Ejercicio 43 (página 35 del contenido de la semana)

$$(2x + tan\,(y))\,dx + \left(x - x^2 tan\,(y)\right)dy = 0$$

De la ecuación diferencial se tiene que $M = 2x + tan\,(y)$ y que $N = x - x^2 tan\,(y)$.
Al verificar, se tiene una E.D no Exacta, ya que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = sec^2\,(y) \qquad y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2xtan\,(y)$$

Utilizamos el teorema 36 en su parte c, para hallar un factor integrante, esto es:

$$\mu\,(y) = e^{\int f(y)dy}$$

donde:

$$f\,(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{1 - 2xtan\,(y) - sec^2\,(y)}{2x + tan\,(y)} = \frac{1 - 2xtan\,(y) - \left[1 + tan^2\,(y)\right]}{2x + tan\,(y)}$$

$$f\,(y) = \frac{1 - 2xtan\,(y) - 1 - tan^2\,(y)}{2x + tan\,(y)} = \frac{-tan\,(y)\,[2x + tan\,(y)]}{2x + tan\,(y)} = -tan\,(y)$$

Luego:

$$\mu\,(y) = e^{\int f(y)dy} = e^{\int -tan(y)dy} = e^{-(-ln(cos(y)))} = e^{ln(cos(y))} = cos\,(y)$$

Al multiplicar la ecuación diferencial original por el factor integrante, nos quedaría una Ecuación Diferencial Exacta:

$$(2xcos\,(y) + cos\,(y)\,tan\,(y))\,dx + \left(xcos\,(y) - x^2 cos\,(y)\,tan\,(y)\right)dy = 0$$

$$(2xcos\,(y) + sen\,(y))\,dx + \left(xcos\,(y) - x^2 sen\,(y)\right)dy = 0$$

De lo anterior se tiene que $M' = 2xcos\,(y) + sen\,(y)$ y que $N' = xcos\,(y) - x^2 sen\,(y)$.
Al verificar, se cumple que: $\frac{\partial M'}{\partial y} = \frac{\partial N'}{\partial x}$

$$\frac{\partial M'}{\partial y} = -2xsen\,(y) + cos\,(y) = \frac{\partial N'}{\partial x}$$

La solución general de la ED, sería:

$$U\,(x, y) = K$$

Para este caso, se cumple que $U_x\,(x, y) = M'$ y $U_y\,(x, y) = N'$.
Para encontrar la función $U\,(x, y)$ empezamos por integrar la función respecto $U_x\,(x, y)$ de x.

$$U\,(x, y) = \int U_x\,(x, y)\,dx = \int [2xcos\,(y) + sen\,(y)]\,dx = x^2 cos\,(y) + xsen\,(y) + h\,(y)$$

Con el fin de encontrar el valor de $h\,(y)$, derivamos a la función $U\,(x, y)$ respecto de "y", y posteriormente igualamos el resultado con N':

$$U_y\,(x, y) = -x^2 sen\,(y) + xcos\,(y) + h'\,(y) = xcos\,(y) - x^2 sen\,(y)$$

$$h'\,(y) = 0 \Rightarrow h\,(y) = C$$

Sustituyendo el resultado encontrado, se tiene la solución de la ecución diferencial solicitada:

$$U\,(x, y) = K$$

$$x^2 cos\,(y) + xsen\,(y) + C = K$$

$$\boldsymbol{x^2 cos\,(y) + xsen\,(y) = \alpha}, \qquad con\ \alpha = K - C$$

Ejercicio 46 (página 38 del contenido de la semana)

$$yln\left(y\right)dx-\left(x-ln\left(y\right)\right)dy=0$$

Al despejar, se tiene:

$$x'-\frac{1}{yln\left(y\right)}x=-\frac{ln\left(y\right)}{yln\left(y\right)}$$
$$x'-\frac{1}{yln\left(y\right)}x=-\frac{1}{y}$$

Lo anterior, representa una E.D. Lineal de primer orden, donde $P\left(y\right)=-\frac{1}{yln(y)}$ y $Q\left(y\right)=-\frac{1}{y}$.

