TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

El teorema central del límite (TCL) es una teoría estadística que establece que, dada una muestra aleatoria suficientemente grande de la población, la distribución de las medias muestrales seguirá una distribución normal.

el TCL afirma que a medida que el tamaño de la muestra se incrementa, la media muestral se acercará a la media de la población. Por tanto, mediante el TCL podemos definir la distribución de la media muestral de una determinada población con una varianza conocida. De manera que la distribución seguirá una distribución normal si el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande.

<u>Principales propiedades del teorema central del límite</u>

1) Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la distribución de las medias muestrales seguirá aproximadamente una distribución normal. El TCL considera una muestra como grande cuando el tamaño de la misma es superior a 30. Por tanto, si la muestra es superior a 30, la media muestral tendrá una función de distribución próxima a una normal. Y esto se cumple independientemente de la forma de la distribución con la que estamos trabajando.
2) La media poblacional y la media muestral serán iguales. Es decir, la media de la distribución de todas las medias muestrales será igual a la media del total de la población.
3) La varianza de la distribución de las medias muestrales será σ^2/n. Que es la varianza de la población dividido entre el tamaño de la muestra.

Que la distribución de las medias muestrales se parezca a una normal es tremendamente útil. Porque la distribución normal es muy fácil de aplicar para realizar contrastes de hipótesis y construcción de intervalos de confianza. En estadística que una distribución sea normal es bastante importante, dado que muchos estadísticos requieren este tipo de distribución. Además, el TCL nos permitirá hacer inferencia sobre la media poblacional a través de la media muestral. Y esto es de gran utilidad cuando por falta de medios no podemos recolectar datos de toda una población.

Ejemplo del teorema central del límite

Supongamos que el presidente de una organización desea analizar la rentabilidad de las 80 compañías. Sin embargo, no dispone la suficiente información como para analizar la totalidad de las 800 compañías. En este caso la rentabilidad media sería la media poblacional.

Ahora bien, siguiendo al TCL podemos coger una muestra de estas 80 compañías para realizar el análisis. La única limitación que tiene es que en la muestra tiene que haber más de 30 compañías para que se cumpla el teorema. Entonces, el presidente elige 30 compañías de manera aleatoria y repetimos el proceso varias veces. Los pasos a seguir el ejemplo serían los siguientes:

Elegimos la muestra de unas 30 compañías y obtenemos la rentabilidad media de la totalidad de la muestra.

De manera continuada seguimos escogiendo 30 compañías y obtenemos la rentabilidad media.

La distribución de todas las rentabilidades medias de todas las muestras escogidas se aproximará a una distribución normal.

Las rentabilidades medias de todas las muestras seleccionadas se aproximarán a la rentabilidad media del total del índice. Tal y como demuestra el teorema Central del Límite.

Por tanto mediante inferencia de la rentabilidad media de la muestra podemos acercarnos a la rentabilidad media del índice.

Otro ejemplo:

Supongamos que queremos saber la altura promedio de todos los estudiantes de una universidad. Si tomamos muchas muestras aleatorias de 30 estudiantes cada una y calculamos la media de cada muestra, la distribución de esas medias será aproximadamente normal, sin importar cuál sea la distribución de las alturas de todos los estudiantes.

Fórmula del Teorema del Límite Central

El Teorema del Límite Central (TLC) no se expresa mediante una única fórmula, sino que describe un comportamiento general de las distribuciones muestrales. Sin embargo, podemos resumir su idea principal de la siguiente manera: Si tenemos una muestra aleatoria de tamaño n extraída de una población con media μ y desviación estándar σ, entonces la distribución de la media muestral ($\bar{X}$) se aproxima a una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$ a medida que n tiende a infinito.

En términos matemáticos, esto se puede expresar como:

$$X \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Donde:

- **$\bar{X}$:** Media muestral **N:** Distribución normal **μ:** Media poblacional
- **σ:** Desviación estándar poblacional **n:** Tamaño de la muestra

¿Qué significa esto?

Aproximación a la normalidad: Incluso si la población original no tiene una distribución normal, la distribución de las medias muestrales se acercará cada vez más a una distribución normal a medida que aumentamos el tamaño de la muestra.

Media de la distribución muestral: La media de la distribución de las medias muestral:

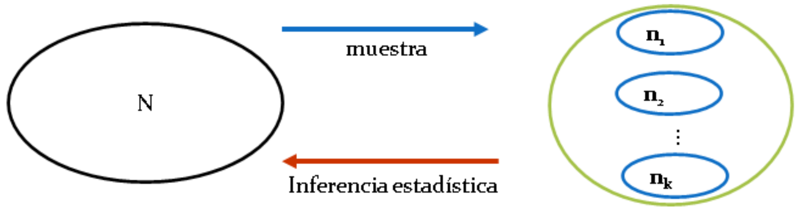
- La desviación estándar de la distribución de las medias muestrales (también llamada error estándar) es igual a la desviación estándar de la población dividida por la raíz cuadrada del tamaño de la muestral ($\sigma/\sqrt{n}$)?
- Precisión de la muestral disminuye. Esto significa que las medias muestrales estarán más concentradas alrededor de la media poblacional, lo que nos da una estimación más precisa del parámetro poblacional.

¿Cuándo se aplica el TLC?

- Intervalos de confianza: Se utilizan para estimar un parámetro poblacional (como la media) con un cierto nivel de confianza.
- Pruebas de hipótesis: Se emplean para evaluar si una afirmación sobre un parámetro poblacional es cierta o no.
- Análisis de regresión: Se utilizan para modelar la relación entre variables.

ESTADÍSTICA INFERENCIAL. DEFINICIÓN

La estadística inferencial comprende los métodos y procedimientos para deducir propiedades (hacer inferencias) de una población a partir de una pequeña parte de la misma (muestra).



Cada muestra es independiente, de la cual se extrae elementos conocidos como estimadores, que permitan estimar los parámetros de la población, como por ejemplo la media, desviación estándar, varianza, entre otros.

Existen dos formas de estimar parámetros:

1. Estimación puntual: En la primera se busca, con base en los datos muestrales, un único valor estimado para el parámetro
2. Estimación por intervalo de confianza: se determina un intervalo dentro del cual se encuentra el valor del parámetro, con una probabilidad determinada.

Los métodos de la estadística inferencial son:

Estimación de los parámetros: Este término indica que a partir de lo observado en una muestra se extrapola o generaliza dicho resultado muestral a la población total, de modo que lo estimado es el valor generalizado a la población. Consiste en la búsqueda del valor de los parámetros poblacionales objeto de estudio. Puede ser puntual o por intervalo de confianza. En este último debe tenerse presente la probabilidad.

Contraste de hipótesis: También denominado test de hipótesis o prueba de significación, el cual consiste en determinar si es aceptable, partiendo de datos muestrales, que el parámetro poblacional estudiado tome un determinado valor o esté dentro de unos determinados valores. Mediante el contraste de hipótesis se aborda el problema estadístico considerando una hipótesis nula (Ho) y una hipótesis alternativa (Hi), y se intenta dirimir cuál de las dos hipótesis se escogerá, tras aplicar el problema estadístico a un cierto número de experimentos.

Existen dos tipos de contrastes de hipótesis:

1. Paramétricas: Son aquellas que se basan en las leyes de distribución normal para analizar los elementos de una muestra.

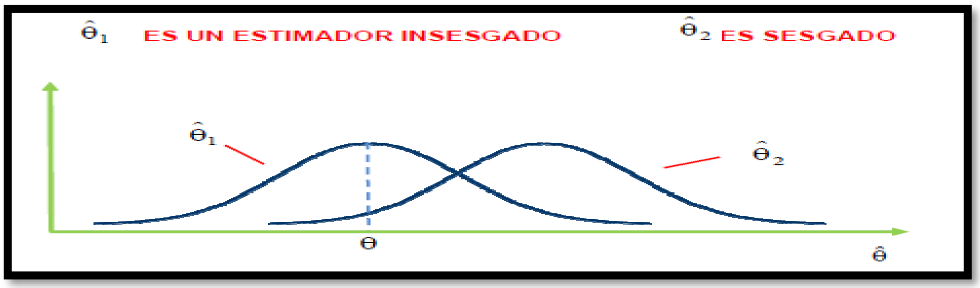
2. No paramétricas: Son aquellas que se encargan de analizar datos que no tienen una distribución particular, es decir. los datos no están organizados de forma normal.

PROPIEDADES DEL ESTIMADOR

Insegado. Se dice que un estimador es insesgado cuando E($\hat{\theta}$) = E(θ). Donde $\hat{\theta}$ es el estimador θ y es el parámetro. Cuando E($\hat{\theta}$) ≠ E(θ), se dice que el estimador es sesgado.

En la práctica es preferible un estimador cuya distribución esté más concentrada alrededor del parámetro que se está estimando (sesgo = 0).

En la figura se reseña un estimador insesgado y un estimador sesgado.



La media del estimador $\hat{\theta}_1$se ubica sobre la media del parámetro, mientras que la media del estimador $\hat{\theta}_2$ se aleja de la media del parámetro, por lo tanto, $\hat{\theta}_1$ es el estimador insesgado de θ.

Eficiente. Se dice que estimador es eficiente cuando al comparar las varianzas de dos estimadores, $\hat{\theta}_1$ **y** $\hat{\theta}_2$**,** se tiene que aquel que tenga menor varianza (S^2) o menor desviación estándar (S) será el más eficiente.

Consistente. Un estimador es consistente si se aproxima al valor del parámetro cuanto mayor es n (tamaño de la muestra). Es decir, en la medida que aumenta n el estimador será más consistente. Esto es porque:

$$E[\hat{\theta}\ ]\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

$$Var[\hat{\theta}\ ]\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Acá se lee la esperanza matemática del estimador o la varianza del estimador tiende a cero (insesgado) cuando el tamaño de la muestra (n) tiende a ser grande o infinito.

Suficiente. Se dice que un estimador es suficiente si se utiliza toda la información de la muestra para su cálculo. Por ejemplo, la media muestral sería un estimador suficiente de la media poblacional, mientras que la moda no lo sería, ya que para el cálculo de media se toma todo el conjunto de datos, mientras que para el cálculo de la moda basta uno o varios datos.

