

15.7 Teorema de la divergencia

- Comprender y utilizar el teorema de la divergencia.
- Utilizar el teorema de la divergencia para calcular flujo.

Teorema de la divergencia

Recordar que en la sección 15.4 se vio que una forma alternativa del teorema de Green es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \int_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.\end{aligned}$$

De manera análoga, el **teorema de la divergencia** da la relación entre una integral triple sobre una región sólida Q y una integral de superficie sobre la superficie de Q . En el enunciado del teorema, la superficie S es **cerrada** en el sentido de que forma toda la frontera completa del sólido Q . Ejemplos de superficies cerradas surgen de las regiones limitadas o acotadas por esferas, elipsoides, cubos, tetraedros, o combinaciones de estas superficies. Se supone que Q es una región sólida sobre la cual se evalúa una integral triple, y que la superficie cerrada S está orientada mediante vectores normales unitarios dirigidos hacia el *exterior*, como se muestra en la figura 15.54. Con estas restricciones sobre S y Q , el teorema de la divergencia es como sigue.

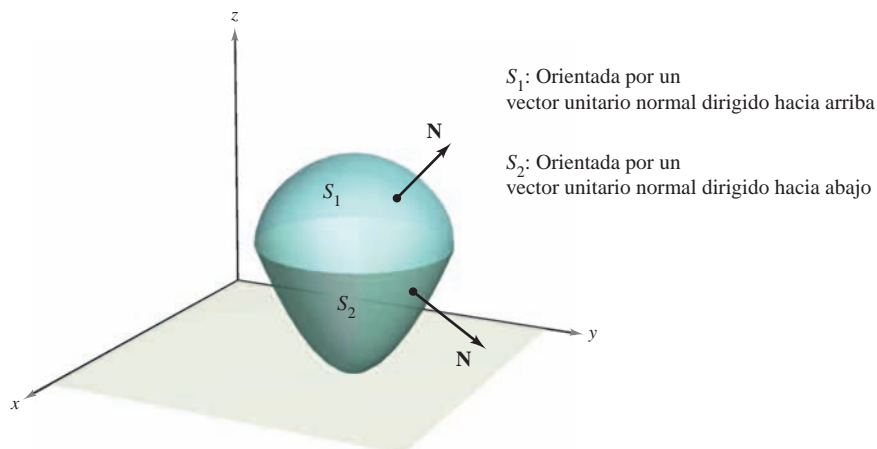


Figura 15.54

TEOREMA 15.12 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea Q una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada S orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de Q . Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q , entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

NOTA Como se indica arriba, al teorema de la divergencia a veces se le llama teorema de Gauss. También se le llama teorema de Ostrogradsky, en honor al matemático ruso Michel Ostrogradsky (1801-1861).

NOTA Esta prueba se restringe a una región sólida *simple*. Es mejor dejar la prueba general para un curso de cálculo avanzado. ■

DEMOSTRACIÓN Si se hace $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, el teorema toma la forma

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_S (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}) \, dS \\ &= \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV.\end{aligned}$$

Esto se puede demostrar verificando que las tres ecuaciones siguientes son válidas.

$$\begin{aligned}\iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} dV \\ \iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} dV \\ \iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV\end{aligned}$$

Como las verificaciones de las tres ecuaciones son similares, sólo se verá la tercera. La demostración se restringe a una región **sólida simple**, con superficie superior

$$z = g_2(x, y) \quad \text{Superficie superior.}$$

y superficie inferior

$$z = g_1(x, y) \quad \text{Superficie inferior.}$$

cuyas proyecciones sobre el plano xy coinciden y forman la región R . Si Q tiene una superficie lateral como S_3 en la figura 15.55, entonces un vector normal es horizontal, lo cual implica que $P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = 0$. Por consiguiente, se tiene

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS + \iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS + 0.$$

Sobre la superficie superior S_2 , el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia arriba, mientras que en la superficie inferior S_1 , el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia abajo. Por tanto, por el teorema 15.11, se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R P(x, y, g_1(x, y)) \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA \\ &= - \iint_R P(x, y, g_1(x, y)) \, dA \\ \iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R P(x, y, g_2(x, y)) \mathbf{k} \cdot \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA \\ &= \iint_R P(x, y, g_2(x, y)) \, dA\end{aligned}$$

Sumando estos resultados, se obtiene

$$\begin{aligned}\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R [P(x, y, g_2(x, y)) - P(x, y, g_1(x, y))] \, dA \\ &= \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \right] dA \\ &= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} \, dV.\end{aligned}$$

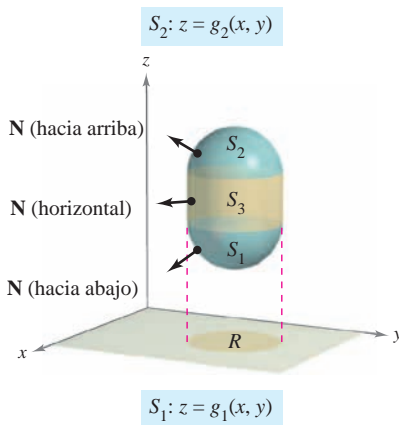


Figura 15.55

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de la divergencia

Sea Q la región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + z = 6$, y sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Hallar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie de Q .