La fórmula no es recomendable que se la aprendan, para resolver una ecuación de este tipo, solo tenemos que seguir los siguientes pasos:

1. Encontrar el Factor integrante, para esta ecuación diferencial sería:

$$\mu\left(y\right)=e^{\int P(y)dy}=e^{-\int\frac{dy}{yln(y)}}=e^{-ln(ln(y))}=e^{ln(ln(y))^{-1}}=\left(ln\left(y\right)\right)^{-1}=\frac{1}{ln\left(y\right)}$$

2. Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$\frac{1}{ln\left(y\right)}x'-\frac{1}{yln^2\left(y\right)}x=-\frac{1}{yln\left(y\right)}$$

3. El lado izquierdo de la igualdad puede describirse como:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x\cdot\frac{1}{ln\left(y\right)}\right]=-\frac{1}{yln\left(y\right)}$$

4. Al integrar ambos miembros nos quedaría, respecto de "y":

$$\int\frac{\partial}{\partial y}\left[x\cdot\frac{1}{ln\left(y\right)}\right]dy=-\int\frac{1}{yln\left(y\right)}dy$$
$$x\cdot\frac{1}{ln\left(y\right)}=-ln\left(ln\left(y\right)\right)+K$$

5. Despejamos el valor de x en el resultado obtenido:

$$\boldsymbol{x=ln\left(y\right)\left[-ln\left(ln\left(y\right)\right)+K\right]}$$

Si resolvemos esa misma ecuación diferencial $x'-\frac{1}{yln(y)}x=-\frac{1}{y}$ con la fórmula que se encuentra en la guía, veremos el mismo resultado:

$$x=e^{-\int P(y)dy}\cdot\left[\int Q\left(y\right)e^{\int P(y)dy}dy+K\right]$$

de la ecuación diferencial sabemos que $P\left(y\right)=-\frac{1}{yln(y)}$ y $Q\left(y\right)=-\frac{1}{y}$, luego:

$$x=e^{-\int-\frac{1}{yln(y)}dy}\cdot\left[\int-\frac{1}{y}e^{-\int\frac{1}{yln(y)}dy}dy+K\right]$$
$$x=e^{\int\frac{1}{yln(y)}dy}\cdot\left[-\int\frac{1}{y}e^{-\int\frac{1}{yln(y)}dy}dy+K\right]$$
$$x=e^{ln(ln(y))}\cdot\left[-\int\frac{1}{y}e^{-ln(ln(y))}dy+K\right]$$
$$x=ln\left(y\right)\cdot\left[-\int\frac{1}{yln\left(y\right)}dy+K\right]$$
$$x=ln\left(y\right)\cdot\left[-ln\left(ln\left(y\right)\right)+K\right]$$

Determinar el valor de la función $M(x,y)$ para que la ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

sea exacta, posteriormente resuelva dicha ecuación

Solución

Para que una ED sea exacta, debe cumplir:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Partiendo del valor de $N(x,y)$ en la ED dada, se tiene que:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y + \frac{1}{y} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

El valor de $M(x,y)$ viene dado por:

$$M(x,y) = \int \left[e^{xy} + xye^{xy} + 2y + \frac{1}{y}\right]dy = \frac{1}{x}e^{xy} + ye^{xy} - \frac{1}{x}e^{xy} + y^2 + ln(y) = ye^{xy} + y^2 + ln(y)$$

Luego la Ecuación Diferencial solicitada quedaría como:

$$\left(ye^{xy} + y^2 + ln(y)\right)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

Comprobando si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y + \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y + \frac{1}{y}$$

La solución de la ecuación diferencial viene dada por:

$$U(x,y) = 0$$

donde debe cumplirse que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$$

Hallando la función $U(x,y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$$
$$U(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$
$$U(x,y) = \int \left[ye^{xy} + y^2 + ln(y)\right]dx + g(y)$$
$$U(x,y) = e^{xy} + xy^2 + xln(y) + g(y)$$

Derivando $U(x,y)$ respecto a y:

$$U_y(x,y) = xe^{xy} + 2xy + \frac{x}{y} + g'(y) = N(x,y) = xe^{xy} + 2xy + \frac{x}{y}$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = K$$

La solución de la ecuación diferencial solicitada es:

$$U(x,y) = e^{xy} + xy^2 + xln(y) + K$$

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(x-y+1)\,dy-(x+y-1)\,dx=0$$

Solución

Observamos que la ecuación diferencial es no homogéna, pero a través de un cambio de variable puede convertirse en homogénea.

$$y'=\frac{x+y-1}{x-y+1}$$

Sean:

$$\begin{cases} l_1: & x+y-1 \\ l_2: & x-y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1=-1 \\ m_2=1 \end{cases}$$

Vemos que las rectas se cortan en el punto $(0,1)$. Por lo que el cambio de variable para reducirla a homogénea es:

$$\begin{cases} t=x-0=x \\ z=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dz=dy \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{t+z+1-1}{t-(z+1)+1}=\frac{t+z+1-1}{t-(z+1)+1}=\frac{t+z}{t-z}=\frac{1+\frac{z}{t}}{1-\frac{z}{t}}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1+\frac{z}{t}}{1-\frac{z}{t}}$$

Vemos que la ecuación diferencial es homogénea, por lo que:

$$u=\frac{z}{t}\Rightarrow z=ut;\quad \frac{dz}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

