UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
TEMA I. MATEMÁTICA II
(0826201)

INTEGRACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. **DEFINICIÓN DE LA TÉCNICA DE INTEGRACIÓN**
2. **CASOS DE LAS INTEGRALES DEL TIPO** $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$
3. **CASOS DE LAS INTEGRALES DEL TIPO** $\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)\,dx$ ó $\int \operatorname{ctg}^m(x)\csc^n(x)\,dx$
4. **CASOS DE LAS INTEGRALES DEL TIPO** $\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx$, $\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx$ y $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$.
5. **EJERCICIOS RESUELTOS**
6. **ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA**

OBJETIVO: **CALCULAR INTEGRALES INDEFINIDAS DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS.**

INTEGRALES DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICION:

En este tema se desarrolla la Técnica de integración para integrales cuya función integrando es el producto de dos funciones trigonométricas y además contienen exponentes enteros positivos, dicho producto tienen tres formas diferentes el cual se describen a continuación:

1. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$ con $m, n \in Z$

El producto de este tipo de integral es de seno por coseno. Se consideran tres casos de particular importancia el cual dependerá de la potencia.

CASO 1.- Si $m = 2k+1$ es impar positivo, quédese con un factor seno para el diferencial y convierta los restantes factores en coseno. Así:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1}(x)\cos^n(x)\,dx = \int \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^k \cos^n(x)\operatorname{sen}(x)\,dx$$

Acá, aplique la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

CASO 2.- Si $n = 2k+1$ es impar positivo, quédese con un factor coseno para el diferencial y convierta los restantes factores en seno. Así:

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{2k+1}(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^m(x)\left(\cos^2(x)\right)^k \cos(x)dx$$

Acá, aplique la identidad trigonométrica anterior

CASO 3.- Cuando las potencias m y n son pares positivas, úsense las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x).$$

2. Integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)\,dx$ ó $\int \operatorname{ctg}^m(x)\csc^n(x)\,dx$

El producto de este tipo de integral es de tangente por secante. Se consideran tres casos de particular importancia el cual dependerá de la potencia.

Caso 1.- Si $n = 2k$ es par positivo, quédese con el factor $\sec^2(x)$ para el diferencial y convierta los restantes factores de la secante en tangente, usando la identidad $1+\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$. Así:

$$\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^{2k}(x)\,dx = \int \operatorname{tg}^m(x)\left(\sec^2(x)\right)^{k-1}\sec^2(x)\,dx$$

Acá, aplique la identidad trigonométrica $1+\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$.

Caso 2.- Si $m = 2k+1$ es impar positivo, quédese con el factor **tg(x) sec(x)** para el diferencial y convierta la restante potencia par de la tangente en secante, usando la identidad trigonométrica anterior. Así:

$$\int \operatorname{tg}^{2k+1}(x)\sec^n(x)\,dx = \int \left(\operatorname{tg}^2(x)\right)^k \sec^{n-1}(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)\,dx$$

acá, aplique identidad trigonométrica

Caso 3.- Si $n = 2k+1$ es impar positivo, por lo general se aplica el método de integración por Partes, y se efectúa la selección $\sec^2(x)\,dx = dv$.

3. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx$,

$$\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx \quad \text{y} \quad \int \cos(mx)\cos(nx)\,dx\,.$$

El producto de este tipo de integral es de seno por coseno de argumentos diferentes. En estos casos se transforman los productos en sumas, empleando las fórmulas:

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right],$$

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right].$$

4. EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación se presentan una serie de ejercicios que son resueltos aplicando el procedimiento explicado anteriormente según cada caso, en algunos el procedimiento algebraico de suma de constantes se hace de forma directa.

EJEMPLO 4.1. Ejercicio de integrales tipo I

HALLAR

$$\begin{aligned}
\int cos^2 x\,dx &= \int \left(\sqrt{\frac{1+cos\,2x}{2}}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1+cos\,2x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int (1+cos\,2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sen\,2x\right)+C \\
&= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen\,2x+C
\end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales $\int \cos(2x)\,dx$ se debe plantear un cambio de variable para que la integral se exprese de forma directa.

$$\boldsymbol{cambio\ de\ variable:\ \ u = 2x \ \rightarrow du = 2dx}$$

$$\int cos(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int cos\,(u)du$$

$$\frac{1}{2}\int cos\,(u)du = \frac{1}{2}\big(sen(u)\big)+C$$

Devolvemos el cambio,

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}(sen(2x)) + C$$

EJEMPLO 4.2 Ejercicio de integrales tipo I

$$\int sen^4 x\, dx$$

HALLAR

$$\begin{aligned}
\int sen^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{2}{4}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} sen\, 4x + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} sen\, 4x + C
\end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales $\int \cos(2x)\, dx$ y $\int \cos(4x)\, dx$ se deben plantear los cambios de variables respectivos en cada una para que la integral se exprese de forma directa. **Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.**

EJEMPLO 4.3 Ejercicio de integrales tipo III

HALLAR

$$\begin{aligned}\int sen\,3x\,sen\,7x\,dx &= -\frac{1}{2}\int (cos\,10x - cos\,(-4x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int cos\,10x\,dx + \frac{1}{2}\int cos\,4x\,dx \\ &= -\frac{1}{20}sen\,10x + \frac{1}{8}sen\,4x + C\end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales $\int \cos(10x)\,dx$ y $\int \cos(4x)\,dx$ se deben plantear los cambios de variables respectivos en cada una para que la integral se exprese de forma directa. Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.