Ejemplo. Supongamos que tenemos los siguientes datos estadísticos relacionados con el test de razonamiento verbal obtenido de tres grupos:

	Muestra 1	**Muestra 2**	**Muestra 3**
Media muestra	73,67	72,47	73,33
Varianza muestral	317,24	302,84	308,10

¿Cuál de las tres muestras es el mejor estimador? Justifique su respuesta

ESTIMACIÓN PUNTUAL

La estimación puntual es cuando a partir de una muestra se calcula un solo valor como estimación de un parámetro poblacional desconocido.

El objetivo de la estimación puntual es aproximar el valor del parámetro desconocido (tiempo medio de ejecución de un algoritmo, altura media de las mujeres de una población, diferencia del resultado medio entre dos tratamientos médicos, proporción de gente que mejora con un tratamiento médico.

A continuación, se reseñan los parámetros y sus respectivos estimadores:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2$$

$$\hat{\sigma} = S$$

$$\hat{\pi} = \bar{p}$$

Para hallar los estimadores hacemos usos de sus respectivas formulas estadísticas vistas en el tema de medidas estadísticas.

Ejercicios resueltos

1. Los siguientes datos corresponden a los pesos (en Kg) de 15 estudiantes escogidos al azar, siendo éstos: 72, 68, 63, 75, 84, 91, 66, 75, 86, 90, 62, 87, 77, 70, 69. Estime el peso promedio y la desviación estándar.

Solución: Aplicamos las fórmulas estadísticas de la media muestral y desviación estándar muestral:

$$\boldsymbol{\bar{X}} = \frac{\sum \boldsymbol{X_i}}{\boldsymbol{n}} = 75{,}67 \text{ Kg.}$$

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\sum(\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{\bar{X}})^2|}{\boldsymbol{n-1}}} = 9{,}77 \text{ Kg.}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 75{,}67\ Kg$$

$$\hat{\sigma} = S = 9{,}77\ Kg$$

El peso promedio y desviación estándar estimados es de 75,67 kg y 9,77 kg, que es lo mismo decir 75,67 $\pm$ 9,77 kg.

2. Se ha pedido a 11 sujetos que decida si está presente la letra *U* dentro de un conjunto de letras *V*, midiéndose el tiempo de respuesta (*TR*) en segundos que tarda el sujeto en realizar la tarea. Obtenga los estimadores puntuales de media, mediana y desviación estándar. Los siguientes datos son los resultados obtenidos del experimento:

288 - 297 - 253 - 249 - 200 - 249 - 200 - 259 - 273 - 261 – 261

Solución: Se calculan los estimadores puntuales

a. Media ($\bar{X}$)

$$\bar{\mathrm{X}} = \frac{\sum \mathrm{X_i}}{\mathrm{n}} = \frac{2790}{11} = 259{,}64$$

Se estima que la media es de 259,64 segundos

b. Mediana (Me) Se ordenan los datos de menor a mayor.

200	200	249	249	253	259	261	261	273	288	297

Como n es impar, se ubica el valor central, por tanto, la mediana es 259 segundos

c. Desviación estándar (S)

$$S = \sqrt{\frac{\sum(\mathrm{Xi} - \overline{\mathrm{X}})^2}{n - 1}}$$

Xi	$(\boldsymbol{Xi} - \overline{\boldsymbol{X}})^2$
288	1180,6096
297	1880,0896
253	0,4096
249	21,5296
200	2877,2496
249	21,5296
200	2877,2496
259	28,7296
273	374,8096
261	54,1696
261	54,1696
	9370,5456

$$S = \sqrt{\frac{9370{,}5456}{11 - 1}} = 30{,}61 \text{ segundos}$$

INTERVALOS DE CONFIANZA Y PRUEBAS DE HIPÓTESIS (NORMAL)

Intervalos de confianza

La estimación por intervalos es más significativa, porque no se puede esperar que la estimación del estimador ($\hat{\theta}$) sea igual al parámetro poblacional (θ).

La estimación por intervalos permite conocer el rango de valores en que podemos confiar que está el verdadero valor poblacional; este es su principal propósito.

En general, el intervalo de confianza se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} < \boldsymbol{\theta} < \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

Siendo

$\hat{\theta}$ = valor del estimador

θ = parámetro (que se estima)

k = coeficiente de confiabilidad para un determinado nivel de confianza (usualmente se asume: 90%, 95%, 99%)

$\sigma_{\hat{\theta}}$ = error estándar del estimador= $\sigma/\sqrt{\mathrm{n}}$

$\mathrm{k}\sigma_{\hat{\theta}}$ =error estándar de estimación

La diferencia $\left(\hat{\theta} - \mathrm{k}\sigma_{\hat{\theta}}\right) - \left(\hat{\theta} + \mathrm{k}\sigma_{\hat{\theta}}\right) = 2\mathrm{k}\sigma_{\hat{\theta}}$ se conoce como longitud del intervalo.

La estimación del parámetro por el método de intervalo de confianza se calcula para:

1. La media poblacional (una o dos muestras) → μ
2. La proporción poblacional (una o dos muestras) → π
3. La varianza poblacional → σ^2

Prueba de hipótesis

Errores

Error tipo I: Rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.

Error tipo II: Aceptar la hipótesis nula cuando es falsa.

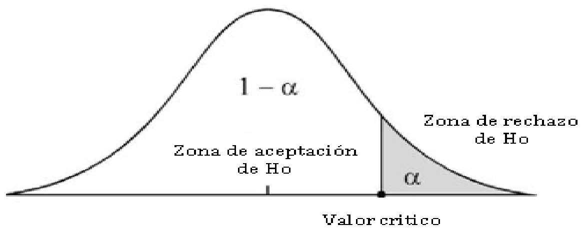
Prueba de hipótesis para una muestra

Prueba unilateral

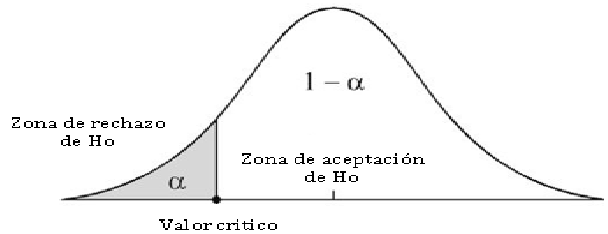
Ho: $\theta \leq \theta o$ Vs. Hi: $\theta > \theta o$ (unilateral hacia la derecha)

Ho: $\theta \geq \theta o$ Vs. Hi: $\theta < \theta o$ (unilateral hacia la izquierda)

Se acepta Ho si el estadístico de prueba es menor al valor crítico, o el valor de p es mayor al valor de significancia asumido.



Prueba unilateral hacia la derecha



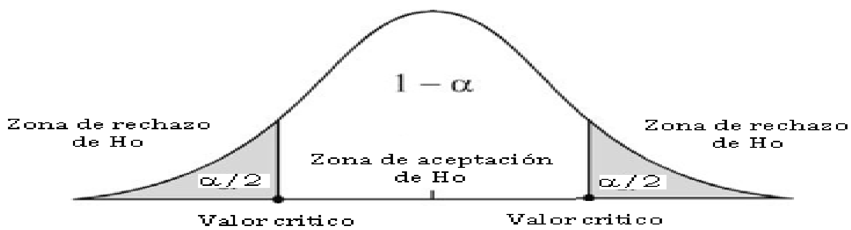
Prueba unilateral hacia la izquierda

Prueba bilateral

Ho: θ = θo

Hi: θ ≠ θo

Se acepta Ho si el estadístico de prueba es menor al ±valor crítico, o el valor de p es mayor al valor de significancia asumido.



Intervalo de confianza para la media y prueba de hipótesis para n grandes

Intervalo de confianza

Caso 1. Cuando n ≥ 30, la media muestral sigue una distribución normal, no importa que se conozca o no la varianza o desviación estándar de la población

$$\mathbf{P}\left(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\, \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{X}}} < \boldsymbol{\mu} < \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\, \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{X}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{X}}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

Caso 2. Cuando la variable sigue una distribución binomial, es decir, es dicotómica, el intervalo de confianza se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$P\left(\bar{p} \pm Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N\ -1}}\right) = (1-\alpha)\%$$

Pruebas de hipótesis

Caso 1. Cuando n ≥ 30, se conoce la varianza o desviación estándar poblacional y los datos siguen una distribución normal, se utiliza como estadístico la prueba Z mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\mathbf{n}}} \qquad \mathbf{Z} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

Caso 2. En el caso de contrastar hipótesis relativas a proporciones poblacionales, se utiliza la siguiente fórmula:

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\pi}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\pi} * (\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})}{\mathbf{n}}}} \qquad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}$$

Cuando la prueba es unilateral $\mathbf{Z}_{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}}$ y si es bilateral $\mathbf{Z}_{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{2}}$

Ejemplo intervalo de confianza para la estimación de la media. Se ha seleccionado al azar una muestra de 25 alumnos de una Facultad para estimar la calificación media de los alumnos de la Facultad en la asignatura X. Se sabe por otros cursos que la desviación estándar de las puntuaciones en dicha Facultad es de 2,01 puntos. La media de la muestra fue de 4,90. Determine:

a. Intervalo de confianza al 90%.

b. El decano de la facultad afirma que la calificación promedio de los estudiantes es superior a 4,50. Comprueba si la afirmación del decano es cierta para un nivel de significancia del 1%,

c. Si la calificación promedio es menor a 5 para un alfa del 5%.

d. Si la calificación promedio es igual a 5 para un alfa del 10%.

