Tutorial I

1. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:
   a. El conjunto de los vectores $H = \{(x, y, 1): x, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ con las operaciones usuales.

Solución $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$(x, y, 1), (v, w, 1) \in H$,

$(x, y, 1) + (v, w, 1) = (x+v, y+w, 1+1) = (x+v, y+w, 2) \notin H$

H no es un subespacio vectorial no cumple la condición 1 de subespacio.

Falso

   b. Sea $V = M_{2\times2}$ y $H = \{A \in M_{2\times2}: A \text{ es simétrica}\}$, entonces H es un subespacio de V (Verdadero)

A es simétrica $a_{ij} = a_{ji}$ $i \neq j$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

1) $A, B \in H \Rightarrow A + B \in H$

2) $\alpha \in \mathbb{R}, A \in H \Rightarrow \alpha A \in H$

3) $H \neq \emptyset$

Consideramos $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in H$

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix} \in H$

se cumple condición 1

2) Consideramos $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{pmatrix} \in H$

Se cumple condición 2

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$

c. El conjunto $W = \{p = ax^2 + bx + c : b^2 - 4ac \geq 0\}$ no es un subespacio vectorial de P_2

Verdadero: Ejemplo $p1 = x^2+4x+3 \in W$ porque $4^2 - 4(1)(3) = 4 \geq 0$

$16 - 12 = 4 > 0$

y $p2 = x^2 - 2x - 2 \in W$

$(-2)^2 - 4(1)(-2) = 12 \geq 0$. Pero

$p1 + p2 = 2x^2 + 2x + 1 \notin W$

$2^2 - 4(2)(1) = -4 < 0$

Así W no es un subespacio vectorial

d. En $V = P_2$ el conjunto $B = \{1 - x, 2 + x - x^2, x^2 - 1\}$ es linealmente independiente (Verdadero)

Buscamos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha(1-x) + \beta(2+x-x^2) + \gamma(x^2-1) = 0$

$\alpha - \alpha x + 2\beta + \beta x - \beta x^2 + \gamma x^2 - \gamma = 0$

$(-\beta x^2 + \gamma x^2) + (-\alpha x + \beta x) + \alpha + 2\beta - \gamma = 0$

$(-\beta + \gamma)x^2 + (-\alpha + \beta)x + \alpha + 2\beta - \gamma = 0x^2 + 0x + 0$

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$R_{13} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = \rho(A_a) = 3$

$n = 3$

El sistema compatible determinado

$\alpha = \beta = \gamma = 0$. B es LI.

e. El conjunto $B = \{(1,1), (2,1), (4,2)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$ (Verdadera)

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$(a,b) = x(1,1) + y(2,1) + z(4,2)$

$x(1,1) + y(2,1) + z(4,2) = (a,b)$

$(x,x) + (2y,y) + (4z,2z) = (a,b)$

$(x + 2y + 4z, x + y + 2z) = (a,b)$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = a \\ x + y + 2z = b \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -1 & -2 & b-a \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & a-b \end{array}\right)$$

$\rho(Aa) = 2 = \rho(A)$ $\quad n = 3$, sistema es <u>compatible</u> indeterminado

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= a \\ y + 2z &= a-b \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= a - 2y - 4z \\ y &= a - b - 2z \end{aligned}$$

si $z = 0$, $y = a-b$ $\quad x = a - 2(a-b) - 0 = a - 2a + 2b$

$x = -a + 2b$

$(1,2) \Rightarrow x = -1 + 2(2) = 3 \quad y = 1 - 2 = -1 \quad z = 0$

$(1,2) = 3(1,1) - 1(2,1) + 0(4,2)$ ✓

Otro Ejemplo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right) \longrightarrow \rho(A) = 1 \quad \rho(Aa) = \begin{cases} \text{si } b = 0 & \rho(Aa) = 1 \checkmark \text{ Comp} \\ \text{si } b \neq 0 & \rho(Aa) = 2 \text{ Incompa} \end{cases}$

f. El conjunto $B = \{(1,2,3), (4,8,4), (-1,-2,-8)\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$ (Falso)

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ Base canónica $= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$\text{Dim } \mathbb{R}^3 = 3 \qquad \text{Dim } \mathbb{R}^n = n$

$\text{Dim } P_n = n+1$

$\text{Dim } P_2 = 3$

Buscamos α, β, γ para ver si B es LI

$\alpha(1,2,3) + \beta(4,8,4) + \gamma(-1,-2,-8) = (0,0,0)$

$(\alpha + 4\beta - \gamma, 2\alpha + 8\beta - 2\gamma, 3\alpha + 4\beta - 8\gamma) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta - \gamma &= 0 \\ 2\alpha + 8\beta - 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta - 8\gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gaussiano}]{\text{Eliminación de Gauss-Jordan}}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = 2 \qquad \rho(Aa) = 2 \qquad n = 3$

compatible indeterminado, B no es LI

B no es Base

g. El conjunto $B = \{1 - x, 1 + x^2\}$ es una base para P_2 (Falso)

$\text{Dim } P_2 = 3$, B tiene dos elementos no puede ser base

h. Si $T: V \to W$ es una transformación lineal y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ son linealmente independientes, entonces $T(v_1), T(v_2)$ son también linealmente independientes Falso

1) $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$

2) $T(\alpha \vec{v}_1) = \alpha T(\vec{v}_1)$

$N_u(T) = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$ nulidad $\Rightarrow \text{Dim}(N_u T) \leq \text{Dim} V$

