UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
VICE-RECTORADO ACADÉMICO
DECANATO DE DOCENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
UNIDAD CURRICULAR ESTADÍSTICA APLICADA A LA PSICOLOGÍA

TEMA 6. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Toda variable aleatoria (V.A.) posee una distribución de probabilidad, en el caso de las variables discretas se conoce como función de masa de probabilidad (fmd) y en las variables continuas como función de densidad de probabilidad (fdp), que describe su comportamiento. Lo que se conoce como función de distribución representa las probabilidades acumuladas [***F(x) = P(X ≤ x)***].

Cabe destacar, que una variable aleatoria es una función que asigna un valor, usualmente numérico, al resultado de un experimento aleatorio. Por ejemplo, los posibles resultados de lanzar una moneda dos veces, un dado una vez, el nacimiento del primer hijo. Por ejemplo, si lanzamos dos veces una moneda, el espacio muestral sería S = {CC, CS, SC, SS}, le daremos el valor de 1 al evento que se obtuvo una cara, el cual daremos el nombre de variable X

Espacio muestral	X
CC	2
CS	1
CS	1
SS	0

Dentro de las variables aleatorias existen, fundamentalmente, dos tipos. Su clasificación, depende del tipo de número que arroja la función matemática. Una variable aleatoria puede ser de dos tipos:

1. Variable aleatoria discreta: Una variable aleatoria es discreta si los números a los que da lugar son números enteros. La forma de calcular las probabilidades de una variable aleatoria discreta es a través de la función de probabilidad.

2. Variable aleatoria continua: Una variable aleatoria es continua en caso de que los números a los que dé lugar no sean números enteros. Es decir, tengan decimales. La probabilidad de que se dé un suceso determinado correspondiente a una variable aleatoria continua, viene establecida por la función de densidad.

La relación entre variable aleatoria y distribución de probabilidad es muy estrecha. De hecho, una distribución de probabilidad es en realidad la función de una variable aleatoria. Es decir, es función de una función. Así que tenemos dos conceptos relacionados pero diferentes:

- Variable aleatoria: Es una función de un experimento aleatorio.
- Distribución de probabilidad: Es una función que establece cómo se distribuye la probabilidad de una variable aleatoria.

Las variables aleatorias presentan dos tipos de distribución:

- Función de probabilidad, que se denota por $f(x)$

- Función de la distribución acumulativa, que se denota por $F(x)$

De acuerdo con lo comentado en los párrafos anteriores, se tiene entonces que:

- En las V.A. discretas, la función de probabilidad (también se denomina función de masa de probabilidad) se define en un punto X como $\boldsymbol{f(x) = P(X = x)}$. Mientras que la función de distribución acumulada es $\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)} \quad -\infty < \boldsymbol{t} < \infty.$ Además,. $\boldsymbol{\sum_{x} f(x) = 1}$.

- En las V.A. continuas, la función de probabilidad conocida como función de densidad de probabilidad (fdp) permite determinar las probabilidades correspondientes a su subintervalo de valores $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(x)dx}$ que es lo mismo decir $\boldsymbol{P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx}$. Y la función de distribución acumulada es $\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$.

En la distribución de probabilidad debe tenerse en cuenta medidas estadísticas, similar al caso de variables vista en estadística descriptiva, con la salvedad que en las variables aleatorias se incluye el factor de probabilidad. Dentro de estas medidas están las siguientes:

6.1. Esperanza Matemática

La esperanza matemática de una variable aleatoria *X* es el número que expresa el valor medio del fenómeno que representa dicha variable, y constituye la principal medida de centralización de la distribución de una V.A. Se denota como ***E(X).*** También es llamada valor esperado, y es igual a la sumatoria de las probabilidades de que exista un suceso aleatorio, multiplicado por el valor del suceso aleatorio.

Variable aleatoria discreta	**Variable aleatoria continua**
Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores x1, x2, ... con f.m.p. *P(X = xi) para i = 1,2,3...* $\boldsymbol{\mu = E[X] = \sum_{i} x_i * f(x_i)}$ La media se obtiene multiplicando cada valor de X por su probabilidad y sumando estos productos para todos los posibles valores de X (el sumatorio se puede extender desde 1 hasta n, ó ∞.).	Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad *f(x)* $\boldsymbol{\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$ Cuando la variable aleatoria sólo tome valores en un intervalo (a, b), la media se puede escribir también como: $\boldsymbol{\mu = E[X] = \int_{a}^{b} xf(x)dx}$

6.2. Varianza y Desviación Estándar

Sea una variable aleatoria X se define:

1. Varianza de X: $\boldsymbol{\sigma^2 = Var[X] = E[X - E[X]^2] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0}$

2. Desviación estándar de X: $\boldsymbol{\sigma = DE[X] = \sqrt{Var[X]}}$

Variable aleatoria discreta	**Variable aleatoria continua**
$Var(X) = E[(X-\mu)]^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$ $Var\,[X] = \sum_x x^2 f(x) - [\sum_x x f(x)]^2 = E[X^2] - E[X]^2$ $\sigma = DE[X] = \sqrt{Var[X]}$	$Var(X) = E[(X-\mu)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 fxdx$ $Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \; - [\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx]^2$ $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$ $\sigma = DE[X] = \sqrt{Var[X]}$

6.3. Variable aleatoria estandarizada

Una variable aleatoria es estandarizada o tipificada si su esperanza matemática es cero y su varianza es la unidad, es decir, $X \sim N(0,1)$.

Utilizando las propiedades de la esperanza matemática y de la varianza, puede demostrarse que dada cualquier variable aleatoria X, con media μ y desviación estándar σ, es posible estandarizar esa variable definiendo una nueva variable Z de la siguiente manera:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Donde x = E[X], $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ y μ es la media de la población.

El valor de z calculado se busca en la tabla de distribución normal y con ello obtenemos la probabilidad para dicho valor.

Ejemplo. La variable «número de errores cometidos en una tarea de agudeza visual» es una variable aleatoria *X* que presenta la siguiente función de distribución:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	0,47	0,30	0,10	0,06	0,04	0,02	0,01

Determine: valor esperado, varianza, desviación estándar y estandarización de la variable

¿Cuál es la probabilidad de que se cometa más de un error en la tarea de agudeza visual? ¿De qué comenta un mínimo de 3 errores? ¿Y entre 1 y 4 errores (ambas inclusive)? ¿2 o menos errores?

Solución

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$	$x_i * f(x_i)$	x_i^2	$x_i^2 * f(x_i)$
0	0,47	0,47	0	0	0
1	0,3	0,77	0,3	1	0,3
2	0,1	0,87	0,2	4	0,4
3	0,06	0,93	0,18	9	0,54
4	0,04	0,97	0,16	16	0,64
5	0,02	0,99	0,1	25	0,5
6	0,01	1	0,06	36	0,36
			1		2,74

a) Valor esperado:

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i * f(x_i) = 0 * 0{,}47 + 1 * 0{,}3 + \ldots + 6 * 0{,}01 = 1$$

$$\mu = E[X] = 1$$

b) Varianza y desviación estándar

$$Var\,[X] = \sum_x x^2 f(x) - \left[\sum_x x f(x)\right]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

$$Var\,[X] = 2{,}74 - (1)^2 = 1{,}74$$

$$\sigma = DE[X] = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{2{,}74} = 1{,}66$$

$$\sigma = DE[X] = 1{,}66$$

c) Estandarización de la variable

$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

En esta ecuación sustituimos los datos de cada $\boldsymbol{x_i}$ y los valores de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ calculados, tal como se muestra a continuación

$$z = \frac{0 - 1}{1{,}66} = -0{,}60$$

x_i	z
0	-0,60
1	0,00
2	0,60
3	1,20
4	1,81
5	2,41
6	3,01

Para calcular las probabilidades nos apoyaremos en la distribución $\boldsymbol{F(x_i)}$

x_i	$F(x_i)$
0	0,47
1	0,77
2	0,87
3	0,93
4	0,97.97
5	0,99
6	1

¿Cuál es la probabilidad de que se cometa más de un error en la tarea de agudeza visual?

P(Xi > 1) = 1 – P(Xi ≤ 1) = 1 – 0,77 = 0,23

También podemos sumar las probabilidades individuales $f(x_i)$ desde 2 hasta 6

¿De qué comenta un mínimo de 3 errores?

P(Xi < 3) = P(X ≤ 2) = 0,87

¿Y entre 1 y 4 errores (ambas inclusive)?

P(1 ≤ X ≤ 4) = 0,30+ 0,1 + 0,06 + 0,04 = 0,50

¿2 o menos errores?

P(X ≤ 2) = 0,87

Para tener en cuenta el uso de algunos términos como, por ejemplo:

- ✓ Probabilidad de al menos 10, sería $P\ (X\ \geq 10) =\ 1 - P(X <\ 10)$
- ✓ Probabilidad por lo menos 10, sería P(X ≥ 10) = 1 – P(X < 10)
- ✓ Probabilidad a lo sumo 10, sería $P(X\ \leq\ 10) =\ P(X\ =\ 0) + \ldots + P(X\ =\ 10)$
- ✓ Probabilidad a lo más 10, sería $P(X\ \leq\ 10)$
- ✓ Probabilidad como mínimo 10, sería $P(X \geq 10)$
- ✓ Probabilidad menos de 10, seria $P(X\ <\ 10)\ =\ P(X\ \leq\ 9)$
- ✓ Probabilidad de un máximo de 10, sería $P(X\ >\ 10)$
- ✓ Probabilidad de 10 o más, sería $P(X\ \geq\ 10)$
- ✓ Probabilidad de 10 o menos, sería $P(X\ \leq\ 10)$
- ✓ Probabilidad no más de 10, seria P(X ≤ 10)
- ✓ Probabilidad de exactamente 10, sería P(X =10)

Actividad de autoevaluación

La variable "número de hijos" corresponde a una variable aleatoria y está dada por la siguiente tabla

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0,41	0,37	0,16	0,05	0,1

a) Grafique la función de probabilidad $f(x_i)$ y distribución de probabilidad $F(x_i)$

b) Calcule el número de hijos esperados y la varianza

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga más de 2 hijos?

d) ¿Cuál es la probabilidad que tenga solo dos hijos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que las familias tengan al menos 3 hijos?

e) Determine Z para Xi = 0 y Xi = 4.

6.4. Distribución de Probabilidad Discreta

Una distribución de probabilidad discreta es aquella distribución que define las probabilidades de una variable aleatoria discreta. Por lo tanto, una distribución de probabilidad discreta solo puede tomar un número finito de valores (generalmente enteros).

6.4.1. Distribución Binomial

También llamada distribución binómica, es una distribución de probabilidad que cuenta el número de éxitos al realizar una serie de experimentos dicotómicos e independientes con una probabilidad de éxito constante. Es decir, la distribución binomial es una distribución que describe el número de resultados con éxito de una secuencia de ensayos de Bernoulli.

Por ejemplo, el número de veces que sale cara al lanzar una moneda 25 veces es una distribución binomial, porque la otra posibilidad es que salga 25 veces sello. Asimismo, la probabilidad de que un paciente padezca una cierta enfermedad es si o no.

En general, el número total de experimentos realizados se define con el parámetro *n*, mientras que *p* es la probabilidad de éxito de cada experimento. De modo que una variable aleatoria que sigue una distribución binomial se escribe de la siguiente manera:

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

Hay que tener en cuenta que en una distribución binomial se repite exactamente el mismo experimento *n* veces y los experimentos son independientes entre sí, de modo que la probabilidad de éxito de cada experimento es la misma *(p)*.

La distribución binomial presenta tres parámetros ***x, n, p***.

La función de probabilidad de la distribución binomial se define como el número combinatorio de *n* en *x* por p^x por $(1-p)^{n-x}$. Es decir, la fórmula para calcular la probabilidad de una distribución binomial es la siguiente:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

$$P[X = x] = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x (1 - p)^{n-x}$$

Por otro lado, la probabilidad acumulada de la distribución binomial se calcula sumando las probabilidades del número de casos de éxito en cuestión y todas las probabilidades anteriores. De modo que la fórmula para calcular una probabilidad acumulada de una distribución binomial es la siguiente:

$$P[X \leq x] = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En Excel podemos utilizar la siguiente función:

=DISTR.BINOM.N(núm_éxito;ensayos;prob_éxito;acumulado)

Siendo núm_éxito el valor de x; ensayos el valor de n; prob_éxito el valor de la probabilidad y acumulado (verdadero o falso)

Ejemplos

1. Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 2/3. Determinar la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

a) Las cinco personas

b) Al menos tres personas

c) Exactamente dos personas

Solución n = 5 p = 2/3

a) P(X = 5)

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P[X = 5] = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-5} = 0{,}1320$$

La probabilidad de que transcurridos 30 años vivan las cinco personas es 0,1320.

En Excel sería **=DISTR.BINOM.N(5;5;2/3;FALSO) = 0,1320**

b) P(al menos 3 personas) = $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = {}_5C_0 * (2/3)^0 * (1/3)^5 + {}_5C_1 * (2/3)^1 * (1/3)^4 + {}_5C_2 * (2/3)^2 * (1/3)^3 = 0{,}2099$$

En Excel **=DISTR.BINOM.N(2;5;2/3;VERDADERO) = 02099**

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}2099 = 0{,}7901$

Nota. nCx es una manera de representar la combinatoria

c) P(X = 2)

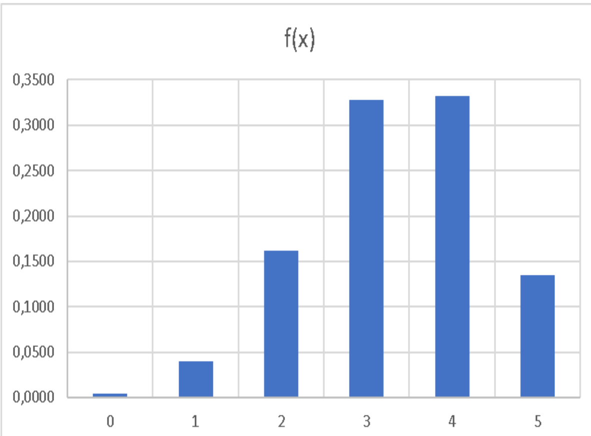
$$P(X = 2) = {}_5C_2 * (2/3)^2 * (1/3)^3 = 0{,}164$$

En la siguiente tabla se muestra la función de probabilidad [f(x)] y la función de distribución acumulada [F(x)] haciendo uso del Excel.

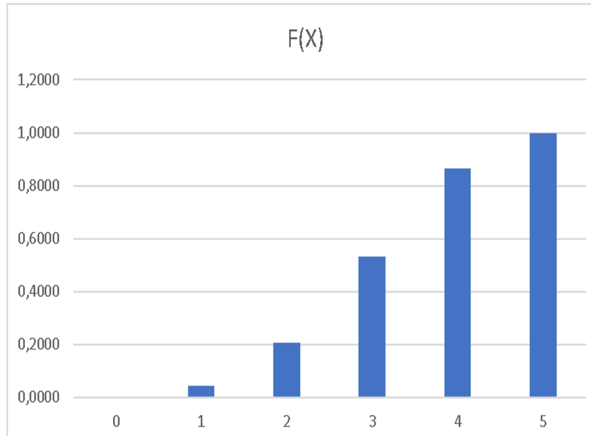
- Para f(x) utilizamos la siguiente función **=DISTR.BINOM.N(A2;B2;C2;FALSO)**

- Para F(x) utilizamos la siguiente función **=DISTR.BINOM.N(A2;B2;C2;VERDADERO)**

x	n	p	f(x)	F(X)
0	5	0,67	0,0039	0,0039
1	5	0,67	0,0397	0,0436
2	5	0,67	0,1613	0,2050
3	5	0,67	0,3275	0,5325
4	5	0,67	0,3325	0,8650
5	5	0,67	0,1350	1,0000



Gráfica de función de probabilidad



Gráfica de función de distribución

2. Si un estudiante responde al azar un examen tipo test de 14 preguntas de dos opciones (verdadero/falso), obtenga:

a) La probabilidad de que acierte solo 3 preguntas.

b) La probabilidad de que acierte como mínimo 3 y como máximo 8.

c) La probabilidad de por lo menos 10 preguntas

Solución n = 14 p = 0,5

a) La probabilidad de que acierte solo 3 preguntas.

$$P[X = 3] = \frac{14!}{3!\,(14-3)!}(0{,}5)^3(0{,}5)^{14-3} = 0{,}022$$

b) La probabilidad de que acierte como mínimo 3 y como máximo 8.

P[3 ≤ X ≤ 8] = P[X =3] + P[X =4] + P[X =5] + P[X =6] + P[X =7] + P[X =8]

Haciendo uso del Excel

=DISTR.BINOM.N(2;14;0,5;VERDADERO) = 0,0065

=DISTR.BINOM.N(8;14;0,5;VERDADERO) = 0,7880

P[3 ≤ X ≤ 8] = 0,7880 – 0,0065 = 0,7816

X	nCx	p^x	$(1-p)^{n-x}$	P(X =x)
3	364	0,1250	0,0005	0,0222
4	1001	0,0625	0,0010	0,0611
5	2002	0,0313	0,0020	0,1222
6	3003	0,0156	0,0039	0,1833
7	3432	0,0078	0,0078	0,2095
8	3003	0,0039	0,0156	0,1833
				0,7816

Como el cálculo es algo complejo hacemos uso de la tabla de distribución binomial. Los valores de probabilidad son acumulados. Buscamos n = 14, p = 0,5 y r = 8.

		p							
n	r	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70
14	0	0.2288	0.0440	0.0178	0.0068	0.0008	0.0001	0.0000	
	1	0.5846	0.1979	0.1010	0.0475	0.0081	0.0009	0.0001	
	2	0.8416	0.4481	0.2811	0.1608	0.0398	0.0065	0.0006	0.0000
	3	0.9559	0.6982	0.5213	0.3552	0.1243	0.0287	0.0039	0.0002
	4	0.9908	0.8702	0.7415	0.5842	0.2793	0.0898	0.0175	0.0017
	5	0.9985	0.9561	0.8883	0.7805	0.4859	0.2120	0.0583	0.0083
	6	0.9998	0.9884	0.9617	0.9067	0.6925	0.3953	0.1501	0.0315
	7	1.0000	0.9976	0.9897	0.9685	0.8499	0.6047	0.3075	0.0933
	8		0.9996	0.9978	0.9917	0.9417	0.7880	0.5141	0.2195
	9		1.0000	0.9997	0.9983	0.9825	0.9102	0.7207	0.4158

$$P[3 \leq X \leq 8] = 0{,}7880 - 0{,}0065 = 0{,}7816$$

c)) La probabilidad de por lo menos 10 preguntas

$$P[X \geq 10] = 1 - P[X < 10]$$

$$P[X < 10] = P[X \leq 9]$$

$$P[X \leq 9] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + \dots + P[X = 9]$$

		p					
n	r	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
14	0	0.2288	0.0440	0.0178	0.0068	0.0008	0.0001
	1	0.5846	0.1979	0.1010	0.0475	0.0081	0.0009
	2	0.8416	0.4481	0.2811	0.1608	0.0398	0.0065
	3	0.9559	0.6982	0.5213	0.3552	0.1243	0.0287
	4	0.9908	0.8702	0.7415	0.5842	0.2793	0.0898
	5	0.9985	0.9561	0.8883	0.7805	0.4859	0.2120
	6	0.9998	0.9884	0.9617	0.9067	0.6925	0.3953
	7	1.0000	0.9976	0.9897	0.9685	0.8499	0.6047
	8		0.9996	0.9978	0.9917	0.9417	0.7880
	9		1.0000	0.9997	0.9983	0.9825	0.9102

$$P[X < 10] = P[X \leq 9] = 0{,}9102$$

$$P[X \geq 10] = 1 - 0{,}9102 = 0{,}0898$$

La distribución binomial cumple con las siguientes características:

- La distribución binomial se define con dos parámetros: *n* es el número total de experimentos de Bernoulli y, por otro lado, *p* es la probabilidad de éxito de cada experimento de Bernoulli.

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$
$$n \geq 0$$
$$0 \leq p \leq 1$$

- La media de una distribución binomial es igual al producto del número total de experimentos por la probabilidad de éxito de cada experimento. Por lo tanto, para calcular la media de una distribución binomial se debe multiplicar *n* por *p*.

$$E[X] = n \cdot p$$

- La varianza de una distribución binomial es equivalente al número total de ensayos multiplicado por la probabilidad de éxito y por la probabilidad de fracaso.

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

- La fórmula de la función de probabilidad de la distribución binomial es la siguiente:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

- Asimismo, la fórmula de la función de distribución acumulada de la distribución binomial es la siguiente:

$$P[X \leq x] = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- La suma de dos distribuciones binomiales independientes con la misma probabilidad es equivalente a una distribución binomial con el mismo valor de probabilidad *p* y *n* siendo la suma del número total de ensayos de las dos distribuciones.

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p) \qquad Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$$

$$Z = X + Y \sim \mathrm{Bin}(n + m, p)$$

$$P[Z = z] = \binom{n + m}{z} p^z (1 - p)^{n+m-z}$$

- La distribución de Bernoulli es un caso particular de la distribución binomial en la que *n=1*, es decir, solo se realiza un experimento.

$$X \sim \mathrm{Bin}(1, p) \quad \longrightarrow \quad X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

- Si X_1, X_2,…, X_k son variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Bin(n_i, p)$ con i = 1,2,..k entonces se cumple la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathrm{Bin}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$$

Ejemplo. Si un estudiante responde al azar un examen tipo test de 14 preguntas de dos opciones (verdadero/falso), obtenga: Determinar el valor esperado, la varianza y desviación estándar del número de aciertos.

