15 Análisis vectorial

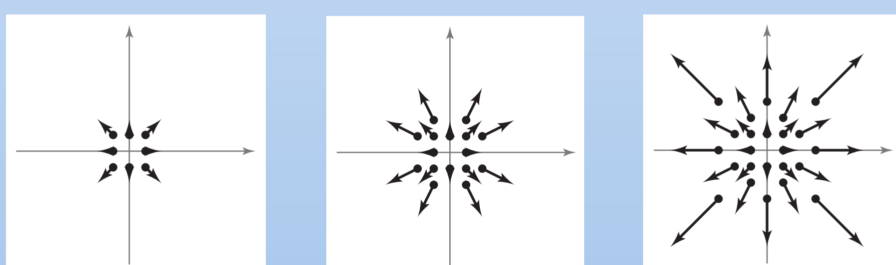
En este capítulo se estudiarán los campos vectoriales, integrales de línea e integrales de superficie. Se aprenderá a usarlos para determinar cantidades en la vida real, como el área de una superficie, masa, flujo, trabajo y energía.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo dibujar un campo vectorial, determinar si es conservativo, encontrar una función de potencial, el rotacional y la divergencia. (15.1)
- Cómo encontrar una parametrización continua por secciones, escribir y evaluar una integral de línea y utilizar el teorema de Green. (15.2, 15.4)
- Cómo usar el teorema fundamental de las integrales de línea, la independencia de la trayectoria y la conservación de energía. (15.3)
- Cómo dibujar una superficie paramétrica, encontrar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una superficie, determinar un vector normal, un plano tangente y el área de una superficie paramétrica. (15.5)
- Cómo evaluar una integral de superficie, determinar la orientación de una superficie, evaluar una integral de flujo y usar el teorema de la divergencia. (15.6, 15.7)
- Cómo utilizar el teorema de Stokes para evaluar una integral de línea o superficie y cómo usar el rotacional para analizar el movimiento de un líquido que gira. (15.8)

NASA

Mientras esperan el despegue en tierra, los astronautas del transbordador espacial tienen acceso a un sistema alámbrico de canasta y tobogán diseñado para transportarlos lo más lejos posible del transbordador en una situación de emergencia. ¿La cantidad de trabajo realizado por el campo de fuerza gravitacional varía para diferentes trayectorias entre dos puntos fijos del tobogán alámbrico? (Ver la sección 15.3, ejercicio 39.)



En el capítulo 15 se combinará el conocimiento de vectores con el del cálculo integral. La sección 15.1 introduce *campos vectoriales*, como los que se muestran arriba. Ejemplos de campos vectoriales incluyen campos de velocidad, campos electromagnéticos y campos gravitacionales.

15.1 Campos vectoriales

- Comprender el concepto de un campo vectorial.
- Determinar si un campo vectorial es conservativo.
- Calcular el rotacional de un campo vectorial.
- Calcular la divergencia de un campo vectorial.

Campos vectoriales

En el capítulo 12 se estudiaron funciones vectoriales que asignan un vector a un *número real*. Se comprobó que las funciones vectoriales de números reales son útiles para representar curvas y movimientos a lo largo de una curva. En este capítulo se estudiarán otros dos tipos de funciones vectoriales que asignan un vector a un *punto en el plano* o a un *punto en el espacio*. Tales funciones se llaman **campos vectoriales** (**campos de vectores**), y son útiles para representar varios tipos de **campos de fuerza** y **campos de velocidades**.

DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Un **campo vectorial sobre una región plana *R*** es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y)$ a cada punto en R.

Un **campo vectorial sobre una región sólida *Q* en el espacio** es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ a cada punto en Q.

NOTA Aunque un campo vectorial está constituido por infinitos vectores, se puede obtener una idea aproximada de su estructura dibujando varios vectores representativos $\mathbf{F}(x, y)$, cuyos puntos iniciales son (x, y). ■

El *gradiente* es un ejemplo de un campo vectorial. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^3$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}\\ &= (2xy + 3y^3)\mathbf{i} + (x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Campo vectorial en el plano.

es un campo vectorial en el plano. Del capítulo 13, la interpretación gráfica de este campo es una familia de vectores cada uno de los cuales apunta en la dirección de máximo crecimiento a lo largo de la superficie dada por $z = f(x, y)$.

