

GUÍA DE ESTUDIO SEMIPRESENCIAL

Lógica Matemática

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Ing. Julio César Maltéz Juárez



Universidad
Rafael Landívar

Tradición Jesuita en Guatemala

Guía de estudio semipresencial

Lógica Matemática

Editor

© 2012 Departamento de Procesos Académicos, Dirección Académica para Campus y Sedes Regionales, Vicerrectoría Académica.

© 2012 Universidad Rafael Landívar, Guatemala, Guatemala, C. A.

Compilador

Julio César Maltéz Juárez

Reservados todos los derechos por el editor, de conformidad con la ley. Este material no puede ser reproducido total o parcialmente, por ningún medio mecánico o electrónico, sin expreso consentimiento del editor.

ISBN

978-9929-575-19-6

Producción

© 2012 Departamento de Procesos Académicos y Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Rafael Landívar (**Edición preliminar en proceso de validación**)

Dirección

Juan Carlos Leonardo Barillas

Coordinación de Producción

Leslie Quiñónez de Clayton

Coordinación de Edición

Amparo Valenzuela Pineda - Jennifer Luther de León

Editora

Mariana Aragón de Viau

PRESENTACIÓN

Estimado Estudiante:

La presente guía de estudio ha sido elaborada por una profesional especialista en la materia, pensando en usted y fundamentalmente para apoyar su proceso de formación en la carrera universitaria que ha elegido. El éxito en sus estudios requiere de dedicación, esfuerzo y constancia, los cuales se generan por medio del trabajo en el aula y el desarrollo de otras actividades fuera de ella. En este sentido, tiene en sus manos una herramienta de apoyo didáctico para la organización y retroalimentación de los contenidos del curso.

La guía de Lógica Matemática elaborada por el Ing. Julio César Maltéz Juárez, está diseñada a partir de los contenidos que se desarrollarán en el curso y plantea actividades de reflexión, análisis y ejercitación, con el fin de afianzar y ampliar los conocimientos obtenidos.

Es por ello que le motivamos a realizar con mucho entusiasmo cada una de las actividades diseñadas, lo que redundará en un mejor desempeño académico.

M.A. Rosemary Méndez de Herrera
Directora
Departamento Sedes Regionales
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

RESUMEN DEL CONTENIDO¹

SEMANA 1		
TEMA	ACTIVIDADES	
Razonamiento y Lógica. Razonamiento Inductivo y Razonamiento Deductivo.	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio:
	Material que se enviará por vía electrónica.	Mapa conceptual u otra actividad que evalúe la comprensión de la lectura.
SEMANA 2		
TEMA	ACTIVIDADES	
Proposiciones simples. Enunciados que no son proposiciones. Negación de una proposición simple. Proposiciones compuestas	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio:
	2 a 4. (NO INCLUIR CUANTIFICADORES)	1.1, páginas 6 y 7, se recomiendan los numerales del 1 al 22; y del 33 al 54
SEMANA 3		
TEMA	ACTIVIDADES	
Conjunción y Disyunción. Tablas de verdad.	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio:
	9 a 16.	1.2, páginas 18 y 19, se recomiendan los numerales 1 a 60
SEMANA 4		
TEMA	ACTIVIDADES	
Proposiciones equivalentes Negación de Conjunciones y de Disyunciones. Leyes de Morgan.	Lectura de página:	Resolución del ejercicio
	17.	Continuar 1.2, página 19, se recomiendan los numerales del 61 al 70.
SEMANAS 5 y 6		
TEMA	ACTIVIDADES	
La Condicional, tablas de verdad utilizando condicionales	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio:
	20 a 24.	1.3, páginas 27 y 28, se recomiendan los numerales del 1 al 66 y del 73 al 86

¹ Todas las lecturas y ejercicios sugeridos se refieren a la siguiente bibliografía: Miller, C. D.; V. E. Heeren y J. Hornsby (2008). *Estrategias de Razonamiento*. Guatemala: Editado por Pearson para la Universidad Rafael Landívar.

SEMANA 7 y 8		
TEMA	ACTIVIDADES	
Negación de la Condicional	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio
	24 y 25. (NO INCLUIR CIRCUITOS).	Continuar 1.3, página 28, se recomiendan los numerales del 67 al 72.
Recíproca, Inversa y Contrarrecíproca	30 y 31.	1.4, se recomiendan los numerales del 1 al 18.
Formas alternas de “Si p, entonces q”	32 y 33.	Continuar 1.4, se recomiendan los numerales del 19 al 44.
SEMANA 9		
TEMA	ACTIVIDADES	
La Bicondicional	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio:
	33 y 34.	Continuar 1.4, se recomiendan los numerales del 45 al 58.
SEMANA 10		
TEMA	ACTIVIDADES	
Conjuntos. Conceptos, representación. Terminología.	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio:
	59 a 63.	2.1, páginas 64 a 66.
SEMANA 11		
TEMA	ACTIVIDADES	
Diagramas de Venn. Universo y complemento.	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio
	66 a 70.	2.2, páginas 71 y 72
SEMANA 12		
TEMA	ACTIVIDADES	
Operaciones entre Conjuntos: Intersección y Unión	Lectura de páginas:	Resolución de ejercicio:
	73 a 76.	2.3, páginas 83 a 86. (Iniciar con los ejercicios que no incluyen Diferencia). NO HACER LOS NUMERALES DEL 47 AL 54, DEL 63 AL 80, NI DEL 127 AL 136.
SEMANA 13		
TEMA	ACTIVIDADES	
Diferencia y Diferencia Simétrica. Definir como Diferencia Simétrica: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ ó $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$	Lectura de páginas:	Resolución de ejercicio:
	76 y 77. (NO INCLUIR PARES ORDENADOS, NI PRODUCTO CARTESIANO).	Continuar 2.3, páginas 83 a 86. (Revisar que se hagan los ejercicios que sí incluyen diferencia)

SEMANA 14		
TEMA	ACTIVIDADES	
Relación entre conectivos lógicos y operaciones con conjuntos.	Lectura de páginas:	Resolución del ejercicio:
	Continuar la lectura de las Operaciones entre Conjuntos de las páginas 79 a 82.	
Interpretación de información. Encuestas.	86 y 87.	2.4, páginas 90 y 91, se recomiendan los numerales del 17 al 23
SEMANA 15		
TEMA	ACTIVIDADES	
Resolución de problemas mediante Razonamiento Inductivo	Lectura de páginas:	Resolución de ejercicio:
	106 a 110	3.1, páginas 111 a 113. Se recomienda resolver los numerales impares o se deja a discreción del profesor.
Resolución de problemas mediante Razonamiento Inductivo, patrones numéricos	114 a 120	3.2, páginas 120 a 123. Se recomienda resolver los numerales impares o se deja a discreción del profesor.
SEMANA 16 Y 17		
TEMA	ACTIVIDADES	
Estrategias para resolver problemas	Lectura de páginas:	Resolución de ejercicio:
	124 a 129	3.3, páginas 129 a 135

OTRAS ACTIVIDADES SUGERIDAS:

Si el avance en el contenido del curso lo permite, se pueden incluir actividades dirigidas a fomentar la capacidad de análisis, concentración y resolución de problemas, tales como los ROMPECABEZAS LÓGICOS que aparecen en la página 40 del libro de texto, competencias de acertijos, o actividades que fomenten la distribución espacial como el TANGRAM.

SEMANA 1

CONTENIDO

1. ¿De qué se ocupa la lógica?
2. La lógica y lo lógico
3. ¿Qué es un razonamiento?
4. Razonamiento deductivo y no deductivo
5. ¿Qué es un razonamiento correcto?
6. Validez y verdad

OBJETIVOS

Al finalizar este tema el estudiante estará en capacidad de:

1. Explicar el objeto de la lógica como ciencia.
2. Establecer la diferencia entre un razonamiento correcto y uno incorrecto.
3. Reconocer qué es razonamiento deductivo e inductivo
4. Establecer la diferencia entre validez y verdad.

¿De qué se ocupa la lógica?

A menudo resulta difícil explicar en qué consiste el objeto de investigación de una disciplina científica o filosófica a alguien que no se halle familiarizado con ella, pues una visión clara de lo que cada rama del conocimiento es sólo puede obtenerse estudiándola, enfrentándose realmente con sus diferentes problemas.

Nadie puede pretender saber qué es la lógica, o qué es la psicología, o qué es la ética, por el solo hecho de haber estudiado concienzudamente el capítulo inicial de una introducción a estas disciplinas.

Esta dificultad se hace aún más evidente cuando intentamos caracterizar el objeto teórico de una rama del conocimiento en una sola proposición inicial: *una definición*. Suele ocurrir que la definición presupone el uso de un lenguaje que, aunque aparentemente coincida con el usual y utilice términos que son por todos conocidos, posee en realidad una significación mucho más precisa, propia de la disciplina en cuestión y que, por lo tanto, no puede comprenderse adecuadamente fuera del marco teórico que se pretende caracterizar. Por lo general, en toda definición aparecen algunos términos “clave” que tienen esas características, cuya elucidación remite a otros que también requieren aclaración, estableciéndose una cadena que va adquiriendo su sentido preciso solamente en la medida en que se penetra más y más en el estudio de la disciplina en cuestión.

Supongamos, por ejemplo, que nuestra tarea fuera definir la ética y que lo hiciéramos diciendo que es aquella rama de la filosofía que se ocupa del problema moral. Nos encontramos acá con un término clave que no puede entenderse adecuadamente fuera del contexto de la investigación ética: “moral”. Lo mismo ocurre si intentáramos caracterizar la psicología como la ciencia que estudia la conducta. Porque *¿qué es exactamente la conducta?* El intento de definición del término “conducta” lleva al centro de la polémica entre distintas escuelas de la psicología contemporánea.

De la misma manera, podemos intentar dar una definición inicial de la lógica diciendo que *es la ciencia que se ocupa de establecer criterios que permiten determinar la validez o invalidez de los razonamientos*. Pero sucede que el concepto central de esta definición -validez de un razonamiento- no puede ser entendido adecuadamente sin un estudio detenido de nuestra disciplina, pues, como se verá más adelante, el problema de la validez de los razonamientos remite a su vez al de su forma o estructura y este concepto sólo puede explicarse satisfactoriamente desarrollando los diferentes capítulos de la lógica.

Otras de las razones que tornan inconveniente al tratar de dar una definición inicial es que en ella debemos presentar a la ciencia como una cosa hecha, cuando sabemos que toda ciencia crece, evoluciona a través del tiempo y, en algún momento determinado, su dominio de investigación puede variar según el enfoque teórico que se adopte.

¿Por qué, pues, insistir en la pretensión de ofrecer en un primer capítulo un panorama global de la ciencia que hemos de estudiar en lugar de enfrentarlo a usted con sus problemas?

La razón fundamental es que usted necesita poseer una visión del ámbito teórico en que deberá moverse, del tipo de cuestiones que serán sometidas a su consideración y, sobre todo, necesita entrar en posesión de algunas ideas que oficien de guías o hilos conductores para hilvanar coherentemente los problemas y las soluciones que se le irán presentando a través del estudio.

A manera de un mapa que orienta los pasos del explorador, se tratará de ofrecer una idea inicial de la naturaleza de la lógica, partiendo del lenguaje usual, e introduciéndolo paulatinamente en un dominio más técnico y teóricamente más profundo.

La lógica y lo “lógico”

El empleo del término “lógico” es bastante frecuente en el lenguaje usual.

El análisis de expresiones como:

1. Es lógico que te hayan castigado.
2. Fue la culminación lógica de ese proceso.
3. Es lógico que al dejar sin sustento un cuerpo éste caiga a tierra.
4. Este hombre ha dado una respuesta lógica.
5. El discurso de ese orador se caracterizó por su incoherencia lógica.
6. El fiscal refutó los argumentos de la defensa con un rigor lógico admirable.

Indican que en su uso cotidiano el término es de significación bastante vaga y tiende a relacionarse con un dominio heterogéneo de ideas; según el contexto, se identifica lo lógico con lo que es previsible o necesario, con lo que obedece a causas conocidas, con lo justo, con lo que posee rigor, orden, etc. Y, en general, todo aquello que se presenta como absurdo, insólito, fuera de lugar, en el plano de la razón y el discurso o de los hechos, se considera “ilógico”.

¿Existe alguna vinculación entre esta significación vaga de la palabra en su uso cotidiano y el término “lógica” como nombre de una ciencia? Un análisis más pormenorizado nos permitirá responder esta interrogante.

En primer lugar, advertimos que una cierta dimensión de su significado pretende aplicar el atributo lógico al plano de los hechos, como ocurre en los ejemplos 1, 2 y 3 arriba presentados. Decir que un hecho es lógico puede querer significar o bien que es previsible, natural, que obedece a causas conocidas (como en el ejemplo 2 y 3) o bien que se adecua a las normas y expectativas sociales (como en 1 y, eventualmente, también en 2). Digamos desde ya que este tipo de indagaciones cae fuera del objeto de la lógica. No es en absoluto de competencia de esta ciencia determinar si los hechos se ajustan o no a regularidades, son más o menos razonables, previsibles o lógicos. La lógica no tiene nada que decir acerca de los hechos porque ella no se ocupa de describir y explicar fenómenos, no es una ciencia fáctica como la física, la biología, la historia o la sociología. Así, pues, este significado del término en su uso vulgar no nos aproxima al objeto de nuestra disciplina.

Analicemos ahora los tres ejemplos restantes. Allí el término no se aplica al plano de los hechos, sino al del lenguaje, de los conocimientos, de las afirmaciones, de los argumentos. Pero acá debemos establecer una diferencia; en efecto, en esta área el término puede usarse o bien para predicar que una afirmación es sensata, que se ajusta a la naturaleza de los hechos o a las expectativas acerca de lo que es razonable afirmar (lógico como opuesto a patentemente falso, disparatado, tonto) o bien para indicar cierta forma de coherencia interna de las afirmaciones entre sí (lógico como opuesto a contradictorio, inconsciente, incoherente).

El enunciado 4 puede interpretarse como un ejemplo del primer tipo de uso, en tanto que los ejemplos 5 y 6 son casos del segundo.

En términos generales podemos decir que la cuestión acerca de si los conocimientos son *de hecho* acertados o erróneos, verdaderos o falsos, cae fuera del dominio de la lógica. No es tarea de esta ciencia juzgar la verdad de las afirmaciones aisladas que se formulan acerca de la realidad, su adecuación o inadecuación a los hechos.

Lo que sí cae dentro de su objeto son las relaciones entre los juicios mismos, las vinculaciones internas entre las partes del discurso. Para ilustrar esto será interesante volver a nuestros ejemplos 5 y 6. En ellos la incoherencia o el rigor lógico se predicen como algo interno de ciertas formas de expresión del pensamiento; puede ser que el orador del juicio 5 haya pronunciado muchas proposiciones verdaderas a lo largo de su discurso; no es precisamente la falsedad de sus juicios lo que se le imputa. Lo que se le critica, en cambio, es la falta de una conexión apropiada entre sus afirmaciones, cierta incompatibilidad entre ellas, es decir, defectos internos de su exposición que no provienen de su inadecuación a los hechos, sino de inapropiadas vinculaciones entre sus partes. Algo semejante ocurre con el ejemplo 6. Lo que se le reconoce al fiscal aludido es la claridad y coherencia con que refuto los argumentos de su adversario; se alaba la forma ajustada, precisa, en que ensambló sus propios juicios, todo lo cual no

presupone afirmar que él sostuviera la posición más justa ni, en rigor, reconocer que su manera tan perfecta de argumentar lo haya conducido necesariamente a una conclusión verdadera. Incluso alguien podría agregar a este respecto: “sí, yo sabía que lo que sostenía el fiscal no era verdadero, pero presentó sus argumentos con tanta solidez que resultaba difícil refutarlo”.

Es precisamente esta coherencia o incoherencia interna de los argumentos, esta corrección o incorrección, esta suerte de coordinación adecuada, del pensamiento consigo mismo y no su adecuación a la realidad, no la verdad de las afirmaciones empíricas que entran en juego, lo que le interesa a la lógica. De esta primera característica de lo objetivo de la lógica surgen, sin embargo, muchas cuestiones que será necesario aclarar. En primer lugar, *¿puede haber coherencia interna en un argumento independientemente de la verdad de sus afirmaciones?*; razonar correctamente, *¿no conduce necesariamente a la verdad?* Este tipo de cuestiones nos llevan a su vez al problema: *¿Qué es, en definitiva, un razonamiento correcto?* Todo lo cual presupone conocer la respuesta a una pregunta previa, muy simple: *¿Qué es, en sentido estricto, un razonamiento?*

Nuestra tarea consistirá, pues, en lo que sigue de tratar de responder a estas cuestiones en orden de complejidad creciente.

¿Qué es un razonamiento?

El concepto de razonamiento se vincula comúnmente al de pensamiento, pero no se identifica con él. En efecto, si bien entendemos que razonar es pensar, también comprendemos que no siempre que pensamos razonamos. Si alguien deja vagar libremente su imaginación, rememorando paisajes o situaciones vividas, entregado al placer estético o a la evocación afectiva a través de sus recuerdos, podemos decir que se halla absorto en sus pensamientos, pero nunca diremos que se encuentra razonando. El concepto de razonamiento se asocia, en cambio, con un pensamiento de tipo netamente cognitivo, que se manifiesta a través de ciertas afirmaciones y no a través de imágenes de índole perceptiva, vagas intuiciones o asociaciones de carácter emotivo.

Alguien razona cuando reflexiona, por ejemplo, del siguiente modo: “La entrevista era para las diez; ya son las diez y media y Pérez aun no llegó. Pero él es una persona responsable y extremadamente puntual. Sin duda, debe haberle ocurrido algo” o “Compraré estas obras del escritor x; dado que todas las obras tuyas me gustaron, seguramente éstas también me gustarán.”

Debemos reconocer, sin embargo, que pocas veces pensamos del modo metódico y disciplinado que muestran los ejemplos, haciendo explícitos todos nuestros supuestos. A menos que el estudio de un tema en especial nos obligue a seguir rigurosamente los pasos de una inferencia, nuestro pensamiento es, por lo general, algo errante e indisciplinado y procede un poco elípticamente, llevándonos a ciertas conclusiones por caminos que nosotros mismos ignoramos.

La situación cambia cuando nos vemos obligados a justificar o fundamentar nuestras creencias. Entonces debemos reconstruir y expresar mediante el lenguaje la cadena de conocimientos que se hallaba implícita y desordenada en

nuestra mente. Todo el que disputa o polemiza, todo el que debe sustentar una tesis, como v. gr., el abogado, el juez, el expositor científico o filosófico, el estadista, etc.; se ve obligado a expresar sus razonamientos, ordenar los supuestos, marcando las conclusiones y los fundamentos, etc.

Será, pues, necesario distinguir dos niveles: *el que corresponde a procesos psíquicos del razonar tal como el se desarrolla de hecho en la mente humana y el que corresponde a su producto objetivo: el razonamiento expresado a través del lenguaje.*

El primero no es objeto de investigación lógica ya que los mecanismos mentales del pensar son fenómenos cuyo estudio compete a una ciencia fáctica: la psicología. Lo que el interesa a la lógica son los razonamientos en sí mismos, como productos, independientemente de su génesis psicológica y tal como ellos quedan formulados a través del lenguaje. Así, por ejemplo, en el caso de los razonamientos expresados arriba, será irrelevante para el lógico si alguien los formuló realmente alguna vez, qué motivaciones pueden haberlo movido a ello, etc. Lo único que le interesa al lógico es si esas formas de argumentar son correctas o no.

