71. $x_1 = 94,\ x_2 = 157$ **73.** $f(49.4, 253) = 13\,201.8$

75. *a)* $y = 0.004x^2 + 0.07x + 19.4$ *b)* 50.6 kg

77. Máximo: $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

79. $x = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ km; $y = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$ km;
$z = \left(60 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)/6 \approx 8.716$ km

SP Solución de problemas (página 981)

1. *a)* 12 unidades cuadradas *b)* Demostración *c)* Demostración

3. *a)* $y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$

b) $x_0y_0z_0 = 1 \implies z_0 = 1/x_0y_0$

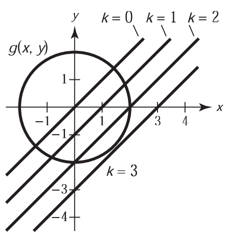
Entonces el plano tangente es

$$y_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(x - x_0) + x_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(y - y_0) + x_0y_0\left(z - \frac{1}{x_0y_0}\right) = 0.$$

Intersecciones: $(3x_0, 0, 0), (0, 3y_0, 0), \left(0, 0, \frac{3}{x_0y_0}\right)$

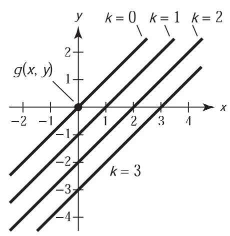
$V = \frac{1}{3}bh = \frac{9}{2}$

5. *a)*



Valor máximo: $2\sqrt{2}$

b)



Valores máximo y mínimo: 0
El método de los multiplicadores de Lagrange no se aplica porque $\nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

7. $2\sqrt[3]{150} \times 2\sqrt[3]{150} \times 5\sqrt[3]{150}/3$

9. *a)*
$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= xCy^{1-a}ax^{a-1} + yCx^a(1-a)y^{1-a-1} \\ &= ax^aCy^{1-a} + (1-a)x^aC(y^{1-a}) \\ &= Cx^ay^{1-a}[a + (1-a)] \\ &= Cx^ay^{1-a} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

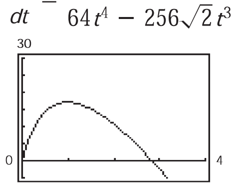
b)
$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= C(tx)^a(ty)^{1-a} \\ &= Ctx^ay^{1-a} \\ &= tCx^ay^{1-a} \\ &= tf(x, y) \end{aligned}$$

11. *a)* $x = 32\sqrt{2}t$
$y = 32\sqrt{2}t - 16t^2$

b) $\alpha = \arctan\left(\dfrac{y}{x + 50}\right) = \arctan\left(\dfrac{32\sqrt{2}t - 16t^2}{32\sqrt{2}t + 50}\right)$

c) $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{-16\left(8\sqrt{2}t^2 + 25t - 25\sqrt{2}\right)}{64t^4 - 256\sqrt{2}t^3 + 1024t^2 + 800\sqrt{2}t + 625}$

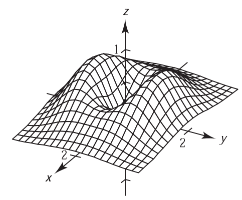
d)



No; la razón de cambio de α es mayor cuando el proyectil está más cerca de la cámara.

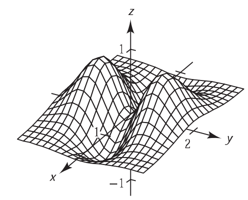
e) α es máximo cuando $t = 0.98$ segundos.
No; el proyectil alcanza su máxima altura cuando $t = \sqrt{2} \approx 1.41$ segundos.

13. *a)*



Mínimo: (0, 0, 0)
Máximos: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, e^{-1})$

b)

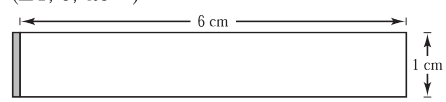


Mínimos: $(\pm 1, 0, -e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$
Puntos silla: (0, 0, 0)

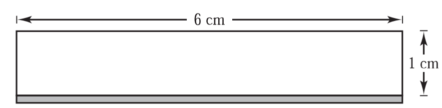
c) $\alpha > 0$
Mínimo: (0, 0, 0)
Máximos: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$

$\alpha < 0$
Mínimos: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: (0, 0, 0)

15. *a)*



b)



c) Altura

d) $dl = 0.01,\ dh = 0$: $dA = 0.01$
$dl = 0,\ dh = 0.01$: $dA = 0.06$

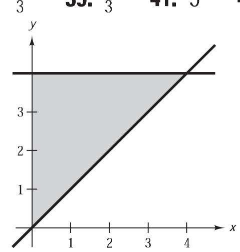
17 a 19. Demostraciones

Capítulo 14

Sección 14.1 (página 990)

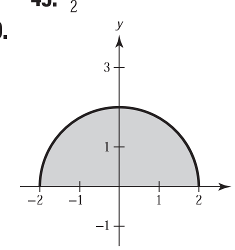
1. $2x^2$ **3.** $y\ln(2y)$ **5.** $(4x^2 - x^4)/2$
7. $(y/2)[(\ln y)^2 - y^2]$ **9.** $x^2(1 - e^{-x^2} - x^2e^{-x^2})$ **11.** 3
13. $\frac{8}{3}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 2 **19.** $\frac{1}{3}$ **21.** 1 629 **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** 4
27. $\pi/2$ **29.** $\pi^2/32 + \frac{1}{8}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** Diverge **35.** 24
37. $\frac{16}{3}$ **39.** $\frac{8}{3}$ **41.** 5 **43.** πab **45.** $\frac{9}{2}$

47.



