema de consumo.

Solución: Puesto que la gráfica del modelo anterior a 1979 está por encima de la del modelo vigente a partir de 1979 en el intervalo [9, 23], la cantidad de petróleo ahorrada viene dada por

$$\text{Fuel ahorrado} = \int_9^{23} [f(t) - g(t)]dt$$

Usando para f y g los modelos citados, encontramos que

$$\begin{aligned} \text{Fuel ahorrado} &= \int_9^{23} (0{,}0029t^3 - 0{,}149t^2 + 2{,}6t - 13)dt \\ &= \Big[0{,}000725t^4 - 0{,}049667t^3 + 1{,}3t^2 - 13t \Big]_9^{23} \\ &\approx 30{,}44 \text{ miles de millones de barriles} \end{aligned}$$

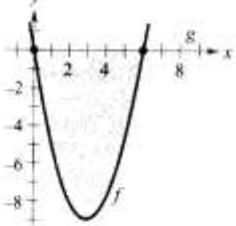
Por tanto, se ahorraron unos 30,44 miles de millones de barriles de petróleo. □

Ejercicios de la Sección 6.1

En los ejercicios 1-6, formular la integral definida que da el área de la región.

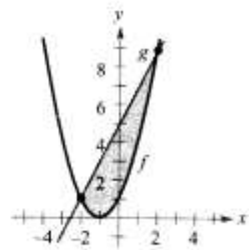
1. $f(x) = x^2 - 6x$

$g(x) = 0$



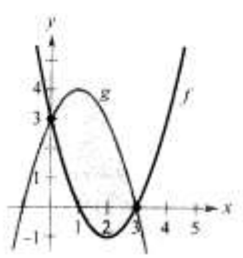
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$g(x) = 2x + 5$



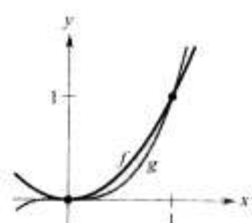
3. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$g(x) = -x^2 + 2x + 3$



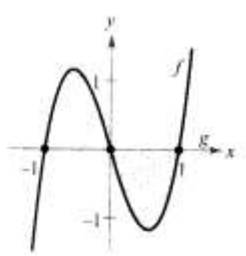
4. $f(x) = x^2$

$g(x) = x^3$



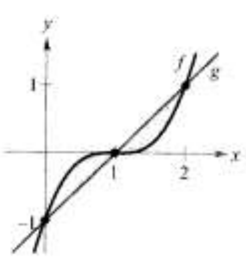
5. $f(x) = 3(x^3 - x)$

$g(x) = 0$



6. $f(x) = (x - 1)^3$

$g(x) = x - 1$



En los Ejercicios 7-10, el integrando es la diferencia entre dos funciones. Dibujar la gráfica de esas dos funciones y sombrear la región cuya área viene dada por la integral propuesta.

7. $\displaystyle\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2}\right] dx$ **8.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} [(1-x^2)-(x^2-1)]dx$

9. $\displaystyle\int_0^6 \left[4(2^{-x/3}) - \frac{x}{6}\right] dx$ **10.** $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 - \sec x)\, dx$

Aproximaciones En los Ejercicios 11 y 12, determinar qué valor aproxima mejor el área de la región acotada por las gráficas de f y g. (Elegir a la vista de un esbozo de la región, no haciendo cálculos.)

11. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = (x - 1)^2$

a) -2 *b)* 2 *c)* 10 *d)* 4 *e)* 8

12. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$

a) 1 *b)* 6 *c)* -3 *d)* 3 *e)* 4

En los Ejercicios 13-26, dibujar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y calcular su área.

13. $f(x) = x^2 - 4x, \quad g(x) = 0$

14. $f(x) = 3 - 2x - x^2, \quad g(x) = 0$

15. $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = 3x + 3$

16. $f(x) = -x^2 + 4x + 2, \quad g(x) = x + 2$

17. $y = x, \quad y = 2 - x, \quad y = 0$

18. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5$

19. $f(x) = \sqrt{3x} + 1, \quad g(x) = x + 1$

20. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x$

21. $f(y) = y^2, \quad g(y) = y + 2$

22. $f(y) = y(2 - y), \quad g(y) = -y$

23. $f(y) = y^2 + 1, \quad g(y) = 0, \quad y = -1, \quad y = 2$

24. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - y^2}}, \quad g(y) = 0, \quad y = 3$

25. $f(x) = \dfrac{4}{x}, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 4$

26. $g(x) = \dfrac{4}{2 - x}, \quad y = 4, \quad x = 0$

En los Ejercicios 27-36, representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las funciones y usar integración en la calculadora para hallar su área.

27. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3), \quad g(x) = x^2$

28. $f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad g(x) = -2x, \quad x = 1$

29. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 3 + 4x - x^2$

30. $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

31. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^2 - 4$

32. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^3 - 4x$

33. $f(x) = 1/(1 + x^2), \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$

34. $f(x) = 6x/(x^2 + 1), \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

35. $y = \sqrt{1 + x^3}, \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad x = 0$

36. $y = x\sqrt{\frac{4 - x}{4 + x}}, \quad y = 0, \quad x = 4$

En los Ejercicios 37-40, esbozar la región acotada por las gráficas de las funciones trascendentes y calcular su área.

37. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$

38. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \quad g(x) = \cos x, \quad \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$

39. $f(x) = xe^{-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

40. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = 2x + 1$

En los Ejercicios 41-44, representar la región acotada por las gráficas en la calculadora y usar integración en ella para calcular el área de la región.

41. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

42. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

43. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}, \quad y = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

44. $f(x) = \frac{4 \ln x}{x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

En los Ejercicios 45 y 46, *a*) representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) formular la integral que da el área de esa región (¿puede calcular esa integral a mano?), y *c*) usar integración en la calculadora para estimar el área.

45. $y = \sqrt{\frac{x^3}{4 - x}}, \quad y = 0, \quad x = 3$

46. $y = \sqrt{x}\, e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

En los Ejercicios 47 y 48, calcular, por integración, el área del triángulo con los vértices que se especifican.

47. $(0, 0), (a, 0), (b, c)$ **48.** $(2, -3), (4, 6), (6, 1)$

En los Ejercicios 49 y 50, escribir y calcular la integral definida que da el área de la región acotada por las gráficas de la función y de la recta tangente a su gráfica en el punto indicado.

49. $f(x) = x^3, (1, 1)$ **50.** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \left(1, \frac{1}{2}\right)$

51. ***Para pensar*** Las gráficas de $y = x^4 - 2x^2 + 1$ e $y = 1 - x^2$ se cortan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas *puede* hallarse con una sola integral. Explicar cómo y formular esa única integral.

52. ***Para pensar*** El área de la región limitada por las gráficas de $y = x^3$ e $y = x$ *no* viene dada por la integral

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - x)dx$$

Explicar por qué. Usar la simetría para escribir una sola integral que represente ese área.

En los Ejercicios 53 y 54, hallar b de modo que la recta $y = b$ divida, en dos partes de igual área, la región acotada por las gráficas de las dos ecuaciones.

53. $y = 9 - x^2, \quad y = 0$ **54.** $y = 9 - |x|, \quad y = 0$

En los Ejercicios 55 y 56, calcular el límite y dibujar un esbozo de la región cuya área viene dada por ese límite.

55. $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_i^2)\, \Delta x$

donde $x_i = i/n$ y $\Delta x = 1/n$

56. $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=i}^{n} (4 - x_i^2)\, \Delta x$

donde $x_i = -2 + (4i/n)$ y $\Delta x = 4/n$

Ingresos En los Ejercicios 57 y 58, se dan dos modelos para los ingresos (en miles de millones de dólares) de una gran empresa. El modelo R_1 da los ingresos previstos entre los años 2000 ($t = 0$) y 2005, y R_2 da los previstos si hubiese una disminución en el ritmo de crecimiento de las ventas en ese período. Estimar la reducción total de los ingresos en caso de que se acabe cumpliendo el modelo R_2.

57. $R_1 = 7{,}21 + 0{,}58t$

$R_2 = 7{,}21 + 0{,}45t$

58. $R_1 = 7{,}21 + 0{,}26t + 0{,}02t^2$

$R_2 = 7{,}21 + 0{,}1t + 0{,}01t^2$

59. ***Consumo de vacuno*** Entre 1985 y 1994, el ritmo de consumo de carne de vacuno (en miles de millones de libras) en EE.UU. siguió el modelo

$$f(t) = \begin{cases} 27{,}77 - 0{,}36t, & 5 \leqslant t \leqslant 10 \\ 21{,}00 + 0{,}27t, & 10 \leqslant t \leqslant 14 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años, con $t = 5$ correspondiendo a 1985. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture.)*

a) Representar el modelo en la calculadora.

b) Supuesto que el consumo entre 1990 y 1994 siguiera el modelo de los años 1985-1990, ¿cuánta carne de vacuno menos se hubiera consumido en esos años?

60. ***Coste del combustible*** El coste de combustible C (en millones de dólares) proyectado por una empresa entre los años 2000 y 2010 es

$$C_1 = 568{,}50 + 7{,}15t$$

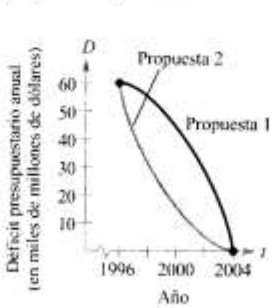
donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo al año 2000. Debido a la instalación de un equipamiento de ahorro energético, el coste sigue este otro modelo

$$C_2 = 525{,}60 + 6{,}43t$$

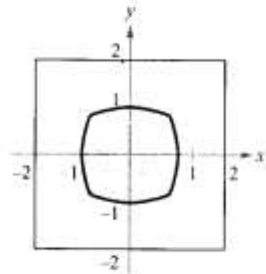
Estimar el ahorro producido en esos 10 años.

61. ***Beneficios*** El departamento de contabilidad de una empresa informa que los beneficios en el último ejercicio fiscal fueron \$893.000 y predice para los próximos 5 años un crecimiento anual entre el $3\frac{1}{2}$ por 100 y 5 por 100. Estimar la diferencia acumulada en los beneficios totales durante esos 5 años entre los dos extremos de la predicción.

62. ***Para pensar*** El Congreso está debatiendo dos propuestas para eliminar el déficit público en el año 2004. La figura muestra el ritmo de descenso en cada propuesta. Tomando como objetivo lograr hacer mínimo el déficit acumulado, ¿qué propuesta es la mejor? Explique la respuesta.



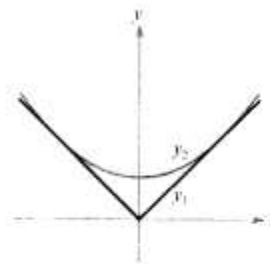
63. ***Área*** La región sombreada en la figura consta de todos los puntos que distan menos del centro del cuadrado que de los lados. Calcular su área.



64. ***Diseño mecánico*** La superficie de una pieza de una máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x|$ e $y_2 = 0{,}08x^2 + k$.

a) Hallar k si la parábola es tangente a la gráfica de y_1.

b) Calcular el área superficial de la pieza.

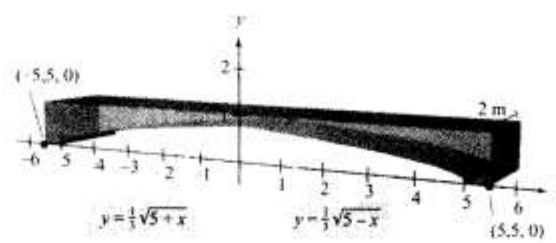


65. ***Diseño de edificios*** Unas vigas de cemento empleadas en un nuevo edificio tienen la forma y dimensiones, en metros, indicadas en la figura.

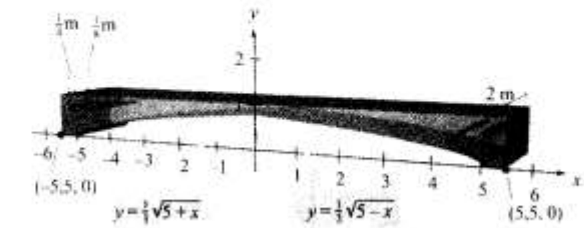
a) Hallar el área de la cara adosada al sistema de coordenadas rectangular.

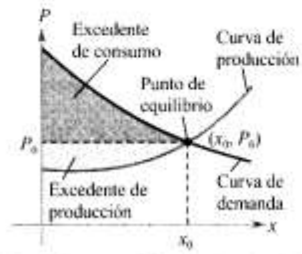
b) Calcular el volumen de cemento de la viga, multiplicando por 2 el área obtenida en *a)*.

c) Un metro cúbico de cemento pesa 5.000 libras. ¿Cuánto pesa la viga?



66. ***Diseño de edificios*** Para disminuir el peso y mejorar el proceso de endurecimiento, la viga del Ejercicio 65 no se fabrica sólida. Rehacer el Ejercicio 65 si en ella se hacen unos orificios cilíndricos como los indicados en la figura de la página siguiente.





