UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
MATEMÁTICA I. (Código 0826101)
LAPSO ACADÉMICO 2016-1

UNIDAD 2:

Teoría de Límites y Continuidad

Elaborada por:
Profa. Jeraldyne Moncada.
Prof. Leonardo Pérez
Material didáctico en revisión

2.1. LÍMITES

En una forma muy general se puede decir que el objetivo del estudio de límites consiste en que dada una función f se debe indagar el comportamiento que tienen las imágenes $f(x)$ cuando la variable x se encuentra muy cerca del valor c.

2.1.1. CONCEPTO INTUITIVO DE LÍMITE

En la Figura 1.1 se observa que a medida que x se encuentra mas cerca del valor c, las imágenes $f(x)$ se acercan al valor L, entonces el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es L. Simbólicamente se escribe: $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Es importante aclarar que $f(c)$ es el comportamiento de la función f en el punto c, mientras que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ describe el comportamiento de la función f para valores de x próximos al punto c.

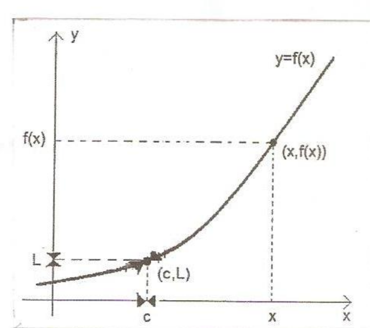


Figura 1.1

2.1.2. DEFINICIÓN DE LÍMITES LATERALES

- **Limite lateral de** $f(x)$ **por la izquierda de** c**:** $\lim_{x\to c^-} f(x)=L$ describe el comportamiento de las imágenes de la función f para valores de x que tienden a c por la izquierda.

  Si x es menor que c y además x está muy cercano a c, entonces x es considerado un valor que tienden a c por la izquierda.

- **Limite lateral de** $f(x)$ **por la derecha de** c**:** $\lim_{x\to c^+} f(x)=L$ describe el comportamiento de las imágenes de la función f para valores de x que tienden a c por la derecha.

  Si x es mayor que c y además x está muy cercano a c, entonces x es considerado un valor que tienden a c por la derecha.

2.1.3. EXISTENCIA DEL LÍMITE

El límite de f cuando x tiende a c existe si y sólo si los límites laterales son iguales, de manera simbólica, $\lim_{x\to c} f(x)=L$ existe si y sólo si $\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)$.

2.1.4. PROCEDIMIENTO PARA ESTIMAR EL VALOR DE UN LÍMITE

1. **Procedimiento numérico:** construyendo una tabla de valores donde se tomen valores muy cercanos (por la derecha y por la izquierda) al punto al cual tiende el límite y luego calcular la imagen de dichos valores.
2. **Procedimiento gráfico:** dibujando la gráfica.
3. **Procedimiento analítico:** utilizando el álgebra o el cálculo.

2.1.5. ALGUNOS COMPORTAMIENTOS TÍPICOS ASOCIADOS A LA NO EXISTENCIA DE UN LÍMITE

1. *f(x)* tiende a números diferentes según *x* tiende a *c* por la derecha o por la izquierda. En la Figura 1.2, se ilustra la situación planteada, por lo tanto se afirma que $\lim_{x\to 0} f(x)$ *no existe.*
2. *f(x)* crece o decrece sin cota cuando *x* tiende a *c*, es decir, que las imágenes *f(x)* se hacen cada vez más grandes, o más pequeñas, cuando *x* asume valores cercanos a *c*. En la Figura 1.3, se ilustra la situación planteada, por lo tanto se afirma que $\lim_{x\to -3} f(x)$ *no existe.*

3. *f(x)* oscila entre dos valores fijos cuando *x* tiende a *c*. En la Figura 1.4, se ilustra la situación planteada, por lo tanto se afirma que $\lim_{x \to 0} f(x)$ *no existe.*