$\text{Im}(T) = \{Tv : v \in V\}$ rango $\Rightarrow \text{Dim}(\text{Im} T) \leq \text{Dim} W$

$\text{Dim} V =$ nulidad + rango

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son LI $\Rightarrow Tv_1, Tv_2$ LI

Falso: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 2x)$

$$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2))$$
$$= (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$$
$$= (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2)$$
$$= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$$

$$T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, 2\alpha x) = \alpha(x, 2x) = \alpha T(x, y)$$

$v_1 = (1, 0)$ $v_2 = (0, 1)$ L.I

$T(1, 0) = (1, 2)$ $T(0, 1) = (0, 0)$

$\{(1, 2), (0, 0)\}$ no son L I

i. En $C[0,1]$ las funciones e^x, e^{-x} son linealmente independientes (verdadero)

$C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ Dimensión Infinita

$e^x, e^{-x} \in C[0,1]$

$\alpha e^x + \beta e^{-x} = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\alpha e^0 + \beta e^{-0} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$

$\alpha e^1 + \beta e^{-1} = 0 \Rightarrow \alpha e + \beta e^{-1} = 0 \Rightarrow \alpha e = \beta e^{-1} \Rightarrow \beta e^{-2} = -\beta$

$\alpha = \frac{\beta e^{-1}}{e} = \beta e^{-2} \Rightarrow \beta + \beta e^{-2} = 0$

$\beta(1 + e^{-2}) = 0$

$\beta = 0$

$\alpha = 0e^{-2} = 0$
unica solución $\alpha = \beta = 0$

j. En toda transformación lineal el núcleo de la transformación es el vector nulo ✓
(Revisen) Falso.

2. Describa el espacio generado por los vectores $\begin{pmatrix}-5\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$

3. Halle una base para el conjunto solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 8y - 10z = 0 \end{cases}$$

4. Determine si la siguientes transformaciones son lineales, en caso de serlo determine su núcleo, imagen, nulidad y rango.
   a. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (2x, y + z)$
   b. $T: C[0,1] \to C[0,1], Tf(x) = f(x) + 1$

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x, y, z) = (2x, Y + Z)$

1) $(x_1, Y_1, Z_1), (x_2, Y_2, Z_2) \in \mathbb{R}^3$

$T((x_1, Y_1, Z_1) + (x_2, Y_2, Z_2)) = T(x_1 + x_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2)$
$= (2(x_1 + x_2), Y_1 + Y_2 + Z_1 + Z_2)$

$T(x_1, Y_1, Z_1) + T(x_2, Y_2, Z_2) = (2x_1, Y_1 + Z_1) + (2x_2, Y_2 + Z_2)$

$= (2x_1 + 2x_2, Y_1 + Z_1 + Y_2 + Z_2)$
$= (2(x_1 + x_2), Y_1 + Y_2 + Z_1 + Z_2)$
$= T((x_1, Y_1, Z_1) + (x_2, Y_2, Z_2))$ ✓

2) $\alpha \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$T(\alpha(x, y, z)) = T(\alpha x, \alpha Y, \alpha Z) = (2\alpha x, \alpha Y + \alpha Z)$
$= \alpha(2x, Y + Z) = \alpha T(x, Y)$

T es T.L

$N_u(T) = \{(x, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0)\}$

$= (0, 0)$

$T(x,y,z) = (0,0)$

$(2x, y+z) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible

$\rho(A) = \rho(Aa) = 2 \quad n = 3$

Indeterminado

$$\begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -z \end{array}$$

$Nu(T) = \{(x,y,z) : x = 0 \text{ y } y = -z\}$

$(x,y,z) = (0,-z,z) = z(0,-1,1)$

$Nu(T) = Gen\{(0,-1,1)\}$ por lo tanto $Dim(Nu) = 1$

es decir Nulidad $= 1$

<u>Rango T</u> $= Dim\, \mathbb{R}^3 -$ Nulidad

$= 3 - 1 = 2$ ✓

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Rango es la dimensión de $Im(T)$. Como $\underbrace{Im(T)}_{Dim\ 2} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^2}_{Dim\ 2}$

$Im(T) = \mathbb{R}^2$

$Im(T) = \{T(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2x, y+z) : x,y,z \in \mathbb{R}$

✓ $(2x, y+z) = (2x, 0) + (0, y) + (0, z)$

$= \underbrace{x(2,0) + y(0,1) + z(0,1)}$

Base para $Im(T)$ es $B = \{(2,0),(0,1)\}$

$Dim(Im\,T) = 2$ ✓ $\quad \rho(T) = 2$ ✓

T es sobreyectiva pero no es inyectiva

$Im(T) = \mathbb{R}^2 \qquad Nu(T) \neq \{\vec{0}\}$

solución:

b) $T : C[0,1] \to C[0,1]$

$T\,f(x) = f(x) + 1$

$f(x) = e^x$

$T(e^x) = e^x + 1$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$T \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x + 1$

i) $f, g \in C[0,1]$, $T(f(x) + g(x)) = Tf(x) + Tg(x)$

$T(f(x) + g(x)) = f(x) + g(x) + 1$

$T(f(x)) + T(g(x)) = f(x) + 1 + g(x) + 1$

$= f(x) + g(x) + 2$

$T(f(x) + g(x)) \neq Tf(x) + Tg(x)$

falla condición 1, T no es transformación lineal.