Solución n = 25 σ = 2,01 puntos $\bar{X}$ = 4,90 puntos

a. Intervalo de confianza al 90%.

$$\mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{Z}_{\left(\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)} \boldsymbol{\sigma}_{\overline{\mathbf{X}}} < \boldsymbol{\mu} < \overline{\mathbf{X}} + \mathbf{Z}_{\left(\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)} \boldsymbol{\sigma}_{\overline{\mathbf{X}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

Hallamos los demás valores presentes en la ecuación

$$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}05$$

$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{(0,95)} = 1{,}645$ (ver tabla de distribución normal estándar)

En Excel: **=INV.NORM.ESTAND(Probabilidad)** **=INV.NORM.ESTAND(0,95)=1,645**

Error estándar de la media (EE):

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}01}{\sqrt{25}} = 0{,}402$$

Error estándar de estimación (EEE):

$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_{\overline{X}} = 1{,}645 * 0{,}402 = 0{,}661$$

Sustituimos en la ecuación:

$$P(4{,}90 - 0{,}661 < \mu < 4{,}90 + 0{,}661) = 90\%$$

$$\mathbf{P(4,239 < \mu < 5,561) = 90\%}$$

También se puede realizar en Excel haciendo uso de la siguiente función

=INTERVALO.CONFIANZA.NORM(Alfa;Desv_estándar;Tamaño)

=INTERVALO.CONFIANZA.NORM(0,1;2,01;25) = 0,661

$$P(4{,}90 - 0{,}661 < \mu < 4{,}90 + 0{,}661) = 90\%$$

$$P(4{,}239 < \mu < 5{,}561) = 90\%$$

<u>Interpretación</u>. Para un nivel de confianza del 90% existe la certeza que el verdadero promedio de las calificaciones de los alumnos de la Facultad en la asignatura X oscile entre 4,24 y 5,56 puntos.

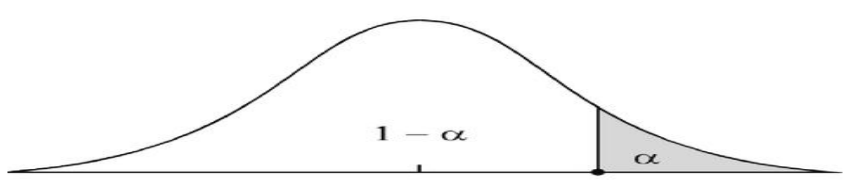
b. Ho: $\mu \leq 4{,}50$

Hi: $\mu > 4{,}50$

Alfa = 0,01

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad\qquad Z = \frac{4{,}90 - 4{,}50}{2{,}01/\sqrt{25}} = 1{,}00$$

Buscamos el valor de Z para el nivel crítico dado, en nuestro caso, es α = 0,01 que sería $Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = 2{,}33$ (ver tabla de distribución normal)



1,00 2,33

Conclusión. Se acepta Ho para un alfa del 1%.

En Excel sería: **=INV.NORM.ESTAND(0,99)** y lo graficamos en la curva de normalidad (o Gauss)

c. Ho: $\mu \geq 5,0$

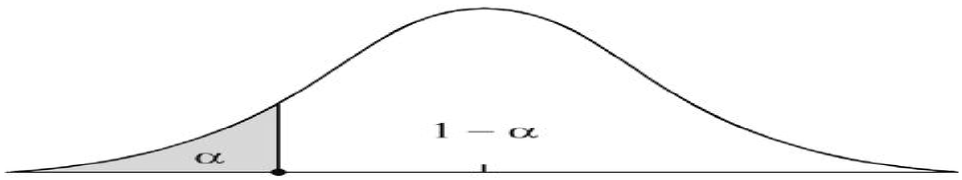
Hi: $\mu < 5,0$

Alfa = 0,05

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad\qquad Z = \frac{4,90 - 5,0}{2,01 / \sqrt{25}} = -0,249$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95}$$

En Excel sería: **=INV.NORM.ESTAND(0,95) = 1,645**



-1,645 -0,249

d. Ho: $\mu = 5,0$

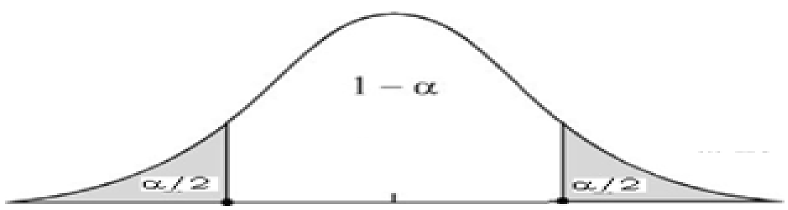
Hi: $\mu \neq 5,0$

Alfa = 0,10

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad\qquad Z = \frac{4,90 - 5,0}{2,01 / \sqrt{25}} = -0,249$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,1} = Z_{0,90}$$

En Excel sería**: =INV.NORM.ESTAND(0,90) = 1,282**



-1,282 -0,249 1,282

Ejemplo de estimación de la proporción para una muestra. Se ha obtenido una muestra al azar de 150 personas que acudieron a una consulta psicológica durante un mes para estimar la proporción de personas que presentan determinado problema emocional. De entre los seleccionados, 50 presentan el problema emocional. Determine:

a. Intervalo de confianza para la proporción de personas que presentan el problema emocional al 90%.

b. Para un nivel de significancia del 10% será cierto que menos del 35% de las personas presentan problemas emocionales.

c. Para un nivel de significancia del 10% será cierto que el 30% de las personas presentan problemas emocionales.

Solución n = 150 personas x = 50 presentan el problema emocional

a. Intervalo de confianza para la proporción de personas que presentan el problema emocional al 90%.

$$\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\overline{\boldsymbol{p}}(\mathbf{1}-\overline{\boldsymbol{p}})}{\boldsymbol{n}}} < \boldsymbol{\pi} < \overline{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\overline{\boldsymbol{p}}(\mathbf{1}-\overline{\boldsymbol{p}})}{\boldsymbol{n}}}\right) = (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\%$$

Hallamos los demás valores presentes en la ecuación

$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(1-\frac{0,10}{2}\right)} = 1,645$$

En Excel sería**: =INV.NORM.ESTAND(0,95) = 1,645**

$$\bar{p} = \frac{x}{n} = \frac{50}{150} = 0,33$$

Error estándar de la media:

$$\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,33 * (1-0,33)}{150}} = 0,038$$

Error estándar de estimación:

$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 1,645 * 0,038 = 0,063$$

Sustituimos en la ecuación:

$$\mathrm{P}(0,33 - 0,063 < \pi < 0,33 + 0,063) = 90\%$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{0,267} < \boldsymbol{\pi} < \mathbf{0,393}) = \mathbf{90}\%$$

Interpretación. Para un nivel de confianza del 90% existe la certeza que proporción de personas que presentan el problema emocional oscile entre 0,27 y 0,39.

b. Ho: π ≥ 0,35

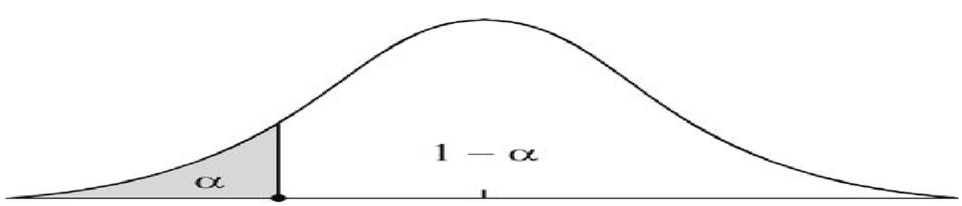
Ho: π < 0,35

Alfa = 0,10

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{P}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi * (1-\pi)}{\mathrm{n}}}} \qquad \mathrm{Z} = \frac{0,33-0,35}{\sqrt{\frac{0,35 * (1-0,35)}{150}}} = -0,514$$

Buscamos el valor de Z para el nivel crítico dado, para α = 0,10 que sería $\mathbf{Z_{1-\alpha}} = \mathbf{Z_{1-0,10}} = \mathbf{Z_{0,90}}$

En Excel sería Excel **=INV.NORM.ESTAND(0,90) = 1,282**



-1,282 -0,514

c. Ho: π = 0,30

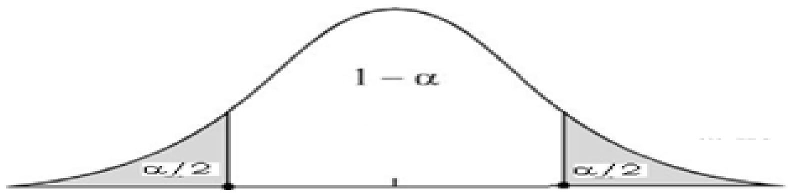
Ho: π ≠ 0,30

Alfa = 0,10

$$Z = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi * (1 - \pi)}{n}}} \qquad\qquad Z = \frac{0,33 - 0,30}{\sqrt{\frac{0,30 * (1 - 0,30)}{150}}} = 0,82$$

Buscamos el valor de Z para el nivel crítico dado, para α = 0,10 que sería $\mathbf{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95}}$

En Excel sería Excel **=INV.NORM.ESTAND(0,95) = 1,645**



-1,645 **0,82** **1,645**

Se acepta la Ho, para un nivel de significancia del 10%

Intervalo de confianza para la media y prueba de hipótesis para n pequeñas

Intervalo de confianza

Caso 3. Cuando n < 30, la media muestral sigue una distribución normal, se desconoce la varianza o desviación estándar de la población, entonces la media muestral se distribuye según una t-Student

$$\mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2},\, n-1\right)}\, \mathbf{S}_{\overline{\mathbf{X}}} < \boldsymbol{\mu} < \overline{\mathbf{X}} + \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2},\, n-1\right)}\, \mathbf{S}_{\overline{\mathbf{X}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

Pruebas de hipótesis

Caso 3. Cuando la prueba de la media poblacional proviene de una muestra pequeña **(n < 30)** y la desviación estándar poblacional (σ) es desconocida, así que la estimamos con la desviación estándar de la muestra (s). El estadístico de la prueba se obtiene con la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \qquad t \sim (\alpha, n-1)$$

Grados de libertad (gl) = n – 1

El valor t (calculado) se contrasta con un valor t (tabulado) que se halla en la tabla de distribución t.

Cuando la prueba es unilateral $t_{\alpha,n-1}$ y si es bilateral $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

Ejemplo. Se desea estimar con un nivel de confianza del 95% la talla media de los estudiantes varones de la UNET.

a. Obtengael intervalo de confianza con una muestra de n=15 estudiantes seleccionados al azar, cuyas alturas son: 165 - 167 – 167 – 168 - 168 - 168 - 169 - 171 - 172 - 173 - 175 - 175 - 175 - 177 – 180 (cm).

b. Se puede afirmar que la altura media en la población de estudiantes varones de la UNET es menor que 175 cm, para un alfa del 5%.

c. Comprobar si la altura es mayor a 169 cm para un alfa del 10%

d. Comprobar si la altura es diferente a 170 cm para un alfa del 2%.