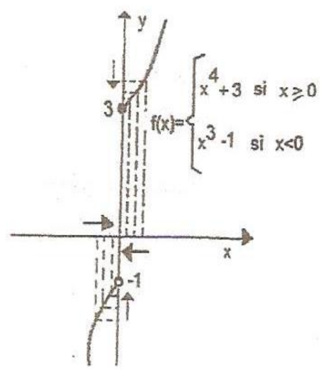


Figura 1.2

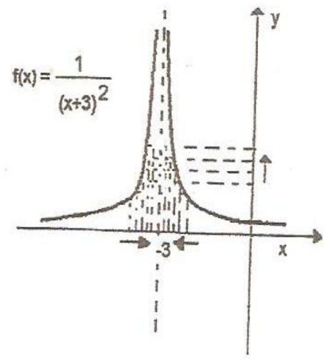


Figura 1.3

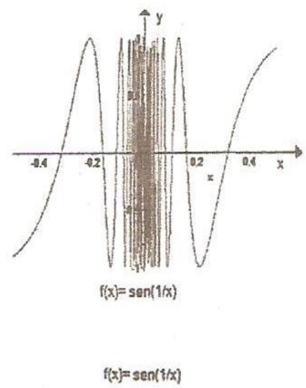


Figura 1.4

ACTIVIDAD Nº 1

Resolver los ejercicios del 1 al 8 (ver material de ejercicios propuestos)

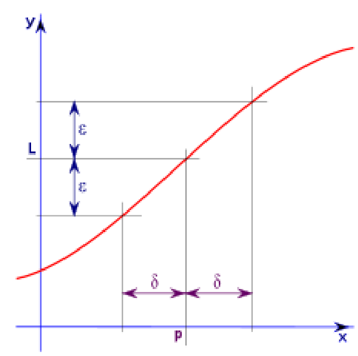
2.1.6. DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE O DEFINICIÓN $\varepsilon - \delta$

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a p (salvo, posiblemente en c) y L un número real. La afirmación

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$si \quad 0 < |x - p| < \delta, \ entonces \ |f(x) - L| < \varepsilon$



ACTIVIDAD Nº 2

Resolver los ejercicios del 9 al 13 (ver material de ejercicios propuestos)

2.1.7. CÁLCULO ANALÍTICO DE LÍMITES

A continuación se desarrollará el marco teórico que sustenta el cálculo analítico de límites usando el álgebra.

2.1.7.1. Límites básicos

Sean b, c números reales:

1. El límite de una función constante es la misma constante, simbólicamente se escribe $\lim_{x\to c} b = b$.
2. El límite de la función identidad cuando x tiende a c es c, simbólicamente se escribe $\lim_{x\to c} x = c$.

2.1.7.2. Propiedades de los límites:

Sean b, c números reales, n un entero positivo, f y g funciones y supóngase que el $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen:

1. Múltiplo escalar: $\lim_{x\to c} bf(x) = b\lim_{x\to c} f(x)$, es decir, el límite de la multiplicación de un número real por una función es igual a multiplicar el número real por el límite de la función.

2. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$, es decir, el límite de la suma o diferencia de dos funciones es igual a la suma o diferencia de los límites de cada función.

3. Producto: $\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$, es decir, el límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de cada función.

4. Cociente: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, con $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, es decir, el límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de cada función.

5. Potencia:, es decir, el límite de la potencia es igual al límites de la base elevado al límite del exponente.

a. Sea n un número entero. El $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$ siempre que los valores del $\lim_{x\to c} f(x)$ y n no sean simultáneamente cero, así, el límite de la potencia es igual a la potencia del límite.

b. Sea a un número racional positivo. El $\lim_{x\to c}\left[a^{f(x)}\right] = a^{\lim_{x\to c} f(x)}$, así, el límite de una función exponencial es igual a la base elevada al límite del exponente.