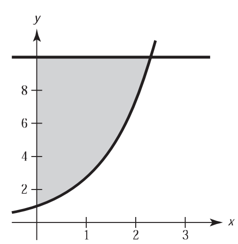
$$\int_0^4\int_x^4 f(x, y)\,dy\,dx$$

49.



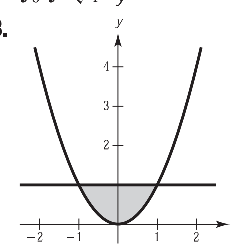
$$\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$$

51.



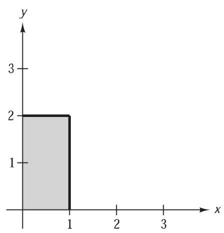
$$\int_0^{\ln 10}\int_{e^x}^{10} f(x, y)\,dy\,dx$$

53.



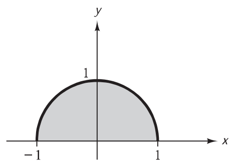
$$\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$$

55.



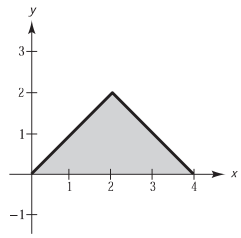
$$\int_0^1 \int_0^2 dy\,dx = \int_0^2 \int_0^1 dx\,dy = 2$$

57.



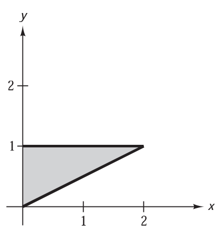
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = \frac{\pi}{2}$$

59.



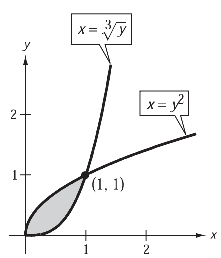
$$\int_0^2 \int_0^x dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy\,dx = \int_0^2 \int_y^{4-y} dx\,dy = 4$$

61.



$$\int_0^2 \int_{x/2}^1 dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2y} dx\,dy = 1$$

63.

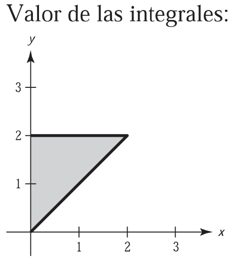


$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{5}{12}$$

65. La primera integral surge utilizando rectángulos representativos verticales. Las dos segundas surgen utilizando rectángulos representativos horizontales.

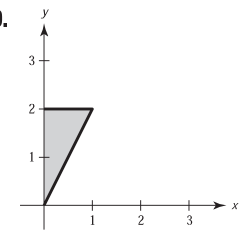
Valor de las integrales: $15\,625\pi/24$

67.



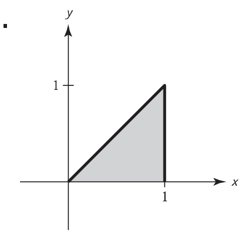
$$\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx = \frac{26}{9}$$

69.



$$\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\,dy\,dx = e^4 - 1 \approx 53.598$$

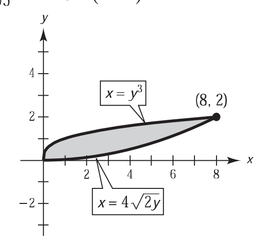
71.



$$\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}(1 - \cos 1) \approx 0.230$$

73. $\frac{1\,664}{105}$ **75.** $(\ln 5)^2$

77. *a)*



b) $\displaystyle\int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} (x^2y - xy^2)\,dy\,dx$ *c)* $67\,520/693$

79. 20.5648 **81.** $15\pi/2$

83. Una integral iterada es una integral de una función de varias variables. Se integra con respecto a una variable mientras las otras variables se mantienen constantes.

85. Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular.

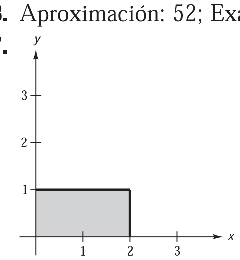
87. Verdadero

Sección 14.2 (página 1000)

1. 24 (la aproximación es exacta)

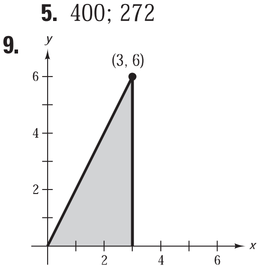
3. Aproximación: 52; Exacto: $\frac{160}{3}$ **5.** 400; 272

7.