Ahora bien, *¿cuál es la característica definitoria de un razonamiento que lo diferencia de otro tipo de expresiones del lenguaje?* En primer lugar, digamos que una única afirmación, un juicio aislado, no constituye por sí sólo un razonamiento. Para que haya razonamiento debe haber un conjunto de juicios o proposiciones (dos o más) y estas proposiciones deben estar vinculadas de una manera tal que una de ellas -la conclusión- se afirme sobre la base de la o las otras -la o las premisas-. *Para que haya razonamiento debe haber el propósito de fundar unas afirmaciones en otras, de extraer unos conocimientos de otros.* Este propósito queda cristalizado en el lenguaje de determinadas expresiones que se anteponen a la conclusión (como 'por lo tanto', 'luego', 'por consiguiente', 'en consecuencia', etc.) u otras que anteceden a las premisas (como 'dado que', 'puesto que', 'ya que', etc.) En el primer ejemplo dado anteriormente aparece la expresión 'sin duda' precediendo a la conclusión (que debe interpretarse como 'teniendo en cuenta lo expuesto, se sigue sin lugar a duda que...'); en el segundo ejemplo se antepone 'dado que' a la premisa y 'seguramente' a la conclusión (giro que interpretamos como 'dado lo anterior se puede afirmar con seguridad que...')

Ahora bien, es sabido que cuando alguien emite una afirmación está expuesto a equivocarse, ya que un juicio puede ser verdadero si corresponde o se adecua realmente al hecho descrito (como cuando decimos, por ejemplo, "el sol es una estrella") o falso, si no corresponde o se adecua a él (como en el caso, v.gr, de "la ballena es un pez"). Del mismo modo es posible también equivocarse al argumentar, cuando alguien formula un razonamiento, expone un argumento de modo tal de extraer determinadas conclusiones a partir de ciertas proposiciones iniciales, puede hacerlo mejor o peor, como vimos en los ejemplos 5 y 6 del párrafo anterior. Si acertar al formular un juicio es hacerlo corresponder con los hechos, *¿En qué consiste el acierto al formular un razonamiento? ¿En qué casos un razonamiento es correcto y cuando no lo es?*

Para responder a esta cuestión será necesario previamente efectuar una distinción entre distintos tipos de razonamientos, porque el problema de la corrección o incorrección tiene distinta significación según de qué clase de razonamiento se trate.

Razonamiento deductivo y no deductivo

Podemos distinguir dos grandes grupos de razonamientos: los deductivos y los no deductivos.

En general, los razonamientos deductivos son aquellos en que se pretende que la conclusión se desprenda de las premisas *por necesidad*, en virtud de ciertas características lógicas, puramente formales de las mismas. En cambio en el caso de los razonamientos que no son deductivos el fundamento que las premisas dan a la conclusión no se presenta como definitivo y concluyente; la conclusión, aunque sustentada o hecha probable por las premisas, no está implicada por éstas. Un caso importante del razonamiento no deductivo es el llamado razonamiento inductivo o, simplemente, inducción. La inducción se caracteriza porque en ella, a partir de la afirmación de que varios elementos o miembros de una clase dada poseen determinada propiedad, se concluye que todos los miembros de dicha clase tienen esa misma propiedad.

Un ejemplo de razonamiento inductivo sería el que se practica en la investigación acerca de las propiedades terapéuticas de una droga. Después de haber confirmado en un importante número de individuos afectados por una misma dolencia que la droga resulta eficaz, se generaliza y se supone que resultará eficaz para *todos* los miembros de la clase de individuos afectados por esa enfermedad.

Este tipo de razonamiento en que se arriba a una generalización es extremadamente frecuente en la vida cotidiana pero, en rigor, no presenta necesidad lógica, porque del hecho de que en un cierto número de casos se haya verificado una determinada circunstancia no puede inferirse con carácter necesario que en el resto de los casos se seguirá verificando; puede surgir alguna contingencia hasta ese momento no considerada, la verdad de las premisas puede deberse en mayor o menor medida a las condiciones especiales en que se desarrollaron los experimentos u observaciones, etc. Naturalmente, cuanto mayor sea el número de casos considerados en las premisas (y más variadas sean las circunstancias en que éstos se recluten) parece aumentar la probabilidad de que la conclusión sea verdadera, pero nunca se llegará a una certeza definitiva (a menos que el número de casos considerados en las premisas sea igual al número total de miembros de la clase en cuestión, que es el caso de la llamada inducción completa). En el razonamiento inductivo hay, pues, grados de probabilidad, la conclusión se ve sustentada en mayor o menor medida por las premisas.

En el razonamiento deductivo, en cambio, esto no ocurre. O bien la conclusión se desprende lógicamente de las premisas o bien no se desprende de ellas. No hay grados de error ni grados de acierto. Y esto puede determinarse, contrariamente a lo que ocurre en el razonamiento inductivo, teniendo en cuenta exclusivamente

sus características formales o estructurales, con independencia de su contenido informativo.

Hecha esta aclaración podemos, pues, retomar el interrogante que nos formuláramos en el párrafo anterior.

¿Qué es un razonamiento correcto?

En primer lugar debemos introducir una aclaración terminológica. Digamos que así como la "virtud" de un juicio se llama *verdad*, la "virtud" de un razonamiento se llama *corrección o validez*. Los razonamientos no son ni verdaderos ni falsos, es éste un atributo que no les corresponde; ellos son correctos o incorrectos (válidos o inválidos) según cumplan o no con determinados requisitos.

¿Cuáles son esos requisitos? En un primer momento podríamos pensar que el razonamiento correcto es aquel que nos permite arribar a un conocimiento cierto, a juicios o afirmaciones que concuerden o se ajusten a los hechos, y que un razonamiento incorrecto es el que nos conduce a un error.

Así, por ejemplo, si nos dieran a elegir entre los razonamientos siguientes:

1. Todos los insectos son aves y todas las aves son vertebrados; por consiguiente, todos los insectos son vertebrados.
2. Si Argentina es un país sudamericano, entonces no es un país europeo. Pero la Argentina no es un país europeo. Luego, es un país sudamericano.

y nos dijeran que uno de ellos es válido y el otro no lo es, podríamos sentirnos inclinados a escoger como inválido al primero, que nos ha conducido a una falsedad, y como válido al segundo, que nos llevó a una verdad. Sin embargo, no es así, sino todo lo contrario; 1 es un razonamiento válido y 2 es un razonamiento inválido.

Esto puede resultar un tanto paradójico y llevar al lector a la apresurada impresión de que nada hay tan ilógico como la lógica, puesto que ella nos obliga a aceptar la validez de un razonamiento en el que se concluye una afirmación tan disparatada como aquella de que los insectos son vertebrados y nos obliga a rechazar como inválido un razonamiento que nos permite llegar a la irreprochable conclusión de que Argentina es un país sudamericano.

Este desconcierto se origina en la errónea identificación inicial de dos conceptos diferentes: validez y verdad. Pero esta identificación debe dejarse de lado ya que, como quedó dicho, la validez se predica de los razonamientos- no de juicios o proposiciones-, en tanto la verdad se predica de juicios –no de razonamientos- y *designan propiedades diferentes*.

Afirmar que un razonamiento es correcto o válido no equivale a decir que todas sus proposiciones componentes son verdaderas, ni siquiera que su conclusión lo es.

Pero si la validez de un razonamiento no se identifica ni se reduce a la verdad de sus juicios componentes, ¿En qué consiste? ¿Cómo se la reconoce?

Hemos dicho que el razonamiento es un conjunto de proposiciones, una de las cuales presuntamente se desprende o infiere de las anteriores. Esta definición nos sugiere la idea de que un razonamiento es algo así como un encadenamiento o interrelación entre ciertos elementos (proposiciones), uno de los cuales (la conclusión) aparece como último eslabón o elemento final a cuyo sostén contribuyen todos los demás (las premisas).

Validez y Verdad

Lo que acabamos de ver explica el aparente absurdo planteado al principio del párrafo anterior a propósito del razonamiento 1; este es un razonamiento válido porque su forma o estructura lo es, a pesar de conducirnos a una falsedad.

Pero, *¿como es posible, insistimos, que un razonamiento válido conduzca a error?* Lo que ocurre es que, como quedo dicho, la validez del razonamiento depende de su estructura y ésta es válida porque la conclusión se desprende necesariamente de las premisas; si llegamos a una falsedad no ha sido por la "culpa" de la forma de razonamiento, sino a causa del contenido de las premisas.

El lector podrá preguntarse aquí, legítimamente, para qué sirve razonar correctamente (esto es, a través de estructuras o formas válidas) si de todas maneras esto no nos protege contra el error. Después de todo -se dirá- lo que realmente interesa es que nuestro conocimiento sea verdadero, se ajuste a la realidad. *¿Por qué ha de ser estimable la validez de una forma de razonamiento si ella no se responsabiliza por la verdad de la conclusión; es decir, si no nos garantiza la obtención de un auténtico conocimiento?* Y, por ende, *¿qué valor tiene una disciplina cuyo objeto es estudiar, precisamente, la validez del razonamiento?*

En verdad, tal imputación contra la lógica no puede ser pasada por alto; mas, afortunadamente, poseemos una respuesta apropiada para su defensa; en efecto, *la estructura válida se hace responsable de la verdad de la conclusión, y aún más, la garantiza totalmente, siempre y cuando las premisas de las que se parta sean verdaderas.*

Si las premisas son verdaderas y la estructura es correcta o válida, la conclusión del razonamiento ha de ser siempre, necesariamente, verdadera, como se desprende de la definición de forma válida. Y este es el mérito -nada despreciable- que encierra la validez: *permite preservar la verdad del conocimiento.* En este sentido, una forma válida de razonamiento sería algo así como una máquina perfecta, que no fallara jamás: si se la nutre con materia prima (premisas) de buena calidad (verdaderas) el producto obtenido (conclusión) ha de ser siempre bueno (verdadera); pero ninguna máquina, cualquiera sea el grado de su perfección, puede garantizar la bondad del producto si se la alimenta con materia prima deficiente; en nuestro caso, ninguna forma de razonamiento, aunque sea válida, puede garantizar que llegaremos a la verdad si partimos del error. Si alguien parte como en el caso del razonamiento 1, de la creencia de que los insectos son aves, no debemos sorprendemos de que llegue a la conclusión de que son vertebrados, pero ello no se debe a que haya razonado mal, sino a que sus creencias iniciales eran falsas.

Esto explica también el ejemplo del fiscal que planteamos en el párrafo 2. Puede ser que él haya dado a su razonamiento una forma correcta -y, por lo tanto, imposible de criticar- y concluya, finalmente, un juicio falso; pero si esto fuera realmente así, quien se ocupara de la defensa debería buscar a través de cuál o cuáles de las premisas empleadas se ha filtrado la falsedad.

EJERCICIOS

Con base a la lectura anterior, responda:

1. Dé una definición de lógica.
2. El razonamiento que concluye generalidades a partir de particularidades es:
3. El razonamiento que concluye particularidades a partir de generalidades es:
4. Indique la diferencia entre validez y verdad.
5. ¿Qué es un razonamiento? Y ¿Cuáles son sus partes?

Con base a la lectura anterior, indique si cada uno de los siguientes enunciados es FALSO o VERDADERO.

6. La lógica se encarga de establecer si los hechos son verdaderos o falsos.
7. Un razonamiento válido siempre conduce a una conclusión verdadera.
8. La validez de un razonamiento depende únicamente de su estructura.
9. El razonamiento inductivo concluye con certeza total.
10. En el razonamiento deductivo las premisas soportan claramente a la conclusión.

SEMANA 2

CONTENIDO

1. Propositiones simples
2. Enunciados que no son proposiciones
3. Propositiones compuestas
4. Negación de una proposición simple

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Identificar qué tipo de enunciados pueden clasificarse como proposiciones.
2. Diferenciar los enunciados que no son proposiciones.
3. Identificar proposiciones simples y proposiciones compuestas.
4. Expresar la negación correcta de una proposición simple, sea ésta en lenguaje normal o en lenguaje matemático.

Proposiciones

Una proposición se define como una aseveración (se llama así a un enunciado afirmativo) que puede ser verdadera ó falsa, pero no ambas.

Son ejemplos de proposiciones:

- a. Guatemala es un país de Centroamérica.
- b. $23 + 10 = 54$

Cada uno de los enunciados anteriores es verdadero ó falso.

Entonces, con base a la definición de proposición, los siguientes enunciados **no son proposiciones**:

- a. Cómete la cena.
- b. ¿A qué hora comienza la película que vamos a ver?
- c. Maradona fue mejor jugador de futbol que Pelé.
- d. Esta oración es falsa.

No se puede determinar si estos enunciados son verdaderos o falsos.

El primero es una orden, el segundo es una pregunta y el tercero es una opinión. El cuarto enunciado es una paradoja: "Esta oración es falsa". Si suponemos que es verdadero, entonces es falso y si suponemos que es falso, entonces es verdadero.

La combinación de dos o más proposiciones simples forma una **proposición compuesta**. Las palabras como *y, o, no, sí...entonces...* son utilizadas para unir proposiciones simples y reciben el nombre de **conectivos lógicos**.

Tratemos de identificar si los siguientes enunciados son proposiciones compuestas ó no:

- a. *Leo la Prensa Libre y Nuestro Diario.*

Es una proposición compuesta. Las proposiciones simples que la componen son:

Leo la Prensa Libre.

Leo Nuestro Diario.

Ambas están unidas por el conectivo "y".

- b. *Juan o Silvia me ayudarán con la tarea de inglés.*

Es una proposición compuesta. Las proposiciones simples que la componen son:

Juan me ayudará con la tarea de inglés.

Silvia me ayudará con la tarea de inglés.

Ambas están unidas por el conectivo "o".

- c. *A mi sobrino le gusta el cuento de Hansel y Gretel.*

Es una proposición simple.

En este caso la palabra "y" se utiliza para unir los nombres de los protagonistas de este famoso cuento para niños, no para unir dos proposiciones simples.

d. *Si estudias bastante, entonces aprobarás el curso.*

Es una proposición compuesta. Las proposiciones simples que la componen son:

Tú estudias bastante.

Tú aprobarás el curso.

Unidas por el conectivo “*si..., entonces...*”

e. *Hoy no es martes.*

Aunque esta proposición no consta de más de un componente, debe considerarse una proposición compuesta. Recordemos que definimos como proposición a una declaración afirmativa, que es falsa o verdadera.

La proposición simple de este ejemplo es:

Hoy es martes.

Y es modificada por el conectivo “*no*”.

La proposición “Hoy no es martes” **es la negación** de “Hoy es martes”.

Observe que la característica fundamental de la negación es que cambia el valor de verdad de la proposición original; es decir, si la proposición original es verdadera, su negación será falsa y si la proposición original es falsa, su negación será verdadera.

Normalmente, para negar una proposición simple basta con introducir la palabra “no”:

El sol es una estrella.

Negación: El sol no es una estrella.

Algunas veces se podrá utilizar el antónimo de una palabra para formar la negación de una proposición, por ejemplo:

Es de día.

Negación: No es de día.

Que sería equivalente a decir: Es de noche.

El uso del antónimo no siempre es correcto para formar la negación de una proposición, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Carlos tiene un carro negro.

Es incorrecto negarlo diciendo: Carlos tiene un carro blanco.

La negación correcta es: “Carlos no tiene un carro negro” o “Es falso que Carlos tenga un carro negro” o “No es cierto que Carlos tiene un carro negro”.

Porque para cambiar el valor de verdad de la proposición original, basta con que Carlos tenga un carro de cualquier color que no sea negro, o que no tenga carro.

Negación de desigualdades:

Para negar una desigualdad **no** utilice una diagonal sobre el signo de comparación. Es decir, la negación de $m > 5$ no se acepta como $m \neq 5$.

La negación de "m es mayor que 5" es "m no es mayor que 5", eso significa que m debe ser menor **o igual** que 5:

$$m \leq 5$$

De forma similar, dada la desigualdad:

$c \leq 17$ (c es menor o igual que 17), su negación implica decir que c no es menor ni igual que 17, entonces, c solamente puede ser mayor que 17:

$$c > 17$$

EJERCICIOS

Determine si cada una de las oraciones siguientes es o no una proposición:

1. El código de área telefónica de Guatemala es 502.
2. Ceda el paso al tráfico en sentido contrario.
3. $5 + 8 = 12$ o $4 - 3 = 2$
4. Andrew Johnson fue Presidente de los Estados Unidos de América en 1867.
5. La Guerra de las Galaxias fue la película que recaudó mayores ingresos en 1999.
6. Siéntate y compórtate.
7. Un galón de leche pesa más de 4 libras.

Determine si cada una de las proposiciones siguientes es compuesta:

8. Mi hermano contrajo matrimonio en Londres
9. Clara es menor de 29 años de edad y también Angelina.
10. El letrero en la parte posterior del auto dice: ¡A California o la muerte!
11. Si Miguel es un político, entonces Jonás es un cura.

Escriba la negación de cada una de las proposiciones siguientes:

12. Se regarán las flores.
13. Hoy no llovió en Zacapa.
14. La ballena no es un pez.
15. Antonio y Susana se casarán el próximo sábado.

Escriba la negación para cada desigualdad. No utilice una diagonal sobre el símbolo.

16. $y > 12$
17. $x < -6$
18. $q \geq 5$
19. $t \leq 19$
20. Trate de escribir alguna proposición sin utilizar un verbo.
21. Indique en sus palabras, ¿qué entiende por paradoja?
22. Busque algunos ejemplos de paradojas.
23. Explique por qué la negación de " $r > 4$ " no es " $r < 4$ "

RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. No es una proposición, es una orden.
3. Sí es proposición. Es una proposición compuesta. Las dos proposiciones simples que la componen son falsas.
9. Sí, es compuesta. Las proposiciones simples que la componen son: Clara es menor de 29 años y Angelina es menor de 29 años.
15. Antonio y Susana no se casarán el próximo sábado.
17. $x \geq -6$. (Si x no es menor que -6, entonces es mayor o igual).

FUENTE:

Miller, H. y Hornsby. (2008). *Estrategias de Razonamiento*. Capítulo 1. Guatemala: Pearson-URL.

SEMANA 3

CONTENIDO

1. Símbolos
2. Conjunción
3. Disyunción
4. Tablas de Verdad

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Trasladar proposiciones del lenguaje normal al simbólico y viceversa.
2. Identificar proposiciones compuestas como conjunciones y disyunciones.
3. Elaborar tablas de verdad.

Símbolos

Para simplificar el manejo de la Lógica se utilizan símbolos. Las proposiciones simples se representan con letras, como p , q ó r , mientras que los conectivos se representan con símbolos, algunos de los cuales se representan en la tabla siguiente:

Conectivo	Símbolo	Tipo de proposición
no	\sim	Negación
y	\wedge	Conjunción
o	\vee	Disyunción
Si..., entonces...	\Rightarrow	Condición
... si y sólo si ...	\Leftrightarrow	Doble condicional

EJEMPLO 1

Sea la proposición

p: Ramiro de León fue Presidente de Guatemala en 2006.

Su negación será la proposición

$\sim p$: Ramiro de León no fue Presidente de Guatemala en 2006.

Para las proposiciones:

p: Hoy estamos a 20°.

q: Hoy es martes.

Transcriba cada proposición simbólica en palabras.