Solución

a. Para el IC

$$\mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2},\, n-1\right)}\, \mathbf{S}_{\overline{\mathbf{X}}} < \boldsymbol{\mu} < \overline{\mathbf{X}} + \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2},\, n-1\right)}\, \mathbf{S}_{\overline{\mathbf{X}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

$$\mathbf{S}_{\overline{\mathbf{X}}} = \frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{171,3} - \mathbf{2,145} \times \mathbf{1,13} < \boldsymbol{\mu} < \mathbf{171,3} + \mathbf{2,145} \times \mathbf{1,13}) = \mathbf{95\%}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{168,91} < \boldsymbol{\mu} < \mathbf{173,75}) = \mathbf{95\%}$$

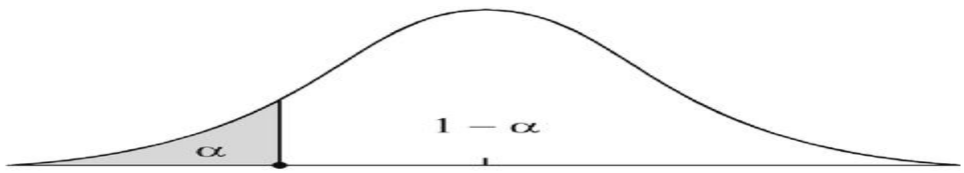
b. Ho: $\mu \geq 175$

Hi: $\mu < 175$

Alfa = 5%

$$t = \frac{\boldsymbol{\bar{X} - \mu}}{\boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \qquad\qquad t = \frac{\mathbf{171,3 - 175}}{\mathbf{4,4}/\sqrt{\mathbf{15}}} = \mathbf{-3,250}$$

Cálculo de t crítico: $t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,14} = 1{,}761$



-3,250 -1,761

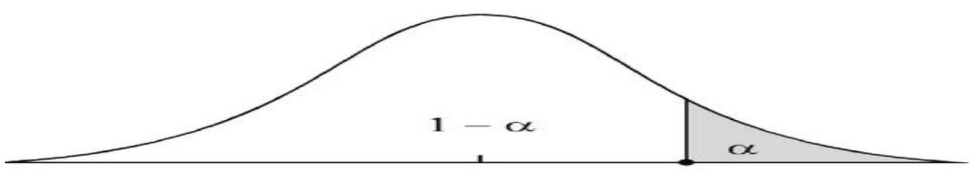
c. Ho: $\mu \leq 169$

Hi: $\mu > 169$

Alfa = 10%

$$t = \frac{\boldsymbol{\bar{X} - \mu}}{\boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \qquad\qquad t = \frac{\mathbf{171,3 - 169}}{\mathbf{4,4}/\sqrt{\mathbf{15}}} = \mathbf{2,068}$$

Cálculo de t crítico: $t_{\alpha,n-1} = t_{0.10,14} = 1{,}345$



1,345 2,068

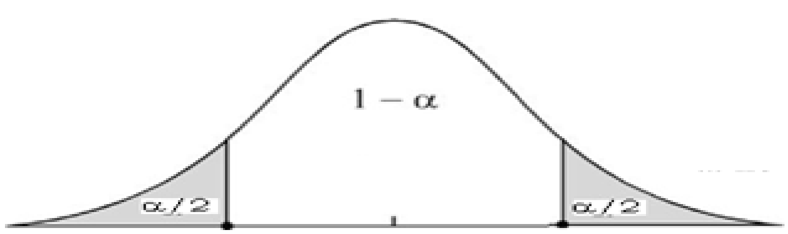
d. Ho: $\mu = 170$

Hi: $\mu \neq 170$

Alfa = 2%

$$t = \frac{\boldsymbol{\bar{X} - \mu}}{\boldsymbol{s}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \qquad\qquad t = \frac{\mathbf{171,3 - 170}}{\mathbf{4,4}/\sqrt{\mathbf{15}}} = \mathbf{1,182}$$

Cálculo de t crítico: $t_{\alpha,n-1} = t_{0.02,14} = 2{,}624$



-2,624 1,182 2,624

Intervalo de confianza y prueba de hipótesis para la diferencia de medias poblacionales independientes cuando n es grande

Intervalo de confianza

Caso 1. Si lo tamaños de muestras n1 y n2 ≥ 30 y las varianzas son conocidas o no, entonces la diferencia de medias de distribuye normalmente. Se aplican las siguientes fórmulas para hallar el intervalo de confianza

$$\mathbf{P}\left(\Delta\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}} < \Delta\boldsymbol{\mu} < \Delta\overline{\mathbf{X}} + \mathbf{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

Caso 2. Si se busca la proporción entre dos poblaciones, donde la variable de estudio es dicotómica, entonces de el Intervalo de confianza se calcula así:

$$\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{p}}_1 - \overline{\boldsymbol{p}}_2 \pm \boldsymbol{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\overline{\boldsymbol{p}}_1(\mathbf{1} - \overline{\boldsymbol{p}}_1)}{\boldsymbol{n}_1} + \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_2(\mathbf{1} - \overline{\boldsymbol{p}}_2)}{\boldsymbol{n}_2}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

Prueba de hipótesis

Caso 1. Si ambas muestras contienen por lo menos 30 datos (n ≥ 30) y conocemos la desviación estándar poblacional, utilizamos la distribución Z como el estadístico de prueba, siempre que los datos provengan de poblaciones normales.

Prueba unilateral

a) Hacia la izquierda

$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ o $\mu_1 \geq \mu_2$

$H_i\colon \mu_1 - \mu_2 < 0$ o $\mu_1 < \mu_2$

b) Hacia la derecha

$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ o $\mu_1 \leq \mu_2$

$H_i\colon \mu_1 - \mu_2 > 0$ o $\mu_1 > \mu_2$

Prueba bilateral

$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0$ o $\mu_1 = \mu_2$

$H_i\colon \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ o $\mu_1 \neq \mu_2$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{(\overline{\boldsymbol{X}}_1 - \overline{\boldsymbol{X}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\boldsymbol{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\boldsymbol{n}_2}}}$$

Ho: $\mu_1 \leq \mu_2$ Hi: $\mu_1 > \mu_2$ No se acepta Ho si Z $> Z_{1-\alpha}$ (unilateral hacia la derecha)

Ho: $\mu_1 = \mu_2$ Hi: $\mu_1 < \mu_2$ No se acepta Ho si Z $< -Z_{1-\alpha}$ (unilateral hacia la izquierda)

$Ho\!: \mu_1 = \mu_2$ $Hi\!: \mu_1 \neq \mu_2$ No se acepta Ho si Z < $-Z_{1-\alpha/2}$ o Z >$Z_{1-\alpha/2}$ (bilateral)

Caso 2. Cuando se trata de dos proporciones poblacionales

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{P * (1-P) * \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}} \qquad \boldsymbol{\overline{p}_1 = \frac{x}{n_1}}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{n_1 * \overline{p}_1 + n_2 * \overline{p}_2}{n_1 + n_2}} \qquad \boldsymbol{\overline{p}_2 = \frac{y}{n_2}}$$

$Ho\!: \pi_1 \leq \pi_2$ $Hi\!: \pi_1 > \pi_2$ No se acepta Ho si Z >$Z_{1-\alpha}$ (unilateral hacia la derecha)

$Ho\!: \pi_1 = \pi_2$ $Hi\!: \pi_1 < \pi_2$ No se acepta Ho si Z < $-Z_{1-\alpha}$ (unilateral hacia la izquierda)

$Ho\!: \pi_1 = \pi_2$ $Hi\!: \pi_1 \neq \pi_2$ No se acepta Ho si Z < $-Z_{1-\alpha/2}$ o Z >$Z_{1-\alpha/2}$ (bilateral)

Ejercicio de distribución normal (z) para dos muestras independientes. Se llevó a cabo un experimento donde se compararon dos tipos de motores, el A y el B. Se midió el rendimiento de combustible en millas por galón. Se realizaron 50 experimentos con elmotor tipo A y 75 con el motor tipo B. La gasolina utilizada y las demás condiciones se mantuvieron constantes. El rendimiento promedio de gasolina para el motor A fue de 36 millaspor galón y el promedio para el motor B fue de 42 millas por galón.

a. Calcule un intervalo de confianza del 96% sobre μB – μA, donde μA y μB corresponden a la media de la población del rendimiento de millas por galón para los motores A y B, respectivamente. Suponga que las desviaciones estándar de la población son 6 y 8 para los motores A y B, respectivamente.

b. Comprobar si el promedio del rendimiento de combustible de los motores es diferente para un alfa del 5%.

c. Comprobar si el promedio del rendimiento de combustible del motor A es superior al del motor B para un alfa del 1%.

Solución

Motor A → $\bar{X}_1$ = 36 millas/galón n_1 = 50 σ_1 = 6 millas/galón

Motor B → $\bar{X}_2$ = 42 millas/galón n_2 = 75 σ_2 = 8 millas/galón

IC96% $\mu B - \mu A$

$$\mathbf{P}\left(\Delta\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}} < \Delta\boldsymbol{\mu} < \Delta\overline{\mathbf{X}} + \mathbf{Z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} * \sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

$\Delta\overline{X}$ = 42 – 36 = 6 millas/galón

1 – α = 0,96 → α = 0,04 → 1 – α/2 = 0,98

$$Z_{0,98} \approx 2.06 \text{ (tabla de distribción normal)}$$

$$P(6 - 205 * 1{,}254 < \Delta\mu < 6 + 205 * 1{,}254) = 96\%$$

$$\mathbf{P(3,42 < \Delta\mu < 8,58) = 96\%}$$

Existe la certeza que para un nivel de confianza del 96% que la diferencia de media del motor B – motor A el verdadero intervalo del rendimiento de combustible oscila entre 3,42 y 8,58 milla/galón

b. Ho: $\mu_1 = \mu_2$

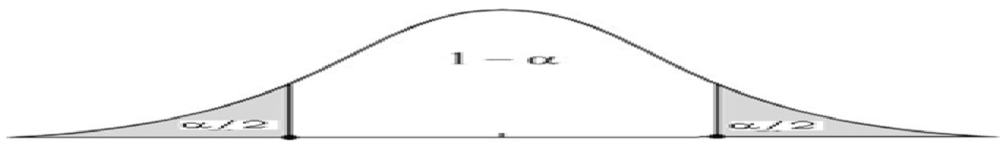
Hi: $\mu_1 \neq \mu_2$

Alfa del 5%.