Excesos de consumo y producción En los Ejercicios 67 y 68, hallar el exceso de consumo y el de producción para las curvas de producción y demanda especificadas. Esos excesos vienen dados por las áreas dadas en la figura.

	Función de demanda	*Función de producción*
67.	$p_1(x) = 50 - 0{,}5x$	$p_2(x) = 0{,}125x$
68.	$p_1(x) = 1.000 - 0{,}4x^2$	$p_2(x) = 42x$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 69 y 70, discutir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o exhibir un ejemplo que ponga de manifiesto su falsedad.

69. Si el área de la región acotada por las gráficas de f y g es 1, el área de la región acotada por las de $h(x) = f(x) + C$ y $k(x) = g(x) + C$ también es 1.

70. Si $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = A$, entonces $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = -A$

6.2 Volumen: el método de los discos

CONTENIDO
- El método de los discos
- El método de las arandelas
- Sólidos con secciones de área conocida

El método de los discos

En el Capítulo 4 advertimos que el cálculo de áreas es sólo una de tantas aplicaciones de la integral definida. Otra muy importante es el cálculo de volúmenes de sólidos tridimensionales. En esta sección analizaremos el caso de sólidos especiales, con todas sus secciones similares. Empezaremos con los sólidos de revolución, comunes en ingeniería y en todo tipo de objetos de uso cotidiano, como ruedas, embudos, píldoras, botellas y pistones (Figura 6.13).

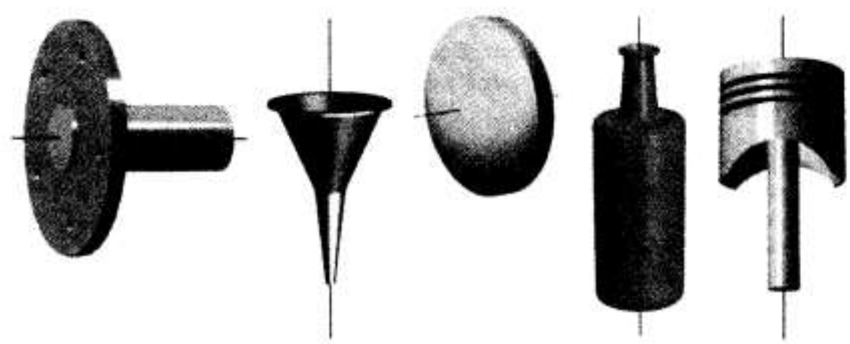


FIGURA 6.13
Sólidos de revolución.

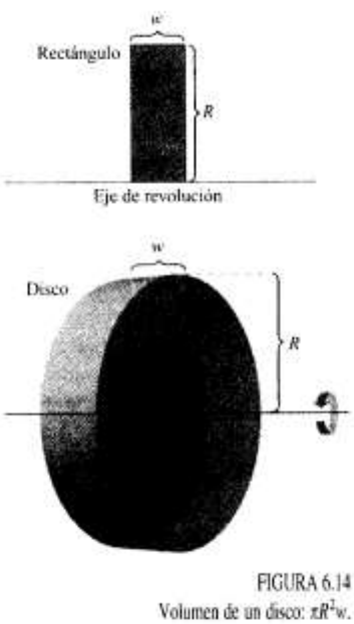


FIGURA 6.14
Volumen de un disco: $\pi R^2 w$.

Si una región plana se hace girar en torno a una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución** y esa recta se llama **eje de revolución** (o eje de giro). El más simple es un cilindro circular recto o **disco**, generado al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados (Figura 6.14). El volumen del disco es

$$\text{Volumen del disco} = (\text{área del disco})\,(\text{anchura del disco}) = \pi R^2 w$$

donde R es el radio del disco y w su anchura.

El volumen del disco servirá para hallar el de un sólido general de revolución. Consideremos el sólido de revolución de la Figura 6.15 y un rectángulo representativo de la región plana que lo genera. Cuando ese rectángulo gira alrededor del eje de revolución, engendra un disco representativo de volumen

$$\boxed{\Delta V = \pi R^2 \Delta x}$$

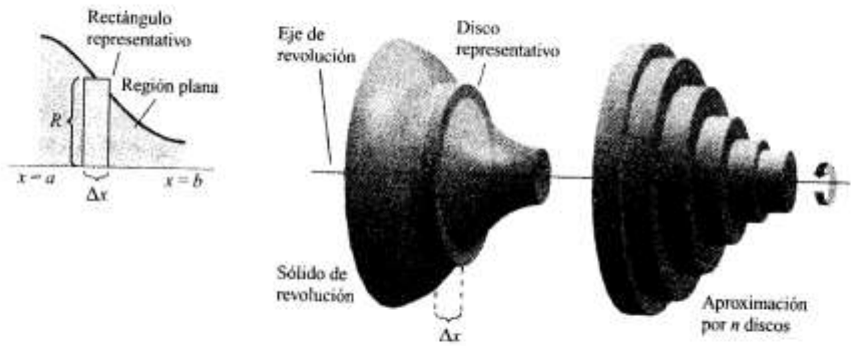


FIGURA 6.15
Método de los discos.

Aproximando el volumen del sólido por el de los n discos de ese tipo, de anchura Δx y radio $R(x_i)$, se obtiene

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} \pi[R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \Delta x$$

esta aproximación va mejorando al hacer $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$). Por tanto, definimos el volumen del sólido como

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$$

En esquema, el método de los discos es como sigue:

Fórmula conocida		*Elemento representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	→	$\Delta V = \pi[R(x_i)]^2 \Delta x$	→	Sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$

Si el eje de giro es vertical se deduce una fórmula análoga.

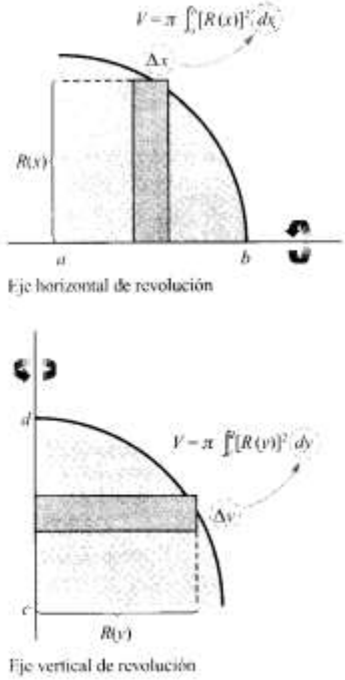


FIGURA 6.16

MÉTODO DE LOS DISCOS

Para calcular el volumen de un sólido de revolución por el método de los discos, utilizar una de las fórmulas siguientes, como se indica en la Figura 6.16.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
Volumen $= V = \pi \displaystyle\int_a^b [R(x)]^2\, dx$	Volumen $= V = \pi \displaystyle\int_c^d [R(y)]^2\, dy$

Nota. En la Figura 6.16 queda claro que se puede determinar la variable de integración colocando un rectángulo representativo en la región *plana* «perpendicular» al eje de giro. Si la anchura del rectángulo es Δx, integrar en x, y si la anchura es Δy, integrar en y.

El método de los discos encuentra su aplicación más sencilla en el caso de una región plana acotada por la gráfica de f y el eje x. Si el eje de giro es el eje x, el radio $R(x)$ es simplemente $f(x)$.

EJEMPLO 1 Aplicación del método de los discos

Calcular el volumen del sólido de revolución formado al hacer girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

y el eje x $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ en torno al eje x.

Solución: Del rectángulo representativo de la Figura 6.17 superior vemos que el radio de este sólido es

$$R(x) = f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

Así pues, su volumen viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b [R(x)]^2\, dx = \pi\int_0^\pi (\sqrt{\operatorname{sen} x})^2\, dx \\ &= \pi\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \pi\Big[-\cos x\Big]_0^\pi \\ &= \pi(1+1) = 2\pi \end{aligned}$$

□

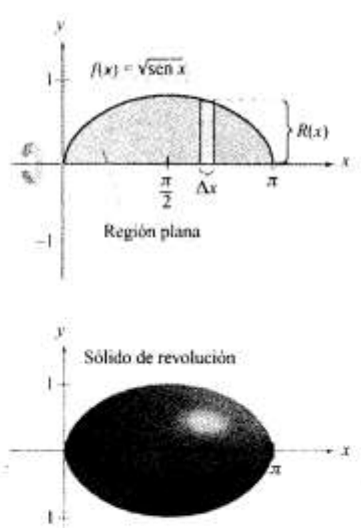


FIGURA 6.17

EJEMPLO 2 Eje de revolución distinto de los ejes coordenados

Calcular el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ en torno a la recta $y = 1$ (Figura 6.18).

Solución: Igualando $f(x)$ y $g(x)$ se ve que las dos gráficas se cortan en $x = \pm 1$. Para hallar el radio, restamos $g(x)$ de $f(x)$.

$$R(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (2 - x^2) - 1$$
$$= 1 - x^2$$

Finalmente, integrando entre -1 y 1 obtenemos el volumen:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx$$
$$= \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{15}$$

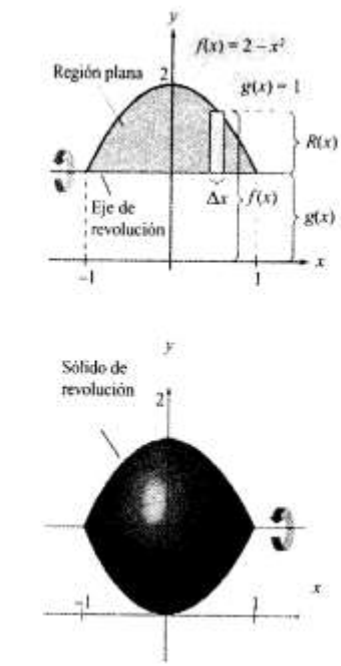


FIGURA 6.18

El método de las arandelas

Sustituyendo el disco representativo por una **arandela** representativa, el método de los discos se extiende a sólidos huecos. La arandela se genera haciendo girar un rectángulo en torno al eje x, como indica la Figura 6.19. Si r y R denotan los radios interno y externo de la arandela y w su anchura, el volumen viene dado por

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)w$$

Para ver cómo usar esta técnica, consideremos una región acotada por un radio externo $R(x)$ y un radio interno $r(x)$, como en la Figura 6.20. Si se hace girar esa región alrededor del eje de revolución, el volumen del sólido engendrado viene dado por

$$\boxed{V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx}$$

Método de las arandelas

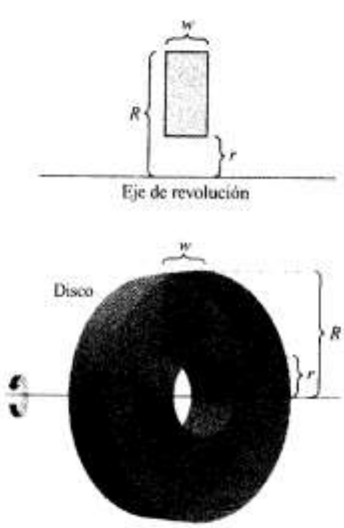


FIGURA 6.19

La integral que contiene al radio interno representa el volumen del hueco y se resta de la integral que contiene al radio externo.

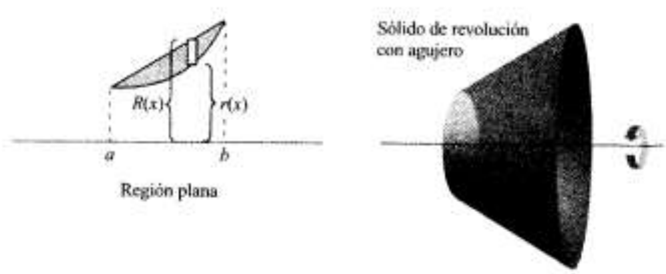


FIGURA 6.20

EJEMPLO 3 Aplicación del método de las arandelas

Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ en torno al eje x (Figura 6.21).

Solución: En la Figura 6.21 vemos que los radios interno y externo son

$$R(x) = \sqrt{x} \qquad \text{Radio exterior}$$
$$r(x) = x^2 \qquad \text{Radio interior}$$

Integrando entre 0 y 1 obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b \{[R(x)]^2 - [r(x)]^2\}\, dx \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{10} \end{aligned}$$ □

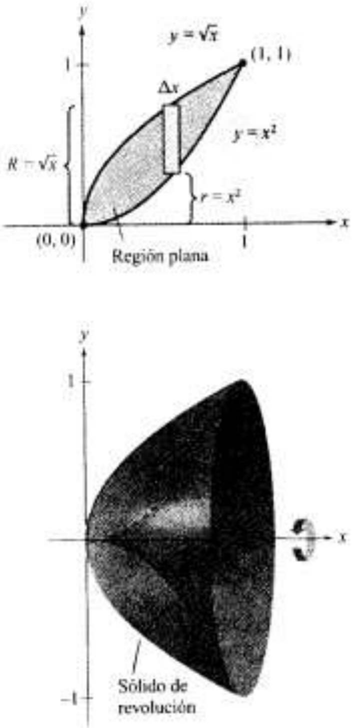


FIGURA 6.21
Sólido de revolución.