De manera similar, si

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}\\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\end{aligned}$$

Campo vectorial en el espacio.

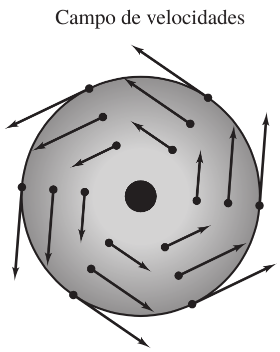
es un campo vectorial en el espacio. Notar que las funciones componentes para este campo vectorial particular son $2x$, $2y$ y $2z$.

Un campo vectorial

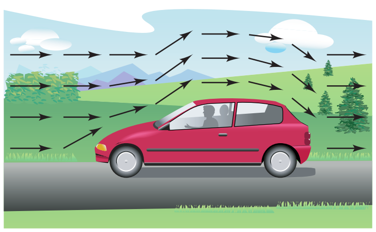
$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

es **continuo** en un punto si y sólo si cada una de sus funciones componentes M, N y P es continua en ese punto.

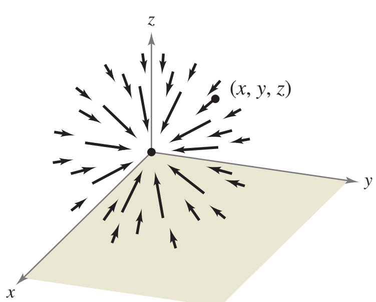
Algunos ejemplos *físicos* comunes de campos vectoriales son los **campos de velocidades**, los **gravitatorios** y los **de fuerzas eléctricas**.



Rueda rotante
Figura 15.1



Campo vectorial de flujo del aire
Figura 15.2



m_1 se localiza en (x, y, z).
m_2 se localiza en $(0, 0, 0)$.

Campo de fuerzas gravitatorio
Figura 15.3

1. Un *campo de velocidades* describe el movimiento de un sistema de partículas en el plano o en el espacio. Por ejemplo, la figura 15.1 muestra el campo vectorial determinado por una rueda que gira en un eje. Los vectores velocidad los determina la localización de sus puntos iniciales: cuanto más lejano está un punto del eje, mayor es su velocidad. Otros campos de velocidad están determinados por el flujo de líquidos a través de un recipiente o por el flujo de corrientes aéreas alrededor de un objeto móvil, como se muestra en la figura 15.2.

2. Los *campos gravitatorios* los define la **ley de la gravitación de Newton**, que establece que la fuerza de atracción ejercida en una partícula de masa m_1 localizada en (x, y, z) por una partícula de masa m_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm_1m_2}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{u}$$

donde G es la constante gravitatoria y $\mathbf{u}$ es el vector unitario en la dirección del origen a (x, y, z). En la figura 15.3 se puede ver que el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ tiene las propiedades de que todo vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta hacia el origen, y que la magnitud de $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la misma en todos los puntos equidistantes del origen. Un campo vectorial con estas dos propiedades se llama un **campo de fuerzas central**. Utilizando el vector posición

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

para el punto (x, y, z), se puede expresar el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right)\\ &= \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.\end{aligned}$$

3. Los *campos de fuerzas eléctricas* se definen por la **ley de Coulomb**, que establece que la fuerza ejercida en una partícula con carga eléctrica q_1 localizada en (x, y, z) por una partícula con carga eléctrica q_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cq_1q_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$,y c es una constante que depende de la elección de unidades para $\|\mathbf{r}\|$, q_1 y q_2.

Nótese que un campo de fuerzas eléctricas tiene la misma forma que un campo gravitatorio. Es decir,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.$$

Tal campo de fuerzas se llama un **campo cuadrático inverso**.

DEFINICIÓN DE CAMPO CUADRÁTICO INVERSO

Sea $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ un vector posición. El campo vectorial $\mathbf{F}$ es un **campo cuadrático inverso** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

donde k es un número real y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

Como los campos vectoriales constan de una cantidad infinita de vectores, no es posible hacer un dibujo de todo el campo completo. En lugar de esto, cuando se esboza un campo vectorial, el objetivo es dibujar vectores representativos que ayuden a visualizar el campo.

