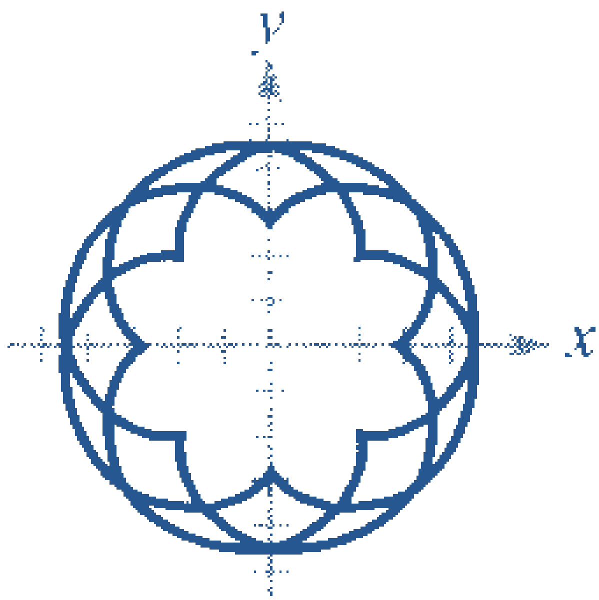
Universidad Nacional Experimental del Táchira
Departamento de Matemática y Física
Asignatura Matemática II (0826201T)

ECUACIONES PARAMÉTRICAS



1. Definición de Ecuaciones Paramétricas.
2. Transformación de Ecuaciones Paramétricas en Cartesianas.
3. Gráficas de Curvas en Forma Paramétrica.
4. Rectas Tangentes a la Curva en Forma Paramétrica.
5. Longitud de Arco en Forma Paramétrica.

Objetivos:

Interpretar la parametrización de una curva plana.
Elaborar la gráfica de las curvas en el plano expresadas en forma paramétrica.
Determinar la ecuación cartesiana de una curva paramétrica.
Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto expresada en forma paramétrica.
Calcular la longitud de arco de una curva expresada en forma paramétrica.

1. Definición de Ecuaciones Paramétricas.

Una curva plana denotada por C, queda determinada mediante una pareja de ecuaciones paramétricas: $x = f(t)$ y $y = g(t)$, t en I, con f y g contínuas en el intervalo cerrado $I = [a, b]$, con parámetro t. Cuando t avanza desde a hasta b, el punto (x, y) describe la curva en el plano xy.

Cuando I es el intervalo cerrado $[a, b]$, los puntos $P = (x_a, y_a)$ y $Q = (x_b, y_b)$ son los puntos extremos inicial y final. Si la curva tiene puntos extremos que coincidan, entonces se conoce como curva cerrada.

Si valores distintos de t producen puntos distintos en el plano (excepto posiblemente para $t = a$ y $t = b$), se conoce como curva simple.

La pareja de relaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ junto con el intervalo I se llama la parametrización de la curva.

Se dice que una curva C, representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en un intervalo I, es suave si x' y y' son continuas en I y no se anulan simultáneamente, excepto posiblemente en los puntos terminales de I. Se dice que una curva C es suave a trozos si es suave en cada subintervalo de alguna partición de I.

2. Transformación de Ecuaciones Paramétricas en Cartesianas.

Si se desea eliminar el parámetro para reconocer una curva dada, existen dos opciones:

a. Se parte de las ecuaciones paramétricas con funciones algebraicas, se despeja t en una de las ecuaciones, se sustituye en la otra ecuación y se obtiene la ecuación rectangular.
b. Se parte de las ecuaciones paramétricas con funciones trigonométricas, se despejan las funciones trigonométricas, se usa una identidad trigonométrica conocida, se sustituyen las partes y se obtiene la ecuación rectangular.

3. Gráficas de Curvas en Forma Paramétrica.

Círculo: Ecuaciones paramétricas: $x = a \cdot cos(t)$ y $y = a \cdot sen(t)$.

Parábola: Ecuaciones: $x = t^2 \pm a \cdot t$ y $y = t \pm b$ o $y = t^2 \pm a \cdot t$ y $x = t \pm b$.

Elipse: Ecuaciones paramétricas: $x = a \cdot cos(t)$ y $y = b \cdot sen(t)$.

Hipérbola: Ecuaciones paramétricas: $x = a \cdot sec(t)$ y $y = b \cdot tan(t)$.