ACTIVIDAD Nº 3

Resolver los ejercicios del 14 al 21 (ver material de ejercicios propuestos)

2.1.7.3. Límite de una función polinómica

Si $p(x)$ es una función polinómica y c un número real, entonces $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$

2.1.7.4. Límite de una función racional

Si $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \dfrac{p(c)}{q(c)}$

2.1.7.5. Límite de una función radical

Si $f(x)$ es una función y n un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

Si $f(x)$ es una función, n un entero positivo par y $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

2.1.7.6. Límite de una función logarítmica

Si $f(c)>0$ y $\lim_{x\to c} f(x) >0$ entonces

$$\lim_{x\to c} \log_b (f(x)) = \log_b \left(\lim_{x\to c} f(x) \right)$$

2.1.7.7. Límites de funciones trigonométricas

Sea c un número real en el dominio de la función trigonométrica dada. Entonces

a. $\lim_{x\to c} \sin x = \sin c$

b. $\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$

c. $\lim_{x\to c} \tan x = \tan c$

d. $\lim_{x\to c} \cot x = \cot c$

e. $\lim_{x\to c} \sec x = \sec c$

f. $\lim_{x\to c} \csc x = \csc c$

2.1.7.8. Límites notables

Son límites que aparecen frecuentemente en la resolución de ejercicios y el lector está autorizado para que cuando encuentre cualquiera de ellos escriba directamente su resultado. Se consideran límites notables los siguientes:

a. $\lim_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

b. $\lim_{u\to 0} \dfrac{\sin(bu)}{u} = b \quad b \neq 0$

c. $\lim_{u\to 0} \dfrac{1-\cos u}{u} = 0$

d. $\lim_{u\to 0} (1+u)^{1/u} = e$

e. $\lim_{u\to 0} \left(\dfrac{a^u - 1}{u} \right) = \ln a \quad a \in \mathbb{R}^+$

ACTIVIDAD Nº 4

Resolver los ejercicios del 22 al 28 (ver material de ejercicios propuestos)

2.1.7.10. Igualdades simbólicas y formas indeterminadas

Las igualdades simbólicas son reglas mnemotécnicas, donde hay una violación de la formalidad del lenguaje matemático, pero permite recordar con mayor facilidad las operaciones entre límites que involucran el $\pm\infty$, 0, y $k \in \mathbb{R}^*$.

Las formas indeterminadas son casos en los que el conocimiento matemático de los términos involucrados en el límite no permiten concluir cual es el resultado de dicho límite, o afirmar que éste no existe.

Las igualdades simbólicas y las formas indeterminadas son:

Operación	Igualdades simbólicas	Formas indeterminadas
Adición y sustracción	$\infty \pm k = \infty$ $\quad -\infty \pm k = \infty$ $\infty + \infty = \infty$ $\quad -\infty - \infty = -\infty$	$\infty - \infty$
Multiplicación	$\infty \cdot k = +\infty \ \ si \ k \in \mathbb{R}^+$ $\infty \cdot k = -\infty \ \ si \ k \in \mathbb{R}^-$	$\infty \cdot 0$
División	$\frac{\infty}{0} = \infty$ $\quad \frac{-\infty}{0} = -\infty$ $\frac{k}{\infty} = 0$ $\quad \frac{0}{k} = 0$ $\quad \frac{0}{\infty} = 0$ $\frac{\infty}{k} = \infty \ \ si \ k \in \mathbb{R}^+$ $\frac{\infty}{k} = -\infty \ \ si \ k \in \mathbb{R}^-$ $\frac{k}{0} = \pm\infty \ \ si \ k \in \mathbb{R}^*$	$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$
Potenciación	$k^0 = 1 \ \ si \, k \neq 0$ $\quad k^\infty = 0 \ \ si \ 0 < k < 1$ $k^\infty = \infty \ \ si \ k > 1$ $0^k = 0 \ \ si \ k > 0$ $\quad 0^k = \infty \ \ si \ k < 0$ $\infty^\infty = \infty$ $\quad 0^\infty = 0$ $\quad \infty^{-\infty} = 0$ $\infty^k = \infty \ \ si \ k > 0$ $\quad \infty^k = o \ \ si \ k < 0$	1^∞ 0^0 ∞^0

3.1.7.11. Indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}$

A continuación se presentan algunas sugerencias para calcular $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ en el caso en que $f(a)$ produzca la forma indeterminada $\frac{0}{0}$**:**