Solución En la figura 15.56 se ve que Q está limitada o acotada por cuatro superficies. Por tanto, se necesitarán cuatro *integrales de superficie* para evaluarla

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Sin embargo, por el teorema de la divergencia, sólo se necesita una integral triple. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= 1 + 2y + 1 \\ &= 2 + 2y \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2z + 2yz) \Big|_0^{6-2x-2y} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left[12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2 \right]_0^{3-y} \, dy \\ &= \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3) \, dy \\ &= \left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{63}{2}. \end{aligned}$$

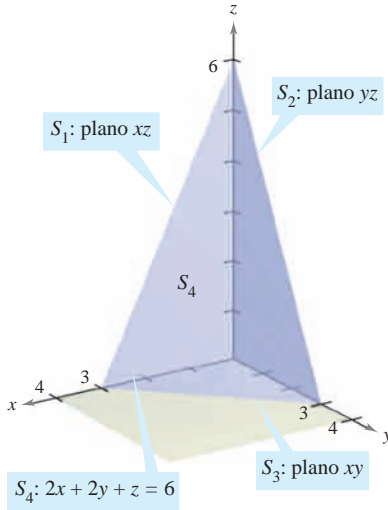
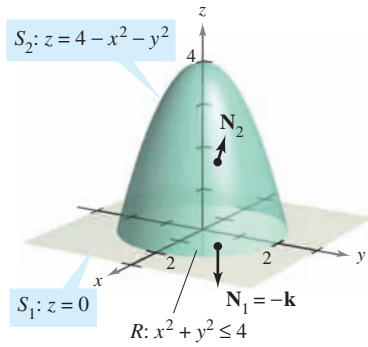


Figura 15.56

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora que pueda evaluar integrales iteradas triples, utilícese para verificar el resultado del ejemplo 1. Al usar este sistema algebraico por computadora obsérvese que el primer paso es convertir la integral triple en una integral iterada; este paso debe hacerse a mano. Para adquirir práctica para realizar este paso importante, hallar los límites de integración de las integrales iteradas siguientes. Después usar una computadora para verificar que el valor es el mismo que el obtenido en el ejemplo 1.

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y) \, dy \, dz \, dx, \quad \int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y) \, dx \, dy \, dz$$

EJEMPLO 2 Verificación del teorema de la divergencia**Figura 15.57**

Sea Q la región sólida entre el paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

y el plano xy . Verificar el teorema de la divergencia para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}.$$

Solución En la figura 15.57 se ve que el vector normal a la superficie S_1 que apunta hacia afuera es $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{k}$, mientras que el vector normal a la superficie S_2 que apunta hacia afuera es

$$\mathbf{N}_2 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Por tanto, por el teorema 15.11, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \frac{(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, dS \\ &= \iint_R -y^2 \, dA + \iint_R (4xz + 2xy + y^2) \, dA \\ &= -\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y^2 \, dx \, dy + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} [4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy] \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^3 - 4xy^2 + 2xy) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[8x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + x^2y \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 0 \, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}[2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x] + \frac{\partial}{\partial z}[y^2] = 0 + 0 + 0 = 0$$

se puede aplicar el teorema de la divergencia para obtener el resultado equivalente

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_Q 0 \, dV = 0. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema de la divergencia

Sea Q el sólido limitado o acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 6$ y el plano xy , como se muestra en la figura 15.58. Hallar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie de Q y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \sin z)\mathbf{i} + (xy + \cos z)\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}.$$

Solución La evaluación directa de esta integral de superficie sería difícil. Sin embargo, por el teorema de la divergencia, se puede evaluar la integral como sigue.

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_Q (2x + x + 0) \, dV \\ &= \iiint_Q 3x \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r\cos\theta} (3r \cos \theta) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (18r^2 \cos \theta - 3r^3 \cos^2 \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (48 \cos \theta - 12 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \left[48 \sin \theta - 6 \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= -12\pi \end{aligned}$$

Nótese que para evaluar la integral triple se emplearon coordenadas cilíndricas con $x = r \cos \theta$ y $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$.

Aunque el teorema de la divergencia se formuló para una región sólida simple Q limitada o acotada por una superficie cerrada, el teorema también es válido para regiones que son uniones finitas de regiones sólidas simples. Por ejemplo, sea Q el sólido limitado o acotado por las superficies cerradas S_1 y S_2 , como se muestra en la figura 15.59. Para aplicar el teorema de la divergencia a este sólido, sea $S = S_1 \cup S_2$. El vector normal \mathbf{N} a S está dado por $-\mathbf{N}_1$ en S_1 y por \mathbf{N}_2 en S_2 . Por tanto, se puede escribir

$$\begin{aligned} \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{N}_1) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS. \end{aligned}$$