- a. $p \vee q$ Hoy estamos a 20° o es martes.
- b. $\sim p \wedge q$ Hoy no estamos a 20° y es martes.
- c. $\sim(p \vee q)$ No es el caso que hoy estemos a 20° o que sea martes.
- d. $\sim(p \wedge q)$ No es el caso que hoy estemos a 20° y que sea martes.

La proposición del inciso c. por lo regular se traduce como “ni p ni q”.

Conjunción

Es una proposición compuesta que une dos proposiciones a través del conectivo “y”. La conjunción p y q, se simboliza $p \wedge q$.

Para analizar la tabla de verdad de la conjunción, utilicemos el siguiente ejemplo: un colegio desea contratar un catedrático con las siguientes características; que sepa Matemáticas y que sepa Física. Entonces nuestras proposiciones simples serían:

p: Sabe Matemáticas.

q: Sabe Física.

La **siguiente tabla de verdad** muestra las cuatro combinaciones posibles de valores de verdad para la conjunción $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Para este ejemplo en particular podremos decir que la conjunción será verdadera cuando el catedrático sea contratado.

La primera fila de esta tabla de verdad nos dice que ambas proposiciones simples son verdaderas, es decir, el catedrático sabe Matemáticas y sabe Física, entonces queda contratado (en otras palabras, la conjunción es verdadera).

La segunda fila nos dice que sólo la primera proposición simple es verdadera y la otra es falsa, es decir, el catedrático sabe Matemáticas pero no sabe Física, entonces no lo contratan (la conjunción es falsa).

La tercera fila indica que la primera proposición simple es falsa y la segunda verdadera, es decir, el catedrático no sabe Matemáticas y si sabe Física; entonces no lo contratan (la conjunción es falsa).

La cuarta fila indica que ambas proposiciones simples son falsas. El catedrático no sabe Matemáticas y tampoco sabe Física, entonces no lo contratan (la conjunción es falsa).

Podemos resumir entonces, que la conjunción es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones que la componen son verdaderas. O, para que la conjunción sea falsa, basta que una de las dos proposiciones que la componen sea falsa.

EJEMPLO 2

Sea p la proposición: " $5 > 3$ " y q la proposición: " $6 < 0$ ", encuentre el valor de verdad de $p \wedge q$.

Aquí p es verdadera y q es falsa si observamos el segundo renglón de la tabla de verdad de la conjunción, veremos que $p \wedge q$ es falsa.

En algunos casos, el conectivo lógico pero es usado en proposiciones compuestas:

Él quiere ir a las montañas pero ella quiere ir a la playa.

En este caso, se usa el conectivo *pero* en lugar de *y* para darle un énfasis diferente a esta proposición, que sigue siendo una conjunción.

Disyunción

En el lenguaje ordinario, la palabra no puede tener un sentido ambiguo. La expresión "esto o aquello" puede significar tanto "esto o aquello o ambos", como "esto o aquello, pero no ambos". Por ejemplo, la proposición

Pintaré la pared o el techo.

quizá tenga el siguiente significado: "Pintaré la pared o pintaré el techo o pintaré ambos". Por otra parte, la proposición

Iré a la tienda en bicicleta o en moto.

quizá signifique "iré a la tienda en bici o iré a la tienda en moto, pero no en ambas".

Normalmente, el símbolo \vee representa la primera disyunción que se menciona. Esto es, $p \vee q$ que significa " p ó q , o ambos". Por ello se denomina *disyunción inclusiva*, o sencillamente **disyunción**.

En el lenguaje común, la disyunción implica la idea de “cualquiera”. Por ejemplo, la disyunción

Tengo una moneda de 25 centavos o una de 10.

es verdadera, siempre que yo tenga cualquiera de las dos o ambas. La única manera en que esta disyunción pudiera ser falsa sería si yo no tuviera ninguna de las dos monedas.

Una disyunción es falsa solamente si las dos proposiciones que la componen son falsas. En otras palabras, basta que una de las dos proposiciones de una disyunción sea verdadera para que ésta sea verdadera. A continuación se muestra la tabla de verdad para la disyunción:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La expresión: “ $7 \leq 3$ ” es una disyunción que debe entenderse como “ $7 < 3$ ” o “ $7 = 3$ ”. Como ambas proposiciones son falsas, la disyunción original es falsa.

EJEMPLO 3

Suponga que p es falsa, q es verdadera y r es falsa. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición compuesta $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$?

Para resolver este ejercicio, primero sustituimos cada proposición simple por su correspondiente valor de verdad, luego se operan las proposiciones agrupadas entre paréntesis y finalmente se encuentra el valor de verdad de la proposición compuesta original:

$$\begin{aligned}
 &\sim p \wedge (q \vee \sim r) \\
 &\sim F \wedge (V \vee \sim F) \\
 &V \wedge (V \vee V) \\
 &V \wedge V \\
 &V
 \end{aligned}$$

La letra V en el último renglón indica que la proposición original es verdadera.

Tablas de verdad

En el ejemplo anterior, el valor de verdad para una proposición dada se determinó usando tablas de verdad básicas, ya se conoce el valor de verdad de cada proposición que la compone. En el ejemplo siguiente se crea una tabla de verdad completa, tomando en consideración todas las posibles combinaciones de valores de verdad para las proposiciones que la componen.

Elabore una tabla de verdad para $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$.

Comience por listar todas las posibles combinaciones de valores de verdad para p y q . Después, escriba los valores de verdad de $\sim p$

p	q	$\sim p$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sólo utilice la columna de $\sim p$ y q y aplique la tabla de verdad de la conjunción para determinar los valores de verdad de $\sim p \wedge q$. Escríbalos en una columna aparte.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Luego incluya una columna para $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Por último, agregue una columna para la proposición compuesta entera. Aplique la tabla de verdad de la disyunción para combinar $\sim p \wedge q$ con $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V

Número de renglones en una tabla de verdad

Una proposición lógica compuesta de n proposiciones simples tendrá 2^n renglones en su tabla de verdad.

Por ejemplo, si una proposición compuesta incluye tres componentes p , q y r , entonces su tabla de verdad tendrá $2^3 = 8$ renglones y la tabla básica, que muestra todas las posibles combinaciones de valores de verdad, se elabora de la siguiente manera:

p	q	r	proposición compuesta
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

EJERCICIOS

Responda a las siguientes preguntas

1. Si q es falsa, ¿cuál debe ser el valor de verdad de $(p \wedge \sim q) \wedge q$?
2. Si $p \wedge q$ es verdadera y p es verdadera, entonces q debe ser
3. Si $\sim (p \vee q)$ es verdadera, ¿cuáles deben ser los valores de verdad de sus proposiciones componentes?
4. ¿La proposición $3 \geq 1$ es una conjunción o una disyunción? ¿Por qué?
5. ¿Es posible que la tabla de verdad de una proposición compuesta tenga 48 renglones? ¿Por qué sí o por qué no?
6. Si la tabla de verdad de una proposición compuesta tiene 16 renglones, ¿cuántas proposiciones simples la componen?

Si p representa una proposición verdadera y q y r representan proposiciones falsas, encuentre el valor de verdad de las proposiciones compuestas siguientes:

7. $(p \wedge r) \vee \sim q$
8. $\sim (p \wedge q) \wedge (r \vee \sim q)$
9. $\sim [(\sim p \wedge q) \vee r]$

Elabore una tabla de verdad para cada una de las proposiciones compuestas siguientes:

10. $\sim p \vee \sim q$
11. $(\sim p \wedge q) \wedge r$
12. $(p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee p)$

SEMANA 4

CONTENIDO

1. Proposiciones equivalentes
2. Negación de conjunciones y disyunciones
3. Leyes de Morgan

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Aplicar el concepto de proposiciones equivalentes.
2. Negar correctamente una conjunción o una disyunción.
3. Reconocer las Leyes de De Morgan.

Proposiciones equivalentes

Una aplicación de las tablas de verdad consiste en mostrar que dos proposiciones son equivalentes; por definición, dos proposiciones son equivalentes si tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles. Las columnas de cada tabla de verdad que fueron las últimas en llenarse serán exactamente las mismas para las proposiciones equivalentes.

EJEMPLO 3

¿Son equivalentes las proposiciones $\sim p \wedge \sim q$ y $\sim(p \vee q)$?

Para saberlo, se hace una tabla de verdad para cada una de las proposiciones con el resultado siguiente:

p	q	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$\sim(p \vee q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F

F	F	V
---	---	---

Puesto que los valores de verdad son los mismos en todos los renglones, las proposiciones $\sim p \wedge \sim q$ y $\sim(p \vee q)$ son equivalentes. La equivalencia se escribe con un símbolo de tres barras \equiv .

Se dice entonces: $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$.

Del mismo modo, las proposiciones $\sim p \vee \sim q$ y $\sim(p \wedge q)$ son equivalentes.

Llamamos a estas equivalencias las Leyes de De Morgan.

Leyes de De Morgan

Para cualesquiera proposiciones p y q

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Y

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

OBSERVE QUE la negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones y la negación de una conjunción es la disyunción de las dos negaciones.

EJEMPLO 1

Encuentre la negación de cada una de las proposiciones siguientes, utilizando las leyes de De Morgan.

- a. Yo obtuve una A o yo obtuve una B.

Si p representa "Yo obtuve a" y q "Yo obtuve B", entonces la proposición compuesta se simboliza por $p \vee q$. La negación de $p \vee q$ es $\sim(p \vee q)$; de acuerdo con una de las leyes de De Morgan, esto es equivalente a

$$\sim p \wedge \sim q,$$

o, en otras palabras,

Yo no obtuve una A y yo no obtuve una B.

Esta negación es razonable (la proposición original indica que yo obtuve cualquiera de las dos: una A o una B); la negación dice que yo no obtuve *ninguna* de las dos calificaciones.

- b. Ella no lo intentará y el tendrá éxito.

De una de las leyes de De Morgan, $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, así que la negación resulta ser

Ella lo intentara o el no tendrá éxito.

c. $\sim p \vee (q \wedge \sim p)$

Niegue ambos componentes de la preposición y cambie \vee por \wedge .

$$\sim[\sim p \vee (q \wedge \sim p)] \equiv p \wedge \sim(q \wedge \sim p)$$

Aplicando una vez más la ley de De Morgan.

$$\begin{aligned} p \wedge \sim(q \wedge \sim p) &\equiv p \wedge (\sim q \vee \sim(\sim p)) \\ &\equiv p \wedge (\sim q \vee p) \end{aligned}$$

Una tabla de verdad mostrara que las proposiciones

$$\sim p \vee (q \wedge \sim q) \text{ y } p \wedge (\sim q \vee p)$$

son ambas negaciones.

EJERCICIO

Utilice una de las leyes de De Morgan para escribir la negación de cada una de las proporciones siguientes:

1. Puedes pegarme ahora o puedes pegarme después.
2. Yo no voy o ella va.
3. Es verano y no hay nieve.
4. $\frac{1}{2}$ es un numero positivo y -12 es menor que cero.
5. Yo dije si, pero ella dijo no.
6. Paulina trató de vender el libro, pero no pudo hacerlo.
7. $5 - 1 = 4$ y $9 + 12 \neq 7$
8. $3 < 10$ o $7 \neq 2$

SEMANA 5 y 6

CONTENIDO

1. Condicional
2. Tablas de verdad utilizando condicionales.

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Reconocer proposiciones condicionales e identificar sus componentes.
2. Conocer la tabla de verdad de la condicional.
3. Conocer el valor de verdad de una condicional.

Condicionales

Una proposición **condicional o implicación** es una proposición compuesta que usa el conector *sí..... entonces*. Por ejemplo, algunas proposiciones condicionales son:

Si leo durante muchas horas, entonces me dolerá la cabeza.

Si las miradas matan, *entonces* estaría muerto.

Si él no regresa pronto, *entonces* tendrías que ir a buscarlo.

En cada una de estas proposiciones condicionales, el componente que aparece después de la palabra *si* impone una condición (aunque no necesariamente la única) con la cual la proposición que sigue a la palabra *entonces* será verdadera. Por ejemplo, la afirmación “*Si la temperatura está por encima de los 90° F, entonces iré a las montañas*” establece una condición posible bajo la cual iré a las montañas: si la temperatura es de más de 90° F.

La condicional se representa mediante una flecha, de modo que la proposición “*si p, entonces q*” se simboliza:

$$p \Rightarrow q.$$

La expresión $p \Rightarrow q$ se lee como “*p implica a q*” o “*si p, entonces q*”. En la condicional $p \Rightarrow q$, la proposición p se denomina **antecedente** (o **hipótesis**), mientras que a la proposición q se le llama **consecuente** (o **conclusión**).

El conectivo condicional no siempre expresa de manera explícita. Esto es, podría estar oculto en una expresión común y corriente. Por ejemplo, la proposición:

Las niñas grandes no lloran.

puede escribirse en la forma *si....entonces* como sigue:

Si eres una niña grande, entonces no debes llorar.

Veamos otro ejemplo, La afirmación

Es difícil estudiar cuando se está distraído.

Puede escribirse

Si se está distraído, entonces es difícil estudiar.

La tabla de verdad de la condicional es un poco mas difícil de determinar que las demás tablas de la sección previa. Para ver cómo se elabora la tabla de verdad de la condicional, analicemos una declaración hecha por una mujer de la política de Estados Unidos, la senadora Bridget Terry.

Si resulto electa, entonces los impuestos reducirán.

Como antes, hay cuatro posibles combinación de valores de verdad para los dos componentes, de la proposición. Sea p la proposición “*resulto electa*” y q “*los impuestos reducirán.*”

Conforme analizamos las cuatro posibilidades, sería útil pensar en términos de lo siguiente “¿Mintió la senadora Terry?”. Si lo hizo, entonces la proposición condicional se considera falsa; si no mintió, entonces la proposición es verdadera.

<i>Posibilidades</i>	<i>¿Electa?</i>	<i>¿Se reducirán los impuestos?</i>	
1	SI	Si	$p \text{ es } V, q \text{ es } V$
2	Si	No	$p \text{ es } V, q \text{ es } F$
3	No	Si	$p \text{ es } F, q \text{ es } V$
4	No	No	$p \text{ es } F, q \text{ es } F$

Las cuatro posibilidades son las siguientes

1. En el primer caso, suponga que la senadora fue electa y los impuestos bajaron (p es V y q es V). La senadora dijo la verdad, de modo que escribimos V en la primera fila de la tabla de verdad. (No estamos afirmando que los impuestos bajaron *debido a que* ella fue elegida; es posible que no haya tenido nada que ver con eso).
2. En el segundo caso, suponga que la senadora resultó electa y los impuestos no bajaron (p es V, q es F). Entonces la senadora no dijo la verdad (esto es, ella mintió). Así, ponemos F en la segunda fila de la tabla de verdad.
3. En el tercer caso, supongamos que la senadora fue derrotada pero los impuestos bajaron de todos modos (p es F, q es V). La senadora Terry no mintió: prometió una reducción de impuestos sólo si resultaba electa. No dijo nada acerca de qué pasaría si no resultaba electa. De hecho, su promesa de campaña no da información sobre lo que ocurriría en caso de que perdiera. Dado que no podemos decir que la senadora mintió, ponga V en la tercera fila de la tabla de la verdad.
4. En el último caso, suponga que la senadora fue derrotada y que los impuestos no bajaron (p es F, q es F). No podemos culparla, dado que ella prometió reducir los impuestos solo si resultaba elegida. De este modo, en la última fila de la tabla de verdad va una V.

La tabla de verdad ya concluida para la condicional queda como sigue:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hay que hacer hincapié en que el uso del conectivo de la condicional no indica una condición de causa-efecto. Es posible colocar una flecha entre cualesquiera dos proposiciones para generar una proposición compuesta. Por ejemplo, la proposición:

Si apruebo matemáticas, entonces el sol saldrá mañana.

Es verdad, dado que el consecuente lo es. (Vea el recuadro después del ejemplo 1.) Sin embargo, no hay una relación de causa-efecto entre que yo sea aprobado en matemáticas y que el sol salga mañana. El sol saldrá sin importar qué calificación haya obtenido en el curso.

EJEMPLO 1

Dadas p , q y r falsas, determine la tabla de verdad de la proposición

$$(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q).$$

Usando el método abreviado, podemos reemplazar p , q y r por F (ya que cada una es falsa) proceder utilizando las tablas de verdad de la negación y la condicional según sea necesario.

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow \sim q) &\Rightarrow (\sim r \Rightarrow q) \\(F \Rightarrow \sim F) &\Rightarrow (\sim F \Rightarrow F) \\(F \Rightarrow V) &\Rightarrow (V \Rightarrow F) \\V &\Rightarrow F \\F\end{aligned}$$

La proposición $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ es Falsa, cuando p , q y r son falsas.

La siguiente observación se desprende de la tabla de verdad para $p \Rightarrow q$.

Características especiales de las proposiciones condicionales

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. $p \Rightarrow q$ es falsa sólo cuando el antecedente es <i>verdadero</i> y el consecuente es <i>falso</i>.2. Si el antecedente es <i>falso</i>, entonces $p \Rightarrow q$ es automáticamente <i>verdadera</i>.3. Si el consecuente es <i>verdadero</i>, entonces $p \Rightarrow q$ es automáticamente <i>verdadera</i>. |
|---|

EJEMPLO 2

Escriba *falso* o *verdadero* para cada proposición. Aquí V representa una proposición *verdadera* y F una *falsa*.

(a) $V \Rightarrow (6 = 3)$

Dado que el antecedente es verdadero mientras que el consecuente, $6 = 3$, es falso, la proposición dada es *falsa*, de acuerdo con la primera condición mencionada anteriormente.

(b) $(5 < 2) \Rightarrow F$

El antecedente es *falso*, entonces la proposición dada es *verdadera* de acuerdo con la segunda condición.

(c) $(3 \neq 2 + 1) \Rightarrow V$

El consecuente es *verdadero*, lo que hace que la proposición sea verdadera de acuerdo con la tercera característica de las proposiciones condicionales.

Las tablas de verdad para proposiciones compuestas que incluyen condicionales se elaboraron utilizando las técnicas descritas en la sección anterior.

EJEMPLO 3

Elabore una tabla de verdad para cada proposición dada.

a. $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

Primero, inserte los valores de verdad de $\sim p$ y de $\sim q$. Luego encuentre el valor de verdad de $\sim p \Rightarrow \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

A continuación utilice $\sim p$ y q para determinar los valores de verdad de $\sim p \wedge q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

Ahora, determine los valores de verdad de $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F

b. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

Efectúe pasos similares a los realizados en el inciso anterior.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Como muestra la tabla de verdad del ejemplo 3(b), la proposición $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ siempre es verdadera, sin importar cuáles sean los valores de verdad de sus componentes. A esta clase de proposición se llama **Tautología**, otros ejemplos de tautológicas son (como puede comprobarse mediante sus tablas de verdad correspondientes) serían $p \vee \sim p$, $\Rightarrow p$, $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim(q \wedge p)$, etc.

EJERCICIO

Escriba cada proporción utilizando el conectivo si..... entonces. Parafrasee o agregue palabras cuando sea necesario.

1. Debe estar vivo si está respirando.
2. Any Morgan visita Hawaii cada verano.
3. Todas las pinturas cuentan una historia.
4. Ningún conejillo de indias es un erudito.
5. Oso Corredor ama a Pequeña Paloma Blanca.

En los ejercicios siguientes determine si cada proposición es falsa o verdadera.