EJEMPLO 1 Dibujo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores del campo vectorial dado por

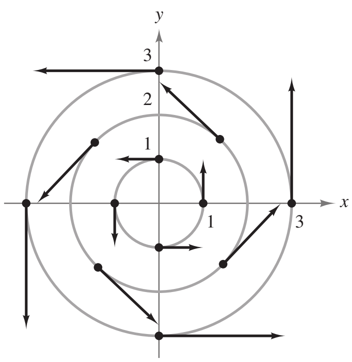
$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Solución Se podrían trazar los vectores en varios puntos del plano, al azar. Sin embargo, es más ilustrativo trazar vectores de magnitud igual. Esto corresponde a encontrar curvas de nivel en los campos escalares. En este caso, vectores de igual magnitud se encuentran en círculos.

$$\|\mathbf{F}\| = c \qquad \text{Vectores de longitud } c.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad \text{Ecuación del círculo.}$$



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Figura 15.4

Para empezar a hacer el dibujo, se elige un valor de c y se dibujan varios vectores en la circunferencia resultante. Por ejemplo, los vectores siguientes se encuentran en la circunferencia unitaria.

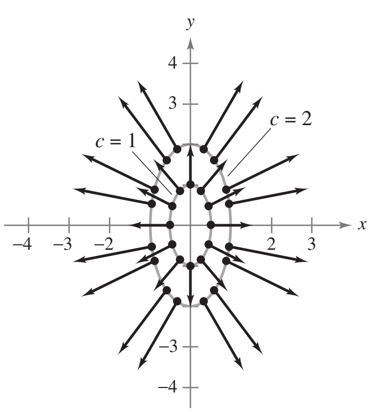
Punto	*Vector*
$(1, 0)$	$\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$
$(0, 1)$	$\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$
$(-1, 0)$	$\mathbf{F}(-1, 0) = -\mathbf{j}$
$(0, -1)$	$\mathbf{F}(0, -1) = \mathbf{i}$

En la figura 15.4 se muestran éstos y algunos otros vectores del campo vectorial. Nótese en la figura que este campo vectorial es parecido al dado por la rueda giratoria mostrada en la figura 15.1.

EJEMPLO 2 Dibujo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

Figura 15.5

Solución Para este campo vectorial, los vectores de igual longitud están sobre las elipses dadas por

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(2x)^2 + (y)^2} = c$$

lo cual implica que

$$4x^2 + y^2 = c^2.$$

Para $c = 1$, dibujar varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud 1 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 1.$$

Para $c = 2$, dibujar varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud 2 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

Estos vectores se muestran en la figura 15.5.

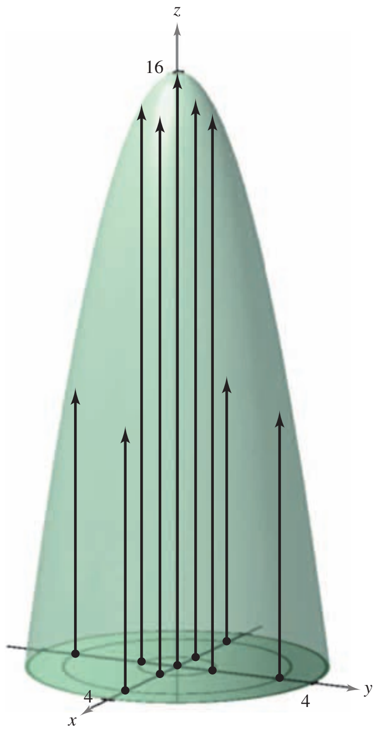
EJEMPLO 3 Esbozo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores en el campo de velocidad dado por

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

donde $x^2 + y^2 \le 16$.

Solución Es válido imaginar que $\mathbf{v}$ describe la velocidad de un fluido a través de un tubo de radio 4. Los vectores próximos al eje z son más largos que aquellos cercanos al borde del tubo. Por ejemplo, en el punto (0, 0, 0), el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 0, 0) = 16\mathbf{k}$, considerando que en el punto (0, 3, 0), el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 3, 0) = 7\mathbf{k}$. La figura 15.6 muestra éstos y varios otros vectores para el campo de velocidades. De la figura, se observa que la velocidad del fluido es mayor en la zona central que en los bordes del tubo.