Cicloide: es la curva descrita por un punto P en la orilla de una rueda, conforme esta rueda a lo largo de una línea recta sin resbalar, con ecuaciones paramétricas: $x = a \cdot [t - sen(t)]$ y $y = a \cdot [1 - cos(t)]$.

Cicloide Reducida: es la curva descrita por un punto P ubicado a $b < a$ unidades del centro de la rueda, conforme esta rueda a lo largo de una línea recta sin resbalar, con ecuaciones paramétricas: $x = a \cdot t - b \cdot sen(t)$ y $y = a - b \cdot cos(t)$.

Cicloide Prolata: es la curva descrita por un punto P ubicado a $b > a$ unidades del centro de la rueda, conforme esta rueda a lo largo de una línea recta sin resbalar, con ecuaciones paramétricas: $x = a \cdot t - b \cdot sen(t)$ y $y = a - b \cdot cos(t)$.
Hipocicloide: Es la curva descrita por un punto P sobre un círculo de radio b, que rueda sin resbalar dentro de un círculo fijo de radio a, $a > b$, con ecuaciones paramétricas: $x = (a-b) \cdot cos(t) + b \cdot cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)$ y $y = (a-b) \cdot sen(t) - b \cdot sen\left(\frac{a-b}{b}t\right)$.
Epicicloide: Es la curva descrita por un punto P sobre un círculo de radio b, que rueda sin resbalar sobre la parte externa de un círculo fijo de radio a, $a > b$, con ecuaciones: $x = (a+b) \cdot cos(t) - b \cdot cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)$ y $y = (a+b) \cdot sen(t) - b \cdot sen\left(\frac{a+b}{b}t\right)$.

Ejercicio 1:

Eliminar el parámetro de las ecuaciones: $x = 2t$, $y = 3t$ y Graficar en $-\infty \leq t \leq \infty$.

Solución:

Se despeja t en la primera ecuación: $x = 2t$

Se despeja a dividir la constante: $\frac{x}{2} = t$

Se sustituye t en la segunda ecuación: $y = 3\frac{x}{2}$

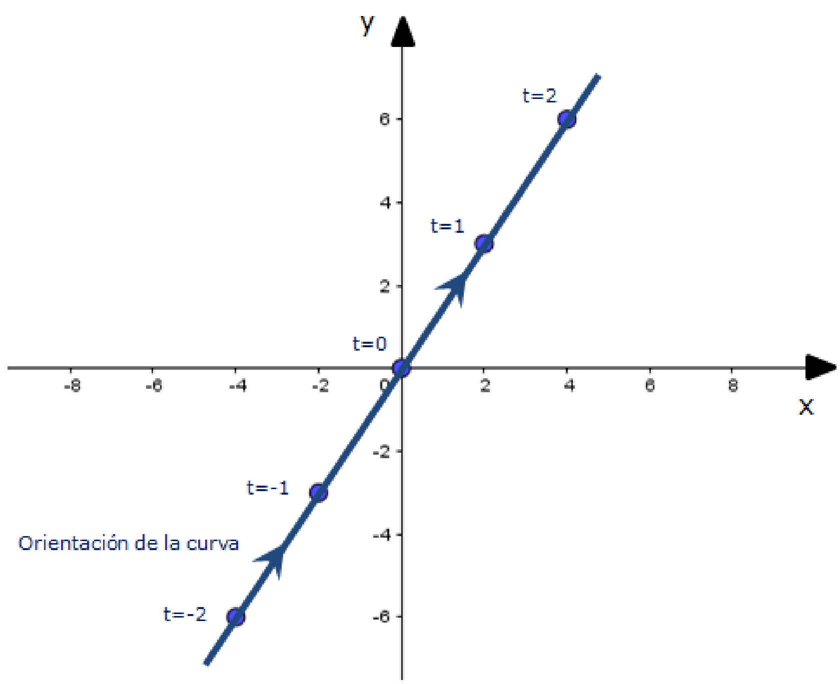
Se multiplica por 2: $2y = 3x$

Se despeja a restar las x: $2y - 3x = 0$

Se obtiene la ecuación de una línea recta, para graficar se realiza una tabla de valores en el intervalo dado.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	-9	-6	-3	0	3	6	9

Se traza la gráfica:



Ejercicio 2:

Eliminar el parámetro de las ecuaciones: $x = t^2 + 2t$, $y = t - 3$ y Graficar en $-2 \leq t \leq 3$.