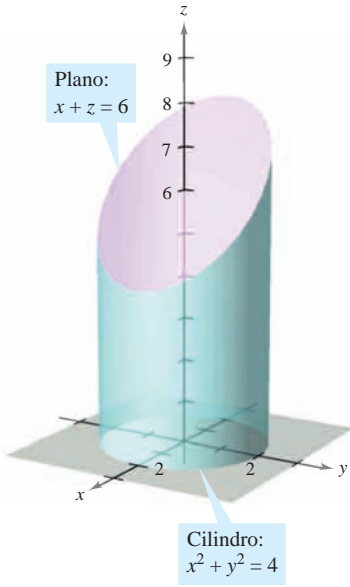


Figura 15.58

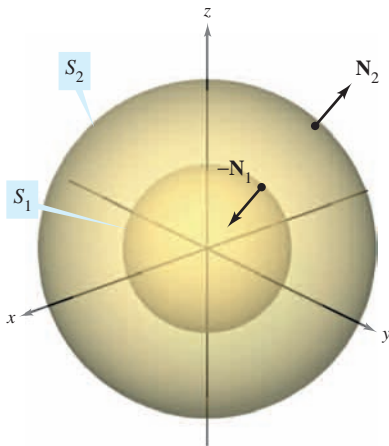


Figura 15.59

Flujo y el teorema de la divergencia

Con el fin de comprender mejor el teorema de la divergencia, considérense los dos miembros de la ecuación

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

De acuerdo con la sección 15.6 se sabe que la integral de flujo de la izquierda determina el flujo total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo. Esto puede aproximarse sumando el flujo que fluye a través de fragmentos pequeños de la superficie. La integral triple de la derecha mide este mismo flujo de fluido a través de S , pero desde una perspectiva muy diferente; a saber, calculando el flujo de fluido dentro (o fuera) de cubos pequeños de volumen ΔV_i . El flujo en el cubo i -ésimo es aproximadamente

$$\text{El flujo en el } i\text{-ésimo cubo} \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

para algún punto (x_i, y_i, z_i) en el i -ésimo cubo. Nótese que en un cubo en el interior de Q , la ganancia (o pérdida) de fluido a través de cualquiera de sus seis caras es compensada por una pérdida (o ganancia) correspondiente a través de una de las caras de un cubo adyacente. Después de sumar sobre todos los cubos en Q , el único flujo de fluido que no se cancela uniendo cubos es el de las caras exteriores en los cubos del borde. Así, la suma

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

aproxima el flujo total dentro (o fuera) de Q , y por consiguiente a través de la superficie S .

Para ver qué se quiere dar a entender con divergencia de \mathbf{F} en un punto, considérese ΔV_α como el volumen de una esfera pequeña S de radio α y centro (x_0, y_0, z_0) , contenida en la región Q , como se muestra en la figura 15.60. Aplicando el teorema de la divergencia a S_α resulta

$$\begin{aligned} \text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha &= \iiint_{Q_\alpha} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &\approx \operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \Delta V_\alpha \end{aligned}$$

donde Q_α es el interior de S_α . Por consiguiente, se tiene

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha}$$

y, tomando el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$, se obtiene la divergencia de \mathbf{F} en el punto (x_0, y_0, z_0) .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha} \\ &= \text{flujo por unidad de volumen en } (x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

En un campo vectorial el punto (x_0, y_0, z_0) es clasificado como una fuente, un sumidero o incompresible, como sigue.

1. **Fuente**, si $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ Ver figura 15.61a.
2. **Sumidero**, si $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ Ver figura 15.61b.
3. **Incompresible**, si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ Ver figura 15.61c.

NOTA En hidrodinámica, una *fente* es un punto por el que se considera que se introduce fluido adicional a la región ocupada por el fluido. Un *sumidero* es un punto en el que se considera que escapa fluido. ■

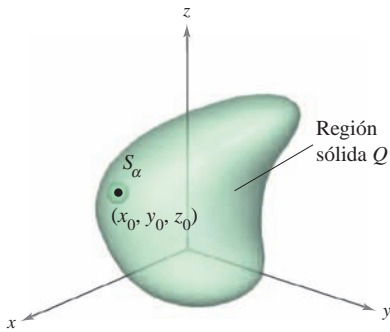
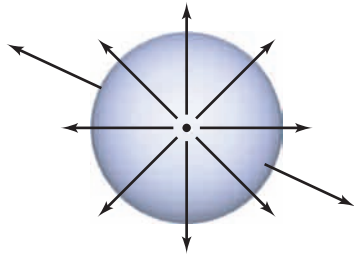
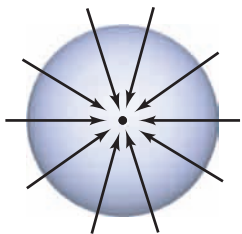


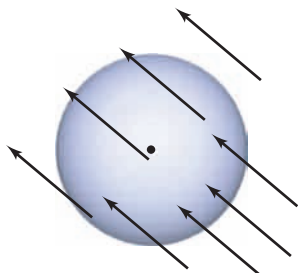
Figura 15.60



a) Fuente: $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$



b) Sumidero: $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$



c) Incompresible: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$

Figura 15.61

EJEMPLO 4 Calcular el flujo mediante el teorema de la divergencia

Sea Q la región limitada o acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar el flujo dirigido hacia afuera del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^3\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{j} + 2z^3\mathbf{k}$ a través de la esfera.