Campo de velocidades:
$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$

Figura 15.6

Campos vectoriales conservativos

En la figura 15.5 todos los vectores parecen ser normales a la curva de nivel de la que emergen. Porque ésta es una propiedad de los gradientes, es natural preguntar si el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el *gradiente* de alguna función diferenciable f. La respuesta es que algunos campos vectoriales, denominados campos vectoriales **conservativos**, pueden representarse como los gradientes de funciones diferenciables, mientras que algunos otros no pueden.

DEFINICIÓN DE CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama **conservativo** si existe una función diferenciable f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se llama **función potencial** para $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 4 Campos vectoriales conservativos

a) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo. Para comprobarlo, considerar la función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Como

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{F}$$

se sigue que $\mathbf{F}$ es conservativo.

b) Todo campo cuadrático inverso es conservativo. Para comprobarlo, sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u} \quad \text{y} \quad f(x, y, z) = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Como

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k} \\
&= \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\
&= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \\
&= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}
\end{aligned}$$

se deduce que $\mathbf{F}$ es conservativo.

Como puede verse en el ejemplo 4b, muchos campos vectoriales importantes, incluyendo campos gravitatorios y de fuerzas eléctricas, son conservativos. Gran parte de la terminología introducida en este capítulo viene de la física. Por ejemplo, el término "conservativo" se deriva de la ley física clásica de la conservación de la energía. Esta ley establece que la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo es constante. (La energía cinética de una partícula es la energía debida a su movimiento, y la energía potencial es la energía debida a su posición en el campo de fuerzas.)

El importante teorema siguiente da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial *en el plano* sea conservativo.

TEOREMA 15.1 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL PLANO

Sea M y N dos funciones con primeras derivadas parciales continuas en un disco abierto R. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

DEMOSTRACIÓN Para mostrar que la condición dada es necesaria para que $\mathbf{F}$ sea conservativo, suponer que existe una función potencial f tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}.$$

Entonces se tiene

$$f_x(x, y) = M \quad \Rightarrow \quad f_{xy}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$f_y(x, y) = N \quad \Rightarrow \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y, por la equivalencia de derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx}, se puede concluir que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ para todo (x, y) en R. Lo suficiente de la condición se muestra en la sección 15.4.

NOTA El teorema 15.1 es válido en dominios *simplemente conexos*. Una región plana R es simplemente conexa si cada curva cerrada simple en R encierra sólo puntos que están en R. Ver la figura 15.26 en la sección 15.4.

EJEMPLO 5 Prueba de campos vectoriales conservativos en el plano

Decidir si el campo vectorial dado por $\mathbf{F}$ es conservativo.

a) $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ ***b)*** $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

Solución

a) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ no es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y] = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xy] = y.$$

b) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2x] = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y] = 0.$$

El teorema 15.1 permite decidir si un campo vectorial es o no conservativo. Pero no dice cómo encontrar una función potencial de **F**. El problema es comparable al de la integración indefinida. A veces se puede encontrar una función potencial por simple inspección. Así, en el ejemplo 4 se observa que

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

tiene la propiedad de que $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 6 Calcular una función potencial para $\mathbf{F}(x, y)$

Hallar una función potencial para

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}.$$

Solución Del teorema 15.1 sigue que **F** es conservativo porque

$$\frac{\partial}{\partial y}[2xy] = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}[x^2 - y] = 2x.$$

Si f es una función cuyo gradiente es igual a $\mathbf{F}(x, y)$, entonces

$$\nabla f(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

lo cual implica que

$$f_x(x, y) = 2xy$$

y

$$f_y(x, y) = x^2 - y.$$

Para reconstruir la función f de estas dos derivadas parciales, se integra $f_x(x, y)$ con respecto a x y $f_y(x, y)$ con respecto a y, como sigue.

$$f(x, y) = \int f_x(x, y)\,dx = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y)$$

$$f(x, y) = \int f_y(x, y)\,dy = \int (x^2 - y)\,dy = x^2y - \frac{y^2}{2} + h(x)$$

Nótese que $g(y)$ es constante con respecto a x y $h(x)$ es constante con respecto a y. Para hallar una sola expresión que represente $f(x, y)$, sea

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} \quad \text{y} \quad h(x) = K.$$

Entonces, se puede escribir

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + g(y) + K \\ &= x^2y - \frac{y^2}{2} + K. \end{aligned}$$

Este resultado se puede verificar formando el gradiente de f. Usted podrá que es igual a la función original **F**.