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad Z = \frac{(36 - 42) - 0}{\sqrt{\frac{36}{50} + \frac{64}{75}}} = -4,783$$

$$Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975}$$

En Excel **=INV.NORM.ESTAND(0,975) = 1,96**



-4,783 **-1,96** **1,96**

Se rechaza Ho, para un nivel del 5%

c. Ho: $\mu_1 \leq \mu_2$

Hi: $\mu_1 > \mu_2$

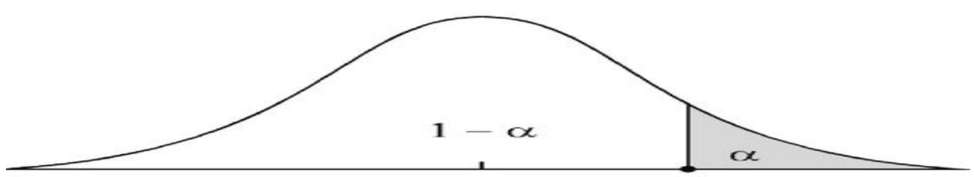
Alfa del 1%.

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(36 - 42) - 0}{\sqrt{\frac{36}{50} + \frac{64}{75}}} = -4,783$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99}$$

En Excel **=INV.NORM.ESTAND(0,99) = 2,326**



-4,783 2,326

Ejercicio de proporción para dos muestras independiente. Supongamos que se hizo una encuesta a una muestra de 80 estudiantes universitarios de una ciudad A sobre el concepto que les merecía la asignatura de matemática y se encontró queel 75% la consideraron muy útil, mientras que otra encuesta hecha a 120 estudiantes universitarios de una ciudad B el 77% la consideraron como una asignatura muy útil. Se pide

a. Calcular el intervalo de confianza con un nivel del 99% para la diferencia entre las proporciones.

b. Probar si existen diferencias entre las proporciones para un alfa del 1%.

<u>Solución</u>

a. n_1 = 80 $\quad \boldsymbol{\overline{p}_1}$ = 0,75 $\qquad$ n_2 = 120 $\quad \boldsymbol{\overline{p}_2}$ = 0,77 $\qquad$ IC99% Z = 2,58

$$P\left(\boldsymbol{\overline{p}_1 - \overline{p}_2 \pm Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}} * \sqrt{\boldsymbol{\frac{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)}{n_1} + \frac{\overline{p}_2(1-\overline{p}_2)}{n_2}}}\right) = \boldsymbol{(1-\alpha)}\%$$

$$\boldsymbol{\overline{p}_1 - \overline{p}_2 = -0,02}$$

$$P\left(\boldsymbol{-0,02 \pm 2,58} * \sqrt{\boldsymbol{\frac{0,75 * (1-0,75)}{80} + \frac{0,77 * (1-0,77)}{120}}}\right) = \boldsymbol{99\%}$$

$$P(\boldsymbol{-0,18 < p < 0,14}) = \boldsymbol{99\%}$$

El intervalo de confianza con un nivel del 99% para la diferencia entre las proporciones en relación a la utilizad de la asignatura oscila entre -0,18 y 0,14

b. Ho: $\pi_1 = \pi_2$

Hi: $\pi_1 \neq \pi_2$

Alfa = 0,01

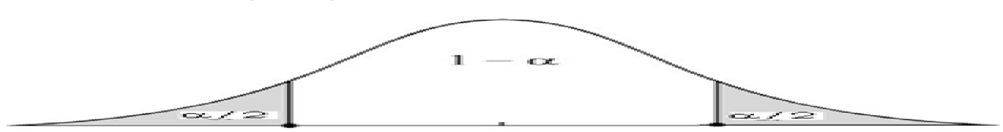
$$\boldsymbol{Z = \frac{(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{P * (1-P) * \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{n_1 * \overline{p}_1 + n_2 * \overline{p}_2}{n_1 + n_2}} \qquad \boldsymbol{P = \frac{80 * 0,75 + 120 * 0,77}{80 + 120} = 0,762}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{(0,75 - 0,77) - 0}{\sqrt{0,762 * (1 - 0,762) * \left[\frac{1}{80} + \frac{1}{120}\right]}} = -0,325}$$

$$Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-0,01/2} = Z_{0,995}$$

En Excel **=INV.NORM.ESTAND(0,995) = 2,576**



-2,576 $\qquad$ -0,325 $\qquad$ 2,576

Se acepta Ho.

Intervalo de confianza y prueba de hipótesis para la diferencia de medias poblacionales independiente cuando n es pequeña

Intervalo de confianza

Caso 3. Si lo tamaños de muestras n1 y n2 < 30 y las varianzas son desconocidas, entonces se aplica la distribución t-Student, según dos casos:

a. Si se suponen varianzas iguales: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$\mathbf{P}\left(\Delta\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2\right)} * \sqrt{\frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_2}}} < \Delta\boldsymbol{\mu} < \Delta\overline{\mathbf{X}} + \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2\right)} * \sqrt{\frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_2}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

S_p^2= Varianza conjunta o mancomunada

$$\mathbf{S_p^2} = \frac{(\mathbf{n_1} - \mathbf{1})\mathbf{S_1^2} + (\mathbf{n_2} - \mathbf{1})\mathbf{S_2^2}}{\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} - \mathbf{2}}$$

El error estándar de la diferencia de medias:

$$S_{\Delta\bar{X}} = \sqrt{\frac{Sp^2}{n_1} + \frac{Sp^2}{n_2}} = Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

El error de estimación es: $t_{(n_1+n_2-2;1-\alpha/2)} S_{\Delta\bar{X}}$

b. Si se suponen las varianzas distintas: Los grados de libertad no se pueden calcular, por tanto, se utilizan métodos aproximados de cálculo.

El factor de confiabilidad

$$t_{1-\alpha/2} = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

$$w_1 = \frac{S_1^2}{n_1} \qquad w_2 = \frac{S_2^2}{n_2}$$

$$t_1 = t_{1 - \alpha/2,\, n1 - 1}$$

$$t_2 = t_{2 - \alpha/2,\, n2 - 1}$$

El intervalo para la diferencia de medias es:

$$\mathbf{P}\left(\Delta\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{t}_{(1-\alpha/2)} * \sqrt{\frac{\mathbf{S_1^2}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{S_1^2}}{\mathbf{n_2}}} < \Delta\boldsymbol{\mu} < \Delta\overline{\mathbf{X}} + \mathbf{t}_{(1-\alpha/2)} * \sqrt{\frac{\mathbf{S_1^2}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{S_2^2}}{\mathbf{n_2}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

Prueba de hipótesis

Caso 3. Si ambas muestras contienen menos de 30 observaciones (n < 30) y desconocemos la desviación estándar poblacional, aunque con las desviaciones estándar muestrales son desiguales, utilizamos la distribución t como estadístico de prueba

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (varianza\ conjunta)$$

$\text{Ho}: \mu_1 \leq \mu_2$ $\quad$ $\text{Hi}: \mu_1 > \mu_2$ $\quad$ No se acepta Ho si t $> t_{\alpha;gl}$ $\quad$ (unilateral hacia la derecha)

$\text{Ho}: \mu_1 \geq \mu_2$ $\quad$ $\text{Hi}: \mu_1 < \mu_2$ $\quad$ No se acepta Ho si t $< -t_{\alpha;gl}$ $\quad$ (unilateral hacia la izquierda)

$\text{Ho}: \mu_1 = \mu_2$ $\quad$ $\text{Hi}: \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad$ No se acepta Ho si t $< -t_{\alpha/2;gl}$ o t $> t_{\alpha/2;gl}$ (bilateral)

$$\text{gl} = n_1 + n_2 - 2$$

Ejercicio de t Student para dos muestras independientes (asumiendo varianzas iguales). Una muestra aleatoria de tamaño n1 =15 que se tomó de una población normal, arrojó una media de 20 y desviación estándar igual a 1 y otra muestra aleatoria de tamaño n2=16 que se tomó de otra población normal, arrojó una media igual a 19 y desviación estándar igual a 2. Sepide:

a. Encontrar el intervalo de confianza del 99% para la diferencia de medias de ambas poblaciones. Asumir varianzas iguales.

b. La media del grupo 1 será menor al del grupo 2 con un α del 5%.