En cada uno de los ejemplos anteriores, el eje de revolución era *horizontal* y hemos integrado en x. En el próximo ejemplo, el eje de giro es *vertical* y hay que integrar en y. En este ejemplo es necesario, además, separar la integral que da el volumen del sólido en dos partes.

EJEMPLO 4 Integral en y descompuesta en dos partes

Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$ en torno al eje y, como indica la Figura 6.22.

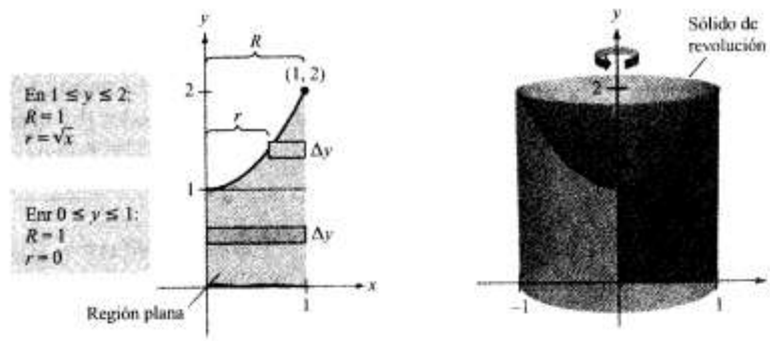


FIGURA 6.22

Solución: Para la región de la Figura 6.22, el radio externo es simplemente $R = 1$. Por el contrario, no hay una fórmula sencilla que describa el radio interno. Cuando $0 \leqslant y \leqslant 1$ es $r = 0$, mientras que cuando $1 \leqslant y \leqslant 2$, r queda fijado por la ecuación $y = x^2 + 1$, lo cual implica $r = \sqrt{y - 1}$

$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ \sqrt{y - 1}, & 1 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

Usando esta expresión del radio interno, podemos hallar el volumen efectuando dos integrales.

R - r

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2)\, dy + \pi \int_1^2 [1^2 - (\sqrt{y - 1})^2]\, dy \\ &= \pi \int_0^1 1\, dy + \pi \int_1^2 (2 - y)\, dy \end{aligned}$$

Dibujado con Mathematica

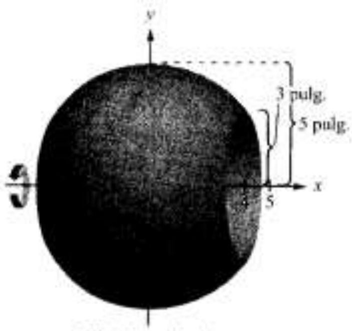
FIGURA 6.23

$$= \pi\Big[\, y \,\Big]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

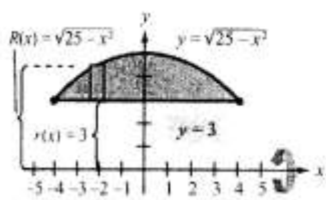
Hagamos constar que la primera integral $\pi\int_0^1 1\, dy$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1, de modo que esta parte del volumen podría haber sido calculada sin recurrir a la integración. □

Algunas calculadoras permiten visualizar sólidos de revolución. Si dispone de los programas apropiados, intente representar algunos de los sólidos de revolución aparecidos en esta sección. Así, el del Ejemplo 4 tendrá en la pantalla el aspecto que muestra la Figura 6.23.



Sólido de revolución

a)



Región plana

b)

FIGURA 6.24

EJEMPLO 5 Diseño de fabricación

Un fabricante diseña un objeto metálico, en forma de esfera con un radio de 5 pulgadas, y con un orificio cilíndrico en su interior, como muestra la Figura 6.24*a*. El hueco tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto metálico resultante?

Solución: Podemos imaginar el objeto generado por un segmento del círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ que se ve en la Figura 6.24*b*. Como el radio del orificio es 3, hacemos $y = 3$ y resolvemos la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ para determinar que los límites de integración son $x = \pm 4$. Así pues, los radios interno y externo son

$$r(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad R(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

y a su vez el volumen resulta ser

$$V = \pi\int_a^b \{[R(x)]^2 - [r(x)]^2\}\, dx$$

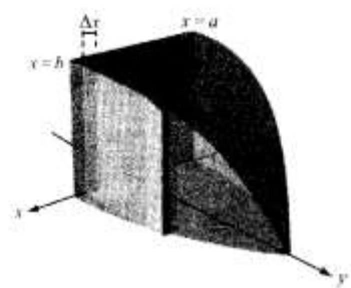
$$= \pi\int_{-4}^4 \left[(\sqrt{25 - x^2})^2 - (3)^2\right] dx$$

$$= \pi\int_{-4}^4 (16 - x^2)\, dx$$

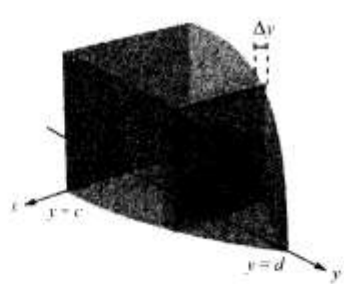
$$= \pi\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^4$$

$$= \frac{256\pi}{3} \text{ pulgadas cúbicas}$$

□



a) Sección perpendicular al eje *x*



b) Sección perpendicular al eje *y*

FIGURA 6.25

Sólidos con secciones de área conocidas

Con el método de los discos se puede hallar el volumen de un sólido de sección circular, ya que sabemos que el área del círculo es

$$A = \pi R^2$$

También es posible calcular el volumen de sólidos cuyas secciones sean de área conocida, sea cual sea su forma concreta. Secciones comunes suelen ser cuadrados, triángulos, semicírculos o trapecios.

VOLUMEN DE SÓLIDOS CON SECCIONES DE ÁREA CONOCIDA

1. **Para secciones de área $A(x)$, perpendiculares al eje x,**

$$\textbf{Volumen} = \int_a^b A(x)\,dx$$

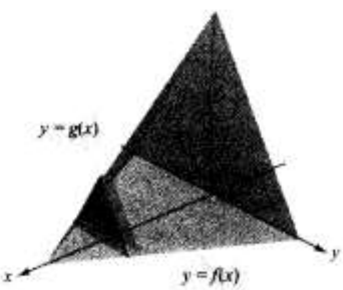
como muestra la Figura 6.25*b*.

2. **Para secciones de área $A(y)$, perpendiculares al eje y,**

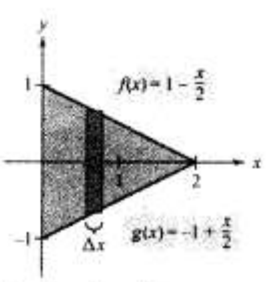
$$\textbf{Volumen} = \int_c^d A(y)\,dy$$

como muestra la Figura 6.25*b*.

EJEMPLO 6 Secciones triangulares



Las secciones son triángulos equiláteros



Base triangular en el plano *xy*

FIGURA 6.26

Calcular el volumen del sólido de la Figura 6.26, cuya base es la región acotada por las rectas

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \qquad g(x) = -1 + \frac{x}{2}, \qquad \text{y} \qquad x = 0$$

Las secciones perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros.

Solución: La base y el área de cada sección triangular son

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x \qquad \text{Longitud de la base}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 \qquad \text{Área del triángulo equilátero}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 \qquad \text{Área de la sección}$$

Como x varía entre 0 y 2, el volumen de ese sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2\,dx$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(2 - x)^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

□

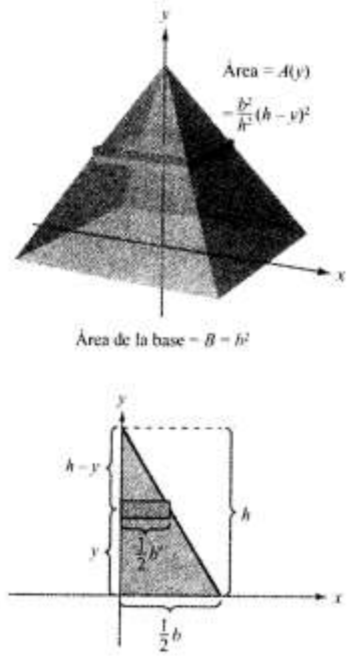


FIGURA 6.27

EJEMPLO 7 Una aplicación geométrica

Demostrar que el volumen de una pirámide con base cuadrada es $V = \frac{1}{3}hB$, donde h denota la altura de la pirámide y B el área de su base.

Solución: Si cortamos la pirámide con un plano de altura y paralelo a su base, como en la Figura 6.27, resulta una sección cuadrada con lados de longitud b'. Por semejanza de triángulos,

$$\frac{b'}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad \text{o sea} \qquad b' = \frac{b}{h}(h-y)$$

donde b es la longitud de los lados de la base de la pirámide. Por tanto,

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2$$

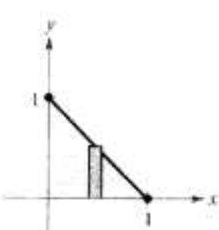
Integrando de 0 a h obtenemos

$$\begin{aligned} V = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2\,dy &= \frac{b^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2\,dy \\ &= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right)\left[\frac{(h-y)^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{b^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}hB \qquad B = b^2 \qquad \square \end{aligned}$$

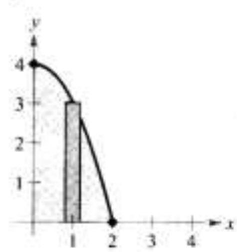
Ejercicios de la Sección 6.2

En los Ejercicios 1-6, escribir y calcular la integral que representa el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje x.

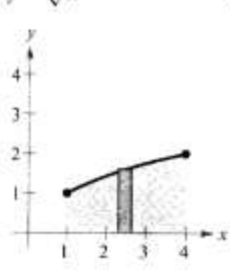
1. $y = -x + 1$



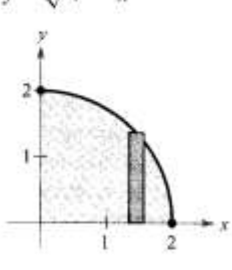
2. $y = 4 - x^2$



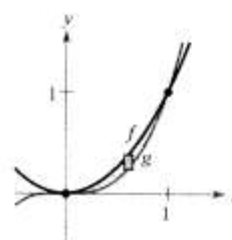
3. $y = \sqrt{x}$



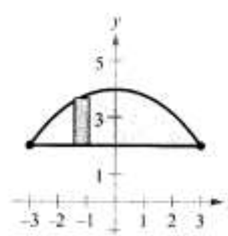
4. $y = \sqrt{4 - x^2}$



5. $y = x^2,\ y = x^3$

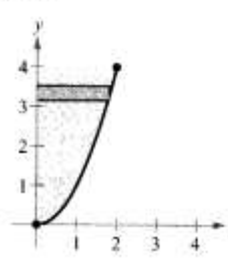


6. $y = 2,\quad y = 4 - \frac{x^2}{4}$

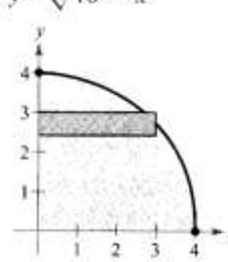


En los Ejercicios 7-10, formular y calcular la integral que representa el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje x.

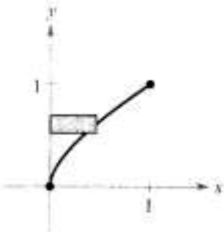
7. $y = x^2$



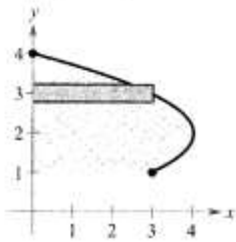
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$



9. $y = x^{2/3}$



10. $x = -y^2 + 4y$



En los Ejercicios 11-14, hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno a las rectas que se especifican.

11. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$
a) el eje x *b*) el eje y
c) la recta $x = 4$ *d*) la recta $x = 6$

12. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 2$
a) el eje y *b*) el eje x
c) la recta $y = 8$ *d*) la recta $x = 2$

13. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$
a) el eje y *b*) la recta $x = 6$

14. $y = 6 - 2x - x^2$, $y = x + 6$
a) el eje x *b*) la recta $y = 3$

En los Ejercicios 15-18, escribir el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno a la recta $y = 4$.

15. $y = x$, $y = 3$, $x = 0$

16. $y = x^2$, $y = 4$

17. $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

18. $y = \sec x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$

En los Ejercicios 19-22, hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno a la recta $x = 6$.

19. $y = x$, $y = 0$, $y = 4$, $x = 6$

20. $y = 6 - x$, $y = 0$, $y = 4$, $x = 0$

21. $x = y^2$, $x = 4$

22. $xy = 6$, $y = 2$, $y = 6$, $x = 6$

En los Ejercicios 23-28, hallar el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje x.

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$

24. $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$

25. $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

26. $y = \dfrac{3}{x+1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$

27. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

28. $y = e^{x/2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

En los Ejercicios 29 y 30, hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje y.