6. Si el antecedente de una proposición condicional es falso, la proposición condicional es verdadera.
7. Si q es verdadera, entonces $(p \wedge q) \Rightarrow q$ es verdadera.
8. La negación de "Si los cerdos vuelan, yo lo creería" es "Si los cerdos no vuelan, yo no lo creería".
9. Dada una $\sim p$ que es verdadera, y una q que es falsa, la condicional $p \Rightarrow q$ sería verdadera.
10. En pocas palabras, explique cómo determinar el valor de verdad de una proporción condicional.

Clasifique como verdadero o falso a cada condicional. Aquí V representa una proposición verdadera y F una proposición falsa.

11. $F \Rightarrow (4 \neq 7)$
12. $(6 \geq 6) \Rightarrow F$
13. $(4 = 11 - 7) \Rightarrow (8 > 0)$

Sea s la proposición "ella tiene una serpiente por mascota", p "él entrena caballos" y m "ellos crían monos". Expresa cada proposición compuesta en palabras.

14. $\sim m \Rightarrow p$
15. $s \Rightarrow (m \wedge p)$
16. $\sim p \Rightarrow (\sim m \vee s)$

Sea b la proposición "Conduzco mi bicicleta", r "llueve" y p "el juego se canceló".
Expresa cada proposición compuesta en símbolos.

- 17. Si llueve, entonces conduzco mi bicicleta.
- 18. Si no conduzco mi bicicleta, entonces no llueve.
- 19. Conduzco mi bicicleta, o si el juego se canceló, entonces llueve.
- 20. Conduciré mi bicicleta si no llueve.

Encuentre los valores de verdad de cada proposición. Suponga que p y r son falsas, y q es verdadera.

- 21. $\sim r \Rightarrow q$
- 22. $q \Rightarrow p$
- 23. $p \Rightarrow q$
- 24. $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$
- 25. $\sim q \Rightarrow (p \wedge r)$
- 26. $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$
- 27. Escribe por qué, si sabemos que p es verdadera, también sabemos que: $\Rightarrow (p \vee q)$
- 28. es verdadera, aún si no conocemos los valores de verdad de q , r y s .

Elabore una tabla de verdad para cada proposición. Identifique cualquier tautología.

- 29. $\sim q \Rightarrow p$
- 30. $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
- 31. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
- 32. $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- 33. $[(r \vee p) \wedge \sim q] \Rightarrow p$
- 34. $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (s \Rightarrow r)$

Escriba cada proposición dada como una proposición equivalente que no use el conectivo si.... entonces. Recuerde que $p \Rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$.

- 35. Si cuidas tus plantas con cariño y con ternura florecerán.
- 36. Si el cheque está en la correspondencia, me sentiría sorprendido.
- 37. Si ella no lo hace, el lo hará.
- 38. Si yo digo sí, ella dice no.
- 39. Todos los residentes de Mixco, lo son también de Guatemala.
- 40. Todas las mujeres alguna vez fueron niñas.

Utilice tablas de verdad para determinar cuáles de los pares de proposiciones son equivalentes.

- 41. $p \Rightarrow q$; $\sim p \vee q$
- 42. $\sim(p \Rightarrow q)$; $p \wedge \sim q$
- 43. $p \Rightarrow q$; $\sim q \Rightarrow \sim p$
- 44. $q \Rightarrow p$; $\sim p \Rightarrow \sim q$
- 45. $p \Rightarrow \sim q$; $\sim p \vee \sim q$
- 46. $p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$
- 47. $p \wedge \sim q$; $\sim q \Rightarrow \sim p$
- 48. $\sim p \wedge q$; $\sim p \Rightarrow q$

SEMANA 7 y 8

CONTENIDO

1. Negación de la Condicional
2. Recíproca, Inversa y Contrarrecíproca
3. Formas alternas de “Si p, entonces q”

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Negar correctamente una condicional en lenguaje usual y simbólico.
2. Identificar las formas recíproca, inversa y contrarrecíproca de una condicional en lenguaje usual y simbólico.
3. Reconocer otras formas que tienen el mismo significado de una condicional.

Negación de una condicional

Suponga que alguien expresa la siguiente proposición condicional:

“Si llueve, entonces llevaré mi paraguas”.

¿Cuándo está mintiendo esta persona? El único caso en el cual mentiría sería cuando lloviera y la persona *no* llevara su paraguas. Suponga que p representa “llueve” y q representa “llevaré mi paraguas”; usted podría sospechar que la proposición simbólica

$$p \wedge \sim q$$

Es un buen candidato para ser la negación de $p \Rightarrow q$. Esto es,

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q.$$

Sucede que ese es realmente el caso, como lo indica la tabla de verdad siguiente:

p	q	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	V	F

La negación de $p \Rightarrow q$ es $p \wedge \sim q$

Es decir, la negación de una condicional NO es otra condicional, sino la conjunción del mismo antecedente y la negación del consecuente.

Dado que

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

Al negar cada lado de esta equivalencia tenemos:

$$\sim [\sim (p \Rightarrow q)] \equiv \sim (p \wedge \sim q)$$

El lado izquierdo de la equivalencia anterior es $p \Rightarrow q$, y en el lado derecho de la misma se puede aplicar una de las Leyes de De Morgan, de donde:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee \sim (\sim q)$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

El último renglón indica que una condicional puede escribirse como una disyunción.

EJEMPLO 1

Escriba la negación de cada proposición en lenguaje simbólico y usual.

- a. Si Juan estudia, ganará el curso.

Se recomienda escribir la proposición en la forma directa de la condicional para facilitar su análisis:

Si Juan estudia, entonces ganará el curso.

Si b representa “Juan estudia” y s representa “ganará el curso”, entonces la condicional dada puede escribirse simbólicamente como $b \Rightarrow s$. La negación de esa condicional, como se mostró antes, es $b \wedge \sim s$, que en lenguaje usual es:

Juan estudia y no ganará el curso.

- b. Todos los perros tienen pulgas.

Primero expresamos esta proposición en la forma de condicional directa: Si es un perro, entonces tiene pulgas.

Con base en nuestro análisis anterior, la negación es:

Es un perro y no tiene pulgas.

EJEMPLO 2

Escriba una proposición equivalente a cada condicional dada, utilizando una disyunción.

- a. Si los amarillos ganan el campeonato, entonces Carlos estará feliz.

Sea p el antecedente “los amarillos ganan el campeonato” y q el consecuente “Carlos estará feliz”.

Puesto que la condicional $p \Rightarrow q$ es equivalente a la disyunción $\sim p \vee q$, la condicional se puede expresar como:

Los amarillos no ganan el campeonato o Carlos estará feliz.

- b. Si es Borden, tiene que ser bueno.

Primero escribimos la condicional en su forma directa

Si es Borden, entonces tiene que ser bueno.
La condicional puede escribirse como:

No es Borden o tiene que ser bueno.

EJERCICIOS

Escriba la negación de cada condicional dada. Recuerde que la negación de $p \Rightarrow q$ es $p \wedge \sim q$.

1. Si esa es una auténtica alfombra persa, quedaré sorprendido.
2. Si Elvia alcanza esa nota, romperá los vidrios.
3. Si las medidas inglesas no se convierten a medidas métricas, entonces la aeronave se estrellará en Marte.
4. Si usted dice "Si, acepto", entonces se sentirá feliz el resto de su vida.
5. Si quiere ser feliz por el resto de su vida, nunca tome por esposa a una mujer bonita.
6. Si amarte es un error, no quiero estar en lo correcto.

Escriba cada condicional como una proposición equivalente. Recuerde que $p \Rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$.

7. Si cuidas tus plantas con ternura y cariño, florecerán.
8. Si el cheque está en la correspondencia, me sentiría sorprendido.
9. Si ella no lo hace, él lo hará.
10. Si yo digo sí, ella dice no.
11. Todos los residentes de Cuilco lo son también de Huehuetenango.
12. Todas las mujeres alguna vez fueron niñas.

Recíproca, inversa y contrarrecíproca

Cualquier condicional está conformada por un antecedente y un consecuente. Si éstos se intercambian, se niegan, o las dos cosas, se forma una nueva proposición condicional. Iniciemos con la condicional directa:

Si tú te quedas, entonces yo me voy.

Si intercambiamos el antecedente con el consecuente obtenemos una nueva condicional llamada **recíproca**:

Si yo me voy, entonces tú te quedas.

Si se niegan tanto el antecedente como el consecuente de la condicional directa original se obtiene la **inversa** de esa proposición

Si tú no te quedas, entonces yo no me voy.

Y si el antecedente y el consecuente de la condicional directa original se intercambian y se niegan, se forma la **contrarrecíproca o contrapositiva**:

Si yo no me voy, entonces tú no te quedas.

Condicionales relacionadas:

Directa	$p \Rightarrow q$	<i>Si p, entonces q.</i>
Recíproca	$q \Rightarrow p$	<i>Si q, entonces p.</i>
Inversa	$\sim p \Rightarrow \sim q$	<i>Si no p, entonces no q.</i>
Contrarrecíproca	$\sim q \Rightarrow \sim p$	<i>Si no q, entonces no p.</i>

EJEMPLO 1

Dada la condicional directa

Si vivo en Río Hondo, entonces vivo en Zacapa.

Determine cada una de las condicionales que se indican:

a. La recíproca

Sea p la proposición “vivo en Río Hondo” y q “vivo en Zacapa”. Entonces la condicional directa puede representarse como $p \Rightarrow q$. La recíproca $q \Rightarrow p$, sería:

Si vivo en Zacapa, entonces vivo en Río Hondo.

Observe que en el caso de esta proposición, su recíproca no necesariamente es verdadera, aún cuando la proposición directa lo sea.

b. La inversa

La inversa de $p \Rightarrow q$ es $\sim p \Rightarrow \sim q$; para nuestro ejemplo:

Si no vivo en Río Hondo, entonces no vivo en Zacapa.

La cual, una vez más, no necesariamente es verdadera.

c. La contrapositiva

$\sim q \Rightarrow \sim p$, sería:

Si no vivo en Zacapa, entonces no vivo en Río Hondo.

La contrapositiva, al igual que la condicional directa, es verdadera.

El ejemplo 1 muestra que la recíproca e inversa de una condicional verdadera no tienen que ser verdaderas ellas mismas. *Pueden* ser verdaderas, pero no necesariamente lo son.

Relación entre los valores de verdad de las condicionales:

		Directa	Recíproca	Inversa	Contrapositiva
p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Como lo muestra la tabla anterior, la directa y la contrapositiva tienen los mismos valores de verdad, lo cual hace posible reemplazar cualquier condicional con su contrapositiva, sin que se afecte el significado lógico. Asimismo, la recíproca y la inversa también son equivalentes.

Formas alternas de “si p, entonces q”

La condicional “si p, entonces q” puede escribirse de diversas maneras en español:

Si p, entonces q.

Si p, q.

p implica q.

p sólo si q.

p es suficiente para que q.

q es necesaria para que p

Todas las p son q.

q si p.

La transformación de $p \Rightarrow q$ en estas formas verbales de ninguna manera depende de la veracidad o falsedad de esa condicional.

Por ejemplo, la condicional

Si tienes 18 años, entonces puedes votar.

Puede escribirse en cualquiera de las siguientes maneras:

Puedes votar, si tienes 18 años de edad.

Tienes 18 años de edad sólo si puedes votar.

Para que puedas votar, es necesario que tengas 18 años.

Tener 18 años es suficiente para poder votar.

Todos los que tienen 18 años de edad pueden votar.

Tener 18 años de edad implica que puedes votar.

EJERCICIOS

Para cada condicional directa dada, escriba a. la recíproca, b. la inversa y c. la contrapositiva en la forma si..., entonces... En algunos casos puede ser útil replantear la condicional directa de la forma si..., entonces...

1. Si la belleza fuera un minuto, entonces tú serías una hora.
2. Si usted dirige, entonces yo lo seguiré.
3. Si no está estropeado, no hay para que repararlo.
4. Si yo obtuviera diez centavos por cada vez que esto sucediera, me volvería rico.

5. Caminar delante de un automóvil en movimiento es peligroso para la salud.
6. La leche contiene calcio.
7. Cada oveja busca su pareja.
8. Agua pasada no mueve molino.
9. Si lo construyes, él vendrá.
10. Por el humo se sabe donde está el fuego.
11. $p \Rightarrow \sim q$
12. $\sim p \Rightarrow q$
13. $\sim p \Rightarrow \sim q$
14. $\sim q \Rightarrow \sim p$
15. $p \Rightarrow (q \vee r)$ utilice Leyes de De Morgan si fuera necesario.
16. $(r \vee \sim q) \Rightarrow p$ utilice Leyes de De Morgan si fuera necesario.

Escriba cada una de las proposiciones siguientes de la forma “si p, entonces q”.

17. Si está fangoso, usaré mis botas.
18. Si termino de estudiar, iré a la fiesta.
19. “17 es positivo” implica que 17+1 es positivo.
20. Todos los enteros son números racionales.
21. Resolver crucigramas es suficiente para volverme loco.
22. Defender la ecología es necesario para ser electo.
23. El director contratará más profesores sólo si la junta escolar lo aprueba.
24. Ningún número entero es irracional.
25. Los verdes ganarán el campeonato cuando su defensa mejore.
26. Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto.
27. Un entero cuyo dígito de las unidades es 0 o 5 es divisible entre 5.
28. Una de las proposiciones siguientes no es equivalente a las demás:
 - A. r sólo si s.
 - B. r implica s.
 - C. Si r, entonces s.
 - D. r es necesaria para que s.

SEMANA 9

CONTENIDO

1. La Bicondicional o doble implicación

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Identificar una proposición bicondicional.
2. Diferenciar esta proposición de una implicación simple.
3. Establecer proposiciones equivalentes a la doble implicación.

Bicondicional

La proposición compuesta p si y sólo si q se llama bicondicional o doble implicación. Se simboliza mediante $p \Leftrightarrow q$, y se interpreta como la conjunción de dos condicionales $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$. Usando símbolos, esta conjunción se escribe:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Mediante esta definición, puede determinarse la tabla de verdad para la bicondicional, cuyo resumen es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si observamos la tabla de verdad de la bicondicional, veremos que es verdadera cuando ambas proposiciones que la componen tienen el mismo valor de verdad. Es falsa cuando tienen diferentes valores de verdad.

EJEMPLO 1

Diga si cada una de las bicondicionales siguientes es verdadera o falsa.

- a. $6+9 = 15$ si y sólo si $12+4 = 16$

Tanto $6+9 = 15$ como $12+4 = 16$ son verdaderas. De acuerdo con la tabla de verdad de la bicondicional, esta proposición es verdadera.

- b. $5+2 = 10$ si y sólo si $17+19 = 36$

Ya que la primera componente ($5+2 = 10$) es falsa y la segunda ($17+19=36$) es verdadera, la proposición bicondicional es falsa.

- c. $6 = 5$ si y sólo si $12 \neq 12$

Ambos componentes de esta proposición son falsos, así que, de acuerdo con el último renglón de la tabla de verdad de la bicondicional, esta proposición completa es verdadera.

EJERCICIOS

Identifique cada bicondicional como verdadera o falsa.

- $5 = 9 - 4$ si y sólo si $8 + 2 = 10$
- $3 + 1 \neq 6$ si y sólo si $8 \neq 8$
- $8 + 7 \neq 15$ si y sólo si $3 * 5 \neq 9$

4. $6 * 2 = 14$ si y sólo si $9 + 7 \neq 16$
5. Bill Clinton fue presidente si y sólo si Jimmy Carter no fue presidente.
6. Burger King vende Big Macs si y solo si IBM fabrica computadoras.

SEMANA 10

CONTENIDO

1. Conjuntos
 - a. Conceptos
 - b. Representación
 - c. Terminología

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Identificar una proposición bicondicional.
2. Diferenciar esta proposición de una implicación simple.
3. Establecer proposiciones equivalentes a la doble implicación.
4. Identificar los símbolos y terminología de conjuntos.
5. Determinar la cardinalidad de un conjunto.

Las gráficas tridimensionales por computadora son muy usadas en las aplicaciones industriales que requieren el diseño asistido por computadora de partes mecánicas. Muchas de éstas son diseñadas mediante un método conocido como **geometría constructiva de sólidos**. Este método utiliza objetos elementales sencillos, llamados primitivos geométricos, para construir formas más complejas. Las esferas, los cubos, los conos, los cilindros y las placas rectangulares son ejemplos de elementos geométricos primitivos (o primarios). Se conceptualizan como conjuntos de puntos con una forma determinada. Para diseñar gráficamente objetos complejos se combinan estos conjuntos primitivos por medio de operaciones tales como unión (+), diferencia (-), e intersección (\cap). Por ejemplo, una arandela de acero puede crearse gráficamente por medio de la intersección de una esfera con una placa rectangular a la que luego se le resta un cilindro. Un cono de helado es la unión de una semiesfera con un cono.

Es posible crear un enorme número de formas manufacturadas utilizando esta técnica de graficación. Éste es sólo un ejemplo de cómo la noción de conjunto, un concepto fundamental en matemáticas, se aplica ampliamente tanto en negocios como en la ciencia.

Símbolos y terminología

La mente humana posee una inclinación natural a reunir o agrupar. Cuando vemos en el cielo cinco estrellas reunidas, en lugar de considerarlas como cinco elementos separados, las personas tendemos a verlas como un grupo de estrellas. Así pues, nuestra mente trata de encontrar orden y patrones. En

matemáticas, esta tendencia a agrupar es representada mediante el concepto de *conjunto*. Un **conjunto** es un grupo o colección de objetos. Cada objeto que pertenece al conjunto se denomina **elemento** o **miembro** de ese conjunto.

Los conjuntos pueden expresarse por lo menos de tres maneras: mediante (1) la *descripción verbal*, (2) la *enumeración* o *listado* y (3) la *notación de construcción de conjuntos*. Un conjunto determinado puede denotarse de forma más conveniente mediante un método que mediante otro, pero la mayoría de conjuntos puede describirse mediante cualquiera de las tres formas mencionadas. Por ejemplo, la descripción verbal del conjunto de los números pares naturales menores que diez puede expresarse por enumeración,

$$\{2, 4, 6, 8\}$$

o mediante la notación de construcción de conjuntos,

$$\{x \mid x \text{ es un número natural par menor que } 10\}.$$

En las notaciones de enumeración y de construcción de conjuntos, los corchetes que abren y cierran indican un conjunto. Además, en el método de enumeración, las comas son esenciales. La notación de construcción de conjuntos utiliza la idea de variable. (Se puede utilizar cualquier símbolo pero, como ocurre con otras aplicaciones algebraicas, por lo general se elige la letra x). Antes de la línea vertical damos la variable, que representa al elemento general, y después de la línea vertical establecemos los criterios que determinan a los miembros del conjunto. Cuando reunimos *todos* los objetos que cumplen dichos criterios generamos (o construimos) el conjunto completo.

Por lo general a los conjuntos se les dan nombres (usualmente letras mayúsculas) para facilitar su mención en análisis posteriores. Si elegimos E como nombre para el conjunto de las letras de nuestro alfabeto, entonces podemos escribir

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}.$$

En muchos casos, la notación por enumeración puede abreviarse si se establece con claridad el patrón de los elementos del conjunto, utilizando una elipsis (tres puntos) para indicar que el patrón continúa. Así, por ejemplo,

$$E = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\} \quad \text{o} \quad E = \{a, b, c, d, e, \dots, z\}.$$

EJEMPLO 1

Haga una enumeración completa de los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

- a. El conjunto de los números naturales entre 6 y 13

Este conjunto puede denotarse $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. (Observe que la palabra *entre* excluye los valores de los extremos.