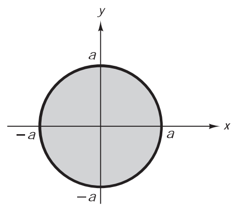


8

9.



36

11. 

0

13. $\int_0^3\int_0^5 xy\,dy\,dx = \frac{225}{4}$

$\int_0^5\int_0^3 xy\,dx\,dy = \frac{225}{4}$

15. $\int_1^2\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

$\int_1^2\int_1^y \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_2^4\int_{y/2}^2 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

17. $\int_0^1\int_{4-x}^{4-x^2} -2y\,dy\,dx = -\frac{6}{5}$

$\int_3^4\int_{4-y}^{\sqrt{4-y}} -2y\,dx\,dy = -\frac{6}{5}$

19. $\int_0^3\int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx\,dy = 25$

$\int_0^4\int_0^{3x/4} x\,dy\,dx + \int_4^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx = 25$

21. 4 **23.** 4 **25.** 12 **27.** $\frac{3}{8}$ **29.** 1 **31.** $32\sqrt{2}\pi/3$

33. $\int_0^1\int_0^x xy\,dy\,dx = \frac{1}{8}$ **35.** $\int_0^2\int_0^4 x^2\,dy\,dx = \frac{32}{3}$

37. $2\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = \frac{2}{3}$

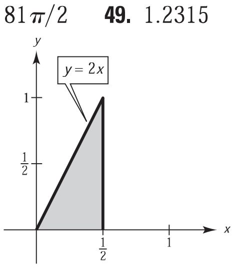
39. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\,dx = \frac{16}{3}$

41. $2\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} (2x-x^2-y^2)\,dy\,dx$

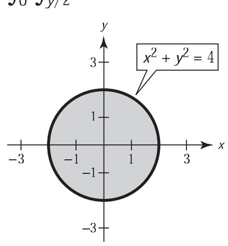
43. $4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

45. $\int_0^2\int_{-\sqrt{2-2(y-1)^2}}^{\sqrt{2-2(y-1)^2}} (4y-x^2-2y^2)\,dx\,dy$

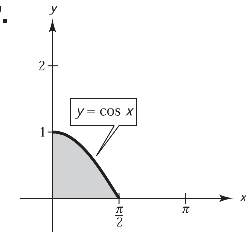
47. $81\pi/2$ **49.** 1.2315 **51.** Demostración

53. 

$\int_0^1\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,dy = 1 - e^{-1/4} \approx 0.221$

55. 

$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2}\,dy\,dx = \frac{64}{3}$

57. 

$\int_0^1\int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

59. 2 **61.** $\frac{8}{3}$ **63.** $(e-1)^2$ **65.** 25 645.24

67. Ver la definición de integral doble en la página 994. La integral doble de una función $f(x, y) \geq 0$ sobre la región de integración da el volumen de esa región.

69. *a*) La caída de nieve total en el país R

b) El promedio de caída de nieve en el país R

71. No; 6π es el valor más grande posible. **73.** Demostración; $\frac{1}{5}$

75. Demostración; $\frac{7}{27}$ **77.** 2 500 m^3 **79.** *a*) 1.784 *b*) 1.788

81. *a*) 11.057 *b*) 11.041 **83.** d

85. Falso. $V = 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy.$

87. $\frac{1}{2}(1-e)$ **89.** R: $x^2+y^2 \leq 9$ **91.** ≈ 0.82736

93. Problema Putnam A2, 1989

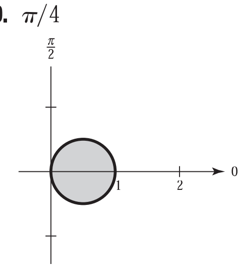
Sección 14.3 (página 1009)

1. Rectangular **3.** Polar

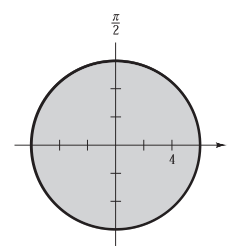
5. La región R es un medio círculo de radio 8. Se puede describir en coordenadas polares como
$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 8, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

7. La región R es una cardioide con $a = b = 3$. Se puede describir en coordenadas polares como
$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 3 + 3\operatorname{sen}\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

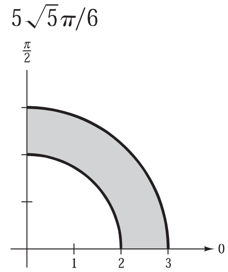
9. $\pi/4$



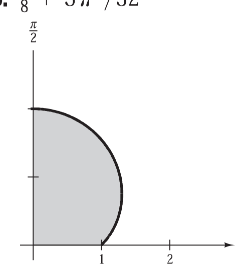
11. 0



13. $5\sqrt{5}\pi/6$



15. $\frac{9}{8} + 3\pi^2/32$



17. $a^3/3$ **19.** 4π **21.** $243\pi/10$ **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** $(\pi/2)$ sen 1

27. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2\,dr\,d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

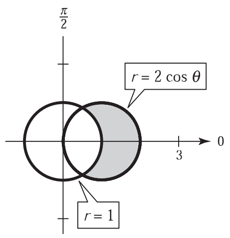
29. $\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta = \frac{16}{3}$

31. $\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r\theta\,dr\,d\theta = \frac{3\pi^2}{64}$ **33.** $\frac{1}{8}$ **35.** $\frac{250\pi}{3}$

37. $\frac{64}{9}(3\pi - 4)$ **39.** $2\sqrt{4 - 2\sqrt[3]{2}}$ **41.** 1.2858

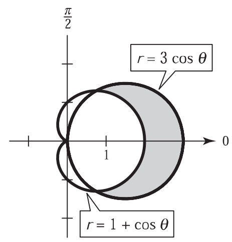
43. 9π **45.** $3\pi/2$ **47.** π

49.



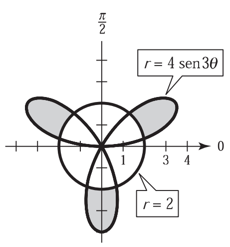
$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

51.



π

53.



$\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

55. Sea R una región acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = a$ y $\theta = b$. Al utilizar coordenadas polares para evaluar una integral doble sobre R, R puede ser particionada en pequeños sectores polares.

57. Las regiones r-simples tienen límites fijos para θ y límites variables para r.

Las regiones θ-simples tienen límites variables para θ y límites fijos para r.

59. *a)* $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$

b) $\int_0^{2\pi}\int_0^3 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$

c) Escoger la integral en el apartado *b)* porque los límites de integración son menos complicados.

61. Insertar un factor de r; sector de un círculo **63.** 56.051 **65.** c

67. Falso. Sea $f(r, \theta) = r - 1$ y sea R un sector donde $0 \le r \le 6$ y $0 \le \theta \le \pi$.

69. *a)* 2π (b) $\sqrt{2\pi}$ **71.** 486 788

73. *a)* $\int_2^4\int_{y/\sqrt{3}}^{y} f\,dx\,dy$

b) $\int_{2/\sqrt{3}}^{2}\int_2^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_2^{4/\sqrt{3}}\int_x^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_{4/\sqrt{3}}^{4}\int_x^4 f\,dy\,dx$

c) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_{2\csc\theta}^{4\csc\theta} f\,r\,dr\,d\theta$

75. $A = \frac{\Delta\theta r_2^2}{2} - \frac{\Delta\theta r_1^2}{2} = \Delta\theta\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1) = r\,\Delta r\,\Delta\theta$

Sección 14.4 (página 1018)

1. $m = 4$ **3.** $m = \frac{1}{8}$

5. *a)* $m = ka^2$, $(a/2, a/2)$ *b)* $m = ka^3/2$, $(a/2, 2a/3)$

c) $m = ka^3/2$, $(2a/3, a/2)$

7. *a)* $m = ka^2/2$, $(a/3, 2a/3)$ *b)* $m = ka^3/3$, $(3a/8, 3a/4)$

c) $m = ka^3/6$, $(a/2, 3a/4)$

9. *a)* $\left(\frac{a}{2} + 5, \frac{a}{2}\right)$ *b)* $\left(\frac{a}{2} + 5, \frac{2a}{3}\right)$

c) $\left(\frac{2(a^2 + 15a + 75)}{3(a + 10)}, \frac{a}{2}\right)$

11. $m = k/4$, $(2/3, 8/15)$ **13.** $m = 30k$, $(14/5, 4/5)$

15. *a)* $m = k(e - 1)$, $\left(\frac{1}{e - 1}, \frac{e + 1}{4}\right)$

b) $m = \frac{k}{4}(e^2 - 1)$, $\left(\frac{e^2 + 1}{2(e^2 - 1)}, \frac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

17. $m = 256k/15$, $(0, 16/7)$ **19.** $m = \frac{2kL}{\pi}$, $\left(\frac{L}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

21. $m = \frac{k\pi a^2}{8}$, $\left(\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}, \frac{4a(2 - \sqrt{2})}{3\pi}\right)$

23. $m = \frac{k}{8}(1 - 5e^{-4})$, $\left(\frac{e^4 - 13}{e^4 - 5}, \frac{8}{27}\left[\frac{e^6 - 7}{e^6 - 5e^2}\right]\right)$

25. $m = k\pi/3$, $\left(81\sqrt{3}/(40\pi), 0\right)$

27. $\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}b/3$ **29.** $\bar{\bar{x}} = a/2$ **31.** $\bar{\bar{x}} = a/2$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{3}h/3$ $\bar{\bar{y}} = a/2$ $\bar{\bar{y}} = a/2$