<u>Solución</u>

n1 =15 $\quad$ $\bar{X}_1$ =20 $\quad$ S_1 = 1

n2 =16 $\quad$ $\bar{X}_2$ =19 $\quad$ S_2 = 2

IC99%

$$\Delta\bar{X} = 20 - 19 = 1$$

$$\mathbf{P}\left(\Delta\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2}, gl\right)} * \sqrt{\frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_2}}} < \Delta\boldsymbol{\mu} < \Delta\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{t}_{\left(\frac{\alpha}{2}, gl\right)} * \sqrt{\frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{S_p^2}}{\mathbf{n_2}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

$$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}005$$

$$gl = n1 + n2 - 2 = 15+16 - 2 = 29$$

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}, gl\right)} = t_{0{,}005;\,29} = 2{,}756$$

Con Excel **=DISTR.T.INV(0,01;29)= 2,756**

Cálculo de la varianza conjunta

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(15 - 1)1^2 + (16 - 1)2^2}{15 + 16 - 2} = 2{,}55$$

$$P\left(1 - 2{,}756 * \sqrt{\frac{2{,}55}{15} + \frac{2{,}55}{16}} < \Delta\mu < 1 + 2{,}756 * \sqrt{\frac{2{,}55}{15} + \frac{2{,}55}{16}}\right) = 99\%$$

$$\mathbf{P(-0,58 < \Delta\mu < 2,58) = 99\%}$$

Existe la certeza que para un nivel de confianza del 99% que la diferencia de media de ambas poblaciones el verdadero intervalo oscila entre -0,58 y 2,58 .

b. Ho: $\mu_1 \leq \mu_2$

Hi: $\mu_1 > \mu_2$

Alfa = 5%

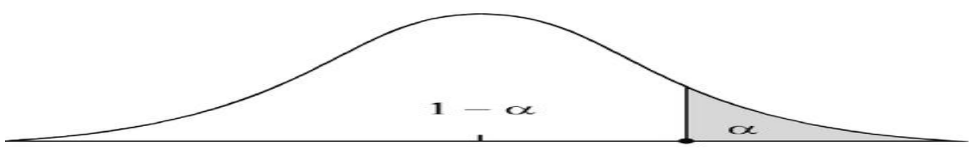
$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (varianza\ conjunta)$$

$$S_p^2 = \frac{(15 - 1) * 1 + (16 - 1) * 4}{15 + 16 - 2} = 2,55$$

$$t = \frac{(20 - 19) - 0}{\sqrt{\frac{2,55}{15} + \frac{2,55}{16}}} = 1,74$$

En Excel = **INV.T(Probabilidad;Grados_de_libertad)** = **INV.T(0.,05;29) = 1,699**



1,699 2,55

(Asumiendo varianzas desiguales). El tiempo promedio de recuperación de una muestra de 20 pacientes dados de alta de un hospital general es de 7 días, con una desviación estándar de 2 días. Una muestra de 24 pacientes dados de alta de un hospital de enfermedades crónicas tuvo un tiempo promedio de recuperación de 36 días con una desviación estándar de 10 días. Suponer que la población sigue una distribución normal con varianzas desiguales y calcular el intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las medias de las poblaciones.

Solución

$n_1 = 20$ $\bar{X}_1 = 7$ $S_1 = 2$

$n_2 = 24$ $\bar{X}_2 = 36$ $S_2 = 10$

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025$$

$$t_{1-\sigma/2} = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

$w_1 = S_1^2 / n_1 \Rightarrow w_1 = 2^2 / 20 = 0,20$

$w_2 = S_2^2 / n_2 \Rightarrow w_2 = 10^2 / 24 = 4,17$

$t_1 = t_{(1 - \alpha/2,\, n1 - 1)} \Rightarrow t_1 = t_{(0,975,\, 19)} = 2,0930$

$t_2 = t_{(1 - \alpha/2,\, n2 - 1)} \Rightarrow t_2 = t_{(0,975,\, 23)} = 2,0687$

$$t_{1-\alpha/2} = \frac{0,20\ x\ 2,0930\ + 4,17\ x\ 2,0687}{0,20 + 4,17} = 2,0698$$

$t_{1-\sigma/2}$ = 2,0698

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{29 - 2,0698} * \sqrt{\frac{\mathbf{2^2}}{\mathbf{20}} + \frac{\mathbf{10^2}}{\mathbf{24}}} < \Delta\boldsymbol{\mu} < \mathbf{29 + 2,0698} * \sqrt{\frac{\mathbf{2^2}}{\mathbf{20}} + \frac{\mathbf{10^2}}{\mathbf{24}}}\right) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

P(24,7 < $\Delta\mu$ < 33,3) = 95%

Intervalos de confianza para muestras relacionadas o apareadas

Intervalo de confianza

Para el cálculo del intervalo de confianza en muestras apareadas, se calcula primero la variable diferencia $Di = X_{iA} - X_{iB}$ y luego se aplica el método del cálculo del IC de μ para una muestra.

$$\boldsymbol{P}\left[\overline{\boldsymbol{d}} - \ \boldsymbol{t}\alpha_{/_{2},n-1}\ \boldsymbol{x}\ \frac{\boldsymbol{S_d}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} < \ \Delta\overline{\boldsymbol{X}} < \overline{\boldsymbol{d}} + \ \boldsymbol{t}\alpha_{/_{2},n-1}\ \boldsymbol{x}\ \frac{\boldsymbol{S_d}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right] = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\%$$

Prueba de hipótesis

$$\boldsymbol{t} = \frac{\overline{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{d_0}}{\boldsymbol{S_d}/\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

H_0: $\mu_d = 0$ Se rechaza Ho sí $t < -t_{\alpha/2,\, n-1}$ ó sí $t > t_{\alpha/2,\, n-1}$
H_1: $\mu_d \neq 0$ ($\mu_1 \neq \mu_2$) se podría considerar

H_0: $\mu_d \geq 0$ Se rechaza Ho sí $t < -t_{\alpha,\, n-1}$
H_1: $\mu_d < 0$ ($\mu_1 < \mu_2$) se podría considerar

H_0: $\mu_d \leq 0$ Se rechaza Ho sí $t > t_{\alpha,\, n-1}$
H_1: $\mu_d > 0$ ($\mu_1 > \mu_2$) se podría considerar

Ejemplo. Supongamos que se desea conocer la efectividad de una estrategia de enseñanza de una asignatura X. Para ello, el docente aplica inicialmente una prueba a un grupo de 6 estudiantes, luego, utiliza una estrategia y al finalizar, administra una segunda prueba, obteniendo los siguientes puntajes.

Antes	23	39	22	25	29	28
Después	28	40	25	25	30	30

a. Determine un intervalo de confianza para un nivel del 95%

b. ¿Proporcionan estos datos la evidencia suficiente para indicar que hubo cambios en los estudiantes una vez aplicada la estrategia de enseñanza?

<u>Solución</u>

	Xi_A	Xi_B	Di
	23	28	-5
	39	40	-1
	22	25	-3
	25	25	0
	29	30	-1
	28	30	-2
Media ($\bar{d}$)	27,67	29,67	-2,00
Varianza (S_D^2)	38,27	30,67	3,20
Desviación estándar (S_D)			1,79

$$P\left[\bar{d} - t_{\alpha/2, n-1}\ x\ \frac{S_d}{\sqrt{n}} < \Delta\bar{X} < \bar{d} + t_{\alpha/2, n-1}\ x\ \frac{S_d}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha)\%$$

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

Calculamos los grados de libertad: gl = n – 1 = 6 – 1 = 5

Calculamos el $t_{\alpha/2,gl} = t_{0{,}025{,}5}$ = 2,571 (ver tabla de distribución t)

=INV.T (Probabilidad;Grados_de_libertad)

$1 - \alpha/2 = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$

=INV.T (0,975;5) = 2,571

Error estándar de la media (EE):

$$S_{\bar{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}79}{\sqrt{6}} = 0{,}730$$

Error estándar de estimación (EEE):

$$t_{\alpha/2, n-1}\frac{S_D}{\sqrt{n}} = 2{,}571 * 0{,}730 = 1{,}879$$

Sustituimos en la ecuación:

$$P[-2{,}00 - 1{,}879 < \Delta\bar{X} < -2{,}00 + 1{,}879] = 95\%$$
$$P[-3{,}879 < \Delta\bar{X} < -0{,}121] = 95\%$$

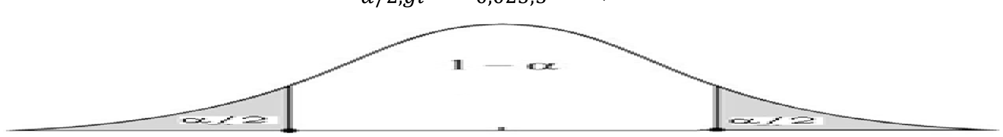
Interpretación. Existe una certeza del 95% que el promedio de puntajes entre ambas pruebas oscila entre -3,879 y -0,121. Por tanto, existe evidencia estadística que hubo cambios significativos en el aprendizaje de los estudiantes con la aplicación de la estrategia de enseñanza.

b. H_0: $\mu_d = 0$
H_1: $\mu_d \neq 0$
$\alpha = 0{,}05$

El estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{-2}{0{,}730} = -2{,}7397$$

$$t_{\alpha/2,gl} = t_{0{,}025;5} = 2{,}571$$



-2,7397 -2,571 2,571

Se rechaza Ho.

Intervalo de confianza y prueba de hipótesis para la varianza poblacional

El intervalo de confianza para la varianza (o desviación estándar) de una población distribuida normalmente, estimada a partir de la varianza (o desviación estándar) de una muestra aleatoria, viene dado por:

$$\boldsymbol{P}\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{S}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}_{\frac{\alpha}{2};gl}} \leq \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} \leq \frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{S}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}_{1-\alpha/2;gl}}\right] = (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\%$$

El intervalo de confianza para la desviación estándar es:

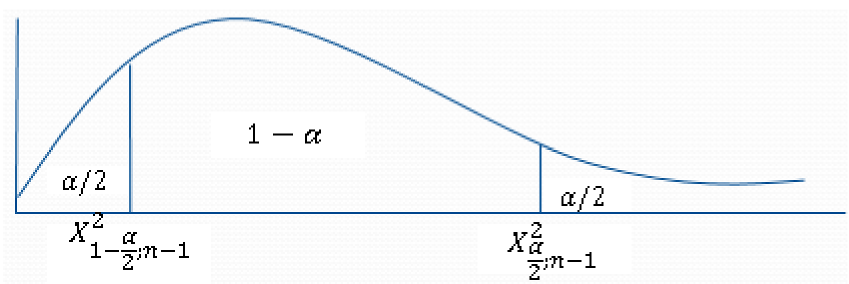
$$\boldsymbol{P}\left[\sqrt{\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{S}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}_{\frac{\alpha}{2};gl}}} \leq \boldsymbol{\sigma} \leq \sqrt{\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{S}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}_{1-\alpha/2;gl}}}\right] = (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\%$$

La distribución muestral de la varianza sigue una distribución chi cuadrado (X^2) con grados de liberad n-1, es decir, $S^2 \sim X^2(n-1)$.

Por definición, una distribución chi cuadrado o ji cuadrado (X^2)es:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

La representación gráfica sería:



$X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ es un valor de la distribución chi cuadrado que deja un área de 1-α/2 a la izquierda de la curva.

$X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}$es un valor que deja un área de α/2 a la derecha de la curva.