Solución Por el teorema de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned}
 \text{Flujo a través de } S &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\
 &= \iiint_Q 6(x^2 + y^2 + z^2) \, dV \\
 &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho && \text{Coordenadas esféricas.} \\
 &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi 2\pi \rho^4 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \\
 &= 12\pi \int_0^2 2\rho^4 \, d\rho \\
 &= 24\pi \left(\frac{32}{5} \right) \\
 &= \frac{768\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

15.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, verificar el teorema de la divergencia evaluando

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

como una integral de superficie y como una integral triple.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S : cubo limitado o acotado por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S : cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq h$

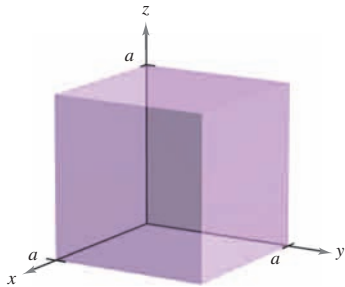


Figura para 1

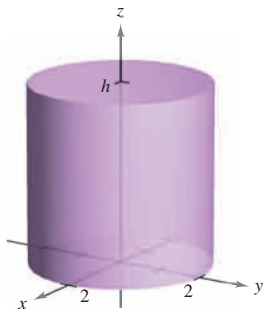


Figura para 2

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} - (2y - z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

S : superficie limitada o acotada por los planos $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos coordenados

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

S : superficie limitada o acotada por el plano $y = 4$ y $z = 4 - x$ y los planos coordenados

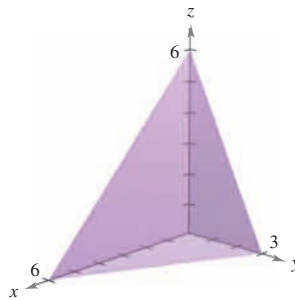


Figura para 3

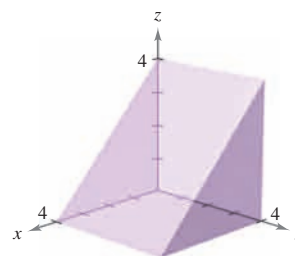


Figura para 4

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$

S : superficie acotada por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + e\mathbf{k}$

S : superficie acotada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$

En los ejercicios 7 a 18, utilizar el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

y hallar el flujo de \mathbf{F} dirigido hacia el exterior a través de la superficie del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
 $S: x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3xyz\mathbf{k}$
 $S: x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{j}$
 $S: x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 5$
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 = 25, z = 0, z = 7$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z)\mathbf{i} + (x^2y + \sin z)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$
 $S: z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k}$
 $S: z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$
 $S: z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
 $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0$

En los ejercicios 19 y 20, evaluar

$$\iiint_Q \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie cerrada del sólido limitado o acotado por las gráficas de $x = 4$ y $z = 9 - y^2$ y los planos coordenados.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \cos z\mathbf{i} + yz \sin z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

21. Enunciar el teorema de la divergencia.
22. ¿Cómo se determina si un punto (x_0, y_0, z_0) de un campo vectorial es una fuente, un sumidero o incompresible?

23. a) Utilizar el teorema de la divergencia para verificar que el volumen del sólido limitado o acotado por una superficie S es

$$\iiint_Q x \, dy \, dz = \iiint_Q y \, dz \, dx = \iiint_Q z \, dx \, dy.$$

- b) Verificar el resultado del inciso a) para el cubo limitado o acotado por $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0$ y $z = a$.

Para discusión

24. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea S el cubo acotado por los planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ y $z = 1$. Verificar el teorema de la divergencia evaluando

$$\iiint_Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

como una integral de superficie y como una integral triple.

25. Verificar que

$$\iiint_Q \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$

para toda superficie cerrada S .

26. Para el campo vectorial constante dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, verificar que

$$\iiint_Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$

donde V es el volumen del sólido limitado o acotado por la superficie cerrada S .

27. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, verificar que

$$\iiint_Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 3V$$

donde V es el volumen del sólido limitado o acotado por la superficie cerrada S .

28. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, verificar que

$$\frac{1}{\|\mathbf{F}\|} \iiint_Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \frac{3}{\|\mathbf{F}\|} \iiint_Q dV.$$

En los ejercicios 29 y 30, demostrar la identidad, suponiendo que Q, S y \mathbf{N} satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que las derivadas parciales necesarias de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_N f$ y $D_N g$ son las derivadas en la dirección del vector \mathbf{N} y se definen por

$$D_N f = \nabla f \cdot \mathbf{N}, \quad D_N g = \nabla g \cdot \mathbf{N}.$$

$$29. \quad \iiint_Q (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_S f D_N g \, dS$$

[Sugerencia: Utilizar $\text{div}(f\mathbf{G}) = f \text{div } \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

$$30. \quad \iiint_Q (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S (f D_N g - g D_N f) dS$$

(Sugerencia: Utilizar el ejercicio 29 dos veces.)

15.8 Teorema de Stokes

- Comprender y utilizar el teorema de Stokes.
- Utilizar el rotacional para analizar el movimiento de un líquido en rotación.

