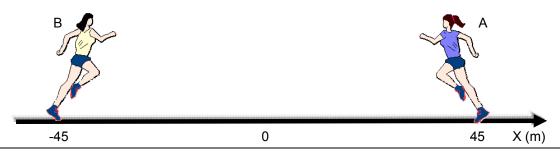
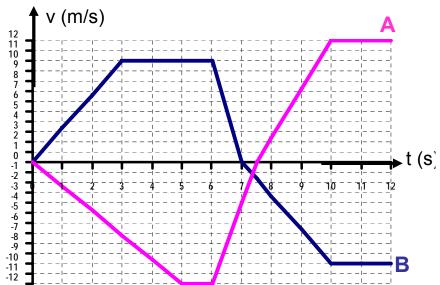
PROBLEMA 1 : En entrenamientos de atletismo infantil María (A) y Ana (B) se preparan para los juegos nacionales. Las posiciones iniciales de las atletas son XA=+45m y XB=-45m, con respecto a la meta (x=0m), como se muestra en la figura. Gana la competencia aquella atleta que está mejor preparada, es decir, la que llegue en menos tiempo a la meta, el movimiento de ambas atletas esta representado en el gráfico v(t) que se muestra a continuación.





Determinar:

- 1. La posición de "B" a los 3 s de haber comenzado su movimiento
- 2. El valor de la aceleración media experimentada por "A" en el intervalo 0≤t ≤12s.
- 3. El valor de la aceleración de "A" en el instante de tiempo t=9.5 s
- 4. La velocidad de "B" en el instante t= 6.75 s
- 5. La velocidad media experimentada por "B" entre los 0≤t ≤12s.
- 6. La posición de "B" a los 6 s
- 7. El instante de tiempo en que las atletas se encuentran por primera vez.

Para la solución de este problema haremos uso de los siguientes Conceptos, Leyes y Principios.

Leyes y principios	Conceptos		
✓ Cinemática de la	✓	Posición	✓ Aceleración Media
partícula	✓	Desplazamiento	✓ Aceleración Instantánea
✓ Ecuación de una línea	✓	Velocidad Media	✓ Movimiento en una dimensión
recta	✓	Velocidad Instantánea	✓ Sistema de referencia

De los Datos y la Información suministrada se observa que con la figura se nos indica la posición inicial de cada atleta y con la gráfica de V(t) obtenemos las velocidades, aceleraciones y desplazamientos que experimentan las atletas durante su movimiento, con esta información es posible construir las funciones posición, velocidad para cada uno de las etapas del movimiento.

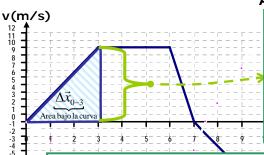
SOLUCIÓN

1. La posición de B a los 3 s de haber comenzado su movimiento

La posición para ese instante de tiempo se puede determinar:

- a. A partir del gráfico v(t), calculando el desplazamiento de B entre los 0 y 3 s
- b. Estableciendo la función posición para el movimiento de la partícula en el intervalo y calculando la posición a partir de esta ecuación.

A) A PARTIR DEL GRÁFICO:



Podemos determinar el desplazamiento de la partícula B a partir de la gráfica v(t) como el área bajo curva. Para ello hallamos el área que esta comprendida entre la curva y el eje del tiempo. En este caso, sería el área de un triángulo.

Area de un triángulo =
$$\frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 10}{2} = 15 m$$

$$\Delta \vec{x}_{0\text{--}3} \!=\! \text{Area bajo la curva} \implies \Delta \vec{x}_{0\text{--}3} \!=\! 15\, m$$

Por definición el desplazamiento es la variación de la posición: $\Delta \vec{x}_{0-3} = \vec{x}_3 - \vec{x}_0$

Si despejamos la posición para t=3s: $\vec{x}_{_{\! 3}} = \Delta \vec{x}_{_{\! 0-3}} + \vec{x}_{_{\! 0}}$

$$\vec{x}_3 = \underbrace{\Delta \vec{x}_{0-3}}_{\text{Area bajo la curva V(t)}} + \vec{x}_0$$

