

15.5 Superficies paramétricas

- Comprender la definición y esbozar la gráfica de una superficie paramétrica.
- Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una superficie.
- Hallar un vector normal y un plano tangente a una superficie paramétrica.
- Hallar el área de una superficie paramétrica.

Superficies paramétricas

Ya se sabe representar una curva en el plano o en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o, equivalentemente, por una función vectorial.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Curva en el plano.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Curva en el espacio.

En esta sección se aprenderá a representar una superficie en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o mediante una función vectorial. Obsérvese que en el caso de las curvas, la función vectorial \mathbf{r} es función de un *solo* parámetro t . En el caso de las superficies, la función vectorial es función de *dos* parámetros u y v .

DEFINICIÓN DE SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sean x , y y z funciones de u y v , continuas en un dominio D del plano uv . Al conjunto de puntos (x, y, z) dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Superficie paramétrica.

se le llama una **superficie paramétrica**. Las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad y \quad z = z(u, v)$$

Ecuaciones paramétricas.

son las **ecuaciones paramétricas** para la superficie.

Si S es una superficie paramétrica dada por la función vectorial \mathbf{r} , entonces S es trazada por el vector posición $\mathbf{r}(u, v)$ a medida que el punto (u, v) se mueve por el dominio D , como se indica en la figura 15.35.

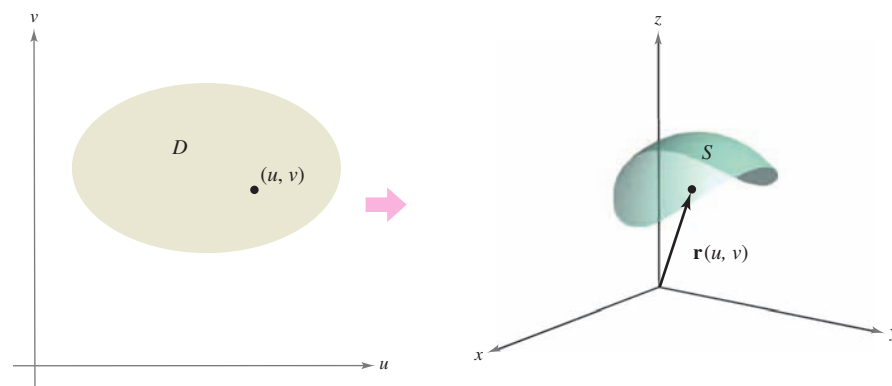


Figura 15.35

TECNOLOGÍA Algunos sistemas algebraicos por computadora dibujan superficies paramétricas. Si se tiene acceso a este tipo de software, utilícese para representar gráficamente algunas de las superficies de los ejemplos y ejercicios de esta sección.

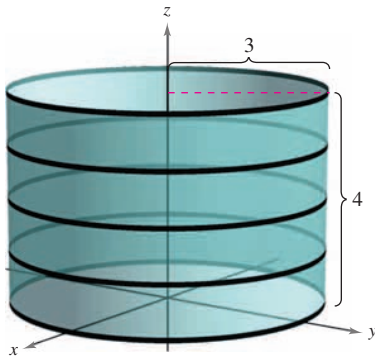


Figura 15.36

EJEMPLO 1 Trazado de una superficie paramétrica

Identificar y dibujar la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos u \mathbf{i} + 3 \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 4$.

Solución Como $x = 3 \cos u$ y $y = 3 \sin u$, se sabe que en cada punto (x, y, z) de la superficie, x y y están relacionados mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 3^2$. En otras palabras, cada sección transversal de S , paralela al plano xy , es una circunferencia de radio 3, centrado en el eje z . Como $z = v$, donde $0 \leq v \leq 4$, se ve que la superficie es un cilindro circular recto de altura 4. El radio del cilindro es 3, y el eje z forma el eje del cilindro, como se muestra en la figura 15.36.

Como ocurre con las representaciones paramétricas de curvas, las representaciones paramétricas de superficies no son únicas. Es decir, hay muchos conjuntos de ecuaciones paramétricas que podrían usarse para representar la superficie mostrada en la figura 15.36.

EJEMPLO 2 Trazado de una superficie paramétrica

Identificar y dibujar una superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \sin u \cos v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución Para identificar la superficie, se puede tratar de emplear identidades trigonométricas para eliminar los parámetros. Después de experimentar un poco, se descubre que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\sin u \cos v)^2 + (\sin u \sin v)^2 + (\cos u)^2 \\ &= \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \\ &= \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así pues, cada punto en S se encuentra en la esfera unitaria o esfera unidad, centrada en el origen, como se muestra en la figura 15.37. Para $u = d_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ traza circunferencias de latitud

$$x^2 + y^2 = \sin^2 d_i, \quad 0 \leq d_i \leq \pi$$

paralelos al plano xy , y para $v = c_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ traza semicírculos de longitud (o meridianos).

NOTA Para convencerse de que la función vectorial del ejemplo 2 traza toda la esfera unitaria o esfera unidad, recuérdese que las ecuaciones paramétricas

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, describen la conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares, como se vio en la sección 11.7.

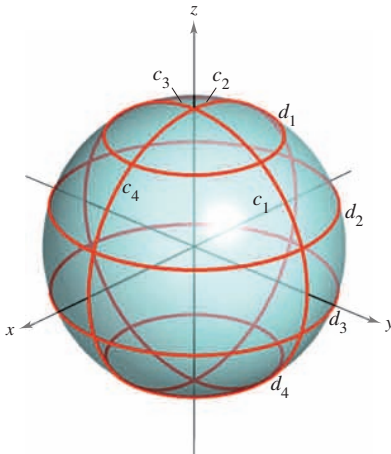


Figura 15.37

Ecuaciones paramétricas para superficies

En los ejemplos 1 y 2 se pidió identificar la superficie descrita por un conjunto dado de ecuaciones paramétricas. El problema inverso, el de asignar un conjunto de ecuaciones paramétricas a una superficie dada, es generalmente más difícil. Sin embargo, un tipo de superficie para la que este problema es sencillo, es una superficie dada por $z = f(x, y)$. Tal superficie se puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 3 Representar una superficie paraméricamente

Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para el cono dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

como el que se muestra en la figura 15.38.

Solución Como esta superficie está dada en la forma $z = f(x, y)$, se pueden tomar x y y como parámetros. Entonces el cono se representa por la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$$

donde (x, y) varía sobre todo el plano xy .

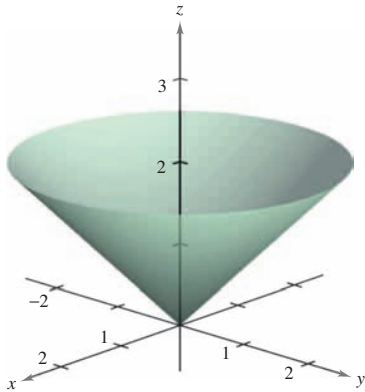


Figura 15.38

Otro tipo de superficie fácil de representar paraméricamente es una superficie de revolución. Por ejemplo, para representar la superficie generada por revolución de la gráfica de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x , se utiliza

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v, \quad z = f(u) \sin v$$

donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

EJEMPLO 4 Representación de una superficie de revolución paraméricamente

Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida al hacer girar

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 10$$

en torno al eje x .

