Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Introducción al Algebra Lineal

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

07 de septiembre del 2021

Algebra Lineal

- Estudia los temas correspondientes a matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

- Plantea la teoría abstracta que sustenta la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

- Se utiliza en diferentes áreas de matemática e ingeniería.

Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de $m.n$ números dispuestos en m renglones (filas) y n columnas.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & \text{Columnas} & & & & \end{array} \\
A = & \left(\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right) \text{Renglones}
\end{array}
$$

o filas

a_{ij}

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

- Cada entrada o componente de la matriz se representa por a_{ij} y es el número que aparece en el renglón i y la columna j.
- Decimos que la matriz es de tamaño $m \times n$ que se lee m por n Dimensión
- Para denotar la matriz usamos la notación $A = (a_{ij})$ $B=(b_{ij})$

Tipos de matrices

- Una matriz de tamaño $1 \times n$ se llama vector renglón: fila

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1 \ x_2 \ x_3 \cdots x_n)$$

- Una matriz de tamaño $m \times 1$ se llama vector columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

- Cuando $m = n$, se dice que la matriz es cuadrada. En ese caso decimos que la matriz es de orden n y su diagonal principal son los elementos $\underbrace{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}}$

Ejemplos

- Una matriz cuadrada de tamaño 3×3

DIAGONAL

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0.5 \\ \sqrt{2} & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

orden 3

$a_{11} = -1$
$a_{22} = 3$
$a_{33} = 0$

$\{-1, 3, 0\}$

- Una matriz de tamaño 3×2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

cuando no son cuadradas se les dice rectangular

- Una matriz de tamaño 2×4

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \sqrt{3} & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Matrices Especiales

- Matriz Diagonal: Es una matriz cuadrada cuyas componentes que no están en la diagonal principal son iguales a cero

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- Matriz Identidad: Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos iguales a uno. La matriz identidad de tamaño n se denota por I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Elemento neutro producto de matrices

$$A_{3\times 3} \cdot I_3 = A$$

- Matriz Nula: Es una matriz cuyas componentes son todas iguales a cero. La matriz nula de tamaño $m \times n$ se denota por $O_{m\times n}$

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = (-2)^{1+1}$

$i=1 \quad j=1$

$a_{31} = (-2)^{3+1} = (-2)^4 = 16$

$a_{23} = 2-2(3) = -4$

$a_{24} = 2-2(4) = -6$

$a_{33} = (-2)^{3+3} = (-2)^6$

$= 64$

Ejemplo: Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño 3×4 cuyas componentes están definidas por $a_{ij} = \begin{cases} i - 2j & : i < j \\ (-2)^{i+j} & : i \geq j \end{cases}$. Hallar explícitamente la matriz A.

Solución: Buscamos las entradas de la matriz A aplicando la definición dada:

$a_{11} = (-2)^{1+1} = 4 \quad a_{12} = 1 - 2(2) = -3 \quad a_{13} = 1 - 2(3) = -5 \quad a_{14} = 1 - 2(4) = -7$
$a_{21} = (-2)^{2+1} = -8 \quad a_{22} = (-2)^{2+2} = 16 \quad a_{23} = 2 - 2(3) = -4 \quad a_{24} = 2 - 2(4) = -6$
$a_{31} = (-2)^{3+1} = 16 \quad a_{32} = (-2)^{3+2} = -32 \quad a_{33} = (-2)^{3+3} = 64 \quad a_{34} = 3 - 2(4) = -5$

Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 & -7 \\ -8 & 16 & -4 & -6 \\ 16 & -32 & 64 & -5 \end{pmatrix}$$

Igualdad de Matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales, lo que se denota por $A = B$, si se cumple que son de igual tamaño y $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y j.

Ejemplo: Encuentre los valores de las incógnitas para los cuales las siguientes matrices A y B son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x+5 & 4 \\ y-5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2z & 0 & w-1 \\ 2 & 0 & v \end{pmatrix}$$

$A = B$

$z = 1$ $\quad$ $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ $\quad$ $w - 1 = 4 \Rightarrow w = 5$

$y - 5 = 2 \Rightarrow y = 7$ $\quad$ $0 = 0$ $\quad$ $v = -1$

Rpta: $z = 1$, $x = -5$, $w = 5$, $y = 7$ y $v = -1$

Solución: Para hallar las incógnitas usamos el hecho de que las matrices dadas son iguales, por lo que podemos igualar sus componentes y despejar las incógnitas:

