CÁLCULO
Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Sexta edición

Volumen 1

ROLAND E. LARSON

ROBERT P. HOSTETLER

The Pennsylvania State University
The Behrend College

BRUCE H. EDWARDS

University of Florida

Con la colaboración de

DAVID E. HEYD

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Traducción

LORENZO ABELLANAS RAPÚN
Catedrático de Métodos Matemáticos de la Física
Universidad Complutense de Madrid

Consultores

JOSÉ LUIS PÉREZ LÓPEZ
Profesor Titular del Departamento de Matemáticas

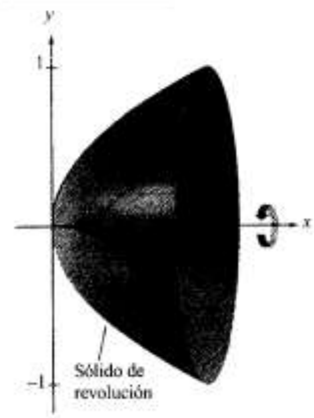
ORLANDO LEAL SÁNCHEZ
Docente jubilado

Politécnico Jaime Isaza Cadavid
Medellín, Colombia

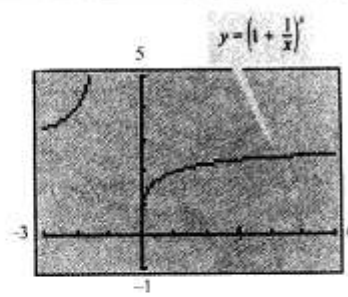
Mc Graw Hill

MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

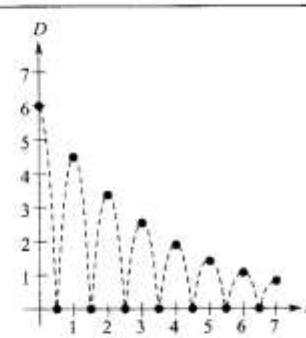
Capítulo 6. Aplicaciones de la integral 462



Capítulo 7. Métodos de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias 538



Capítulo 8. Series 620

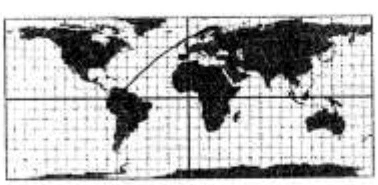


Capítulo 7

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

El mapa de Mercator

Vuelo con rumbo constante de 45°.



Mapa plano usual: vuelo con rumbo constante de 45°.

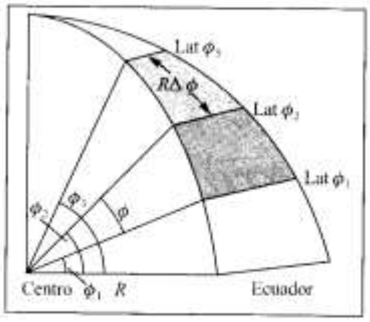
En el vuelo y en la navegación, los pilotos desean disponer de un rumbo fijo. Eso resulta difícil en un mapa plano usual, porque una trayectoria de rumbo fijo aparece en ellos en forma de línea curva, como muestran las dos primeras figuras adjuntas.

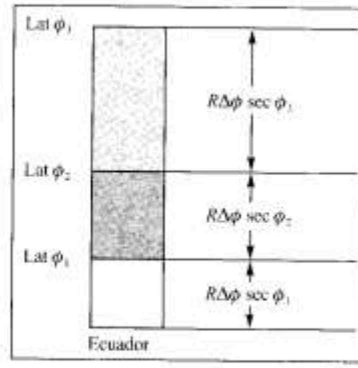
Para que esas líneas aparezcan como rectas en un mapa plano, el geógrafo flamenco Gerardus Mercator (1512-1594) se dio cuenta de que las líneas de latitud constante han de sufrir un factor de escala sec ϕ, donde ϕ denota el ángulo de latitud. Para que el mapa preserve los ángulos entre las líneas de latitud y las de longitud, también estas últimas deben sufrir esa misma dilatación de factor sec ϕ en latitud ϕ. En el mapa de Mercator, las líneas de latitud constante no son equidistantes, como vemos en la figura del margen de la página siguiente.

Para calcular estas longitudes verticales, imaginemos un globo con líneas de latitud marcadas cada $\Delta\phi$ radianes, con $\Delta\phi = \phi_i - \phi_{i-1}$. La longitud de arco de líneas de longitud sucesivas es $R\Delta\phi$. En el mapa de Mercator, la distancia vertical entre el ecuador y la primera línea de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_1$. La distancia vertical entre la primera y la segunda líneas de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_2$, la distancia vertical entre la segunda y la tercera líneas de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_3$, etc. (véase figura de la parte superior de la página siguiente).

Sobre el globo, el ángulo entre líneas de latitud consecutivas es $\Delta\phi$, y la longitud de arco entre ellas es $R\Delta\phi$ (figura izquierda de la parte superior de la página siguiente). En un mapa de Mercator la distancia vertical entre la $(i-1)$ y la i-ésima línea de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_i$ y la distancia del Ecuador a la i-ésima línea de latitud es aproximadamente

$$R\Delta\phi \sec \phi_1 + R\Delta\phi \sec \phi_2 + \cdots + R\Delta\phi \sec \phi_i$$





Mapa Mercator: vuelo con rumbo constante de 45°.

CUESTIONES

1. Escribir en notación sigma una expresión para calcular a qué distancia del Ecuador hay que dibujar la línea de latitud ϕ_n.
2. En los cálculos anteriores Mercator apreció que cuanto menor era el valor asignado a $\Delta\phi$ mejor era el mapa obtenido (en el sentido de que las rectas se podían usar muy exactamente como rumbos fijos). A partir de su conocimiento del Cálculo, ¿cómo podría usar esa observación de Mercator para calcular la distancia vertical total que dista una línea de latitud del Ecuador?
3. Usar el resultado de la Cuestión 2 para determinar a qué distancia del Ecuador han de colocarse las líneas de latitudes 10°, 20°, 30°, 40° y 50°. (Usar un globo de radio $R = 6$ pulgadas.)
4. ¿Hay algún problema cuando intenta calcular la distancia del Polo Norte al Ecuador?