- b. $\{5, 6, 7, \dots, 13\}$

Este conjunto comienza con el elemento 5, luego el 6, luego el 7, y así sucesivamente, es decir, cada elemento se obtiene sumando 1 al elemento que le precede en la lista. Este patrón termina en 13, de modo que la lista completa es {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

- c. $\{x \mid x \text{ es un número natural entre 6 y 7}\}$

Después de un momento de reflexión, nos damos cuenta de que no hay números naturales entre 6 y 7, de modo que la lista para este conjunto no tendrá elementos. Podemos escribir el conjunto como $\{\}$ o \emptyset .

Un conjunto que no contiene elementos, tal como el conjunto del ejemplo c., se conoce como **conjunto vacío** o **conjunto nulo**. El símbolo \emptyset suele utilizarse para denotar al conjunto vacío, que \emptyset y $\{\}$ tienen el mismo significado. Es un *error* denotar el conjunto vacío con el símbolo $\{\emptyset\}$, ya que esta notación representa un conjunto que cuenta con un elemento (el cual es precisamente el conjunto vacío).

El ejemplo anterior hace referencia a los números que utilizamos para contar (o números naturales). Otras categorías importantes de números se resumen a continuación:

Conjuntos de números

Números naturales o para contar $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Enteros $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números racionales $\{p/q \mid p \text{ y } q \text{ enteros y } q \neq 0\}$

(Algunos ejemplos de números racionales son $3/5$, $-7/9$, 5 y 0. Cualquier número racional puede escribirse como un número decimal determinado, como 0.25, o como números decimales que se repiten, como 0.666...)

Números reales $\{x \mid x \text{ es un número que puede escribirse como decimal}\}$.

Números irracionales $\{x \mid x \text{ es un número real y } x \text{ no puede escribirse como el cociente de dos enteros}\}$.

(Algunos ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$ y π . Las representaciones decimales de los números irracionales nunca terminan y nunca se repiten).

El número de elementos de un conjunto se llama **número cardinal** o **cardinalidad** del conjunto. El símbolo $n(A)$, que se lee “ n de A ”, representa el número cardinal del conjunto A .

Cuando un elemento se repite en la lista de un conjunto, no se debe contar más de una vez al momento de determinar el número cardinal de dicho conjunto. Por ejemplo, el conjunto $B = \{1, 1, 2, 2, 3\}$ sólo tiene tres elementos distintos, por lo tanto $n(B) = 3$.

EJEMPLO 2

Encuentre el número cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos.

- a. $K = \{2, 4, 8, 16\}$
El conjunto K contiene cuatro elementos, de modo que el número cardinal del conjunto K es 4, y $n(K) = 4$.
- b. $R = \{4, 5, \dots, 12, 13\}$
Sólo hay 4 elementos en la lista, pero los puntos suspensivos indican que hay otros elementos en el conjunto. Si los contamos también, encontramos que hay 10 elementos; así, $n(R) = 10$.

Si el número cardinal de un conjunto es un número entero determinado (0 o un número natural), a ese conjunto se le denomina **conjunto finito**. Se supone que, teniendo el tiempo suficiente, sería posible contar todos los elementos de cualquier conjunto finito y así llegar a su número cardinal. Sin embargo, algunos conjuntos son tan grandes que el proceso de contar todos sus elementos nunca terminaría. Los números naturales son un ejemplo de tales conjuntos. Cuando un conjunto es tan grande que su número cardinal no se encuentra entre los números enteros, le llamamos **conjunto infinito**. Los conjuntos infinitos también pueden designarse usando los tres métodos ya mencionados.

Igualdad de conjuntos

El conjunto A será **igual** al conjunto B siempre que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1. Todo elemento de A es un elemento de B , y
2. Todo elemento de B es un elemento de A .

Dicho de otro modo, dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden de éstos. Por ejemplo,

$$\{a, b, c, d, d\} = \{a, c, d, b\}$$

ya que ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

Dado que la repetición de elementos en la lista de un conjunto no añade elementos nuevos, podemos decir que

$$\{1, 0, 1, 2, 3, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

pues los dos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

EJERCICIOS

Relacione cada conjunto de la columna I con la descripción que le corresponde de la columna II.

I	II
1. $\{2, 4, 6, 8\}$	A. El conjunto de todos los enteros pares
2. $\{x \mid x \text{ es un entero par mayor que 4 y menor que 6}\}$	B. El conjunto de las cinco menores potencias enteras positivas de 2
3. $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$	C. El conjunto de los enteros positivos pares menores que 10
4. $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$	

5. $\{2, 4, 8, 16, 32\}$	D. El conjunto de todos los enteros impares
6. $\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$	E. El conjunto de todos los enteros negativos
7. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$	F. El conjunto de los enteros impares positivos menores que 10
8. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$	G. \emptyset
	H. El conjunto de los cinco menores múltiplos enteros positivos de 2

Enumere todos los elementos de cada conjunto. Utilice la notación de conjuntos para describir cada uno.

9. El conjunto de todos los números menores o iguales que 6
10. El conjunto de todos los números enteros no mayores que 4
11. $\{6, 7, 8, \dots, 14\}$
12. $\{-15, -13, -11, \dots, -1\}$
13. $\{2, 4, 8, \dots, 256\}$
14. Diga si el conjunto es finito o infinito
15. $\{2, 4, 6, \dots, 32\}$
16. $\{x \mid x \text{ es un número natural mayor que } 50\}$
17. $\{x \mid x \text{ es un número racional}\}$

Encuentre $n(A)$ para cada conjunto.

18. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
19. $A = \{2, 4, 6, \dots, 1000\}$
20. $A = \text{el conjunto de los enteros entre } -20 \text{ y } 20$
21. $A = \{x \mid x \text{ es una vocal del alfabeto español}\}$

SEMANA 11

CONTENIDO

1. Diagramas de Venn. Universo y complemento
 - a. Conceptos
 - b. Representación
 - c. Terminología

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Utilizar diagramas de Venn.
2. Trabajar con subconjuntos.
3. Realizar operaciones entre conjuntos utilizando su complemento.

Diagramas de Venn y subconjuntos

En cada problema existe, a sea de forma explícita o implícita, un **universo del discurso**. Dicho universo incluye todos los objetos en consideración en un momento dado. Por ejemplo, si se pretendiera estudiar las reacciones a la propuesta de que en cierto campus universitario se aumente la edad mínima necesaria para comprar cerveza, el universo del discurso podría ser el de todos los estudiantes del campus, los residentes cercanos al campus, la junta directiva o, quizás, todos estos grupos de personas.

Dentro de la teoría matemática de conjuntos, el universo del discurso se conoce como **conjunto universal** (o **conjunto universo**). Por lo general al conjunto universal se le representa con la letra U . El conjunto universal podrá cambiar de forma de un problema a otro.

En la mayoría de las ramas de las matemáticas, diversos tipos de dibujos y diagramas nos resultan de mucha utilidad para exponer o esclarecer nuestros razonamientos. En la teoría de conjuntos comúnmente utilizamos los **diagramas de Venn**, desarrollados por el lógico John Venn (1834-1923). En estos diagramas, el conjunto universal es representado por un rectángulo y los demás conjuntos relevantes dentro de este universo se representan mediante regiones ovaladas o bien con círculos u otras formas geométricas. En el diagrama de Venn de la figura 1, toda la región encerrada en el rectángulo representa el conjunto universal U , mientras que la parte encerrada en el óvalo representa al conjunto A (el tamaño del óvalo que representa al conjunto A es irrelevante). El área sombreada dentro de U y fuera del óvalo se representa con A' (se lee “A prima”). Este conjunto llamado *complemento*

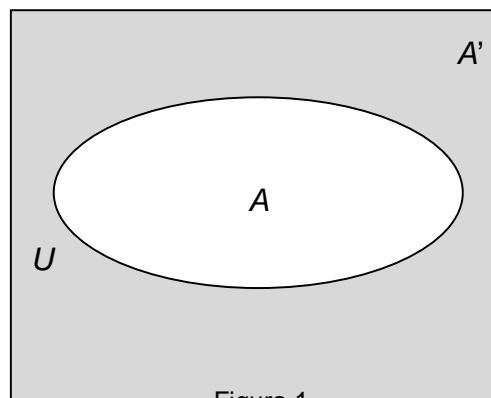


Figura 1

de A , contiene todos los elementos de U que no están contenidos en A .

El complemento de un conjunto

Para cualquier conjunto A dentro del conjunto universal U , el **complemento** de A , designado como A' , es el conjunto de elementos de U que no son elementos de A . Esto es:

$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

EJEMPLO 1

Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$$M = \{a, b, e, f\}$$

$$N = \{b, d, e, g, h\}$$

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

a. M'

El conjunto M' contiene todos los elementos de U que no están en el conjunto M . Puesto que el conjunto M contiene a los elementos a, b, e , y f , dichos elementos no podrán pertenecer al conjunto M' , por lo que el conjunto M' estará compuesto por los elementos c, d, g y h ; esto es, $M' = \{c, d, g, h\}$.

b. N'

El conjunto N' contiene todos los elementos de U que no están contenidos en el conjunto N , por lo tanto $N' = \{a, c, f\}$

Considere el complemento del conjunto universal, o U' . Para encontrar dicho conjunto hay que seleccionar todos los elementos de U que no pertenecen a U . Tales elementos no existen, por lo que no puede haber elementos en el conjunto U' . Esto significa que para todo conjunto universal U , $U' = \emptyset$.

Ahora consideremos el complemento del conjunto vacío; es decir, \emptyset' . Dado que $\emptyset' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin \emptyset\}$, y que el conjunto vacío carece de elementos, entonces todo elemento del conjunto universal U cumple con la definición anterior. Por tanto, para cualquier conjunto universal U , $\emptyset = U'$.

Suponga que tenemos el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mientras que $A = \{1, 2, 3\}$. Cada elemento de A también es elemento de U . Por esta razón, el conjunto A se considera *subconjunto* del conjunto U , lo cual se escribe $A \subseteq U$.

(La expresión " A no es subconjunto U " se escribiría $A \not\subseteq U$.)

Subconjunto de un conjunto

Un conjunto A es **subconjunto** del conjunto B cuando cada elemento de A también es elemento de B . Esto se expresa como $A \subseteq B$.

EJEMPLO 2

Escriba \subseteq o $\not\subseteq$ en el espacio en blanco, según corresponda, para hacer cierta la proposición.

a. $\{3, 4, 5, 6\}$ _____ $\{3, 4, 5, 6, 8\}$

Como cada elemento de $\{3, 4, 5, 6\}$ es también elemento de $\{3, 4, 5, 6, 8\}$ el primer conjunto es subconjunto del segundo, por lo tanto el símbolo correcto es \subseteq .

- b. $\{1, 2, 3\}$ _____ $\{2, 4, 6, 8\}$
El elemento 1 pertenece a $\{1, 2, 3\}$ pero no a $\{2, 4, 6, 8\}$. El símbolo correcto es $\not\subseteq$.
- c. $\{5, 6, 7, 8\}$ _____ $\{5, 6, 7, 8\}$
Cada elemento de $\{5, 6, 7, 8\}$ es también un elemento de $\{5, 6, 7, 8\}$. El símbolo correcto es \subseteq .

Como sugiere el ejemplo c. todo conjunto es subconjunto de sí mismo:

$$B \subseteq B$$

Igualdad de conjuntos (una definición alterna)

Si A y B son conjuntos, entonces $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Cuando se estudian los subconjuntos de un conjunto B , es común tratar de hallar subconjuntos que sean distintos de B . Suponga que $B = \{5, 6, 7, 8\}$ y $A = \{6, 7\}$. A es subconjunto de B , pero A no es todo B ; existe por lo menos un elemento en B que no es elemento de A (de hecho, aquí son dos los elementos, 5 y 8). En este caso, al conjunto A se le conoce como *subconjunto propio* de B . Para indicar que A es un subconjunto propio de B , escribimos $A \subset B$.

Subconjunto propio de un conjunto

El conjunto A es **subconjunto propio** del conjunto B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Esto se expresa como $A \subset B$

(Observe la semejanza que guardan los símbolos de los subconjuntos, \subseteq y \subset con los símbolos algebraicos de las desigualdades, $<$ y \leq).

EJEMPLO 3

Determine si \subseteq , \subset o ambos símbolos pueden entrar en el espacio en blanco para hacer cierta la proposición.

- a. $\{5, 6, 7\}$ _____ $\{5, 6, 7, 8\}$
Cada elemento de $\{5, 6, 7\}$ está contenido en $\{5, 6, 7, 8\}$; por lo tanto, puede colocarse \subseteq en el espacio. Por otra parte, el 8 pertenece a $\{5, 6, 7, 8\}$ pero no pertenece a $\{5, 6, 7\}$, por lo cual $\{5, 6, 7\}$ es subconjunto propio de $\{5, 6, 7, 8\}$. Esto significa que \subset también podría colocarse en el espacio.
- b. $\{a, b, c\}$ _____ $\{a, b, c\}$
El conjunto $\{a, b, c\}$ es subconjunto de $\{a, b, c\}$. Puesto que ambos conjuntos son iguales, $\{a, b, c\}$ no es subconjunto propio de $\{a, b, c\}$. Por lo tanto, sólo \subseteq puede colocarse en el espacio.

El conjunto A es subconjunto del conjunto B si cada elemento del conjunto A es también elemento del conjunto B . Si parafraseamos, el conjunto A es subconjunto del conjunto B si no existen elementos de A que tampoco lo sean de B . Esta

segunda forma de definir un subconjunto muestra que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, esto es:

$$\emptyset \subseteq B \text{ para cualquier conjunto } B.$$

Esto es cierto porque no es posible encontrar elemento alguno en \emptyset que tampoco se encuentre en B (no hay un solo elemento en \emptyset). El conjunto vacío \emptyset es un subconjunto propio de cualquier conjunto, excepto de sí mismo:

$$\emptyset \subset B \text{ si } B \text{ es cualquier conjunto distinto de } \emptyset.$$

Cualquier conjunto (excepto \emptyset) tiene por lo menos dos subconjuntos, \emptyset y él mismo.

Número de subconjuntos

Empezaremos con el conjunto que contiene el menor número de elementos posibles: el conjunto vacío. Este conjunto, \emptyset , tiene sólo un subconjunto, \emptyset , es decir, él mismo. Ahora bien, un conjunto de un elemento tiene sólo dos subconjuntos: él mismo y \emptyset . Esta inducción se resume así:

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	1	2	4	8

Esta tabla sugiere que, conforme se incrementa e uno el número de elementos del conjunto, el número de subconjuntos se duplica. Esto sugiere que el número de subconjuntos en cada caso podría ser una potencia de 2. Cada número del segundo renglón de la tabla es, de hecho, una potencia de 2. Ahora agregamos esta información en la tabla.

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	$1=2^0$	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$

Esta tabla muestra que el número de elementos en cada caso es igual al exponente del 2. El razonamiento inductivo nos brinda la siguiente generalización.

El número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n .

Como el valor 2^n incluye al conjunto mismo, debemos restar 1 a este valor para obtener el número de subconjuntos propios de un conjunto con n elementos. He aquí otra generalización.

El número de subconjuntos propios de un conjunto con n elementos es 2^n-1 .

Aunque el método del razonamiento inductivo es una buena forma de *descubrir* principios o llegar a una *conjetura*, no demuestra que dicha conjetura sea correcta en todos los casos. La demostración debe realizarse mediante otros métodos. Basándonos en la observación, podemos decir que las dos fórmulas anteriores son ciertas puesto que $n = 0, 1, 2$ ó 3 .

EJERCICIOS

Relacione cada conjunto o conjuntos en la columna I con la descripción que le corresponde de la columna II.

- I
1. $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \emptyset$
 2. $\{p\}, \{q\}, \emptyset$
 3. $\{a, b\}$
 4. \emptyset
 5. U
 6. $\{a\}$

- II
- A. El complemento de \emptyset
 - B. Los subconjuntos propios de $\{p, q\}$
 - C. El complemento de $\{c, d\}$, si $U=\{a, b, c, d\}$
 - D. El complemento de U
 - E. El complemento de $\{b\}$, si $U = \{a, b\}$
 - F. Los subconjuntos propios de $\{p, q\}$

Escriba \subseteq o $\not\subseteq$ en el espacio en blanco, según corresponda, para hacer cierta la proposición.

7. $\{-2, 0, 2\}$ _____ $\{-2, -1, 1, 2\}$
8. $\{2, 5\}$ _____ $\{0, 1, 5, 3, 4, 2\}$
9. \emptyset _____ $\{a, b, c, d, e\}$
10. $\{-7, 4, 9\}$ _____ $\{x|x \text{ es un entero impar}\}$

Determine si \subseteq , \subset , ambos o ninguno deben colocarse en el espacio en blanco para hacer que la proposición sea verdadera.

11. $\{B, C, D\}$ _____ $\{B, C, D, F\}$
12. $\{9, 1, 7, 3, 5\}$ _____ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
13. \emptyset _____ $\{0\}$
14. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ _____ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Explique si la proposición es verdadera o falsa.

Sean $U=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ $A=\{a, e\}$ $B=\{a, b, e, f, g\}$ $C=\{b, f, g\}$
 $D=\{d, e\}$

15. $A \subset U$
16. $D \subseteq B$
17. $A \subset B$
21. Hay exactamente 6 subconjuntos de C
22. Hay exactamente 2 subconjuntos de A
23. Hay exactamente 127 subconjuntos propios de U
18. $\emptyset \subset A$
19. $\emptyset \subset \emptyset$
20. $D \not\subseteq B$

SEMANA 12

CONTENIDO

1. Operaciones entre Conjuntos:
 - a. Intersección
 - b. Unión

OBJETIVOS

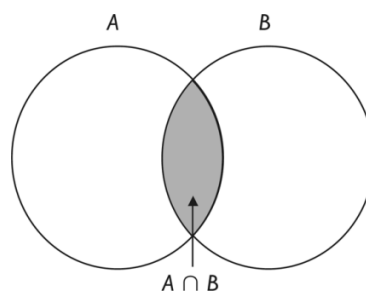
Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Realizar intersecciones de conjuntos.
2. Realizar uniones de conjuntos.
3. Representar estas operaciones a través de Diagramas de Venn.

Intersección de conjuntos

La **intersección** de los conjuntos A y B , que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos A y B , esto es:

Forme la intersección de los conjuntos A y B tomando todos los elementos que se encuentran en ambos conjuntos, como lo muestra la figura.



EJEMPLO 1

Encuentre la intersección de los siguientes conjuntos.