NOTA La solución en el ejemplo 6 es comparable a la dada por una integral indefinida. Es decir, la solución representa a una familia de funciones potenciales, dos de las cuales difieren por una constante. Para hallar una solución única, se tendría que fijar una condición inicial que deba satisfacer la función potencial. ■

Rotacional de un campo vectorial

El teorema 15.1 tiene un análogo para campos vectoriales en el espacio. Antes de establecer ese resultado, se da la definición del **rotacional de un campo vectorial** en el espacio.

DEFINICIÓN DEL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El rotacional de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

NOTA Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es un **campo irrotacional**. ■

La notación de producto vectorial usada para el rotacional proviene de ver el gradiente ∇f como el resultado del **operador diferencial** ∇ que actúa sobre la función f. En este contexto, se utiliza la siguiente forma de determinante como ayuda mnemotécnica para recordar la fórmula para el rotacional.

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Cálculo del rotacional de un campo vectorial

Hallar rot $\mathbf{F}$ para el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}.$$

¿Es $\mathbf{F}$ irrotacional?

Solución El rotacional de $\mathbf{F}$ está dado por

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 2yz \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 + z^2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= (2z - 2z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ es irrotacional.

Más adelante, en este capítulo, se asignará una interpretación física al rotacional de un campo vectorial. Pero por ahora, el uso primario del rotacional se muestra en la siguiente prueba para campos vectoriales conservativos en el espacio. El criterio establece que para un campo vectorial cuyo dominio sea todo el espacio tridimensional (o una esfera abierta), el rotacional es **0** en cada punto en el dominio si y sólo si **F** es conservativo. La demostración es similar a la dada para el teorema 15.1.

TEOREMA 15.2 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL ESPACIO

Suponer que M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en una esfera abierta Q en el espacio. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo si y sólo si

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}.$$

Es decir, **F** es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

NOTA El teorema 15.2 es válido para dominios *simplemente conectados* en el espacio. Un dominio simplemente conexo en el espacio es un dominio D para el cual cada curva simple cerrada en D (ver la sección 15.4) se puede reducir a un punto en D sin salirse de D. ■

Del teorema 15.2 se puede ver que el campo vectorial del ejemplo 7 es conservativo, ya que rot $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$. Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$$

no es conservativo; se puede demostrar que su rotacional es

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (2xz - 2x^3yz)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}.$$

Para los campos vectoriales en el espacio que satisfagan el criterio y sean, por tanto, conservativos se puede encontrar una función potencial siguiendo el mismo modelo utilizado en el plano (como se demostró en el ejemplo 6).

EJEMPLO 8 Calcular una función potencial para F(*x*, *y*, *z*)

NOTA Los ejemplos 6 y 8 son las ilustraciones de un tipo de problemas llamados *reconstrucción de una función a partir de su gradiente*. Si se decide tomar un curso en ecuaciones diferenciales, se estudiarán otros métodos para resolver este tipo de problemas. Un método popular da una interacción entre las "integraciones parciales" sucesivas y derivaciones parciales. ■

Hallar una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$.

Solución Del ejemplo 7 se sabe que el campo vectorial dado por **F** es conservativo. Si f es una función tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, entonces

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \quad f_y(x, y, z) = x^2 + z^2 \quad \text{y} \quad f_z(x, y, z) = 2yz$$

e integrando separadamente con respecto a x, y y z se obtiene

$$f(x, y, z) = \int M\,dx = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int N\,dy = \int (x^2 + z^2)\,dy = x^2y + yz^2 + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int P\,dz = \int 2yz\,dz = yz^2 + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$, concluir que

$$g(y, z) = yz^2 + K, \quad h(x, z) = K \quad \text{y} \quad k(x, y) = x^2y + K.$$

Por tanto, $f(x, y, z)$ resulta ser

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K.$$

Divergencia de un campo vectorial

NOTA La divergencia puede verse como un tipo de derivadas de **F** ya que, para campos de velocidades de partículas, mide el ritmo de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto. En hidrodinámica (el estudio del movimiento de fluidos), un campo de velocidades de divergencia nula se llama **incompresible**. En el estudio de electricidad y magnetismo, un campo vectorial de divergencia nula se llama el **solenoidal**. ■

Se ha visto que el rotacional de un campo vectorial **F** es a su vez un campo vectorial. Otra función importante definida en un campo vectorial es la **divergencia**, que es una función escalar.