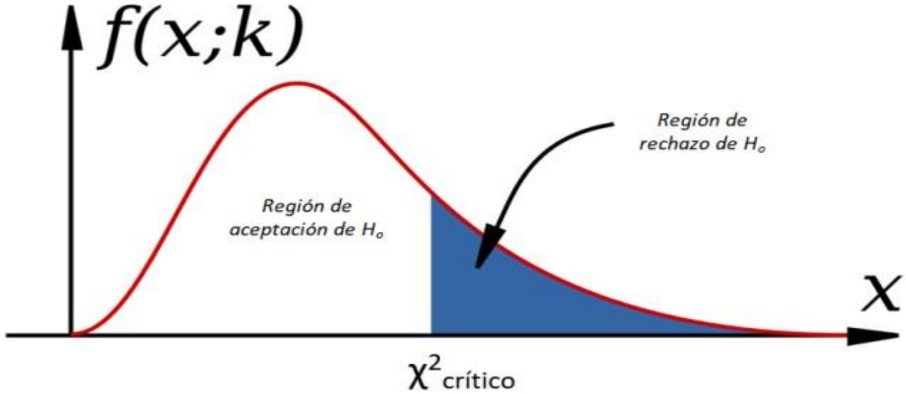
Prueba de hipótesis

Los tipos de prueba que se pueden realizar sobre la varianza son:

H_0: $\sigma^2 = \sigma_o^2$	H_0: $\sigma^2 \geq \sigma_o^2$	H_0: $\sigma^2 \leq \sigma_o^2$
H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$	H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$	H_1: $\sigma^2 > \sigma_o^2$

El estadístico de prueba es: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_o^{\ 2}} \sim \chi^2\ (n-1)$

La regla de decisión es: Rechazar H_0: sí $\chi^2 < \chi^2_{\ \alpha,n-1}$



Ejemplo. El gerente de una empresa desea conocer el nivel de responsabilidad de los empleados. Para ello seleccionó a 20 empleados y les aplicó una prueba estandarizada, obteniendo una varianza de 12 puntos.

a. Construya un intervalo de confianza del 95% para σ^2 y σ.

b. Proporcionan estos datos la suficiente evidencia para afirmar que la varianza de la población es mayor que 10 para un alfa del 5%.

Solución n = 20 S^2 = 12 Nivel de confianza = 95%

a. Calculamos los valores de la fórmula:

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2};gl}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{X^2{}_{1-\alpha/2;gl}}\right] = (1-\alpha)\%$$

1 – α = 0,95 → α = 1 – 0,95 = 0,05 → $\alpha/2$= 0,05/2 = 0,025

Los grados de libertad sería: gl = n – 1 = 12 – 1 = 11

$X^2_{\frac{\alpha}{2};gl} = X^2_{0,025;19}$ = 32,852 =INV.CHICUAD.CD(0,025;19)

$X^2_{1-\frac{\alpha}{2};gl} = X^2_{0,975;19}$ =8,907 =INV.CHICUAD.CD(0,975;19)

v	0.995	0.99	0.98	0.975
16	5.142	5.812	6.614	6.908
17	5.697	6.408	7.255	7.564
18	6.265	7.015	7.906	8.231
19	6.844	7.633	8.567	8.907
20	7.434	8.260	9.237	9.591

v	α 0.30	0.25	0.20	0.10	0.05	0.025
16	18.418	19.369	20.465	23.542	26.296	28.845
17	19.511	20.489	21.615	24.769	27.587	30.191
18	20.601	21.605	22.760	25.989	28.869	31.526
19	21.689	22.718	23.900	27.204	30.144	32.852

$$P\left[\frac{(20-1)\ x\ 12}{32,852} \leq \sigma^2 \leq \frac{(20-1)x12}{8,907}\right] = 95\%$$

$$P[6,94 \leq \sigma^2 \leq 25,60] = 95\%$$

Se tiene un 95% de confianza de que la varianza poblacional en la prueba de responsabilidad esté entre 6,94 y 25,60.

$$P\left[\sqrt{6,94} \leq \sigma \leq \sqrt{25,60}\right] = 95\%$$

$$P[2,63 \leq \sigma \leq 5,06] = 95\%$$

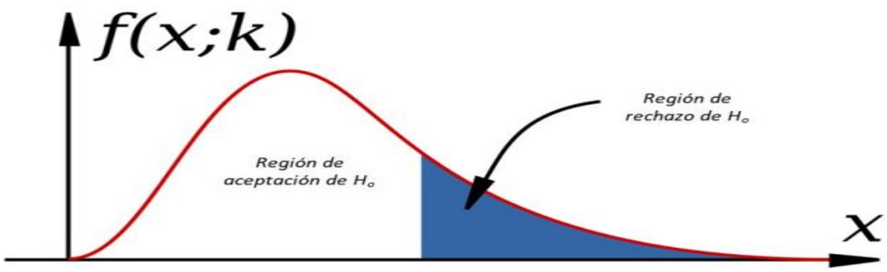
Se tiene un 95% de confianza de que la desviación estándar poblacional en la prueba de responsabilidad esté entre 2,63 y 5,06.

b. H_0: $\sigma^2 \leq 10$
H_1: $\sigma^2 > 10$
$\alpha = 0,05$

El estadístico de prueba:

$$X^2 = \frac{(n-1)xS^2}{\sigma^2} = \frac{(20-1)x12}{10} = 22,8$$

$$\chi^2_{\ \alpha,\, n-1} = \chi^2_{\ 0,05,\ 19} = 36.144$$



22,8 $\chi^2_{\ 0,05,19}$ = 36.144

Se acepta Ho porque $\chi^2 < 36.415$

Intervalo de Confianza y prueba de hipótesis para la proporción de dos varianzas poblacionales

Si σ_1^2 y σ_2^2 son las varianzas de poblaciones normales, podemos establecer una estimación por intervalos de σ_1^2/σ_2^2 usando el estadístico

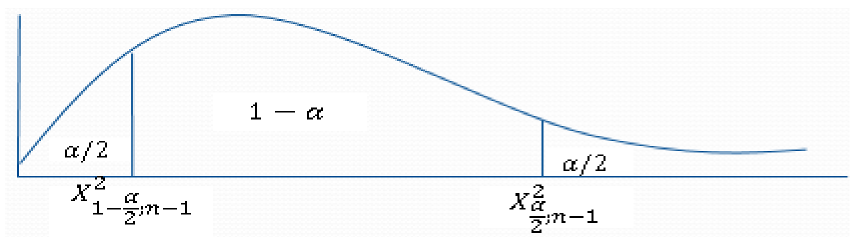
$$F = \frac{\sigma_2^1 \, S_1^2}{\sigma_1^1 \, S_2^2}$$

La variable aleatoria F tiene una distribución F con $v_1 = n_1 - 1$ y $v_2 = n_2 - 1$ grados de libertad. Por lo tanto, podemos escribir

$$P\,[\,f_{1-\alpha/2\,(v1\,,v2\,)} < F < f_{\alpha/2\,(v1\,,v2\,)}\,] = 1 - \alpha,$$

donde $f_{1-\alpha/2\,(v1\,,v2\,)}$ y $f_{\alpha/2\,(v1\,,v2\,)}$ son los valores de la distribución *F* con v_1 y v_2 grados de libertad, que dejan áreas de 1 – α/2 y α/2, respectivamente, a la derecha.

La representación gráfica sería:



Para determinar el intervalo de confianza para la proporción de dos varianzas poblacionales es:

$$\boldsymbol{P\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\,\frac{1}{f_{\alpha/2\,(v1\,,v2\,)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2\,(v2\,,v1\,)}\right] = (1-\alpha)\%}$$

También se puede hacer uso de la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{P\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{f_{\alpha/2\,(v1\,,v2\,)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2/S_2^2}{f_{1-\alpha/2\,(v1\,,v2\,)}}\right] = (1-\alpha)\%}$$

Prueba de hipótesis

El numerador siempre representa a la varianza muestral mayor, y el denominador representa la varianza muestral menor.

Unilateral derecha: Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad o \quad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

H1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

El estadístico de prueba es:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Se rechaza Ho si Fcalc > Ftabla

Unilateral izquierda: Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ o $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

H1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

El estadístico de prueba es:

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

Se rechaza Ho si Fcal < Ftabla

Bilateral Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ o $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

H1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

El estadístico de prueba es:

$$F = \frac{S_M^2}{S_m^2}$$

S_M^2 es la varianza mayor y S_m^2 es la varianza menor

Se rechaza Ho si Fcal esta fuera del intervalo existente entre dos valores de Ftablas

Valores de F tabla

1. El valor de F para cola derecha: $F_{(\alpha;\, v_1, v_2)}$. Si es bilateral $F_{\left(\frac{\alpha}{2};\, v_1, v_2\right)}$

Los grados de libertad df_1 corresponden al numerador y los grados de libertad df_2 al denominador.

2. El valor de F cola izquierda :

$$F_{(1-\alpha, df1, df2)} = \frac{1}{F_{(\alpha, v_2, v_1)}}$$

Si es bilateral $\frac{1}{F_{\left(\frac{\alpha}{2};\, v_2, v_1\right)}}$

En este caso, los df_2 se busca en gl1 y df1 en gl2

Ejemplo. Se analizaron estadísticamente los índices de ataques cardiacos de dos muestras de pacientes que padecían infarto al miocardio. Las varianzas las varianzas de las muestras fueron de 12 y de 10. Hubo 20 y 21 pacientes en cada muestra.

Construir el intervalo de confianza del 98% para la razón de las varianzas de las dos poblaciones.