29. $y = 3(2 - x)$, $y = 0$, $x = 0$

30. $y = 9 - x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$

En los Ejercicios 31-36, usar integración en la calculadora para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje x.

31. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

32. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

33. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

34. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

35. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$

36. $y = 2\,\operatorname{arctg}\,(0{,}2x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$

Aproximación En los Ejercicios 37 y 38, averiguar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje x. (Basar la decisión en un dibujo del sólido, no en cálculos.)

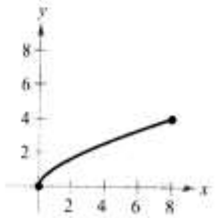
37. $y = e^{-x^2/2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$
a) 3 *b*) −5 *c*) 10 *d*) 7 *e*) 20

38. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
a) 10 *b*) $\dfrac{3}{4}$ *c*) 5 *d*) −6 *e*) 15

39. ***Para pensar***
a) La región acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x gira en torno al eje x. Calcular el volumen del sólido resultante.
b) Si se cambiase la ecuación de la parábola en el apartado *a*) por $y = 4 - x^2$, ¿sería distinto el volumen del sólido generado? Explicar la respuesta.

40. ***Para pensar*** Se hace girar la región de la figura alrededor de los ejes o recta indicados. Ordenar los volúmenes de los sólidos generados de menor a mayor. Explicar cómo se ha decidido el orden.

a) eje x *b*) eje y *c*) $x = 8$



41. Si la porción de la recta $y = \frac{1}{2}x$ que está en el primer cuadrante gira en torno al eje x, se genera un cono. Hallar el volumen del cono entre $x = 0$ y $x = 6$.

42. Verificar con el método de los discos que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura.

43. Verificar con el método de los discos que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$

44. Una esfera de radio r se corta por un plano situado h ($h < r$) unidades sobre el nivel de su ecuador. Determinar el volumen del sólido (casquete esférico) que queda por encima de ese plano.

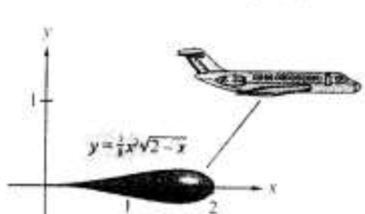
45. Un cono con base de radio r y altura H se corta por un plano paralelo a la base y situado h unidades sobre ella. Hallar el volumen del sólido (tronco de cono) que queda por debajo del plano.

46. La región limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 4$, gira en torno al eje x.

a) Hallar el valor de x en el intervalo [0, 4] que divide al sólido en dos partes de igual volumen.

b) Hallar los valores de x en el intervalo [0, 4] que dividen al sólido en tres partes de igual volumen.

47. ***Volumen de un depósito de combustible*** El depósito en el ala de un avión tiene la forma de un sólido de revolución generado al hacer girar la región acotada por la gráfica de $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2 - x}$ y el eje x, en torno a éste (véase figura), donde x e y se miden en metros. Hallar el volumen del depósito.



48. ***Volumen de una vasija*** Una vasija de vidrio admite el modelo obtenido al hacer girar la gráfica de

$$y = \begin{cases} \sqrt{0{,}1x^3 - 2{,}2x^2 + 10{,}9x + 22{,}2}, & 0 \leqslant x \leqslant 11{,}5 \\ 2{,}95, & 11{,}5 < x \leqslant 15 \end{cases}$$

en torno al eje x, donde x e y se miden en centímetros. Representar la función en la calculadora y determinar el volumen de esa vasija.

49. Calcular el volumen del sólido generado al girar la mitad superior de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ en torno a

a) El eje x, para formar un esferoide prolato (parecido a un balón de rugby).

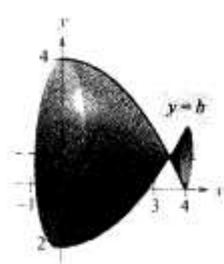
b) El eje y, para formar un esferoide oblato (parecido a una lenteja).

50. ***Volumen mínimo*** El arco de $y = 4 - (x^2/4)$ en el intervalo [0, 4] gira en torno a la recta $y = b$ (véase figura).

a) Expresar el volumen del sólido resultante como función de b.

b) Representar esa función en la calculadora y, con ayuda de la gráfica, estimar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido.

c) Determinar, mediante el Cálculo, el valor de b que hace mínimo el volumen y compararlo con la estimación anterior.



51. ***Profundidad del agua en un depósito*** Un depósito de agua es esférico, de radio 50 pies. Averiguar la profundidad del agua cuando está a un cuarto y a tres cuartos de su capacidad total. (*Nota:* Hallar las raíces con la calculadora después de calcular la integral definida.)

52. ***Un modelo matemático*** Un delineante tiene que determinar la cantidad de material requerida para fabricar una pieza de una máquina (véase figura en la página siguiente). La tabla recoge, en centímetros, los diámetros de la pieza en puntos uniformemente espaciados entre sí.

x	0	1	2	3	4	5
d	4,2	3,8	4,2	4,7	5,2	5,7

x	6	7	8	9	10
d	5,8	5,4	4,9	4,4	4,6

a) Con esos datos y con la regla de Simpson, estimar el volumen de la pieza.

b) Usar regresión en la calculadora para obtener un polinomio de grado cuatro que pase por los puntos representativos de esos datos. Representar los datos y el modelo.

c) Aproximar con una calculadora la integral definida que da el volumen de la pieza y comparar con el resultado del apartado *a*).

53. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cilindro circular recto *b*) Elipsoide
c) Esfera *d*) Cono circular recto *e*) Toro

i) $\pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$

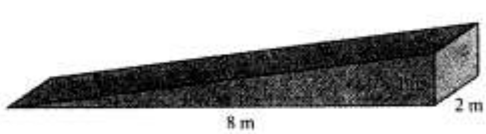
ii) $\pi \int_0^h r^2\, dx$

iii) $\pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$

iv) $\pi \int_{-b}^{b} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$

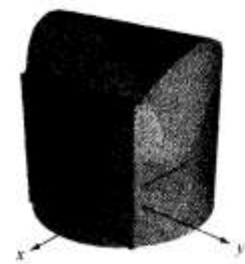
v) $\pi \int_{-r}^{r} [(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2]\, dx$

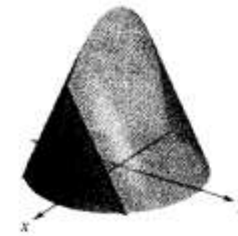
54. Calcular el volumen de cemento en la rampa de la figura, cuyas secciones son triángulos rectángulos.



55. Hallar el volumen del sólido cuya base está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$, con las secciones, perpendiculares al eje x, que se especifican.

a) Cuadrados *b*) Triángulos equiláteros

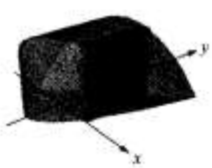




c) Semicírculos *d*) Triángulos rectángulos isósceles

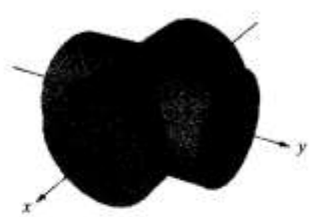
56. Hallar el volumen del sólido cuya base está acotada por las gráficas de $y = x + 1$ e $y = x^2 - 1$, con las secciones perpendiculares al eje x que se indican.

a) Cuadrados *b*) Rectángulos de altura 1



57. La base de un sólido está acotada por $y = x^3$, $y = 0$, y $x = 1$. Calcular su volumen para cada una de estas secciones (perpendiculares al eje y): *a*) cuadrados, *b*) semicírculos, *c*) triángulos equiláteros, y *d*) semielipses cuya altura es doble que su base.

58. Calcular el volumen del sólido intersección (común a ambos) de dos cilindros circulares rectos de radio r, cuyos ejes se cortan en ángulo recto (véase figura).

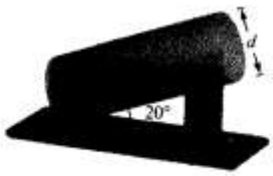


Dos cilindros que se cortan

Sólido de intersección

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre este problema, véase el artículo «Estimating the Volumes of Solid Figures with Curved Surfaces», de Donald Cohen, en *Mathematics Teacher*, mayo 1991.

59. ***Volumen de aceite*** Un barril de diámetro d está apoyado (véase figura) de manera tal que su eje forma un ángulo de 20° con la horizontal. El aceite contenido llega justo hasta el borde de la base superior. Estimar el volumen de aceite que hay en el barril.



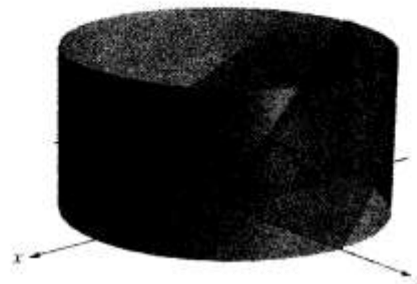
60. ***El teorema de Cavalieri*** Demostrar que si dos sólidos tienen la misma altura y si, además, las secciones paralelas a sus bases de altura arbitraria tienen igual área, entonces sus volúmenes son iguales (véase figura).

Área de R_1 = área de R_2

61. Dos planos cortan a un cilindro circular recto formando una cuña de ángulo θ (véase figura).

a) Calcular el volumen de la cuña si $\theta = 45^\circ$.

b) Hallar su volumen para un θ arbitrario. Suponiendo el cilindro suficientemente largo, ¿cómo cambia el volumen de la cuña cuando θ crece de 0° a 90°?



62. Un operario hace un orificio por el centro de una esfera de radio R. El orificio tiene radio r. Calcular el volumen de la «pulsera» resultante.

63. Si $R = 5$ en el ejercicio precedente, ¿qué valor de r produce una pulsera de volumen igual a la mitad del de la esfera?

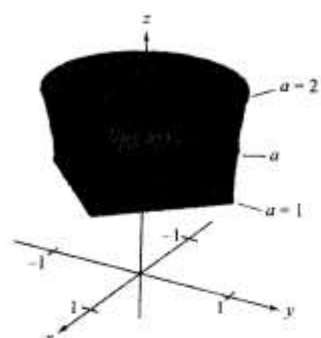
64. El sólido de la figura tiene secciones acotadas por la gráfica de

$$|x|^a + |y|^a = 1$$

donde $1 \leqslant a \leqslant 2$

a) Describir las secciones para $a = 1$ y $a = 2$.

b) Describir un procedimiento para estimar el volumen del sólido.



CONTENIDO •
El método de las capas •
Comparación del método de los discos y el método de las capas •

6.3 Volumen: el método de las capas

El método de las capas

Vamos a presentar un método alternativo para calcular el volumen de sólidos de revolución, conocido como **método de las capas** porque utiliza capas cilíndricas. Más adelante lo compararemos con el método de los discos.

Para empezar, consideremos el rectángulo representativo de la Figura 6.28, de anchura w y altura h, y donde p denota la distancia del centro del rectángulo al eje de revolución. Al girar este rectángulo en torno a su eje de revolución, forma una capa cilíndrica (un tubo) de espesor w. Para calcular el volumen de esa capa, consideremos dos cilindros. El radio del mayor corresponde al radio externo de la capa y el del menor al radio interno. Como p es el radio medio de la capa, sabemos que el radio exterior es $p + (w/2)$ y el interior $p - (w/2)$.

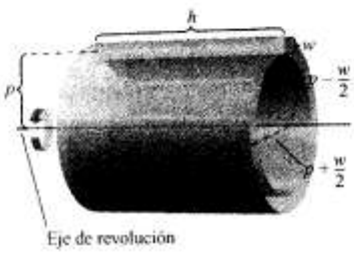


FIGURA 6.28

$$p + \frac{w}{2} \qquad \text{Radio exterior}$$

$$p - \frac{w}{2} \qquad \text{Radio interior}$$

Así pues, el volumen de la capa es

$$\begin{aligned}\text{Volumen de la capa} &= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del hueco}) \\ &= \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h \\ &= 2\pi phw \\ &= 2\pi\ (\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})\end{aligned}$$

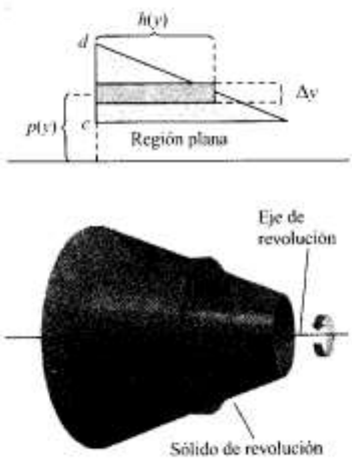


FIGURA 6.29

Podemos usar esta fórmula para hallar el volumen de un sólido de revolución. Supongamos que la región plana de la Figura 6.29 gira en torno a una recta y genera el sólido indicado. Si consideramos un rectángulo horizontal de anchura Δy, cuando la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje x, el rectángulo genera una capa representativa de volumen

$$\boxed{\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\Delta y}$$

Podemos aproximar el volumen del sólido por n de tales capas de espesor Δy, altura $h(y_i)$ y radio medio $p(y_i)$.