Teorema de Stokes

Un segundo teorema, análogo al teorema de Green, pero con más dimensiones, es el **teorema de Stokes**, llamado así en honor al físico matemático inglés George Gabriel Stokes. Stokes formó parte de un grupo de físicos matemáticos ingleses conocido como la Escuela de Cambridge, entre los que se encontraban William Thomson (Lord Kelvin) y James Clerk Maxwell. Además de hacer contribuciones a la física, Stokes trabajó con series infinitas y con ecuaciones diferenciales, así como con los resultados de integración que se presentan en esta sección.

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio que forma la frontera o el borde de S , como se muestra en la figura 15.62. La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal \mathbf{N} . Es decir, si se imagina que se toma el vector normal \mathbf{N} con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de \mathbf{N} , los demás dedos apuntarán en la dirección positiva de C , como se muestra en la figura 15.63.

Bettmann/Corbis



GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903)

Stokes se convirtió en profesor Lucasiano de matemáticas en Cambridge en 1849. Cinco años después, publicó el teorema que lleva su nombre como examen para optar a un premio de investigación.

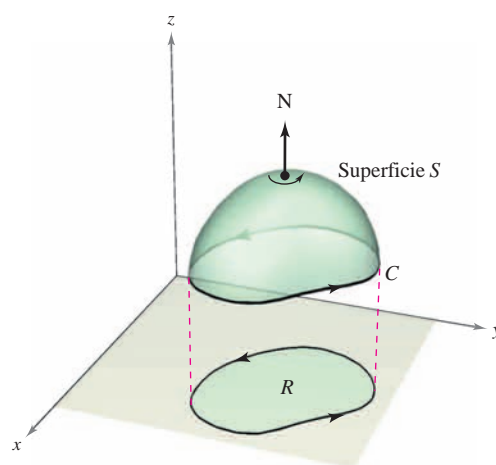
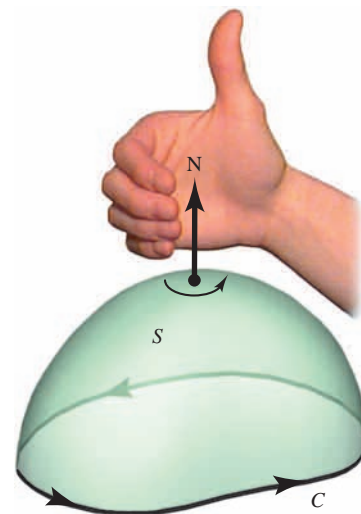


Figura 15.62



La dirección a lo largo de C es en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a \mathbf{N}

Figura 15.63

TEOREMA 15.13 TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie orientada con vector unitario normal \mathbf{N} , acotada por una curva cerrada simple, suave a trozos C , con orientación positiva. Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y a C , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

NOTA La integral de línea puede escribirse en forma diferencial $\int_C M dx + N dy + P dz$ o en forma vectorial $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Stokes

Sea C el triángulo orientado situado en el plano $2x + 2y + z = 6$, como se muestra en la figura 15.64. Evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

Solución Usando el teorema de Stokes, se empieza por hallar el rotacional de \mathbf{F} .

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

Considerando $z = 6 - 2x - 2y = g(x, y)$, se puede usar el teorema 15.11 para un vector normal dirigido hacia arriba para obtener

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2y - 4) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12) \, dy \\ &= \left[-\frac{2y^3}{3} + 5y^2 - 12y \right]_0^3 \\ &= -9. \end{aligned}$$

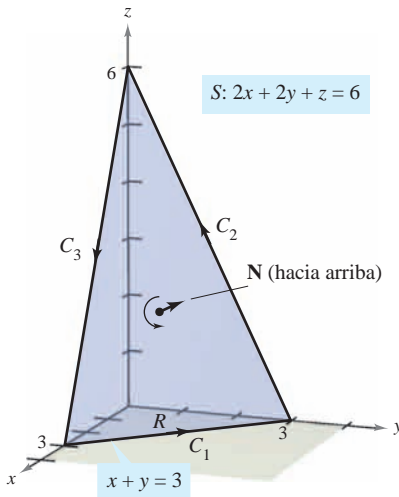


Figura 15.64

Trátese de evaluar la integral de línea del ejemplo 1 directamente, *sin* usar el teorema de Stokes. Una manera de hacerlo es considerar a C como la unión de C_1 , C_2 y C_3 , como sigue.

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (3 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (6 - t)\mathbf{j} + (2t - 6)\mathbf{k}, \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (t - 6)\mathbf{i} + (18 - 2t)\mathbf{k}, \quad 6 \leq t \leq 9$$

El valor de la integral de la línea es

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_1(t) \, dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_2(t) \, dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_3(t) \, dt \\ &= \int_0^3 t^2 \, dt + \int_3^6 (-2t + 6) \, dt + \int_6^9 (-2t + 12) \, dt \\ &= 9 - 9 - 9 \\ &= -9. \end{aligned}$$

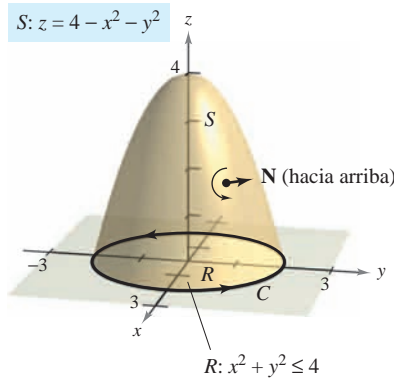


Figura 15.65

EJEMPLO 2 Verificación del teorema de Stokes

Sea S la parte del paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ que permanece sobre el plano xy , orientado hacia arriba (ver la figura 15.65). Sea C su curva frontera en el plano xy orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Verificar el teorema de Stokes para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

evaluando la integral de superficie y la integral de línea equivalente.