84. Probar que si $f(x) \geqslant 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \infty$.

85. Demostrar la siguiente generalización del teorema del valor medio: si f es dos veces derivable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b - a) - \int_a^b f''(t)(t - b)\, dt$$

86. Probar que la forma indeterminada 0^0 no es siempre igual a 1, calculando

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\ln 2/(1 + \ln x)}$$

7.8 Integrales impropias

CONTENIDO •
Integrales impropias con límites de integración infinitos •
Integrales impropias con discontinuidades infinitas •

Integrales impropias con límites de integración infinitos

En la definición de una integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

se exigió que el intervalo $[a, b]$ fuese finito. Por su parte, el teorema fundamental del Cálculo, al que hemos recurrido tantas veces para calcular integrales, requiere que f sea continua en $[a, b]$. En esta sección analizaremos aquellas integrales que no satisfacen uno o ambos de los requisitos citados. Son integrales en las que o bien el intervalo de integración es infinito, o la función f tiene una o varias discontinuidades infinitas en el intervalo $[a, b]$. Tales integrales se llaman **integrales impropias**. Recordemos que una función tiene una **discontinuidad infinita** en c si por la derecha o por la izquierda,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

Para tener idea de cómo evaluar una integral impropia, consideremos la integral

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

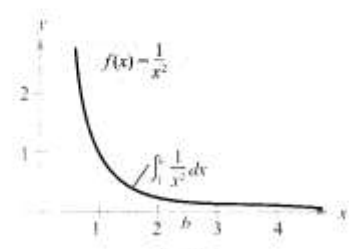


FIGURA 7.17
La región no acotada tiene área 1.

que puede ser interpretada como el área de la región sombreada en la Figura 7.17. Tomando el límite cuando $b \to \infty$ resulta

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(\int_1^b \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{b \to \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$$

Esta integral impropia puede interpretarse como el área de la región *no acotada* comprendida entre la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ y el eje x, a la derecha de $x = 1$.

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN INFINITOS

1. Si f es continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real.

En los dos primeros casos, la integral impropia converge si el límite existe; en caso contrario, la integral impropia diverge. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

EJEMPLO 1 Una integral impropia divergente

Calcular $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

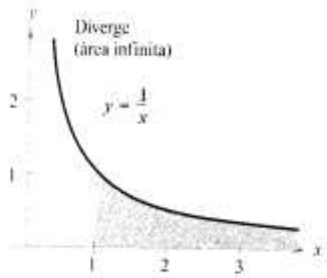


FIGURA 7.18
Esta región no acotada tiene área infinita.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} && \text{Tomar el límite para } b \to \infty \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x\Big]_1^b && \text{Aplicar la regla log} \\
&= \lim_{b\to\infty} (\ln b - 0) && \text{Aplicar el teorema fundamental del Cálculo} \\
&= \infty && \text{Evaluar el límite}
\end{aligned}$$

□

Nota. Compare las regiones de las Figuras 7.17 y 7.18. Parecen similares. Sin embargo, la de la Figura 7.17 tiene área finita, igual a 1, mientras que la de la Figura 7.18 tiene área infinita.

EJEMPLO 2 Integrales impropias convergentes

Calcular las siguientes integrales impropias

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

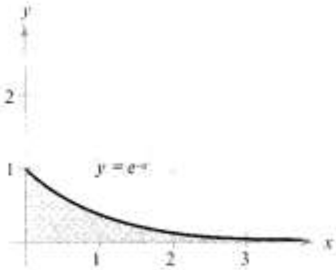


FIGURA 7.19
El área de la región no acotada es 1.

Solución:

$$a)\quad \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1)$$
$$= 1$$

(Véase Figura 7.19.)

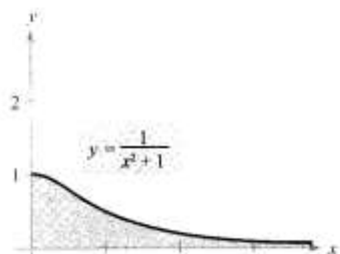


FIGURA 7.20
El área de la región no acotada es $\pi/2$.

$$b)\quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

(Véase Figura 7.20.) □

En el próximo ejemplo se utiliza la regla de L'Hôpital para calcular una integral impropia.

EJEMPLO 3 Cálculo de una integral impropia utilizando la regla de L'Hôpital

Calcular $\displaystyle\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx$

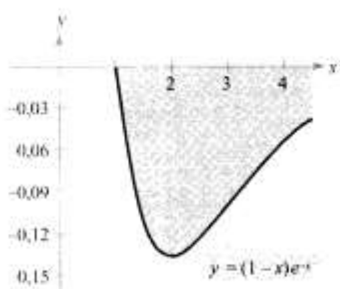


FIGURA 7.21
El área de la región no acotada es $|-1/e|$.