33. $I_x = kab^4/4$

$I_y = kb^2a^3/6$

$I_0 = (3kab^4 + 2ka^3b^2)/12$

$\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}a/3$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{2}b/2$

35. $I_x = 32k/3$

$I_y = 16k/3$

$I_0 = 16k$

$\bar{\bar{x}} = 2\sqrt{3}/3$

$\bar{\bar{y}} = 2\sqrt{6}/3$

37. $I_x = 16k$

$I_y = 512k/5$

$I_0 = 592k/5$

$\bar{\bar{x}} = 4\sqrt{15}/5$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{6}/2$

39. $I_x = 3k/56$

$I_y = k/18$

$I_0 = 55k/504$

$\bar{\bar{x}} = \sqrt{30}/9$

$\bar{\bar{y}} = \sqrt{70}/14$

41. $2k\int_{-b}^{b}\int_0^{\sqrt{b^2 - x^2}} (x - a)^2\,dy\,dx = \frac{k\pi b^2}{4}(b^2 + 4a^2)$

43. $\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} kx(x - 6)^2\,dy\,dx = \frac{42\,752k}{315}$

45. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} k(a - y)(y - a)^2\,dy\,dx = ka^5\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{17}{15}\right)$

47. Ver definiciones en la página 1014. **49.** Las respuestas varían.

51. $L/3$ **53.** $L/2$ **55.** Demostración

Sección 14.5 (página 1025)

1. 24 **3.** 12π **5.** $\frac{1}{2}\left[4\sqrt{17} + \ln\left(4 + \sqrt{17}\right)\right]$

7. $\frac{4}{27}\left(31\sqrt{31} - 8\right)$ **9.** $\sqrt{2} - 1$ **11.** $\sqrt{2}\pi$

13. $2\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ **15.** $48\sqrt{14}$ **17.** 20π

19. $\int_0^1\int_0^x \sqrt{5 + 4x^2}\,dy\,dx = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{12} \approx 1.3183$

21. $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx$

$= \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right) \approx 117.3187$

23. $\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx \approx 1.8616$ **25.** e

27. 2.0035 **29.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+9(x^2-y)^2+9(y^2-x)^2}\,dy\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dy\,dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{10}\sqrt{1+e^{2xy}(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

35. Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre una región cerrada R en el plano xy, entonces el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R es

$$\int_R\int\sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA.$$

37. No. La gráfica no cambia de tamaño ni de forma, sólo de posición. Por lo anterior, el área de la superficie no crece.

39. 16 **41.** (a) $812\pi\sqrt{609}$ cm^3 (b) $100\pi\sqrt{609}$ cm^2

Sección 14.6 (página 1035)

1. 18 **3.** $\frac{1}{10}$ **5.** $\frac{15}{2}(1-1/e)$ **7.** $-\frac{40}{3}$ **9.** $\frac{324}{5}$

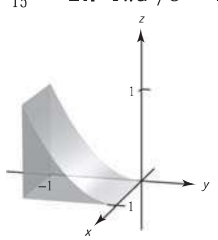
11. 2.44167 **13.** $\displaystyle V=\int_0^5\int_0^{5-x}\int_0^{5-x-y}dz\,dy\,dx$

15. $\displaystyle V=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\int_{-\sqrt{6-y^2}}^{\sqrt{6-y^2}}\int_0^{6-x^2-y^2}dz\,dx\,dy$

17. $\displaystyle V=\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{80-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx$

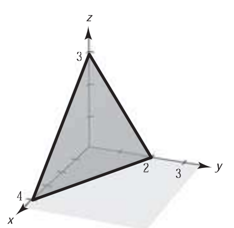
19. $\frac{256}{15}$ **21.** $4\pi a^3/3$ **23.** $\frac{256}{15}$ **25.** 10

27.



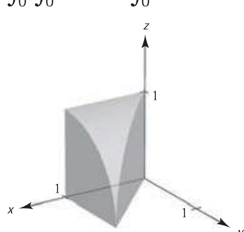
$$\int_0^1\int_0^1\int_{-1}^{-\sqrt{z}}dy\,dz\,dx$$

29.



$$\int_0^3\int_0^{(12-4z)/3}\int_0^{(12-4z-3x)/6}dy\,dx\,dz$$

31.



$$\int_0^1\int_0^x\int_0^{\sqrt{1-y^2}}dz\,dy\,dx$$

33. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^3 xyz\,dz\,dy\,dx,\ \int_0^1\int_y^1\int_0^3 xyz\,dz\,dx\,dy,$
$\displaystyle\int_0^1\int_0^3\int_0^x xyz\,dy\,dz\,dx,\ \int_0^3\int_0^1\int_0^x xyz\,dy\,dx\,dz,$
$\displaystyle\int_0^3\int_0^1\int_y^1 xyz\,dx\,dy\,dz,\ \int_0^1\int_0^3\int_y^1 xyz\,dx\,dz\,dy$