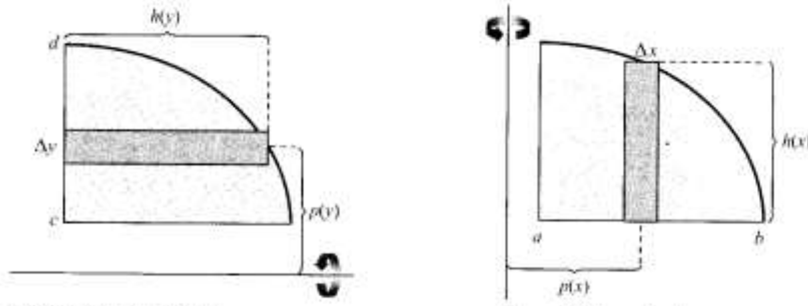
$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi[p(y_i)h(y_i)]\ \Delta y = 2\pi \sum_{i=1}^{n} [p(y_i)h(y_i)]\ \Delta y$$

Esta aproximación parece ir mejorando al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Por tanto, definimos el volumen del sólido como

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} [p(y_i)h(y_i)]\ \Delta y \\ &= 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)]\ dy\end{aligned}$$

EL MÉTODO DE LAS CAPAS **Para hallar el volumen V de un sólido de revolución por el método de las capas, debe usarse una de las fórmulas siguientes, como ilustra la Figura 6.30.**

Eje de giro horizontal	***Eje de giro vertical***
$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\ dy$	$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\ dx$



Eje horizontal de revolución

Eje vertical de revolución

FIGURA 6.30

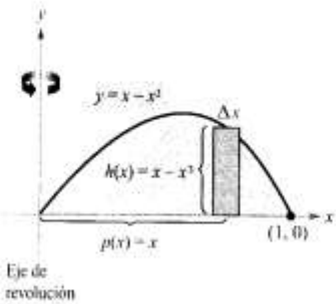


FIGURA 6.31

EJEMPLO 1 Cálculo de un volumen por el método de las capas

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar, en torno al eje y, la región acotada por $y = x - x^3$ y el eje x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Solución: Puesto que el eje de revolución es vertical, tomamos un rectángulo representativo vertical (véase Figura 6.31). La anchura Δx indica que la variable de integración es x. La distancia del centro del rectángulo al eje de giro es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es $h(x) = x - x^3$. Como x varía entre 0 y 1, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx &= 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^2)\,dx \\
&= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 0 - 0 \right) \\
&= \frac{4\pi}{15}
\end{aligned}$$

□

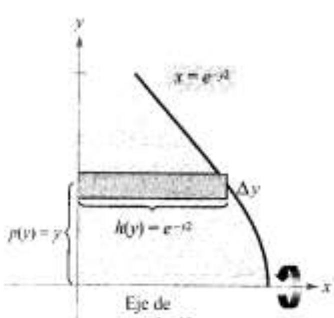


FIGURA 6.32

EJEMPLO 2 Cálculo de un volumen por el método de las capas

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar, en torno al eje x, la región acotada por la gráfica de $x = e^{-y^2}$ y el eje y $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

Solución: Puesto que el eje de revolución es horizontal, tomamos un rectángulo representativo horizontal (véase Figura 6.32). La anchura Δy indica que la variable de integración es y. La distancia del centro del rectángulo al eje de giro es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Como y varía entre 0 y 1, el volumen del sólido es

$$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\, dy = 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2}\, dy$$

$$= -\pi \left[e^{-y^2} \right]_0^1$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\approx 1{,}986$$ □

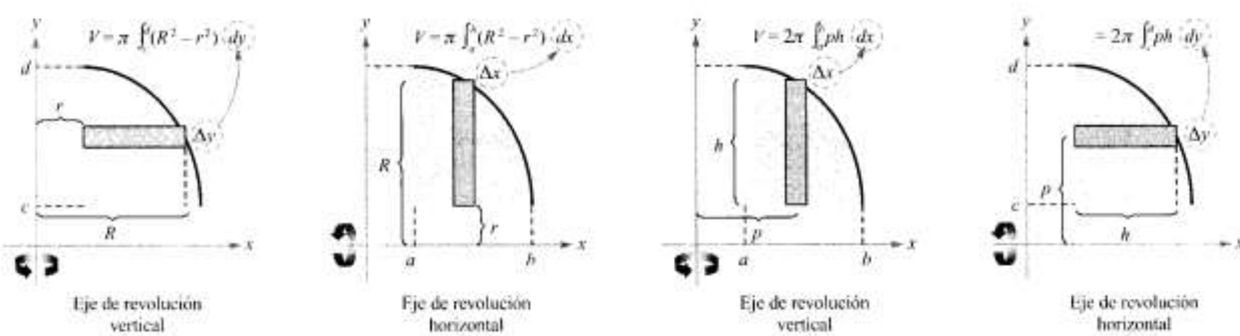
Nota. Para apreciar la ventaja del método de las capas en el Ejemplo 2, despejamos y en la ecuación $x = e^{-y^2}$.

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1/e \\ \sqrt{-\ln x} & 1/e < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Use esta expresión para calcular el volumen del sólido por el método de los discos.

Comparación del método de los discos y el método de las capas

Los dos métodos se distinguen entre sí porque en el de los discos el rectángulo representativo es siempre *perpendicular* al eje de giro, mientras que en el de las capas es siempre *paralelo* al eje de giro, como muestra la Figura 6.33.



Método de los discos: el rectángulo representativo es perpendicular al eje de giro

Método de las capas: el rectángulo representativo es paralelo al eje de giro

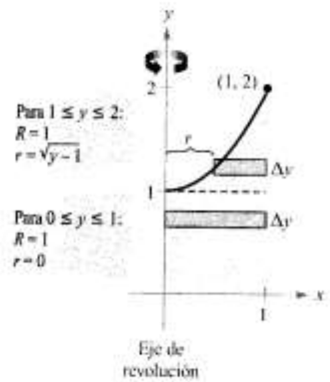
FIGURA 6.33

Según el caso, un método es más conveniente que el otro. El próximo ejemplo ilustra una situación en la que es preferible el método de las capas.

EJEMPLO 3 Preferible el método de las capas

Calcular el volumen del sólido generado al girar, en torno del eje y, la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$.

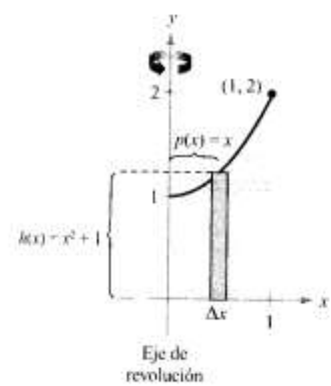
Solución: En el Ejemplo 4 de la sección anterior vimos que el método de los discos requiere dos integrales para determinar este volumen (Figura 6.34*a*).



a) Método de los discos

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi\int_1^2 [1^2 - (\sqrt{y-1})^2]\,dy \\
&= \pi\int_0^1 1\,dy + \pi\int_1^2 (2-y)\,dy \\
&= \pi\Big[\,y\,\Big]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \pi\left(1 + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

En la Figura 6.34*b* observamos que el de las capas sólo requiere una integral.



b) Método de las capas

FIGURA 6.34

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_a^b p(x)h(x)\,dx \\
&= 2\pi\int_0^1 x(x^2+1)\,dx \\
&= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□

Si la región del Ejemplo 3 se hiciese girar en torno de la recta vertical $x = 1$, el sólido resultante ¿tendría volumen mayor o menor que el sólido del Ejemplo 3? Sin integrar, parece lógico conjeturar que sería menor, ya que una porción más grande de la región que gira queda más cerca del nuevo eje de revolución. Con el fin de confirmar esta sospecha, intente calcular la siguiente integral, que da el volumen del sólido en esta nueva situación.

$$V = 2\pi\int_0^1 (1-x)(x^2+1)\,dx \qquad p(x) = 1 - x$$

PARA MÁS INFORMACIÓN
Acerca de los métodos de discos y de capas, véase el artículo «The Disc and Shell Method» de Charles A. Cable en *The American Mathematical Monthly*, febrero 1984.

EJEMPLO 4 Volumen de un pontón

El pontón de la Figura 6.35 ha sido diseñado haciendo girar, en torno del eje x, la gráfica de

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}, \qquad -4 \leqslant x \leqslant 4$$

donde x e y se miden en pies. Calcular el volumen del pontón.

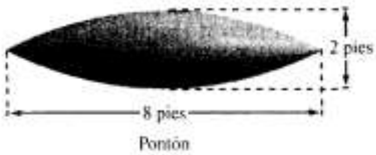
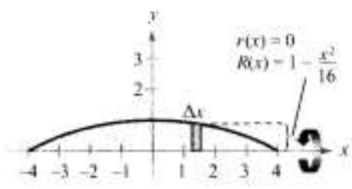


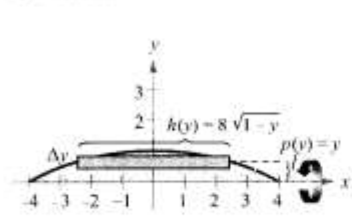
FIGURA 6.35

Solución: Utilizamos el método de los discos, de acuerdo con lo indicado en la Figura 6.36*a*.

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx$$
$$= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx$$
$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1.280}\right]_{-4}^{4}$$
$$= \frac{64\pi}{15} \approx 13{,}4 \text{ pies cúbicos}$$



a) Método de los discos



b) Método de las capas

FIGURA 6.36

Escriba la integral del volumen según el método de las capas, usando la Figura 6.36*b*. La integral ¿parece más complicada? □

Al aplicar el método de los discos en el Ejemplo 4 hemos tenido que despejar x en términos de y en la ecuación $y = 1 - (x^2/16)$. A veces, despejar x es muy difícil, por no decir imposible. En tales casos debe usarse un rectángulo vertical, de anchura Δx, haciendo que sea x la variable de integración. La posición, horizontal o vertical, del eje de giro determina entonces el método a emplear, como ilustra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 Necesario el método de las capas

Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$ en torno a la recta $x = 2$ (véase Figura 6.37).

Solución: En la ecuación no es fácil despejar x en términos de y (véase la discusión al final de la Sección 3.8). Por tanto, nos interesa x como variable de integración, así que tomamos un rectángulo representativo vertical. Como el rectángulo es paralelo al eje de revolución, usamos el método de las capas.

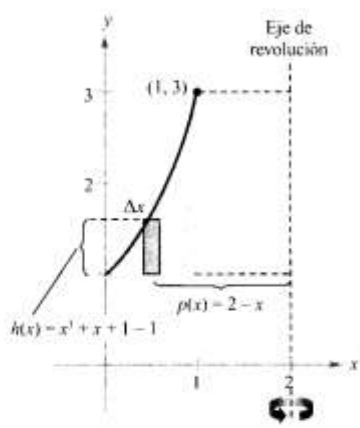


FIGURA 6.37

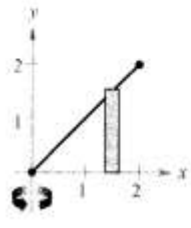
$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 (2 - x)(x^3 + x + 1 - 1)\,dx$$
$$= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x)\,dx$$
$$= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1$$
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right)$$
$$= \frac{29\pi}{15}$$

□

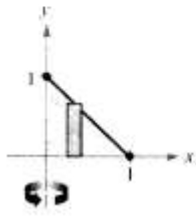
Ejercicios de la Sección 6.3

En los Ejercicios 1-12, usar el método de capas para formular y calcular la integral que da el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje y.

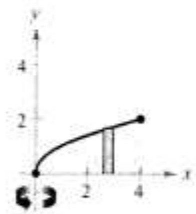
1. $y = x$



2. $y = 1 - x$



3. $y = \sqrt{x}$



4. $y = x^2 + 4$

5. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2$

6. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 4$

7. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$

8. $y = 4 - x^2,\ y = 0$

9. $y = 4x - x^2,\ x = 0,\ y = 4$

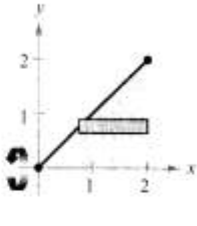
10. $y = 2x,\ y = 4,\ x = 0$

11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

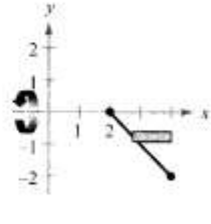
12. $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$

En los Ejercicios 13-16, usar el método de capas para escribir y calcular la integral que da el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje x.

13. $y = x$



14. $y = 2 - x$



15. $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$

16. $x + y^2 = 9,\ x = 0$

En los Ejercicios 17-20, calcular, por el método de las capas, el volumen del sólido generado al girar la región plana dada alrededor de la recta que se especifica.

17. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$, en torno a la recta $x = 4$

18. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$, en torno a la recta $x = 2$

19. $y = 4x - x^2,\ y = 0$, en torno a la recta $x = 5$

20. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$, en torno a la recta $x = 6$

En los Ejercicios 21-24, usar el método de los discos o el de las capas para hallar el volumen del sólido generado, al girar en torno a la recta dada, la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

21. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2$
a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $x = 4$

22. $y = \dfrac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$
a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $y = 1$

23. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2},\ x = 0,\ y = 0$
a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $x = a$

24. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0$ (hipocicloide)
a) el eje x *b)* el eje y

En los Ejercicios 25-28, usar la calculadora para *a)* representar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y *b)* aproximar el volumen del sólido que generan por revolución en torno al eje y.

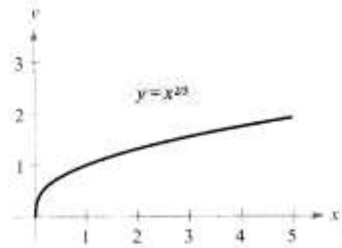
25. $x^{4/3} + y^{4/3} = 1,\ x = 0,\ y = 0$, primer cuadrante

26. $y = \sqrt{1 - x^3},\ y = 0,\ x = 0$

27. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-6)^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6$

28. $y = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

29. ***Para pensar*** Ordenar de menor a mayor los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar la región de la figura en torno a *a)* el eje x, *b)* el eje y, *c)* la recta $x = 5$. Explicar la respuesta.



30. Confirmar los resultados del Ejercicio 29 mediante integración, siendo la región la comprendida entre las gráficas de $y = x^{2/5}$, $y = 0$, y $x = 5$.

Para pensar En los Ejercicios 31 y 32, averiguar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar en torno al eje y. (Elegir atendiendo a un croquis de la región, no a la realización de cálculos.)

31. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

a) $\dfrac{3}{2}$ *b)* -2 *c)* 4 *d)* $7{,}5$ *e)* 15

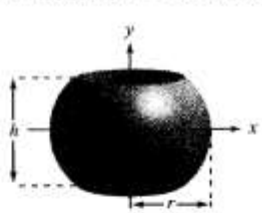
32. $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$

a) $3{,}5$ *b)* $-\dfrac{9}{4}$ *c)* 8 *d)* 10 *e)* 1

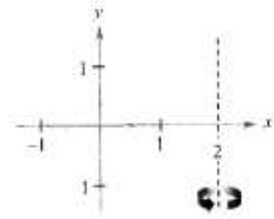
33. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = 2$ alrededor del eje y. Se perfora un orificio circular, centrado en el eje de giro, de modo que el sólido pierde un cuarto de su volumen. ¿Qué diámetro tiene el orificio?

34. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$ e $y = 0$ alrededor del eje y. Se perfora un orificio circular, centrado en el eje de revolución, de manera tal que el sólido pierde un tercio de su volumen. ¿Qué diámetro tiene el orificio?

35. Se perfora una esfera de radio r (véase figura) de modo que la altura del anillo esférico que queda tiene altura h. Probar que el volumen del anillo es $V = \pi h^3/6$.



36. ***Volumen de un toro*** Un toro se forma haciendo girar la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 1$ en torno a la recta $x = 2$ (véase figura). Calcular el volumen de la «rosquilla» resultante. (*Ayuda:* La integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ da el área de un semicírculo.)



37. ***Volumen de un toro*** Rehacer el Ejercicio 36 para el toro generado por la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ al girar en torno a la recta $x = R$, donde $r < R$.

38. **Volumen de un casquete esférico** Se corta una esfera de radio r por un plano para formar un casquete esférico de altura h. Probar que su volumen es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

Para pensar En los Ejercicios 39 y 40, dar un argumento geométrico que explique por qué las integrales tienen el mismo valor.

39. $\pi \displaystyle\int_1^5 (x - 1)\, dx$, $\quad 2\pi \displaystyle\int_0^2 y[5 - (y^2 + 1)]\, dy$

40. $\pi \displaystyle\int_1^2 [16 - (2y)^2]\, dy$, $\quad 2\pi \displaystyle\int_0^4 x\left(\frac{x}{2}\right) dx$

41. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa y especificar las dimensiones de cada sólido.

a) Cono circular recto *b)* Toro *c)* Esfera
d) Cilindro circular recto *e)* Elipsoide

i) $2\pi \displaystyle\int_0^r hx\, dx$

ii) $2\pi \displaystyle\int_0^r hx\left(1 - \frac{x}{r}\right) dx$

iii) $2\pi \displaystyle\int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

iv) $2\pi \displaystyle\int_0^b 2ax\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\, dx$

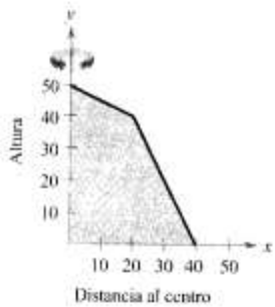
v) $2\pi \displaystyle\int_{-r}^{r} (R - x)(2\sqrt{r^2 - x^2})\, dx$

42. ***Volumen de un cobertizo*** Un cobertizo tiene base circular de 80 pies de diámetro (véase figura en la página siguiente). Partiendo de su centro, se ha medido la altura interior cada 10 pies, con el resultado recogido en la tabla.

x	0	10	20	30	40
Altura	50	45	40	20	0

a) Estimar el volumen del cobertizo mediante la regla de Simpson.

b) El techo consta de dos segmentos rectos. Hallar sus ecuaciones y calcular el volumen por integración.



43. ***Un modelo matemático*** El estanque de la figura es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 pies. Partiendo de su centro se ha medido su profundidad cada 25 pies. La tabla da cuenta de los resultados.

x	0	25	50	75	100
Profundidad	20	19	19	17	15

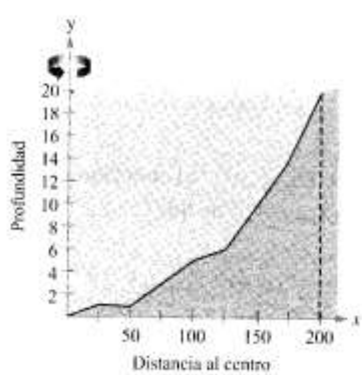
x	125	150	175	200
Profundidad	14	10	6	0

a) Estimar su volumen mediante la regla de Simpson.

b) Usar la calculadora para hallar un modelo cuadrático para esos datos. Representar en ella los datos y el modelo.

c) Usar integración en la calculadora y el modelo precedente para estimar el volumen del estanque.

d) Con el resultado de *c*), aproximar cuántos galones de agua contiene el estanque (1 pie cúbico = 7,48 galones).

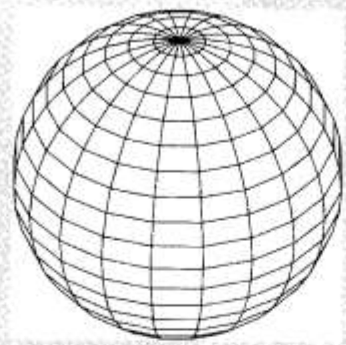


PROYECTO PARA LA SECCIÓN

La no esfericidad de Saturno Saturno es el menos esférico de los nueve planetas de nuestro sistema solar. Su radio ecuatorial mide 60.268 km y su radio polar 54.364 km.

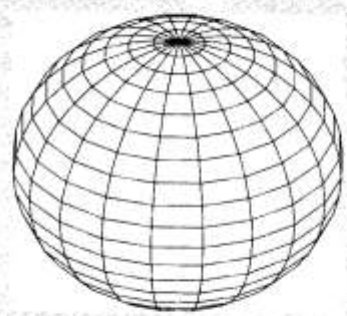
a) Hallar la razón entre los volúmenes de la esfera y del elipsoide achatado de la figura de más abajo.

b) Si un planeta fuese esférico y tuviese el mismo volumen que Saturno, ¿cuál sería su radio?



Modelo de un «Saturno esférico» generado por un ordenador, cuyos radios ecuatorial y polar son iguales. La ecuación de la sección que pasa por el polo es

$$x^2 + y^2 = 60.268^2$$



Modelo de un «Saturno achatado», cuyo radio ecuatorial es mayor que el radio polar. La ecuación de la sección que pasa por el polo es

$$\frac{x^2}{60.268^2} + \frac{y^2}{54.364^2} = 1$$

Ejercicios de repaso del Capítulo 6

En los Ejercicios 1-10, dibujar un croquis de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y calcular su área.

1. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ **2.** $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 4$, $x = 5$

3. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$

4. $x = y^2 - 2y$, $x = -1$, $y = 0$

5. $y = x$, $y = x^3$

6. $x = y^2 + 1$, $x = y + 3$

7. $y = e^x$, $y = e^2$, $x = 0$

8. $y = \text{cosec } x$, $y = 2$ (una región)

9. $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$

10. $x = \cos y$, $x = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3} \leqslant y \leqslant \frac{7\pi}{3}$

En los Ejercicios 11-14, representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y hallar, usando integración en la calculadora, el área de la región.

11. $y = x^2 - 8x + 3$, $y = 3 + 8x - x^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$, $y = x^3$, $x = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $y = 0$, $x = 0$

14. $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$

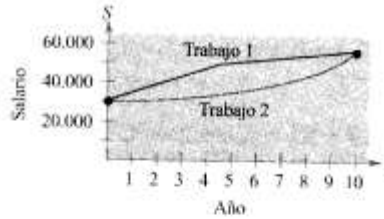
Área En los Ejercicios 15-18, escribir integrales que representen el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, usando rectángulos representativos horizontales y verticales. Calcular el área evaluando la integral que sea más sencilla.

15. $x = y^2 - 2y$, $x = 0$ **16.** $y = \sqrt{x - 1}$, $y = \frac{x - 1}{2}$

17. $y = 1 - \frac{x}{2}$, $y = x - 2$, $y = 1$

18. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 2$, $y = 0$, $x = 0$

19. ***Para pensar*** Una persona tiene dos ofertas de trabajo. El salario inicial es \$30.000 en ambas y a los 10 años de servicio, cada una de ellas pagará \$56.000. El incremento salarial en cada una está dibujado en la figura. Desde un punto de vista estrictamente monetario, ¿cuál es la mejor oferta? Explicar la respuesta.



20. ***Ventas por tarjetas de crédito*** Las ventas anuales s, en millones de dólares, de VISA, Mastercard y American Express, entre 1983 y 1992, admiten estos modelos:

$s = 15{,}9696t - 6{,}318$	VISA
$s = 8{,}581t + 6{,}965$	Mastercard
$s = 6{,}214t + 10{,}345$	American Express

donde $3 \leqslant t \leqslant 12$ representa el período de 10 años que va de 1983 a 1992. (*Fuente: Credit Card News.*)

a) En ese período ¿en cuánto superaron las ventas de VISA a las de Mastercard?

b) ¿Y las de VISA a las de American Express?

Volumen En los Ejercicios 21-28, calcular el volumen del sólido generado por revolución de la región plana acotada por las ecuaciones en torno a la recta indicada.

21. $y = x$, $y = 0$, $x = 4$

a) el eje x *b*) el eje y
c) la recta $x = 4$ *d*) la recta $x = 6$

22. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$

a) el eje x *b*) la recta $y = 2$
c) el eje y *d*) la recta $x = -1$

23. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ *a*) el eje y (esferoide oblongo)
b) el eje x (esferoide prolato)

24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *a*) el eje y (esferoide oblongo)
b) el eje x (esferoide prolato)

25. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
en torno al eje y

26. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$
en torno al eje x

27. $y = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{x - 2})}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$
en torno al eje y

28. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
en torno al eje x

En los Ejercicios 29 y 30, consideramos la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x\sqrt{x + 1}$ e $y = 0$.

29. ***Área*** Calcular el área de la región.

30. ***Volumen*** Hallar el volumen del sólido generado al hacer girar esa región en torno al *a*) eje x y *b*) eje y.

31. ***Gasolina en un depósito*** Un depósito de gasolina es un esferoide oblato generado al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por la gráfica de $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$, donde x e y se miden en pies. Hallar la profundidad de la gasolina cuando el depósito está lleno en un cuarto de su capacidad.

32. ***Tamaño de la base*** La base de un sólido es un círculo de radio a y sus secciones verticales son triángulos equiláteros. Calcular el radio del círculo si el sólido tiene 10 m^3 de volumen.

Longitud de arco En los Ejercicios 33 y 34, hallar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

33. $f(x) = \dfrac{4}{5}x^{5/4}$, $[0, 4]$ **34.** $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}$, $[1, 3]$

35. ***Longitud de una catenaria*** Un cable de suspensión de un puente tiene la forma de una catenaria de ecuación

$$y = 300 \cosh\left(\frac{x}{2.000}\right) - 280, \quad -2.000 \leq x \leq 2.000$$

donde x e y se miden en pies. Utilizar la calculadora para estimar la longitud del cable.

36. ***Aproximación*** Determinar qué valor aproxima mejor la longitud de arco dada por la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\sec^2 x)^2}\, dx$$

(Elegir atendiendo a un dibujo del arco, no haciendo cálculos.)
a) -2 *b*) 1 *c*) π *d*) 4 *e*) 3

37. ***Área de una superficie*** Hallar, por integración, el área lateral de un cilindro circular recto de altura 4 y radio 3.