Solución Como *integral de superficie*, se tiene $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $g_x = -2x$, $g_y = -2y$, y

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 15.11, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R (2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4xy + 4y + 1) \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[2xy^2 + 2y^2 + y \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \, dx \\ &= \int_{-2}^2 2\sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= \text{Área del círculo de radio } 2 = 4\pi. \end{aligned}$$

Como *integral de línea*, se puede parametrizar C como

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M \, dx + N \, dy + P \, dz \\ &= \int_C 2z \, dx + x \, dy + y^2 \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} [0 + 2 \cos t (2 \cos t) + 0] \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t \, dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

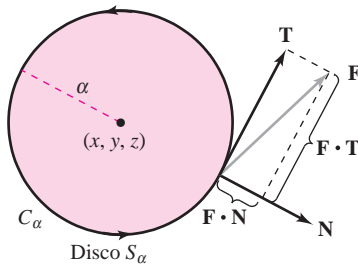


Figura 15.66

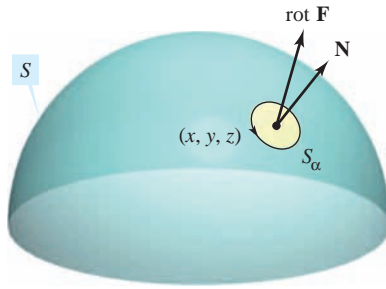


Figura 15.67

Interpretación física del rotacional

El teorema de Stokes proporciona una interesante interpretación física del rotacional. En un campo vectorial \mathbf{F} , sea S_α un *pequeño* disco circular de radio α , centrado en (x, y, z) y con frontera C_α , como se muestra en la figura 15.66. En cada punto en la circunferencia C_α , \mathbf{F} tiene un componente normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ y un componente tangencial $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Cuanto más alineados están \mathbf{F} y \mathbf{T} mayor es el valor de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Así, un fluido tiende a moverse a lo largo del círculo en lugar de a través de él. Por consiguiente, se dice que la integral de línea alrededor de C_α mide la **circulación alrededor de C_α** . Es decir,

$$\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha$$

Ahora considérese un pequeño disco S_α centrado en algún punto (x, y, z) de la superficie S , como se muestra en la figura 15.67. En un disco tan pequeño, $\text{rot } \mathbf{F}$ es casi constante, porque varía poco con respecto a su valor en (x, y, z) . Es más $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ es casi constante en S_α , porque todos los vectores unitarios normales en S_α son prácticamente iguales. Por consiguiente, del teorema de Stokes se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_{S_\alpha} \int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \int_{S_\alpha} dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} (\pi\alpha^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} &\approx \frac{\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds}{\pi\alpha^2} \\ &= \frac{\text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha}{\text{área de disco } S_\alpha} \\ &= \text{tasa o ritmo de circulación.} \end{aligned}$$

Suponiendo que las condiciones son tales que la aproximación mejora con discos cada vez más pequeños ($\alpha \rightarrow 0$), se sigue que

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

a lo que se le conoce como **rotación de \mathbf{F} respecto de \mathbf{N}** . Esto es,

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{N} = \text{rotación de } \mathbf{F} \text{ respecto de } \mathbf{N} \text{ en } (x, y, z).$$

En este caso, la rotación de \mathbf{F} es máxima cuando $\text{rot } \mathbf{F}$ y \mathbf{N} tienen la misma dirección. Normalmente, esta tendencia a rotar variará de punto a punto de la superficie S , y el teorema de Stokes

$$\underbrace{\int_S \int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS}_{\text{Integral de superficie}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Integral de línea}}$$

afirma que la medida colectiva de esta tendencia *rotacional* considerada sobre toda la superficie S (la integral de superficie) es igual a la tendencia de un fluido a *circular* alrededor de la frontera C (integral de línea).

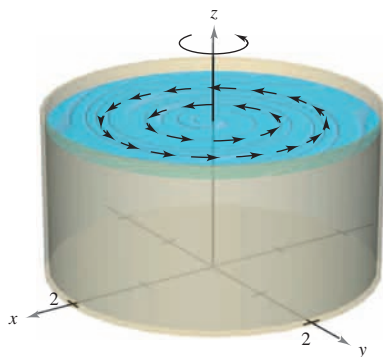


Figura 15.68

EJEMPLO 3 Una aplicación del rotacional

Un líquido es agitado en un recipiente cilíndrico de radio 2, de manera que su movimiento se describe por el campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + x\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 15.68. Hallar

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.