EJEMPLO 4.4 Ejercicio de integrales tipo I

HALLAR $\int sen^3\,x\,dx$

$$\begin{aligned}\int sen^3\,x\,dx &= \int sen\,x\,sen^2 x\,dx \\ &= \int sen\,x(1 - cos^2 x)\,dx \\ &= \int \left(sen\,x - cos^2 x\,sen\,x\right)\,dx \\ &= -cos\,x + \frac{1}{3}cos^3 x + C\end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales $\int cos^2(x)\,\mathrm{sen}(x)\,dx$ se debe plantear el cambio de variable para que la integral se exprese de forma directa.

$$cambio\ de\ variable:\ u = cos(x) \rightarrow du = -sen(x)dx$$

$$\int u^2(-1)du = -\int u^2du$$

$$-\int u^2du = -\frac{u^3}{3} + C$$

Devolvemos el cambio,

$$\int cos^2(x)\,\mathrm{sen}(x)\,dx = -\frac{1}{3}(cos^3(x)) + C$$

EJEMPLO 4.5 Ejercicio de integrales tipo I

Hallar $\int cos^3 x\,dx$

$$\begin{aligned}\int cos^3 x\,dx &= \int cos\,x\,cos^2 x\,dx\\ &= \int cos\,x(1 - sen^2 x)\,dx\\ &= \int \left(cos\,x - sen^2 x\,cos\,x\right)\,dx\\ &= sen\,x - \frac{1}{3}sen^3 x + C\end{aligned}$$

Para la resolución de la integral $\int sen^2(x)\cos(x)\,dx$ se debe plantear un cambio de variable para que la integral se exprese de forma directa. Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.

EJEMPLO 4.6 Ejercicio de integrales tipo I

HALLAR $\int Cos^5(x)dx$

$$\begin{aligned}
\int cos^5 x\, dx &= \int cos\, x\, cos^4 x\, dx \\
&= \int cos\, x(1 - sen^2 x)^2\, dx \\
&= \int cos\, x\, dx - 2\int sen^2 x\, cos\, x\, dx + \int sen^4 x\, cos\, x\, dx \\
&= sen\, x - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5 x + C
\end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales $\int sen^2(x)\cos(x)\,dx$ y $\int sen^4(x)\cos(x)\,dx$ se deben plantear los cambios de variables respectivos en cada una para que la integral se exprese de forma directa. Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.

EJEMPLO 4.7: Ejercicio de integrales tipo I

HALLAR $\int \frac{sen^3 x}{cos\, x}\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{sen^3 x}{cos\, x}\, dx &= \int \frac{sen\, x\, sen^2 x}{cos\, x}\, dx \\
&= \int \frac{sen\, x\,(1 - cos^2 x)}{cos\, x}\, dx \\
&= \int \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx - \int sen\, x\, cos\, x\, dx \\
&= -ln(cos\, x) + \frac{1}{2} cos^2 x + C
\end{aligned}$$

Para la resolución de la integral $\int sen(x)\cos(x)\,dx$ se debe plantear un cambio de variable para que la integral se exprese de forma directa. Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.

EJEMPLO 4.8: Ejercicio de integrales tipo III

HALLAR $\int sen\,3x\,cos\,2x\,dx$

$$\begin{aligned}\int sen\,3x\,cos\,2x\,dx &= \frac{1}{2}\int (sen\,5x + sen\,x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{cos\,5x}{5} - cos\,x\right) + C\end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales $\int \mathrm{sen}(5x)\,dx$ se deben plantear el cambio de variable respectivo para que la integral se exprese de forma directa. Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.

EJEMPLO 4.9: Ejercicio de integrales tipo III

HALLAR $\int cos\,5x\,sen\,3x\,dx$

$$\begin{aligned}\int cos\,5x\,sen\,3x\,dx &= \frac{1}{2}\int (sen\,8x - sen\,2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{16}cos\,8x + \frac{1}{4}cos\,2x + C\end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales $\int \mathrm{sen}(8x)\,dx$ y $\int sen(2x)dx$ se deben plantear los cambios de variables respectivos en cada una para que la integral se exprese de forma directa. Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.

EJEMPLO 4.10: Ejercicio de integrales tipo III

HALLAR $\int \cos 4x \cos 2x \, dx$

$$\int \cos 4x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

Para la resolución de las integrales $\int \cos(6x)\, dx$ y $\int \cos(2x)\, dx$ se deben plantear los cambios de variables respectivos en cada una para que la integral se exprese de forma directa. Estos cambios de variables se dejan como práctica para el estudiante.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

REVISAR LOS SIGUIENTES ENLACES

HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=4D-XLSH_11G

HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=FUZZUALCXLO

HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=AV3RC0EH-SQ

HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=A8BIXZ5T7DM

HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=NWHB0JKE3-Y

HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=V007KV8ZH-O

HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=EDDUOJTZYU8

ACTIVIDAD

Realizar del Libro 801 ejercicios resueltos los ejercicios propuestos en el capítulo 3 Del 26 al 83.pag 81.