35. $\displaystyle\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^4 xyz\,dz\,dy\,dx,\ \int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_0^4 xyz\,dz\,dx\,dy,$
$\displaystyle\int_{-3}^3\int_0^4\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\,dy\,dz\,dx,\ \int_0^4\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\,dy\,dx\,dz,$
$\displaystyle\int_0^4\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\,dx\,dy\,dz,\ \int_{-3}^3\int_0^4\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\,dx\,dz\,dy$

37. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-y^2}dx\,dy\,dz,\ \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-y^2}dx\,dz\,dy,$
$\displaystyle\int_0^1\int_0^{2z-z^2}\int_0^{1-z}1\,dy\,dx\,dz+\int_0^1\int_{2z-z^2}^1\int_0^{\sqrt{1-x}}1\,dy\,dx\,dz,$
$\displaystyle\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-x}}^1\int_0^{1-z}1\,dy\,dz\,dx+\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-x}}\int_0^{\sqrt{1-x}}1\,dy\,dz\,dx,$
$\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x}}\int_0^{1-y}dz\,dy\,dx$

39. $m = 8k$ **41.** $m = 128k/3$
$\bar{x} = \frac{3}{2}$ $\bar{z} = 1$

43. $\displaystyle m = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xy\,dz\,dy\,dx$
$\displaystyle M_{yz} = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b x^2y\,dz\,dy\,dx$
$\displaystyle M_{xz} = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xy^2\,dz\,dy\,dx$
$\displaystyle M_{xy} = k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xyz\,dz\,dy\,dx$

45. $\bar{x}$ será más grande que 2, mientras que $\bar{y}$ y $\bar{z}$ no cambian.

47. $\bar{x}$ y $\bar{z}$ no cambian, mientras que $\bar{y}$ será más grande que 0.

49. $(0, 0, 3h/4)$ **51.** $\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$ **53.** $\left(5, 6, \frac{5}{4}\right)$

55. *a*) $I_x = 2ka^5/3$, $I_y = 2ka^5/3$, $I_z = 2ka^5/3$ *b*) $I_x = ka^8/8$, $I_y = ka^8/8$, $I_z = ka^8/8$

57. *a*) $I_x = 256k$, $I_y = 512k/3$, $I_z = 256k$ *b*) $I_x = 2\,048\,k/3$, $I_y = 1\,024\,k/3$, $I_z = 2\,048\,k/3$

59. Demostración **61.** $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

63. *a*) $\displaystyle m=\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2}kz\,dz\,dy\,dx$

b) $\bar{x} = \bar{y} = 0$, por simetría

$\displaystyle\bar{z}=\frac{1}{m}\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2}kz^2\,dz\,dy\,dx$

c) $\displaystyle I_z=\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2}kz(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$

65. Ver "Definición de Integral Triple" en la página 1027 y el teorema 14.4, "Evaluación por integrales iteradas" en la página 1028.

67. *a*) El sólido *B*.

b) El sólido *B* tiene el momento de inercia mayor porque es más denso.

c) El sólido *A* llegará primero abajo. Como el sólido *B* tiene un momento de inercia mayor, tiene una resistencia mayor al movimiento de rotación.

69. $\frac{13}{3}$ **71.** $\frac{3}{2}$

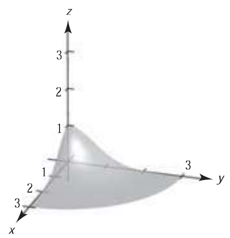
73. Q: $3z^2 + y^2 + 2x^2 \le 1$; $4\sqrt{6}\pi/45 \approx 0.684$

75. $a = 2, \frac{16}{3}$ **77.** Problema Putnam B1, 1965

Sección 14.7 (página 1043)

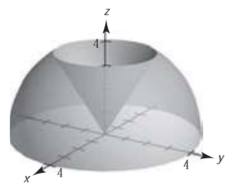
1. 27 **3.** $\frac{52}{45}$ **5.** $\pi/8$ **7.** $\pi(e^4 + 3)$

9.



$(1 - e^{-9})\pi/4$

11.



$64\sqrt{3}\pi/3$

13. Cilíndrica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2 \cos\theta \, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan(1/2)}\int_0^{4\sec\phi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$\displaystyle + \int_0^{2\pi}\int_{\arctan(1/2)}^{\pi/2}\int_0^{\cot\phi\csc\phi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 0$

15. Cilíndrica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi} \rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 0$

17. $(2a^3/9)(3\pi - 4)$ **19.** $\pi/16$ **21.** $(2a^3/9)(3\pi - 4)$

23. $48k\pi$ **25.** $\pi r_0^2 h/3$ **27.** $(0, 0, h/5)$

29. $\displaystyle I_z = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{r_0}\int_0^{h(r_0-r)/r_0} r^3\, dz\, dr\, d\theta = 3mr_0^2/10$

31. Demostración **33.** $9\pi\sqrt{2}$ **35.** $16\pi^2$

37. $k\pi a^4$ **39.** $(0, 0, 3r/8)$ **41.** $k\pi/192$

43. Rectangulares a cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2$

$\tan\theta = y/x$

$z = z$

Cilíndricas a rectangulares: $x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\theta$

$z = z$

45. $\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)}^{h_2(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$

47. *a*) r constante: cilindro circular recto en torno al eje z.