Entonces podemos obtener la posición para ese instante de tiempo:

$$\vec{x}_3 = 15 + (-45) \implies \vec{x}_3 = -30 \, m$$

B) A PARTIR DE LA FUNCIÓN POSICIÓN

Para el intervalo de tiempo 0≤t ≤3 s., B experimenta un MRUV, la función posición que describe este movimiento es:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \ t + \frac{1}{2} \vec{a} \ t^2$$

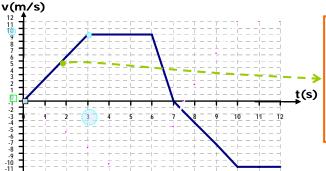
 \vec{x} : Posición de B en cualquier instante dentro de un intervalo de tiempo

Donde: \vec{x}_0 : Posicion al inicio del intervalo

 $ec{v}_{\scriptscriptstyle 0}$: Velocidad al inicio del intervalo

 \vec{a} : Aceleración en el intervalo

A partir de la información suministrada y del gráfico v(t), construimos la función posición que describe el movimiento de B en el intervalo 0≤t ≤3 s.



Tomamos dos puntos conocidos de esta recta, por lo tanto la pendiente es:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_0}{3 - 0}$$

$$\vec{a} = \frac{10 - 0}{3 - 0} \implies \vec{a} = 3{,}33 \text{ m/s}^2$$

Se construye entonces la función posición para ese intervalo

La función posición que describe el movimiento de B en el intervalo 0≤t ≤3 s., es:

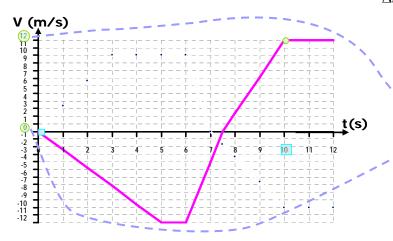
$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \ t + \frac{1}{2} \vec{a} \ t^2 \implies \vec{x} = -45 + \frac{1}{2} 3,33 \ t^2$$

Para el instante de tiempo t=3s

$$\vec{x}_3 = -45 + \frac{1}{2}3,33(3)^2 \implies \vec{x}_3 = -45 + 14,98 \implies \vec{x}_3 = -30,02 \, m$$

2. El valor de la aceleración media experimentada por "A" en el intervalo [0; 12] s

La aceleración media se determina a partir de la expresión: $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$



Para el intervalo 0≤t ≤10s: $\langle \vec{a} \rangle_{0-12} = \frac{\vec{v}_{12} - \vec{v}_0}{12 - 0}$

De la gráfica v(t) para A, leemos los valores de velocidad para los instantes t=0s y t=10s:

$$\vec{v}_{10} = 12 \, m/s$$

$$\vec{v}_0 = 0 \, m/s$$

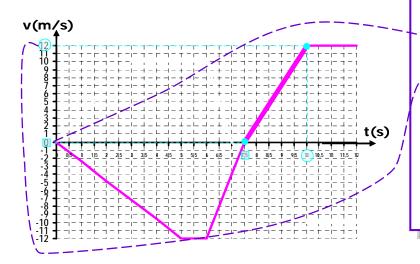
Calculando la aceleración media en el intervalo 0≤t ≤10s.:

$$\langle \vec{a} \rangle_{0-12} = \frac{12-0}{10-0} \implies \qquad \langle \vec{a} \rangle_{0-12} = 1, 2 \, m/s^2$$

3. El valor de la aceleración de "A" en el instante de tiempo t=9,5 s .

Para hacer el cálculo de la aceleración para "A" en el instante t=9,5s. debemos recordar que:

- a. El instante de tiempo t=9,5s se encuentra en el intervalo 7,5≤t≤10s., observamos que en este intervalo el movimiento que esta describiendo "A" es un movimiento rectilíneo uniformemente variado, para este tipo de movimiento la aceleración experimentada por la partícula es constante en el tiempo, es decir que la aceleración media y la aceleración instantánea no cambian y tienen el mismo valor.
- b. Como se cuenta con el gráfico v(t), el valor de la aceleración se determina a partir del cálculo de la pendiente de la línea recta, que se obtiene tomando dos puntos cualesquiera de la línea recta.