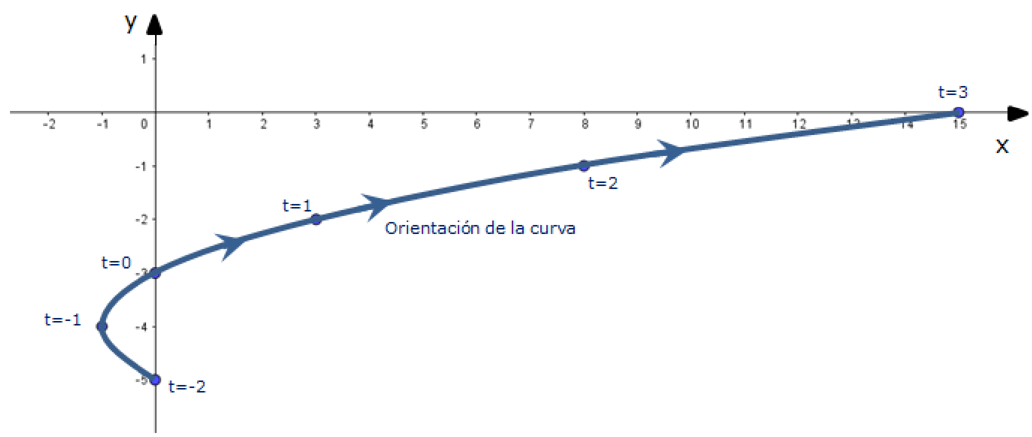
Solución:

Se despeja t en la segunda ecuación: $y = t - 3$
Se despeja a sumar la constante: $y + 3 = t$
Se sustituye t en la primera ecuación: $x = (y+3)^2 + 2(y+3)$
Se resuelve el cuadrado y la multiplicación: $x = y^2 + 6y + 9 + 2y + 6$
Se suman términos semejantes: $x = y^2 + 8y + 15$
Se completan cuadrados: $x = (y^2 + 8y + 16) - 16 + 15$
Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto: $x = (y+4)^2 - 16 + 15$
Se suman términos semejantes: $x = (y+4)^2 - 1$
Se despeja a sumar la constante: $x + 1 = (y+4)^2$

Se obtiene la ecuación de una parábola con eje horizontal que abre hacia la derecha y vértice $(-1, -4)$, para graficar se realiza una tabla de valores en el intervalo dado.

t	-2	-1	0	1	2	3
x	0	-1	0	3	8	15
y	-5	-4	-3	-2	-1	0

Se traza la gráfica:



Ejercicio 3:

Eliminar el parámetro de las ecuaciones: $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $a > b$ y Graficar en $0 \leq t \leq 2\pi$.

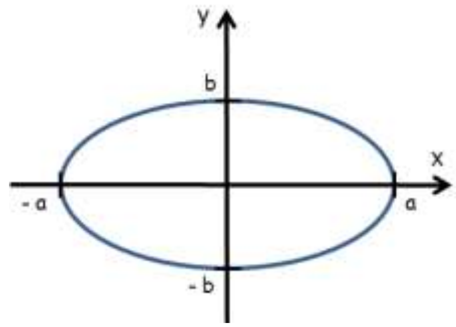
Solución:

Se despeja $\cos t$ en la primera ecuación: $\cos t = \frac{x}{a}$
Se despeja $\operatorname{sen} t$ en la segunda ecuación: $\operatorname{sen} t = \frac{y}{b}$
Se sustituyen en $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$

Se obtiene la ecuación de una elipse con eje mayor horizontal y centro $(0{,}0)$, para graficar se realiza una tabla de valores en el intervalo dado.