Solución n = 14 p = 0,50

E[X] = n x p = 14 x 0,50 = 7

Var[X] = n x p x (1 – p) = 14 x 0,5 x (1 – 0,5) = 3,5

DE[X] = $\sqrt{\mathrm{Var[X]}} = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87$

Actividad de autoevaluación

1. Tras un estudio realizado en una población de niños escolarizados, se ha obtenido que un 10 por 100 de niños escolarizados tienen alta capacidad cognitiva. Si se extrae una muestra aleatoria simple (mas) de 9 niños escolarizados, obtenga las probabilidades de que:

a) En la muestra haya al menos un niño con alta capacidad cognitiva.

b) En la muestra haya no más de 4 niños con alta capacidad cognitiva

c) En la muestra haya exactamente 5 niños con alta capacidad cognitiva

d) Valor esperado y la desviación estándar

2. Si de una población de estudiantes de primaria, de los cuales un 40% estudian en centros bilingües (español-inglés), extraemos una muestra de 15 niños:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 10 de esos niños estudien en centros bilingües?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 7 niños estudien en centros bilingües?

c) ¿Cuál es la probabilidad de a lo sumo 9 niños estudien en centros bilingües?

d) Determine el promedio esperado y la varianza de niños en centros bilingües

3. Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Ningún paciente tenga efectos secundarios

b) Al menos dos pacientes tengan efectos secundarios

c) ¿Cuál es el número medio de pacientes que espera laboratorio que sufran efectos secundarios si elige 100 pacientes al azar?

6.4.2. Distribución Multinomial

Denominada también distribución multinómica, es una distribución de probabilidad que describe la probabilidad de que varios eventos excluyentes ocurran un número determinado de veces tras realizar varios ensayos. Es decir, si un experimento aleatorio puede dar como resultado tres o más eventos excluyentes y se conocen la probabilidad de que ocurra cada evento por separado, la distribución multinomial sirve para calcular la probabilidad de que al realizar varios experimentos suceda un número determinado de veces cada evento. Por tanto, la distribución multinomial es una generalización de la distribución binomial.

Para calcular una probabilidad de la distribución multinomial primero se debe determinar el cociente entre la factorial del número total de datos y las factoriales del número de ocurrencias de cada evento, y el resultado se multiplica por el producto de la probabilidad de cada evento elevada al número de ocurrencias de dicho evento. Es decir, la fórmula de la distribución multinomial es la siguiente:

$$\boldsymbol{P = \frac{n!}{x_1!.\,x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1}.\,p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}}$$

Siendo P la probabilidad de la distribución multinomial calculada, n es el número total de ensayos realizados, x_i es el número de veces que ocurre el evento y p_i es la probabilidad de que ocurra el evento.

Ejemplos

1. Una tienda vende tres productos diferentes. Cuando un cliente hace una compra, la probabilidad de que sea el producto A, el producto B o el producto C es del 30%, 15% y 55% respectivamente. Calcula la probabilidad de que cuando la tienda haya vendido 8 unidades, 2 sean del producto A, 1 del producto B y 5 del producto C.

Solución P(A) = 0,30 P(B) = 0,15 P(C) = 0,55

n = 8 x_A = 2 x_B = 1 x_C = 5

$$P = \frac{n!}{x_1!.x_2!\dots x_k!}p_1^{x_1}.p_2^{x_2}\dots p_k^{x_k}$$

$$P = \frac{8!}{2!.1!.5!}0{,}30^2.0{,}15^1.0{,}55^5 = 0{,}114$$

La probabilidad de que de que cuando la tienda haya vendido 8 unidades, 2 sean del producto A, 1 del producto B y 5 del producto C es 0,114 o 11,4%.

2. Una empresa desea conocer la opinión que tienen los empleados sobre tres estrategias utilizadas para generar un ambiente motivador. Sabiendo que la estrategia A es preferida por el 10% de los empleados, la B por el 30% y la C, por el 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 10 empleados, dos prefieran A, tres la B y dos la C?

Nótese que la sumatoria de las probabilidades no resulta 1, por tanto, existe un 20% de los empleados que no prefieren ninguna de las estrategias, además, del total de empleados seleccionados existen 3 que no prefieren ninguna de las estrategias.

Solución P(A) = 0,10 P(B) = 0,30 P(C) = 0,40 P(ninguna) = 0,20

n = 10 x_A = 2 x_B = 3 x_C = 2 X_n = 3

$$P = \frac{10!}{2!.3!.2!.3!}0{,}10^2.0{,}30^3.0{,}44^2.0{,}20^3 = 0{,}0087$$

La probabilidad de que de que una muestra aleatoria de 10 empleados, dos prefieran A, tres la B y dos la C es del 0,0087.

La distribución multinomial cumple con las siguientes características:

- En una distribución multinomial, el valor esperado del número de veces que ocurre el evento *i* al hacer *n* ensayos es igual al número total de ensayos realizados por la probabilidad de ocurrencia del evento.

$$E[x_i] = n \cdot p_i$$

- En una distribución multinomial, la varianza para el evento *i* se calcula mediante la siguiente expresión:

$$Var(x_i) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

- Asimismo, la covarianza entre dos eventos es equivalente al resultado del producto del número total de ensayos por la probabilidad de cada evento por -1:

$$Cov(x_i, x_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j \qquad i \neq j$$

- La función generadora de momentos para una distribución multinomial es:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} p_i e^{t_i}\right)^n$$

Ejemplo. Del segundo ejercicio anterior determine la esperanza matemática y la varianza,

$E[x_i] = n.p_i$

n	**p_i**	**$n.p_i$**
10	0,1	1
10	0,3	3
10	0,4	4
10	0,2	2
	1	10

$Var[x_i] = n.p_i(1-p_i)$

n	**p_i**	**n.pi**	**(1-pi)**	**n.pi(1-pi)**
10	0,1	1	0,9	0,9
10	0,3	3	0,7	2,1
10	0,4	4	0,6	2,4
10	0,2	2	0,8	1,6
	1	10		7

Actividad de autoevaluación

1. A una consulta psicológica, el 20% de los pacientes sufren de depresión, el 30% de ansiedad, el 30% padecen de estrés y el 10% trastornos de personalidad. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 15 pacientes, 5 presenten depresión, 3 tengan ansiedad, 3 padezcan de estrés y 4 de trastornos de personalidad?.

2. Las probabilidades de que un delegado llegue a cierta convención en avión, autobús, automóvil o tren son de 0.4, 0.2, 0.3 y 0.1, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que, de 9 delegados que asisten a esta convención seleccionados al azar, 3 lleguen en avión, 3 en autobús, 1 en automóvil y 2 en tren?.

6.4.3. Distribución Hipergeométrica

Es una distribución de probabilidad que describe el número de casos de éxito en una extracción aleatoria y sin remplazo de *n* elementos de una población. Esta distribución sirve para calcular la probabilidad de obtener *x* éxitos al extraer *n* elementos de una población sin reemplazar ninguno. La distribución hipergeométrica tiene tres parámetros:

- ***N***: es el número de elementos de la población (N = 0, 1, 2,…).

- ***K***: es el número máximo de casos de éxito (K = 0, 1, 2,...,N). Como en una distribución hipergeométrica un elemento solo puede considerarse «éxito» o «fracaso», *N-K* es el número máximo de casos de fracaso.
- ***n***: es el número de extracciones sin reemplazo que se hacen.

$$X \sim HG(N, K, n)$$

La fórmula de la distribución hipergeométrica es el producto del número combinatorio de *K* sobre *x* por el número combinatorio de *N-K* sobre *n-x* dividido por el número combinatorio de *N* sobre *n*.

$$\boldsymbol{P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

Donde N es el tamaño de la población, K el número total de casos favorables, n es el número de extracciones sin remplazo, y x es el número de casos favorables del cual se quiere calcular la probabilidad de ocurrencia.

En Excel la fórmula es:

=DISTR.HIPERGEOM.N(muestra_éxito;núm_de_muestra;población_éxito;núm_de_población;acumulada)

Donde:

muestra_éxito;	x	núm_de_muestra;	n
población_éxito;	K	núm_de_población;	N
acumulada	verdadero f(x)	falso F(x)	

Ejemplos

1. Un lote contiene 100 piezas de un proveedor de tubería local y 200 unidades de un proveedor de tubería del estado vecino. Si se seleccionan cuatro piezas al azar y sin reemplazo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean del proveedor local?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local?

Solución N = 300 (piezas de tuberías totales)

K = 100 (piezas de tuberías del proveedor local)

n = 4 (son seleccionadas 4 piezas al azar)

a) P(X = 4)

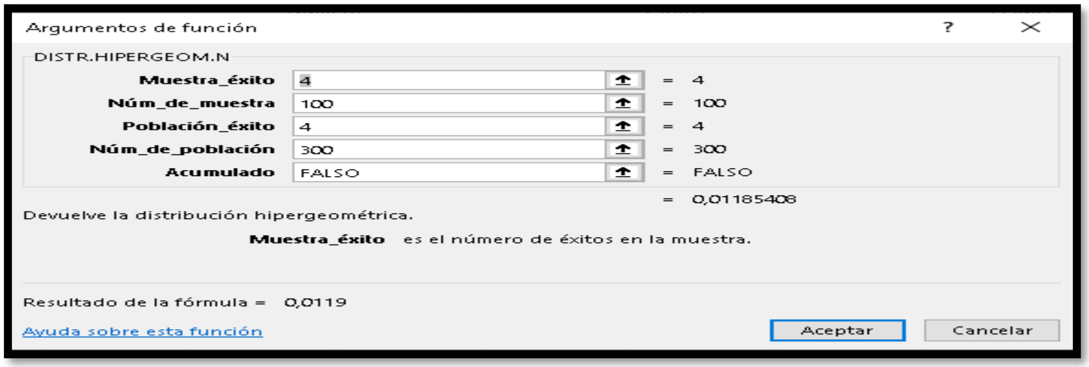
$$P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P[X = 4] = \frac{\binom{100}{4}\binom{300-100}{4-4}}{\binom{300}{4}} = \frac{\binom{100}{4}\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}} = \frac{3921225\ x\ 1}{330791175} = 0{,}0119$$

P[X = 4] = 0,0119

La probabilidad de que todas sean del proveedor local es 0,0119 o 1,19%

En Excel sería: **=DISTR.HIPERGEOM.N(4;100;4;300;FALSO)= 0,0119**



b) P(X ≥ 2)

P(X ≥ 2) = 1 – P(X < 2) = 1 – P(X ≤ 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]

$$P[X=0] = \frac{\binom{100}{0}\binom{300-100}{4-0}}{\binom{300}{4}} = \frac{\binom{100}{0}\binom{200}{4}}{\binom{300}{4}} = 0{,}1955$$

$$P[X=1] = \frac{\binom{100}{1}\binom{300-100}{4-1}}{\binom{300}{4}} = \frac{\binom{100}{1}\binom{200}{3}}{\binom{300}{4}} = 0{,}3970$$

P(X ≤ 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1955 + 0,3970 = 0,5925

En Excel quedaría**: =DISTR.HIPERGEOM.N(1;100;4;300;VERDADERO) = 0,5925**

$$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}5925 =$$

$$P(X \geq 2) = 0{,}407$$

La probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local es 0,407 o 40,7%.

2. Entre 16 trabajadores que asistieron a una consulta psicológica, 10 padecía de estrés laboral. Si tres de los trabajadores son elegidos al azar para conocer las causas del estrés laboral. Determine las siguientes probabilidades:

a) Ninguno tenga estrés laboral

b) Exactamente uno tenga estrés laboral

c) Dos o menos tengan estrés laboral

<u>Solución</u> N = 16

K = 10

n = 3

a) P(X = 0)

$$P[X=0]=\frac{\binom{10}{0}\binom{16-10}{3-0}}{\binom{16}{3}}=\frac{\binom{10}{0}\binom{6}{3}}{\binom{16}{3}}=0{,}0357$$

La probabilidad de que ninguno de los trabajadores seleccionados tenga estrés laboral es del 0,0357.

b) P(X = 1)

$$P[X=1]=\frac{\binom{10}{1}\binom{16-10}{3-1}}{\binom{16}{3}}=\frac{\binom{10}{1}\binom{6}{2}}{\binom{16}{3}}=0{,}2679$$

La probabilidad de que uno de los trabajadores seleccionados tenga estrés laboral es del 0,2679.

c) P(X ≤ 2) = P(X = 0) + P(X=1) + P(X=2)

$$P[X=0]=0{,}0357$$

$$P[X=1]=\ 0{,}2679$$

$$P[X=2]=\frac{\binom{10}{2}\binom{16-10}{3-2}}{\binom{16}{3}}=\frac{\binom{10}{2}\binom{6}{1}}{\binom{16}{3}}=0{,}4821$$

P(X ≤ 2) = P(X = 0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,0357 + 0,2679 +0,4821 = 0,7857

La probabilidad de que dos o menos de los trabajadores seleccionados tenga estrés laboral es del 0,7857.

3. Supongamos que hay diez estudiantes que presentaron una prueba de aptitud hacia la matemática y cinco de ellos presentan una alta aptitud hacia la matemática. Se selecciona al azar tres estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que dos presenten alta aptitud hacia la matemática?

Solución N = 10

K = 5

n = 3

a) P(X = 2)

$$P[X=2]=\frac{\binom{5}{2}\binom{10-5}{3-2}}{\binom{10}{3}}=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=0{,}4167$$

La probabilidad de que dos estudiantes presenten una alta aptitud hacia la matemática es del 0,4167.

Haciendo uso de la tabla de distribución hipergeométrica tenemos lo siguiente:

N	n	k	x	F(x)	P(x)
10	4	4	3	0.995238	0.114286
10	4	4	4	1.000000	0.004762
10	5	1	0	0.500000	0.500000
10	5	1	1	1.000000	0.500000
10	5	2	0	0.222222	0.222222
10	5	2	1	0.777778	0.555556
10	5	2	2	1.000000	0.222222
10	5	3	0	0.083333	0.083333
10	5	3	1	0.500000	0.416667
10	5	3	2	0.916667	0.416667

La distribución hipergeométrica tiene las siguientes propiedades:

- El valor esperado de una distribución hipergeométrica es igual al número de elementos de la muestra por el número total de casos favorables partido por el número de elementos de la población.

$$E[X] = \frac{n \cdot K}{N}$$

- La moda de una distribución hipergeométrica es el valor redondeado hacia abajo del producto de *n+1* por *K+1* dividido entre *N+2*.

$$M = \left\lfloor \frac{(n+1)(K+1)}{N+2} \right\rfloor$$

- La varianza de una distribución hipergeométrica se puede sacar utilizando la siguiente expresión:

$$Var[X] = \frac{nK}{N}\left(\frac{N-K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

- La función generadora de momentos de una distribución hipergeométrica es la siguiente:

$$\frac{\binom{N-K}{n}\ {}_2F_1(-n,-K;N-K-n+1;e^t)}{\binom{N}{n}}$$

- La función característica de la distribución hipergeométrica es la siguiente:

$$\frac{\binom{N-K}{n}\ {}_2F_1(-n,-K;N-K-n+1;e^{it})}{\binom{N}{n}}$$

- Se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de un número determinado de eventos a partir de la probabilidad del número anterior usando la fórmula recursiva de la distribución hipergeométrica:

$$P[X = x+1] = \frac{(K-x)(n-x)}{(x+1)(N-K-n+x-1)} \cdot P[X = x]$$

Ejemplo. Del ejercicio tres calcular la esperanza matemática y la varianza.

$$E[X] = \frac{n.K}{N}$$

$$E[X] = \frac{3\ x\ 5}{10} = 1{,}5$$

$$Var[X] = \frac{n.K}{N} x \left(\frac{N-K}{N}\right) x \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$Var[X] = 1{,}5x \left(\frac{10-5}{10}\right) x \left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0{,}58$$

Actividad de autoevaluación

1. Existen dos vacantes en el Departamento de Psicología de cierta prestigiosa universidad. A un llamado a concurso se presentan cinco postulantes: tres tienen experiencia en Psicología Infantil y dos en Psicología Clínica. El comité de búsqueda se encarga de elegir tres miembros en forma aleatoria.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos tengan experiencia en Psicología Infantil?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos tengan experiencia en Psicología Infantil?

c) ¿Cuál es el valor esperado de postulantes, en la muestra, que tienen experiencia en Psicología Infantil?

2. Suponga que X tiene una distribución hipergeométrica con N = 100, n = 4 y K = 20. Determine lo siguiente:

a) P(X =1)

b) P(X = 6)

c. P(X = 4)

d. Determine la media y la varianza de X.

3. Se estima que 4.000 de los 10.000 votantes residentes en una ciudad están en contra de un nuevo impuesto de ventas. Si 15 los votantes elegibles son seleccionados al azar y se les pidió su opinión, ¿cuál es la probabilidad de que más de 7 estén a favor el nuevo impuesto?

6.4.4. Distribución Poisson

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad que define la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante un período de tiempo. Es decir, la distribución de Poisson sirve para modelizar variables aleatorias que describen el número de veces que se repite un fenómeno en un intervalo de tiempo.

Por ejemplo, el número de llamadas que recibe una central telefónica por minuto es una variable aleatoria discreta que se puede definir utilizando la distribución de Poisson.

La distribución de Poisson tiene un parámetro característico, que se representa con la letra griega **λ,** indica el número de veces que se espera que ocurra el evento estudiado durante un intervalo dado.

$$\boldsymbol{X \sim Poisson(\lambda)}$$

En general, la distribución de Poisson se usa para modelizar estadísticamente sucesos cuya probabilidad de ocurrencia es muy baja. Por ejemplo:

- El número de personas que entran en una tienda en una hora
- El número de vehículos que pasan la frontera entre dos países durante un mes.
- El número de llamadas que recibe una central telefónica por minuto.
- El número de piezas defectuosas producidas por una fábrica durante un día.

En una distribución de Poisson, la probabilidad de que ocurran *x* eventos es igual al número *e* elevado a *-λ* multiplicado por *λ* elevada a *x* y dividido por la factorial de *x*. Por lo tanto, la fórmula para calcular una probabilidad de una distribución de Poisson es la siguiente:

$$\boldsymbol{P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}}$$

Como la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta, para determinar una probabilidad acumulada se deben hallar las probabilidades de todos los valores hasta el valor en cuestión y luego sumar todas las probabilidades calculadas.

En Excel se utiliza la función:

=POISSON.DIST(x; media;acumulada)

Ejemplos

1. El número de productos vendidos por una marca sigue una distribución de Poisson de λ=5 unidades/día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día haya vendido justo 7 unidades?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día haya vendido 3 unidades o menos?

Solución λ = 5 unidades / día

a) P(X = 7)

$$P[X = 7] = \frac{e^{-5}.5^{7}}{7!} = 0{,}104$$

La probabilidad de que un día haya vendido 7 unidades es de 0,104 o 10,4%

b) P(X ≤ 3)

P(X ≤ 3) = P(X= 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)

$$P[X = 0] = \frac{e^{-5}.5^{0}}{0!} = 0{,}007$$

$$P[X = 1] = \frac{e^{-5}.5^{1}}{1!} = 0{,}034$$

$$P[X = 2] = \frac{e^{-5}.5^{2}}{2!} = 0{,}084$$

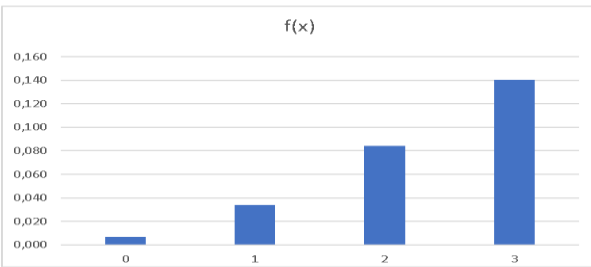
$$P[X = 3] = \frac{e^{-5}.5^{3}}{3!} = 0{,}140$$

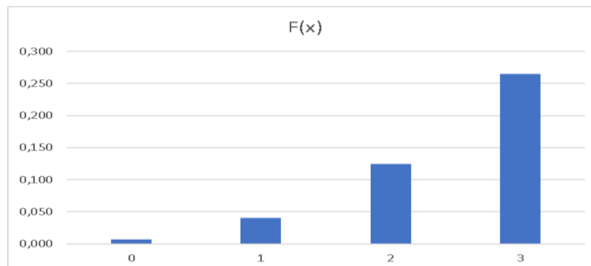
P(X ≤ 3) = 0,007 + 0,034 + 0,084 + 0,140 = 0,265

Haciendo uso de la función **=POISSON.DIST(x; media;acumulada)** tenemos la función de probabilidad f(x) y la función de distribución F(x)

Para f(x) es **=POISSON.DIST(0; 5;falso) = 0,0067** y para F(x) es **=POISSON.DIST(0; 5;verdadero)**

x	**λ**	**f(x)**	**F(x)**
0	5	0,0067	0,0067
1	5	0,0337	0,0404
2	5	0,0842	0,1247
3	5	0,1404	0,2650





Haciendo uso de la tabla de distribución Poisson

	λ									
X	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	0.2650
4	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6664	0.6510	0.6335	0.6160

2. A la clínica de salud mental se recibe un promedio de 4 pacientes por día. Calcular las siguientes probabilidades:

a) De que lleguen 3 pacientes en un día.

b) De que lleguen 5 pacientes en un día.

c) De que hallan al menos 4 pacientes en un día.