Solución:

Integramos por partes con $dv = e^{-x}\,dx$ y $u = (1-x)$

$$\int (1-x)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(1-x) - \int e^{-x}\,dx$$
$$= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C$$
$$= xe^{-x} + C$$

De la definición de integral impropia se sigue que

$$\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \Big[xe^{-x}\Big]_1^b = \left(\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} - \frac{1}{e}\right)$$

Finalmente, aplicando la regla de L'Hôpital en la derecha se obtiene

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

y finalmente de ahí se llega a la conclusión de que

$$\int_1^{\infty} (1 - x)e^{-x}\, dx = -\frac{1}{e}$$

(Véase Figura 7.21.) □

EJEMPLO 4 Límites de integración superior e inferior infinitos

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

Solución: Nótese que el integrando es continuo en toda la recta real. Para evaluar la integral podemos descomponerla en dos, eligiendo $c = 0$ por conveniencia.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx \\
&= \lim_{b \to -\infty} \Big[\operatorname{arctg} e^x\Big]_b^0 + \lim_{b \to \infty} \Big[\operatorname{arctg} e^x\Big]_0^b \\
&= \lim_{b \to -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} e^b\right) + \lim_{b \to \infty} \left(\operatorname{arctg} e^b - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

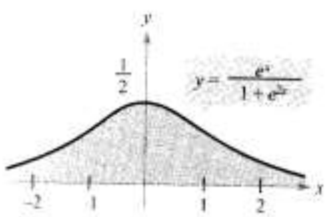


FIGURA 7.22
El área de la región no acotada es $\pi/2$.

(Véase Figura 7.22.) □

EJEMPLO 5 Propulsión de un módulo espacial

En el Ejemplo 3 de la Sección 6.5 vimos que se requieren 10.000 toneladas de trabajo para poner en órbita, a 800 millas de altura sobre la superficie de la Tierra, un módulo espacial de 15 toneladas. ¿Cuánto trabajo sería necesario para propulsarlo a distancia infinita de la Tierra?

Solución: A primera vista puede parecer que se necesitaría una cantidad infinita de trabajo. Pero si eso fuera cierto sería imposible enviar cohetes al espacio exterior. Como esto se ha hecho, el trabajo exigido ha de ser finito. Puede calcularse de la siguiente manera. En la integral del Ejemplo 3 de la Sección 6.5, sustituimos el límite superior de integración, que allí era 4.800 millas, por ∞, con lo que se obtiene

$$W = \int_{4.000}^{\infty} \frac{240.000.000}{x^2}\, dx$$

FIGURA 7.23
El trabajo requerido para propulsar un módulo espacial hasta una distancia infinita de la Tierra es aproximadamente $6{,}336 \times 10^{11}$ libras-pies.

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{240.000.000}{x} \right]_{4.000}^{b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{240.000.000}{b} + \frac{240.000.000}{4.000} \right)$$

$$= 60.000 \text{ toneladas-millas}$$

$$\approx 6{,}336 \times 10^{11} \text{ libras-pies}$$

(Véase Figura 7.23.) □

Integrales impropias con discontinuidades infinitas

El segundo tipo básico de integrales impropias es el constituido por aquellas que contienen alguna discontinuidad infinita *en* o *entre* los límites de integración.

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON DISCONTINUIDADES INFINITAS

1. **Si f es continua en el intervalo $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

2. **Si f es continua en el intervalo $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

3. **Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ excepto en algún c en (a, b), en el que f tiene una discontinuidad infinita, entonces**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

En los dos primeros casos, la integral impropia converge si el límite existe y diverge en caso contrario. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

EJEMPLO 6 Una integral impropia con una discontinuidad infinita

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

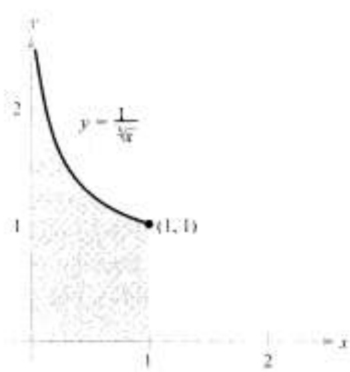


FIGURA 7.24
El área de la región no acotada es 3/2.

Solución: El integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, como muestra la Figura 7.24. Podemos calcular la integral así:

$$\int_0^1 x^{-1/3}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_b^1$$
$$= \lim_{b\to 0^+}\frac{3}{2}(1-b^{2/3})$$
$$= \frac{3}{2}$$

□

EJEMPLO 7 Una integral impropia divergente

Calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$

Solución: Como el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, escribimos

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to 0^+}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_b^2 = \lim_{b\to 0^+}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2b^2}\right) = \infty$$

Por tanto, concluimos que la integral impropia es divergente. □

EJEMPLO 8 Una integral impropia con una discontinuidad interior

Calcular $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$

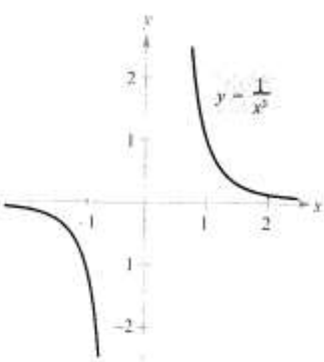


FIGURA 7.25
La integral impropia $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^3}\,dx$ diverge.

Solución: Esta integral es impropia porque el integrando tiene una discontinuidad infinita en el punto interior $x = 0$ (véase Figura 7.25). Así pues, descomponemos la integral en dos.

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^2 \frac{dx}{x^3}$$

En el Ejemplo 7 hemos demostrado que la segunda integral es divergente. Por consiguiente, la integral impropia propuesta es también divergente. □

Nota. Recuérdese que al estudiar si una integral es o no impropia hay que ver si tiene discontinuidad infinita en un punto terminal o en un punto interior del intervalo de integración. Por ejemplo, si no nos hubiéramos dado cuenta de que la integral del Ejemplo 8 era impropia, hubiéramos llegado a un resultado incorrecto:

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} \overset{?}{=} \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{-1}^2 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$ Evaluación incorrecta

La integral del próximo ejemplo es impropia por dos razones: uno de los límites de integración es infinito y además el integrando presenta una discontinuidad infinita en el límite superior de integración (véase Figura 7.26).