Solución Utilizar los parámetros u y v como se describió arriba para obtener

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v = \frac{1}{u} \cos v, \quad z = f(u) \sin v = \frac{1}{u} \sin v$$

donde $1 \leq u \leq 10$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. La superficie resultante es una porción de la *trompeta de Gabriel*, como se muestra en la figura 15.39.

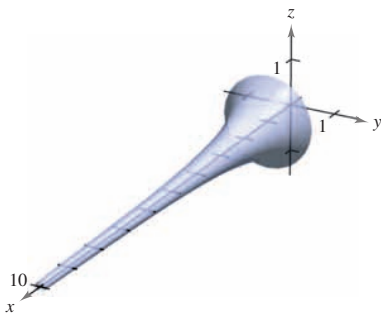


Figura 15.39

La superficie de revolución del ejemplo 4 se forma haciendo girar la gráfica de $y = f(x)$ en torno al eje x . Para otros tipos de superficies de revolución, puede usarse una parametrización similar. Por ejemplo, para parametrizar la superficie formada por revolución de la gráfica de $x = f(z)$ en torno al eje z , se puede usar

$$z = u, \quad x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v.$$

Vectores normales y planos tangentes

Sea S una superficie paramétrica dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

sobre una región abierta D tal que x , y y z tienen derivadas parciales continuas en D . Las **derivadas parciales de \mathbf{r}** con respecto a u y v están definidas como

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}.$$

Cada una de estas derivadas parciales es una función vectorial que puede interpretarse geoméricamente en términos de vectores tangentes. Por ejemplo, si $v = v_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u, v_0)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_1 que se encuentra en la superficie S . El vector tangente a C_1 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 15.40. De manera similar, si $u = u_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_2 que se encuentra en la superficie S . El vector tangente a C_2 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

Si el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ no es $\mathbf{0}$ para todo (u, v) en D , se dice que la superficie S es **suave** y tendrá un plano tangente. De manera informal, una superficie suave es una superficie que no tiene puntos angulosos o cúspides. Por ejemplo, esferas, elipsoides y paraboloides son suaves, mientras que el cono del ejemplo 3 no es suave.

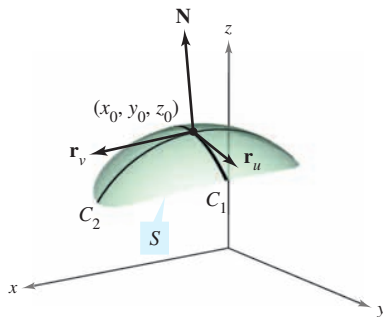


Figura 15.40

VECTOR NORMAL A UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA SUAVE

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv . Sea (u_0, v_0) un punto en D . Un vector normal en el punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

está dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

NOTA La figura 15.40 muestra el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. El vector $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$ también es normal a S y apunta en la dirección opuesta. ■

EJEMPLO 5 Hallar un plano tangente a una superficie paramétrica

Hallar una ecuación para el plano tangente al paraboloide dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$$

en el punto $(1, 2, 5)$.

Solución El punto en el plano uv que es llevado al punto $(x, y, z) = (1, 2, 5)$ es $(u, v) = (1, 2)$. Las derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}.$$

El vector normal está dado por

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

lo cual implica que el vector normal en $(1, 2, 5)$ es $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por tanto, una ecuación del plano tangente en $(1, 2, 5)$ es

$$\begin{aligned} -2(x - 1) - 4(y - 2) + (z - 5) &= 0 \\ -2x - 4y + z &= -5. \end{aligned}$$

El plano tangente se muestra en la figura 15.41.

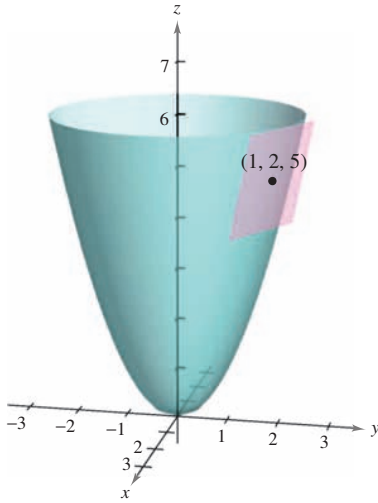


Figura 15.41

Área de una superficie paramétrica

Para definir el área de una superficie paramétrica, se puede usar un desarrollo similar al dado en la sección 14.5. Para empezar se construye una partición interna de D que consiste en n rectángulos, donde el área del rectángulo i -ésimo D_i es $\Delta A_i = \Delta u_i \Delta v_i$, como se muestra en la figura 15.42. En cada D_i sea (u_i, v_i) el punto más cercano al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$ de la superficie S , se construye un plano tangente T_i . El área de la porción de S que corresponde a D_i , ΔT_i , puede ser aproximada por un paralelogramo en el plano tangente. Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, la superficie de S está dada por $\Sigma \Delta S_i \approx \Sigma \Delta T_i$. El área del paralelogramo en el plano tangente es

$$\|\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_i \mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u_i \Delta v_i$$

lo cual conduce a la definición siguiente.

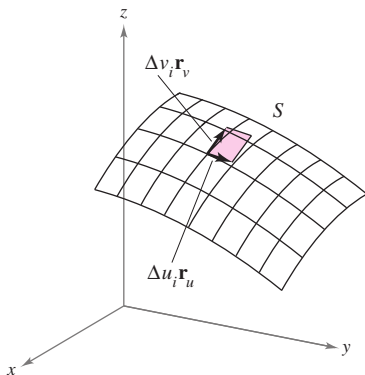
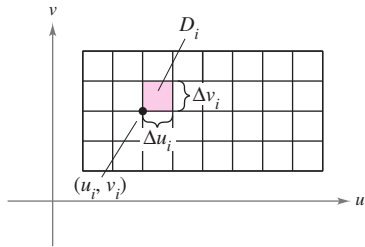


Figura 15.42

ÁREA DE UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv . Si cada punto de la superficie S corresponde exactamente a un punto del dominio D , entonces el **área de la superficie** S está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$$

$$\text{donde } \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \text{ y } \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}.$$

Para una superficie S dada por $z = f(x, y)$, esta fórmula para el área de la superficie corresponde a la dada en la sección 14.5. Para ver esto, se puede parametrizar la superficie utilizando la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

definida sobre la región R en el plano xy . Utilizando

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k}$$

se tiene

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} = -f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$. Esto implica que el área de la superficie de S es

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \iint_R \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA. \end{aligned}$$

NOTA La superficie del ejemplo 6 no satisface totalmente la hipótesis de que cada punto de la superficie corresponde exactamente a un punto de D . En esta superficie, $\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}(u, 2\pi)$ para todo valor fijo de u . Sin embargo, como el traslape consiste sólo en un semicírculo (que no tiene área), se puede aplicar la fórmula para el área de una superficie paramétrica. ■

EJEMPLO 6 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la superficie de la esfera unitaria (o esfera unidad) dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución Para empezar se calcula \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v .

$$\mathbf{r}_u = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = -\sin u \sin v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k} \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{(\sin^2 u \cos v)^2 + (\sin^2 u \sin v)^2 + (\sin u \cos u)^2} \\ &= \sqrt{\sin^4 u + \sin^2 u \cos^2 u} \\ &= \sqrt{\sin^2 u} \\ &= \sin u. \quad \text{sen } u > 0 \text{ para } 0 \leq u \leq \pi. \end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie de la esfera es

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin u \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \, dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Para el toro del ejemplo 7, describir la función $\mathbf{r}(u, v)$ para u fijo. Después describir la función $\mathbf{r}(u, v)$ para v fijo.