De la gráfica v(t) para A, leemos los valores de velocidad para los instantes t=7,5s y t=10s:

$$\vec{v}_{7,5} = 0m/s$$

$$--- \Rightarrow \vec{v}_{10} = 12 \ m/s$$

Luego, calculamos la pendiente de la recta:

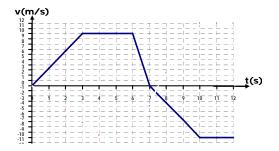
$$\vec{a}_{9.5} = \langle \vec{a} \rangle_{7.5-10} = \frac{\vec{v}_{10} - \vec{v}_{7.5}}{10 - 7.5}$$

$$\vec{a}_{9.5} = \frac{12 - 0}{10 - 7.5} \implies \vec{a}_{9.5} = 0.8 \ m/s^2$$

4. La velocidad de "B" en el instante t= 6.75 s

Si observamos en el gráfico v(t) el valor de la velocidad de la partícula para este instante de tiempo (6,75s.) no se logra leer, por lo tanto es necesario construir la función velocidad del movimiento que esta experimentando la partícula.

Observamos que la partícula esta experimentando un movimiento rectilíneo uniformemente variado. Para el intervalo 6≤t≤7s., la función velocidad que describe este movimiento es: $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$

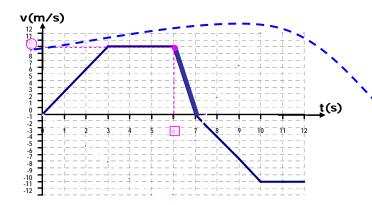


 \vec{v} : Velocidad de la partícula en cualquier instante dentro de un intervalo de tiempo

Donde: \vec{v}_0 : Velocidad al inicio del intervalo

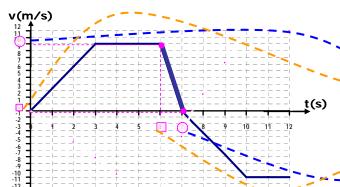
 \vec{a} : Aceleración en el intervalo

Para construir la función velocidad que describe el movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo 6≤t≤7s.:



a. Leemos, del gráfico v(t), el valor de la velocidad con la que la partícula inicia el movimiento, es decir, la velocidad en el inicio del intervalo, en este caso la velocidad para el instante t=6s.

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_6 = 10 \, m/s$$



b. Para el intervalo 6≤t≤7s., calculamos el valor de la aceleración como la pendiente de la recta.

$$\vec{a} = \langle \vec{a} \rangle_{6-7} = \frac{\vec{v}_7 - \vec{v}_6}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{0 - 10}{7 - 6} \implies \vec{a} = -10 \ m/s^2$$

La función velocidad del movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo 6≤t≤7s, es:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \ t \implies \vec{v} = 10 - 10 \ t \implies \vec{v} = 10 - 10 \ (t - 6)$$

Para el instante t=6,75s, la velocidad de la partícula es:

$$\vec{v}_{6,75} = 10 - 10 \ (6,75 - 6)$$

$$\vec{v}_{6,75} = 2,5 \ m/s$$

Tomamos el tiempo a partir de los 6s., que es el instante en el que la partícula comenzó el MRUV que estamos estudiando.

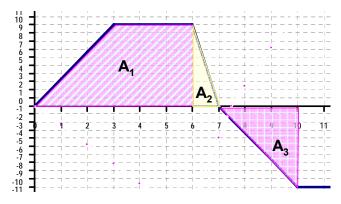
Nota: Recordemos que siempre que se pida una posición o velocidad en un instante determinado se le debe restar al tiempo que se pida el tiempo de inicio del intervalo.