- a. $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{4, 6, 8, 10\}$

Puesto que los elementos comunes a los dos conjuntos son 4 y 6,

$$\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 10\} = \{4, 6\}$$

- b. $\{9, 14, 25, 30\}$ y $\{10, 17, 19, 38, 52\}$

Estos dos conjuntos no tienen elementos en común, de modo que

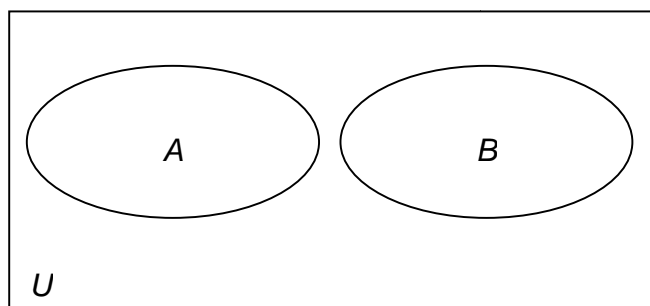
$$\{9, 14, 25, 30\} \cap \{10, 17, 19, 38, 52\} = \emptyset$$

- c. $\{5, 9, 11\}$ y

No existen elementos en común, por lo que no puede haber elementos que pertenezcan a ambos conjuntos. Por lo tanto,

$$\{5, 9, 11\} \cap \emptyset = \emptyset$$

En los ejemplos b. y c. mostramos dos conjuntos que no tienen elementos en común. Los conjuntos que no tienen elementos en común reciben el nombre de **conjuntos disjuntos**. Un conjunto formado por perros y otro formado por gatos serían conjuntos disjuntos. En



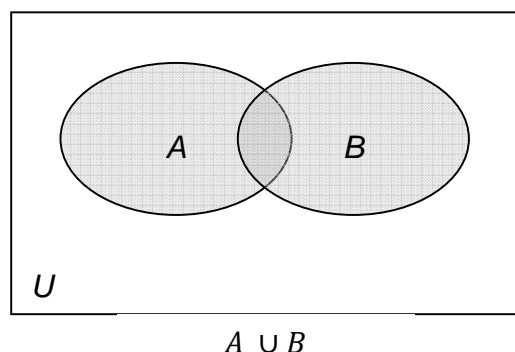
lenguaje matemático, los conjuntos A y B serán dispuestos siempre y cuando $A \cap B = \emptyset$. La figura a la derecha representa dos conjuntos disjuntos.

Unión de conjuntos

La **unión** de los conjuntos A y B , que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, o

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Forme la unión de los conjuntos A y B tomando los elementos de A y agregándole luego los elementos de B que no hayan estado antes en A , como lo muestra el área sombreada de la siguiente figura.



EJEMPLO 2

Encuentre la unión de los siguientes conjuntos.

- a. $\{2, 4, 6\}$ y $\{4, 6, 8, 10, 12\}$

Comience por enumerar todos los elementos del primer conjunto, 2, 4 y 6. Después liste los elementos del segundo conjunto que no estén en el primer conjunto; estos elementos son 8, 10 y 12. La unión está formada por todos estos elementos, o lo que es lo mismo,

$$\{2, 4, 6\} \cup \{4, 6, 8, 10, 12\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$

- b. $\{a, b, d, f, g, h\}$ y $\{c, f, g, h, k\}$

La unión de los dos conjuntos es:

$$\{a, b, d, f, g, h\} \cup \{c, f, g, h, k\} = \{a, b, c, d, f, g, h, k\}.$$

- c. $\{3, 4, 5\}$ y \emptyset

Como el conjunto \emptyset carece de elementos, la unión de $\{3, 4, 5\}$ con \emptyset contiene sólo los elementos 3, 4, y 5. Esto es:

$$\{3, 4, 5\} \cup \emptyset = \{3, 4, 5\}.$$

EJEMPLO 3

Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 6, 9\}$$

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

a. $A' \cap B$

Primero identifique los elementos del conjunto A' ; éstos son los elementos que no aparecen en el conjunto A :

$$A' = \{5, 6, 9\}$$

Ahora encuentre $A' \cap B$, o sea, los elementos que pertenecen tanto A' como a B :

$$A' \cap B = \{5, 6, 9\} \cap \{2, 4, 6\} = \{6\}.$$

b. $B' \cup C' = \{1, 3, 5, 9\} \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}.$

c. $A \cap (B \cup C')$

Primero encuentre el conjunto de los elementos dentro del paréntesis:

$$B \cup C' = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

Ahora, determine la intersección de este conjunto con A .

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C') &= A \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$

Con frecuencia se dice que las matemáticas son un “lenguaje”. Como tal, tiene la ventaja de contar con simbolismo conciso. Por ejemplo, el conjunto $(A \cap B)' \cup C$ es menos difícil de entender que cuando se expresa en palabras. Un intento podría ser el siguiente: “El conjunto cuyos elementos *no* están en A y tampoco en B , o que están en C ”; las palabras claves son **no**, **y** y **o**.

EJERCICIOS

Realice las siguientes operaciones

Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

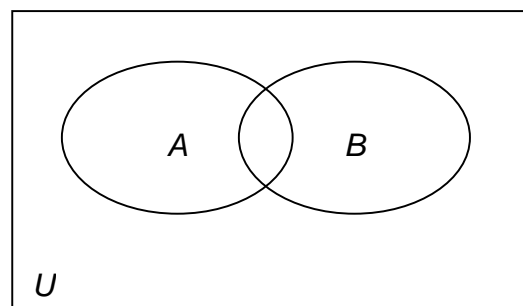
$$X = \{a, c, e, g\}$$

$$Y = \{a, b, c\}$$

$$Z = \{b, c, d, e, f\}$$

1. $X \cap Y$
2. $Y \cup Z$
3. $X \cup U$
4. X'
5. $X' \cap Y'$
6. $X \cup (Y \cap Z)$
7. $(Z \cup X') \cap Y$
8. $(X' \cup Y') \cup Z$

Utilice un diagrama de Venn similar al que aparece aquí para sombrear cada uno de los siguientes conjuntos.



9. $B \cap A'$
10. $B' \cap A'$

11. $B' \cup A$
12. $A \cup A'$
13. $(A \cap B) \cup B$
14. Sean $U = \{m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w\}$
 $A = \{m, n, p, q, r, t\}$
 $B = \{m, o, p, q, s, u\}$
 $C = \{m, o, p, r, s, t, u, v\}$

Coloque en el lugar correcto los elementos de estos conjuntos en un diagrama de Venn.

SEMANA 13

CONTENIDO

1. Diferencia Simétrica

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Realizar esta nueva operación con conjuntos.
2. Identificar su correspondiente Diagrama de Venn.

Diferencia simétrica

La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B, que se simboliza $A \Delta B$, y es el conjunto de todos los elementos que pertenecen sólo a A y sólo a B, excluyendo los elementos comunes a ambos conjuntos. Se puede obtener de dos formas:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad \text{ó}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

EJEMPLO 1

Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{4,5,6,7,8,9\}$

Indique cuál es el conjunto resultante de operar $A \Delta B$.

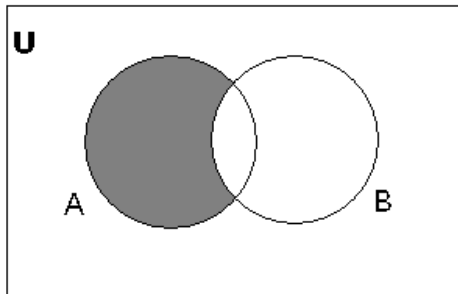
$$A \Delta B = \{1,2,3,7,8,9\}$$

Observe que en el resultado de la diferencia simétrica aparecen únicamente los elementos que pertenecen solamente a A (1,2,3) y solamente a B (7,8,9); los elementos comunes a ambos conjuntos (4,5,6) se excluyen del resultado.

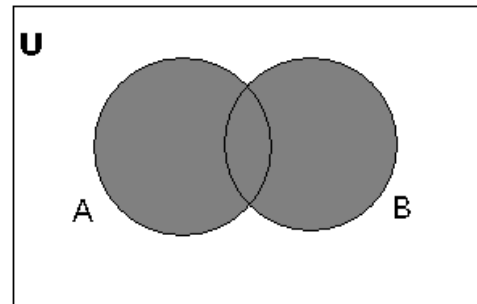
Diagrama de Venn de la diferencia simétrica

Para dos conjuntos A y B cualesquiera

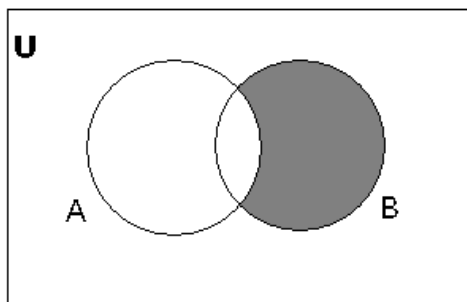
a. Primero encontramos $A - B$



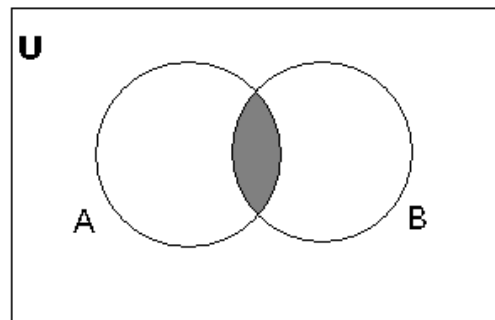
b. La otra forma de obtener la diferencia simétrica es:
Primero obtener la unión de ambos conjuntos



Luego encontramos $B - A$

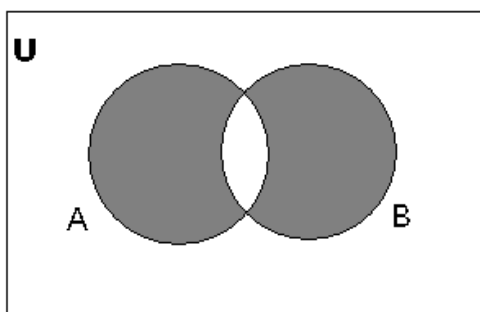


Luego, obtener su intersección

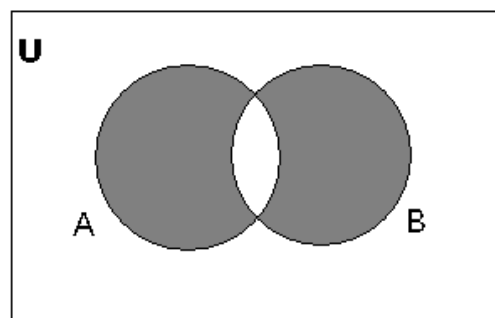


Finalmente la unión de los dos diagramas anteriores:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



Finalmente operar la diferencia entre la unión y la intersección,
lo que da como resultado: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$



EJERCICIOS

Sea $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

Encuentre la diferencia simétrica entre los conjuntos dados y dibuje el correspondiente diagrama de Venn, mostrando los elementos.

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$ | $B=\{3,6,9,12,15\}$ |
| 2. $C=\{1,2,3,4,5\}$ | $D=\{11,12,13,14,15\}$ |
| 3. $E=\{3,5,7,9,11\}$ | $F=\{11,9,7,5,3\}$ |
| 4. $G=\{2,4,6,8,9\}$ | $H=\{2,4,6,8,9,10,13,14\}$ |
| 5. $I=\{1,4,7,9,10,12,13,15\}$ | $J=\{2,6,7,9,11,14,15\}$ $K=\{3,4,5,7,8,9,14,15\}$ |

SEMANA 14

CONTENIDOS

1. Relación entre conectivos lógicos y operaciones con conjuntos
2. Análisis de información, encuestas

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Establecer relaciones entre algunos conectivos utilizados en la lógica simbólica y algunas operaciones entre conjuntos.
2. Realizar operaciones entre conjuntos y representarlas en Diagramas de Venn.
3. Analizar información obtenida a través de encuestas utilizando Diagramas de Venn.

Operaciones entre conjuntos

Determinar la intersección, unión, diferencia, productos cartesianos y complementos de conjuntos son ejemplos de *operaciones entre conjuntos*.

Una **operación** es una regla o procedimiento mediante el cual uno o más objetos son utilizados para obtener otro objeto. Los objetos involucrados en las operaciones son por lo general conjuntos o números. Las operaciones más comunes con números son la suma, resta, multiplicación y división. Por ejemplo, tomando los números 5 y 7, la operación de suma nos daría el número $5 + 7 = 12$. Con los mismos dos números, 5 y 7, la operación de multiplicación produciría el número $5 \times 7 = 35$.

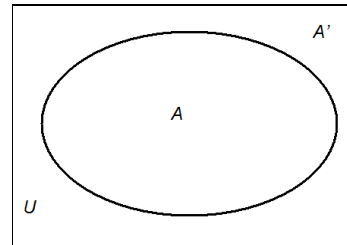
A continuación presentamos las operaciones más comunes entre conjuntos, con sus correspondientes diagramas de Venn.

Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, donde U es el conjunto universal.

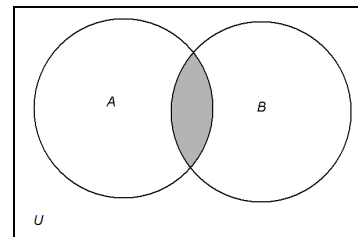
El **complemento** de A , simbolizado como A' , es

$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}$$



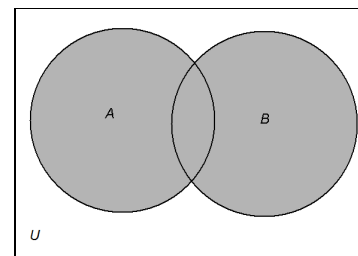
La **intersección** de A y B , es

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$



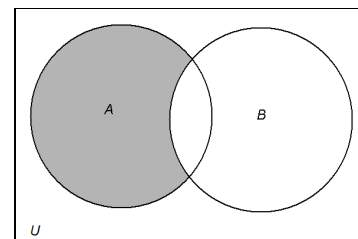
La **unión** de A y B , es

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$



La **diferencia** de A y B , es

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



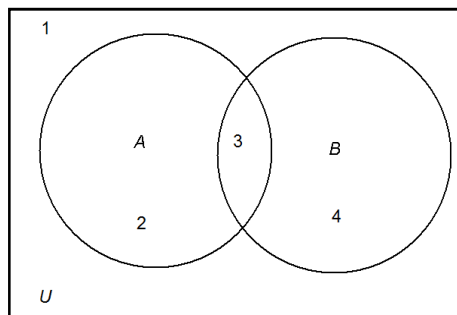
El **producto cartesiano** de A y B , es

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Diagramas de Venn

Cuando trabajamos con un solo conjunto, podemos utilizar un diagrama de Venn. El conjunto universal U se divide en dos regiones, una que representa al conjunto A y la otra que representa al conjunto A' .

Dos conjuntos A y B dentro del conjunto universal sugieren un diagrama de Venn donde las cuatro regiones resultantes se han numerado. La región 1 contiene aquellos elementos fuera de los conjuntos A y B . La región 2 contiene los elementos de A que no están en B . La región 3 contiene los elementos que están en A y B . La región 4 contiene los elementos de B que no están en A .

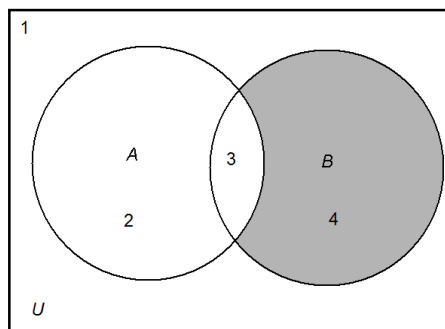


EJEMPLO 1

Dibuje un diagrama de Venn sombreando la región o regiones que representan los siguientes conjuntos.

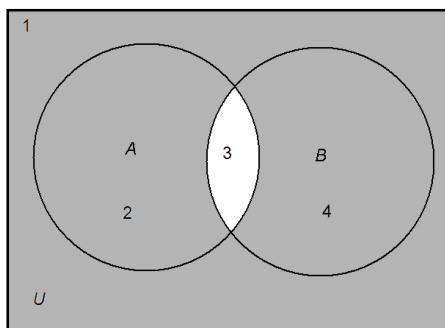
a. $A' \cap B$

El conjunto A' contiene todos los elementos de las regiones 1 y 4. El conjunto B está formado por los elementos de las regiones 3 y 4. La intersección de los conjuntos A' y B , el conjunto $A' \cap B$, está constituido por los elementos de la región en común a (1 y 4) y (3 y 4); esto es, la región 4. Por lo tanto, $A' \cap B$ está representado por la región 4, la cual está sombreada en la figura. Esta región puede describirse también como $B - A$.



b. $A' \cup B'$

Una vez más, el conjunto A' está representado por las regiones 1 y 4, mientras que el conjunto B' por las regiones 1 y 2. La unión de A' y B' , el conjunto $A' \cup B'$, está formado por los elementos que pertenecen a la unión de las regiones 1, 2, y 4, y que aparecen sombreadas en la figura.



EJEMPLO 2

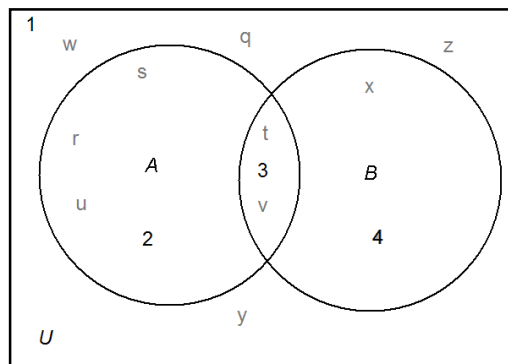
Sean $U = \{q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$

$A = \{r, s, t, u, v\}$

$B = \{t, v, x\}$

Coloque los elementos de estos conjuntos en su correcta posición en un diagrama de Venn.

Puesto que $A \cap B = \{t, v\}$, los elementos t y v están colocados dentro de la región 3 de la figura. Los elementos restantes de A , que son r, s y u , van dentro de la región 2. La figura muestra la ubicación correcta de los demás elementos.



Un área en un diagrama de Venn (quizá se presentaría sombreada) puede describirse mediante las operaciones con conjuntos. Cuando hacemos esto, una buena idea es traducir la región en palabras. Recordando que intersección se traduce como “y”, unión se traduce como “o” y complemento como “no”. Con frecuencia, existen varias formas de describir una región dada.

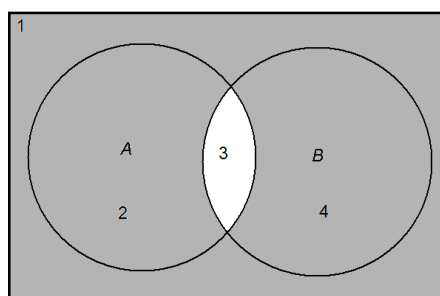
Leyes de De Morgan

A continuación se presentan las dos leyes de De Morgan para conjuntos.

Para cualquiera de los conjuntos A y B ,

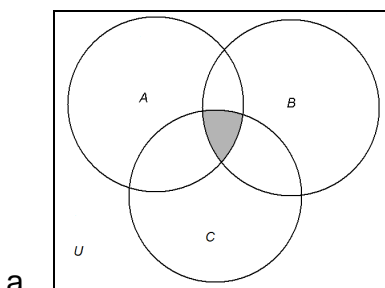
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{y} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

El diagrama de Venn (a la derecha) sugiere que la primera ley de De Morgan es verdadera.

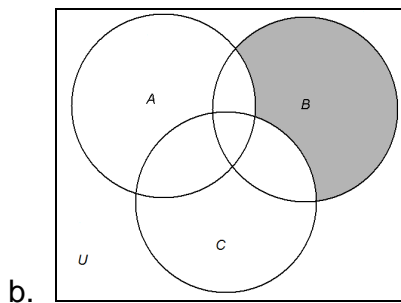


EJEMPLO 3

Describa con símbolos el área sombreada, de cada uno de los siguientes diagramas de Venn, utilizando $A, B, C, \cup, \cap, -$ y $'$ según sea necesario.



El área sombreada pertenece a los tres conjuntos, A, B y C . Por lo tanto, la región corresponde a $A \cap B \cap C$.



La región sombreada se encuentra en el conjunto B y no se encuentra ni en A ni en C . Como no se encuentra en A , se encuentra en A' , y por la misma razón se encuentra en C' . La región se encuentra, por tanto, en B y en A' y en C' , y corresponde a $B \cap A' \cap C'$.

