UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
TEMA I. MATEMÁTICA II
(0826201)

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

1. **DEFINICIÓN DEL MÉTODO POR SUSTITUCIÓN**
2. **MODO DE APLICACIÓN**
3. **PROCEDIMIENTO A SEGUIR PARA APLICACIÓN DEL MÉTODO**
4. **EJERCICIOS RESUELTOS**
5. **ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA**

OBJETIVO:

IDENTIFICAR CUANDO SE DEBE USAR EL MÉTODO POR SUSTITUCIÓN
PLANTEAR LA SUSTITUCIÓN ADECUADA
CALCULAR INTEGRALES INDEFINIDAS EMPLEANDO EL MÉTODO POR SUSTITUCIÓN.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Este método de integración se utiliza cuando la función integrando es una función compuesta, por lo que la integral dada no se escribe de forma Inmediata, por lo tanto, se debe hacer una **u-sustitución** que permita encontrar una antiderivada del integrando.

DEFINICIÓN:

Sea g una función cuyo recorrido o rango es un intervalo I, y sea f una función continua en I. si g es derivable en su dominio y F es una antiderivada o primitiva de f en I, entonces:

$$\int f(\boldsymbol{g(x)})\boldsymbol{g'(x)dx} = F(g(x)) + C$$

Si $u = g(x)$ $entonces$ $du = g'(x)dx$.

Por lo tanto, la expresión de la integral quedaría de la siguiente manera:

$$\int f(\boldsymbol{g(x)})\boldsymbol{g'(x)dx} = \int f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{du} = F(\boldsymbol{u}) + C$$

MODO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO:

Este método se aplica de dos formas, las cuales se definen a continuación:

Cambiar de la función integrando su argumento: se debe identificar que la función compuesta tiene una función exterior f y una función interior $\boldsymbol{g}$, además la derivada $\boldsymbol{g'(x)}$ esta presente como un factor del integrando.

$$\int f(\boldsymbol{g(x)})\boldsymbol{g'(x)dx}$$

Entonces, se define una nueva variable, la cual llamaremos t, esta será igual al argumento de la función, se deriva la ecuación para hallar el diferencial, se sustituye en la integral y luego de obtener la primitiva se regresa a la variable original.

Por otra parte, se puede cambiar parte de la función integrando por una nueva variable t = g(x), obteniéndose:

$$\int f(x)\, f'(x)dx = \int f(t)\, dt \;;$$

Donde: $f(x) = f(t)$ $f'(x)\, dx = dt$

En la práctica ambos cambios de variable se pueden combinar, ya que $x = g(t) \leftrightarrow t = g^{-1}(x)$. La función que se utilice tendrá que tener derivada continua para que se pueda realizar la nueva integral, e inversa para poder devolver el cambio. A medida que se tenga experiencia en la integración, la habilidad para efectuar esta operación aumentará. Cuando realice un cambio de variable, cerciórese de que la respuesta se escribe utilizando las mismas variables que en el integrando original y desde luego, parte clave es la familiaridad con las derivadas.

LOS PASOS PARA REALIZAR ESTE MÉTODO DE INTEGRACIÓN SON:

- **Paso 1**. Definir una nueva variable llamada t que representa la expresión en función de la variable que tiene la integral a resolver, la cual se escoge para simplificar la integral.
- **Paso 2.** Rescribir la integral en términos de t. Luego para rescribir dx, calcular la derivada de la ecuación planteada en el paso 1.
- **Paso 3**. Calcular la integral resultante, luego remplazar u por su expresión en términos de x en la respuesta.

EJEMPLO 2.1:

Hallar $\int (x^2 + 3x + 5)(2x + 3)dx$

Solución:

El integrando es un producto donde uno de los factores, (2x + 3), es la derivada de la expresión, $(x^2 + 3x + 5)$, que aparece en el otro factor. Esto indica que podemos plantear:

Paso 1: $u = (x^2 + 3x + 5)$

Paso 2: $du = (2x + 3)dx$

$$\int (x^2 + 3x + 5)(2x + 3)dx = \int u\, du$$

Paso 3:

Aplicando la fórmula 2,

$$\int u\, du = \frac{u^2}{2} + C$$

Devolvemos el cambio,

$$\int u\, du = \frac{(x^2 + 3x + 5)^2}{2} + C$$

EJEMPLO 2.2:

Hallar $\int (x + 2) sen(x^2 + 4x - 6) dx$

Solución:

El integrando es un producto donde uno de los factores, $(x + 2)$ es la derivada de la expresión, $(x^2 + 4x - 6)$, que aparece en el otro factor. Esto indica que podemos plantear:

Paso 1: $u = (x^2 + 4x - 6)$

Paso 2: $du = (2x + 4)dx$

Observamos que la expresión obtenida en el diferencial no está directa en la integral por lo que podemos aplicar un factor común 2 y se obtiene la expresión

$$du = 2(x + 2)dx$$

$$\frac{1}{2} du = (x + 2)dx$$

$$\int (x + 2) sen(x^2 + 4x - 6) dx = \int sen(x^2 + 4x - 6)(x + 2)dx$$

$$\int sen(x^2 + 4x - 6)(x + 2)dx = \int sen(u) \frac{1}{2} du$$

Paso 3:

Aplicando la fórmula 6,

$$\frac{1}{2}\int sen(u)\, du = \frac{1}{2}(-\cos(\mathrm{u})) + C$$

Devolvemos el cambio,

$$\frac{1}{2}\int sen(u)\, du = \frac{1}{2}(-\cos(x^2 + 4x - 6)) + C$$

El resultado final, es:

$$\int sen(x^2+4x-6)(x+2)dx = -\frac{1}{2}(\cos(x^2+4x-6))+C$$

EJEMPLO 2.3:

Hallar

$$\int \frac{\boldsymbol{x-\sqrt{arctg(2x)}}}{\boldsymbol{1+4x^2}}\boldsymbol{dx}$$

Solución:

El integrando hay una resta, por lo que podemos aplicar la propiedad de la integral y así poder estudiar cada función por separado.

$$\int \frac{\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{arctg(2x)}}}{1+4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{x}}{1+4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} - \int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg(2x)}}}{1+4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$$

Resolvemos cada una

$$\int \frac{\mathrm{x}}{1+4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$$

Paso 1: $u = (1+4x^2)$

Paso 2: $du = (8x)dx$

Observamos que la expresión obtenida en el diferencial no está directa en la integral por lo que dividimos por 8 y se obtiene la expresión: $\frac{1}{8}du = (x)dx$

$$\int \frac{\mathrm{x}}{1+4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\mathrm{u}}\,\frac{1}{8}\mathrm{du}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{u}}\,\frac{1}{8}\mathrm{du} = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\mathrm{u}}\mathrm{du}$$

Paso 3:

Aplicando la fórmula 3,

$$\frac{1}{8}\int \frac{1}{\mathrm{u}}\mathrm{du} = \frac{1}{8}\mathrm{Ln}|\mathrm{u}| + \mathrm{C}$$

Devolvemos el cambio,

$$\frac{1}{8}\int\frac{1}{u}du = \frac{1}{8}\text{Ln}|1+4x^2| + C$$

Resolvemos ahora,

$$\int\frac{\sqrt{\text{arctg}(2x)}}{1+4x^2}dx$$

Paso 1: $u = arctg(2x)$

Paso 2: $du = \left(\frac{2}{1+4x^2}\right)dx$

Observamos que la expresión obtenida en el diferencial está directa en la integral por lo que la sustitución es simple: $\frac{1}{2}du = \left(\frac{1}{1+4x^2}\right)dx$

$$\int\sqrt{\text{arctg}(2x)}\,\frac{1}{1+4x^2}dx = \int\sqrt{u}\ \frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du$$

Paso 3:

Aplicando la fórmula 2,

$$\frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du\ = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$\frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du\ = \frac{1}{3}\left(u^{3/2}\right) + C$$

Devolvemos el cambio,

$$\frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du\ = \frac{1}{3}(arctg(2x))^{3/2}\ + C$$

Entonces, el resultado final es:

$$\int \frac{\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{arctg}(2\mathrm{x})}}{1 + 4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{x}}{1 + 4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} - \int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}(2\mathrm{x})}}{1 + 4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$$

$$\int \frac{\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{arctg}(2\mathrm{x})}}{1 + 4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{8}\mathrm{Ln}|1 + 4x^2| - \frac{1}{3}(arctg(2x))^{3/2} + C$$

EJEMPLO 2.4:

Hallar $\int \frac{Ln(2x)}{Ln(4x)\,x} dx$

Solución:

Podemos observar que la función intengrando es una expresión que no se encuentra en la tabla de integrales inmediatas, además contiene dos funciones logarítmicas de diferentes argumentos. Utilizando propiedades del logaritmo podemos reescribir la integral de la siguiente manera:

$$Ln(4x) = Ln\big(2.(2x)\big)$$

$$Ln\big(2.(2x)\big) = Ln(2) + Ln(2x)$$

Por lo tanto, la integral quedara expresada de la siguiente manera:

$$\int \frac{Ln(2x)}{Ln(4x)\,x} dx = \int \frac{Ln(2x)}{\big(Ln(2) + Ln(2x)\big)\,x} dx$$

Paso 1: $u = Ln(2x) + Ln(2)$

Paso 2: $du = \left(\frac{2}{2x}\right) dx$

$$1du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Observamos que la expresión obtenida en el diferencial está directa en la integral por lo que la sustitución es simple:

La expresión del numerador debemos obtenerla del cambio de variable, despejando se tiene:

$$Ln(2x) = u - Ln(2)$$

$$\int \frac{Ln(2x)}{\big(Ln(2) + Ln(2x)\big)\, x} dx = \int \frac{u - Ln(2)}{u} du$$

Aplicamos la propiedad de las integrales, separamos:

$$\int \frac{u - Ln(2)}{u} du = \int \frac{u}{u} du - \int \frac{Ln(2)}{u} du$$

$$\int \frac{u - Ln(2)}{u} du = \int 1\, du - Ln(2) \int \frac{1}{u} du$$

Paso 3:

Aplicando la fórmula 1 y 3,

$$\int 1\, du - Ln(2) \int \frac{1}{u} du = u - Ln(2) Ln|u| + C$$

Devolvemos el cambio,

$$\int 1\, du - Ln(2) \int \frac{1}{u} du = Ln(4x) - Ln(2) Ln|Ln(4x)| + C$$

Resultado final,

$$\int \frac{Ln(2x)}{Ln(4x)\, x} dx = Ln(4x) - Ln(2) Ln|Ln(4x)| + C$$

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

En los siguientes enlaces encontraras otros ejemplos por medio de videos que te pueden ayudar a entender mejor el tema.

REVISAR LOS SIGUIENTES ENLACES

https://www.youtube.com/watch?v=UZyG4jCBMgU&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&index=5

https://www.youtube.com/watch?v=4bKEWdFpFYw&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=xBRZnhCFcgM&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&index=4

https://www.youtube.com/watch?v=AxJjx6f8mVg

ACTIVIDAD

Realizar los ejercicios del capítulo 2 del 39 al 163 de la página 43 del Libro 801 ejercicios resueltos.