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	a	0	$-a$	0	a
y	0	b	0	$-b$	0

Se traza la gráfica:



Ejercicio 4:

Eliminar el parámetro de las ecuaciones: $x = 4\sec\theta$, $y = 3\tan\theta$ y Graficar en $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solución:

Se despeja $\sec\theta$ en la primera ecuación: $\sec\theta = \frac{x}{4}$

Se despeja $\tan\theta$ en la segunda ecuación: $\tan\theta = \frac{y}{3}$

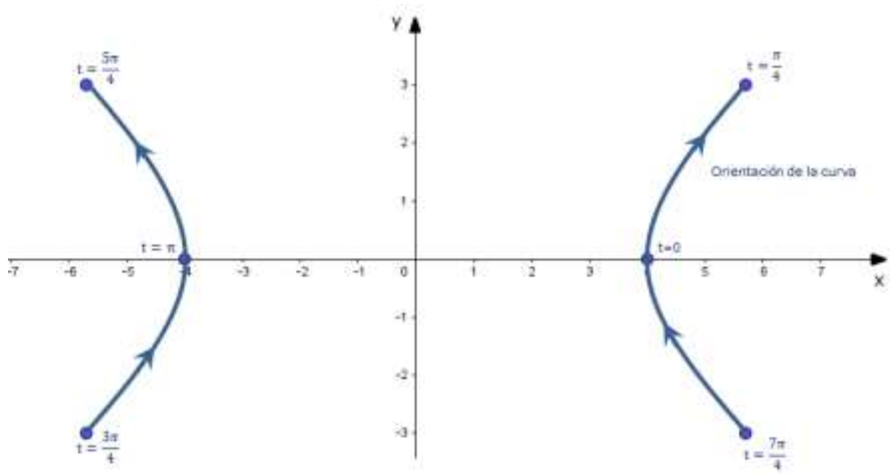
Se sustituyen en $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

Se resuelven los cuadrados: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Se obtiene la ecuación de una hipérbola con eje transversal horizontal y centro $(0{,}0)$, para graficar se realiza una tabla de valores en el intervalo dado.

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x	4	5,7	∞	-5,7	-4	-5,7	∞	5,7	4
y	0	3	∞	-3	0	3	∞	-3	0

Se traza la gráfica:



4. Rectas Tangentes a la Curva en Forma Paramétrica.

Forma paramétrica de la Derivada: sean f y g continuamente diferenciables, con $f'(t) \neq 0$ en $\alpha \leq t \leq \beta$ entonces las ecuaciones paramétricas: $x = f(t)$ y $y = g(t)$ definen a y como una función diferenciable de x:

Primera derivada: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$. Segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d[dy/dx]}{dt}}{dx/dt}$.

Ejercicio 5:

Obtener las rectas tangentes horizontales y verticales, si las hay. Determinar la concavidad de la curva. Y graficar las ecuaciones paramétricas: $x = 1 - t$ y $y = t^3 - 3t$.

Solución:

Se deriva x y y: $x' = -1$ y $y' = 3t^2 - 3$

Se halla las tangentes verticales donde: $m = \infty$, $x' = 0$ y $y' \neq 0$.

Se iguala x' a cero: $x' = -1 \neq 0$ No hay Tangentes Verticales.

Se halla las tangentes horizontales donde: $m = 0$, $x' \neq 0$ y $y' = 0$.

Se iguala y' a cero: $y' = 3t^2 - 3 = 0$

Se despeja a sumar la constante: $3t^2 = 3$

Se despeja a dividir la constante: $t^2 = \frac{3}{3}$

Se saca la raíz cuadrada: $t = \pm\sqrt{1}$, $t_1 = -1$ y $t_2 = 1$

Se sustituye $t_1 = -1$, en x y y: $x = 1 - (-1)$ y $y = (-1)^3 - 3(-1)$

Se obtiene los valores del punto en $t_1 = -1$: $x = 2$ y $y = 2$

Se consigue la ecuación $y = b$ en $(2{,}2)$: $y = 2$

Se sustituye $t_2 = 1$, en x y y: $x = 1 - (1)$ y $y = (1)^3 - 3(1)$

Se obtiene los valores del punto en $t_1 = 1$: $x = 0$ y $y = -2$

Se consigue la ecuación $y = b$ en $(0, -2)$: $y = -2$

Se resumen las ecuaciones de tangentes horizontales: $y = -2$ y $y = 2$.

Se halla la primera derivada: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

Se sustituyen los valores de x' y y': $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-3}{-1}$

Se divide entre el denominador: $\frac{dy}{dx} = -3t^2 + 3$ Primera Derivada.

Se halla la segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d[dy/dx]}{dt}}{dx/dt}$

Se sustituyen los valores de $\frac{dy}{dx}$ y x': $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d[-3t^2+3]}{dt}}{-1}$

Se deriva el numerador: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3 \cdot 2 \cdot t}{-1}$

Se realizan las operaciones: $\frac{d^2y}{dx^2} = 6t$ Segunda Derivada.