38. ***Área de una superficie*** La región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, y $x = 3$ gira en torno al eje x. Hallar el área superficial del sólido generado.

39. ***Trabajo*** Determinar el trabajo realizado al estirar un muelle desde su longitud natural de 10 pulgadas hasta 15 pulgadas, sabiendo que es necesaria una fuerza de 4 libras para estirarlo 1 cm desde su posición natural.

40. ***Trabajo*** Determinar el trabajo realizado al estirar un muelle desde su longitud natural de 9 pulgadas hasta 18 pulgadas, sabiendo que es necesaria una fuerza de 50 libras para ello.

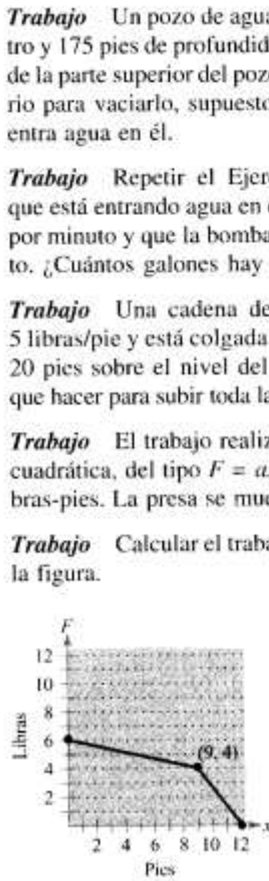
41. ***Trabajo*** Un pozo de agua tiene 8 pulgadas de diámetro y 175 pies de profundidad. Si el agua llega a 25 pies de la parte superior del pozo, calcular el trabajo necesario para vaciarlo, supuesto que durante el vaciado no entra agua en él.

42. ***Trabajo*** Repetir el Ejercicio 41 suponiendo ahora que está entrando agua en el pozo a razón de 4 galones por minuto y que la bomba vacía 12 galones por minuto. ¿Cuántos galones hay que bombear en este caso?

43. ***Trabajo*** Una cadena de 10 pies de longitud pesa 5 libras/pie y está colgada de una plataforma situada a 20 pies sobre el nivel del suelo. ¿Cuánto trabajo hay que hacer para subir toda la cadena hasta la plataforma?

44. ***Trabajo*** El trabajo realizado por una fuerza variable cuadrática, del tipo $F = ax^2$, en una presa es de 80 libras-pies. La presa se mueve 4 pies. Hallar a.

45. ***Trabajo*** Calcular el trabajo realizado por la fuerza de la figura.



Centroides En los Ejercicios 46-49, hallar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

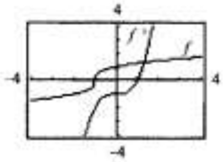
46. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$

47. $y = x^2$, $y = 2x + 3$

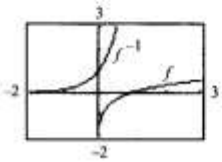
48. $y = a^2 - x^2$, $y = 0$

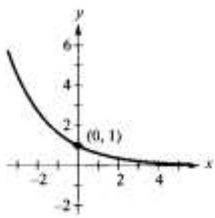
49. $y = x^{2/3}$, $y = \dfrac{1}{2}x$

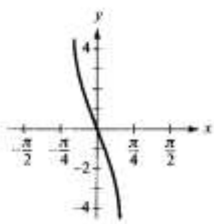
31. *a*) $f^{-1}(x) = x^3 - 1$

b) 

33. *a*) $f^{-1}(x) = e^{2x}$

b) 

35. 

37. 

39. *a*) $\frac{1}{2}$ *b*) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **41.** $-2x$ **43.** $te^t(t+2)$

45. $\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}}$ **47.** $3^{x-1}\ln 3$ **49.** $\dfrac{x(2-x)}{e^x}$

51. $(1 - x^2)^{-3/2}$ **53.** $\dfrac{x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} + \operatorname{arcsec} x$

55. $(\operatorname{arcsen} x)^2$ **57.** $2 - \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ **59.** $\dfrac{-y}{x(2y + \ln x)}$

61. *a*) ax^{a-1} *b*) $(\ln a)a^x$ *c*) $x^x(1 + \ln x)$ *d*) 0

63. 6,9 % **65.** $-\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$ **67.** $\dfrac{e^{4x} - 3e^{2x} - 3}{3e^x} + C$

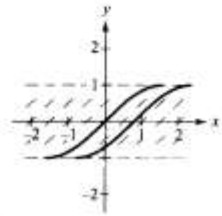
69. $\ln|e^x - 1| + C$ **71.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(e^{2x}) + C$

73. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2 + C$ **75.** $\frac{1}{2}\ln(16 + x^2) + C$

77. $\dfrac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right)^2 + C$ **79.** $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{x^4 - 1} + x^2) + C$

81. $-\dfrac{1}{2}(e^{-16} - 1) \approx 0{,}500$ **83.** $y = \dfrac{x^2}{2} + 3\ln|x| + C$

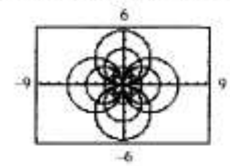
85. $y = Ce^{x^2}$ **87.** $\dfrac{x}{x^2 - y^2} = C$

89. *a*) 

b) Máximo: $y = 0$
Mínimo: $y = \pm 1$

c) $y = \operatorname{sen}(x + C),\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x + C \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

91. Familia de círculos: $x^2 + (y - K)^2 = K^2$



93. *a*) 0,60 *b*) 0,85 **95.** $y = A\operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)$

97. *a*) $y = 28e^{0{,}6 - 0{,}012s},\ s > 50$

b)

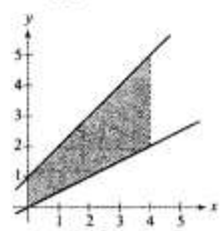
Velocidad, *s*	50	55	60	65	70
Millas por galón, *y*	28	26,4	24,8	23,4	22,0

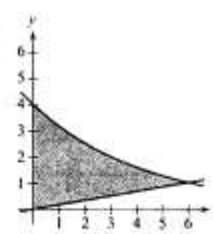
CAPÍTULO 6

Sección 6.1 *(página 469)*

1. $-\displaystyle\int_0^6 (x^2 - 6x)\,dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,dx$

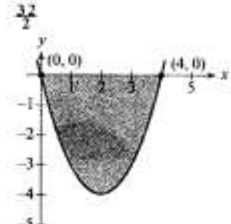
5. $-6\displaystyle\int_0^1 (x^3 - x)\,dx$

7. 

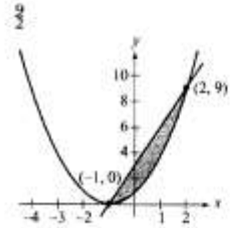
9. 

11. d

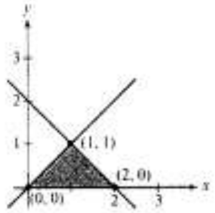
13. $\frac{32}{3}$



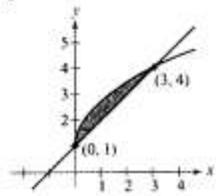
15. $\frac{9}{2}$



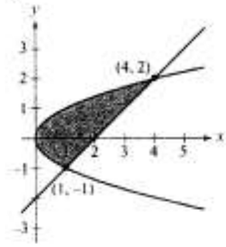
17. 1



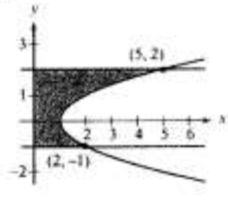
19. $\frac{3}{2}$



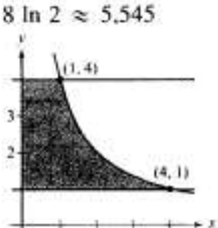
21. $\frac{9}{2}$



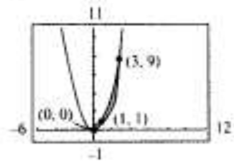
23. 6



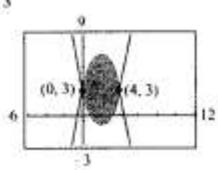
25. $8 \ln 2 \approx 5{,}545$



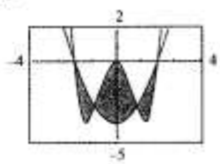
27. $\frac{37}{12}$



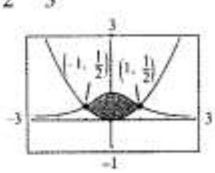
29. $\frac{64}{3}$



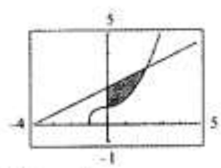
31. 8



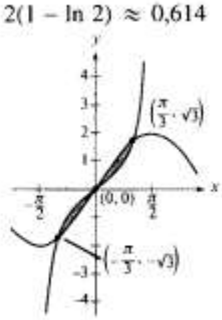
33. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \approx 1{,}237$



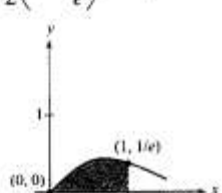
35. $\approx 1{,}759$



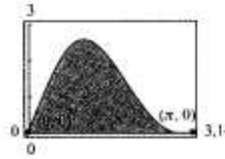
37. $2(1 - \ln 2) \approx 0{,}614$



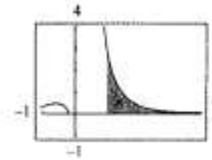
39. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0{,}316$



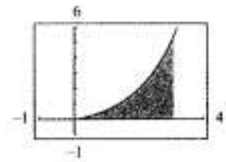
41. 4



43. $\approx 1{,}323$



45. *a)*



b) $\int_0^3 \sqrt{\frac{x^3}{4-x}}\, dx$; No *c)* $\approx 4{,}773$

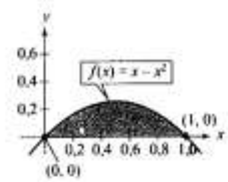
47. $\frac{1}{2}ac$ **49.** $\int_{-2}^{1} [x^3 - (3x - 2)]\, dx = \frac{27}{4}$

51. $x^4 - 2x^2 + 1 \leqslant 1 - x^2$ en $[-1, 1]$

$\int_{-1}^{1} [(1 - x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)]\, dx = \frac{4}{15}$

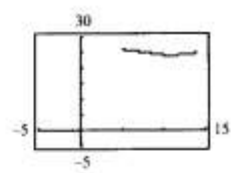
53. $b = 9\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \approx 3{,}330$

55. $\frac{1}{6}$



57. \$1,625 miles de millones

59. *a)*



b) 3,16 miles de millones de libras

61. \$193.183

63. $\frac{16}{3}(4\sqrt{2} - 5) \approx 3{,}5$

65. *a)* 6,031 m^2
b) 12,062 m^3
c) 60.310 libras

67. Exceso de consumo = 1.600
Exceso de producción = 400

69. Verdadero **70.** Verdadero

Sección 6.2 *(página 479)*

1. $\pi \int_0^1 (-x + 1)^2\, dx = \frac{\pi}{3}$ **3.** $\pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \frac{15\pi}{2}$

5. $\pi \int_0^1 [(x^2)^2 - (x^3)^2]\, dx = \dfrac{2\pi}{35}$

7. $\pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2\, dy = 8\pi$

9. $\pi \int_0^1 (y^{3/2})^2\, dy = \dfrac{\pi}{4}$

11. *a)* 8π *b)* $\dfrac{128\pi}{5}$ *c)* $\dfrac{256\pi}{15}$ *d)* $\dfrac{192\pi}{5}$

13. *a)* $\dfrac{32\pi}{3}$ *b)* $\dfrac{64\pi}{3}$ **15.** 18π

17. $\pi(8 \ln 4 - \frac{3}{4}) \approx 32{,}49$ **19.** $\dfrac{208\pi}{3}$ **21.** $\dfrac{384\pi}{5}$

23. $\pi \ln 4$ **25.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **27.** $\dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right) \approx 1{,}358$

29. 8π **31.** $\dfrac{\pi^2}{2} \approx 4{,}935$ **33.** $1{,}969$

35. $49{,}022$ **37.** a

39. *a)* $\dfrac{512\pi}{15}$
b) No, sólo se ha trasladado horizontalmente el sólido.