<u>Solución</u> λ = 4 pacientes / día

a) P(X = 3)

$$P[X = 3] = \frac{e^{-4}.4^3}{3!} = 0{,}1953$$

La probabilidad de que lleguen 3 pacientes en un día es del 0,1953.

b) P(X = 5)

$$P[X = 5] = \frac{e^{-4}.4^5}{5!} = 0{,}1563$$

La probabilidad de que lleguen 5 pacientes en un día es del 0,1563.

c) P(X ≥ 4) = 1 – P(X < 4) = 1 – P(X ≤ 3)

$$P[X=0]=\frac{e^{-4}.4^{0}}{0!}=0{,}0183$$

$$P[X=1]=\frac{e^{-4}.4^{1}}{1!}=0{,}0733$$

$$P[X=2]=\frac{e^{-4}.4^{2}}{2!}=0{,}1465$$

$$P[X=3]=\frac{e^{-4}.4^{3}}{0!}=0{,}1954$$

Haciendo uso del Excel seria para cada caso:

=POISSON.DIST(x; 4;falso)

$P(X \leq 3) = 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 + 0{,}1954 = 0{,}4335$

$P(X \geq 4) = 1 – P(X < 4) = 1 – 0{,}4335 = 0{,}5665$

Mediante la table de distribución Poisson buscamos P(X ≤ 3)

X	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	[illegible]
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	$\boxed{0.4335}$
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	[illegible]
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851

La probabilidad de que lleguen al menos 4 pacientes en un día es del 0,5665.

Aproximación Binomial a Poisson

Se puede probar que la distribución binomial tiende a converger a la distribución de Poisson cuando el parámetro **n** tiende a infinito y el parámetro **p** tiende a ser cero, de manera que el producto de n por p sea una cantidad constante. De ocurrir esto la distribución binomial tiende a un modelo de Poisson de parámetro $\boldsymbol{\lambda}$ igual a n por p.

Ejemplo. En un estudio de higiene industrial y seguridad, una población de trabajadores de un grupo de industrias que manejan procesos, donde hay ruido, el 5% sufren de problemas emocionales que interfieren con su trabajo. Si se saca una muestra aleatoria de 60 trabajadores, ¿Cuál es la probabilidad de que más de 2 trabajadores sufran de disturbios emocionales?

Solución p = 0,05 n = 60

$P(X > 2) = 1 – P(X \leq 2)$

Como no tenemos λ se calcula mediante $\lambda = n.p$

$$\lambda = 60\ x\ 0{,}05 = 3$$

$$P[X=0]=\frac{e^{-3}.3^{0}}{0!}=0{,}0498$$

$$P[X=1]=\frac{e^{-3}.3^{1}}{1!}=0{,}1494$$

$$P[X = 2] = \frac{e^{-3}.3^2}{2!} = 0{,}2240$$

P(X ≤ 2) = 0,0498 + 0,1494 + 0,2240 = 0,4232

$$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}4232 = 0{,}5768$$

La probabilidad de que más de 2 trabajadores sufran de disturbios emocionales es del 0,5768.

Entre las características de la distribución de Poisson.

- La distribución de Poisson queda definida por un único parámetro característico, λ, que indica el número de veces que se espera que ocurra el evento estudiado durante un determinado periodo de tiempo.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

- La media de una distribución de Poisson es igual a su parámetro característico λ.

$$E[X] = \lambda$$

- Asimismo, la varianza de una distribución de Poisson es equivalente a su parámetro característico λ.

$$Var(X) = \lambda$$

- Si λ es un número entero, la moda de la distribución de Poisson es bimodal y sus valores son λ y λ-1. En cambio, si λ no es un número entero, la moda de la distribución de Poisson es el entero más grande menor o igual que λ.

$$\lambda \in \mathbb{Z} \longrightarrow Mo = \{\lambda, \lambda - 1\}$$

$$\lambda \not\in \mathbb{Z} \longrightarrow Mo = \lfloor \lambda \rfloor$$

- No hay una fórmula concreta para determinar la mediana de una distribución de Poisson, pero se puede saber su intervalo:

$$\lambda - \ln 2 \leq Me < \lambda + \frac{1}{3}$$

- La función de probabilidad de la distribución de Poisson es la siguiente:

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

- La suma de variables aleatorias de Poisson independientes da como resultado otra variable aleatoria de Poisson cuyo parámetro característico es la suma de los parámetros de las variables originales.

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i) \quad i = 1, \ldots, N$$

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right)$$

- Una distribución binomial puede aproximarse como una distribución de Poisson si el número total de observaciones es suficientemente grande (n≥100), siendo λ el producto de los dos parámetros característicos de la distribución binomial.

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \longrightarrow X \sim \text{Poisson}(n \cdot p)$$

Actividad de autoevaluación

1. Una secretaria comete 2 errores por página, en promedio. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente página cometerá

a) 4 o más errores?

b) 0 errores?

c) Determine el valor esperado y la varianza

2. Según una encuesta, un profesor universitario recibe, en promedio, 7 correos electrónicos al día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario de correo electrónico reciba exactamente 2 correos electrónicos al día?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario de correo electrónico reciba como máximo 2 correos electrónicos al día?

c) ¿Cuál es la desviación típica?

3. Se calcula que una empresa el 20% de los trabajadores padecen de ansiedad. Si se toma una muestra de 60 sujetos al azar. Calcular la probabilidad de que:

a) 10 de los trabajadores padezcan de ansiedad.

b) Menos de 5 trabajadores padezcan de ansiedad.

c) Un máximo de 15 trabajadores padezcan de ansiedad.

4. Según un estudio el 5% de los estudiantes tienen fobia hacia las matemáticas. Se elige al azar 100 estudiantes. Cual es la probabilidad de que:

a) Solo 10 estudiantes tienen fobia hacia las matemáticas.

b) Entre 5 y 10 estudiantes (ambos inclusive) tienen fobia hacia las matemáticas.

c) Al menos 8 tienen fobia hacia las matemáticas.

d) Determine E(X) y Var(X)

6.5. Distribución de Probabilidad Continua

Una distribución de probabilidad continua es aquella distribución que define las probabilidades de una variable aleatoria continua. Por lo tanto, una distribución de probabilidad continua solo puede tomar un número infinito de valores.

6.5.1. Distribución Normal

La distribución normal es una distribución de probabilidad continua cuya gráfica tiene forma de campana y es simétrica respecto a su media. En estadística, la distribución normal sirve para modelizar fenómenos de características muy diferentes, por eso se considera, la distribución más importante de todas las distribuciones de probabilidad, porque no solo permite modelizar un gran número de fenómenos reales, sino que, además se puede usar para aproximar otros tipos de distribuciones bajo ciertas condiciones.

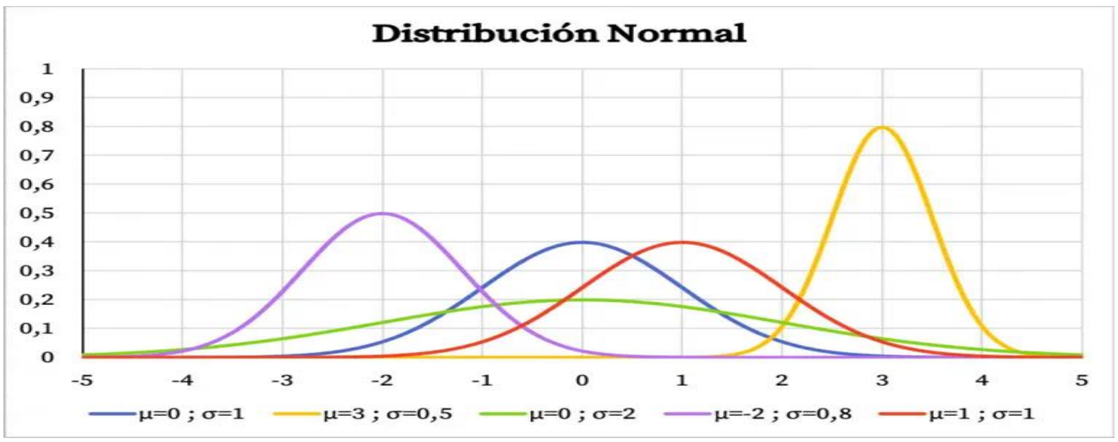
El símbolo de la distribución normal es la letra mayúscula N. Así que, para indicar que una variable sigue una distribución normal se indica con la letra N y se añade entre paréntesis los valores de su media aritmética y su desviación estándar.

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

La distribución normal recibe muchos nombres diferentes, entre ellos destacan distribución de Gauss, distribución gaussiana y distribución de Laplace-Gauss.

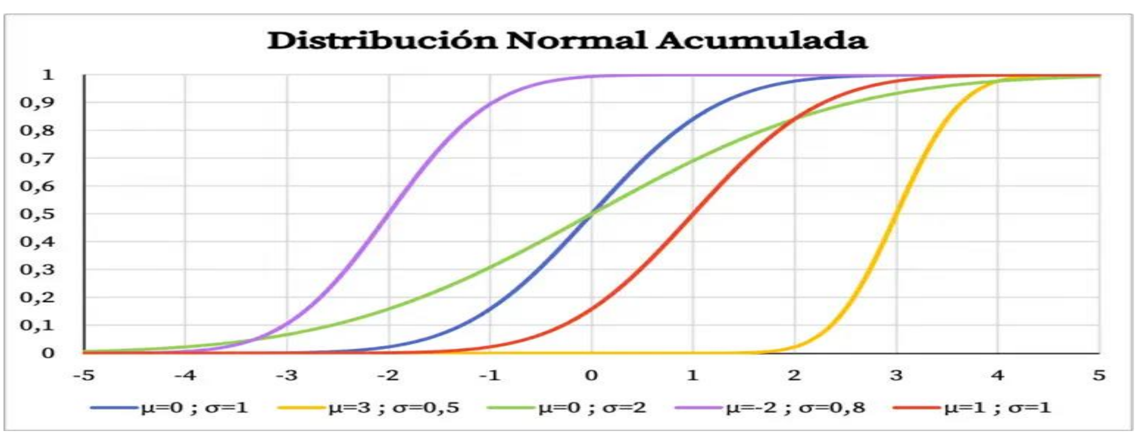
Gráfica de la distribución normal

En el siguiente gráfico puedes ver cómo varia la función de densidad de la distribución normal dependiendo de los valores de su media aritmética y de su desviación típica.



Al tener forma de campana centrada en la media aritmética, si una variable tiene una distribución normal significa que el valor más repetido es la media y que los valores alrededor de la media se repiten con más frecuencia que los valores de los extremos. Asimismo, cuanto mayor sea la desviación típica de la distribución normal, más aplastada es la forma de su representación gráfica.

Por otro lado, la gráfica de la función de probabilidad acumulada de la distribución normal también depende de los valores de su media aritmética y su desviación típica, tal y como puedes ver en la siguiente imagen:



La función de densidad y la función de distribución de la distribución normal permiten calcular probabilidades relacionadas con esta distribución. No obstante, en lugar de utilizar sus fórmulas, puedes usar directamente las tablas de la distribución normal ya que es más rápido.

La distribución normal tiene las siguientes características:

- La distribución normal depende de dos parámetros característicos que son su media aritmética (μ) y su desviación típica (σ).

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- La distribución normal puede tomar tanto valores positivos como negativos, por lo tanto, el dominio de la distribución normal son todos los números reales.

$$x \in \mathbb{R}$$

- La mediana y la moda de la distribución normal son iguales a la media aritmética de la distribución.

$$Me = Mo = \mu$$

- El coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis de la distribución normal son nulos.

$$A = 0$$

$$C = 0$$

- La fórmula de la función de densidad de la distribución normal es la siguiente:

$$P[X = x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Asimismo, la fórmula de la función de probabilidad acumulada de la distribución normal es la siguiente:

$$P[X \leq x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Una aplicación del teorema del límite central es que una distribución de Poisson se puede aproximar a una distribución normal cuando el valor de λ es suficientemente grande.

$$\text{Poisson}(\lambda) \longrightarrow N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$$

- Otra aplicación del teorema del límite central es que una distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal para conjuntos de datos con un gran número de observaciones.

$$\text{Bin}(n, p) \longrightarrow N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right)$$

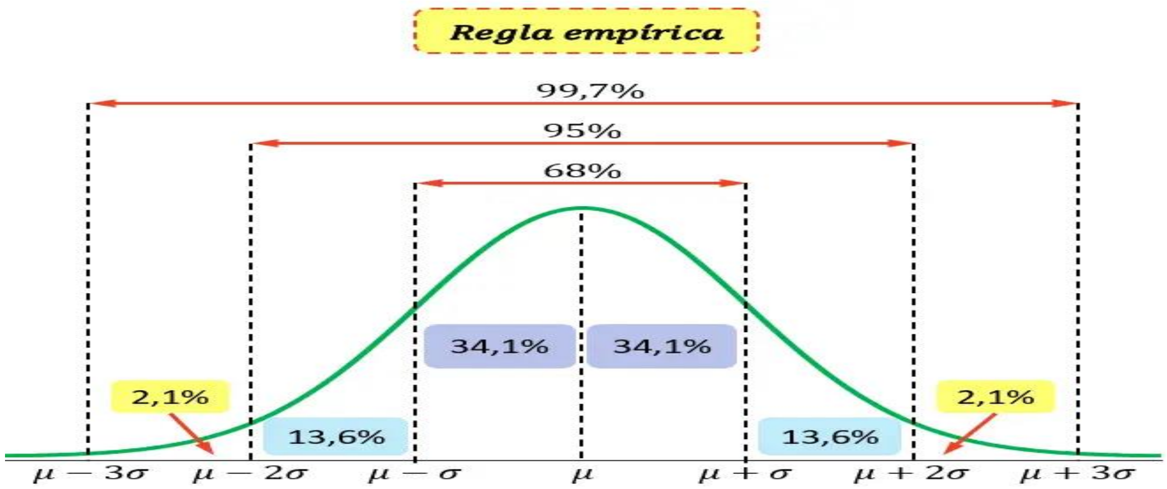
La distribución normal y la regla empírica

En estadística, la regla empírica, también llamada regla 68-95-99,7, es una regla que define el porcentaje de valores de una distribución normal que se encuentran a tres desviaciones estándar de la media.

En concreto, la regla empírica establece lo siguiente:

- El 68% de los valores de una distribución normal se encuentran a una desviación estándar de la media.
- El 95% de los valores de una distribución normal se encuentran a dos desviaciones estándar de la media.

- El 99,7% de los valores de una distribución normal se encuentran a tres desviaciones estándar de la media.



Distribución normal estándar

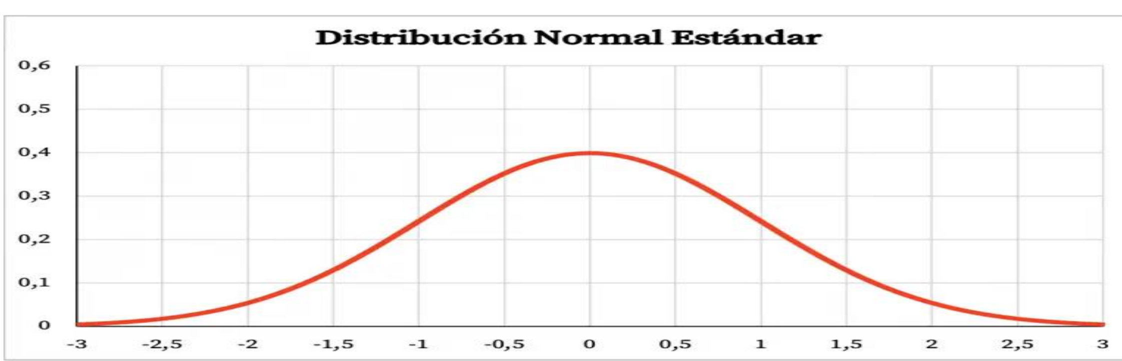
La distribución normal estándar, también llamada distribución normal unitaria, es el caso más simple de una distribución normal. En concreto, la distribución normal estándar es una distribución normal con valores de media y desviación estándar iguales a 0 y 1 respectivamente.

$$N(0,1) \longrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}$$

Cabe destacar que cualquier distribución normal se puede transformar en una distribución normal estándar aplicando un proceso llamado tipificación que consiste en restar a cada uno de los valores su media aritmética y después dividir por su desviación típica.

Además, la distribución normal estándar se usa para determinar cualquier probabilidad de cualquier distribución normal mediante su tabla de probabilidades. De manera que para hallar una probabilidad de una distribución normal primero se tipifica la variable para convertirla en una distribución normal estándar y, posteriormente, se mira en la tabla cuál es el valor de la probabilidad correspondiente.

De modo que la gráfica de la distribución normal estándar es la siguiente:



Fórmula de la distribución normal estándar

Para transformar cualquier distribución normal en una distribución normal estándar, se debe restar la media de la distribución normal a todos sus valores y luego dividir por la desviación estándar de la distribución normal.

Así que la fórmula de la distribución normal estándar es la siguiente:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma) \;\; \rightarrow \;\; Z \sim N(0, 1)$$

De este modo, la media aritmética y la desviación estándar de la nueva variable serán 0 y 1 respectivamente, por lo que obtendremos una distribución normal estándar. A este proceso también se le llama tipificación de una variable o normalización de una variable.

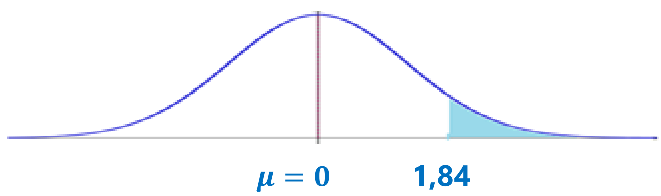
Manejo de la tabla de distribución normal estándar

Ejemplo. Dada una distribución normal estándar, calcule el área bajo la curva que se localiza:

a) a la derecha de z = 1,84

P (Z > 1,84)

En primer lugar, se busca en la tabla de distribución normal el valor de probabilidad, tal como se indica en la figura



z	.03	.04
1.7	0.9582	0.9591
1.8	0.9664	0.9671
1.9	0.9732	0.9738

Como el valor de Z está por encima de la media, P(Z > 1,84), para calcular la probabilidad o el área bajo la curva se resta 1,00 al valor obtenido de la tabla:

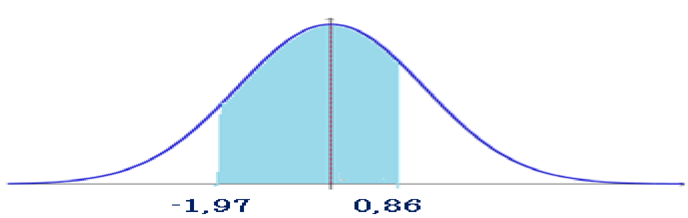
P(Z > 1,84) = 1 – 0,9671 = 0,0329

La probabilidad es de 0,0329

También puede hacerse uso de la función Excel **= DISTR.NORM.ESTAND(z)**

= DISTR.NORM.ESTAND(1,84) =0,9671

b) entre z = –1,97 y z = 0,86



P(-1,97 < Z < 0,86) = P(Z < 0,86)] – [P(Z < -1,97)]

P(-1,97 ≤ Z ≤ 0,86) = 0,8051 – 0,0244 = 0,78

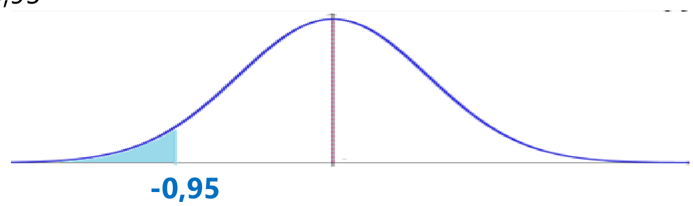
A través de la formula del Excel:

=DISTR.NORM.ESTAND(0,86) = 0,80510548

= DISTR.NORM.ESTAND(0,86) = 0,02441919

P(-1,97 < Z < 0,86) = 0,8051 – 0,0244 = 0,7807

c) a la izquierda de -0,95

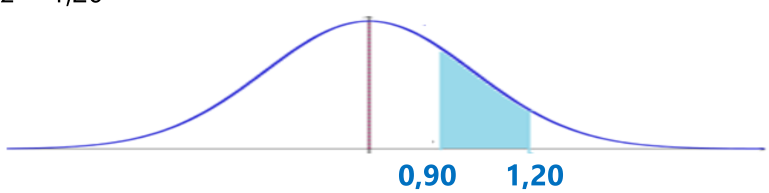


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977

P(Z < – 0,95) = 0,1711

= DISTR.NORM.ESTAND(-0,95) = 0,1710561

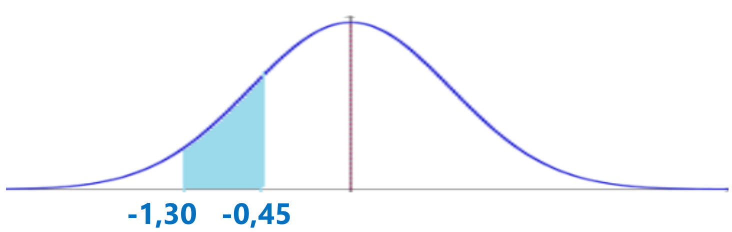
d) entre z = 0,90 y z = 1,20



P(0,90 < Z < 1,20) = P(Z< 1,20) – P(Z < 0,90)

P(0,90 < Z < 1,20) = 0,8849 – 0,8159 = 0,0690

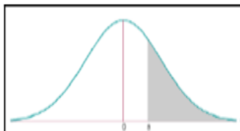
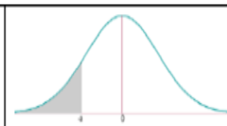
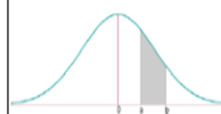
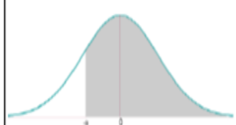
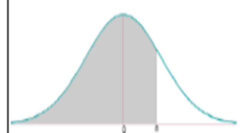
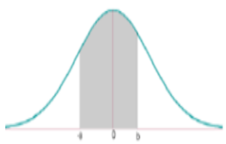
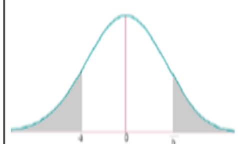
e) entre z = –1,30 y z = –0,45



P(-1,30 < Z < -0,45) = P(Z < - 0,45) – P(Z < -1,30)

P(-1,30 < Z < -0,45) = 0,3264 – 0,0968 = 0,2296

En resumen

 $P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$	 $P(Z \leq a)$ *
 $P(-a < Z < -b) = P(Z < -a) - P(Z < -b)$	 $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$
 $P(Z > -a) = 1 - P(Z \leq a)$	 $P(Z \leq a)$ *
 $P(-a \leq Z \leq b) = P(Z < b) - P(Z < -a)$ $= P(Z < b) - 1 + P(Z < a)$	 $P(Z > b) + P(Z \leq a) =$ $[1 - P(Z \leq b)] + P(Z \leq a)$
* Se busca directamente en la tabla de distribución normal estándar	

<u>Ejemplos</u>

1. Dada una distribución normal estándar, calcule el valor de k tal que:

a) $P(Z > k) = 0{,}3015$

b) $P(k \leq Z \leq -0.18) = 0{,}4197$

<u>Solución</u>

a) $P(Z > k) = 0{,}3015$

Procedemos a restar 1 al valor dado porque está al lado derecho, es decir: **1 – 0,3015 = 0,6985**. Luego, nos dirigimos a la tabla de distribución normal y ubicamos el valor, que en nuestro ejemplo cae en el cruce: 0,52 como se indica en la figura

z	.00	.01	.02
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	$\boxed{0.6985}$

De manera que el valor de k es 0,52

b) $P(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197$

$$P(k < Z < -0{,}18) = P(Z < -0{,}18) - P(Z < k) = 0{,}4197$$

Buscamos el valor del área de -0,18 en la tabla de los Z negativos (ver Figura) que es 0,4286

z	.08	.09
−0.2	0.3897	0.3859
−0.1	$\boxed{0.4286}$	0.4247

0,4197 = 0,4286 – P(Z < k)

P(Z < k) = 0,4286 – 0,4197= 0,0089.