5. La velocidad media experimentada por "B" entre los [0; 10] s

El valor de la velocidad media se determina a partir de la ecuación: $\left\langle \vec{v} \right\rangle = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$

Para el intervalo de tiempo 0≤t≤10s.: $\left\langle \vec{v} \right\rangle_{0-10} = \frac{\Delta \vec{x}_{0-10}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{x}_{0-10}}{10-0}$

Donde el desplazamiento ($\Delta \vec{x}_{0-10}$) se obtiene al calcular el área bajo la curva en el gráfico v(t). Por lo que el desplazamiento en este caso es igual a: $\Delta \vec{x}_{0-10} = A_1 + A_2 + A_3$



 A_1 = Área de un trapecio:

$$A_{\rm i} = \frac{(B+b)h}{2} \Rightarrow A_{\rm i} = \frac{(6+3)10}{2} \Rightarrow A_{\rm i} = 45 m$$

 A_2 = Área de un triángulo:

$$A_2 = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{1 \times 10}{2} \Rightarrow A_2 = 5 m$$

A₃= Área de un triángulo:

$$A_3 = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{3 \times (-10)}{2} \Rightarrow A_3 = -15 \ m$$

La velocidad media experimentada por B es:

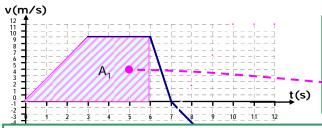
$$\left\langle \vec{v} \right\rangle_{0-10} = \frac{\left(45+5-15\right)}{10-0} \Rightarrow \left[\left\langle \vec{v} \right\rangle_{0-10} = 3,5 \ m/s\right]$$

6. La posición de "B" a los 6 s.

Al igual que se hizo en la pregunta 1. la posición de "B" para ese instante de tiempo se puede determinar:

- a. A partir del gráfico v(t), calculando el desplazamiento de B entre los 0 y 6 s
- b. Estableciendo la función posición para el movimiento de la partícula en el intervalo y calculando la posición a partir de esta ecuación.

A) A PARTIR DEL GRÁFICO :



Se puede determinar el desplazamiento de la partícula B a partir de la gráfica v(t) como el área bajo curva. Esta área fue calculada en la pregunta anterior.

 $\vec{x}_{0-6} = A_1$

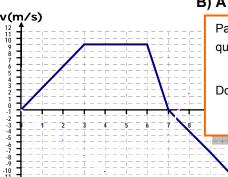
Por definición el desplazamiento es la variación de la posición: $\Delta \vec{x}_{0-6} = \vec{x}_6 - \vec{x}_0$

Si despejamos la posición para t=6s: $\vec{x}_6 = \Delta \vec{x}_{0-6} + \vec{x}_0$

Entonces podemos obtener la posición para ese instante de tiempo: $\vec{x}_6 = \underbrace{\Delta \vec{x}_{0-6}}_{\text{Area bajo la curva V(t)}} + \vec{x}_0$

$$\vec{x}_6 = 45 + (-45) \implies \vec{x}_6 = 0 m$$

B) A PARTIR DE LA FUNCIÓN POSICIÓN



Para el intervalo de tiempo 3≤t ≤6 s., B ., B experimenta un MRU, la función posición que describe este movimiento es: $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}$ t

 \vec{x} : Posición de B en cualquier instante dentro de un intervalo de tiempo

Donde: \vec{x}_0 : Posicion al inicio del intervalo

 \vec{v} : Velocidad que experimenta B durante el intervalo

A partir de la información suministrada y del gráfico v(t), construimos la función posición que describe el movimiento de B en el intervalo 3≤t ≤6 s.

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_3 = -30m \iff \text{este valor fue calculado en la pregunta 1}$$

 $\vec{v} = \vec{v}_3 = 10 \, m/s$

Nota: Recordemos que siempre que se pida una posición o velocidad en un instante determinado se le debe restar al tiempo que se pida el tiempo de inicio del intervalo.

La función posición que describe el movimiento de B en el intervalo 3≤t ≤6 s., es:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}$$
 $t \implies \vec{x} = -30 + 10$ t

para t=6s, la posición de la partícula es:

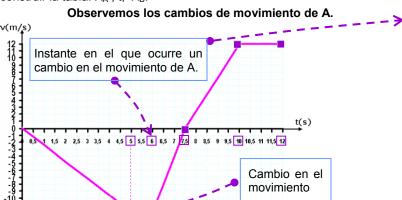
$$\vec{x}_6 = -30 + 10(t - 3) \implies$$

$$\vec{x}_6 = 0 \, m$$

El instante de tiempo en que las atletas se encuentran.