Sustituyendo en la ED:

$$u+t\frac{du}{dt}=\frac{1+u}{1-u}$$

$$\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{dt}{t}$$

$$arctan\,(u)-ln\left(\sqrt{u^2+1}\right)=ln\,(t)+K$$

$$arctan\left(\frac{z}{t}\right)-ln\left(\sqrt{\left(\frac{z}{t}\right)^2+1}\right)=ln\,(t)+K$$

$$arctan\left(\frac{y-1}{x}\right)-ln\left(\sqrt{\left(\frac{y-1}{x}\right)^2+1}\right)=ln\,(x)+K$$

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$2y^2dx = \left(2xy - x^3\right)dy$$

Solución

Observamos que podemos reescribir la ED, de la forma:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xy - x^3}{2y^2} = \frac{x}{y} - \frac{x^3}{2y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = \frac{x^3}{2y^2} \qquad \text{Ecuación Diferencial de Bernoulli con n=3}$$

$$x^{-3}\frac{dx}{dy} - \frac{x^{-2}}{y} = \frac{1}{2y^2}$$

Realizando el cambio de variable:

$$z = x^{1-n} = x^{1-3} = x^{-2}$$

$$\frac{dz}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy} \Rightarrow x^{-3}\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}$$

Luego, la ED se transforma en:

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = \frac{1}{2y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{2}{y}z = -\frac{1}{y^2}$$

La anterior, es una ecuación diferencial lineal de primer orden, con $P\left(y\right) = \frac{2}{y}$ y $Q\left(y\right) = -\frac{1}{y^2}$
Por tanto, la solución general viene dada por:

$$z = e^{-\int P(y)dy} \cdot \left[\int Q\left(y\right)e^{-\int P(y)dy}dy + K\right]$$

$$z = e^{-\int \frac{2}{y}dy} \cdot \left[\int \left[-\frac{1}{y^2}e^{-\int \frac{2}{y}dy}\right]dy + K\right]$$

$$z = e^{-2ln(y)} \cdot \left[\int \left[-\frac{1}{y^2}e^{-2ln(y)}\right]dy + K\right]$$

$$z = e^{ln\left(y^{-2}\right)} \cdot \left[\int \left[-\frac{1}{y^2}e^{ln\left(y^{-2}\right)}\right]dy + K\right]$$

$$z = y^{-2} \cdot \left[\int \left[-\frac{1}{y^2}y^{-2}\right]dy + K\right]$$

$$z = y^{-2} \cdot \left[\int \left[-y^{-4}\right]dy + K\right]$$

$$z = y^{-2} \cdot \left[-\frac{y^{-3}}{-3} + K\right]$$

$$z = \frac{y^{-5}}{3} + Ky^{-2}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{3y^5} + \frac{K}{y^2}$$

$$x = \left(\frac{1}{3y^5} + \frac{K}{y^2}\right)^{-1/2}$$

Resuelva la ecuación diferencial

$$(1 + sen\,(y))\,dx = [2ycos\,(y) - x\,(sec\,(y) + tan\,(y))]\,dy$$

Solución

Reordenando la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{sec\,(y) + tan\,(y)}{1 + sen\,(y)}x = \frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{\frac{1}{cos(y)} + \frac{sen(y)}{cos(y)}}{1 + sen\,(y)}x = \frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{\frac{1+sen(y)}{cos(y)}}{1 + sen\,(y)}x = \frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{cos\,(y)}x = \frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}$$

La anterior, es una ecuación diferencial lineal de primer orden, con $P\,(y) = sec\,(y)$ y $Q\,(y) = \frac{2ycos(y)}{1+sen(y)}$

Por tanto, la solución general viene dada por:

$$x = e^{-\int P(y)dy} \cdot \left[\int Q\,(y)\,e^{\int P(y)dy}dy + K\right]$$

$$x = e^{-\int sec(y)dy} \cdot \left[\int \left(\frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}\right) e^{\int sec(y)dy}dy + K\right]$$

$$x = e^{-ln(sec(y)+tan(y))} \cdot \left[\int \left(\frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}\right) e^{ln(sec(y)+tan(y))}dy + K\right]$$

$$x = (sec\,(y) + tan\,(y))^{-1} \cdot \left[\int \left(\frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}\right) (sec\,(y) + tan\,(y))\,dy + K\right]$$

$$x = \frac{1 + sen\,(y)}{cos\,(y)} \cdot \left[\int \left(\frac{2ycos\,(y)}{1 + sen\,(y)}\right) \left(\frac{1 + sen\,(y)}{cos\,(y)}\right) dy + K\right]$$

$$x = \frac{1 + sen\,(y)}{cos\,(y)} \cdot \left[\int 2ydy + K\right]$$

$$x = \frac{1 + sen\,(y)}{cos\,(y)} \cdot \left[y^2 + K\right]$$