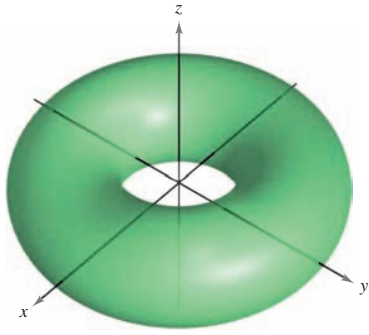


Figura 15.43

EJEMPLO 7 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la superficie del toro dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 + \cos u) \cos v \mathbf{i} + (2 + \cos u) \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. (Ver la figura 15.43.)

Solución Para empezar se calculan \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v .

$$\mathbf{r}_u = -\sin u \cos v \mathbf{i} - \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = -(2 + \cos u) \sin v \mathbf{i} + (2 + \cos u) \cos v \mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -(2 + \cos u) \sin v & (2 + \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(2 + \cos u) (\cos v \cos u \mathbf{i} + \sin v \cos u \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}) \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= (2 + \cos u) \sqrt{(\cos v \cos u)^2 + (\sin v \cos u)^2 + \sin^2 u} \\ &= (2 + \cos u) \sqrt{\cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u} \\ &= (2 + \cos u) \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} \\ &= 2 + \cos u. \end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie del toro es

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + \cos u) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} 4\pi dv \\ &= 8\pi^2. \end{aligned}$$

Si la superficie S es una superficie de revolución, se puede mostrar que la fórmula para el área de la superficie, dada en la sección 7.4, es equivalente a la fórmula dada en esta sección. Por ejemplo, supóngase que f sea una función no negativa tal que f' sea continua sobre el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f , donde $a \leq x \leq b$, en torno al eje x . De acuerdo con la sección 7.4, se sabe que el área de la superficie está dada por

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Para representar S paramétricamente, sea $x = u$, $y = f(u) \cos v$ y $z = f(u) \sin v$, donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Entonces,

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + f(u) \cos v \mathbf{j} + f(u) \sin v \mathbf{k}.$$

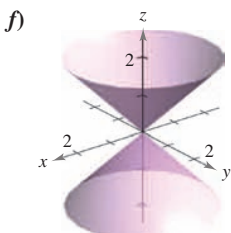
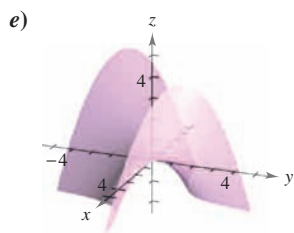
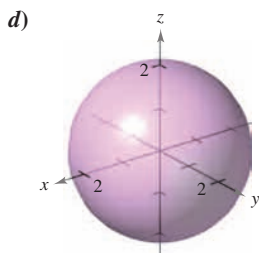
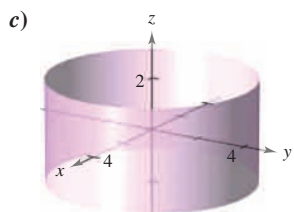
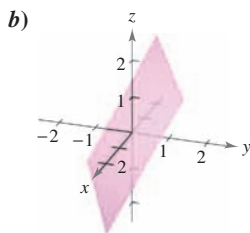
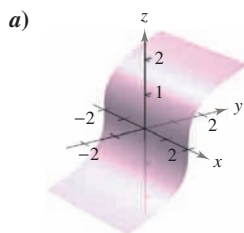
Tratar de mostrar que la fórmula

$$\text{Área de la superficie} = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$$

es equivalente a la fórmula dada arriba (ver ejercicio 58).

15.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, relacionar la función vectorial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas a), b), c), d), e) y f).]



1. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{2}(u + v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{4}v^3\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 2 \cos v \sin u\mathbf{j} + 2 \sin v\mathbf{k}$
6. $\mathbf{r}(u, v) = 4 \cos u\mathbf{i} + 4 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

En los ejercicios 7 a 10, hallar la ecuación rectangular de la superficie por eliminación de los parámetros de la función vectorial. Identificar la superficie y dibujar su gráfica.

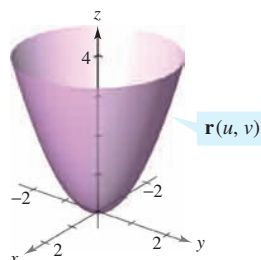
7. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \frac{v}{2}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2 \sin u\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \cos u\mathbf{i} + 3 \cos v \sin u\mathbf{j} + 5 \sin v\mathbf{k}$

CAS En los ejercicios 11 a 16, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie dada por la función vectorial.

11. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + u^4\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
12. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 4 \cos v \sin u\mathbf{j} + \sin v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

13. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sinh u \cos v\mathbf{i} + \sinh u \sin v\mathbf{j} + \cosh u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
14. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 3\pi$
15. $\mathbf{r}(u, v) = (u - \sin u)\cos v\mathbf{i} + (1 - \cos u)\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
16. $\mathbf{r}(u, v) = \cos^3 u \cos v\mathbf{i} + \sin^3 u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

Para pensar En los ejercicios 17 a 20, determinar cómo la gráfica de la superficie $\mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ difiere de la gráfica de $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (ver la figura) donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. (No es necesario representar \mathbf{s} gráficamente.)



17. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} - u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
18. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u \sin v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
19. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
20. $\mathbf{s}(u, v) = 4u \cos v\mathbf{i} + 4u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

En los ejercicios 21 a 30, hallar una función vectorial cuya gráfica sea la superficie indicada.

21. El plano $z = y$
22. El plano $x + y + z = 6$
23. El cono $y = \sqrt{4x^2 + 9z^2}$
24. El cono $x = \sqrt{16y^2 + z^2}$
25. El cilindro $x^2 + y^2 = 25$
26. El cilindro $4x^2 + y^2 = 16$
27. El cilindro $z = x^2$
28. El elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$
29. La parte del plano $z = 4$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$
30. La parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$

Superficie de revolución En los ejercicios 31 a 34, dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida por revolución de la gráfica de la función en torno al eje dado.

Función	Eje de revolución
31. $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 6$	eje x
32. $y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4$	eje x
33. $x = \sin z, \quad 0 \leq z \leq \pi$	eje z
34. $z = y^2 + 1, \quad 0 \leq y \leq 2$	eje y

Plano tangente En los ejercicios 35 a 38, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada por la función vectorial, en el punto indicado.

35. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad (1, -1, 1)$

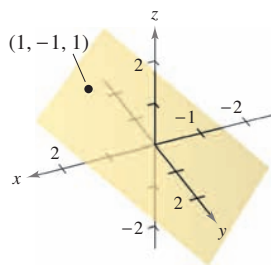


Figura para 35

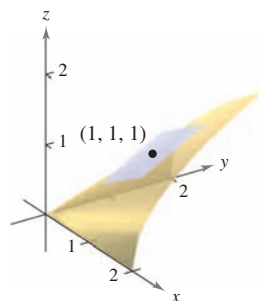
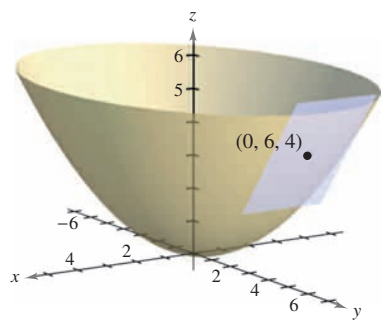


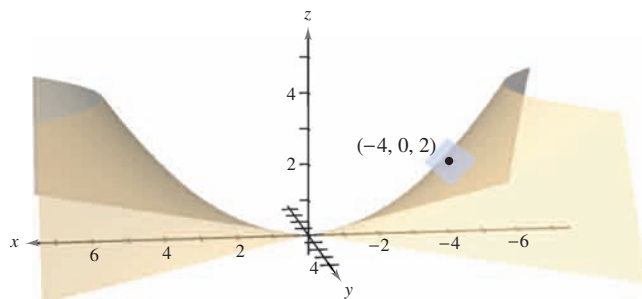
Figura para 36

36. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{uv}\mathbf{k}, \quad (1, 1, 1)$

37. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 3u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}, \quad (0, 6, 4)$



38. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cosh v\mathbf{i} + 2u \sinh v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}, \quad (-4, 0, 2)$



Área En los ejercicios 39 a 46, hallar el área de la superficie sobre la región dada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

39. La parte del plano $\mathbf{r}(u, v) = 4u\mathbf{i} - v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 1$

40. La parte del paraboloide $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

41. La parte del cilindro $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u\mathbf{i} + a \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq b$

42. La esfera $\mathbf{r}(u, v) = a \sin u \cos v\mathbf{i} + a \sin u \sin v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

43. La parte del cono $\mathbf{r}(u, v) = au \cos v\mathbf{i} + au \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

44. El toro $\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v)\cos u\mathbf{i} + (a + b \cos v)\sin u\mathbf{j} + b \sin v\mathbf{k}$, donde $a > b$, $0 \leq u \leq 2\pi$, y $0 \leq v \leq 2\pi$

45. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{u} \cos v\mathbf{i} + \sqrt{u} \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 4$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

46. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \sin u \cos v\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \sin u \sin v\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

Desarrollo de conceptos

47. Definir una superficie paramétrica.

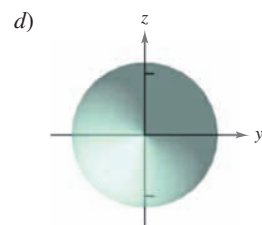
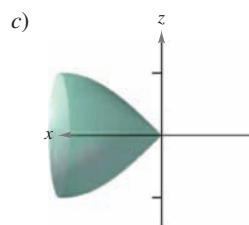
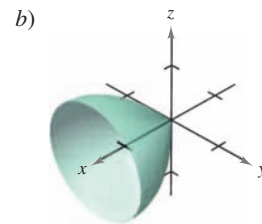
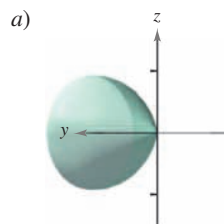
48. Dar la integral doble con la que se obtiene el área de la superficie de una superficie paramétrica sobre una región abierta D .

49. Mostrar que se puede representar el cono del ejemplo 3 de manera paramétrica mediante $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Para discusión

50. Las cuatro figuras son gráficas de la superficie $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \sin u \cos v\mathbf{j} + \sin u \sin v\mathbf{k}$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

Relacionar cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se contempla la superficie. Los cuatro puntos son $(10, 0, 0)$, $(-10, 10, 0)$, $(0, 10, 0)$ y $(10, 10, 10)$.



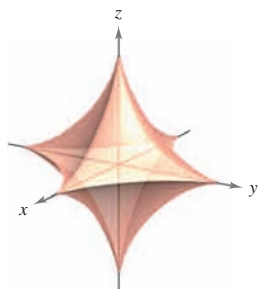
- 51. Esfera asterooidal** Una ecuación de una **esfera asterooidal** en x , y y z es

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}.$$

Abajo se presenta una gráfica de una esfera asterooidal. Mostrar que esta superficie puede representarse paramétricamente por medio de

$$\mathbf{r}(u, v) = a \sin^3 u \cos^3 v \mathbf{i} + a \sin^3 u \sin^3 v \mathbf{j} + a \cos^3 u \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.



- CAS 52.** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente tres perspectivas de la gráfica de la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq \pi$$

desde los puntos $(10, 0, 0)$, $(0, 0, 10)$ y $(10, 10, 10)$.

- CAS 53. Investigación** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente el toro

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u \mathbf{i} + (a + b \cos v) \sin u \mathbf{j} + b \sin v \mathbf{k}$$

para cada conjunto de valores de a y b , donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Utilizar los resultados para describir los efectos de a y b en la forma del toro.

- a) $a = 4, \quad b = 1$ b) $a = 4, \quad b = 2$
c) $a = 8, \quad b = 1$ d) $a = 8, \quad b = 3$

- 54. Investigación** Considerar la función del ejercicio 14.

- a) Dibujar una gráfica de la función donde u se mantenga constante en $u = 1$. Identificar la gráfica.
b) Dibujar una gráfica de la función donde v se mantenga constante en $v = 2\pi/3$. Identificar la gráfica.
c) Suponer que una superficie está representada por la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. ¿Qué generalización se puede hacer acerca de la gráfica de la función si uno de los parámetros se mantiene constante?

- 55. Área de la superficie** La superficie de la cúpula de un museo está dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 20 \sin u \cos v \mathbf{i} + 20 \sin u \sin v \mathbf{j} + 20 \cos u \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi/3$, $0 \leq v \leq 2\pi$ y \mathbf{r} está en metros. Hallar el área de la superficie de la cúpula.

- 56.** Hallar una función vectorial para el hiperboloide

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

y determinar el plano tangente en $(1, 0, 0)$.

- 57.** Representar gráficamente y hallar el área de una vuelta completa de la rampa en espiral

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 2v \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 3$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

- 58.** Sea f una función no negativa tal que f' es continua en el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f , donde $a \leq x \leq b$, en torno al eje x . Sea $x = u$, $y = f(u) \cos v$ y $z = f(u) \sin v$, donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Entonces, S se representa paramétricamente mediante $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + f(u) \cos v \mathbf{j} + f(u) \sin v \mathbf{k}$. Mostrar que las fórmulas siguientes son equivalentes.

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\text{Área de la superficie} = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$$

- CAS 59. Proyecto abierto** Las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + \sin u [7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)]$$

$$y = 3 + \cos u [7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)]$$

$$z = \sin(3u - 2v) + 2 \sin(3u + v)$$

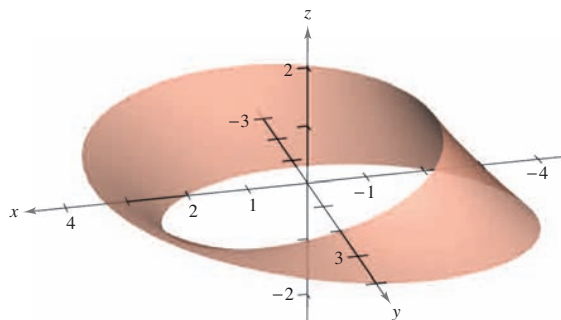
donde $-\pi \leq u \leq \pi$ y $-\pi \leq v \leq \pi$, representan la superficie mostrada en la figura. Tratar de crear una superficie paramétrica propia utilizando un sistema algebraico por computadora.