EJERCICIOS

Dados tres conjuntos A , B y C cualesquiera, encuentre el diagrama de Venn resultante de realizar las siguientes operaciones entre ellos.

$$A \cap B \cup C$$

$$A' \cap B' \cup C$$

$$A' \cup B'$$

Interpretación de información. Encuestas.

Muchos problemas que tienen que ver con conjuntos de personas (o de objetos) requieren analizar información conocida sobre ciertos subconjuntos para obtener algunos valores. En esta sección utilizaremos Diagramas de Venn para analizar información obtenida normalmente de encuestas.

EJEMPLO

En una prestigiosa Universidad de Luisiana, la mitad de los 48 estudiantes con especialidad en matemáticas recibieron ayuda financiera del gobierno. De éstos,

5 disfrutaban de beca Pell

14 participaron en el Programa de Estudios por Trabajo de la universidad.

4 tuvieron beca TOPS

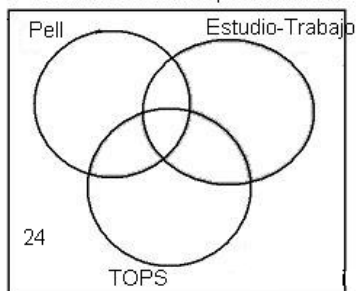
2 tuvieron becas TOPS y participaron del programa de Estudios por Trabajo al mismo tiempo.

Aquellos con beca Pell no contaron con ninguna otra ayuda gubernamental.

Con base a la información proporcionada indique: ¿Cuántos estudiantes de matemáticas?...

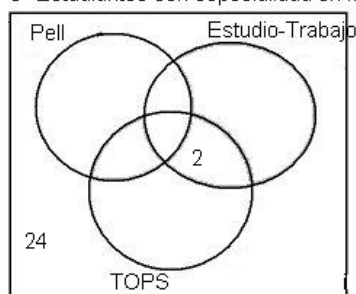
- ¿No tuvieron ayuda gubernamental?
- ¿Tuvieron más de una ayuda gubernamental?
- ¿Tuvieron ayuda gubernamental distinta de estas tres ayudas?
- ¿Tuvieron una beca TOPS o de Estudio-Trabajo?

U=Estudiantes con especialidad en Mate



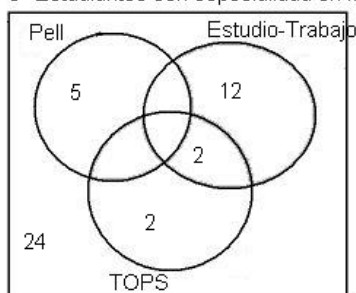
PASO 1: Establecer el Universo. La información proporcionada inicialmente nos indica tres conjuntos. También, como dato inicial podemos establecer que la mitad del universo (24) no recibió ayuda del Gobierno.

U=Estudiantes con especialidad en Mate



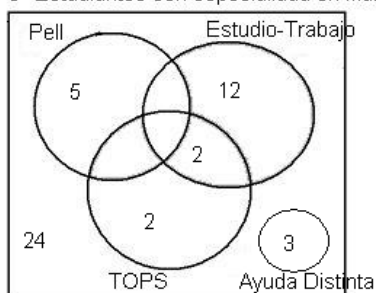
PASO 2: Estudiantes que tienen varias ayudas. Ninguno tiene las tres ayudas, solamente 2 tienen TOPS y Estudio-Trabajo.

U=Estudiantes con especialidad en Mate



PASO 3: Los 5 que reciben ayuda Pell, no tienen otra ayuda (observe que ese conjunto tiene sólo esos 5 elementos). 14 estudiantes participan de Estudio-Trabajo, esos 14 ya incluyen a los 2 que además reciben la ayuda TOPS. Los 4 que tienen ayuda TOPS, incluyen a los 2 que también reciben ayuda Estudio-Trabajo.

U=Estudiantes con especialidad en Mate



PASO 4: Para responder al inciso (c), al sumar los estudiantes que reciben ayuda de Pell, Estudio-Trabajo o TOPS da como resultado 21, (recuerde que la mitad de los 48 recibió ayuda del gobierno), eso significa que habrán otros 3 estudiantes que recibió otro tipo de ayuda.

EJERCICIOS

1. Paula es fanática de la música de Luis Miguel y Shakira. En su colección de 22 discos compactos tiene los siguientes:

5 en los cuales cantan ambos, Luis Miguel y Shakira.
8 en los que canta Luis Miguel.
7 en los que canta Shakira.
12 en los que no canta ninguno de ellos.

a) ¿En cuántos de sus CD canta sólo Luis Miguel?
b) ¿En cuántos de sus CD canta sólo Shakira?
c) ¿En cuántos canta al menos uno de estos artistas?
2. Kent LaVoie es un famoso escritor y productor de álbumes para diversos músicos. El año pasado trabajó en 10 de tales proyectos.

Él escribió y produjo 2 proyectos.
Escribió un total de 5 proyectos.
Produjo un total de 7 proyectos.

a) ¿Cuántos proyectos escribió, pero no produjo?
b) ¿Cuántos proyectos produjo, pero no escribió?
3. A un grupo de personas se les pregunta acerca de algunos periódicos y la información obtenida fue la siguiente.

33 leen Prensa Libre.
32 leen Siglo Veintiuno.
28 leen el Nuestro Diario.
11 leen Prensa Libre y Siglo Veintiuno.
15 leen Prensa Libre y Nuestro Diario.
14 leen Siglo Veintiuno y Nuestro Diario.
5 leen los tres.
7 no les gusta ninguno de estos periódicos.

a) ¿Cuántos leen únicamente Nuestro Diario?
b) ¿Cuántas personas leen dos de estos periódicos?
c) ¿Cuántas personas en total fueron encuestadas?

SEMANA 15

CONTENIDO

1. Resolución de problemas mediante Razonamiento Inductivo
2. Patrones numéricos

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Aplicar el razonamiento inductivo para resolver problemas.
2. Identificar patrones numéricos.

Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general (mediante una conjetura) a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o falsa.

Cuando se comprueba una conjetura obtenida por medio del razonamiento inductivo, basta con un solo ejemplo donde no funcione para demostrar que dicha conjetura es falsa. A esto se le llama **contraejemplo**. El razonamiento inductivo constituye un método eficaz para sacar conclusiones, pero también es importante notar que no se tiene la certeza de que la conjetura observada siempre sea verdadera.

Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos. Es la forma correcta de razonar.

Veamos ahora algunos ejemplos de razonamiento inductivo.

Considere la siguiente lista de números naturales: 2, 9, 16, 23, 30.

¿Cuál es el siguiente número de la lista? La mayoría de las personas dirían que el siguiente número es 37. ¿Por qué? Probablemente porque razona algo como esto: ¿qué tienen en común el 2, 9 y 16? ¿Cuál es el patrón de estos números?

Después de examinar los números por un momento, podríamos ver que $2+7=9$ y $9+7=16$. ¿Ocurre algo semejante con los otros números de la lista? Sí, cualquier número de ella puede encontrarse sumando 7 al que le precede. Por medio de este patrón, el siguiente número de la lista debería ser $30+7=37$.

Éste es un ejemplo de razonamiento inductivo; utilizándolo concluimos que 37 era el número siguiente de la lista. Pero es incorrecto. Le tendimos una trampa, es decir, lo inducimos a sacar una conclusión incorrecta. No es que su lógica fuera errónea, sino que la persona que creó la lista tenía otra respuesta en mente. La lista de números 2, 9, 16, 23, 30, en realidad corresponde a cada lunes del mes de junio. El lunes que sigue al 30 de junio es 7 de julio. Siguiendo este patrón, la lista sería como sigue: 2, 9, 16, 23, 30, 7, 14, 21, 28,...

El razonamiento inductivo no garantiza un resultado verdadero, sino que proporciona un medio para hacer una conjetura. Incluso un número grande de casos puede no ser suficiente.

Para resolver un problema por lo regular se requieren ciertas premisas. Una **premisa** puede ser una suposición, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada o la pura observación. Luego, partiendo de las premisas se razona de manera inductiva o deductiva para llegar a una **conclusión**. Las premisas y la conclusión componen un **argumento lógico**.

EJEMPLO 1

Identifique cada premisa y la conclusión de cada uno de los argumentos siguientes. Luego diga si el argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

- a) Nuestra casa está hecha de madera. Mis dos vecinos inmediatos tienen casas de madera. Por tanto, todas las casas de nuestro vecindario están hechas de madera.

Las premisas son: “Nuestra casa está hecha de madera” y “Mis dos vecinos inmediatos tienen casas de madera”. La conclusión es: “Por tanto, todas las casas de nuestro vecindario están hechas de madera”. Como el argumento va de ejemplos específicos a un enunciado general, es un ejemplo de razonamiento inductivo (aunque es muy probable que su conclusión sea falsa).

- b) Todos los procesadores de palabras permiten escribir el símbolo @. Yo tengo un procesador de palabras. Yo puedo escribir el símbolo @.

Aquí las premisas son: “Todos los procesadores de palabras permiten escribir el símbolo @” y “Yo tengo un procesador de palabras”. La conclusión es: “Yo puedo escribir el símbolo @”. Este razonamiento va de lo general a lo específico, de modo que utilizó un razonamiento deductivo.

- c) Hoy es viernes, mañana será sábado.

En este caso sólo hay una premisa: “Hoy es viernes”. La conclusión es: “mañana será sábado”. Aquí se utiliza el hecho de que el sábado sigue al viernes, aunque no se mencione de manera explícita. Puesto que la conclusión se deduce de hechos generales que se aplican a este caso en particular, se está utilizando el razonamiento deductivo.

Hemos visto que el razonamiento inductivo puede conducir a conclusiones falsas. Sin embargo, en muchos casos este razonamiento proporciona resultados correctos.

EJEMPLO 2

Utilice el razonamiento inductivo para determinar que número es el más probable que siga en cada lista.

1. 3, 7, 11, 15, 19, 23

Cada número de la lista se obtiene sumando 4 al número que le precede. El siguiente número probable es $23 + 4 = 27$.

2. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

Comenzando con el tercer número, cada número de la lista se obtiene sumando los dos números que le preceden. Esto es: $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$ y así sucesivamente. El siguiente número más probable en la lista es $13+21=34$. (Estos son los primeros términos de la famosa sucesión de Fibonacci).

3. 1, 2, 4, 8, 16

Aquí parece que, a fin de obtener cada número después del primero, debemos duplicar el número anterior. Por lo tanto, el siguiente número probable es $16 \times 2 = 32$.

EJEMPLO 3

Utilice la lista de igualdades dada para predecir qué operación sería la siguiente:

$$37 \times 3 = 111$$

$$37 \times 6 = 222$$

$$37 \times 9 = 333$$

$$37 \times 12 = 444$$

En cada caso, el miembro izquierdo de la igualdad tiene dos factores, el primero es 37 y el segundo es un múltiplo de 3, empezando con 3. El lado derecho consta de tres dígitos iguales. Para que este patrón continúe, la siguiente multiplicación sería $37 \times 15 = 555$, que es la respuesta correcta.

(Tal vez le interese investigar qué sucede después que el segundo factor llega a 30 y hacer conjeturas con base a esos productos.)

EJERCICIOS

Diga si cada uno de los siguientes razonamientos es inductivo o deductivo.

1. Cuando un mecánico dice que tardará dos días en reparar un auto, en realidad tarda cuatro días. El mecánico le dice: "Creo que tardaré un par de días en reparar su auto". Entonces puede esperar que esté listo dentro de cuatro días.
2. Cuando uno toma su medicina, se siente mucho mejor. Usted toma su medicina. Por lo tanto, se sentirá mejor.
3. Ha llovido durante los últimos cinco días y hoy también está lloviendo, así que mañana volverá a llover.
4. Los primeros tres hijos de Natalia fueron varones. Si tiene otro bebé, será varón.
5. José tiene 95 tarjetas de Pokémon. En su cumpleaños, Margarita le obsequió 20 más. Por lo tanto, ahora él tiene 115 tarjetas.
6. Durante los últimos 25 años, una rara planta que produce alternativamente flores amarillas y verdes cada verano ha florecido en Japón. El verano pasado sus flores fueron verdes, por tanto, este verano sus flores serán amarillas.
7. En la sucesión 5, 10, 15, 20,..., lo más probable es que el próximo número sea 25.
8. Analice las diferencias entre el razonamiento inductivo y deductivo. Dé un ejemplo de cada uno.

Determine el siguiente término más probable en cada lista de números.

9. 6, 9, 12, 15, 18

10. 32, 16, 8, 4, 2

11. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$

12. 3, 6, 9, 15, 24, 39

13. 1, 4, 9, 16, 25
14. 1, 8, 27, 64, 125
15. -1, 2, -3, 4, -5, 6
16. 4, 7, 12, 19, 28, 39

Utilice las listas dadas y el razonamiento inductivo para predecir la igualdad que sigue en cada ejemplo y luego verifique su conjetura.

17. $(9 \times 9) + 7 = 88$
 $(98 \times 9) + 6 = 888$
 $(987 \times 9) + 5 = 8888$
 $(9876 \times 9) + 4 = 88,888$
18. $15873 \times 7 = 111,111$
 $15873 \times 14 = 222,222$
 $15873 \times 21 = 333,333$
 $15873 \times 28 = 444,444$
19. $34 \times 34 = 1156$
 $334 \times 334 = 111,556$
 $3334 \times 3334 = 11,115,556$
20. $2 = 4 - 2$
 $2 + 4 = 8 - 2$
 $2 + 4 + 8 = 16 - 2$
 $2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 2$
21. $5(6) = 6(6 - 1)$
 $5(6) + 5(36) = 6(36 - 1)$
 $5(6) + 5(36) + 5(216) = 6(216 - 1)$
 $5(6) + 5(36) + 5(216) + 5(1296) = 6(1296 - 1)$

Patrones numéricos

Uno de los aspectos más sorprendentes de las matemáticas es su variedad aparentemente infinita de patrones numéricos. Observe los patrones siguientes:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1^2 \\
 1+3 &= 2^2 \\
 1+3+5 &= 3^2 \\
 1+3+5+7 &= 4^2
 \end{aligned}$$

En cada caso, el lado izquierdo de la igualdad es la suma de los números naturales impares consecutivos, empezando con 1, y el lado derecho es el cuadrado del número de términos del lado izquierdo. Debe verificar esto en cada caso. El razonamiento inductivo sugiere que la siguiente línea en este patrón es: $1+3+5+7+9=5^2$.

Si evaluamos cada lado de la igualdad, veremos que cada uno es igual a 25.

A partir de estas observaciones, ¿se puede concluir que este patrón continuará indefinidamente? La respuesta es no, porque la observación de un número finito de ejemplos no garantiza que un patrón será infinito. Sin embargo, los matemáticos han demostrado que en realidad este patrón sí continúa indefinidamente.

EJEMPLO 2

En cada uno de los ejemplos siguientes aparecen varias igualdades que muestran un supuesto patrón numérico. Determine cuál es la igualdad que sigue y verifique si se trata de un enunciado verdadero.

a. $1^2=1^3$
 $(1+2)^2=1^3+2^3$
 $(1+2+3)^2=1^3+2^3+3^3$
 $(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$

El lado izquierdo de cada ecuación es el cuadrado de la suma de los primeros n números naturales, mientras que el lado derecho es la suma de los cubos de cada uno. La siguiente igualdad en este patrón sería

$$(1+2+3+4+5)^2=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$$

Cada lado de la igualdad anterior se simplifica a 225, de modo que el patrón es verdadero para esta ecuación.

b. $1=1^3$
 $3+5=2^3$
 $7+9+11=3^3$
 $13+15+17+19=4^3$

El lado izquierdo de estas igualdades contiene la suma de los números naturales impares, empezando con 1 en la primera ecuación, el segundo y tercero (3 y 5) en la segunda ecuación, el cuarto, quinto y sexto (7, 9 y 11) en la tercera ecuación y así sucesivamente. En cada caso, el lado derecho contiene el cubo del número de términos que hay en el lado izquierdo. Siguiendo este patrón, la siguiente igualdad sería:

$$21+23+25+27+29=5^3$$

que puede verificarse como verdadera efectuando las operaciones indicadas.

c. $1 = \frac{1*2}{2}$
 $1 + 2 = \frac{2 * 3}{2}$
 $1 + 2 + 3 = \frac{3 * 4}{2}$
 $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 * 5}{2}$

El lado izquierdo de cada igualdad nos da la suma indicada de los primeros n números naturales, y el lado derecho siempre tiene la fórmula

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Para que el patrón continúe, la siguiente ecuación debería ser:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 * 6}{2}$$

Como el resultado en cada lado es 15, el patrón es verdadero para esta ecuación.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios siguientes, se dan varias ecuaciones que ilustran un supuesto patrón numérico. Determine cuál sería la siguiente ecuación y verifique que este resultado sea verdadero.

1. $(1 \times 9) - 1 = 8$
 $(21 \times 9) - 1 = 188$
 $(321 \times 9) - 1 = 2888$
2. $(1 \times 8) + 1 = 9$
 $(12 \times 8) + 2 = 98$
 $(123 \times 8) + 3 = 987$
3. $999,999 \times 2 = 1,999,998$
 $999,999 \times 3 = 2,999,997$
4. $101 \times 101 = 10,201$
 $10,101 \times 10,101 = 102,030,201$
5. $3^2 - 1^2 = 2^3$
 $6^2 - 3^2 = 3^3$
 $10^2 - 6^2 = 4^3$
 $15^2 - 10^2 = 5^3$
6. $1 = 1^2$
 $1 + 2 + 1 = 2^2$
 $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$
 $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$
7. $2^2 - 1^2 = 2 + 1$
 $3^2 - 2^2 = 3 + 2$
 $4^2 - 3^2 = 4 + 3$
8. $1^2 + 1 = 2^2 - 2$
 $2^2 + 2 = 3^2 - 3$
 $3^2 + 3 = 4^2 - 4$
9. $1 = 1 \times 1$
 $1 + 5 = 2 \times 3$
 $1 + 5 + 9 = 3 \times 5$
10. $1 + 2 = 3$
 $4 + 5 + 6 = 7 + 8$
 $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$

SEMANA 16 Y 17

CONTENIDO

1. Estrategias para la resolución de problemas

OBJETIVOS

Al finalizar el contenido de esta semana, el estudiante estará en capacidad de:

1. Aplicar el método de Polya para resolver problemas.
2. Reconocer que existen diferentes formas de resolver un mismo problema correctamente.
3. Seleccionar la estrategia adecuada al tipo de problema propuesto.

En las semanas anteriores se ha visto la importancia de reconocer patrones y utilizar el razonamiento inductivo para resolver algún tipo de problemas. No obstante, existen otros enfoques útiles.

Probablemente el estudio más famoso en técnicas para la resolución de problemas fue desarrollado por George Polya (1888-1985). Polya propuso un proceso de cuatro pasos para resolver problemas:

PROCESO DE POLYA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 1. Entienda el problema.** Usted no puede resolver un problema si no entiende lo que se le está pidiendo. El problema debe ser leído y analizado cuidadosamente. Quizás necesite leerlo varias veces. Una vez hecho esto, pregúntese: ¿Qué debo encontrar?
- 2. Formule un plan.** Hay muchas formas de abordar un problema y determinar qué plan es el más apropiado. Revise la lista de “Estrategias para resolver problemas”, para conocer varios enfoques posibles.
- 3. Ponga en práctica el plan.** Una vez decidido cómo enfocar el problema, ponga en práctica su plan. Quizá se meta en algún “callejón sin salida” o le salgan al paso obstáculos imprevistos, pero sea persistente. Si un problema se puede resolver fácilmente, entonces en realidad no era tanto problema, ¿verdad?
- 4. Revise y compruebe.** Revise su respuesta para comprobar que sea razonable. ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Ha resuelto todas las preguntas implicadas en el problema? ¿Puede abordar el problema de manera diferente y aún así llegar a la misma pregunta?