Se analiza la concavidad:

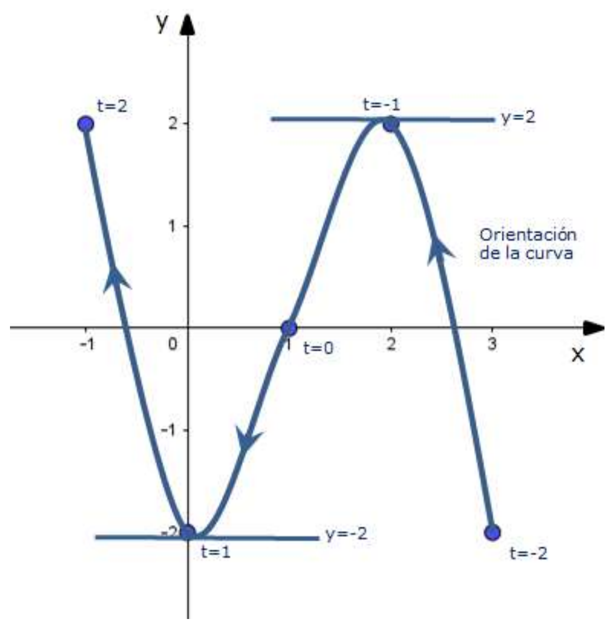
Si $t < 0$, entonces: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, Es Cóncava Hacia Abajo.

Si $t > 0$, entonces: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, Es Cóncava Hacia Arriba.

Se realiza una tabla de valores.

t	-2	-1	0	1	2
x	3	2	1	0	-1
y	-2	2	0	-2	2

Se traza la gráfica:



Ejercicio 6:

Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(0,2)$. Y graficar las ecuaciones paramétricas: $x = 2t - \pi \operatorname{sen} t$ y $y = 2 - \pi \cos t$, en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Solución:

Se deriva x y y: $x' = 2 - \pi \cos t$ y $y' = -\pi \cdot - \operatorname{sen} t$

Se sustituyen los valores de x' y y': $m = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi \operatorname{sen} t}{2 - \pi \cos t}$ Primera Derivada.

Se iguala y a 2: $y = 2 - \pi \cos t = 2$

Se despeja a restar la constante: $-\pi \cos t = 2 - 2$

Se despeja a dividir la constante: $\cos t = \frac{0}{-\pi}$

Se despeja el coseno: $t = \arccos(0)$

Se halla el valor del arco coseno: $t_1 = -\pi/2$ y $t_2 = \pi/2$

Para $t_1 = -\pi/2$:

Se sustituye $t_1 = -\pi/2$ en m: $m = \frac{\pi \operatorname{sen}(-\pi/2)}{2 - \pi \cos(-\pi/2)}$

Se sustituye los valores: $m = \frac{\pi\cdot(-1)}{2-\pi\cdot 0}$

Se realizan las operaciones: $m = -\frac{\pi}{2}$

Se sustituyen valores en $(y - y_P) = m(x - x_P)$: $(y-2) = -\frac{\pi}{2}(x-0)$

Se obtiene la ecuación: $y = -\frac{\pi}{2}x + 2$

Para $t_1 = {}^{\pi}/_{2}$:

Se sustituye $t_1 = {}^{\pi}/_{2}$ en m: $m = \frac{\pi\,\mathrm{sen}(^{\pi}/_{2})}{2-\pi\cos(^{\pi}/_{2})}$