- CAS 60. Banda de Möbius** La superficie mostrada en la figura se llama **banda de Möbius** y puede representarse mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(a + u \cos \frac{v}{2}\right) \cos v, \quad y = \left(a + u \cos \frac{v}{2}\right) \sin v, \quad z = u \sin \frac{v}{2}$$

donde $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ y $a = 3$. Trate de representar gráficamente otra banda de Möbius para diferentes valores de a utilizando un sistema algebraico por computadora.



15.6 Integrales de superficie

- Evaluar una integral de superficie como una integral doble.
- Evaluar integrales de superficie sobre superficies paramétricas.
- Determinar la orientación de una superficie.
- Comprender el concepto de integral de flujo.

Integrales de superficie

El resto de este capítulo se ocupa principalmente de **integrales de superficie**. Primero se considerarán superficies dadas por $z = g(x, y)$. Más adelante, en esta sección, se considerarán superficies más generales dadas en forma paramétrica.

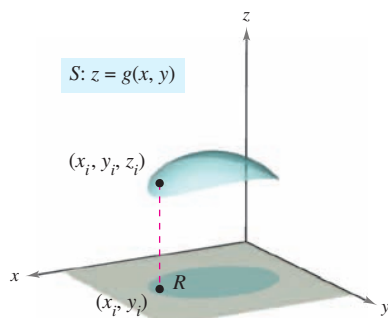
Sea S una superficie dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy , como se muestra en la figura 15.44. Supóngase que g , g_x y g_y son continuas en todos los puntos de R y que f está definida en S . Empleando el procedimiento usado para hallar el área de una superficie en la sección 14.5, se evalúa f en (x_i, y_i, z_i) y se forma la suma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

donde $\Delta S_i \approx \sqrt{1 + [g_x(x_i, y_i)]^2 + [g_y(x_i, y_i)]^2} \Delta A_i$. Siempre que el límite de la suma anterior cuando $\|\Delta\|$ tiende a 0 exista, la **integral de superficie de f sobre S** se define como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Esta integral se puede evaluar mediante una integral doble.



La función escalar f asigna un número a cada punto de S

Figura 15.44

TEOREMA 15.10 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea S una superficie cuya ecuación es $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy . Si g , g_x y g_y son continuas en R y f es continua en S , entonces la integral de superficie de f sobre S es

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA.$$

Para superficies descritas por funciones de x y z (o de y y z), al teorema 15.10 se le pueden hacer los ajustes siguientes. Si S es la gráfica de $y = g(x, z)$ y R es su proyección sobre el plano xz , entonces,

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, g(x, z), z) \sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2} dA.$$

Si S es la gráfica de $x = g(y, z)$ y R es su proyección sobre el plano yz , entonces

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} dA.$$

Si $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie sobre S da el área de la superficie de S . Por ejemplo, supóngase que la superficie S es el plano dado por $z = x$, donde $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. El área de la superficie de S es $\sqrt{2}$ unidades cuadradas. Trátese de verificar que $\iint_S f(x, y, z) dS = \sqrt{2}$.

EJEMPLO 1 Evaluación de una integral de superficie

Evaluar la integral de superficie

$$\iint_S (y^2 + 2yz) \, dS$$

donde S es la porción del plano $2x + y + 2z = 6$ que se encuentra en el primer octante.

Solución Para empezar se escribe S como

$$z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(6 - 2x - y).$$

Usando las derivadas parciales $g_x(x, y) = -1$ y $g_y(x, y) = -\frac{1}{2}$, se puede escribir

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Utilizando la figura 15.45 y el teorema 15.10, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + 2yz) \, dS &= \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= \iint_R \left[y^2 + 2y \left(\frac{1}{2} \right) (6 - 2x - y) \right] \left(\frac{3}{2} \right) dA \\ &= 3 \int_0^3 \int_0^{2(3-x)} y(3-x) \, dy \, dx \\ &= 6 \int_0^3 (3-x)^3 \, dx \\ &= -\frac{3}{2} (3-x)^4 \Big|_0^3 \\ &= \frac{243}{2}. \end{aligned}$$

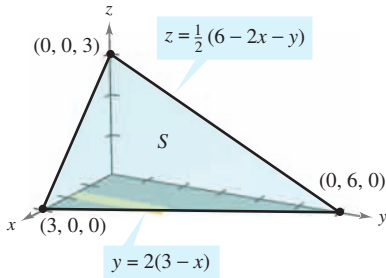


Figura 15.45

Una solución alternativa para el ejemplo 1 sería proyectar S sobre el plano yz , como se muestra en la figura 15.46. Entonces, $x = \frac{1}{2}(6 - y - 2z)$, y

$$\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la integral de superficie es

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + 2yz) \, dS &= \iint_R f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} \, dA \\ &= \int_0^6 \int_0^{(6-y)/2} (y^2 + 2yz) \left(\frac{3}{2} \right) dz \, dy \\ &= \frac{3}{8} \int_0^6 (36y - y^3) \, dy \\ &= \frac{243}{2}. \end{aligned}$$

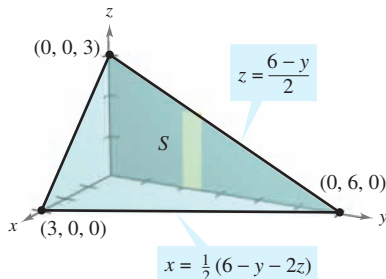


Figura 15.46

Trátase de resolver el ejemplo 1 proyectando S sobre el plano xz .

En el ejemplo 1 se podría haber proyectado la superficie S en cualquiera de los tres planos de coordenadas. En el ejemplo 2, S es una porción de un cilindro centrado en el eje x , y puede ser proyectado en el plano xz o en el plano xy .

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral de superficie

Evaluar la integral de superficie

$$\iint_S (x + z) \, dS$$

donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra en el primer octante, entre $x = 0$ y $x = 4$, como se muestra en la figura 15.47.

Solución Se proyecta S sobre el plano xy , de manera que $z = g(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$, y se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}\right)^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}. \end{aligned}$$

El teorema 15.10 no se puede aplicar directamente porque g_y no es continua en $y = 3$. Sin embargo, se puede aplicar el teorema para $0 \leq b < 3$ y después tomar el límite cuando b se aproxima a 3, como sigue.

$$\begin{aligned} \iint_S (x + z) \, dS &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \int_0^b \int_0^4 (x + \sqrt{9 - y^2}) \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \int_0^4 \left(\frac{x}{\sqrt{9 - y^2}} + 1 \right) \, dx \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \left[\frac{x^2}{2\sqrt{9 - y^2}} + x \right]_0^4 \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \left(\frac{8}{\sqrt{9 - y^2}} + 4 \right) \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \left[4y + 8 \arcsen \frac{y}{3} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \left(4b + 8 \arcsen \frac{b}{3} \right) \\ &= 36 + 24 \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= 36 + 12\pi \end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Algunos sistemas algebraicos por computadora evalúan integrales impropias. Si se tiene acceso a uno de estos programas, utilícese para evaluar la integral impropia

$$\int_0^3 \int_0^4 (x + \sqrt{9 - y^2}) \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}} \, dx \, dy.$$

¿Se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 2?