DEFINICIÓN DE DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \qquad \text{Plano.}$$

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad \text{Espacio.}$$

Si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, entonces se dice que **F** es de **divergencia nula**.

La notación de producto escalar usada para la divergencia proviene de considerar ∇ como un **operador diferencial**, como sigue.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}\right] \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Divergencia de un campo vectorial

Hallar la divergencia en $(2, 1, -1)$ para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}.$$

Solución La divergencia de **F** es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}[x^3y^2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x^2z] + \frac{\partial}{\partial z}[x^2y] = 3x^2y^2z.$$

En el punto $(2, 1, -1)$, la divergencia es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(2, 1, -1) = 3(2^2)(1^2)(-1) = -12.$$

Hay muchas propiedades importantes de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial **F** (ver ejercicios 83 a 89). Se establece una de uso muy frecuente en el teorema 15.3. En el ejercicio 90 se pide demostrar este teorema.

TEOREMA 15.3 RELACIÓN ENTRE DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

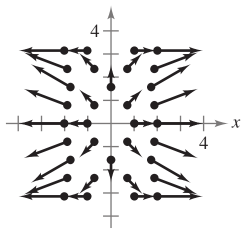
Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial y M, N y P tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0.$$

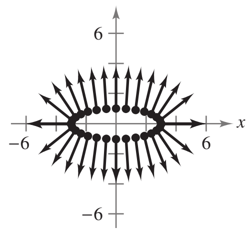
15.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, asociar el campo vectorial con su gráfica. [Las gráficas se marcan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

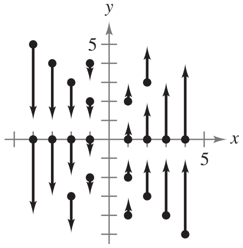
a)



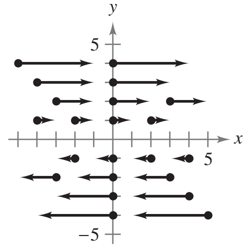
b)



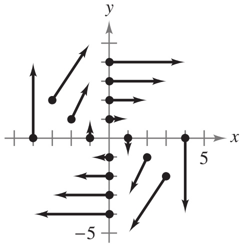
c)



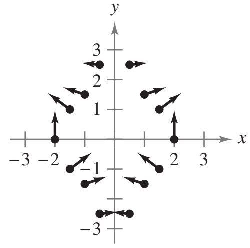
d)



e)



f)



1. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, \operatorname{sen} y\rangle$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2\right\rangle$

En los ejercicios 7 a 16, calcular $\|\mathbf{F}\|$ y dibujar varios vectores representativos del campo vectorial.

7. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
8. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i}$
9. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
10. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\mathbf{j}$
12. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i}$
13. $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + \mathbf{j}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

CAS **En los ejercicios 17 a 20, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente varios vectores representativos del campo vectorial.**

17. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{8}(2xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j})$
18. $\mathbf{F}(x, y) = (2y - 3x)\mathbf{i} + (2y + 3x)\mathbf{j}$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 30, hallar el campo vectorial conservativo para la función potencial, encontrando su gradiente.

21. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
22. $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{4}y^2$
23. $g(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$
24. $g(x, y) = \operatorname{sen} 3x \cos 4y$
25. $f(x, y, z) = 6xyz$
26. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$
27. $g(x, y, z) = z + ye^{x^2}$
28. $g(x, y, z) = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} - \dfrac{xz}{y}$
29. $h(x, y, z) = xy \ln(x + y)$
30. $h(x, y, z) = x \operatorname{arcsen} yz$

En los ejercicios 31 a 34, verificar que el campo vectorial es conservativo.

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$
32. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$
33. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\mathbf{i} + x\cos y\mathbf{j}$
34. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{xy}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$

En los ejercicios 35 a 38, determinar si el campo vectorial es conservativo.