Para determinar el instante de tiempo en el que ocurre el encuentro, debemos inicialmente establecer en que intervalo se produce. Observemos este procedimiento:

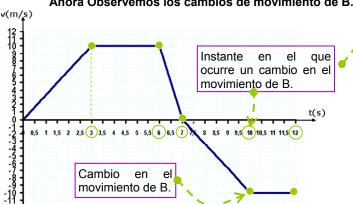
PRIMERO. Identificamos los instantes en los que ocurre un cambio en el tipo de movimiento de cada una de las partículas, para construir la tabla: XA, t, XB.



A partir	de	esta	información	construimos	la	columna	t
de la sid	aiur	nte ta	bla.				

X_A	t	X_B
	0	
	5	
	6	
	7,5	
	10	
	12	

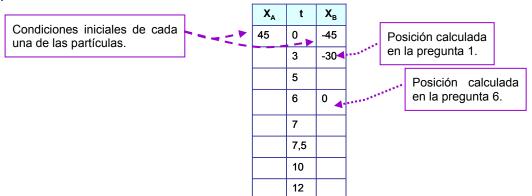
Ahora Observemos los cambios de movimiento de B.



Observamos cuales instantes de tiempo no están contemplados en la tabla, para luego incorporarlos.

X _A	t	X _B	
	0		
	3		
	5		
	6		
	7 🧹		
	7,5		
	10		
	12		

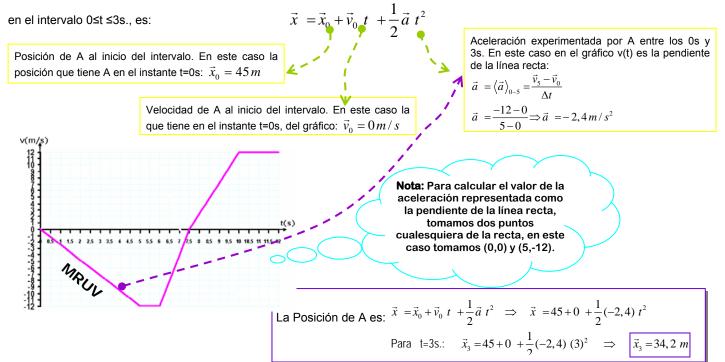
SEGUNDO. Comenzamos a llenar la tabla. Ubicamos en la columna que corresponda las posiciones determinadas en preguntas anteriores.



TERCERO. Determinamos las posiciones finales de A y B en cada instante de tiempo en el que ocurra un cambio en el movimiento. Estudiaremos el primer intervalo de tiempo, es decir en el intervalo 0≤t≤3s.:

Para A

A describe un movimiento rectilíneo uniformemente variado, para este movimiento la función posición que describe el movimiento de A



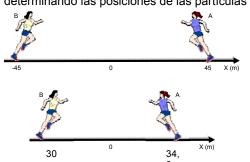
Para E

Posición de B en el instante t=3s fue calculada en la pregunta 1: $\vec{x}_3 = -30m$

Vamos Ilenando la tabla

X _A	t	X _B
45	0	-45
34,2	3	-30
	5	
	6	0
	7	
	7,5	
	10	
	12	

CUARTO. Comparamos las posiciones de A y B al inicio (t=0s) y al final del intervalo (t=3s) que estamos estudiando, esto nos ayudará a saber sí ya se produjo el encuentro o si tenemos que continuar determinando las posiciones de las partículas en cada uno de los instantes de tiempo posteriores.

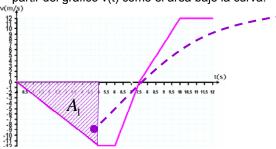


Notamos que las partículas entre 0 y 3s, no se han encontrado, por tal motivo estudiamos en el siguiente intervalo de tiempo el movimiento de ellas.