EJEMPLO 9 Una integral doblemente impropia

Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

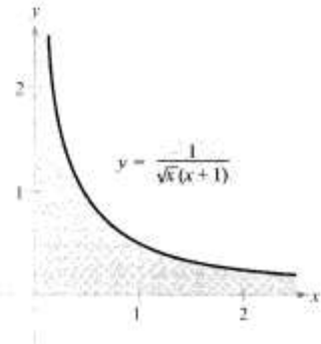


FIGURA 7.26
El área de la región no acotada es π.

Solución: Para calcular esta integral la descomponemos en dos, eligiendo para ello un punto conveniente, digamos $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{b \to 0^+} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right]_b^1 + \lim_{c \to \infty} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right]_1^c \\
&= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 10 Una aplicación relativa a la longitud de arco

Usando la fórmula para la longitud de arco, demostrar que la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es 2π.

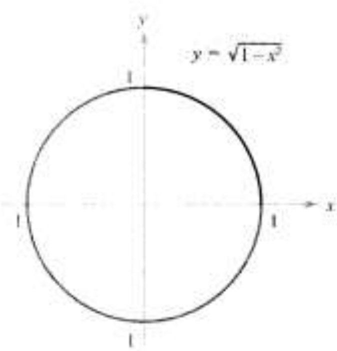


FIGURA 7.27
La circunferencia tiene longitud 2π.

Solución: Con el fin de simplificar la tarea, consideremos el cuarto de círculo dado por $y = \sqrt{1 - x^2}$, donde $0 \leqslant x \leqslant 1$. La función y es derivable en todo x de ese intervalo excepto en $x = 1$. Por tanto, la longitud de arco del cuarto de círculo viene dada por la integral

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}$$

Esta integral es impropia porque su integrando presenta una discontinuidad infinita en $x = 1$. Así pues, tenemos

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\
&= \lim_{b \to 1^-} \left[\operatorname{arcsen} x \right]_0^b \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por 4 llegamos a la conclusión de que la circunferencia del círculo es $4s = 2\pi$. □

Cerramos esta sección con un interesante teorema que decide la convergencia o divergencia de una clase de integrales impropias muy común. Su demostración se deja como ejercicio (véase Ejercicio 35).

TEOREMA 7.5 UN TIPO ESPECIAL DE INTEGRALES IMPROPIAS

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } p \leqslant 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 11 Aplicación a un sólido de revolución

Se llama **trompeta de Gabriel** al sólido de revolución engendrado, al girar en torno al eje x, por la región *no acotada* comprendida entre la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje x ($x \geqslant 1$) (véase Figura 7.28). Probar que este sólido tiene volumen finito y área superficial infinita.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Sobre sólidos de volumen finito y área infinita, véase el artículo «Supersolids: Solids Having Finite Volume and Infinite Surfaces» de William P. Love en *Mathematics Teacher*, enero 1989.

Solución: El método de los discos y el Teorema 7.5 permiten hallar

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx && \text{Teorema 7.5, } p = 2 > 1 \\ &= \pi\left(\frac{1}{2-1}\right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

El área viene dada por

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

Al ser

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 4$$

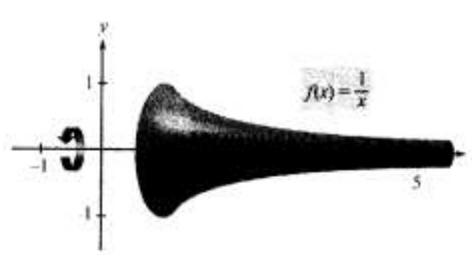


FIGURA 7.28
La trompeta de Gabriel tiene volumen finito y área infinita.

en el intervalo $[1, \infty)$, y la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

divergente, concluimos que la integral impropia

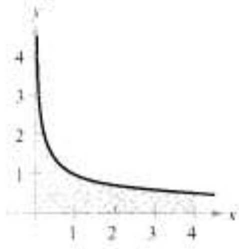
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

es asimismo divergente (véase Ejercicio 38). En consecuencia, el área es infinita. □

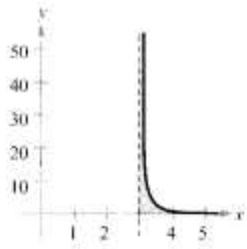
Ejercicios de la Sección 7.8

En los Ejercicios 1-6, explicar por qué es impropia la integral y discutir si es convergente o divergente. Calcular las que sean convergentes.

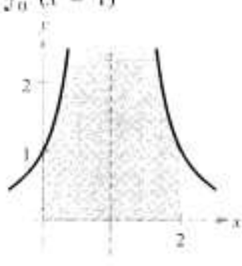
1. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$



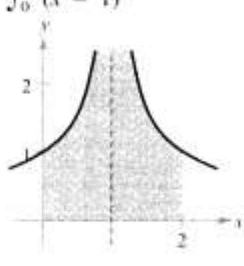
2. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{3/2}}\, dx$



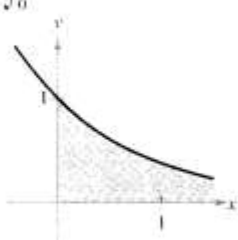
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$



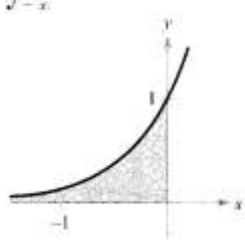
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx$



5. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$



6. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$



Redacción En los Ejercicios 7 y 8, explicar por qué es *incorrecto* el cálculo del valor de la integral. Usar integración en la calculadora para intentar hallar su valor. Discutir si la respuesta de la calculadora es correcta.

7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, dx = -2$ **8.** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 0$

En los Ejercicios 9-22, averiguar si la integral, con intervalo de integración infinito, es convergente o divergente. En caso de convergencia, calcular su valor.