Ubicamos este valor en la tabla de los Z negativos, siendo, el valor de k = –2,37

2. Sabiendo que la variable *X* se distribuye según una normal con media 20 y varianza 64, determine la probabilidad de extraer al azar una observación cuya puntuación sea:

a) Menor de 26

b) Menor de 18

c) Mayor de 30

d) Mayor de 13,2

e) Entre 16 y 28

f) Entre 24 y 36

Solución $\mu = 20 \qquad \sigma^2 = 64$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 8$$

a) P(X < 26)

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{26 - 20}{8} = 0{,}75$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = 0,75

P(X < 26) = P(Z < 0,75) = 0,7734

b) P(X < 18)

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18 - 20}{8} = -0{,}25$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = -0,25

P(X < 18) = P(Z < -0,25) = 0,4013

c) P(X > 30)

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{30 - 20}{8} = 1{,}25$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = 1,25.

P(Z < 1,25) = 0,8944

Como nos piden la probabilidad mayor a 30, entonces procedemos de la siguiente manera:

P(Z > 1,25) = 1 – P(Z< 1,25) = 1 – 0,8944 = 0,1056

d) P(X > 13,2)

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{13{,}2 - 20}{8} = -0{,}85$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = -0,85.

P(Z < -0,85) = 0,1977

Como nos piden la probabilidad mayor a 13,2, entonces procedemos de la siguiente manera:

P(Z > -0,85) = 1 – P(Z< -0,85) = 1 – 0,1977 = 0,8023

e) P(16 < X < 28)

$$z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{16-20}{8} = -0{,}50$$

$$z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{28-20}{8} = 1{,}00$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = -0,50 y z = 1,00.

P(Z < -0,50) = 0,3085

P(Z < 1,00) = 0,8413

Como se trata de hallar la probabilidad entre dos regiones, restamos los valores encontrados en la tabla:

P(16 < X < 28) = P(-0,50 < Z < 1,00) = P(Z < 1,00) – P(Z< -0,50)

P(16 < X < 28) = 0,8413 – 0,3085 = 0,5328

P(16 < X < 28) = 0,5328

f) P(24 < X < 36)

$$z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{24-20}{8} = 0{,}50$$

$$z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{36-20}{8} = 2{,}00$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = 0,50 y z = 2,00.

P(Z < 0,50) = 0,6915

P(Z < 2,00) = 0,9772

Como se trata de hallar la probabilidad entre dos regiones, restamos los valores encontrados en la tabla:

P(24 < X < 36) = P(0,50 < Z < 2,00) = P(Z < 2,00) – P(Z< 0,50)

= 0,9772 – 0,6915 = 0,2857

3. En una población de estudiantes de secundaria se ha observado que las puntuaciones, *X*, en una prueba de matemáticas se aproximan a una distribución *N*(5; 2), mientras que en una prueba de historia las puntuaciones, *Y*, se aproximan a una distribución *N*(6; 3). Asumiendo que ambas puntuaciones son independientes en dicha población, obtenga: La probabilidad de seleccionar un estudiante al azar que tenga en la prueba de matemáticas una puntuación igual o superior a 6 y al mismo tiempo una puntuación en la prueba de historia igual o superior a 7.

<u>Solución</u> X ~ N(5;2)   Y ~ N(6;3)

P(X ≥6)   P(Y≥ 7)

$$z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{6-5}{2} = 0{,}50$$

$$z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{7-6}{3} = 0{,}33$$

$$P(Z < 0{,}50) = 0{,}6915$$

$$P(Z < 0{,}33) = 0{,}6293$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(Z < 0{,}50) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

$$P(X \geq 7) = 1 - P(Z < 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$$

Como piden la probabilidad de seleccionar un estudiante al azar que tenga en la prueba de matemáticas una puntuación igual o superior a 6 y al mismo tiempo una puntuación en la prueba de historia igual o superior a 7, por tanto, se trata de una intersección

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}3085 \times 0{,}3707 = 0{,}1144$$

4. Se asume que el nivel de ansiedad-estado, variable X, sigue una distribución N(8; 2) en una población determinada. Si se toma una m.a.s de 1.000 personas de dicha población:

a) ¿Cuántas personas cabrían esperar que se encuentren entre los niveles de ansiedad 7 y 9?

b) ¿Cuántas cabría esperar que tengan un nivel de ansiedad como mínimo igual a 12?

<u>Solución</u>   N(8; 2)   n = 1.000

a) Cantidad de personas → P(7 < X < 9)

$$z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{7-8}{2} = -0{,}50$$

$$z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{9-8}{2} = 0{,}50$$

$$P(Z < -0{,}50) = 0{,}3085$$

$$P(Z < 0{,}50) = 0{,}6915$$

$$P(7 < X < 9) = P(-0{,}50 < Z < 0{,}50) = 0{,}6915 - 0{,}3085 = 0{,}3830$$

n = 1000 x 0,3830 = 383 personas

b) Cantidad de personas → P(X ≥ 12)

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{12-8}{2} = 2{,}00$$

$$P(Z < 2{,}00) = 0{,}9772$$

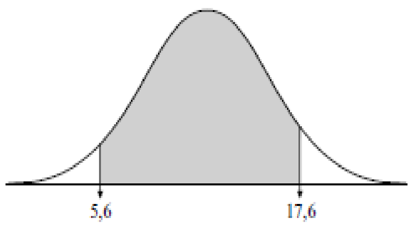
$$P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - P(Z < 2{,}00) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

n = 1000 x 0,0228 = 22 personas

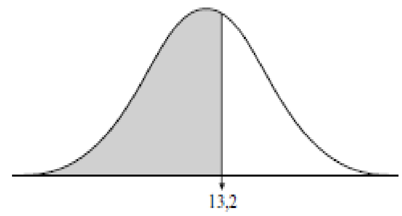
Actividad de autoevaluación

1. Sabiendo que $X \sim N(12; 4)$, obtenga las probabilidades asociadas a las áreas sombreadas.

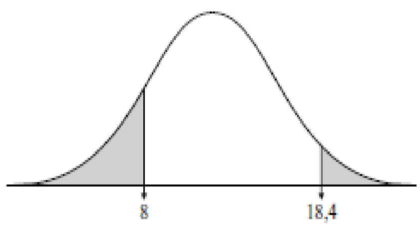
a)



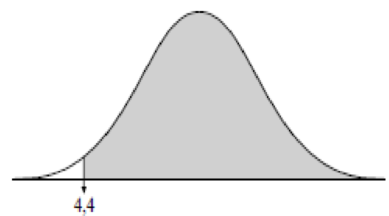
b)



c)



d)



2. Tras administrar una prueba diagnóstica sobre estrés, X, a un grupo de 300 personas, se observa que las puntuaciones en dicha prueba se aproximan a una distribución normal con media 30 y varianza 36. Responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántas personas no superan la puntuación 39?

b) Si se establece que toda aquella persona que tenga una puntuación igual o superior a 42 tiene un riesgo alto de sufrir estrés, ¿cuántas personas cabrían esperar que satisfagan este criterio?

c) Si en el 10 por 100 inferior de la distribución se sitúan las personas que cabe esperar que su riesgo de sufrir estrés sea bajo, obtener la puntuación mínima que se ha de tener en la prueba para pertenecer a este grupo.

3. Si el rendimiento en una tarea perceptiva, *X*, en estudiantes que sólo cursan el grado universitario de Física se distribuye según $N(20; 3)$, mientras que el rendimiento en la misma tarea en estudiantes que sólo cursan el grado de Pedagogía, *Y*, se distribuye $N(25; 4)$, y se extrae un estudiante de cada población, calcule la probabilidad de que ambos no superen la puntuación 24.

4. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación típica 36. Se pide:

a). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

b) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

5. Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

a) Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

b) En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

Aproximación normal a la distribución binomial

Si X es una variable aleatoria discreta que sigue un modelo binomial de parámetros n y p (X→ B(n , p)), X se puede aproximar a un modelo normal de parámetro n·p y $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ si se cumplen las condiciones para "n" y "p":

- n ≥ 30
- n·p ≥ 5 y n·(1-p) ≥ 5
- p >0,1

Si se cumple esto, la variable quedaría aproximada por este modelo normal:

$$X \rightarrow N(np, \sqrt{npq})$$

A este resultado se le conoce como Teorema de De-Moivre.

En este caso, la media es **μ = np** y su varianza es **σ^2 = npq**, entonces la forma limitante de la distribución de

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X - np}}{\sqrt{\mathbf{npq}}}$$

conforme n → ∞, es la distribución normal estándar n(z; 0, 1).

Corrección por continuidad

Como ya sabes, la distribución binomial es discreta, y por tanto, tiene sentido calcular probabilidades puntuales (P[X=a]), mientras que en la normal, al ser continua esto carece de sentido.

La aproximación de una variable discreta X por una continua a la que llamaremos X', genera un cierto error que se corrige modificando el intervalo cuya probabilidad se quiere calcular. Estas son situaciones y correcciones posibles:

- P(X ≥ Xi) = P(X ≥ Xi - 0,5)
- P(X < Xi) = P(X ≤ Xi - 0,5)
- P(X ≤ Xi) = P(X ≤ Xi + 0,5)
- P(X > Xi) = P(X ≥ Xi + 0,5)
- P(X = Xi) = P(Xi – 0,5 ≤ X ≤ Xi + 0,5)
- P(X1 ≤ X ≤ X2) = P(X1 - 0,5 ≤ X ≤ X2 + 0,5)

Ejemplos

1. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

Solución

Datos: n = 200   p = 0,5   q = 0,5   P(aprobar el examen) = P(X > 110)

$\mu = np = 200 * 0,5 = 100$ $\sigma^2 = npq = 200*0,5*0,5 = 50$ $\sigma = 7,07$

X ~ B(200,0.5) → X ~ N(100,7.07)

Como P(X > 110), entonces P(X ≥ 110+0,5) = P(X ≥ 110,5)

Aplicando la fórmula de distribución normal estándar

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110,5 - 100}{7.07} = 1,49$$

P(X > 110,5) = P(Z > 1,49) = 1 - P(Z ≤ 1,49) = 1 - 0,9319 = 0,0681 = 6,81% es la probabilidad de aprobar el examen si contesta más de 110 respuestas correctas.

2. En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 familias que tengan teléfono.

Solución p = 1/3 n = 90

P(X ≥ 30) = 1 – P(X < 30) = 1 – P(X ≤ 29,5)

$\mu = np = 90 * 1/3 = 30$ $\mu = 30$

$\sigma^2 = npq = 90*1/3*2/3 = 20$ $\sigma = 4,47$

P(X ≥ 30) = P(X ≥ 30 - 0,5) = P(X ≥ 29,5)

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{29,5 - 30}{4,47} = -0,11$$

Z = -0,11

P(Z ≤ -0,11) = 0,4562

P(X ≥ 30) = 1 – 0,4562 =0,5438

La probabilidad de que haya por lo menos 30 familias que tengan teléfono es del 0,5438.

Actividad de autoevaluación

1. Un examen tipo test consta de 38 preguntas a contestar verdadero o falso. El examen se aprueba si se contesta correctamente al menos 20 preguntas. Un alumno responde al examen lanzando al aire una moneda y contestando verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

a) La probabilidad de aprobar el examen

b) Probabilidad de acertar más de 24 y menos de 31.

2. Un estudio reciente nos muestra que 2 de cada 10 adolescentes de edades comprendidas entre 12 y 16 años de cierta localidad consumen alcohol durante los fines de semana. Si elegimos una muestra formada por 100 adolescentes de estas edades, calcula:

a) La probabilidad de que al menos 30 consuman alcohol en los fines de semana.

b) Calcula la probabilidad de que ninguno de los 100 adolescentes consuma alcohol los fines de semana.

3. Un estudio realizado en una empresa reveló que 30% de los empleados sienten apatía hacia el trabajo. Se sabe que la empresa dispone de 500 empleados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 175 o más de los empleados manifiesten apatía hacia el trabajo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 140 o menos de los empleados tengan apatía hacia el trabajo?

6.5.2. Distribución t de Student

La distribución t de Student (o distribución t) es una distribución de probabilidad muy utilizada en estadística. es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño y la desviación estándar poblacional es desconocida. En tales casos, la distribución t proporciona una herramienta valiosa para realizar inferencias estadísticas con mayor precisión que la Distribución normal estándar (Z).

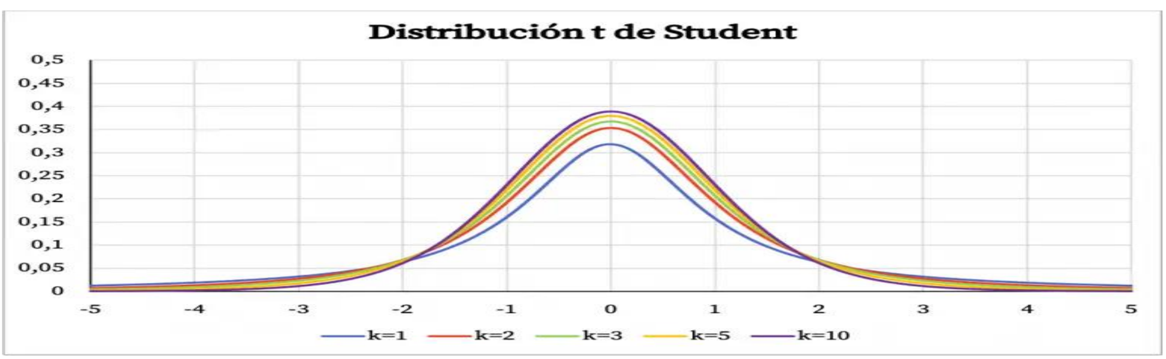
La distribución t de Student queda definida con su número de grados de libertad, que se obtiene restando una unidad al número total de observaciones. Por lo tanto, la fórmula para determinar los grados de libertad de una distribución t de Student es $\nu = n-1$.

$$\nu = n - 1$$

$$X \sim t_\nu$$

Gráfica de la distribución t de Student

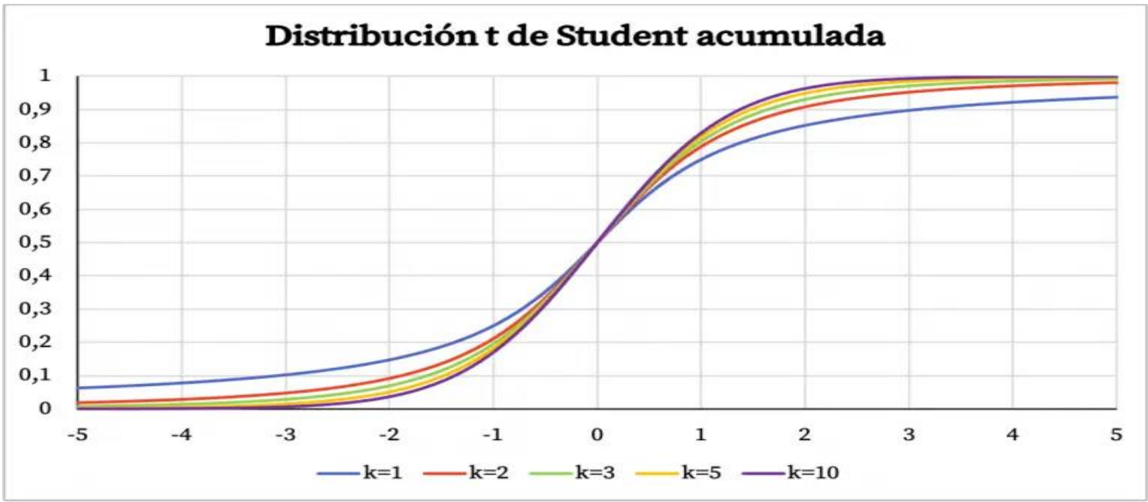
A continuación, puedes ver representadas gráficamente varios ejemplos de distribuciones t de Student con diferentes grados de libertad. Tiene forma de campana como se indica en la figura.



De la gráfica de la distribución t de Student se pueden deducir las siguientes propiedades:

- La distribución t de Student es simétrica centrada en el 0 y tiene forma de campana.
- La distribución t de Student es más dispersa que la distribución normal, es decir, la curva de la distribución t de Student es más ancha.
- Cuantos más grados de libertad tiene la distribución t de Student, menor es su dispersión. Los valores t coinciden con los de la normal estándar.

En el gráfico de arriba se ha representado la función de densidad de la distribución t de Student según sus grados de libertad. Sin embargo, abajo puedes cómo varia la función de probabilidad acumulada de la distribución t de Student:



La fórmula general para la T de Student es la siguiente:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$$

En donde el numerador representa la diferencia a probar y el denominador la desviación estándar de la diferencia llamado también error estándar. En esta fórmula $\boldsymbol{t}$ representa al valor estadístico que estamos buscando, $\overline{\boldsymbol{X}}$ es el promedio de la variable analizada de la muestra, y $\boldsymbol{\mu}$ es el promedio poblacional de la variable a estudiar. En el denominador se tiene a **s** como representativo de la desviación estándar de la muestra y **n** el tamaño de ésta.

Recordemos que :

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

Grados de libertad: El número de grados de libertad es igual al tamaño de la muestra (número de observaciones independientes) menos 1.

gl = df = (n – 1)

Los grados de libertad n – 1 están directamente relacionados con el tamaño de la muestra n.

A medida que el tamaño de la muestra y los grados de libertad se incrementan, S se vuelve una mejor estimación de y la distribución t gradualmente se acerca a la distribución normal estandarizada hasta que ambas son virtualmente idénticas.

Con una muestra de 120 o más, S estima con la suficiente precisión como para que haya poca diferencia entre las distribuciones t y Z. Por esta razón, la mayoría de los especialistas en estadística usan Z en lugar de t cuando el tamaño de la muestra es igual o mayor de 30.

En Excel se puede utilizar las siguientes funciones:

= INV.T(probabilidad;grados_de:libertad)

Cabe mencionar que, si da un valor negativo, no se preocupe, resulta que por simetría es igual a valor positivo. Esto es porque, la función devuelve el inverso de cola izquierda de la distribución t de Student.

=INV.T.2C(probabilidad;grados_de_libertad)

Esta función devuelve el inverso de dos colas de la distribución t de Student.

Características de la distribución t de Student

A continuación, se muestran las características más importantes de la distribución t de Student.

- El dominio de la distribución t de Student son todos los números reales.

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- Para distribuciones t de Student con más de un grado de libertad, la media de la distribución es igual a 0.

$$X \sim t_\nu$$

$$E[X] = 0 \qquad \text{para } \nu > 1$$

- La varianza de una distribución t de Student se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$X \sim t_\nu$$

$$Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \qquad \text{para } \nu > 2$$

- La mediana y la moda de la distribución t de Student, independientemente del número de grados de libertad, siempre es 0.

$$Me = 0$$

$$Mo = 0$$

- La función de densidad de la distribución t de Student queda definida mediante la siguiente fórmula:

$$P[X = x] = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}(1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$$

- La función de distribución de probabilidad acumulada de la distribución t de Student se define con la siguiente fórmula:

$$P[X \leq x] = \frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \cdot \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{\nu}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

- Para distribuciones t de Student con grados de libertad mayor que 3, el coeficiente de asimetría es nulo porque se trata de una distribución simétrica.

$$A = 0 \qquad \text{para } \nu > 3$$

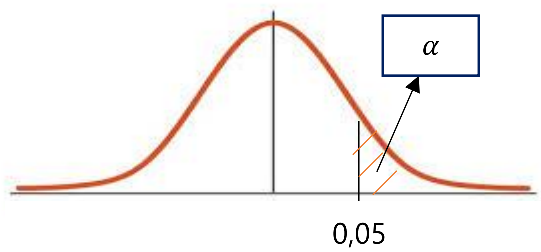
- Si los grados de libertad de la distribución t de Student son más que cuatro, la curtosis se puede calcular dividiendo seis entre los grados de libertad menos cuatro.

$$C = \frac{6}{\nu - 4} \qquad \text{para } \nu > 4$$

<u>Ejemplos</u>

1. La representación de la distribución t de Student con 9 grados de libertad se muestra en las siguientes gráficas. Hallar el valor de t, para el cual:

a) El área sombreada a la derecha es igual a 0,05



El área no sombreada equivale a 0,95, ya que toda el área es igual a 1.