Se sustituye los valores: $m = \frac{\pi\cdot(1)}{2-\pi\cdot 0}$

Se realizan las operaciones: $m = \frac{\pi}{2}$

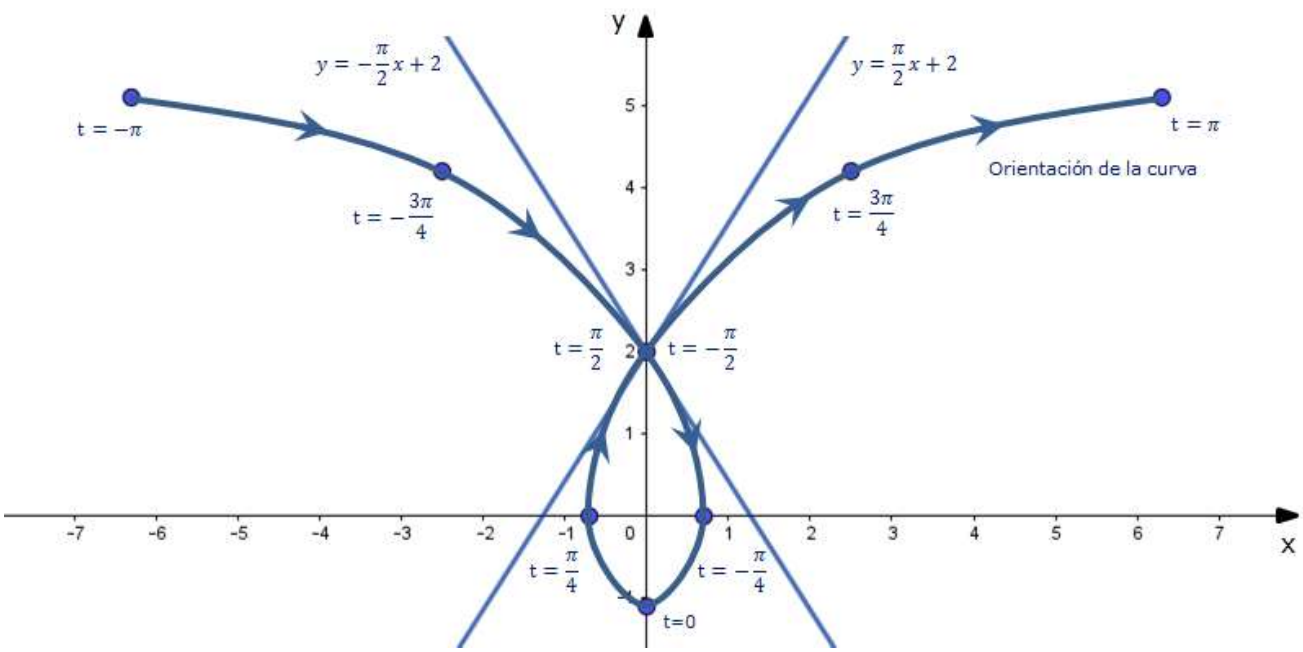
Se sustituyen valores en $(y - y_P) = m(x - x_P)$: $(y-2) = \frac{\pi}{2}(x-0)$

Se obtiene la ecuación: $y = \frac{\pi}{2}x + 2$

Se realiza una tabla de valores en el intervalo dado.

t	$-\pi$	$-{}^{3\pi}/_{4}$	$-{}^{\pi}/_{2}$	$-{}^{\pi}/_{4}$	0	${}^{\pi}/_{4}$	${}^{\pi}/_{2}$	${}^{3\pi}/_{4}$	π
x	-6,3	-2,5	0	0,7	0	-0,7	0	2,5	6,3
y	5,1	4,2	2	-0,2	-1,1	-0,2	2	4,2	5,1

Se traza la gráfica:



5. Longitud de Arco en Forma Paramétrica.

Si una curva suave C, dada por: $x = f(t)$ y $y = g(t)$ es tal que no se corta consigo misma en el intervalo $[a,b]$ (excepto posiblemente en los puntos terminales) la longitud de arco s en el intervalo viene dada por:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

Ejercicio 7:

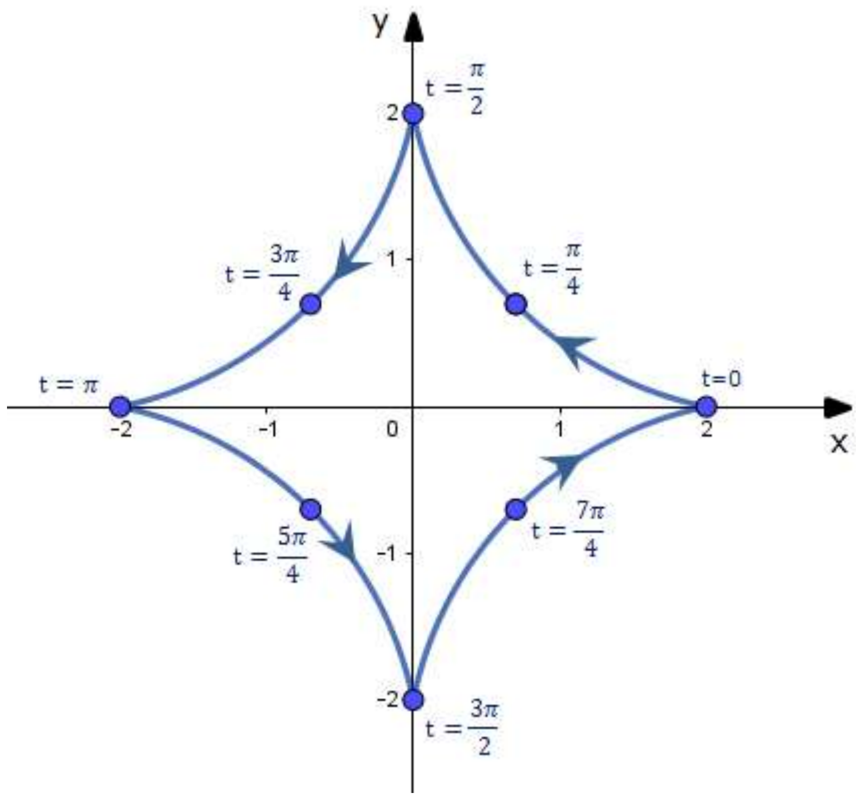
Calcular la longitud de arco de la hipocicloide de cuatro cúspides (astroide) de ecuaciones paramétricas: $x = 2 \cdot \cos^3 t$ y $y = 2 \cdot \operatorname{sen}^3 t$ en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Solución:

Se realiza una tabla de valores en el intervalo dado.

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x	2	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-2	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	2
y	0	$\sqrt{2}/2$	2	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-2	$-\sqrt{2}/2$	0

Se traza la gráfica:



Al observar la gráfica se aprecia que es una curva suave a trozos con 4 picos, por ello se trabaja uno de los intervalos y se multiplica por cuatro.

Se plantea la longitud de arco: $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

Se igualan los valores: $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$

Se escribe la ecuación para s: $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$

Se obtiene entonces: $s = 4 \cdot s_1$

Se identifica el primer intervalo: $0 \le t \le \pi/2$

Se deriva x y y: $x' = -6\cos^2 t \operatorname{sen} t$ y $y' = 6\operatorname{sen}^2 t \cos t$

Se sustituyen los valores para s_1: $s_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-6\cos^2 t \operatorname{sen} t)^2 + (6\operatorname{sen}^2 t \cos t)^2} \cdot dt$

Se eleva al cuadrado: $s_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 36\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t} \cdot dt$

Se saca el factor común: $s_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \cdot (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} \cdot dt$

Se sustituye $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$: $s_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \cdot 1} \cdot dt$

Se saca la raíz cuadrada: $s_1 = \int_0^{\pi/2} 6 \cdot \cos t \cdot \sin t \cdot dt$

Se usa el cambio de variable: $u = \operatorname{sen} t$, $du = \cos t$, Si $t = 0 \to u = 0$, $t = \pi/2 \to u = 1$

Se sustituye y se saca la constante: $s_1 = 6 \cdot \int_0^1 \mathrm{u} \cdot du$

Se resuelve la integral: $s_1 = 6 \cdot \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1$

Se sustituyen los extremos: $s_1 = 6 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$

Se obtiene el valor de s_1: $s_1 = 3$

Se multiplica por 4: $s = 4 \cdot 3$

Se obtiene el valor de s: $s = 12\ unidades\ de\ longitud$

Ejercicio 8:

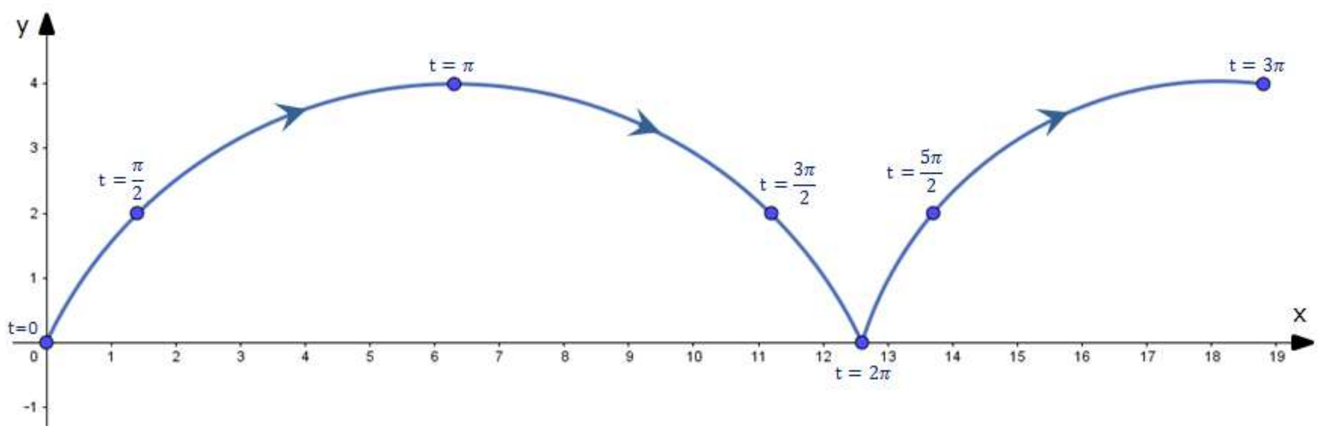
Calcular la longitud de arco en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, para la cicloide de ecuaciones paramétricas: $x = 2t - 2\operatorname{sen} t$ y $y = 2 - 2\cos t$.

Solución:

Se realiza una tabla de valores en el intervalo dado.

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	1,1	6,3	11,4	12,6
y	0	2	4	2	0

Se traza la gráfica:



Al observar la gráfica se aprecia que es una curva suave en todo el intervalo.

Se escribe la ecuación para s: $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$

Se identifica el intervalo: $0 \leq t \leq 2\pi$

Se deriva x y y: $x' = 2 - 2\cos t$ y $y' = 2\,\text{sen}\, t$

Se sustituyen los valores para s_1: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - 2\cos t)^2 + (2\,\text{sen}\, t)^2} \cdot dt$

Se eleva al cuadrado: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\cos t + 2^2\cos^2 t + 2^2\,\text{sen}^2\, t} \cdot dt$

Se resuelven los cuadrados: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2\, t} \cdot dt$

Se saca el factor común: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \text{sen}^2\, t)} \cdot dt$

Se sustituye $\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1$: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot (1 - 2\cos t + 1)} \cdot dt$

Se suman términos semejantes: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot (2 - 2\cos t)} \cdot dt$

Se saca el factor común: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot 2 \cdot (1 - 1\cos t)} \cdot dt$

Se sustituye $2 \cdot \text{sen}^2\, \alpha = 1 - \cos 2\alpha$: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{8 \cdot 2 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{t}{2}\right)} \cdot dt$

Se saca la raíz cuadrada: $s = \int_0^{2\pi} 4 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot dt$

Se usa el cambio: $u = \frac{t}{2}$, $du = \frac{dt}{2}$, $2du = dt$ Si $t = 0 \rightarrow u = 0$, $t = 2\pi \rightarrow u = \pi$

Se sustituye y se sacan las constantes: $s = 4 \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(u) \cdot du$

Se resuelve la integral: $s = 8 \cdot -\cos u|_0^{\pi}$

Se sustituyen los extremos: $s = 8 \cdot [-\cos\pi - (-\cos 0)]$

Se resuelven los cosenos: $s = 8 \cdot [-(-1) + 1]$

Se resuelven las sumas: $s = 8 \cdot 2$

Se obtiene el valor de s: $s = 16\, unidades\ de\ longitud$

Para Ampliar la Información Consulte:

El libro:

Larson, R; Hostetler, R y Edwards, B. Cálculo y Geometría Analítica Volumen 2. Sexta Edición, Mc Graw Hill.

Y los enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=4KHHCGz4N_U
https://www.youtube.com/watch?v=DI7AOPn0-Fc&list=PLUZYmulTqJqcUjiHw1VSOUVPhHrgg_3bG&index=11
https://www.youtube.com/watch?v=K0lwzQgfZOk&list=PLUZYmulTqJqcUjiHw1VSOUVPhHrgg_3bG&index=13
https://www.youtube.com/watch?v=BIBo7BK4PLg
https://www.youtube.com/watch?v=nYqrz58qtQ0
https://www.youtube.com/watch?v=kZdgeJaHhPs