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-2x}\, dx$ **10.** $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x}\, dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}\, dx$

13. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ **14.** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\, dx$ **16.** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\, dx,\ a > 0$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ **18.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$ **20.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos \pi x\, dx$ **22.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\, dx$

En los Ejercicios 23-34, determinar si la integral es convergente. Si lo es, calcularla y comprobar el resultado usando integración en la calculadora.

23. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$ **24.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

25. $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^e \ln x\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec\theta\,d\theta$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\theta\,d\theta$ **30.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

31. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4-x^2}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,dx$

En los Ejercicios 35 y 36, hallar todos los valores de p para los que la integral impropia converge.

35. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

37. Probar por inducción que la integral siguiente converge para todo entero $n > 0$.

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

38. Dadas dos funciones continuas f y g tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ en el interval $[a, \infty)$, demostrar que:

a) Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

b) Si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

En los Ejercicios 39-48, usar los resultados de los Ejercicios 35-38 para decidir si la integral converge o no.

39. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

41. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx$

43. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+5}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

45. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}\,dx$ **46.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,dx$

47. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ **48.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,\ln x}\,dx$

Transformadas de Laplace Sea $f(t)$ una función definida para todo t positivo. Su transformada de Laplace se define como

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

si la integral impropia existe. Las transformadas de Laplace se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales. En los Ejercicios 49-56, hallar la transformada de Laplace de la función.

49. $f(t) = 1$ **50.** $f(t) = t$

51. $f(t) = t^2$ **52.** $f(t) = e^{at}$

53. $f(t) = \cos at$ **54.** $f(t) = \operatorname{sen} at$

55. $f(t) = \operatorname{ch} at$ **56.** $f(t) = \operatorname{sh} at$

Área y volumen En los Ejercicios 57 y 58, consideremos la región que satisface las desigualdades. Calcular *a)* su área, *b)* el volumen del sólido que genera al girar en torno al eje x, y *c)* el volumen del sólido que genera al girar en torno al eje y.

57. $y \leqslant e^{-x}, y \geqslant 0, x \geqslant 0$ **58.** $y \leqslant 1/x^2, y \geqslant 0, x \geqslant 1$

59. ***Longitud de arco*** Dibujar un esbozo de la hipocicloide de cuatro cúspides

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

y calcular su perímetro.

60. ***Área de una superficie*** Calcular el área del toro engendrado al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por $(x-2)^2 + y^2 = 1$

61. ***La función gamma*** La función gamma $\Gamma(n)$ se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx,\ n > 0$$

a) Calcular $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, y $\Gamma(3)$.

b) Probar, integrando por partes, que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

c) Expresar $\Gamma(n)$ en términos de la notación factorial, para n entero positivo.

62. ***Trabajo*** Se lanza al espacio exterior, desde la superficie terrestre, un cohete de 5 toneladas.

a) ¿Cuánto trabajo requiere vencer la gravedad terrestre?

b) ¿Cuánto ha recorrido el cohete en el momento en que se ha realizado la mitad de ese trabajo?

Probabilidad Una función f se dice que es una *función de densidad de probabilidad* si es no negativa y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

La *probabilidad* de que x esté entre a y b viene dada, en tal caso, por

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

El valor esperado de x es

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\, dt$$

En los Ejercicios 63 y 64, *a*) probar que la función dada es una función de densidad de probabilidad, *b*) calcular $P(0 \leqslant x \leqslant 4)$, y *c*) hallar $E(x)$.

63. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{7}e^{-t/7}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

64. $f(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{-2t/5}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Coste capitalizado En los Ejercicios 65 y 66 calcular el coste capitalizado C de una posesión *a*) en $n = 5$ años, *b*) en $n = 10$ años, y *c*) a perpetuidad. El coste C viene dado por

$$C = C_0 + \int_0^n c(t)e^{-rt}\, dt$$

donde C_0 es la inversión original, t el tiempo en años, r la tasa de interés anual compuesto continuamente, y $c(t)$ el coste anual de mantenimiento.

65. $C_0 = \$650.000$
$c(t) = \$25.000$
$r = 0{,}06$

66. $C_0 = \$650.000$
$c(t) = \$25.000(1 + 0{,}08t)$
$r = 0{,}06$

67. ***Electromagnetismo*** Calcular el valor de la siguiente integral, utilizada en la teoría electromagnética.

$$P = k\int_1^{\infty} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\, dx$$

68. ***Redacción***

a) Las integrales impropias

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

son, respectivamente, divergente y convergente. Describir qué diferencia esencial entre sus integrandos provoca ese distinto comportamiento.

b) Dibujar la gráfica de la función $y = (\text{sen } x)/x$ en el intervalo $(1, \infty)$. Con los conocimientos sobre integrales definidas de que dispone, explique razonadamente por qué cree que la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$$

es convergente o divergente, según su parecer.

c) Integrando por partes repetidamente en la integral del apartado *b*), analizar si converge o diverge.

69. Sea $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(x^2 + 1)^{n+3}}\, dx,\ n \geqslant 1$

Probar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right) I_{n-1}$

y calcular, a continuación:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^4}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + 1)^5}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^5}{(x^2 + 1)^6}\, dx$

70. ***Probabilidad normal*** En 1992 la altura media de los varones en EE.UU., con edades comprendidas entre 18 y 24 años, era de 70 pulgadas con una desviación típica de 3 pulgadas. Si se toma al azar un varón en esa franja de edad, la probabilidad de que mida 6 pies de altura o más viene dada por

$$P(72 \leqslant x < \infty) = \int_{72}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-70)^2/18}\, dx$$

Utilice la calculadora para

a) Representar la función del integrando y convencerse de que el área entre el integrando y el eje x es 1.

b) Estimar $P(72 \leqslant x < \infty)$.

c) Aproximar $0{,}5 - P(70 \leqslant x \leqslant 72)$. Explicar, utilizando la gráfica del apartado *a*) por qué este resultado coincide con el de *b*).

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 71-74, averiguar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que confirme su falsedad.

71. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

72. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$

73. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^\infty f'(x)\,dx = -f(0)$.

74. Si la gráfica de f es simétrica respecto del origen o respecto del eje y, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ converge.

Ejercicios de repaso del Capítulo 7

En los Ejercicios 1 y 2, hallar la integral utilizando integración por partes.

1. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\,dx$ **2.** $\int (x^2 - 1)e^x\,dx$

En los Ejercicios 3-6, hallar la integral trigonométrica dada.

3. $\int \cos^3(\pi x - 1)\,dx$ **4.** $\int \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2}\,dx$

5. $\int \sec^4 \frac{x}{2}\,dx$ **6.** $\int \operatorname{tg}\theta \sec^4\theta\,d\theta$

En los Ejercicios 7 y 8, hallar la integral mediante sustitución trigonométrica.

7. $\int \frac{-12}{x^2\sqrt{4 - x^2}}\,dx$ **8.** $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\,dx,\ x > 3$

En los Ejercicios 9 y 10, hallar la integral utilizando descomposición en fracciones simples.

9. $\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$ **10.** $\int \frac{4x - 2}{3(x - 1)^2}\,dx$

En los Ejercicios 11-36, hallar la integral.

11. $\int \frac{x^2}{x^2 + 2x - 15}\,dx$ **12.** $\int \frac{3}{2x\sqrt{9x^2 - 1}}\,dx,\ x > \frac{1}{3}$

13. $\int \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}\,d\theta$ **14.** $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

15. $\int \frac{\ln(2x)}{x^2}\,dx$ **16.** $\int 2x\sqrt{2x - 3}\,dx$

17. $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$ **18.** $\int \frac{\sec^2\theta}{\operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}\theta - 1)}\,d\theta$

19. $\int \frac{3x^3 + 4x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$ **20.** $\int \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}}\,dx$

21. $\int \frac{16}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$ **22.** $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + 2\cos^2\theta}\,d\theta$

23. $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 8}\,dx$ **24.** $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\,dx$

25. $\int \theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,d\theta$ **26.** $\int \frac{\operatorname{cosec}\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}\,dx$

27. $\int (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2\,d\theta$

28. $\int \cos 2\theta\,(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2\,d\theta$

29. $\int \sqrt{1 + \cos x}\,dx$ **30.** $\int \ln\sqrt{x^2 - 1}\,dx$

31. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$ **32.** $\int \frac{x^4 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

33. $\int x \operatorname{arcsen} 2x\,dx$ **34.** $\int e^x \operatorname{arctg} e^x\,dx$

35. $\int \frac{x^{1/4}}{1 + x^{1/2}}\,dx$ **36.** $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx$

En los Ejercicios 37-46, usar integración simbólica para hallar la primitiva que pasa por el punto indicado. Representar la primitiva obtenida.

	Integral	*Punto*
37.	$\int \frac{x^4}{(x - 1)^3}\,dx$	$(2, 4)$
38.	$\int \frac{4x^2 - 1}{(2x)(x^2 + 2x + 1)}\,dx$	$(1, 0)$
39.	$\int \frac{6x^2 - 3x + 14}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}\,dx$	$(3, 2)$

Integral	*Punto*
40. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 6x^2 + x - 4}{1 - x^4}\,dx$	$(4, 1)$
41. $\displaystyle\int \frac{1}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}\,d\theta$	$(1, 1)$
42. $\displaystyle\int \frac{1}{\sec \theta - \operatorname{tg} \theta}\,d\theta$	$(\pi, 2)$
43. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}\,d\theta$	$(0, 0)$
44. $\displaystyle\int \frac{1}{3 - 2 \cos \theta}\,d\theta$	$(0, 0)$
45. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} \theta}{3 - 2 \cos \theta}\,d\theta$	$(0, 0)$
46. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}\,d\theta$	$(0, 1)$

En los Ejercicios 47-50, resolver la ecuación diferencial.

47. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9}{x^2 - 9}$ **48.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2x}$

49. $y' = \ln(x^2 + x)$ **50.** $y' = \sqrt{1 - \cos \theta}$

En los Ejercicios 51-54, hallar la integral por el método que se especifica.

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $x = 2/u$

52. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4 + x^2$

53. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4\ x^2$
c) Integración por partes: $dv = (x/\sqrt{4 + x^2})\,dx$

54. $\displaystyle\int x\sqrt{4 + x}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4 + x$
c) Sustitución: $u = 4 + x$
d) Integración por partes: $dv = \sqrt{4 + x}\,dx$

En los Ejercicios 55-60, calcular la integral definida y verificar el resultado usando integración en la calculadora.

55. $\displaystyle\int_2^{\sqrt{5}} x(x^2 - 4)^{3/2}\,dx$ **56.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x - 2)(x - 4)}\,dx$

57. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$ **58.** $\displaystyle\int_0^2 xe^{3x}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1 + x}}\,dx$

Área En los Ejercicios 61 y 62, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

61. $y = x\sqrt{4 - x},\ y = 0$

62. $y = \dfrac{1}{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$

En los Ejercicios 63 y 64, localizar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

63. $y = \sqrt{1 - x^2},\ y = 0$

64. $(x - 1)^2 + y^2 = 1,\ (x - 4)^2 + y^2 = 4$

En los Ejercicios 65 y 66, calcular la integral definida con dos cifras decimales exactas. ¿Cuáles requieren un método numérico o una calculadora para su evaluación?

65. *a)* $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

66. *a)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x^2\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos \sqrt{x}\,dx$

Longitud de arco En los Ejercicios 67 y 68, aproximar con dos cifras decimales la longitud de arco de la curva en el intervalo que se indica.

Función	*Intervalo*
67. $y = \operatorname{sen} x$	$[0, \pi]$
68. $y = \operatorname{sen}^2 x$	$[0, \pi]$

En los Ejercicios 69-76, calcular el límite aplicando la regla de L'Hôpital.

69. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\ln x)^2}{x - 1}$

70. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } \pi x}{\text{sen } 2\pi x}$

71. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

72. $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-x^2}$

73. $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{2/x}$

74. $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1)^{\ln x}$

75. $\lim\limits_{x \to \infty} 1.000\left(1 + \dfrac{0{,}09}{n}\right)^n$

76. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2}{\ln x} - \dfrac{2}{x - 1}\right)$

En los Ejercicios 77-80, analizar si es convergente la integral impropia y calcular las que lo sean.

77. $\displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\, dx$

78. $\displaystyle\int_0^1 \frac{6}{x - 1}\, dx$

79. $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2 \ln x\, dx$

80. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx$

81. ***Valor presente*** El consejo de administración de una empresa está calculando el precio a pagar por un negocio que se estima producirá un flujo continuo de beneficios de \$500.000 anuales. Si el dinero produce un 5 por 100 anual compuesto continuamente, ¿cuál es el valor presente de ese negocio

a) en 20 años?

b) a perpetuidad?

(*Nota:* El valor presente para t_0 años es

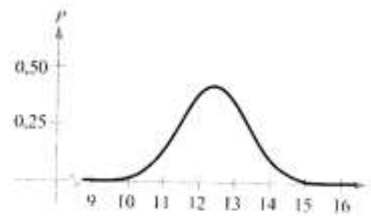
$$\int_0^{t_0} 500.000e^{-0{,}05t}\, dt.)$$

82. ***Volumen*** Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$, $y = 0$ y $x = 0$, al girar en torno al eje x.

83. ***Probabilidad*** La longitud media de varias especies de pájaros de la familia *Parulidae* en el este de los EE.UU. está distribuida normalmente, con buena aproximación, con una media de 12,9 cm y una desviación media de 0,95 cm (véase figura). La probabilidad de que uno de ellos, elegido al azar, mida entre a y b cm es

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \frac{1}{0{,}95\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-12{,}9)^2/2(0{,}95)^2}\, dx$$

Estimar con la calculadora la probabilidad de que uno de esos pájaros, escogido al azar, mida *a*) 13 cm o más, *b*) 15 cm o más. (*Fuente: Peterson's Field Guide: Eastern Birds.*)



84. ***Usando la desigualdad***

$$\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^{15}} < \frac{1}{x^5 - 1} < \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{2}{x^{15}}$$

para $x \geqslant 2$, aproximar $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^5 - 1}\, dx$

85. Verificar la fórmula de reducción

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$$

86. Verificar la fórmula de reducción

$$\int \text{tg}^n\, x\, dx = \frac{1}{n - 1}\, \text{tg}^{n-1}\, x - \int \text{tg}^{n-2}\, x\, dx$$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 87-90, averiguar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

87. $\displaystyle\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx = \int u\, du,\ u = \ln x^2$

88. Si $u = \sqrt[3]{3x + 1}$, entonces $dx = u^2\, du$

89. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^3}\, dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x}\, dx$

90. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ converge si $p > 1$

91. Probar que

$$\int_x^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1 + t^2}\, dt$$

calculando cada una de las integrales y utilizando después la identidad

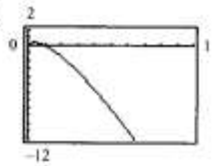
$$\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ x > 0$$

17. $n = 1: 0$
$n = 2: \frac{1}{2}$
$n \geqslant 3: \infty$

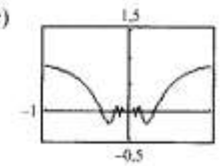
19. $\frac{2}{3}$ **21.** 1 **23.** $\frac{3}{2}$ **25.** ∞ **27.** 1 **29.** 0

31. *a)* $0 \cdot \infty$ *b)* 0 **33.** *a)* $0 \cdot \infty$ *b)* 1

c)

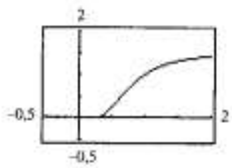


c)



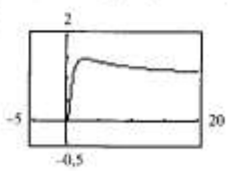
35. *a)* No es indeterminada *b)* 0

c)

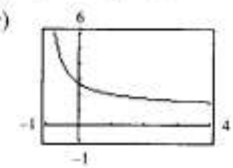


37. *a)* ∞^0 *b)* 1 **39.** *a)* 1^∞ *b)* e

c)

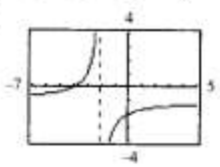


c)

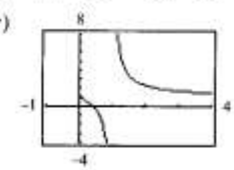


41. *a)* $\infty - \infty$ *b)* $-\frac{3}{2}$ **43.** *a)* $\infty - \infty$ *b)* ∞

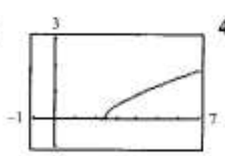
c)



c)

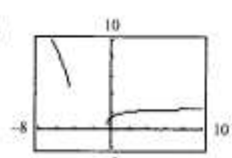


45. *a)*



b) $\frac{1}{2}$

47. *a)*



b) $\frac{5}{2}$

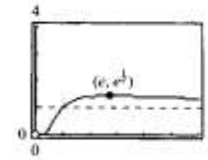
49. *a)* $f(x) = x^2 - 25$, $g(x) = x - 5$
b) $f(x) = (x - 5)^2$, $g(x) = x^2 - 25$
c) $f(x) = x^2 - 25$, $g(x) = (x - 5)^3$