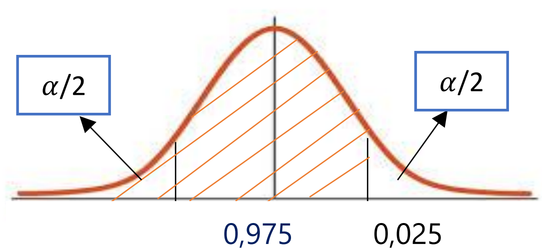
Buscamos en la tabla de distribución t el valor 0,05 con 9 grados de libertad como se muestra en la figura.

	α						
v	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.[illegible]14	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.[illegible]53	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.[illegible]32	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.[illegible]15	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.[illegible]43	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228

Da un valor de t = 1,833

Con el uso del Excel quedaría: **=INV.T(0,05;9) = -1,833** que por simetría y estar hacia la derecha es 1,833.

b) El área total sombreada es igual a 0,05



Como se trata de dos colas, entonces los valores extremos son iguales a 0,025, mientras que la parte central tiene un valor de 0,95. Por tanto, el área sombreada es igual 0,975. Buscamos en la tabla de distribución t dicho percentil. En caso de que la tabla a utilizar no lo contenga, entonces buscamos su complemento, es decir 0,025.

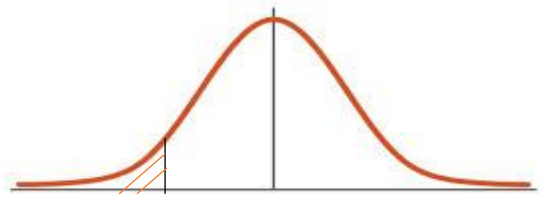
Se tiene un valor t = 2,262.

Si utilizamos las funciones del Excel se procede de la siguiente manera:

= INV.T(0,025;9) = -2,262 En este caso, se utiliza como probabilidad el valor de 0,025 debido a que se trata de dos colas, por lo que α = 0,025

=INV.T.2C(0,05;9) = 2,262 Acá si utilizamos el valor de probabilidad dado.

c) El área sombreada a la izquierda igual a 0,01



0,01

El área no sombreada equivale a 0,99; porque toda el área es igual a 1.

Buscamos en la tabla de distribución t el valor 0,05 con 9 grados de libertad y nos da un valor de t = 2,821.

2. Hallar los valores de t para los cuales el área de la cola derecha de la distribución t es 0,05 si el numero de grados de libertad es igual a (a) 16, (b) 27, (c) 200.

Solución

a) α = 0,05 gl = 16 t = 1,746

b) α = 0,05 gl = 27 t = 1,703

c) α = 0,05 gl = 200 t = 1,653

3. Un estudio en una comunidad rural revela que el promedio de edad es de 55,57 años con una desviación estándar de 6,5 años. Calcular la probabilidad de que, en una muestra de 25 familias,

a) La edad media sea inferior a 58 años.

b) La edad media sea superior a 60 años.

Solución μ = 55,57 años s = 6,5 años n = 25 habitantes

P($\bar{X}$ < 58)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{58 - 55{,}57}{6{,}5/\sqrt{25}} = 1{,}869$$

P(X < 58) = P(t <1,869) ~ t(24) =

En la tabla de distribución t se busca el valor de probabilidad para 24 grados de libertad; sin embargo, el percentil 1,869 no se encuentra en la respectiva fila, sino entre los valores de probabilidad 0,05 y 0,025, tal como se muestra en la siguiente figura.

	α						
v	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064

Por tanto, se interpola linealmente para obtener el valor de probabilidad como se indica a continuación:

t_1 = 1,711 p_1 = 0,05

t = 1,869 p = ?

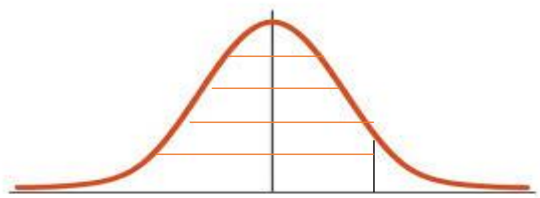
t_2 = 2,064 p_2 = 0,025

$$p = (t - t_1).\frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} + p_1$$

$$p = (1{,}869 - 1{,}711).\frac{0{,}025 - 0{,}05}{2{,}064 - 1{,}711} + 0{,}05$$

$$p = 0{,}158\ x\ (-0{,}071) + 0{,}05$$

$$p = 0{,}039$$



Por tanto, la probabilidad de que, en una muestra de 25 familias, la edad media sea inferior a 58 años (área sombreada) es 1 – 0,039 = 0,961.

P($\bar{X}$ > 60)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{60 - 55{,}57}{6{,}5/\sqrt{25}} = 3{,}408$$

P(X > 60) = P(t >3,408) ~ t(24) =

t_1 = 3,091 p_1 = 0,0025

t = 3,408 p = ?

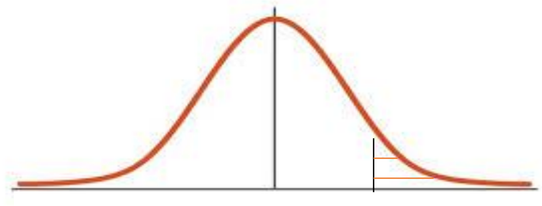
t_2 = 3,745 p_2 = 0,0005

$$p = (t - t_1).\frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} + p_1$$

$$p = (3{,}408 - 3{,}091).\frac{0{,}0005 - 0{,}0025}{3{,}745 - 3{,}091} + 0{,}0025$$

$$p = 0{,}317\ x\ (-0{,}0031) + 0{,}0025$$

$$p = 0{,}0015$$



La probabilidad de que, en una muestra de 25 familias, la edad media sea superior a 60 años es 0,0015.

Aplicaciones de la distribución t de Student

La distribución t de Student es una distribución de probabilidad muy utilizada en estadística. De hecho, incluso existe la prueba de t de Student, la cual sirve para hacer contrastes de hipótesis e intervalos de confianza.

La distribución t de Student permite analizar la diferencia entre dos medias muestrales, en concreto, se usa para determinar si dos muestras tienen medias significativamente distintas. Asimismo, se utiliza la prueba de la t de Student para averiguar si la recta obtenida de un análisis de regresión lineal tiene pendiente o no.

En definitiva, las aplicaciones de la distribución t de Student se basan en analizar conjuntos de datos que en teoría siguen una distribución normal pero que el número total de observaciones es demasiado pequeño como para utilizar este tipo de distribución.

Actividad de autoevaluación

1. Utilice la tabla de la Distribución t-Student, consiga el valor de probabilidad:

a) Del área derecha de t, con n=15 y α=0,05.

b) Del área izquierda de t, con n=20 y α=0,10.

c) Hallar el valor t que deja un área total de 10% en ambos extremos de su valor, con 18 grados de libertad.

2. Dada las siguientes situaciones:

a) Si n = 25, $\bar{x}$ = 3, S = 2. ¿Cuál es el valor de t?

b) Si n = 9, $\bar{x}$ = 2, t = -2. ¿Cuál es el valor de S?

c) Si S = 15, $\bar{x}$ = 14, t = 3. ¿Cuál es el valor de n?

3. Suponga que un test de personalidad ha tenido en investigaciones previas un promedio de 95 puntos. Se tomó al azar 15 personas. Determine la probabilidad para los siguientes casos:

a) Una media superior a 90 ± 5 puntos.

b) Una media inferior a 85 ± 5 puntos.

6.5.3. Distribución Chi-cuadrado o Ji-cuadrada

La distribución chi-cuadrado es una distribución de probabilidad cuyo símbolo es χ^2. En concreto, la distribución chi-cuadrado es la suma del cuadrado de *k* variables aleatorias independientes con distribución normal.

Suponga que, a partir de una variable aleatoria distribuida normalmente, se selecciona aleatoria e independientemente muestras de tamaño 1. Cada valor seleccionado puede transformarse en la variable normal estándar mediante la fórmula

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Al elevar al cuadrado esta variable estandarizada se obtiene una variable la cual tiene una distribución X^2 con 1 grado de libertad. Si se seleccionara una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución normal, y cada una se eleva al cuadrado y se obtiene la suma, es decir,

$$X^2_{(k)} = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$$

Se tiene que esta nueva variable se distribuye como una X^2 con *k* grados de libertad, siendo éste el único parámetro asociado a la distribución.

Así que, la distribución X^2 tiene *k* grados de libertad. Por lo tanto, una distribución chi-cuadrada tiene tantos grados de libertad como la suma de los cuadrados de variables con distribución normal que representa.

$$X \sim \chi^2_k \longrightarrow \begin{array}{l}\text{Distribución chi-cuadrado}\\ \text{con k grados de libertad}\end{array}$$

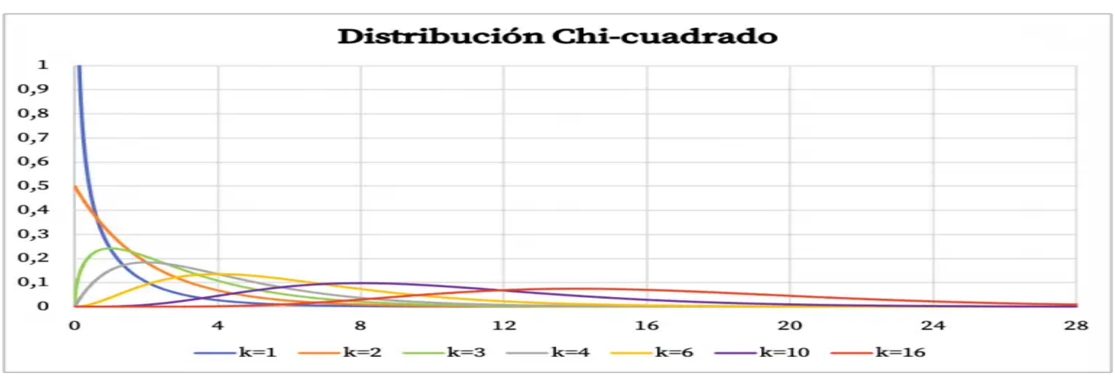
La distribución chi-cuadrado también se conoce como distribución de Pearson**.**

Cabe destacar que la distribución chi-cuadrado es un caso especial de la distribución gamma.

La distribución chi-cuadrado se utiliza mucho en inferencia estadística, por ejemplo, se usa en el contraste de hipótesis y en los intervalos de confianza.

Gráfica de la distribución chi-cuadrado

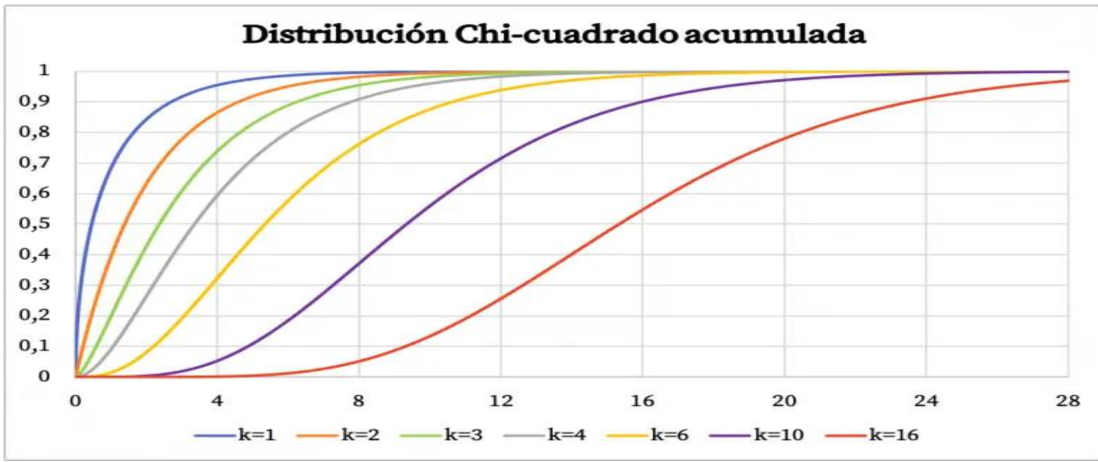
Una vez vista la definición de distribución chi-cuadrado, vamos a ver varios ejemplos de este tipo de distribuciones representadas gráficamente. A continuación, puede verse cómo varia la gráfica de probabilidad de la distribución-chi cuadrado según los grados de libertad.



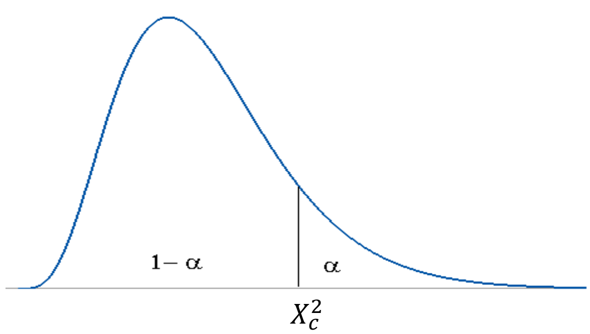
En el gráfico de arriba se ha representado la función de densidad de la distribución chi-cuadrado.

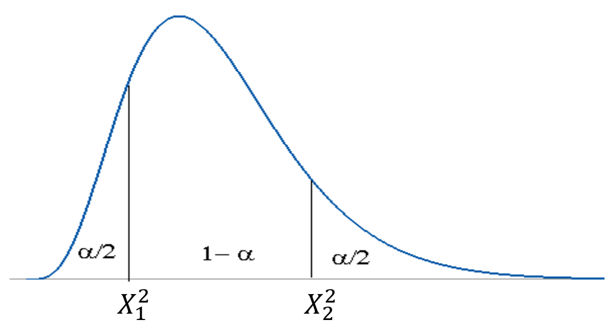
A medida que aumentan los grados de libertad la curva se va haciendo más simétrica y su cola derecha se va extendiendo. Por cada valor de ***k*** se obtiene una distribución distinta.

Por otro lado, la gráfica de la función de distribución de probabilidad acumulada de la chi-cuadrado es la siguiente:



Para el cálculo de los valores de X^2 se utiliza la tabla de distribución chi-cuadrado. Esta tabla determina la cola superior (derecha) de la distribución especificada por el número de grados de libertad (ν) que está en la primera columna, y en la primera fila se ubican las probabilidades (nivel de significación, α). Se denota como $X^2_{(k,\alpha)}$





Las graficas anteriores nos indica las dos maneras de hallar el X2, aunque no la distribución no es simétrica como la distribución normal, se acostumbra, al menos que se especifique lo contrario, en escoger las dos áreas iguales.

Las tablas de distribución indica los valores de x, tal que P(X >x) = α, donde α = 0.995,0.99,0.975,0.95,0.90,0.10,0.05,0.025,0.01,0.005

Si se requiere calcular la probabilidad del complemento se usa la fórmula: P (X< x) = 1 – P(X > x).

<u>Ejemplos</u>

1. Sea X una variable aleatoria X^2 con 9 grados de libertad, encontrar el valor de x, tal que:

a) P(X >x) =0,025

b) P (X < x) = 0,025

<u>Solución</u>:

a) Para hallar el valor de x, tal que: P(X > x) = 0,025

Buscamos en la tabla X2 la columna correspondiente a la probabilidad 0,025 y 9 grados de libertad como se muestra en la figura

	α						
v	**0.30**	**0.25**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622
8	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168
9	~~10.656~~	~~11.389~~	~~12.242~~	~~14.684~~	~~16.919~~	19.023	19.679
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161

Asi que el valor de X es 19,023.

Haciendo uso del Excel **=INV.CHICUAD.CD(probabilidad;grados_de_libertad)**

Esta función devuelve el inverso de la probabilidad de cola derecha de la distribución X^2.

=INV.CHICUAD.CD(0,025;9) = 19,023

b) Para hallar el valor de x, tal que: P(X < x) = 0,025

Se calcula la probabilidad del complemento P (X< x) = 1 – P(X > x).

P (X< x) = 1 – 0,025 = 0,975

	α				
v	**0.995**	**0.99**	**0.98**	**0.975**	**0.95**
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3628	0.0^3982	0.00393
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167
8	1.344	1.647	2.032	2.180	2.733
9	~~1.735~~	~~2.088~~	~~2.532~~	2.700	3.325

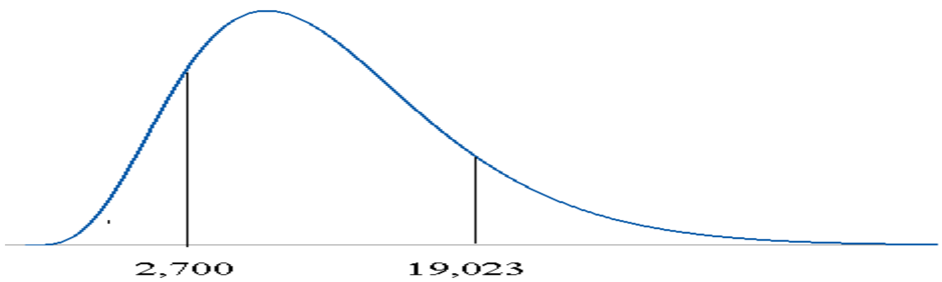
Asi que el valor de X es 2,700

Haciendo uso del Excel **=INV.CHICUAD(probabilidad;grados_de_libertad)**

Esta función devuelve el inverso de la probabilidad de cola izquierda de la distribución X^2.

=INV.CHICUAD(0,025;9) = 2,700

Gráficamente quedaría de la siguiente manera:



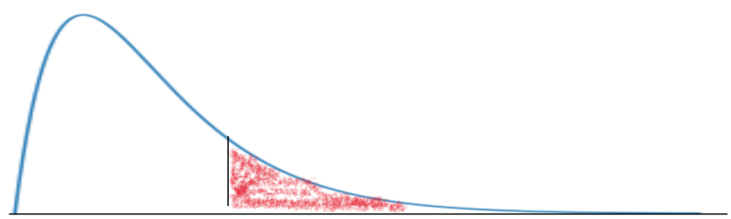
2. Suponga que se trata de una variable aleatoria con distribución X^2 con 10 grados de libertad, es decir, $X^2(10)$. Determine el valor de X^2 para:

a) Un α = 0,05

b) Un α = 0,75

Solución

a) Un α = 0,05 $\qquad X^2_{(10,0,05)}$



0,05

Buscamos en la tabla de distribución chi cuadrado 10 grados de libertad y una probabilidad de 0,05 tal como se muestra en la figura

	α					
ν	0.30	0.25	0.20	0.10	0.05	0.025
8	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023
10	11.781	12.549	13.442	15.987	$\boxed{18.307}$	20.483

Por lo que nos da como resultado $X^2_{(10,0,05)} = 18{,}307$

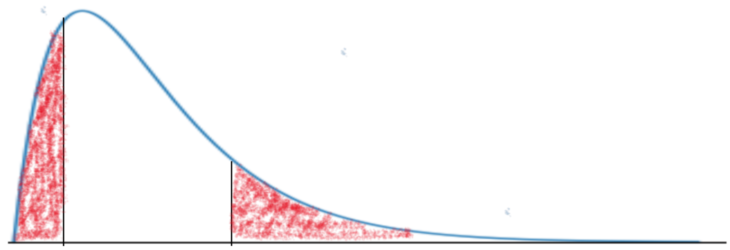
Haciendo uso del Excel **=INV.CHICUAD.CD(probabilidad;grados_de_libertad)**

=INV.CHICUAD.CD(0,05;10) = 18,307

b) Un α = 0,75 $\qquad X^2_{(10,0,75)}$

=INV.CHICUAD.CD(0,75;10) = 6,737

2. La representación gráfica de la distribución chi-cuadrado con 5 grados de libertad se muestra en la siguiente figura. Hallar los valores de X_1^2 y X_2^2 por los cuales:



X_1^2 X_2^2

a) el área sombreada a la derecha = 0,05

b) el área total sombreada = 0,05

c) el área sombreada a la izquierda = 0,10

d) el área sombreada a la derecha = 0,01

Solución gl = 5

a) el área sombreada a la derecha = 0,05

P(X > x) = 0,05

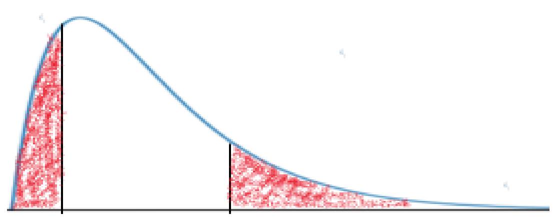
En este caso, procedemos a calcular el área del que está por encima de X_2^2

$X^2_{(5,0,025})$ = =INV.CHICUAD.CD(0,05;5) = 11,070

b) el área total sombreada = 0,05

Tenemos lo siguiente:

P(X > x) = 0,025 y P(X < x) = 0,025



0,025 0,025

P(X > x) = 0,025 =INV.CHICUAD.CD(0,025;5) = 12,833

P(X < x) = 0,05 = INV.CHICUAD(0,025;5) = 0,831

También se pudo haber resuelto de la siguiente manera:

En este caso, procedemos a calcular el área del que está por debajo X_1^2 (1 – 0,05/2 = 0,975) y por de encima de X_2^2 (0,05/2 = 0,025)

Para X_2^2 es $X^2_{(5,0,025})$ =INV.CHICUAD.CD(0,025;5) = 12,833

Para X_1^2 es $X^2_{(5,0,975})$ =INV.CHICUAD.CD (0,975;5) = 0,831

Por consiguiente, los valores sería 0,831 y 12,833.

c) el área sombreada a la izquierda = 0,10

P(X < x) = 0,01 = INV.CHICUAD(0,10;5) = 1,610

Otra manera de resolverlo es el siguiente: Como el valor esta a la izquierda de la gráfica, entonces procedemos a calcular el valor hacia la derecha de X_1^2 que sería 1 – 0,10 = 0,90. Por lo que el valor de X sería

P(X > x) = 0,90 = INV.CHICUAD.CD(0,90;5) = 1,610

d) el área sombreada a la derecha = 0,01

P(X > x) = 0,01 = INV.CHICUAD.CD(0,01;5) = 15,086

3. Si X ~ X^2(24) halle:

a) P(X < 15,5)

b) P(X > 27,1)

Solución

a) P(X < 15,5)

En este caso, buscamos en la tabla de distribución X2 una probabilidad cercana a 24 grados de libertad y una X aproximada a 15,5. Sin embargo, se ubica hacia la izquierda (<), por lo que el valor de probabilidad obtenido se le resta 1.