Solución: $n_1 = 20$ $S_1^2 = 12$

$n_2 = 21$ $S_2^2 = 10$

$$P\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2\,(v1\,,v2\,)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2\,(v2\,,v1\,)}\right] = (1-\alpha)\%$$

$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \rightarrow \alpha = 0{,}02$ $\alpha/2 = 0{,}01$

$$v_1 = n_1 - 1 = 20 - 1 = 19$$

$$v_2 = n_2 - 1 = 21 - 1 = 20$$

$$f_{\alpha/2\,(v1,v2)} = f_{0{,}01\,(19,20)} \approx 2{,}94 \qquad \text{=INV.F.CD(0,01;19;20) = 2,96}$$

$$f_{\alpha/2\,(v2,v1)} = f_{0{,}01\,(20,19)} = 3{,}00 \qquad \text{=INV.F.CD(0,01;20;19) = 3,00}$$

v_2	$f_{0.01}(v_1, v_2)$ v_1 = 10	12	15	20	24	30
1	6055.85	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78

v_2	$f_{0.01}(v_1, v_2)$ v_1 = 10	12	15	20	24	30
1	6055.85	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78

$$P\left[\frac{12}{10}x\,\frac{1}{2{,}96} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{12}{10}x\,3{,}00\right] = 98\%$$

$$P\left[0{,}41 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3{,}60\right] = 98\%$$

Ejemplo. Se analizaron los valores del índice cardiaco (litros/minuto/M^2) en dos grupos de pacientes después de una operación de reemplazo de válvula. Los tamaños de las muestras y las varianzas fueron las siguientes: $n_1 = 16$, $S_1^2 = 3.75$, $n_2 = 10$, $S_2^2 = 1.8$. Proporcionan estos datos la evidencia suficiente para indicar que existe una diferencia en las varianzas de las poblaciones? Sea $\alpha = 0{,}10$.

<u>Solución:</u> $n_1 = 16$ $\quad n_2 = 10$

$S_1^2 = 3{,}75$ $\quad S_2^2 = 1{,}8$

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\alpha = 0{,}10$

Estadístico de prueba:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^1} = \frac{3{,}75}{1{,}8} = 2{,}08$$

Nota. Recuerde que se coloca en el numerador la varianza mayor.

Cálculo de los valores de F:

1. El valor de F para cola derecha:

$$F_{(\alpha, df1, df2)}$$

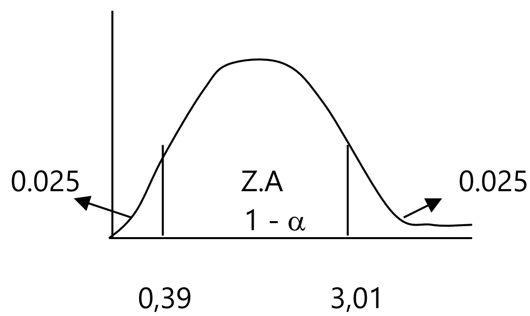
$$\nu_1 = n_1 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$\nu_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$F_{\left(\frac{0,10}{2};15;9\right)} = 3,01$$

2. El valor de F cola izquierda :

$$F_{(1-\alpha,\nu_1,\nu_2)} = \frac{1}{F_{(\alpha,\nu_2,\nu_1)}} = \frac{1}{F_{\left(\frac{0,10}{2};\,9,15\right)}} = \frac{1}{2,59} = 0,39$$



Decisión: No se rechaza Ho, no hay evidencia suficiente para indicar que exista diferencia en las varianzas de las poblaciones del índice cardiaco.

TIPOS DE PRUEBA DE HIPÓTESIS

Existen dos tipos de pruebas o contraste de hipótesis, todo dependerá si los datos siguen una distribución normal:

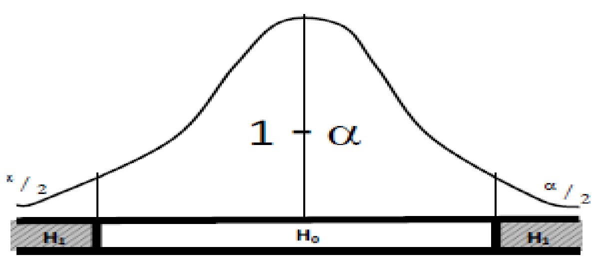
1. Pruebas paramétricas:	**2. Pruebas no paramétricas:**
a. Se conoce el modelo de distribución de la población objeto de estudio y se desconoce un número finito de parámetros de dicha distribución que hay que estimar con los datos de la muestra. b. Requieren conocer la distribución de la muestra para poder realizar inferencias sobre la población.	a. Son métodos de distribución libre. No requieren conocer la distribución de la muestra. b. Se utilizan estadísticos cuya distribución se determina con independencia de cuál sea la distribución de la población. Las pruebas no paramétricas son una alternativa a las pruebas paramétricas cuando los datos no cumplen los requisitos de las pruebas paramétricas. El término no paramétrico implica un test para una hipótesis la cual no es una afirmación acerca de los valores de los parámetros. Solo se limita a analizar las propiedades nominales u ordinales de los datos.

Para conocer la cómo es la forma de la distribución de la población de la que se ha extraído la muestra se realiza un contraste de **Bondad de Ajuste** para conocer la forma de la población que ha originado la muestra.

Supuesto de las pruebas paramétricas

1. Variable numérica. La variable de estudio (la dependiente) debe estar medida en una escala que sea, por lo menos, de intervalo e, idealmente, de razón.

2. Normalidad. Las observaciones extraídas de la población deben seguir una distribución normal. Para comprobar este supuesto se utiliza la denominada pruebas de bondad de ajuste, como por ejemplo la prueba de Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk, entre otras. También se puede hacer uso de gráficos de normalidad como Q-Q plots e histogramas. Cuando los datos no sean normales se emplearán otros métodos estadísticos que no exijan este tipo de restricciones (los llamados métodos no paramétricos).



Distribución normal o gaussiana

Cuando se ejecutan las pruebas con algún programa estadístico se obtiene el valor del estadístico y el valor p de probabilidad del contraste. Se rechaza Ho (los datos siguen una distribución normal) si el valor p de probabilidad es menor que el nivel de significación elegido para ejecutar la prueba de contraste estadístico.

3. Homocedasticidad. Las varianzas de los diferentes grupos tienen que ser iguales (homogeneidad de varianzas). Existen varias pruebas que permiten comprobar la igualdad de varianzas (F de Fisher, Fmax de Hartley, prueba de Bartlett, etc.).

4. Respecto a los errores.

a. Los errores son independientes entre sí.

b. Se distribuyen según una distribución normal dentro de cada población del grupo $N(0, s^2)$. Es decir, con media cero y varianzas equivalentes.

5. El tamaño de la muestra. No debe ser inferior a 30, y cuanto más se acerque a la n poblacional mejor. Dado que las pruebas paramétricas realizan estimación de parámetros de la población a partir de muestras estadísticas, es lógico pensar que cuanto más grande sea la muestra, más exacta será la estimación; en cambio, cuanto más pequeña, más distorsionada será la media de las muestras por los valores raros extremos.

Características de las pruebas paramétricas y no paramétricas

Pruebas paramétricas	Pruebas no paramétricas
Menor potencia estadística.	Mayor potencia estadística.
Se aplica en variables normales o de intervalo.	Se aplica en variables categóricas.
Se utilizan para muestras grandes y aleatorias.	Se utilizan para muestras pequeñas y no aleatorias.
Su distribución de datos es normal.	No se conoce la forma de distribución de datos.
Hacen muchas suposiciones.	No hacen muchas suposiciones.
Exigen mayor condición de validez.	Exigen una menor condición de validez.
Menor probabilidad de errores	Mayor probabilidad de errores.
El cálculo es complicado de hacer.	El calculo es menos complicado de hacer.
Las hipótesis se basan en datos numéricos, especialmente en promedios.	Las hipótesis se basan en rangos, mediana y frecuencia de datos.
Los cálculos son demasiados exactos.	Lo cálculos no son exactos.
No toma en cuenta los valores perdidos para obtener información.	Considera los valores perdidos para obtener información.
Mientras más grande sea la muestra más exacta será la estimación, mientras más pequeña, más distorsionada será la media de las muestras.	Se puede utilizad, aunque se desconozca los parámetros de la población en estudio.

La **potencia de una prueba de hipótesis** es la probabilidad de que la prueba rechace correctamente la hipótesis nula. La potencia de una prueba de hipótesis se ve afectada por el tamaño de la muestra, la diferencia, la variabilidad de los datos y el nivel de significancia de la prueba.

Usos de las pruebas paramétricas y no paramétricas

¿Para qué la usamos?	Prueba paramétrica	Prueba no paramétrica
Comparar una muestra	Prueba Z ($n \geq 30$) Prueba t ($n < 30$)	Kolmogorov-Smirnov * X^2* Binomial* Rachas* Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon
Comparar dos muestras independientes	Prueba t Levene para igualdad de varianzas	Prueba de U Mann-Whitney Kolmogorov-Smirnov Rachas de Wald-Wolfowisz Reacciones extremas de Moses
Comparar varias muestras independientes	ANOVA de una vía	Prueba de Kruskal-Wallis Prueba de Mood De la mediana Jonckheere-Terpstra
Comparar dos muestras dependientes o relacionadas	Prueba t Correlación de Pearson	Wilcoxon de los signos McNemar
Comparar varias muestras dependientes o relacionadas	ANOVA de medidas repetidas, ANOVA de dos vías Modelos mixtos	Prueba de Wilcoxon Friedman Cochran Coeficiente de Concordancia de W de Kendall
Probar la asociación entre dos variables cualitativas	X^2 sobre tabla de contingencia	Prueba Exacta de Fisher Método Monte Carlo
Probar la asociación entre dos variables cuantitativas	Prueba de correlación de Pearson	Prueba de correlación de Spearman
Comprobar la existencia de valores atípicos (outliers)	Prueba de Dixon Prueba de Grubbs	Gráfico de caja y bigotes (boxplot) (no es una prueba)

* Se utilizan como prueba de bondad de ajuste o de independencia.

Pruebas de normalidad

Las pruebas de normalidad verifican si una población difiere significativamente de una distribución normal. Es decir, los resultados de la prueba indican si debe rechazarse o no puede rechazarse la hipótesis nula de que los datos provienen de una población distribuida normalmente.

Para ello, se tiene en cuenta la siguiente decisión: si p-valor es mayor al valor alfa asumido (usualmente 0,05) se acepta la Ho, es decir, los datos provienen de una distribución normal y se elegí una prueba paramétrica (Z, t-student y F).

Los siguientes son tipos de pruebas de normalidad que puede utilizar para evaluar la normalidad.

- Prueba de Anderson-Darling.
- Prueba de normalidad de Ryan-Joiner: Esta prueba es similar a la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk.
- Prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov: Se aplica cuando el tamaño de muestra es mayor o igual a 50 datos.
- Prueba de Shapiro-Wilk: Se aplica cuando el tamaño de muestra es menor de 50 datos.