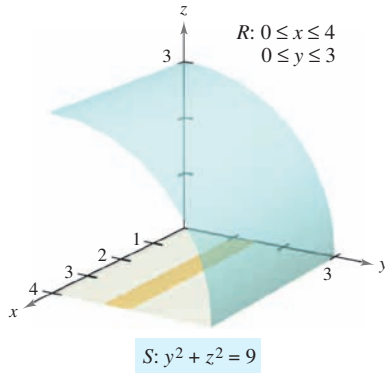


Figura 15.47

Se ha visto que si la función f definida sobre la superficie S es simplemente $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie da el *área de la superficie* S .

$$\text{Área de la superficie} = \iint_S 1 \, dS$$

Por otro lado, si S es una lámina de densidad variable y $\rho(x, y, z)$ es la densidad en el punto (x, y, z) , entonces la *masa* de la lámina está dada por

$$\text{Masa de la lámina} = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS.$$

EJEMPLO 3 Hallar la masa de una lámina bidimensional

Una lámina bidimensional S en forma de cono está dada por

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 4$$

como se muestra en la figura 15.48. En todo punto de S , la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z . Hallar la masa m de la lámina.

Solución Al proyectar S sobre el plano xy se obtiene

$$S: z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y), \quad 0 \leq z \leq 4$$

$$R: x^2 + y^2 \leq 4$$

con densidad $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Usando una integral de superficie, se halla que es

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \rho(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= k \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2}} \, dA \\ &= k \iint_R \sqrt{5} \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\sqrt{5}r) r \, dr \, d\theta \quad \text{Coordenadas polares.} \\ &= \frac{\sqrt{5}k}{3} \int_0^{2\pi} r^3 \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{5}k}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{5}k}{3} \Big[\theta \Big]_0^{2\pi} = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}. \end{aligned}$$

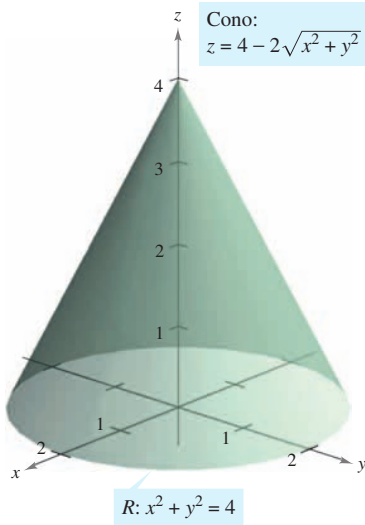


Figura 15.48

TECNOLOGÍA Utilizar un sistema algebraico por computadora y confirmar el resultado del ejemplo 3. El sistema algebraico por computadora *Maple* calculó la integral así:

$$k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{5} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\sqrt{5}r) r \, dr \, d\theta = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}$$

Superficies paramétricas e integrales de superficie

Se puede mostrar que para una superficie S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica.}$$

definida sobre una región D en el plano uv , la integral de superficie de $f(x, y, z)$ sobre S está dada por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| dA.$$

Obsérvese la analogía con una integral de línea sobre una curva C en el espacio.

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad \text{Integral de línea.}$$

NOTA Véase que ds y dS pueden escribirse como $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ y $dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| dA$. ■

EJEMPLO 4 Evaluación de una integral de superficie

En el ejemplo 2 se mostró una evaluación de la integral de superficie

$$\iint_S (x + z) dS$$

donde S es la porción, en el primer octante, del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ y $x = 4$ (ver la figura 15.49). Evaluar esta misma integral, ahora en forma paramétrica.

Solución En forma paramétrica, la superficie está dada por

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + 3 \cos \theta \mathbf{j} + 3 \sin \theta \mathbf{k}$$

donde $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Para evaluar la integral de superficie en forma paramétrica, se empieza por calcular lo siguiente.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -3 \sin \theta \mathbf{j} + 3 \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \sin \theta & 3 \cos \theta \end{vmatrix} = -3 \cos \theta \mathbf{j} - 3 \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{9 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} = 3$$

Por tanto, la integral de superficie puede ser evaluada como sigue.

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 3 \sin \theta) 3 dA &= \int_0^4 \int_0^{\pi/2} (3x + 9 \sin \theta) d\theta dx \\ &= \int_0^4 \left[3x\theta - 9 \cos \theta \right]_0^{\pi/2} dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3\pi}{2}x + 9 \right) dx \\ &= \left[\frac{3\pi}{4}x^2 + 9x \right]_0^4 \\ &= 12\pi + 36 \end{aligned}$$

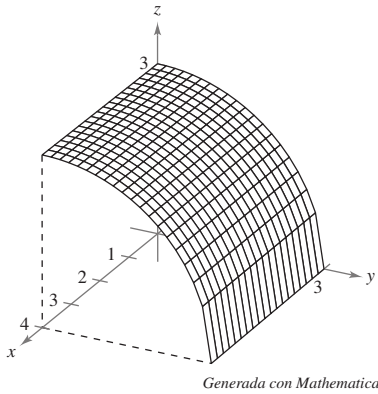


Figura 15.49

Orientación de una superficie

Para inducir una orientación en una superficie S en el espacio se utilizan vectores unitarios normales. Se dice que una superficie es **orientable** si en todo punto de S que no sea un punto frontera puede definirse un vector unitario normal \mathbf{N} de manera tal que los vectores normales varíen continuamente sobre la superficie S . Si esto es posible, S es una **superficie orientada**.

Una superficie orientable S tiene dos caras. Así, cuando se orienta una superficie, se elige uno de los dos vectores unitarios normales posibles. Si S es una superficie cerrada, como por ejemplo una esfera, se acostumbra escoger como vector unitario normal \mathbf{N} , el que apunta hacia fuera de la esfera.

Las superficies más comunes, como esferas, paraboloides, elipses y planos, son orientables. (Ver en el ejercicio 43 un ejemplo de una superficie que *no* es orientable.) En una superficie orientable, el vector gradiente proporciona una manera adecuada de hallar un vector unitario normal. Es decir, en una superficie orientable S dada por

$$z = g(x, y)$$

Superficie orientable.

se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, S puede orientarse, ya sea por el vector unitario normal

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \\ &= \frac{-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}}\end{aligned}$$

Unitario normal hacia arriba.

o por el vector unitario normal

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{-\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \\ &= \frac{g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}}\end{aligned}$$

Unitario normal hacia abajo.