	α						
ν	0.995	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314
23	9.260	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	17.187
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940

La respuesta es: 1 – 0,90 = 0,10

Haciendo uso del Excel quedaría **=DISTR.CHICUAD.CD(15,5;24) = 0,91**

1 – 0,91 = 0,09

b) P(X > 27,1)

Siguiendo el mismo procedimiento de la parte (a) la probabilidad es 0,30. Como está hacia la derecha (>) no se le resta 1.

4. Una variable aleatoria sigue una distribución X^2 con 113 grados de libertad. Determine el valor de X2 que separa al 5% superior de la curva

Nota. Cuando los valores de k son superiores a 100, el valor de X2 se puede aproximar utilizando la siguiente fórmula:

$$X^2_{(k,\alpha)} = \frac{1}{2}\left[Z_q + \sqrt{2k-1}\right]^2$$

Donde Zq es el valor del normal estándar correspondiente a una cola derecha de tamaño q.

Solución gl = 113 q = 0,05

1 – 0,05 = 0,95 → Z = 1,645

$$X^2_{(113,0,05)} = \frac{1}{2}\left[1{,}645 + \sqrt{2\ x\ 113 - 1}\right]^2 = 138{,}5$$

5. Hallar el valor alfa (α) de cola derecha para el cual se tiene un valor X^2 con 15 grados de libertad de 8,545.

<u>Solución</u> $\alpha = ?$ X^2 = 8,545 gl = 15

$X^{\,2}_{(15,\alpha)}$ = 8,545

Recurrimos a la tabla de distribución chi-cuadrado y buscamos 15 grados de libertad y un valor aproximado de 8,545.

	α					
ν	**0.995**	**0.99**	**0.98**	**0.975**	**0.95**	**0.90**
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3628	0.0^3982	0.00393	0.0158
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833
8	1.344	1.647	2.032	2.180	2.733	3.490
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.041
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790
15	~~4.601~~	~~5.229~~	~~5.985~~	~~6.262~~	~~7.261~~	$\boxed{8.547}$

b

Se tiene una probabilidad de 0,90.

También se puede hacer uso de la función **=DISTR.CHICUAD.CD(x,grados_de_libertad)**

=DISTR.CHICUAD.CD(8,545;15) = 0,90

Actividad de autoevaluación

1. Calcule los siguientes valores X2, para P(X > x)

a) $X^{\,2}_{(15,0,95)}$ b) $X^{\,2}_{(30,0,05)}$

c) $X^{\,2}_{(100,0,90)}$ d) $X^{\,2}_{(130,0,95)}$

2. (a) Si X ~X^2(12), halle P(X < 6,30)

(b) Si X ~X^2(25), halle P(X > 29,3)

3. Halle el valor de α para el cual se tiene:

a) $X^2_{(5,\alpha)}$= 11,070

b) $X^2_{(12,\alpha)}$= 4,404

4. Hallar los valores de X^2 para los cuales el área de la cola a la derecha de la distribución X^2 es 0,05, si el número de grados de libertad es igual a (a) 15, (b) 21, (c) 50.

5. Hallar los valores de X^2 para los cuales el área de la cola a la izquierda de la distribución X^2 es 0,05, si el número de grados de libertad es igual a (a) 8, (b) 17, (c) 35.

Características de la distribución chi-cuadrado

En este apartado veremos las propiedades más importantes de la distribución chi-cuadrado relacionadas con la teoría de la probabilidad y la estadística.

- La media de una distribución chi-cuadrado es igual a sus grados de libertad.

$$X \sim \chi_k^2$$

$$E[X] = k$$

- La varianza de una distribución chi-cuadrado es equivalente al doble de los grados de libertad de la distribución.

$$X \sim \chi_k^2$$

$$Var(X) = 2 \cdot k$$

- La moda de una distribución chi-cuadrada es dos unidades menos que sus grados de libertad, siempre y cuando la distribución tenga más de un grado de libertad.

$$Mo = k - 2 \qquad \text{si } k \geq 2$$

- La función de densidad de la distribución chi-cuadrado es nula si x=0. No obstante, para valores de x mayores que 0, la función de densidad de una distribución chi-cuadrado se define mediante la siguiente fórmula:

$$P[X = x] = \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$$

- La función de distribución acumulada de la distribución chi-cuadrado está regida por la siguiente fórmula:

$$P[X \leq x] = \frac{\gamma(k/2, x/2)}{\Gamma(k/2)}$$

- El coeficiente de asimetría de la distribución chi-cuadrado es la raíz cuadrada del cociente de ocho entre el número de grados de libertad de la distribución.

$$A = \sqrt{\frac{8}{k}}$$

- La curtosis de la distribución chi-cuadrado se calcula mediante la siguiente expresión:

$$C = 3 + \frac{12}{k}$$

- Como consecuencia del teorema del límite central, la distribución chi-cuadrado puede aproximarse por una distribución normal si *k* es suficientemente grande.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\chi_k^2(x)}{k} = N_{\left(1, \sqrt{2/k}\right)}(x)$$

Aplicaciones de la distribución chi-cuadrado

La distribución chi-cuadrado tiene muchas aplicaciones diferentes en estadística. De hecho, hasta existe la prueba de chi-cuadrado que sirve para comprobar la independencia entre variables y la bondad de ajuste a una distribución teórica. Por ejemplo, se puede usar la prueba de chi-cuadrado para determinar si los datos de una muestra se ajustan a una distribución de Poisson.

En el análisis de una regresión lineal, la distribución chi-cuadrado también se utiliza para estimar la media de una población normalmente distribuida y para estimar la pendiente de la recta del estudio de regresión lineal.

Por último, la distribución chi-cuadrado también participa en el análisis de varianza, debido a su relación con la distribución F de Snedecor.

6.5.4. Distribución F de Snedecor

La distribución F de Snedecor, también llamada distribución F de Fisher-Snedecor o simplemente distribución F, es una distribución de probabilidad continua que se usa en la inferencia estadística, especialmente en el análisis de la varianza.

La distribución F es una distribución continua de muestreo de la relación de dos variables aleatorias independientes con distribuciones de chi-cuadrada, cada una dividida entre sus grados de libertad. El valor F no puede ser negativo. La fórmula que define la distribución F de Snedecor es la siguiente:

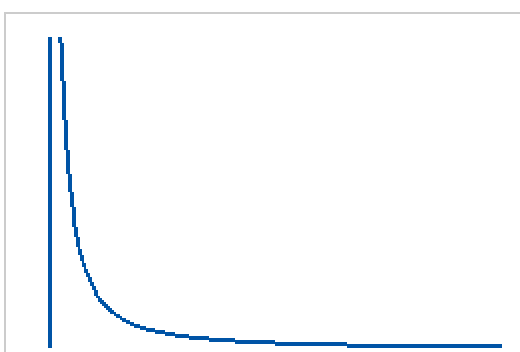
$$\left.\begin{array}{l} X \sim \chi_m^2 \\ Y \sim \chi_n^2 \end{array}\right\} \longrightarrow F_{m,n} = \frac{X/m}{Y/n}$$

Una de las propiedades de la distribución F de Snedecor es que queda definida por el valor de dos parámetros reales, *m* y *n*, que indican sus grados de libertad. Así que, el símbolo de la distribución F de Snedecor es $\boldsymbol{F_{m,n}}$ donde *m* y *n* son los parámetros que definen la distribución.

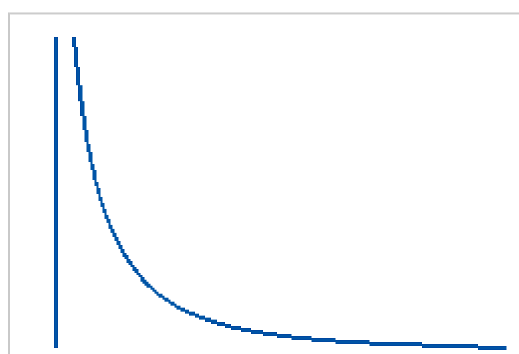
$$F_{m,n} \qquad m, n > 0$$

La distribución F de Fisher-Snedecor recibe este nombre en honor al estadístico inglés Ronald Fisher y al estadístico estadounidense George Snedecor.

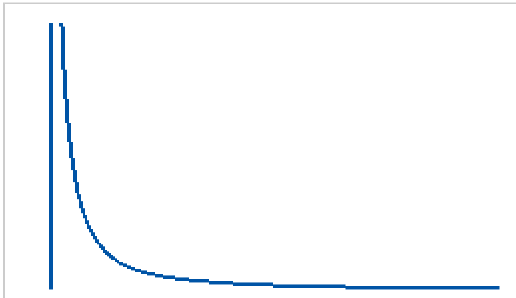
La distribución F es asimétrica hacia la derecha y es descrita por los grados de libertad de su numerador (ν_1) y denominador (ν_2). Las siguientes gráficas muestran el efecto de los diferentes valores de grados de libertad en la forma de la distribución.



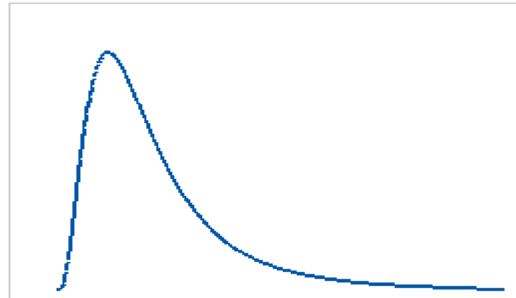
$\nu_1 = 1$ y $\nu_2 = 1$



$\nu_1 = 1$ y $\nu_2 = 9$



$\nu_1 = 9$ y $\nu_2 = 1$



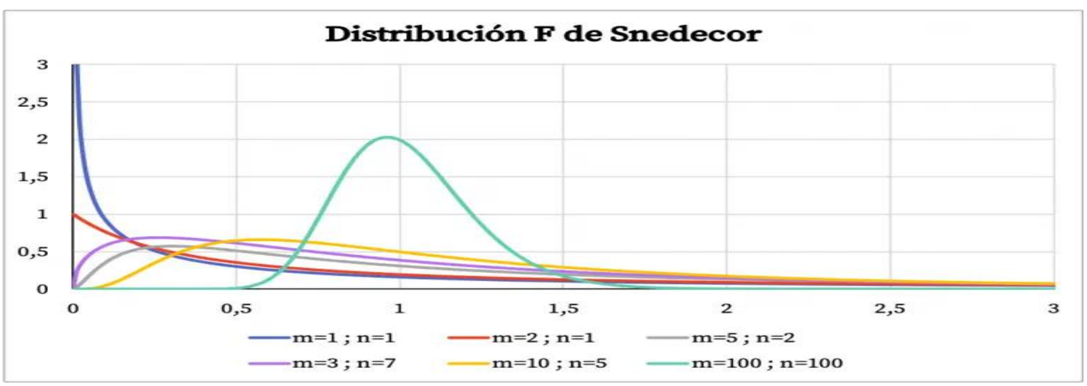
$\nu_1 = 9$ y $\nu_2 = 9$

En estadística, la distribución F de Fisher-Snedecor tiene diferentes aplicaciones. Por ejemplo, la distribución F de Fisher-Snedecor se usa para comparar diferentes modelos de regresión lineal. Asimismo, se utiliza en el contraste de la igualdad de varianzas de dos poblaciones normales, y fundamentalmente en el análisis de la varianza , técnica que permite detectar la existencia o inexistencia de diferencias significativas.

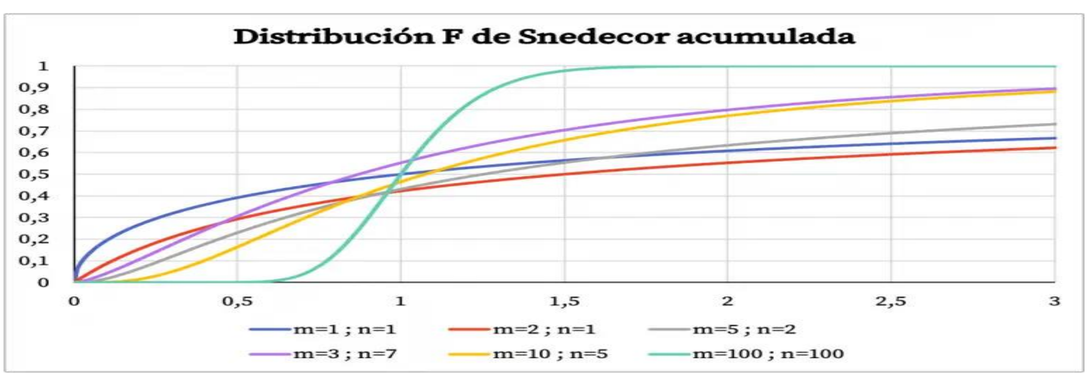
Gráfica de la distribución F de Snedecor

Una vez vista la definición de la distribución F de Snedecor, a continuación, se muestra la gráfica de su función de densidad y la gráfica de su probabilidad acumulada.

En el gráfico de abajo puedes ver representados varios ejemplos de distribuciones F de Snedecor con diferentes grados de libertad.



Por otro lado, en el gráfico de abajo puedes ver cómo varia la gráfica de la función de probabilidad acumulada de la distribución F de Snedecor según sus valores característicos.



Características de la distribución F de Snedecor

- Los grados de libertad de la distribución F de Snedecor, *m* y *n*, son dos parámetros que definen la forma de la distribución. Estos valores característicos de la distribución F de Snedecor son números enteros y positivos.

$$m, n \in \mathbb{Z}$$

$$m, n > 0$$

- El dominio de la distribución F de Snedecor son todos los números reales mayores o igual que cero.

$$x \in [0, +\infty)$$

- Para valores de *n* más grandes que 2, la media de la distribución F de Snedecor es igual a *n* partido por la resta de *n* menos 2.

$$X \sim F_{m,n}$$

$$E[X] = \frac{n}{n-2} \qquad \text{para } n > 2$$

- Cuando el parámetro *n* es mayor que 2, se puede calcular la varianza de la distribución F de Snedecor aplicando la siguiente fórmula:

$$X \sim F_{m,n}$$

$$Var(X) = \frac{2n^2 \cdot (m+n-2)}{m \cdot (n-2)^2 \cdot (n-4)} \qquad \text{para } n > 4$$

- Si el parámetro *m* es mayor que 2, la moda de la distribución F de Snedecor se puede calcular con la siguiente expresión:

$$Mo = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{n}{n+2} \qquad \text{para } m > 2$$

- La fórmula de la función de densidad de la distribución F de Snedecor es la siguiente:

$$P[X = x] = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{\left(1+\frac{mx}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

- Si una variable sigue una distribución F de Snedecor con grados de libertad *m* y *n*, entonces la inversa de dicha variable sigue una distribución F de Snedecor con los mismos grados de libertad, pero cambiando el orden de sus valores.

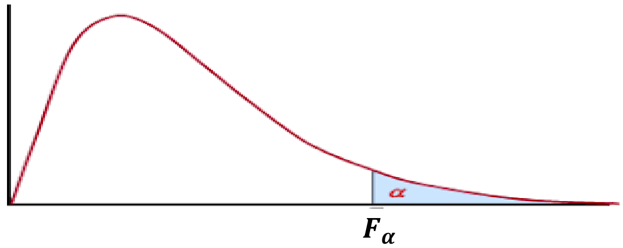
$$X \sim F_{m,n} \longrightarrow X^{-1} \sim F_{n,m}$$

- La distribución t de Student tiene la siguiente relación con la distribución F de Snedecor:

$$X \sim t_n \longrightarrow X^2 \sim F_{1,n}$$

Cálculo de F mediante la tabla de distribución F

La curva de la distribución *F* no solo depende de los dos parámetros v_1 y v_2 sino también del orden en el que se establecen. Una vez que tenemos estos dos valores, podemos identificar la curva. Sea f_α el valor *f* por arriba del cual encontramos un área igual a *α*. Esto se ilustra mediante la región sombreada de la figura.



La tabla de distribución F proporciona valores de f_α solo para α = 0.05 y α = 0.01 para varias combinaciones de los grados de libertad v_1 y v_2. Por ejemplo, el valor f con 6 y 10 grados de libertad, que deja un área de 0,05 a la derecha, es $f_{0,05}$ = 3,22.

$$f_{0,05(6,10)}$$

v_2	v_1 = 1	2	3	4	5	6
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	$\boxed{3.22}$

Por medio de la función en Excel

=INV.F.CD(Probabilidad;Grados_de_libertad_1; Grados_de_libertad_2)

Devuelve el inverso de la distribución de probabilidad F (de cola derecha): si p=DISTR.F.CD(x,...), entonces INV.F.CD(p,...) = x

=INV.F.CD(0,05;6;10) = 3,22

Por medio del siguiente teorema, también se puede utilizar para encontrar valores de $\boldsymbol{f_{0,95}}$ y $\boldsymbol{f_{0,99}}$ .Al escribir $f\alpha$ (v_1, v_2) para $f\alpha$ con v_1 y v_2 grados de libertad, obtenemos

$$f_{1-\alpha(v_1,v_2)} = \frac{1}{f_{\alpha(v_2,v_1)}}$$

Por consiguiente, el valor f con 6 y 10 grados de libertad, que deja un área de 0,95 a la derecha es

	$f_{0.05}(v_1, v_2)$					
v_2	v_1 = 10	12	15	20	24	30
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50
6	$\boxed{4.06}$	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38

$$f_{0,95(6,10)} = \frac{1}{f_{0,05(10,6)}} = \frac{1}{4,06} = 0,246$$

Por medio de la función en Excel

=INV.F (Probabilidad;Grados_de_libertad_1; Grados_de_libertad_2)

Devuelve el inverso de la distribución de probabilidad F (de cola izquierda): si p=DISTR.F(x,...), entonces INV.F (p,...) = x

=INV.F(0,05;6;10) = 0,245 (se coloca el 1-α = α)

Ejemplos

1. Utilizando la tabla para la distribución F, hallar:

a) $F_{0,05;8,30}$

b) $F_{0,01;15;9}$

c) $F_{0,95;10,15}$

c) $F_{0,99;15;9}$

Solución

a) $F_{0,05;8,30}$ = 2,27 (tabla)

$F_{0,05;8,30}$ =INV.F.CD(0,05;8;30) = 2,27

El valor f con 8 y 30 grados de libertad, que deja un área de 0,05 a la derecha es 2,27.

b) $F_{0,01;15;9}$ = 4,96 (tabla)

$F_{0,05;8,30}$ =INV.F.CD(0,01;15;9) = 4,96

El valor f con 15 y 9 grados de libertad, que deja un área de 0,01 a la derecha es 4,96.

c) $F_{0,95;10,15}$

$$f_{1-\alpha(v_1,v_2)} = \frac{1}{f_{\alpha(v_2,v_1)}}$$

$$f_{0,95(10,15)} = \frac{1}{f_{0,05(15,10)}} = \frac{1}{2,85} = 0,351$$

=INV.F (0,05;10;15) = 0,351

El valor f con 10 y 15 grados de libertad, que deja un área de 0,95 a la derecha es 0,351.

c) $F_{0,99;15;9}$

$$f_{1-\alpha(v_1,v_2)} = \frac{1}{f_{\alpha(v_2,v_1)}}$$

$$f_{0,99(15,9)} = \frac{1}{f_{0,01(9,15)}} = \frac{1}{3,89} = 0,257$$

=INV.F (0,01;15;9) = 0,257

El valor f con 15 y 9 grados de libertad, que deja un área de 0,99 a la derecha es 0,257.