Solución El rotacional de \mathbf{F} está dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\sqrt{x^2 + y^2} & x\sqrt{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}.$$

Haciendo $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R 3\sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r)r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2}r^3 \right]_0^2 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 12 \, d\theta \\ &= 24\pi. \end{aligned}$$

NOTA Si $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ en toda la región Q , la rotación de \mathbf{F} con respecto a cada vector unitario normal \mathbf{N} es 0. Es decir, \mathbf{F} es irrotacional. Por lo visto con anterioridad, se sabe que ésta es una característica de los campos vectoriales conservativos. ■

Resumen de fórmulas de integración

Teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_C M \, dx + N \, dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA \\ \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \iint_R \text{div } \mathbf{F} \, dA \end{aligned}$$

Teorema de divergencia:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \text{div } \mathbf{F} \, dV$$

Teorema fundamental de las integrales de línea:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Teorema de Stokes:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

15.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hallar el rotacional del campo vectorial \mathbf{F} .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} - 4x^2\mathbf{j} + \arctan x\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x \sin y\mathbf{i} - y \cos x\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\mathbf{i} + e^{y^2+z^2}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \arcsen y\mathbf{i} + \sqrt{1-x^2}\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 7 a 10, verificar el teorema de Stokes evaluando

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ como integral de línea e integral doble.}$$

- $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
 $S: z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: 6x + 6y + z = 12$, primer octante
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
 $S: z = y^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a$

En los ejercicios 11 a 20, utilizar el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados. En cada uno de los casos, C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj como se vio anteriormente.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
 C : triángulo cuyos vértices son $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctan \frac{x}{y}\mathbf{i} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 C : triángulo cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 2)$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
 $S: z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k}$
 $S: z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -\ln \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \arctan \frac{x}{y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $S: z = 9 - 2x - 3y$ sobre de un pétalo de $r = 2 \sin 2\theta$ en el primer octante
- $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (2 - 3y)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 \leq 16$
 S : la porción en el primer octante de $x^2 + z^2 = 16$ sobre $x^2 + y^2 = 16$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = x^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a$
 \mathbf{N} es el vector unitario normal a la superficie, dirigido hacia abajo.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$
 S : la porción en el primer octante de $z = x^2$ sobre $x^2 + y^2 = a^2$

Movimiento de un líquido En los ejercicios 21 y 22, el movimiento de un líquido en un recipiente cilíndrico de radio 1 se describe mediante el campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y, z)$. Hallar $\int_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$, donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

- Enunciar el teorema de Stokes.
- Dar una interpretación física del rotacional.

25. Sean f y g funciones escalares con derivadas parciales continuas, y supóngase que C y S satisfacen las condiciones del teorema de Stokes. Verificar cada una de las identidades siguientes.

- $\int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{N} \, dS$
- $\int_C (f \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$
- $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

26. Demostrar los resultados del ejercicio 25 para las funciones $f(x, y, z) = xyz$ y $g(x, y, z) = z$. Sea S el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

27. Sea \mathbf{C} un vector constante. Sea S una superficie orientada con vector unitario normal \mathbf{N} , limitada o acotada por una curva suave C . Demostrar que

$$\iint_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \, dS = \frac{1}{2} \int_C (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Para discusión

28. Verificar el teorema de Stokes para cada campo vectorial dado y superficie orientada hacia arriba. ¿Es más fácil establecer la integral de línea o la integral doble?, ¿de evaluar? Explicar.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y+z}\mathbf{i}$

C : cuadrado con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$

- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

S : la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que yace abajo del plano $z = 4$.

Preparación del examen Putman

- Sea $\mathbf{G}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + 4y^2}, \frac{x}{x^2 + 4y^2}, 0 \right)$.

Demostrar o refutar que hay una función vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$ con las propiedades siguientes.

- M, N, P tienen derivadas parciales continuas en todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
- $\text{Rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
- $\mathbf{F}(x, y, 0) = \mathbf{G}(x, y)$.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
 © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

15 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, calcular $\|\mathbf{F}\|$ y dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 2. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$

En los ejercicios 3 y 4, hallar el campo vectorial gradiente de la función escalar.

3. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + z^2$ 4. $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$

En los ejercicios 5 a 12, determinar si el campo vectorial es conservativo. Si es conservativo, hallar una función potencial para el campo vectorial.

5. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2}\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2y + y^2)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (-2y^3 \sin 2x)\mathbf{i} + 3y^2(1 + \cos 2x)\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy^2\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}}{y^2z^2}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

En los ejercicios 13 a 20, hallar *a*) la divergencia del campo vectorial \mathbf{F} y *b*) el rotacional del campo vectorial \mathbf{F} .

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x \sin y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - y)\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (z - 3x)\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arcsen x\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x + \sin^2 y)\mathbf{j}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z}{x}\mathbf{i} + \frac{z}{y}\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 26, calcular la integral de línea a lo largo de la(s) trayectoria(s) dada(s).