1. **1.** Para calcular $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ de una función racional $f(x)$ en el caso que $f(a)$ produzca la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ se debe factorizar la expresión, para luego cancelar el factor causante de los ceros del numerador y del denominador de la función racional. El factor que hace cero es $x-a$.
2. **2.** Para calcular $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ de una función algebraica $f(x)$ en el caso que $f(a)$ produzca la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ y que involucre en alguna parte de ella una raíz cuadrada se debe aplicar el cociente notable $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$, para luego cancelar el factor causante de los ceros del numerador y del denominador de la expresión. El factor que hace cero es $x-a$. Otra herramienta matemática que se puede aplicar a este caso es multiplicar y dividir la fracción por la conjugada de la expresión donde está inmersa la raíz cuadrada.
3. **3.** Para calcular $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ de una función algebraica $f(x)$ en el caso que $f(a)$ produzca la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ y que involucre en alguna parte de ella una raíz cúbica se debe aplicar el cociente notable $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ o $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$, para luego cancelar el factor causante de los ceros del numerador y del denominador de la expresión. El factor que hace cero es $x-a$.
4. **4.** Para calcular $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ de una función algebraica $f(x)$ en el caso que $f(a)$ produzca la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ y que involucre en alguna parte de ella una raíz $n-ésima$ se debe aplicar el cociente notable $a-b=\dfrac{a^n-b^n}{a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}}$ o $a+b=\dfrac{a^n-b^n}{a^{n-1}-a^{n-2}b+...-ab^{n-2}+b^{n-1}}$, para luego cancelar el factor causante de los ceros del numerador y del denominador de la expresión. El factor que hace cero es $x-a$.
5. **5.** Para calcular $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ de una función racional $f(x)$ en el caso que $f(a)$ produzca la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ y que involucre la expresión a^n-b^n o a^n+b^n se debe aplicar la igualdad

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \text{ con } n \text{ par o impar; ó}$$

$$a^n - b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}\right) \text{ con } n \text{ par; ó}$$

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \text{ con } n \text{ impar}$$

para luego cancelar el factor causante de los ceros del numerador y del denominador de la función racional. El factor que hace cero es $x - a$.

6. Para calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ de una expresión trigonométrica $f(x)$ en el caso que $f(a)$ produzca la indeterminación $\frac{0}{0}$ sugiere aplicar una o varias de las siguientes herramientas matemáticas que permitan eliminar la indeterminación: identidades trigonométricas, limites trigonométricos notables, cocientes notables, cambio de variable, separar los factores que son cero de los que no lo son, aplicar propiedades de los límites, sumar y restar una cantidad, dividir el numerador y el denominador de la expresión entre la variable elevada a cualquier potencia, entre otras.

Algunas identidades trigonométricas útiles para calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ de una expresión trigonométrica $f(x)$ cuando $f(a)$ produzca la indeterminación $\frac{0}{0}$ son:

$\sin x \csc x = 1$	$\cos x \sec x = 1$
$\tan x \cot x = 1$	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$	$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \qquad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$	
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$	$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

ACTIVIDAD Nº 5

Resolver los ejercicios del 29 al 111 (ver material de ejercicios propuestos)

2.1.8. LÍMITES INFINITOS

Sea $f(x)=\frac{1}{x-2}$, se afirma que $f(2)=\frac{1}{0}$ no existe, sin embargo se puede estudiar el comportamiento de la función f alrededor de 2 a través de las siguientes tablas de valores:

Tabla 1.1: Comportamiento de f por la izquierda de 2

x	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	-10	-100	-1000

Tabla 1.2: Comportamiento de f por la derecha de 2

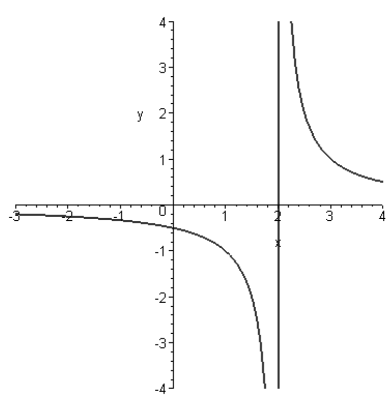
x	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	10	100	1000

En la Tabla 1.1 se observa que a medida que x se acerca a 2 por la izquierda, las imágenes $f(x)$ decrecen sin cota, este comportamiento se denota de la siguiente manera $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$ y se afirma que el límite no existe.