2. Encontrar el valor de F, en cada uno de los siguientes casos:

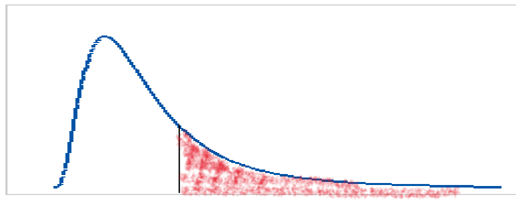
a) El área a la derecha de F para un 0,05 con 4 y 9 grados de libertad

b) El área a la izquierda de F para un 0,95 con 15 y 10 grados de libertad

c) El área a la derecha de F para un 0,95 con 6 y 8 grados de libertad

Solución

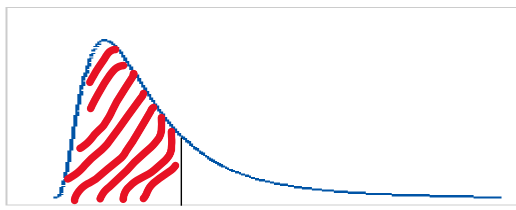
a) El área a la derecha de F para un 0,05 con 4 y 9 grados de libertad



0,05

$F_{0,05;\,4,9}$ = 3,63 =INV.F.CD(0,05;4;9) = 3,63

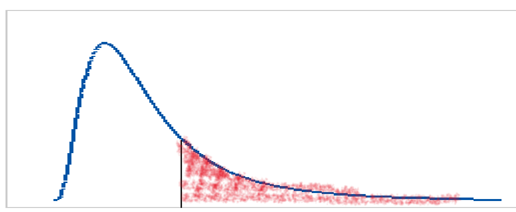
b) El área a la izquierda de F para un 0,95 con 15 y 10 grados de libertad



0,95

$F_{0,95;\,15,10}$ = $F_{0,05;15,10}$ = 2,85 =INV.F.CD(0,05;15;10) = 2,85

c) El área a la derecha de F para un 0,95 con 6 y 8 grados de libertad



0,95

$F_{0,95;\,6,8}$

$$f_{1-\alpha(v_1,v_2)} = \frac{1}{f_{\alpha(v_2,v_1)}}$$

$$f_{0,95(6,8)} = \frac{1}{f_{0,05(8,6)}} = \frac{1}{4,15} = 0,241$$

=INV.F (0,05;6,8) = 0,241

Actividad de autoevaluación

1. Para una distribución *F* calcule:

a) $f_{0,05}$ con v_1 = 7 y v_2 = 15

b) $f_{0,05}$ con $v_1 = 15$ y $v_2 = 7$

c) $f_{0,01}$ con $v_1 = 24$ y $v_2 = 19$

d) $f_{0,95}$ con $v_1 = 19$ y $v_2 = 24$

e) $f_{0,99}$ con $v_1 = 28$ y $v_2 = 12$

2. Encuentre el valor F cuando

a) El área del extremo derecho cuando $F_{0,95;10,20}$

b) El área del extremo izquierdo cuando $F_{0,99;10,15}$

c) El área del extremo derecho cuando $F_{0,01;9,1}$

TABLAS ESTADÍSTICAS

Tabla A.1 Sumas de probabilidad binomial $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
1	**0**	0.9000	0.8000	0.7500	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	**0**	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.3600	0.2500	0.1600	0.0900	0.0400	0.0100
	1	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8400	0.7500	0.6400	0.5100	0.3600	0.1900
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	**0**	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2160	0.1250	0.0640	0.0270	0.0080	0.0010
	1	0.9720	0.8960	0.8438	0.7840	0.6480	0.5000	0.3520	0.2160	0.1040	0.0280
	2	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9360	0.8750	0.7840	0.6570	0.4880	0.2710
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	**0**	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.9477	0.8192	0.7383	0.6517	0.4752	0.3125	0.1792	0.0837	0.0272	0.0037
	2	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8208	0.6875	0.5248	0.3483	0.1808	0.0523
	3	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9744	0.9375	0.8704	0.7599	0.5904	0.3439
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	**0**	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	**0**	0.5314	0.2621	0.1780	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000
	1	0.8857	0.6554	0.5339	0.4202	0.2333	0.1094	0.0410	0.0109	0.0016	0.0001
	2	0.9842	0.9011	0.8306	0.7443	0.5443	0.3438	0.1792	0.0705	0.0170	0.0013
	3	0.9987	0.9830	0.9624	0.9295	0.8208	0.6563	0.4557	0.2557	0.0989	0.0159
	4	0.9999	0.9984	0.9954	0.9891	0.9590	0.8906	0.7667	0.5798	0.3446	0.1143
	5	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9959	0.9844	0.9533	0.8824	0.7379	0.4686
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	**0**	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0280	0.0078	0.0016	0.0002	0.0000	
	1	0.8503	0.5767	0.4449	0.3294	0.1586	0.0625	0.0188	0.0038	0.0004	0.0000
	2	0.9743	0.8520	0.7564	0.6471	0.4199	0.2266	0.0963	0.0288	0.0047	0.0002
	3	0.9973	0.9667	0.9294	0.8740	0.7102	0.5000	0.2898	0.1260	0.0333	0.0027
	4	0.9998	0.9953	0.9871	0.9712	0.9037	0.7734	0.5801	0.3529	0.1480	0.0257
	5	1.0000	0.9996	0.9987	0.9962	0.9812	0.9375	0.8414	0.6706	0.4233	0.1497
	6		1.0000	0.9999	0.9998	0.9984	0.9922	0.9720	0.9176	0.7903	0.5217
	7			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
8	**0**	0.4305	0.1678	0.1001	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	
	1	0.8131	0.5033	0.3671	0.2553	0.1064	0.0352	0.0085	0.0013	0.0001	
	2	0.9619	0.7969	0.6785	0.5518	0.3154	0.1445	0.0498	0.0113	0.0012	0.0000
	3	0.9950	0.9437	0.8862	0.8059	0.5941	0.3633	0.1737	0.0580	0.0104	0.0004
	4	0.9996	0.9896	0.9727	0.9420	0.8263	0.6367	0.4059	0.1941	0.0563	0.0050
	5	1.0000	0.9988	0.9958	0.9887	0.9502	0.8555	0.6846	0.4482	0.2031	0.0381
	6		0.9999	0.9996	0.9987	0.9915	0.9648	0.8936	0.7447	0.4967	0.1869
	7		1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9832	0.9424	0.8322	0.5695
	8				1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	**0**	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0101	0.0020	0.0003	0.0000		
	1	0.7748	0.4362	0.3003	0.1960	0.0705	0.0195	0.0038	0.0004	0.0000	
	2	0.9470	0.7382	0.6007	0.4628	0.2318	0.0898	0.0250	0.0043	0.0003	0.0000
	3	0.9917	0.9144	0.8343	0.7297	0.4826	0.2539	0.0994	0.0253	0.0031	0.0001
	4	0.9991	0.9804	0.9511	0.9012	0.7334	0.5000	0.2666	0.0988	0.0196	0.0009
	5	0.9999	0.9969	0.9900	0.9747	0.9006	0.7461	0.5174	0.2703	0.0856	0.0083
	6	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9750	0.9102	0.7682	0.5372	0.2618	0.0530
	7		1.0000	0.9999	0.9996	0.9962	0.9805	0.9295	0.8040	0.5638	0.2252
	8			1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9899	0.9596	0.8658	0.6126
	9					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	**0**	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000		
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0473	0.0064	0.0001
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7		0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8		1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9				1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	**0**	0.3138	0.0859	0.0422	0.0198	0.0036	0.0005	0.0000			
	1	0.6974	0.3221	0.1971	0.1130	0.0302	0.0059	0.0007	0.0000		
	2	0.9104	0.6174	0.4552	0.3127	0.1189	0.0327	0.0059	0.0006	0.0000	
	3	0.9815	0.8389	0.7133	0.5696	0.2963	0.1133	0.0293	0.0043	0.0002	
	4	0.9972	0.9496	0.8854	0.7897	0.5328	0.2744	0.0994	0.0216	0.0020	0.0000
	5	0.9997	0.9883	0.9657	0.9218	0.7535	0.5000	0.2465	0.0782	0.0117	0.0003
	6	1.0000	0.9980	0.9924	0.9784	0.9006	0.7256	0.4672	0.2103	0.0504	0.0028
	7		0.9998	0.9988	0.9957	0.9707	0.8867	0.7037	0.4304	0.1611	0.0185
	8		1.0000	0.9999	0.9994	0.9941	0.9673	0.8811	0.6873	0.3826	0.0896
	9			1.0000	1.0000	0.9993	0.9941	0.9698	0.8870	0.6779	0.3026
	10					1.0000	0.9995	0.9964	0.9802	0.9141	0.6862
	11						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
12	**0**	0.2824	0.0687	0.0317	0.0138	0.0022	0.0002	0.0000			
	1	0.6590	0.2749	0.1584	0.0850	0.0196	0.0032	0.0003	0.0000		
	2	0.8891	0.5583	0.3907	0.2528	0.0834	0.0193	0.0028	0.0002	0.0000	
	3	0.9744	0.7946	0.6488	0.4925	0.2253	0.0730	0.0153	0.0017	0.0001	
	4	0.9957	0.9274	0.8424	0.7237	0.4382	0.1938	0.0573	0.0095	0.0006	0.0000
	5	0.9995	0.9806	0.9456	0.8822	0.6652	0.3872	0.1582	0.0386	0.0039	0.0001
	6	0.9999	0.9961	0.9857	0.9614	0.8418	0.6128	0.3348	0.1178	0.0194	0.0005
	7	1.0000	0.9994	0.9972	0.9905	0.9427	0.8062	0.5618	0.2763	0.0726	0.0043
	8		0.9999	0.9996	0.9983	0.9847	0.9270	0.7747	0.5075	0.2054	0.0256
	9		1.0000	1.0000	0.9998	0.9972	0.9807	0.9166	0.7472	0.4417	0.1109
	10				1.0000	0.9997	0.9968	0.9804	0.9150	0.7251	0.3410
	11					1.0000	0.9998	0.9978	0.9862	0.9313	0.7176
	12						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	**0**	0.2542	0.0550	0.0238	0.0097	0.0013	0.0001	0.0000			
	1	0.6213	0.2336	0.1267	0.0637	0.0126	0.0017	0.0001	0.0000		
	2	0.8661	0.5017	0.3326	0.2025	0.0579	0.0112	0.0013	0.0001		
	3	0.9658	0.7473	0.5843	0.4206	0.1686	0.0461	0.0078	0.0007	0.0000	
	4	0.9935	0.9009	0.7940	0.6543	0.3530	0.1334	0.0321	0.0040	0.0002	
	5	0.9991	0.9700	0.9198	0.8346	0.5744	0.2905	0.0977	0.0182	0.0012	0.0000
	6	0.9999	0.9930	0.9757	0.9376	0.7712	0.5000	0.2288	0.0624	0.0070	0.0001
	7	1.0000	0.9988	0.9944	0.9818	0.9023	0.7095	0.4256	0.1654	0.0300	0.0009
	8		0.9998	0.9990	0.9960	0.9679	0.8666	0.6470	0.3457	0.0991	0.0065
	9		1.0000	0.9999	0.9993	0.9922	0.9539	0.8314	0.5794	0.2527	0.0342
	10			1.0000	0.9999	0.9987	0.9888	0.9421	0.7975	0.4983	0.1339
	11				1.0000	0.9999	0.9983	0.9874	0.9363	0.7664	0.3787
	12					1.0000	0.9999	0.9987	0.9903	0.9450	0.7458
	13						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	**0**	0.2288	0.0440	0.0178	0.0068	0.0008	0.0001	0.0000			
	1	0.5846	0.1979	0.1010	0.0475	0.0081	0.0009	0.0001			
	2	0.8416	0.4481	0.2811	0.1608	0.0398	0.0065	0.0006	0.0000		
	3	0.9559	0.6982	0.5213	0.3552	0.1243	0.0287	0.0039	0.0002		
	4	0.9908	0.8702	0.7415	0.5842	0.2793	0.0898	0.0175	0.0017	0.0000	
	5	0.9985	0.9561	0.8883	0.7805	0.4859	0.2120	0.0583	0.0083	0.0004	
	6	0.9998	0.9884	0.9617	0.9067	0.6925	0.3953	0.1501	0.0315	0.0024	0.0000
	7	1.0000	0.9976	0.9897	0.9685	0.8499	0.6047	0.3075	0.0933	0.0116	0.0002
	8		0.9996	0.9978	0.9917	0.9417	0.7880	0.5141	0.2195	0.0439	0.0015
	9		1.0000	0.9997	0.9983	0.9825	0.9102	0.7207	0.4158	0.1298	0.0092
	10			1.0000	0.9998	0.9961	0.9713	0.8757	0.6448	0.3018	0.0441
	11				1.0000	0.9994	0.9935	0.9602	0.8392	0.5519	0.1584
	12					0.9999	0.9991	0.9919	0.9525	0.8021	0.4154
	13					1.0000	0.9999	0.9992	0.9932	0.9560	0.7712
	14						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
15	**0**	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000				
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000			
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000		
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001		
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0093	0.0007	0.0000	
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0950	0.0152	0.0008	
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8		0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9		0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0022
	10		1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11			1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12				1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13					1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14						1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	**0**	0.1853	0.0281	0.0100	0.0033	0.0003	0.0000				
	1	0.5147	0.1407	0.0635	0.0261	0.0033	0.0003	0.0000			
	2	0.7892	0.3518	0.1971	0.0994	0.0183	0.0021	0.0001			
	3	0.9316	0.5981	0.4050	0.2459	0.0651	0.0106	0.0009	0.0000		
	4	0.9830	0.7982	0.6302	0.4499	0.1666	0.0384	0.0049	0.0003		
	5	0.9967	0.9183	0.8103	0.6598	0.3288	0.1051	0.0191	0.0016	0.0000	
	6	0.9995	0.9733	0.9204	0.8247	0.5272	0.2272	0.0583	0.0071	0.0002	
	7	0.9999	0.9930	0.9729	0.9256	0.7161	0.4018	0.1423	0.0257	0.0015	0.0000
	8	1.0000	0.9985	0.9925	0.9743	0.8577	0.5982	0.2839	0.0744	0.0070	0.0001
	9		0.9998	0.9984	0.9929	0.9417	0.7728	0.4728	0.1753	0.0267	0.0005
	10		1.0000	0.9997	0.9984	0.9809	0.8949	0.6712	0.3402	0.0817	0.0033
	11			1.0000	0.9997	0.9951	0.9616	0.8334	0.5501	0.2018	0.0170
	12				1.0000	0.9991	0.9894	0.9349	0.7541	0.4019	0.0684
	13					0.9999	0.9979	0.9817	0.9006	0.6482	0.2108
	14					1.0000	0.9997	0.9967	0.9739	0.8593	0.4853
	15						1.0000	0.9997	0.9967	0.9719	0.8147
	16							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
17	**0**	0.1668	0.0225	0.0075	0.0023	0.0002	0.0000				
	1	0.4818	0.1182	0.0501	0.0193	0.0021	0.0001	0.0000			
	2	0.7618	0.3096	0.1637	0.0774	0.0123	0.0012	0.0001			
	3	0.9174	0.5489	0.3530	0.2019	0.0464	0.0064	0.0005	0.0000		
	4	0.9779	0.7582	0.5739	0.3887	0.1260	0.0245	0.0025	0.0001		
	5	0.9953	0.8943	0.7653	0.5968	0.2639	0.0717	0.0106	0.0007	0.0000	
	6	0.9992	0.9623	0.8929	0.7752	0.4478	0.1662	0.0348	0.0032	0.0001	
	7	0.9999	0.9891	0.9598	0.8954	0.6405	0.3145	0.0919	0.0127	0.0005	
	8	1.0000	0.9974	0.9876	0.9597	0.8011	0.5000	0.1989	0.0403	0.0026	0.0000
	9		0.9995	0.9969	0.9873	0.9081	0.6855	0.3595	0.1046	0.0109	0.0001
	10		0.9999	0.9994	0.9968	0.9652	0.8338	0.5522	0.2248	0.0377	0.0008
	11		1.0000	0.9999	0.9993	0.9894	0.9283	0.7361	0.4032	0.1057	0.0047
	12			1.0000	0.9999	0.9975	0.9755	0.8740	0.6113	0.2418	0.0221
	13				1.0000	0.9995	0.9936	0.9536	0.7981	0.4511	0.0826
	14					0.9999	0.9988	0.9877	0.9226	0.6904	0.2382
	15					1.0000	0.9999	0.9979	0.9807	0.8818	0.5182
	16						1.0000	0.9998	0.9977	0.9775	0.8332
	17							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	**0**	0.1501	0.0180	0.0056	0.0016	0.0001	0.0000				
	1	0.4503	0.0991	0.0395	0.0142	0.0013	0.0001				
	2	0.7338	0.2713	0.1353	0.0600	0.0082	0.0007	0.0000			
	3	0.9018	0.5010	0.3057	0.1646	0.0328	0.0038	0.0002			
	4	0.9718	0.7164	0.5187	0.3327	0.0942	0.0154	0.0013	0.0000		
	5	0.9936	0.8671	0.7175	0.5344	0.2088	0.0481	0.0058	0.0003		
	6	0.9988	0.9487	0.8610	0.7217	0.3743	0.1189	0.0203	0.0014	0.0000	
	7	0.9998	0.9837	0.9431	0.8593	0.5634	0.2403	0.0576	0.0061	0.0002	
	8	1.0000	0.9957	0.9807	0.9404	0.7368	0.4073	0.1347	0.0210	0.0009	
	9		0.9991	0.9946	0.9790	0.8653	0.5927	0.2632	0.0596	0.0043	0.0000
	10		0.9998	0.9988	0.9939	0.9424	0.7597	0.4366	0.1407	0.0163	0.0002
	11		1.0000	0.9998	0.9986	0.9797	0.8811	0.6257	0.2783	0.0513	0.0012
	12			1.0000	0.9997	0.9942	0.9519	0.7912	0.4656	0.1329	0.0064
	13				1.0000	0.9987	0.9846	0.9058	0.6673	0.2836	0.0282
	14					0.9998	0.9962	0.9672	0.8354	0.4990	0.0982
	15					1.0000	0.9993	0.9918	0.9400	0.7287	0.2662
	16						0.9999	0.9987	0.9858	0.9009	0.5497
	17						1.0000	0.9999	0.9984	0.9820	0.8499
	18							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
19	**0**	0.1351	0.0144	0.0042	0.0011	0.0001					
	1	0.4203	0.0829	0.0310	0.0104	0.0008	0.0000				
	2	0.7054	0.2369	0.1113	0.0462	0.0055	0.0004	0.0000			
	3	0.8850	0.4551	0.2631	0.1332	0.0230	0.0022	0.0001			
	4	0.9648	0.6733	0.4654	0.2822	0.0696	0.0096	0.0006	0.0000		
	5	0.9914	0.8369	0.6678	0.4739	0.1629	0.0318	0.0031	0.0001		
	6	0.9983	0.9324	0.8251	0.6655	0.3081	0.0835	0.0116	0.0006		
	7	0.9997	0.9767	0.9225	0.8180	0.4878	0.1796	0.0352	0.0028	0.0000	
	8	1.0000	0.9933	0.9713	0.9161	0.6675	0.3238	0.0885	0.0105	0.0003	
	9		0.9984	0.9911	0.9674	0.8139	0.5000	0.1861	0.0326	0.0016	
	10		0.9997	0.9977	0.9895	0.9115	0.6762	0.3325	0.0839	0.0067	0.0000
	11		1.0000	0.9995	0.9972	0.9648	0.8204	0.5122	0.1820	0.0233	0.0003
	12			0.9999	0.9994	0.9884	0.9165	0.6919	0.3345	0.0676	0.0017
	13			1.0000	0.9999	0.9969	0.9682	0.8371	0.5261	0.1631	0.0086
	14				1.0000	0.9994	0.9904	0.9304	0.7178	0.3267	0.0352
	15					0.9999	0.9978	0.9770	0.8668	0.5449	0.1150
	16					1.0000	0.9996	0.9945	0.9538	0.7631	0.2946
	17						1.0000	0.9992	0.9896	0.9171	0.5797
	18							0.9999	0.9989	0.9856	0.8649
	19							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	**0**	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000					
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000				
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002				
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0000			
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003			
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000		
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003		
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	
	10		0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11		0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12		1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13			1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14				1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15					0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16					1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17						0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18						1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19							1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20								1.0000	1.0000	1.0000

Tabla A.2. Suma de probabilidad hipergeométrica HG(N, K, n)