- $2 = 2z \Rightarrow z = 1$
- $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$
- $4 = w - 1 \Rightarrow w = 4 + 1 = 5$
- $y - 5 = 2 \Rightarrow y = 2 + 5 = 7$
- $v = -1$

Los valores de las incógnitas son: $z = 1, x = -5, w = 5, y = 7$, $v = -1$

Suma de Matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo tamaño $m \times n$. Entonces la suma de A y B denotada por $A + B$, es la matriz $m \times n$ definida por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+0 \\ -4-1 & \dfrac{1}{2}+4 \\ 0+2 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -5 & \dfrac{9}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Escalar => número real

Producto de un Escalar por una Matriz

Sean α un número real y $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el producto del escalar α por la matriz A, denotado por αA, es la matriz de tamaño $m \times n$ definida por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ejemplo:

$$3\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1/7 & \sqrt[3]{5} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(5) \\ 3\left(\frac{1}{7}\right) & 3\sqrt[3]{5} \\ 3(2) & 3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ \frac{3}{7} & 3\sqrt[3]{5} \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 3A$$

Propiedades

$M(m \times n) =$

$$
\begin{cases}
3x + 2 = 8 \\
3x + 2 - 2 = 8 - 2 \\
3x + 0 = 6 \\
3x = 6
\end{cases}
$$

Propiedades de los números

Sean A, B y C tres matrices de tamaño $m \times n$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Entonces:

$A \xrightarrow{\text{opuesto}} -A$

$-1. A$

$\frac{1}{3} 3x = \frac{1}{3} 6$

$x = 2$

I. $A + O_{m \times n} = A$

II. $0A = O_{m \times n}$

III. $A + B = B + A$ **(Ley conmutativa para la suma de matrices)**

IV. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(Ley asociativa para la suma de matrices)**

V. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(Ley distributiva para la multiplicación por un escalar)**

VI. $1A = A$ $\Rightarrow$ ley de identidad

VII. $(\underbrace{\alpha + \beta}_{\text{suma de Reales}})A = \alpha A + \beta A$

$3A + B = C$

$3A = C - B$

$A = \frac{1}{3}(C - B)$

Ejercicio

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Realice las siguientes operaciones: $6B - 7A + 0C$ y $2A - 3B + 4C$
2. Encuentre la matriz D tal que $2A + 2B - D$ es la matriz nula de tamaño 3×2

$$6B - 7A + 0C =$$

$$\underbrace{6\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}} - 7\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 42 \\ 0 & 6 \\ 48 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ -14 & -14 \\ 0 & -56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{6(-4) - 7(1) + 0(5)} & 6(7) - 7(4) + 0(9) \\ 6(0) - 7(-2) + 0(3) & 6(1) - 7(-2) + 0(0) \\ 6(8) - 7(0) + 0(6) & 6(-3) - 7(-8) + 0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 14 \\ 14 & 20 \\ 48 & 38 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -24 - 7 + 0 & 42 - 28 + 0 \\ 0 + 14 + 0 & 6 + 14 + 0 \\ 48 - 0 + 0 & -18 + 56 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 14 \\ 14 & 20 \\ 48 & 38 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B + 4C =$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 12 + 20 & 8 - 21 - 36 \\ -4 - 0 + 12 & -4 - 3 + 0 \\ 0 - 24 + 24 & -16 + 9 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -49 \\ 8 & -7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Buscamos D tal que $2A + 2B - D = O_{3\times 2}$. Por las propiedades de las matrices podemos escribir

$$D = 2A + 2B - O_{3\times 2} = 2A + 2B$$

$$D = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 & 8+14 \\ -4+0 & -4+2 \\ 0+16 & -16-6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ -4 & -2 \\ 16 & -22 \end{pmatrix}$$

Ejercicios Propuestos

1. Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ resuelva la siguiente ecuación para X:

$$3(2A + B + X) = 5(X - A + B)$$

$6A + 3B + 3X = 5X - 5A + 5B$

Despeja X

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre una matriz X tal que $AX + XB = C$

Producto de matrices

3. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & -6 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Hallar:

a) $A - 2B,\ A + B + C, 3A + 2B - 4C,\ C - B - A$

e) La matriz D para la cual $A + B + C + D$ es igual a $O_{3\times 3}$

f) La matriz E para la cual $A + 2B + C + 2E$ es la matriz I_3

similar Ejemplo

$$A + B + C + D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = -A - B - C + O_{3\times 3}$$

$$A + 2B + C + 2E = I_3$$

$$2E = I_3 - A - 2B - C$$

$$E = \frac{1}{2}(I_3 - A - 2B - C)$$