como se muestra en la figura 15.50. Si la superficie suave orientable S está dada en forma paramétrica por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica.}$$

los vectores unitarios normales están dados por

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

y

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|}.$$

NOTA Supóngase que la superficie orientable está dada por $y = g(x, z)$ o $x = g(y, z)$. Entonces se puede usar el vector gradiente

$$\nabla G(x, y, z) = -g_x(x, z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - g_z(x, z)\mathbf{k} \quad G(x, y, z) = y - g(x, z).$$

o

$$\nabla G(x, y, z) = \mathbf{i} - g_y(y, z)\mathbf{j} - g_z(y, z)\mathbf{k} \quad G(x, y, z) = x - g(y, z).$$

para orientar la superficie. ■

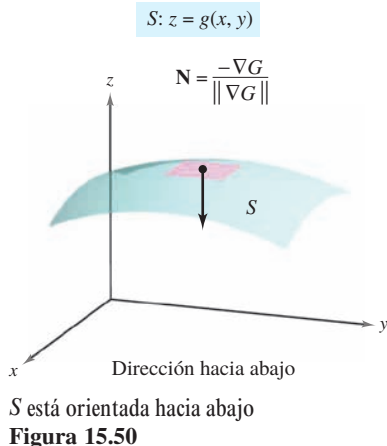
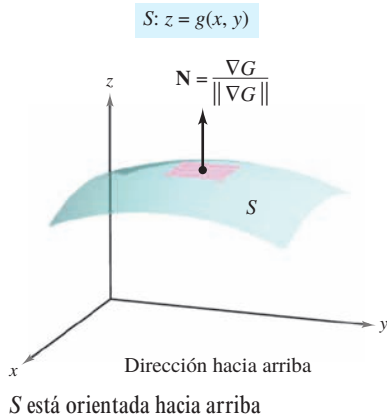
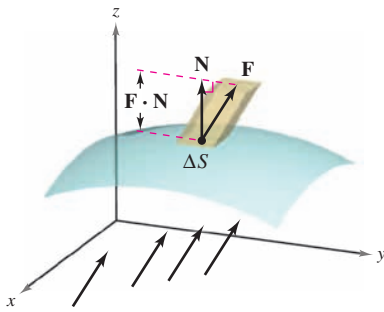


Figura 15.50



El campo de velocidad \mathbf{F} indica la dirección de flujo del fluido

Figura 15.51

Integrales de flujo

Una de las aplicaciones principales que emplean la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S . Supóngase que una superficie orientada S se sumerge en un fluido que tiene un campo de velocidad continua \mathbf{F} . Sea ΔS el área de una pequeña porción de la superficie S sobre la cual \mathbf{F} es casi constante. Entonces la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo se aproxima mediante el volumen de la columna de altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$, que se muestra en la figura 15.51. Es decir,

$$\Delta V = (\text{altura})(\text{área de la base}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\Delta S.$$

Por consiguiente, el volumen del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (llamada el **flujo de \mathbf{F} a través de S**) está dado por la integral de superficie de la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FLUJO

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M , N y P tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie S orientada mediante un vector unitario normal \mathbf{N} . La **integral de flujo de \mathbf{F} a través de S** está dada por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Geométricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre S de la *componente normal* de \mathbf{F} . Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad del fluido en (x, y, z) , la integral de flujo

$$\iint_S \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

representa la *masa* del fluido que fluye a través de S por unidad de tiempo.

Para evaluar una integral de flujo de una superficie dada por $z = g(x, y)$, se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, $\mathbf{N} \, dS$ puede escribirse como sigue.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \, dS &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \, dS \\ &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}} \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} \, dA \\ &= \nabla G(x, y, z) \, dA \end{aligned}$$

TEOREMA 15.11 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE FLUJO

Sea S una superficie orientada dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy .

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA && \text{Orientada hacia arriba.} \\ \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot [g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}] \, dA && \text{Orientada hacia abajo.} \end{aligned}$$

En la primera integral, la superficie está orientada hacia arriba, y en la segunda integral, la superficie está orientada hacia abajo.

EJEMPLO 5 Usar una integral de flujo para hallar la tasa o ritmo del flujo de masa

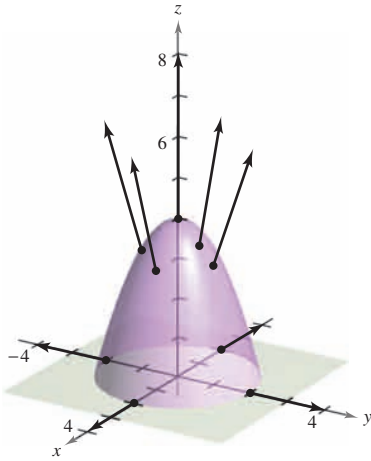


Figura 15.52

Sea S la porción del paraboloide

$$z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

que se encuentra sobre el plano xy , orientado por medio de un vector unitario normal dirigido hacia arriba, como se muestra en la figura 15.52. Un fluido de densidad constante ρ fluye a través de la superficie S de acuerdo con el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Hallar la tasa o ritmo de flujo de masa a través de S .

Solución Se empieza por calcular las derivadas parciales de g .

$$g_x(x, y) = -2x$$

y

$$g_y(x, y) = -2y$$

La tasa o el ritmo de flujo de masa a través de la superficie S es

$$\begin{aligned} \iint_S \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \rho \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \\ &= \rho \iint_R [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}] \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \rho \iint_R [2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)] \, dA \\ &= \rho \iint_R (4 + x^2 + y^2) \, dA \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2)r \, dr \, d\theta && \text{Coordenadas polares.} \\ &= \rho \int_0^{2\pi} 12 \, d\theta \\ &= 24\pi\rho. \end{aligned}$$

Para una superficie orientada S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica.}$$

definida sobre una región D del plano uv , se puede definir la integral de flujo de \mathbf{F} a través de S como

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \right) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA \\ &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA. \end{aligned}$$

Nótese la semejanza de esta integral con la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

En la página 1121 se presenta un resumen de las fórmulas para integrales de línea y de superficie.

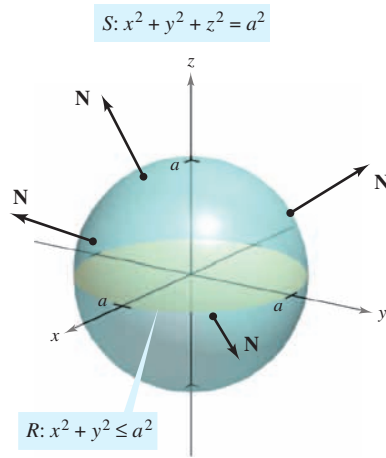


Figura 15.53

EJEMPLO 6 Hallar el flujo de un campo cuadrático inverso

Hallar el flujo sobre la esfera S dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{Esfera } S.$$

donde \mathbf{F} es un campo cuadrático inverso dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{kq}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad \text{Campo cuadrático inverso } \mathbf{F}.$$

y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Supóngase que S está orientada hacia afuera, como se muestra en la figura 15.53.