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*	*N*	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
2	1	1	0	0.500000	0.500000	6	3	2	1	0.800000	0.600000
2	1	1	1	1.000000	0.500000	6	3	2	2	1.000000	0.200000
3	1	1	0	0.666667	0.666667	6	3	3	0	0.050000	0.050000
3	1	1	1	1.000000	0.333333	6	3	3	1	0.500000	0.450000
3	2	1	0	0.333333	0.333333	6	3	3	2	0.950000	0.450000
3	2	1	1	1.000000	0.666667	6	3	3	3	1.000000	0.050000
3	2	2	1	0.666667	0.666667	6	4	1	0	0.333333	0.333333
3	2	2	2	1.000000	0.333333	6	4	1	1	1.000000	0.666667
4	1	1	0	0.750000	0.760000	6	4	2	0	0.066667	0.066667
4	1	1	1	1.000000	0.250000	6	4	2	1	0.600000	0.533333
4	2	1	0	0.500000	0.500000	6	4	2	2	1.000000	0.400000
4	2	1	1	1.000000	0.500000	6	4	3	1	0.200000	0.200000
4	2	2	0	0.166667	0.166667	6	4	3	2	0.800000	0.600000
4	2	2	1	0.833333	0.666667	6	4	3	3	1.000000	0.200000
4	2	2	2	1.000000	0.166667	6	4	4	2	0.400000	0.400000
4	3	1	0	0.250000	0.250000	6	4	4	3	0.933333	0.533333
4	3	1	1	1.000000	0.750000	6	4	4	4	1.000000	0.066667
4	3	2	1	0.500000	0.500000	6	5	1	0	0.166667	0.166667
4	3	2	2	1.000000	0.500000	6	5	1	1	1.000000	0.833333
4	3	3	2	0.750000	0.750000	6	5	2	I	0.333333	0.333333
4	3	3	3	1.000000	0.250000	6	5	2	2	1.000000	0.666667
5	1	1	0	0.800000	0.800000	6	5	3	2	0.500000	0.500000
5	1	1	1	1.000000	0.200000	6	5	3	3	1.000000	0.500000
5	2	1	0	0.600000	0.600000	6	5	4	3	0.666667	0.666667
5	2	1	1	1.000000	0.400000	6	5	4	4	1.000000	0.333333
5	2	2	0	0.300000	0.300000	6	5	5	4	0.833333	0.833333
5	2	2	1	0.900000	0.600000	6	5	5	5	1.000000	0.166667
5	2	2	2	1.000000	0.100000	7	1	1	0	0.857143	0.857143
5	3	1	0	0.400000	0.400000	7	1	1	1	1.000000	0.142857
5	3	1	1	1.000000	0.600000	7	2	1	0	0.714286	0.714286
5	3	2	0	0.100000	0.100000	7	2	1	1	1.000000	0.285714
5	3	2	1	0.700000	0.600000	7	2	2	0	0.476190	0.476190
5	3	2	2	1.000000	0.300000	7	2	2	1	0.952381	0.476190
5	3	3	1	0.300000	0.300000	7	2	2	2	1.000000	0.047619
5	3	3	2	0.900000	0.600000	7	3	1	0	0.571429	0.571429
5	3	3	3	1.000000	0.100000	7	3	1	1	1.000000	0.428571
5	4	1	0	0.200000	0.200000	7	3	2	0	0.285714	0.285714
5	4	1	1	1.000000	0.800000	7	3	2	1	0.857143	0.571429
5	4	2	1	0.400000	0.400000	7	3	2	2	1.000000	0.142857
5	4	2	2	0.000000	0.600000	7	3	3	0	0.114286	0.114286
5	4	3	2	0.600000	0.600000	7	3	3	1	0.628571	0.514286
5	4	3	3	1.000000	0.400000	7	3	3	2	0.971428	0.342857
5	4	4	3	0.800000	0.800000	7	3	3	3	1.000000	0.028571
5	4	4	4	1.000000	0.200000	7	4	1	0	0.428571	0.428571
6	1	1	0	0.833333	0.833333	7	4	1	1	1.000000	0.571429
6	1	1	1	1.000000	0.166667	7	4	2	0	0.142857	0.142857
6	2	1	0	0.666667	0.666667	7	4	2	1	0.714286	0.571429
6	2	1	1	1.000000	0.333333	7	4	2	2	1.000000	0.285714
6	2	2	0	0.400000	0.400000	7	4	3	0	0.025571	0.028571
6	2	2	1	0.933333	0.533333	7	4	3	1	0.371429	0.342857
6	2	2	2	1.000000	0.066667	7	4	3	2	0.885714	0.514286
6	3	1	0	0.500000	0.500000	7	4	3	3	1.000000	0.114286

6	3	1	1	1.000000	0.500000	7	4	4	1	0.114286	0.114286
6	3	2	0	0.200000	0.200000	7	4	4	2	0.628571	0.514286

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*	*N*	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
7	4	4	3	0.971428	0342857	8	5	1	1	1.000000	0.625000
7	4	4	4	1.000000	0.028571	8	5	2	0	0.107143	0.107143
7	5	1	0	0.285714	0.285714	8	5	2	1	0.642857	0.5357Í4
7	5	1	1	1.000000	0.714286	8	5	2	2	1.000000	0.357143
7	5	2	0	0.047619	0.047619	8	5	3	0	0.017857	0.017857
7	5	2	1	0.523809	0.476190	8	5	3	1	0.285714	0.267857
7	5	2	2	1.000000	0.476190	8	5	3	2	0.821429	0.535714
7	5	3	1	0.142857	0.142857	8	5	3	3	1.000000	0.178571
7	5	3	2	0.714286	0.571429	8	5	4	1	0.071429	0.071429
7	5	3	3	1.000000	0.285714	8	5	4	2	0.500000	0.428571
7	5	4	2	0.285714	0.285714	8	5	4	3	0.928571	0.428571
7	5	4	3	0.857143	0.571429	8	5	4	4	1.000000	0.071429
7	5	4	4	1.000000	0.142857	8	5	5	2	0.178571	0.178571
7	5	5	3	0.476190	0.476190	8	5	5	3	0.714286	0.535714
7	5	5	4	0.952381	0.476190	8	5	5	4	0.982143	0:267857
7	5	5	5	1.000000	0.047619	8	5	5	5	1.000000	0.017857
7	6	1	0	0.142857	0.142857	8	6	1	0	0.250000	0.250000
7	6	1	1	1.000000	0.857143	8	6	1	1	1.000000	0.750000
7	6	2	1	0.285714	0.285714	8	6	2	0	0.035714	0.035714
7	6	2	2	1.000000	0.714286	8	6	2	1	0.464286	0.428571
7	6	3	2	0.428571	0.428571	8	6	2	2	1.000000	0.535714
7	6	3	3	1.000000	0.571429	8	6	3	1	0.107143	0.107143
7	6	4	3	0.571429	0.571429	8	6	3	2	0.642857	0.535714
7	6	4	4	1.000000	0.428571	8	6	3	3	1.000000	0.357143
7	6	5	4	0.714286	0.714286	*8*	6	4	2	0.214286	0.214286
7	6	5	5	1.000000	0.285714	8	6	4	3	0.785714	0.571429
7	6	6	5	0.857143	0.857143	8	6	4	4	1.000000	0.214286
7	6	6	6	1.000000	0.142857	8	6	5	3	0.357143	0.357143
8	1	1	0	0.875000	0.875000	8	6	5	4	0.892857	0.535714
8	1	1	1	1.000000	0.125000	8	6	5	5	1.000000	0.107143
8	2	1	0	0.750000	0.750000	8	6	6	4	0.535714	0.535714
8	2	1	1	1.000000	0.250000	8	6	6	5	0.964286	0.428571
8	2	2	0	0.535714	0.535714	8	6	6	6	1.000000	0.035714
8	2	2	1	0.964286	0.428571	8	7	1	0	0.125000	0.125000
8	2	2	2	1.000000	0.035714	8	7	1	1	1.000000	0.875000
8	3	1	0	0.625000	0.625000	8	7	2	1	0.250000	0.250000
8	3	1	1	1.000000	0.375000	8	7	2	2	1.000000	0.750000
8	3	2	0	0.357143	0.357143	8	7	3	2	0.375000	0.375000
8	3	2	1	0.892857	0.535714	8	7	3	3	1.000000	0.625000
8	3	2	2	1.000000	0.107143	8	7	4	3	0.500000	0.500000
8	3	3	0	0.178571	0.178571	8	7	4	4	1.000000	0.500000
8	3	1	1	0.714286	0.535714	8	7	5	4	0.625000	0.625000
8	3	3	2	0.982143	0.267857	8	7	5	5	1.000000	0.375000
8	3	3	3	1.000000	0.017857	8	7	6	5	0.750000	0.750000
8	4	1	0	0.500000	0.500000	8	7	6	6	1.000000	0.250000
8	4	1	1	1.000000	0.500000	8	7	7	*6*	0.875000	0.875000
8	4	2	0	0.214286	0.214286	8	7	7	7	1.000000	0.125000
8	4	2	1	0.785714	0.571429	9	1	1	0	0.888889	0.888889
8	4	2	2	1.000000	0.214286	9	1	1	1	1.000000	0.111111
8	4	3	0	0.071429	0.071429	9	2	*1*	0	0.777778	0.777778
8	4	3	1	0.500000	0.428571	9	2	*1*	1	1.000000	0.222222
8	4	3	2	0.928571	0.428571	9	2	2	0	0.583333	0.583333

8	4	3	3	1.000000	0.071429	9	2	2	1	0.972222	0.388889
8	4	4	0	0.014286	0.014286	9	2	2	2	1.000000	0.027778
8	4	4	1	0.242857	0.228571	9	3	1	0	0.666667	0.666667
8	4	4	2	0.757143	0.5142S6	9	3	1	1	1.000000	0.333333
8	4	4	3	0.985714	0.228571	9	3	2	0	0.416667	0.416667
8	4	4	4	1.000000	0.014286	9	3	2	1	0.916667	0.500000
8	5	1	0	0.375000	0.375000	9	3	2	2	1.000000	0.083333

N	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***	***N***	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***
9	3	3	0	0.238095	0.238095	9	7	2	1	0.416667	0.388889
9	3	3	1	0.773809	0.535714	9	7	2	2	1.000000	0.583333
9	3	3	2	0.988095	0.214286	9	7	3	1	0.083333	0.083333
9	3	3	3	1.000000	0.011905	9	7	3	2	0.583333	0.500000
9	4	1	0	0.555556	0.555556	9	7	3	3	1.000000	0.416667
9	4	1	1	1.000000	0.444444	9	7	4	2	0.166667	0.166667
9	4	2	0	0.277778	0.277778	9	7	4	3	0.722222	0.555556
9	4	2	1	0.833333	0.555556	9	7	4	4	1.000000	0.277778
9	4	2	2	1.000000	0.166667	9	7	5	3	0.277778	0.277778
9	4	3	0	0.119048	0.119048	9	7	5	4	0.833333	0.555556
9	4	3	1	0.595238	0.476190	9	7	5	5	1.000000	0.166667
9	4	3	2	0.952381	0.357143	9	7	6	4	0.416667	0.416667
9	4	3	3	1.000000	0.047619	9	7	6	5	0.916667	0.500000
9	4	4	0	0.039683	0.039683	9	7	6	6	1.000000	0.833333
9	4	4	1	0.357143	0.317460	9	7	7	5	0.583333	0.583333
9	4	4	2	0.833333	0.476190	9	7	7	6	0.972222	0.388889
9	4	4	3	0.992063	0.158730	9	7	7	7	1.000000	0.027778
9	4	4	4	1.000000	0.007936	9	8	1	0	0.111111	0.111111
9	5	1	0	0.444444	0.444444	9	8	1	1	1.000000	0.888889
9	5	1	1	1.000000	0.555556	9	8	2	1	0.222222	0.222222
9	5	2	0	0.166667	0.166667	9	8	2	2	1.000000	0.777778
9	5	2	1	0.722222	0.555556	9	8	3	2	0.333333	0.333333
9	5	2	2	1.000000	0.277778	9	8	3	3	1.000000	0.666667
9	5	3	0	0.047619	0.047619	9	8	4	3	0.444444	0.444444
9	5	3	1	0.404762	0.357143	9	8	4	4	1.000000	0.555556
9	5	3	2	0.880952	0.476190	9	8	5	4	0.555556	0.555556
9	5	3	3	1.000000	0.119048	9	8	5	5	1.000000	0.444444
9	5	4	0	0.007936	0.007936	9	8	6	5	0.666667	0.666667
9	5	4	1	0.166667	0.158730	9	8	6	6	1.000000	0.333333
9	5	4	2	0.642857	0.476190	9	8	7	6	0.777778	0.777778
9	5	4	3	0.960317	0.317460	9	8	7	7	1.000000	0.222222
9	5	4	4	1.000000	0.039683	9	8	8	7	0.888889	0.888889
9	5	5	1	0.039683	0.039683	9	8	8	8	1.000000	0.111111
9	5	5	2	0.357143	0.317460	10	1	1	0	0.900000	0.900000
9	5	5	3	0.833333	0.476190	10	1	1	1	1.000000	0.100000
9	5	5	4	0.992063	0.158730	10	2	1	0	0.800000	0.800000
9	5	5	5	1.000000	0.007936	10	2	1	1	1.000000	0.200000
9	6	1	0	0.333333	0.333333	10	2	2	0	0.622222	0.622222
9	6	1	1	1.000000	0.666667	10	2	2	1	0.977778	0.355556
9	6	2	0	0.083333	0.083333	10	2	2	2	1.000000	0.022222
9	6	2	1	0.583333	0.500000	10	3	1	0	0.700000	0.700000
9	6	2	2	1.000000	0.416667	10	3	1	1	1.000000	0.300000
9	6	3	0	0.011905	0.011905	10	3	2	0	0.466667	0.466667
9	6	3	1	0.226190	0.214286	10	3	2	1	0.933333	0.466667
9	6	3	2	0.761905	0.535714	10	3	2	2	1.000000	0.066667
9	6	3	3	1.000000	0.238095	10	3	3	0	0.291667	0.291667

9	6	4	1	0.047619	0.047619	10	3	3	1	0.816667	0.525000
9	6	4	2	0.404762	0.357143	10	3	3	2	0.991667	0.175000
9	6	4	3	0.880952	0.476190	10	3	3	3	1.000000	0.008333
9	6	4	4	1.000000	0.119048	10	4	1	0	0.600000	0.600000
9	6	5	2	0.119048	0.119048	10	4	1	1	1.000000	0.400000
9	6	5	3	0.595238	0.476190	10	4	2	0	0.333333	0.333333
9	6	5	4	0.952381	0.357143	10	4	2	1	0.866667	0.533333
9	6	5	5	1.000000	0.047619	10	4	2	2	1.000000	0.133333
9	6	6	3	0.238095	0.238095	10	4	3	0	0.166667	0.166667
9	6	6	4	0.773809	0.535714	10	4	3	1	0.666667	0.500000
9	6	6	5	0.988095	0.214286	10	4	3	2	0.966667	0.300000
9	6	6	6	1.000000	0.011905	10	4	3	3	1.000000	0.033333
9	7	1	0	0.222222	0.222222	10	4	4	0	0.071429	0.071429
9	7	1	1	1.000000	0.777778	10	4	4	1	0.452381	0.380952
9	7	2	0	0.027778	0.027778	10	4	4	2	0.880952	0.428571

N	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***	***N***	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***
10	4	4	3	0.995238	0.114286	10	6	3	0	0.033333	0.033333
10	4	4	4	1.000000	0.004762	10	6	3	1	0.333333	0.300000
10	5	1	0	0.500000	0.500000	10	6	3	2	0.833333	0.500000
10	5	1	1	1.000000	0.500000	10	6	3	3	1.000000	0.166667
10	5	2	0	0.222222	0.222222	10	6	4	0	0.004762	0.004762
10	5	2	1	0.777778	0.555556	10	6	4	1	0.119048	0.114286
10	5	2	2	1.000000	0.222222	10	6	4	2	0.547619	0.428571
10	5	3	0	0.083333	0.083333	10	6	4	3	0.928571	0.380952
10	5	3	1	0.500000	0.416667	10	6	4	4	1.000000	0.071429
10	5	3	2	0.916667	0.416667	10	6	5	1	0.023810	0.023810
10	5	3	3	1.000000	0.083333	10	6	5	2	0.261905	0.238095
10	5	4	0	0.023810	0.023810	10	6	5	3	0.738095	0.476190
10	5	4	1	0.261905	0.238095	10	6	5	4	0.976190	0.238095
10	5	4	2	0.738095	0.476190	10	6	5	5	1.000000	0.023810
10	5	4	3	0.976190	0.238095	10	6	6	2	0.071429	0.071429
10	5	4	4	1.000000	0.023810	10	6	6	3	0.452381	0.380952
10	5	5	0	0.003968	0.003968	10	6	6	4	0.880952	0.428571
10	5	5	1	0.103175	0.099206	10	6	6	5	0.995238	0.114286
10	5	5	2	0.500000	0.396825	10	6	6	6	1.000000	0.004762
10	5	5	3	0.896825	0.396825	10	7	1	0	0.300000	0.300000
10	5	5	4	0.996032	0.099206	10	7	1	1	1.000000	0.700000
10	5	5	5	1.000000	0.003968	10	7	2	0	0.066667	0.066667
10	6	1	0	0.400000	0.400000	10	7	2	1	0.533333	0.466667
10	6	1	1	1.000000	0.600000	10	7	2	2	1.000000	0.466667
10	6	2	0	0.133333	0.133333	10	7	3	0	0.008333	0.008333
10	6	2	1	0.666667	0.533333	10	7	3	0	0.008333	0.008333
10	6	2	2	1.000000	0.333333						

Tabla A.3 Sumas de probabilidad de Poisson $\sum_{x=0}^{r} p(X;\lambda)$

	λ								
r	**0.1**	**0.2**	**0.30**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

	λ								
r	**1.0**	**1.5**	**2.0**	**2.5**	**3.0**	**3.5**	**4.0**	**4.5**	**5.0**
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

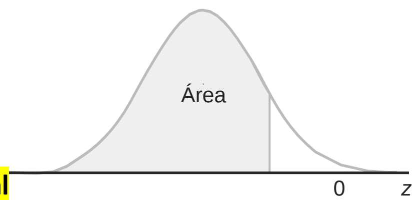
	λ								
r	**5.5**	**6.0**	**6.5**	**7.0**	**7.5**	**8.0**	**8.5**	**9.0**	**9.5**
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20						0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996

	λ								
r	**10.0**	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989
24	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317

	λ								
r	**10.0**	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989
24	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317
25		0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554
26		1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718
27			0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827
28			1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897

29				1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941
30					0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967
31					1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982
32						1.0000	0.9999	0.9996	0.9990
33							0.9999	0.9998	0.9995
34							1.0000	0.9999	0.9998
35								1.0000	0.9999
36									0.9999
37									1.0000

Tabla A.4 Áreas bajo la curva normal



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

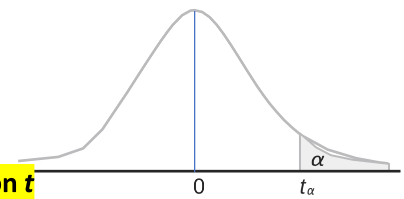


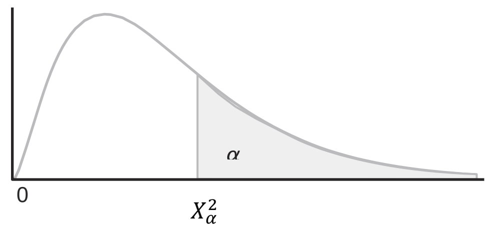
Tabla A.5.Valores críticos de la distribución *t*

	α						
v	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

Tabla A.5 (*continuación*) Valores críticos de la distribución *t*

	α						
v	**0.02**	**0.015**	**0.01**	**0.0075**	**0.005**	**0.0025**	**0.0005**
1	15.894	21.205	31.821	42.433	63.656	127.321	636.578
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.600
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.689
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.660
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.290

Tabla A.6 Valores críticos de la distribución chi cuadrada



	α									
v	**0.995**	**0.99**	**0.98**	**0.975**	**0.95**	**0.90**	**0.80**	**0.75**	**0.70**	**0.50**
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3628	0.0^3982	0.00393	0.0158	0.0642	0.102	0.148	0.455
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.575	0.713	1.386
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	1.213	1.424	2.366
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	1.923	2.195	3.357
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	2.675	3.000	4.351
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	3.455	3.828	5.348
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	4.255	4.671	6.346
8	1.344	1.647	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	5.071	5.527	7.344
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	5.899	6.393	8.343
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	6.737	7.267	9.342
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	7.584	8.148	10.341
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	8.438	9.034	11.340
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.041	8.634	9.299	9.926	12.340
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	10.165	10.821	13.339
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	11.037	11.721	14.339
16	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	11.912	12.624	15.338
17	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	12.792	13.531	16.338
18	6.265	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	13.675	14.440	17.338
19	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	14.562	15.352	18.338
20	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	15.452	16.266	19.337
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	16.344	17.182	20.337
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	17.240	18.101	21.337
23	9.260	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	17.187	18.137	19.021	22.337
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	19.037	19.943	23.337
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	19.939	20.867	24.337
26	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	20.843	21.792	25.336
27	11.808	12.878	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	21.749	22.719	26.336
28	12.461	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	22.657	23.647	27.336
29	13.121	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	23.567	24.577	28.336
30	13.787	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	24.478	25.508	29.336
40	20.707	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	32.345	33.66	34.872	39.335
50	27.991	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	41.449	42.942	44.313	49.335
60	35.534	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	50.641	52.294	53.809	59.335

	α									
v	**0.30**	**0.25**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321
8	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588
11	12.899	13.701	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264
12	14.011	14.845	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909
13	15.119	15.984	16.985	19.812	22.362	24.736	25.471	27.688	29.819	34.527
14	16.222	17.117	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.124
15	17.322	18.245	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.698
16	18.418	19.369	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252
17	19.511	20.489	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.791
18	20.601	21.605	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312
19	21.689	22.718	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.819
20	22.775	23.828	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.314
21	23.858	24.935	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.796
22	24.939	26.039	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268
23	26.018	27.141	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728
24	27.096	28.241	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179
25	28.172	29.339	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.619
26	29.246	30.435	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	54.051
27	30.319	31.528	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963	49.645	55.475
28	31.391	32.620	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.994	56.892
29	32.461	33.711	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.335	58.301
30	33.530	34.800	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.702
40	44.165	45.616	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.691	66.766	73.403
50	54.723	56.334	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490	86.660
60	65.226	66.981	68.972	74.397	79.082	83.298	84.58	88.379	91.952	99.608

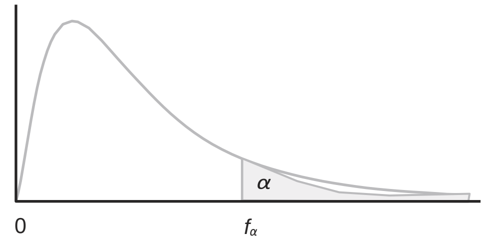


Tabla A.7. Valores críticos de la distribución *F*

$$f_{0,05(\nu_1,\nu_2)}$$

	ν_1								
ν_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

$$f_{0,05(\nu_1,\nu_2)}$$

	ν_1									
ν_2	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

$f_{0,01(\nu_1,\nu_2)}$

	ν_1								
ν_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

$f_{0,01(\nu_1,\nu_2)}$

	ν_1									
ν_2	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	6055.85	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00