35. $\mathbf{F}(x, y) = 5y^2(y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j})$
36. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2}{y^2}e^{2x/y}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$
37. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
38. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + xy}}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

En los ejercicios 39 a 48, determinar si el campo vectorial es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

39. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
40. $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y^2\mathbf{i} + 2x^3y\mathbf{j}$
41. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
42. $\mathbf{F}(x, y) = xe^{x^2y}(2y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$
43. $\mathbf{F}(x, y) = 15y^3\mathbf{i} - 5xy^2\mathbf{j}$
44. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}(y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j})$
45. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2y}{x}\mathbf{i} - \dfrac{x^2}{y^2}\mathbf{j}$
46. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$
47. $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\cos y\mathbf{i} - \operatorname{sen} y\mathbf{j})$
48. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$

En los ejercicios 49 a 52, calcular el rotacional del campo vectorial en el punto dado.

	Campo vectorial	*Punto*
49.	$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$	$(2, 1, 3)$
50.	$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$(2, -1, 3)$
51.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - e^x \cos y\mathbf{j}$	$(0, 0, 1)$
52.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$(3, 2, 0)$

CAS **En los ejercicios 53 a 56, usar un sistema algebraico por computadora y representar el rotacional del campo vectorial.**

53. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\mathbf{i} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

54. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{y - z}\mathbf{i} + \frac{xz}{x - z}\mathbf{j} + \frac{xy}{x - y}\mathbf{k}$

55. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(x - y)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(y - z)\mathbf{j} + \operatorname{sen}(z - x)\mathbf{k}$

56. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

En los ejercicios 57 a 62, determinar si el campo vectorial F es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + x^2y^2z\mathbf{k}$

58. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$

60. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^z\mathbf{i} + ze^x\mathbf{j} + xe^y\mathbf{k}$

61. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z}{y}\mathbf{i} - \frac{xz}{y^2}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$

62. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 63 a 66, calcular la divergencia del campo vectorial F.

63. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j}$

64. $\mathbf{F}(x, y) = xe^x\mathbf{i} + ye^y\mathbf{j}$

65. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

66. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \ln(y^2 + z^2)\mathbf{k}$

En los ejercicios 67 a 70, calcular la divergencia del campo vectorial F en el punto dado.

	Campo vectorial	*Punto*
67.	$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$(2, 1, 1)$
68.	$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$(2, -1, 3)$
69.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} - e^x \cos y\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$(3, 0, 0)$
70.	$\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(xyz)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$(3, 2, 1)$

Desarrollo de conceptos

71. Definir un campo vectorial en el plano y en el espacio. Dar algunos ejemplos físicos de campos vectoriales.

72. ¿Qué es un campo vectorial conservativo y cuál es su criterio en el plano y en el espacio?

73. Definir el rotacional de un campo vectorial.

74. Definir la divergencia de un campo vectorial en el plano y en el espacio.

En los ejercicios 75 y 76, calcular rot (F × G) = ∇ × (F × G).

75. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

76. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 77 y 78, hallar rot (rot F) = ∇ × (∇ × F).

77. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

78. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los ejercicios 79 y 80, hallar div(F × G) = ∇ · (F × G).

79. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

80. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 81 y 82, hallar div (rot F) = ∇ · (∇ × F).

81. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

82. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los ejercicios 83 a 90, demostrar la propiedad para los campos vectoriales F y G y la función escalar *f*. (Suponer que las derivadas parciales requeridas son continuas.)

83. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$

84. $\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

85. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

86. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\operatorname{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\operatorname{rot}\mathbf{G})$

87. $\nabla \times [\nabla f + (\nabla \times \mathbf{F})] = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$

88. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

89. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$

90. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$ (Teorema 15.3)

En los ejercicios 91 a 93, sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y $f(x, y, z) = \|\mathbf{F}(x, y, z)\|$.

91. Probar que $\nabla(\ln f) = \frac{\mathbf{F}}{f^2}$.

92. Probar que $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\mathbf{F}}{f^3}$.

93. Probar que $\nabla f^n = nf^{n-2}\mathbf{F}$.

Para discusión

94. *a)* Dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

b) Dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{G}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

c) Explicar cualquier similitud o diferencia en los campos vectoriales $\mathbf{F}(x, y)$ y $\mathbf{G}(x, y)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 95 a 98, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

95. Si $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$, entonces $\|\mathbf{F}(x, y)\| \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

96. Si $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ y (x, y) está en el eje y positivo, entonces el vector apunta en la dirección y negativa.

97. Si f es un campo escalar, entonces el rotacional f tiene sentido.

98. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial y $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional pero no conservativo.