θ constante: plano paralelo al eje z.

z constante: plano paralelo al plano xy.

b) ρ constante: esfera.

θ constante: plano paralelo al eje z.

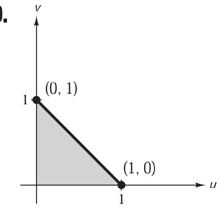
ϕ constante: cono.

49. $\frac{1}{2}\pi^2 a^4$ **51.** Problema Putnam A1, 2006

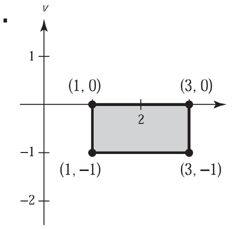
Sección 14.8 (página 1050)

1. $-\frac{1}{2}$ **3.** $1 + 2v$ **5.** 1 **7.** $-e^{2u}$

9.



11.



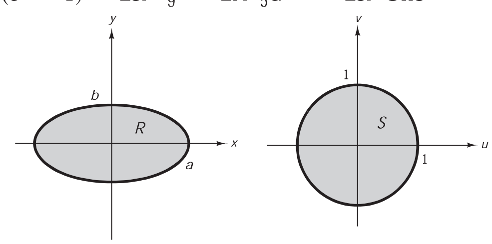
13. $\displaystyle\int_R\int 3xy\, dA = \int_{-2/3}^{2/3}\int_{1-x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx$

$\displaystyle + \int_{2/3}^{4/3}\int_{(1/2)x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx + \int_{4/3}^{8/3}\int_{(1/2)x}^{4-x} 3xy\, dy\, dx = \frac{164}{9}$

15. $\frac{8}{3}$ **17.** 36 **19.** $(e^{-1/2} - e^{-2})\ln 8 \approx 0.9798$ **21.** 96

23. $12(e^4 - 1)$ **25.** $\frac{100}{9}$ **27.** $\frac{2}{5}a^{5/2}$ **29.** Uno

31. *a*)



b) ab *c*) πab

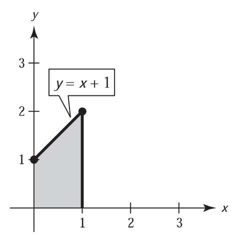
33. Ver la "Definición de jacobiano" en la página 1045. **35.** $u^2 v$

37. $-uv$ **39.** $-\rho^2 \operatorname{sen}\phi$ **41.** Problema Putnam A2, 1994

Ejercicios de repaso para el capítulo 14 (página 1052)

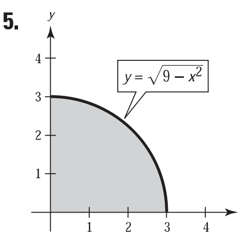
1. $x - x^3 + x^3 \ln x^2$

3.



$\frac{29}{6}$

5.



36

7. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{(3-x)/3} dy\, dx = \int_0^1\int_0^{3-3y} dx\, dy = \frac{3}{2}$

9. $\displaystyle\int_{-5}^{3}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy\, dx$

$\displaystyle = \int_{-5}^{-4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy + \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} dx\, dy$

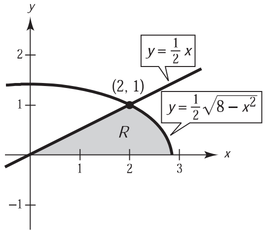
$\displaystyle + \int_4^5\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy$

$= 25\pi/2 + 12 + 25 \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} \approx 67.36$

11. $\displaystyle 4\int_0^1\int_0^{x\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^{1/2}\int_{\sqrt{(1-\sqrt{1-4y^2})/2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{1-4y^2})/2}} dx\, dy = \frac{4}{3}$

13. $\displaystyle\int_2^5\int_{x-3}^{\sqrt{x-1}} dy\,dx + 2\int_1^2\int_0^{\sqrt{x-1}} dy\,dx = \int_{-1}^2\int_{y^2+1}^{y+3} dx\,dy = \frac{9}{2}$

15. Ambas integraciones son sobre la región común R, como se muestra en la figura. Ambas integrales dan $\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

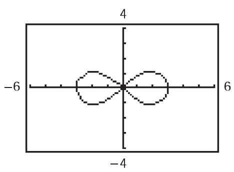


17. $\frac{3\,296}{15}$ **19.** $\frac{40}{3}$ **21.** 13.67°C **23.** $k = 1$, 0.070 **25.** c

27. Verdadero **29.** Verdadero **31.** $(h^3/6)\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2}\right]$

33. $9\pi/2$ **35.** $\pi h^3/3$

37. *a)* $r = 3\sqrt{\cos 2\theta}$



b) 9 *c)* $3\left(3\pi - 16\sqrt{2} + 20\right) \approx 20.392$

39. *a)* $m = k/4$, $\left(\frac{32}{45}, \frac{64}{55}\right)$ *b)* $m = 17k/30$, $\left(\frac{936}{1\,309}, \frac{784}{663}\right)$