21. $\int_C (x^2 + y^2) ds$

a) C : segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(3, 4)$

b) C : $x^2 + y^2 = 1$, una revolución en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando en $(1, 0)$

22. $\int_C xy ds$

a) C : segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(5, 4)$

b) C : en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$

23. $\int_C (x^2 + y^2) ds$

C : $\mathbf{r}(t) = (1 - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

24. $\int_C (x^2 + y^2) ds$

C : $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

25. $\int_C (2x - y)dx + (x + 2y)dy$

a) C : segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(3, -3)$

b) C : en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo del círculo $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$

26. $\int_C (2x - y)dx + (x + 3y)dy$

C : $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$

CAS En los ejercicios 27 y 28, utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral de línea sobre la trayectoria dada.

27. $\int_C (2x + y) ds$

$\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$,
 $0 \leq t \leq \pi/2$

28. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^{3/2}\mathbf{k}$,
 $0 \leq t \leq 4$

Área de una superficie lateral En los ejercicios 29 y 30, hallar el área de la superficie lateral sobre la curva C en el plano xy y bajo la superficie $z = f(x, y)$.

29. $f(x, y) = 3 + \sin(x + y)$

C : $y = 2x$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$

30. $f(x, y) = 12 - x - y$

C : $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$

En los ejercicios 31 a 36, evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

C : $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

32. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

C : $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

C : $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

C : curva en la intersección de $x^2 + z^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$ desde $(2, 2, 0)$ hasta $(0, 0, 2)$

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

C : curva en la intersección de $z = x^2 + y^2$ y $y = x$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 2, 8)$

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - z)\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

C : la curva en la intersección de $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ desde $(0, -2, 0)$ hasta $(0, 2, 0)$

CAS En los ejercicios 37 y 38, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral de línea.

$$37. \int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$$

C : $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y $y = 2x$ desde $(2, 4)$ hasta $(0, 0)$

$$38. \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j}$$

$$C: \mathbf{r}(t) = (2 \cos t + 2t \sin t)\mathbf{i} + (2 \sin t - 2t \cos t)\mathbf{j}, \\ 0 \leq t \leq \pi$$

39. **Trabajo** Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - \sqrt{y}\mathbf{j}$ a lo largo de la trayectoria $y = x^{3/2}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 8)$.

40. **Trabajo** Un avión de 20 toneladas sube 2 000 pies haciendo un giro de 90° en un arco circular de 10 millas de radio. Hallar el trabajo realizado por los motores.

En los ejercicios 41 y 42, usar el teorema fundamental de las integrales de línea para evaluar la integral.

$$41. \int_C 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz$$

C : curva suave desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 3, 2)$

$$42. \int_C y \, dx + x \, dy + \frac{1}{z} \, dz$$

C : curva suave desde $(0, 0, 1)$ hasta $(4, 4, 4)$

$$43. \text{ Evaluar la integral de línea } \int_C y^2 \, dx + 2xy \, dy.$$

a) $C: \mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

b) $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 4$

c) Usar el teorema fundamental de las integrales de línea, donde C es una curva suave desde $(1, 1)$ hasta $(4, 2)$.

44. **Área y centroide** Considerar la región limitada o acotada por el eje x y un arco de la cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \sin \theta)$ y $y = a(1 - \cos \theta)$. Usar integrales de línea para hallar a) el área de la región y b) el centroide de la región.

En los ejercicios 45 a 50, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

$$45. \int_C y \, dx + 2x \, dy$$

C : contorno del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

$$46. \int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$$

C : contorno del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$

$$47. \int_C xy^2 \, dx + x^2y \, dy$$

$C: x = 4 \cos t, \quad y = 4 \sin t$

$$48. \int_C (x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy$$

$$C: x^2 + y^2 = a^2$$

$$49. \int_C xy \, dx + x^2 \, dy$$

C : contorno de la región entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 1$

$$50. \int_C y^2 \, dx + x^{4/3} \, dy$$

$$C: x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

CAS En los ejercicios 51 y 52, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie dada por la función vectorial.

$$51. \mathbf{r}(u, v) = \sec u \cos v \mathbf{i} + (1 + 2 \tan u) \sin v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}$$

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$52. \mathbf{r}(u, v) = e^{-u/4} \cos v \mathbf{i} + e^{-u/4} \sin v \mathbf{j} + \frac{u}{6} \mathbf{k}$$

$$0 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

CAS 53. **Investigación** Considerar la superficie representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \cos u \mathbf{i} + 3 \cos v \sin u \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}.$$

Utilizar un sistema algebraico por computadora y efectuar lo siguiente.

a) Representar gráficamente la superficie para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Representar gráficamente la superficie para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $\frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Representar gráficamente la superficie para $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$ y $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

d) Representar gráficamente e identificar la curva en el espacio para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $v = \frac{\pi}{4}$.

e) Aproximar el área de la superficie representada gráficamente en el inciso b).

f) Aproximar el área de la superficie representada gráficamente en el inciso c).

$$54. \text{ Evaluar la integral de superficie } \iint_S z \, dS \text{ sobre la superficie } S:$$

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq \pi$.

CAS 55. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie S y aproximar la integral de superficie

$$\iint_S (x + y) \, dS$$

donde S es la superficie

$$S: \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + (u - 1)(2 - u) \mathbf{k}$$

sobre $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.