En la Tabla 1.2 se observa que a medida que x se acerca a 2 por la derecha, las imágenes $f(x)$ crecen sin cota, este comportamiento se denota de la siguiente manera $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ y se afirma que el límite no existe.

A este tipo de límites se le denomina LÍMITES INFINITOS y uno de los casos en que se producen es cuando se genera la expresión $\frac{k}{0}$.

La grafica de $f(x)=\frac{1}{x-2}$ es



En dicha grafica se reafirma el comportamiento expresado en la Tabla 1.1 y la Tabla 1.2, además se observa que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical, esto permite intuir que debe existir una relación entre las asíntotas verticales y los límites infinitos, la cual se planteará mas adelante en la definición 3.1.8.2.

2.1.8.1. Definición de límites infinitos:

Sea f una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c, salvo, posiblemente, en el propio c. La expresión

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

significa que para todo M>0 existe un δ >0 tal que f(x) > M siempre que $0 < \left| x - c \right| < \delta$, es decir, que cuando x está cerca al valor de c las imágenes f(x) crecen sin cota.

Análogamente, la expresión

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

significa que para todo N<0 existe un δ >0 tal que f(x) < N siempre que $0 < \left| x - c \right| < \delta$, es decir, que cuando x está cerca al valor de c las imágenes f(x) decrecen sin cota.

2.1.8.2. Definición de asíntota vertical:

Si $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$, entonces se dice que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

2.1.8.3. Teoremas para resolver límites infinitos:

Teorema 1: si r es cualquier número entero positivo, entonces

I. $\displaystyle lím_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

II. $\displaystyle lím_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = +\infty \quad si \ \ r \ \ es \ \ par$

III. $\displaystyle lím_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = -\infty \quad si \ \ r \ \ es \ \ impar$

Teorema 2: si a es cualquier número real y si $\displaystyle lím_{x \to a} f(x) = 0$ y $\displaystyle lím_{x \to a} g(x) = c$

donde c es una constante diferente de 0, entonces

I. Si $c > 0 \ y \ f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\displaystyle lím_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

II. Si $c > 0 \ y \ f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\displaystyle lím_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

III. Si $c < 0 \ y \ f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\displaystyle lím_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

IV. Si $c<0$ y $f(x)\to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$

El teorema también es válido si se sustituye "$x\to a$" por "$x\to a^{+}$" o "$x\to a^{-}$"

2.1.8.4. Estrategia para para resolver límites infinitos:

Con base en los teoremas 1 y 2, se plantea el siguiente procedimiento para determinar el comportamiento del $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ de una función racional $f(x)$ en el caso que se genere la expresión $\dfrac{k}{0}$:

1. Determinar el signo de k.
2. Determinar si el denominador se acerca a cero por valores positivos o negativos, para ello se toma un valor muy cercano a c por su izquierda y se sustituye en el denominador para determinar su signo. De manera análoga se hace con un valor muy cercano a c por la derecha.

   Es importante aclarar que en los casos en que se puede afirmar que el denominador se acerca a cero por valores siempre positivos (o por valores siempre negativos) cuando x se acerca al valor de c por la izquierda y por la derecha no es necesario aplicar límites laterales.
3. Efectuar el cociente de signos para saber si el comportamiento de los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)$ es $+\infty$ o $-\infty$.

ACTIVIDAD Nº 6

Resolver los ejercicios del 112 al 121 (ver material de ejercicios propuestos)

2.1.9. LÍMITES EN EL INFINITO

Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$, a continuación se estudiará el comportamiento de la función f para valores de x muy grandes, es decir $x\to+\infty$, y para valores de x muy pequeños, es decir $x\to-\infty$ a través de las siguientes tablas de valores:

Tabla 1.3: Comportamiento de f cuando $x\to+\infty$

x	100	1000	10000
$f(x)$	2.01	2.001	2.0001

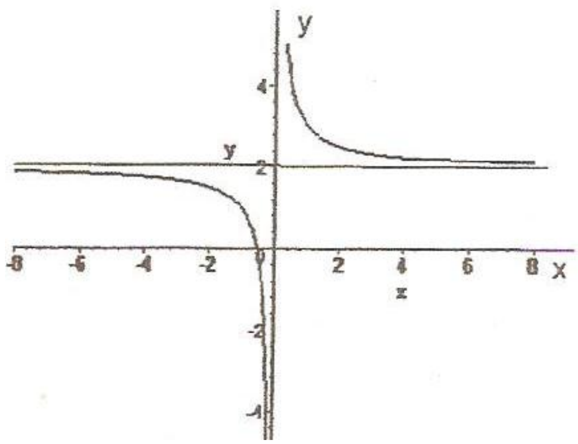
Tabla 1.4: Comportamiento de f cuando $x\to-\infty$

x	-100	-1000	-10000
$f(x)$	1.99	1.999	1.9999

En la Tabla 1.3 se observa que a medida que x asume valores muy grandes, las imágenes $f(x)$ se acercan arbitrariamente a 2, por tanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)=2$

En la Tabla 1.4 se observa que a medida que x asume valores muy pequeños, las imágenes $f(x)$ se acercan arbitrariamente a 2, por tanto, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)=2$

La grafica de $f(x)=\frac{1}{x}+2$ es



En dicha grafica se reafirma el comportamiento expresado en la Tabla 1.3 y la Tabla 1.4, además se observa que la recta $y=2$ es una asíntota horizontal, esto permite intuir que debe existir una relación entre las asíntotas horizontales y los límites en el infinito, la cual se planteará en las definiciones 3.1.9.2.

2.1.9.1. Definición de límites en el infinito.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ significa que para cada ε >0 existe un M>0 tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que x > M, es decir, que a medida que x asume valores más grandes las imágenes f(x) se encuentran más próximas al valor L

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ significa que para cada ε >0 existe un N<0 tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que x < N, es decir, que a medida que el valor absoluto de x asume valores más grandes las imágenes f(x) se encuentran más próximas al valor L

2.1.9.2. Definición de asíntota horizontal.

La recta *y* = *L* es asíntota horizontal por la derecha de la gráfica de *f* si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$

La recta *y*= *L* es asíntota horizontal por la izquierda de la gráfica de *f* si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$

2.1.9.3. Teorema sobre límites en el infinito.

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0$. Además, si x^r está definida para x<0, entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0$.

2.1.9.4. Indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Sea $\frac{f(x)}{g(x)}$ una función racional, donde $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. Para calcular el $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ o el $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ en el caso que se produzca la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ se divide el numerador y el denominador entre la variable de mayor potencia. Sin embargo, existe otro método más práctico para resolver este tipo de límites que consiste en:

1. Identificar el término de mayor grado del numerador (**TMGN**).
2. Identificar el término de mayor grado del denominador (**TMGD**).
3. Identificar el grado del numerador (**n**).
4. Identificar el grado del denominador (**m**).
5. Aplicar el siguiente criterio para determinar el valor del límite:

   5.1. Si $n > m$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ es infinito.

   5.2. Si $n < m$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   5.3. Si $n = m$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$.

2.1.10. INDETERMINACIONES $\infty - \infty$

Para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ de una función f en el caso que se produzca las indeterminaciones $\infty - \infty$ y $\infty \cdot 0$ se debe llevar a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y aplicar las estrategias correspondiente para resolver éste tipo de límites.

ACTIVIDAD Nº 7

Resolver los ejercicios del 122 al 155 (ver material de ejercicios propuestos)

2.1.11. INDETERMINACIONES DE LA FORMA 1^{∞}

Para calcular $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ en el caso que se produzca la indeterminación 1^{∞}, se debe aplicar la siguiente igualdad $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\theta}$, donde $\theta=\lim_{x\to a}\left[f(x)-1\right].g(x)$

ACTIVIDAD Nº 8

Resolver los ejercicios del 156 al 174 (ver material de ejercicios propuestos)

ACTIVIDAD Nº 9 (misceláneas)

Resolver los ejercicios del 175 al 185 (ver material de ejercicios propuestos)

2.1.12. TEOREMA DEL ENCAJE O TEOREMA DE ESTRICCIÓN:

Si $h(x)\le f(x)\le g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en el propio c, y si $\lim_{x\to c}h(x)=L$ y $\lim_{x\to c}g(x)=L$ entonces $\lim_{x\to c}f(x)=L$

ACTIVIDAD Nº 10

Resolver los ejercicios del 186 al 188 (ver material de ejercicios propuestos)

2.2 CONTINUIDAD

Intuitivamente, una función f es continua en un punto c, de su dominio, si en ese punto la grafica de f no se rompe, es decir, no tiene interrupciones.