El paso 2 del proceso de Polya para resolver problemas consiste en formular un plan. Aquí hay una lista de estrategias que pueden resultar útiles.

Estrategias para resolver problemas

- Elabore una tabla o un diagrama.
- Busque un patrón.
- Resuelva un problema similar, pero más sencillo.
- Haga un bosquejo.
- Use el razonamiento inductivo.
- Redúzcalo a una ecuación y resuélvala.
- Si una fórmula es aplicable, úsela.

- Trabaje de atrás hacia adelante.
- Aventure suposiciones y verifíquelas.
- Utilice el método de prueba y error.
- Use el sentido común.
- Si una respuesta parece obvia o imposible, vea si no hay alguna trampa.

La solución de un problema en particular bien puede involucrar una o más de las estrategias mostradas aquí, por lo que debe procurar ser creativo en sus técnicas de resolución de problemas. Los ejemplos siguientes ilustran algunas de estas estrategias. Conforme lea, tenga presente que una cosa es leer la solución de un problema u observar a un profesor resolverlo, y otra muy distinta es ser capaz de resolverlo un mismo. ¿Acaso no le ha ocurrido que cuando observa a su profesor resolver un problema piensa: “parece fácil cuando lo hace, pero cuando lo hago yo solo las cosas se me dificultan mucho”? Esto es así porque su profesor ha pasado años estudiando y poniendo en práctica técnicas de resolución de problemas. Como cualquier aptitud, la destreza para resolver problemas requiere perseverancia y trabajo duro.

EJEMPLO 1

Resolver un problema utilizando una tabla o un diagrama y buscar un patrón.

Un hombre puso una pareja de conejos en una jaula. Durante el primer mes, los conejos no tuvieron descendencia, pero a partir del segundo mes empezaron a producir una pareja de conejos por mes. Si cada nueva pareja se reproduce de la misma manera, ¿cuántas parejas de conejos habrá al final de un año? Apliquemos el proceso de Polya para resolverlo.

- 1. Entienda el problema.** Después de varias lecturas, podemos reformular el problema como sigue: ¿Cuántos pares de conejos tendrá el hombre al final de un año, si inicia con una pareja que se reproduce de esta forma: durante el primer mes de vida, ninguna pareja produce nuevos conejos, pero cada mes posterior cada pareja produce un nuevo par?
- 2. Formule un plan.** Ya que hay un patrón definido de cómo se reproducirán los conejos, podemos elaborar una tabla como la mostrada. Una vez llena la tabla, el registro final en la última columna es la respuesta al problema.

Mes	Número de parejas al inicio del mes	Número de nuevas parejas producidas	Número de parejas al final del mes
1º			
2º			
3º			
4º			
5º			
6º			
7º			
8º			
9º			
10º			
11º			
12º			

3. **Ponga en práctica el plan.** Al inicio del primer mes hay solamente un par de conejos. Durante el primer mes no se produce ningún conejo, así que hay $1 + 0 = 1$ pares al final del primer mes. Este patrón continúa a lo largo de toda la tabla. Hay que sumar el número de la segunda columna con el de la tercera para obtener el número de la cuarta columna. Continuamos de esa forma hasta el duodécimo mes.

Mes	Número de parejas al inicio del mes	Número de nuevas parejas producidas	Número de parejas al final del mes
1º	1	0	1
2º	1	1	2
3º	2	1	3
4º	3	2	5
5º	5	3	8
6º	8	5	13
7º	13	8	21
8º	21	13	34
9º	34	21	55
10º	55	34	89
11º	89	55	144
12º	144	89	233

Al finalizar el año habrá 233 parejas de conejos.

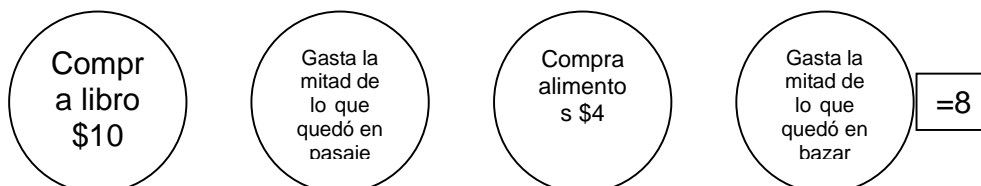
4. **Revise y compruebe.** Este problema puede verificarse volviendo atrás para asegurarnos de que lo hemos interpretado correctamente, y así ha sido. Hemos contestado la pregunta planteada en el problema, así que el problema está resuelto.

EJEMPLO 2

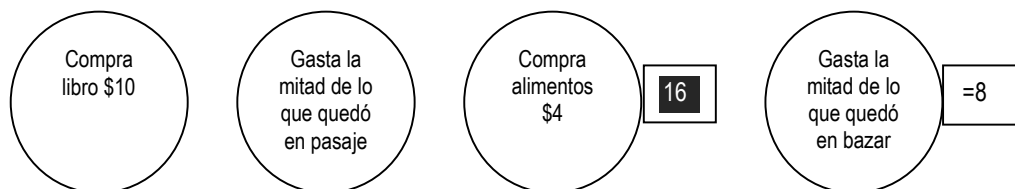
Resolver un problema de atrás hacia delante y hacer diagrama.

Alicia compró un libro en \$10 y después gastó en un pasaje de tren la mitad del dinero que le había quedado. Luego, compró alimentos por \$4 y gastó en un bazar la mitad del dinero que le quedó. Salió del bazar con \$8. ¿Cuánto dinero tenía al iniciar sus compras?

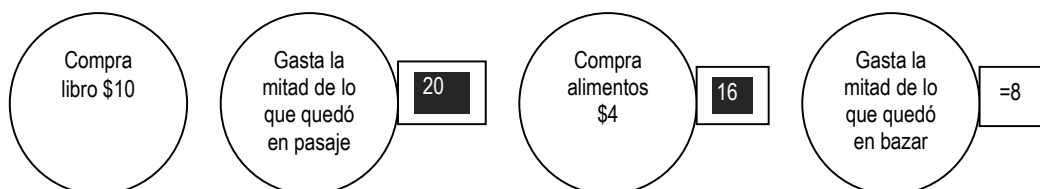
Iniciemos haciendo un dibujo que nos ayude a visualizar la información proporcionada:



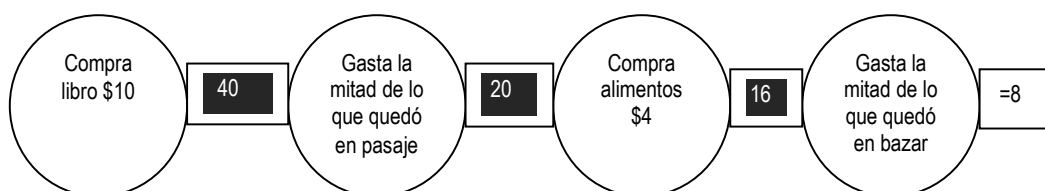
PASO 1: Si salió del bazar con \$8, luego de gastar la mitad, entonces, antes del bazar tenía \$16:



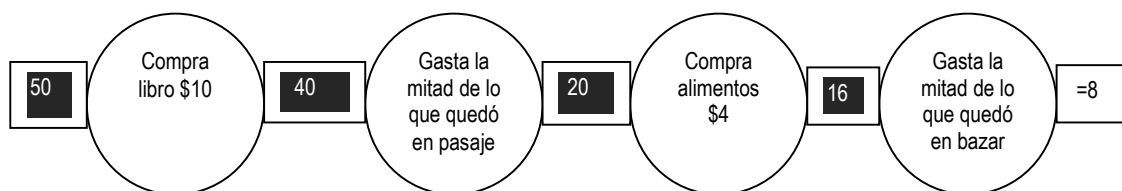
PASO 2: Si luego de comprar alimentos por \$4 le quedan \$16, entonces, antes de comprar los alimentos tenía \$20:



PASO 3: Si luego de pagar la mitad de lo que tenía en pasaje le quedaron \$20, entonces, antes de eso tenía \$40:



PASO 4: Si luego de comprar un libro en \$10 le quedan \$40, entonces antes de comprar el libro tenía \$50:



RESPUESTA: Antes de iniciar sus compras tenía \$50.

Para verificar que \$50 es la respuesta correcta, hacer el problema avanzando hacia delante.

EJEMPLO 3

Resolver un problema mediante ensayo y error.

El matemático Augustus de Morgan vivió en el siglo XIX. En cierta ocasión afirmó: “Yo tenía x años en el año x^2 ”. ¿En qué año nació de Morgan?

Debemos encontrar el año de nacimiento de De Morgan. El problema nos dice que vivió en el siglo XIX, es decir entre 1800 y 1900. De acuerdo con el planteamiento, uno de los años en que él vivió fue un cuadrado perfecto; entonces, debemos buscar un número entre 1800 y 1900 que sea un cuadrado perfecto. Utilice ensayo y error:

$$42^2 = 1764$$

$$43^2 = 1849 \quad \text{está entre 1800 y 1900}$$

$$44^2 = 1936$$

El único número natural cuyo cuadrado está entre 1800 y 1900 es 43, ya que $43^2 = 1849$. Por lo tanto, en 1849 de Morgan tenía 43 años. El paso final para resolver el problema es restar 43 de 1849 para encontrar el año en que nació: $1849 - 43 = 1806$. De Morgan nació en 1806.

EJEMPLO 4

Resolver un problema por tanteo.

Un cuarto de manada de cabras fue visto en el bosque. El doble de la raíz cuadrada de la manada se fue a las laderas de una montaña y 3 veces 5 cabras permanecieron en la orilla del río. ¿Cuántas cabras tiene la manada?

Si bien es posible resolver este problema mediante un método algebraico para resolver ecuaciones, mostraremos un método alternativo. Estamos buscando el valor numérico de una manada de cabras, de modo que el número debe ser un número natural. Dado que el problema menciona “un cuarto de manada” y “la raíz cuadrada de la manada”, el número de cabras debe ser al mismo tiempo múltiplo de 4 y también un cuadrado perfecto, por lo que no se tratará con fracciones. El número natural más pequeño que satisface ambas condiciones es el 4. Escribamos una ecuación donde x represente la cantidad de camellos en la manada y sustituyamos 4 por x , para ver si ésta es la solución.

$$\frac{1}{4}x + 2\sqrt{x} + 3 * 5 = x$$

$$\frac{1}{4}(4) + 2\sqrt{4} + 3 * 5 = 4$$

$$1 + 4 + 15 = 4$$

$$20 \neq 4$$

Ya que 4 no es la solución, tratemos ahora con 16, por ser el siguiente cuadrado perfecto que es múltiplo de 4.

$$\frac{1}{4}(16) + 2\sqrt{16} + 3 * 5 = 16$$

$$4 + 8 + 15 = 16$$

$$27 \neq 16$$

Debido a que 16 tampoco es la solución, intentemos ahora con 36.

$$\frac{1}{4}(36) + 2\sqrt{36} + 3 * 5 = 36$$

$$9 + 12 + 15 = 36$$

$$36 = 36$$

En la última ecuación vemos que 36 es el número correcto de cabras en la manada.

EJEMPLO 5

Resolver un problema considerando un problema similar más sencillo y buscando un patrón.

El primer dígito de la derecha en un número natural se denomina dígito de las unidades. ¿Cuál es el dígito de las unidades en 2^{4000} ?

Recordemos que 2^{4000} significa que debemos multiplicar 2 por sí mismo 4000 veces:

$$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$$

Por supuesto, no se supone que debemos resolver esta operación. Para resolver la pregunta podemos examinar algunas de las potencias de 2 más pequeñas y entonces buscar un patrón. Comencemos con el exponente 1 y observemos las primeras doce potencias de 2

$2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	$2^{11} = 2048$
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{12} = 4096$

Note que en cada uno de los cuatro renglones anteriores el dígito de las unidades es el mismo. Eso significa que una potencia de 2 solamente puede tener un 2, un 4, un 8 ó un 6 como dígito de las unidades, es decir solamente hay 4 posibilidades para el dígito de las unidades. Por otro lado, si dividimos cualquiera de los exponentes de las potencias del primer renglón (1, 5 y 9) entre ese número de posibilidades (4), la parte decimal de ese resultado es .25. De forma similar si dividimos cualquiera de los exponentes de las potencias del segundo renglón (2, 6 y 10) entre 4, la parte decimal de ese resultado es .5. Si dividimos cualquiera de los exponentes del tercer renglón (3, 7 y 11) dentro de 4, la parte decimal de ese resultado será .75. Y, finalmente, si se divide cualquiera de los exponentes del cuarto renglón dentro de 4, la parte decimal de ese resultado es 0.

Entonces, para responder a lo que pregunta el problema, lo que debemos hacer es dividir el exponente de 2^{4000} entre 4 y vemos que la parte decimal de ese resultado es 0. Por lo que el dígito de las unidades de esa potencia debe ser 6.

Para encontrar el número de las unidades de cualquier otra potencia de 2, basta con dividir el exponente entre 4 y utilizar la parte decimal. Luego se compara el resultado con la lista anterior de potencias. Por ejemplo, para encontrar el dígito de las unidades de 2^{543} , divide 543 entre 4, es igual a 135.75, como la parte decimal es 0.75, el dígito de las unidades será el mismo que el de las potencias del tercer renglón, es decir, 8.

EJEMPLO 6

Resolver un problema usando el sentido común.

Tengo 2 monedas que suman, en conjunto, Q1.05. Una de las monedas no es de un quetzal.

Tal vez nuestra primera reacción sea algo como esto: “La única manera de tener dos monedas que sumen Q1.05 es que una de ellas sea de 1 quetzal y la otra de 5 centavos. Pero, según el problema, una de ellas no es de 1 quetzal”. Esta proposición es cierta. Lo que debemos entender aquí es que la moneda que no es de 1 quetzal es la de 5 centavos, ¡y la otra es de 1 quetzal!

EJERCICIOS

Resuelva los siguientes problemas. Recuerde que el objetivo principal es poner en práctica el proceso de Polya. En cada problema indique la estrategia que utilizará para resolverlo.

1. Usted trabaja en un almacén que no ha puesto mucho cuidado en el inventario. Tres cajas de calcetines están rotuladas de manera incorrecta: indican: *calcetines rojos*, *calcetines verdes* y *calcetines rojos y verdes*. ¿Cómo puede rotular otra vez las cajas de manera correcta tomando sólo un calcetín de una caja, sin revisar el interior de las demás?

2. Si a , b y c son dígitos para los cuales

$$\begin{array}{r} 7 \quad a \quad 2 \\ - \quad 4 \quad 8 \quad b \\ \hline c \quad 7 \quad 3 \end{array}$$

Entonces, $a + b + c = ?$

3. Sólo uno de estos números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál de ellos es?

329476
389372
964328
326047
724203

4. Enviaron a Luis por agua al pozo con dos baldes sin marca alguna, cuya capacidad es de 7 y 3 galones, respectivamente. ¿Cómo puede llevar exactamente 5 galones de agua a casa?
5. Pánfilo y Nico son dos ardillas que se dedican a recolectar bellotas. El lunes recolectaron 32 y las guardaron con la provisión de bellotas que ya tenían almacenadas. Cuando Pánfilo se durmió, Nico se comió la mitad de las provisiones totales. Este patrón continuó hasta el viernes por la noche, es decir, se recolectaban 32 bellotas diariamente, pero Nico se comía la mitad de las existencias de cada día. El sábado, al levantarse, Pánfilo vio que sólo habían 35. ¿Con cuantas bellotas iniciaron la semana el lunes por la mañana?
6. Cierta isla carece de moneda, pero maneja la siguiente tasa de cambio:

50 plátanos = 20 cocos
 30 cocos = 12 pescados
 100 pescados = 1 hamaca

 ¿Cuántos plátanos equivalen a una hamaca?
7. ¿Cuáles son los dígitos finales de 7^{1997} ?
8. ¿Qué vale más, un kilo de monedas de oro de \$10 o medio kilo de monedas de oro de \$20?
9. Estoy pensando en un número positivo. Si lo elevo al cuadrado, luego duplico el resultado, le quito la mitad y después le sumo 12, me quedan 37. ¿En qué número pensé?
10. Una rana está en el fondo de un pozo de 20 pies de profundidad; cada día trepa 4 pies, pero cada noche resbala de regreso 3 pies. ¿Después de cuántos días alcanzará la rana la boca del pozo?
11. Varios niños forman círculo. Están separados a la misma distancia uno del otro y marcados en orden numérico. El cuarto niño se encuentra parado exactamente enfrente del duodécimo. ¿Cuántos niños hay en el círculo?
12. Un *número perfecto* es un número natural que es igual a la suma de todos sus divisores, excepto él mismo. Por ejemplo, 28 es un número perfecto porque sus divisores, aparte de él, son 1, 2, 4, 7 y 14 y la suma de esos números es 28. ¿Cuál es el número perfecto más pequeño?
13. La madre de Ana tiene tres hijas, a la primera le puso Abril, a la segunda Mayo. ¿Qué nombre le puso a su tercera hija
 ..., marzo, abril, mayo, junio,...
14. Una planta de lirio acuático crece de tal modo que cada día duplica su tamaño. A los 20 días de vida, cubre completamente un estanque. ¿En qué día cubrió la mitad del estanque?
15. Suponiendo que viva lo suficiente, una persona, actualmente viva, tendría 76 años en el año x^2 , donde x es un número natural. ¿En qué año nació?

16. La persona del problema 15 se graduó de la escuela secundaria en el año que satisface estas condiciones: 1) la suma de los dígitos es 23; 2) el dígito de las centenas es el dígito de las decenas más 3; 3) ningún dígito es 8. ¿En qué año se graduó?
17. Eva le dijo a Adán: “Si me dieras 1 dólar, tendríamos la misma cantidad de dinero”. Adán contestó: “Eva, si tú me dieras 1 dólar, yo tendría el doble del dinero que te quedaría”. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?
18. Antonieta tiene infinidad de monedas de 1, 5 y 10 centavos. ¿De cuántas maneras puede pagar 15 centavos por un chocolate? (Por ejemplo, una forma es con una moneda de 10 y otra de 5)
19. ¿Cuál es el centésimo dígito en la representación decimal de $1/7$?
20. La edad de una adolescente incrementada en dos da un cuadrado perfecto. Su edad disminuida en 10 da la raíz cuadrada de dicho cuadrado perfecto. Ella es 5 años mayor que su hermano. ¿Cuántos años tiene su hermano?
21. Jaime, Daniel, Jessica y Catalina forman un par de matrimonios. Sus edades son 36, 31, 30 y 29. Jessica está casada con la persona de mayor edad del grupo. Jaime es mayor que Jessica, pero más joven que Catalina. ¿Quién está casado con quién, y cuáles son sus respectivas edades?

Referencias bibliográficas

Todas las lecturas y ejercicios sugeridos se refieren a la siguiente bibliografía:

Miller, C. D.; V. E. Heeren y J. Hornsby (2008). *Estrategias de Razonamiento*. Guatemala: Editado por Pearson para la Universidad Rafael Landívar.

Bibliografía sugerida para ejercicios adicionales:

Sánchez Fuentes, J. E. y C. L. Ovalle Rodríguez. (2008). *Estrategias de Razonamiento*. Libro de Trabajo. Guatemala: Universidad Rafael Landívar.