En el intervalo de tiempo $3 \le t \le 5$ s

Para A

A continúa describiendo un movimiento rectilíneo uniformemente variado. Podemos determinar la posición de A en t=5s, por el desplazamiento de A en el intervalo 0≤t ≤5s y éste lo obtenemos a partir del gráfico v(t) como el área bajo la curva:



$$A_{1} = \frac{(b \times h)}{2}$$

$$A_{1} = \frac{(5 \times -12)}{2} \implies A_{1} = -30 \ m$$

Posición de A en t=5s:

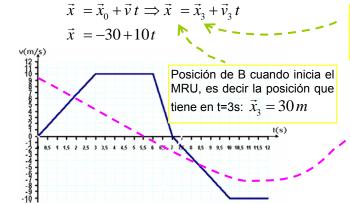
$$\Delta \vec{x}_{0-5} = \vec{x}_5 - \vec{x}_0$$

$$\vec{x}_5 = \Delta \vec{x}_{0-5} + \vec{x}_0 \implies \vec{x}_5 = -30 + 45$$

$$\vec{x}_5 = 15 \, m$$

Para B

B esta describiendo un movimiento rectilíneo uniforme, su posición en t=5s la podemos determinar a partir de la función posición:



Velocidad de B cuando inicia el MRU, es decir la velocidad que tiene en t=3s: $\vec{v}_3 = 10\,m/s$

Posición de B, en t=5s:

$$\vec{x} = -30 + 10(t - 3)$$

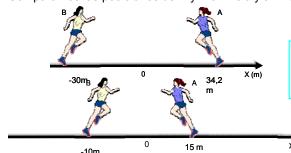
$$\vec{x}_5 = -30 + 10(5 - 3)$$

$$\vec{x}_5 = -10 \ m$$

Vamos llenando la tabla:

X _A	t	X _B
45	0	-45
34,2	3	-30
15	5	-10
	6	0
	7	
	7,5	
	10	
	12	

Comparamos las posiciones de A y B al inicio y al final de este intervalo.

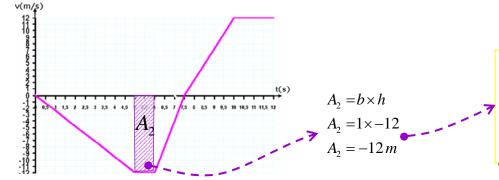


Se observa que en este intervalo de tiempo no se ha producido el encuentro.

En el intervalo de tiempo $5 \le t \le 6s$

Para A

El movimiento descrito por A es un M.R.U., la posición de A en t=6s. la podemos determinar a partir del área bajo la curva:



Posición de A en t=6s:

$$\Delta \vec{x}_{5-6} = \vec{x}_6 - \vec{x}_5$$

$$\vec{x}_6 = \Delta \vec{x}_{5-6} + \vec{x}_5 \Rightarrow \vec{x}_6 = -12 + 15$$

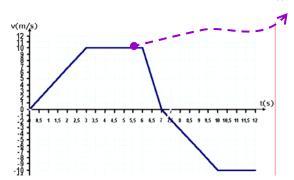
$$\vec{x}_6 = 3m$$

Para B

B continúa describiendo un M.R.U., su posición en t=6s la podemos determinar a partir de la función posición:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} t \implies \vec{x} = \vec{x}_3 + \vec{v}_3 t$$

$$\vec{x} = -30 + 10t$$



Posición de B, en t=6s:

Posición de B en t=6s:

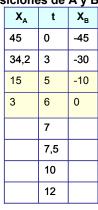
$$\vec{x} = -30 + 10(t - 3)$$

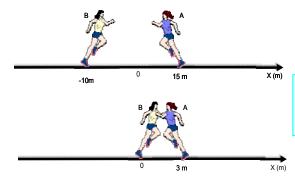
$$\vec{x}_6 = -30 + 10(6 - 3)$$

$$\vec{x}_6 = 0 \ m$$

Ahora llenamos la tabla con las posiciones de A y B

Comparamos las posiciones de A y B al inicio y al final del intervalo que estamos estudiando.





Al comparar las posiciones observamos que B, ganó la competencia, pero aún no se ha producido el encuentro.