41. $I_x = ka^2b^3/6$
$I_y = ka^4b/4$
$I_0 = (2ka^2b^3 + 3ka^4b)/12$
$\bar{\bar{x}} = a/\sqrt{2}$
$\bar{\bar{y}} = b/\sqrt{3}$

43. $\dfrac{\left(101\sqrt{101} - 1\right)\pi}{6}$ **45.** $\dfrac{1}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$

47. *a)* 30 415.74 pies^3 *b)* 2 081.53 pies^2 **49.** $324\pi/5$

51. $(abc/3)(a^2 + b^2 + c^2)$ **53.** $8\pi/15$ **55.** $\frac{32}{3}\left(\pi/2 - \frac{2}{3}\right)$

57. $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ **59.** $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$ **61.** $833k\pi/3$

63. *a)* $\dfrac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$ *b)* $\left(0, 0, \dfrac{3(2a-h)^2}{4(3a-h)}\right)$ *c)* $\left(0, 0, \dfrac{3}{8}a\right)$

d) a *e)* $(\pi/30)h^3(20a^2 - 15ah + 3h^2)$ *f)* $4\pi a^5/15$

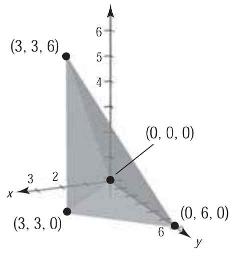
65. El volumen de un toro generado por un círculo de radio 3, con centro en $(0, 3, 0)$ al girar sobre el eje z.

67. -9 **69.** $5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 \approx 2.751$

SP Solución de problemas (página 1055)

1. $8\left(2 - \sqrt{2}\right)$ **3.** *a)* a *g)* Demostraciones **5.** $\frac{1}{3}$

7.



$\displaystyle\int_0^3\int_0^{2x}\int_x^{6-x} dy\,dz\,dx = 18$

9. $\sqrt{\pi}/4$

11. Si $a, k > 0$, entonces $1 = ka^2$ o $a = 1/\sqrt{k}$.

13. Las respuestas varían.

15. Entre más grande sea el ángulo entre el plano dado y el plano xy, más grande es el área de la superficie. Así, $z_2 < z_1 < z_4 < z_3$.

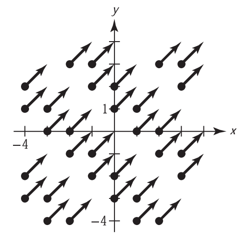
17. Los resultados no son los mismos. El teorema de Fubini no es válido porque f no es continua en la región $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Capítulo 15

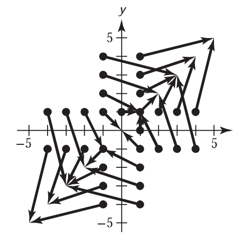
Sección 15.1 (página 1067)

1. *d* **2.** *c* **3.** *e* **4.** *b* **5.** *a* **6.** *f*

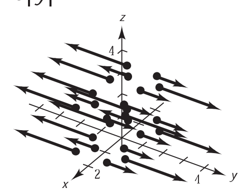
7. $\sqrt{2}$



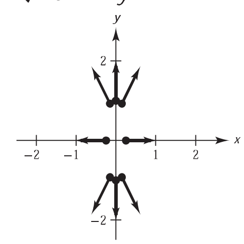
9. $\sqrt{x^2 + y^2}$



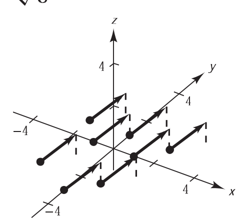
11. $3|y|$



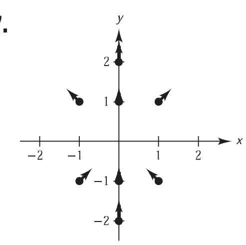
13. $\sqrt{16x^2 + y^2}$



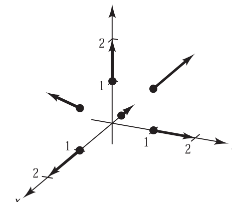
15. $\sqrt{3}$



17.



19.



21. $2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

23. $(10x + 3y)\mathbf{i} + (3x + 2y)\mathbf{j}$ **25.** $6yz\mathbf{i} + 6xz\mathbf{j} + 6xy\mathbf{k}$

27. $2xye^{x^2}\mathbf{i} + e^{x^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

29. $[xy/(x + y) + y\ln(x + y)]\mathbf{i} + [xy/(x + y) + x\ln(x + y)]\mathbf{j}$

31 a 33. Demostraciones **35.** Conservativo porque $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$.

37. No conservativo porque $\partial N/\partial x \neq \partial M/\partial y$.

39. Conservativo: $f(x, y) = xy + K$

41. Conservativo: $f(x, y) = x^2y + K$