Solución La esfera está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \\ &= a \sin u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k} \end{aligned}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Las derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} - a \sin u \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v(u, v) = -a \sin u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j}$$

lo cual implica que el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & -a \sin u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2(\sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Ahora, usando

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \\ &= kq \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\|x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\|^3} \\ &= \frac{kq}{a^3}(a \sin u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}) \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= \frac{kq}{a^3}[(a \sin u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}) \cdot \\ &\quad a^2(\sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k})] \\ &= kq(\sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v + \sin u \cos^2 u) \\ &= kq \sin u. \end{aligned}$$

Por último, el flujo sobre la esfera S está dado por

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_D (kq \sin u) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi kq \sin u \, du \, dv \\ &= 4\pi kq. \end{aligned}$$

El resultado del ejemplo 6 muestra que el flujo a través de una esfera S en un campo cuadrático inverso es independiente del radio de S . En particular, si \mathbf{E} es un campo eléctrico, el resultado obtenido en el ejemplo 6, junto con la ley de Coulomb, proporciona una de las leyes básicas de electrostática, conocida como la **ley de Gauss**:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} \, dS = 4\pi kq \quad \text{Ley de Gauss.}$$

donde q es una carga puntual localizada en el centro de la esfera y k es la constante de Coulomb. La ley de Gauss es válida para superficies cerradas más generales que contengan el origen, y relaciona el flujo que sale de la superficie con la carga total q dentro de la superficie.

Esta sección concluye con un resumen de fórmulas de integrales de línea y de integrales de superficie.

Resumen de integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt$$

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \, ds$$

Forma escalar.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \end{aligned}$$

Forma vectorial.

Integrales de superficie [$z = g(x, y)$]

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA$$

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA$$

Forma escalar.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA$$

Forma vectorial (normal hacia arriba).

Integrales de superficie (forma paramétrica)

$$dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \, dA$$

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, dS$$

Forma escalar.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA$$

Forma vectorial.

15.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, evaluar $\iint_S (\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + \mathbf{z}) \, d\mathbf{S}$.

1. $S: z = 4 - x, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 3$
2. $S: z = 15 - 2x + 3y, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4$
3. $S: z = 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$
4. $S: z = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x$

En los ejercicios 5 y 6, evaluar $\iint_S xy \, d\mathbf{S}$.

5. $S: z = 3 - x - y$, primer octante
6. $S: z = h, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$

CAS En los ejercicios 7 y 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar

$$\iint_S xy \, d\mathbf{S}.$$

7. $S: z = 9 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x$
8. $S: z = \frac{1}{2}xy, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4$

CAS En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar

$$\iint_S (\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{xy}) \, d\mathbf{S}.$$

9. $S: z = 10 - x^2 - y^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$
10. $S: z = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x$

Masa En los ejercicios 11 y 12, hallar la masa de la lámina bidimensional S de densidad ρ .

11. $S: 2x + 3y + 6z = 12$, primer octante, $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$
12. $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \rho(x, y, z) = kz$

En los ejercicios 13 a 16, evaluar $\iint_S f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{S}$.

13. $f(x, y) = y + 5$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2$
14. $f(x, y) = xy$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \mathbf{i} + 2 \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 1$
15. $f(x, y) = x + y$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \mathbf{i} + 2 \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 1$
16. $f(x, y) = x + y$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 4u \cos v \mathbf{i} + 4u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq \pi$

En los ejercicios 17 a 22, evaluar $\iint_S f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \, d\mathbf{S}$.

17. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: z = x + y, \quad x^2 + y^2 \leq 1$
18. $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$
 $S: z = x^2 + y^2, \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$
19. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4$
20. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$
21. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 9$
22. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq z \leq x$

En los ejercicios 23 a 28, hallar el flujo de \mathbf{F} a través de S ,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\mathbf{S}$$

donde \mathbf{N} es el vector unitario normal a S dirigido hacia arriba.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
 $S: z = 1 - x - y$, primer octante
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 $S: z = 6 - 3x - 2y$, primer octante
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 36$, primer octante
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
 $S: z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4$
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

En los ejercicios 29 y 30, hallar el flujo de \mathbf{F} sobre la superficie cerrada. (Sea \mathbf{N} el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia afuera.)

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = 16 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$
 S : cubo unitario limitado o acotado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$
31. **Carga eléctrica** Sea $\mathbf{E} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ un campo electrostático. Usar la ley de Gauss para hallar la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy .

32. Carga eléctrica Sea $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ un campo electrostático. Usar la ley de Gauss para hallar la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy .

Momento de inercia En los ejercicios 33 y 34, utilizar las fórmulas siguientes para los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados de una lámina bidimensional de densidad ρ .

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dS$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dS$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, dS$$

33. Verificar que el momento de inercia de una capa cónica de densidad uniforme, con respecto a su eje, es $\frac{1}{2}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio y altura.

34. Verificar que el momento de inercia de una capa esférica de densidad uniforme, con respecto a su diámetro, es $\frac{2}{3}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio.

Momento de inercia En los ejercicios 35 y 36, calcular I_z para la lámina especificada con densidad uniforme igual a 1. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

35. $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$

36. $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq h$

CAS Ritmo o tasa de flujo En los ejercicios 37 y 38, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el ritmo o tasa de flujo de masa de un fluido de densidad ρ a través de la superficie S orientada hacia arriba, si el campo de velocidad está dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 0.5z\mathbf{k}$.

37. $S: z = 16 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$

38. $S: z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Desarrollo de conceptos

39. Definir la integral de superficie de la función escalar f sobre una superficie $z = g(x, y)$. Explicar cómo se calculan las integrales de superficie.

40. Describir una superficie orientable.

41. Definir una integral de flujo y explicar cómo se evalúa.

42. ¿Es orientable la superficie de la figura adjunta? Explicar.



Doble giro

43. Investigación

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = (4 - v \sin u) \cos(2u)\mathbf{i} + (4 - v \sin u) \sin(2u)\mathbf{j} + v \cos u\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad -1 \leq v \leq 1.$$

A esta superficie se le llama banda de Möbius.

b) Explicar por qué esta superficie no es orientable.

c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva en el espacio dada por $\mathbf{r}(u, 0)$. Identificar la curva.

d) Construir una banda de Möbius cortando una tira de papel, dándole un solo giro, y pegando los extremos.

e) Cortar la banda de Möbius a lo largo de la curva en el espacio del inciso c), y describir el resultado.

Para discusión

44. Considerar el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

y la superficie orientable S dada por la forma paramétrica

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v^2)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k},$$

$$0 \leq u \leq 2, \quad -1 \leq v \leq 1.$$

a) Encontrar e interpretar $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

b) Encontrar $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ como una función de u y v .

c) Encontrar u y v en el punto $P(3, 1, 4)$.

d) Explicar cómo encontrar la componente normal de \mathbf{F} a la superficie en P . Encontrar después su valor.

e) Evaluar la integral de flujo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$.

PROYECTO DE TRABAJO

Hiperboloide de una hoja

Considerar la superficie paramétrica dada por la función

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cosh u \cos v\mathbf{i} + a \cosh u \sin v\mathbf{j} + b \sinh u\mathbf{k}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar \mathbf{r} para varios valores de las constantes a y b . Describir el efecto de las constantes sobre la forma de la superficie.

b) Mostrar que la superficie es un hiperboloide de una hoja dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

c) Para valores fijos $u = u_0$, describir las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u_0, v) = a \cosh u_0 \cos v\mathbf{i} + a \cosh u_0 \sin v\mathbf{j} + b \sinh u_0\mathbf{k}.$$

d) Para valores fijos $v = v_0$, describir las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u, v_0) = a \cosh u \cos v_0\mathbf{i} + a \cosh u \sin v_0\mathbf{j} + b \sinh u\mathbf{k}.$$

e) Hallar un vector normal a la superficie en $(u, v) = (0, 0)$.