41. 18π

45. $\pi r^2 h\left(1 - \dfrac{h}{H} + \dfrac{h^2}{3H^2}\right)$ **47.** $\dfrac{\pi}{30}$

49. *a)* 60π
b) 50π

51. Un cuarto: 32,64 pies
Tres cuartos: 67,36 pies

53. *a)* ii: cilindro circular recto de radio r y altura h
b) iv; elipsoide asociado a la elipse de ecuación

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

c) iii: esfera de radio r

d) i: cono circular recto de radio r y altura h

e) v: toro de radio mayor R y radio menor r

55. *a)* $\dfrac{128}{3}$ *b)* $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ *c)* $\dfrac{16\pi}{3}$ *d)* $\dfrac{32}{3}$

57. *a)* $\dfrac{1}{10}$ *b)* $\dfrac{\pi}{80}$ *c)* $\dfrac{\sqrt{3}}{40}$ *d)* $\dfrac{\pi}{20}$

59. $\dfrac{\pi d^3 \operatorname{sen} 70°}{8 \operatorname{sen} 20°}$

61. *a)* $\dfrac{2r^3}{3}$ *b)* $\dfrac{2r^3 \operatorname{tg} \theta}{3}$, $\lim\limits_{\theta \to 90} V = \infty$

63. $5\sqrt{1 - 2^{-2/3}} \approx 3{,}0415$

Sección 6.3 (*página 489*)

1. $2\pi \int_0^2 x^2\, dx = \dfrac{16\pi}{3}$ **3.** $2\pi \int_0^4 x\sqrt{x}\, dx = \dfrac{128\pi}{5}$

5. $2\pi \int_0^2 x^3\, dx = 8\pi$ **7.** $2\pi \int_0^2 x(4x - 2x^2)\, dx = \dfrac{16\pi}{3}$

9. $2\pi \int_0^2 x(x^2 - 4x + 4)\, dx = \dfrac{8\pi}{3}$

11. $2\pi \int_0^1 x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0{,}986$

13. $2\pi \int_0^2 y(2 - y)\, dy = \dfrac{8\pi}{3}$

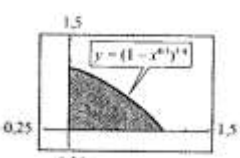
15. $2\pi \left[\int_0^{1/2} y\, dy + \int_{1/2}^1 y\left(\dfrac{1}{y} - 1\right) dy\right] = \dfrac{\pi}{2}$

17. 16π **19.** 64π

21. *a)* $\dfrac{128\pi}{7}$ *b)* $\dfrac{64\pi}{5}$ *c)* $\dfrac{96\pi}{5}$

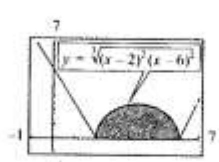
23. *a)* $\dfrac{\pi a^3}{15}$ *b)* $\dfrac{\pi a^3}{15}$ *c)* $\dfrac{4\pi a^3}{15}$

25. *a)*



b) $1{,}506$

27. *a)*



b) $187{,}25$

29. a, c, b **31.** d

33. Diámetro $= 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \approx 1{,}464$

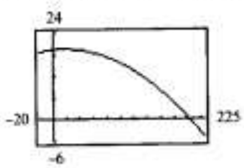
37. $2\pi^2 r^2 R$

39. Ambas integrales dan el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$ y $x = 5$, al girar en torno al eje x.

41. *a)* ii: cono circular recto de radio r y altura h
b) v: toro de radio mayor R y radio menor r
c) iii: esfera de radio r
d) i: cilindro circular recto de radio r y altura h
e) iv: elipsoide asociado a la elipse de ecuación

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

43. *a)* 1.366.593 pies cúbicos
b) $d = -0{,}000561x^2 + 0{,}0189x + 19{,}39$



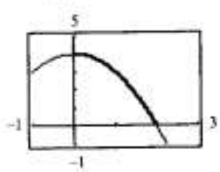
c) 1.343.345 pies cúbicos
d) 10.048.221 galones

Sección 6.4 *(página 500)*

1. 13 **3.** $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1) \approx 1{,}219$

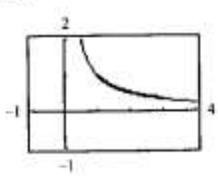
5. $5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \approx 8{,}352$ **7.** $\frac{33}{16}$

9. *a)*



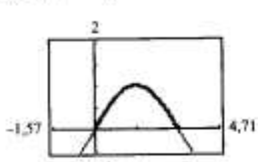
b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$ *c)* $\approx 4{,}647$

11. *a)*



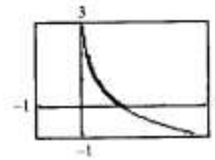
b) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$ *c)* $\approx 2{,}147$

13. *a)*



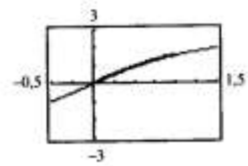
b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$ *c)* $\approx 3{,}820$

15. *a)*



b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+e^{-2y}}\,dy$ *c)* $\approx 2{,}221$

17. *a)*

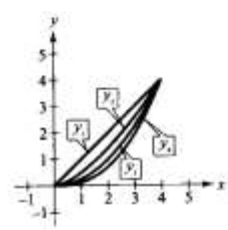


b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2}\,dx$ *c)* $\approx 1{,}871$

19. b

21. *a)* 64,125 *b)* 64,525 *c)* 64,666 *d)* 64,672

23. *a)*



b) y_1, y_2, y_3, y_4

c) $s_1 \approx 5{,}657$
$s_2 \approx 5{,}759$
$s_3 \approx 5{,}916$
$s_4 \approx 6{,}063$

25. $\frac{2}{3}$ **27.** $20[\mathrm{sh}\,1 - \mathrm{sh}(-1)] \approx 47{,}0$ metros

29. $3 \operatorname{arcsen} \frac{2}{3} \approx 2{,}1892$

31. $\displaystyle 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{9}(82\sqrt{82}-1) \approx 258{,}85$

33. $\displaystyle 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx = \frac{47\pi}{16}$

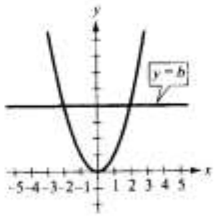
35. $\displaystyle 2\pi \int_1^8 x\sqrt{1+\frac{1}{9x^{4/3}}}\,dx =$
$\displaystyle = \frac{\pi}{27}(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}) \approx 199{,}48$

37. 14,424

41. $6\pi(3-\sqrt{5}) \approx 14{,}40$

37. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{4b}{3\pi}\right)$

39. *a)*



b) $\bar{x} = 0$ por simetría

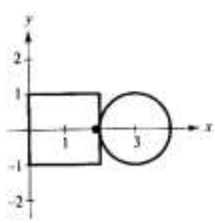
c) $M_y = \displaystyle\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} x(b - x^2)\, dx = 0$ porque $y = x$ e $y = x^3$ son funciones impares

d) $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ porque el área es mayor para $y > \dfrac{b}{2}$.

e) $\bar{y} = \dfrac{3}{5}b$

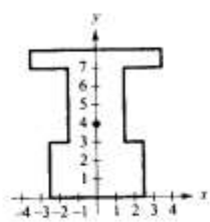
41. *a)* $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12{,}98)$
b) $y = (-1{,}02 \times 10^{-5})x^4 - 0{,}0019x^2 + 29{,}28$
c) $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12{,}85)$

43.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{4 + 3\pi}{4 + \pi}, 0\right)$

45.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{135}{34}\right)$

47. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2 + 3\pi}{2 + \pi}, 0\right)$ **49.** $160\pi^2 \approx 1.579{,}14$

51. $\dfrac{128\pi}{3} \approx 134{,}04$ **53.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{2r}{\pi}\right)$

55. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{n + 1}{n + 2}, \dfrac{n + 1}{4n + 2}\right)$

Cuando $n \to \infty$, $(\bar{x}, \bar{y}) \to \left(1, \dfrac{1}{4}\right)$

Sección 6.7 *(página 531)*

1. 936 libras **3.** 748,8 libras

5. 1.123,2 libras **7.** 748,8 libras

9. 1.064,96 libras **11.** 12.000 kilogramos

13. 243.000 kilogramos **15.** 2.814 libras

17. 6.753,6 libras **19.** 94,5 libras

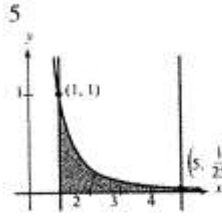
23. 960 libras

25. 3.010,8 libras **27.** 6.448,7 libras

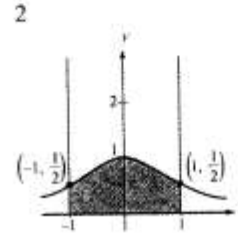
29. *a)* $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$ pies
b) La presión crece con la profundidad.

Ejercicios de repaso del Capítulo 6 *(página 533)*

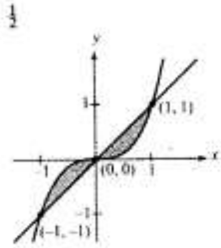
1. $\dfrac{4}{5}$



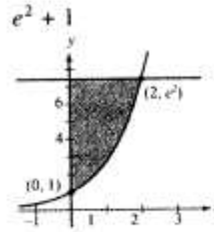
3. $\dfrac{\pi}{2}$



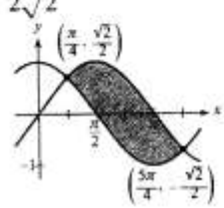
5. $\frac{1}{2}$



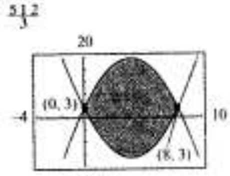
7. $e^2 + 1$



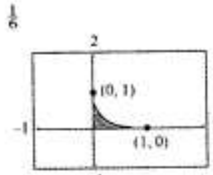
9. $2\sqrt{2}$



11. $\frac{512}{3}$



13. $\frac{1}{6}$



15. $\displaystyle\int_0^2 [0 - (y^2 - 2y)]\, dy = \int_{-1}^0 2\sqrt{x + 1}\, dx = \frac{4}{3}$

17. $\int_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] dx + \int_2^3 [1 - (x - 2)]\, dx =$
$= \int_0^1 [(y + 2) - (2 - 2y)]\, dy = \frac{3}{2}$

19. El primer trabajo. El salario en él es mayor que en el segundo trabajo todos los años excepto el primero y el décimo año.

21. *a*) $\frac{64\pi}{3}$ *b*) $\frac{128\pi}{3}$ *c*) $\frac{64\pi}{3}$ *d*) $\frac{160\pi}{3}$

23. *a*) 64π *b*) 48π **25.** $\frac{\pi^2}{4}$

27. $\frac{4\pi}{3}(20 - 9 \ln 3) \approx 42{,}359$ **29.** $\frac{4}{15}$

31. 1,958 pies **33.** $\frac{8}{15}(1 + 6\sqrt{3}) \approx 6{,}076$

35. 4.018,2 pies **37.** 15π

39. 50 libras-pulgada $\approx$ 4,167 libras-pies

41. 104.000π libras-pulgadas $\approx$ 163,4 libras-pies

43. 250 libras-pulgadas **45.** $a = \frac{15}{4}$

47. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$ **49.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{2a^2}{5}\right)$

51. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2(9\pi + 49)}{3(\pi + 9)}, 0\right)$

53. 72.800 libras (sobre las paredes laterales)
62.400 libras (sobre la pared del frontal más profundo)
15.600 libras (sobre la pared del frontal menos profundo)

55. 4.992π libras.

CAPÍTULO 7

Sección 7.1 *(página 543)*

1. b **3.** c

5. $\int u^n\, du$
$u = 3x - 2,\ n = 4$

7. $\int \frac{du}{u}$
$u = 1 - 2\sqrt{x}$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$
$u = t,\ a = 1$

11. $\int \operatorname{sen} u\, du$
$u = t^2$

13. $e^u\, du$
$u = \operatorname{sen} x$

15. $-\frac{1}{5}(-2x + 5)^{5/2} + C$

17. $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{6(3v - 1)^2} + C$ **19.** $-\frac{1}{3}\ln|-t^3 + 9t + 1| + C$

21. $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x - 1| + C$ **23.** $\ln(1 + e^x) + C$

25. $\frac{x}{15}(12x^4 + 20x^2 + 15) + C$ **27.** $\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen} 2\pi x^2 + C$

29. $-\frac{1}{\pi}\operatorname{cosec} \pi x + C$ **31.** $\frac{1}{5}e^{5x} + C$

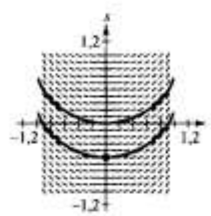
33. $2\ln(1 + e^x) + C$ **35.** $\ln|\sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)| + C$

37. $\ln(t^2 + 4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$

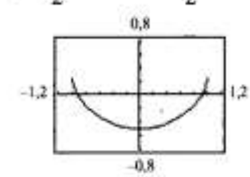
39. $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2t - 1) + C$ **41.** $\frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{2}{t}\right| + C$

43. $3\operatorname{arcsen}\frac{x - 3}{3} + C$ **45.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{8} + C$

47. *a*)



b) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 - \frac{1}{2}$

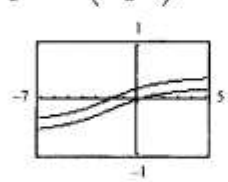


49. $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$ **51.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C$

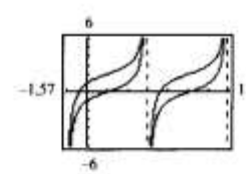
53. $\frac{1}{2}$ **55.** $\frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \approx 0{,}316$

57. 4 **59.** $\frac{\pi}{18}$

61. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x + 2}{3}\right) + C$ **63.** $\operatorname{tg}\theta - \sec\theta + C$



Una gráfica es traslación vertical de la otra



Una gráfica es traslación vertical de la otra