En el intervalo 6≤t≤7s.:

Para t=7s la posición de **A** la determinamos a partir de la función posición:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \Rightarrow \vec{x} = 3 - 12t + \frac{1}{2} 4t^2$$

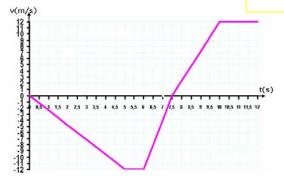
Posición de A en t=6s, posición de A cuando se inicia el MRUV : $\vec{x}_{\kappa} = 3m$

Velocidad de A cuando se inicia el MRUV, es decir la velocidad de A en t=6s, la leemos en el gráfico: $\vec{v}_6 = -12 m/s$

Aceleración experimentada por A en el intervalo 6≤t≤7s, la calculamos a partir del gráfico :

$$\vec{a} = \langle \vec{a} \rangle_{6-7,5} = \frac{\vec{v}_{7,5} - \vec{v}_6}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{0 - (-12)}{7, 5 - 6} \implies \vec{a} = 8 \ m/s^2$$



Posición de A, en t=7s:

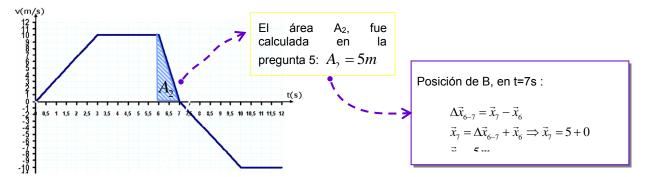
$$\vec{x} = 3 - 12(t - 6) + 2(t - 6)^2$$

$$\vec{x}_7 = 3 - 12(7 - 6) + 2(7 - 6)^2$$

$$\vec{x}_7 = -7 \ m$$

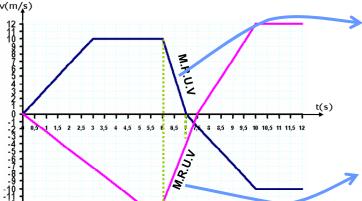
Para B

La posición B en t=7s, la podemos determinar a partir de la gráfica v(t):



QUINTO: determinamos que el encuentro de las atletas ocurre entre los 6 y 7 segundos Ahora procedemos a calcular el instante en el que se encuentran:

1. Establecemos la función posición que describe el tipo de movimiento que esta experimentando cada partícula.



Función Posición de B.

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \ t + \frac{1}{2} \vec{a} \ t^2 \implies \vec{x} = \vec{x}_6 + \vec{v}_6 \ t + \frac{1}{2} \vec{a} \ t^2$$

$$\vec{x}_B = 0 + 10 \ t - 5 t^2$$

Función Posición de A.

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \ t + \frac{1}{2} \vec{a} \ t^2$$

$$\vec{x}_A = 3 - 12 \ t + 2 \ t^2$$

2. El encuentro ocurre cuando las partículas están en la misma posición y en el mismo instante de tiempo. Por lo que para determinar el instante de encuentro se igualan las funciones posición de las partículas.

$$\vec{x}_A = \vec{x}_B$$

$$3 - 12 t + 2 t^2 = 10 t - 5 t^2$$

$$7t^2 - 22t + 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen dos valores para t, que son tiempos parciales del intervalo entre 6s y 7s (la solución de esta ecuación no puede ser mayor a lo que dura ese intervalo, 1s).

La solución a una ecuación de segundo grado se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$at^{2} + bt + c = 0$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

Para la situación planteada la solución de la ecuación es:

$$7t^{2} - 22t + 3 = 0$$

$$t = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^{2} - 4 \times 7 \times 3}}{2 \times 7}$$

$$t = \frac{22 \pm 20}{14} \Rightarrow_{t_{2}=0,14s}^{t_{1}=3s}$$

Recordemos que estamos estudiando el movimiento de las partículas a partir de los 6s, lo que significa que el valor obtenido en la ecuación anterior debe ser sumado a 6s y el resultado no debe exceder los 7s; es decir, el tiempo obtenido debe estar incluido en el intervalo 6≤t≤7s, porque es en este intervalo de tiempo donde ocurre el encuentro de A y B.

Se toma como tiempo de encuentro:

$$t_{\text{encuentro}} = 6,14s$$

Luego el instante en que se encuentran A y B se determina como:
$$t_{\rm encuentro1} = t_1 + 6 \Longrightarrow t_{\rm encuentro1} = 3s + 6 = 9s \Longrightarrow t_{\rm encuentro1} \rangle 7s$$

$$t_{\rm encuentro2} = t_2 + 6 \Longrightarrow t_{\rm encuentro2} = 0,14s + 6 = 6,14s \Longrightarrow 6 \le t_{\rm encuentro2} \le 7s$$