2.2.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Obsérvese que las graficas de funciones f, g y h mostradas en las Figuras 2.1, 2.2 y 2.3 respectivamente presentan interrupciones en el punto $x=2$, es decir no son continuas en dicho punto.

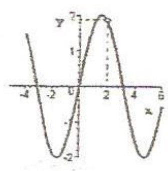


Figura 2.1

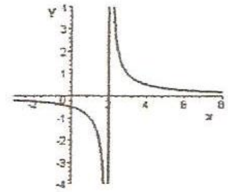


Figura 2.2

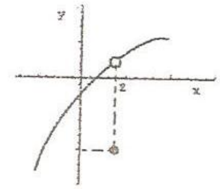


Figura 2.3

En la Figura 2.1 se muestra que $f(2)$ no existe, en la Figura 2.2 el $\lim_{x\to 2} g(x)$ no existe y en la Figura 2.3 $\lim_{x\to 2} h(x) \neq h(2)$. De manera que una función f es continua en un punto c si no ocurre ninguna de las tres situaciones presentadas en las graficas anteriores.

2.2.1.1. Definición de continuidad de una función f en un punto c

Una función f es continua en un punto c si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i. $f(c)$ *exista*

ii. $\lim_{x\to c} f(x)$ *exista*

iii. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Si alguna de estas tres condiciones falla se puede afirmar que la función es discontinua en c. Cuando no se cumple la condición i o iii f tiene una **discontinuidad removible** en c. Cuando no se cumple la condición ii f tiene una **discontinuidad esencial** en c. Si la condición ii no se cumple porque el límite es infinito se dice que es una **discontinuidad esencial infinita** y si no se cumple porque los límites laterales son diferentes se dice que es una **discontinuidad esencial de salto**.

Una función es continua en todo su dominio si es continua en todos los puntos de él. Las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y valor absoluto son continuas en todo su dominio.

ACTIVIDAD Nº 11

Resolver los ejercicios del 189 al 196 y 203 al 208 (ver material de ejercicios propuestos)

2.2.2. TEOREMA DE OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Sean f y g dos funciones continuas en $x = c$

1. La función $(f+g)(x)$ es continua en $x=c$, es decir, la suma de funciones continuas es una función continua.
2. La función $(fg)(x)$ es continua en $x=c$, es decir, el producto de funciones continuas es una función continua.
3. La función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en $x=c$, si $g(a)\neq 0$ es decir, el cociente de funciones continuas es una función continua, siempre que el divisor sea diferente de cero.

2.2.3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

2.2.3.1. Continuidad de una función f en un intervalo abierto (a,b)

f es continua en el intervalo abierto (a,b) si lo es en todos y cada uno de los puntos del intervalo (a,b).

2.2.3.2. Continuidad de una función f en un intervalo cerrado $[a,b]$

f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ si lo es en el intervalo abierto (a,b) y además se cumple que $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

ACTIVIDAD Nº 10

Resolver los ejercicios del 209 al 216 y 197 al 202 (ver material de ejercicios propuestos)

2.2.4. TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número c que pertenece al intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(c)=k$.

ACTIVIDAD Nº 11

Resolver los ejercicios del 217 al 220 (ver material de ejercicios propuestos)

BIBLIOGRAFÍA

DEMIDÓVICH, B. P. (1.980). 5.000 problemas de análisis matemático. España: Thomson Editores. Novena edición.
LARSON, R., HOSTETLER, R. P. y EDWARDS, B. H. (2.006). Cálculo con geometría analítica. México: McGraw-Hill / Interamericana Editores S. A., volumen I. Octava edición.
LEITHOLD, L. (1.998). Cálculo. México: Oxford University Press. Séptima edición.
PITA, C. (1.998). Cálculo en una variable. México: Prentice Hall Hispanoamérica, S. A.