51. 0 **53.** 0 **55.** 0

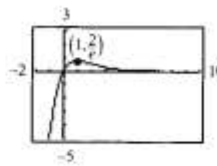
57.

x	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\frac{(\ln x)^4}{x}$	2,811	4,498	0,720	0,036	0,001	0,000

59. Asíntota horizontal: $y = 1$
Máximo relativo: $(e, e^{1/e})$



61. Asíntota horizontal: $y = 0$
Máximo relativo: $\left(1, \dfrac{2}{e}\right)$

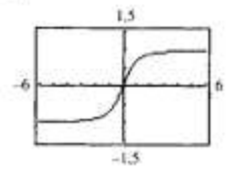


63. El límite no es de la forma 0/0 ni ∞/∞

65. El límite no es de la forma 0/0 ni ∞/∞

67. *a)* 1 **69.** $v = 32t + v_0$

c)



1

71. $\dfrac{3}{4}$ **73.** $c = \dfrac{2}{3}$ **75.** $c = \dfrac{\pi}{4}$

77. Falso: la regla de L'Hôpital no es aplicable porque $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x + 1) \neq 0$

78. Falso: $y' = \dfrac{e^x(x - 2)}{x^3}$ **79.** Verdadero

80. Falso: tomar $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$

81. *a)* $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ *b)* $\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta}$ *d)* $\frac{3}{4}$

Sección 7.8 *(página 612)*

1. Discontinuidad infinita en $x = 0$; 4

3. Discontinuidad infinita en $x = 1$; diverge

5. Límite de integración infinito; 1

7. Discontinuidad infinita en $x = 0$; diverge

9. Diverge **11.** 2 **13.** 1 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** π

19. $\dfrac{\pi}{4}$ **21.** Diverge **23.** Diverge

25. 6 **27.** $-\frac{1}{4}$ **29.** Diverge

31. $\ln(2+\sqrt{3})$ **33.** 0 **35.** $p > 1$

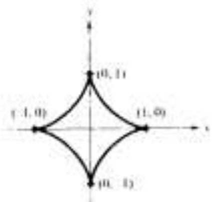
39. Diverge **41.** Converge **43.** Converge

45. Diverge **47.** Converge

49. $\dfrac{1}{s}$ **51.** $\dfrac{2}{s^3}$ **53.** $\dfrac{s}{s^2+a^2}$ **55.** $\dfrac{s}{s^2-a^2}$

57. *a)* 1 *b)* $\dfrac{\pi}{2}$ *c)* 2π

59.



Perímetro = 6

61. *a)* $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2$
c) $\Gamma(n) = (n-1)!$

63. *b)* $P = 43{,}53\%$ *c)* $E(x) = 7$

65. *a)* \$757.992,41 *b)* \$837.995,15
c) \$1.066.666,67

67. $\dfrac{k(\sqrt{a^2+1}-1)}{a^2\sqrt{a^2+1}}$

69. *a)* $\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{1}{24}$ *c)* $\frac{1}{60}$

71. Falso: considerar $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

72. Falso: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ diverge y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$

73. Verdadero **74.** Verdadero

Ejercicios de repaso del Capítulo 7 *(página 615)*

1. $\dfrac{e^{2x}}{13}(2\ \text{sen}\ 3x - 3\cos 3x) + C$

3. $\dfrac{1}{3\pi}\ \text{sen}\ (\pi x - 1)[\cos^2(\pi x - 1) + 2] + C$

5. $\dfrac{2}{3}\left[\text{tg}^3\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3\ \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] + C$ **7.** $\dfrac{3\sqrt{4-x^2}}{x} + C$

9. $\frac{1}{4}[6\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + 6\ \text{arctg}\ x] + C$

11. $x + \frac{9}{8}\ln|x-3| - \frac{25}{8}\ln|x+5| + C$

13. $\text{tg}\ \theta + \sec\theta + C$ **15.** $-\dfrac{1}{x}(1 + \ln 2x) + C$

17. $\dfrac{1}{2}\left(4\ \text{arcsen}\ \dfrac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2}\right) + C$

19. $\dfrac{3}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2(x^2+1)} + C$ **21.** $16\ \text{arcsen}\ \dfrac{x}{4} + C$

23. $\dfrac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - \text{arctg}\left(\dfrac{x+2}{2}\right) + C$

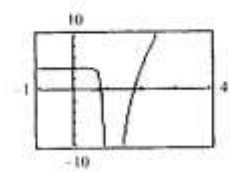
25. $\frac{1}{8}(\text{sen}\ 2\theta - 2\theta\cos 2\theta) + C$ **27.** $\frac{1}{2}(2\theta - \cos 2\theta) + C$

29. $2\sqrt{1-\cos x} + C$ **31.** $\text{sen}\ x \ln(\text{sen}\ x) - \text{sen}\ x + C$

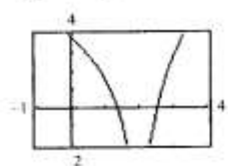
33. $\frac{1}{16}[(8x^2-1)\ \text{arcsen}\ 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}] + C$

35. $\frac{4}{3}[x^{3/4} - 3x^{1/4} + 3\ \text{arctg}\ (x^{1/4})] + C$

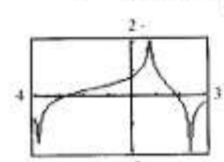
37. $y = 6\ln|x-1| - \dfrac{8x-7}{2(x-1)^2} + \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + \dfrac{1}{2}$



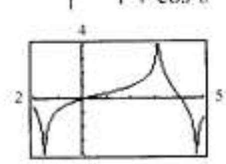
39. $y = \dfrac{1}{2}\ \text{arctg}\ \dfrac{x}{2} + \ln(x^2+4) + 4\ln|x-2| -$
$-\dfrac{1}{2}\ \text{arctg}\ \dfrac{3}{2} - \ln 13 + 2$



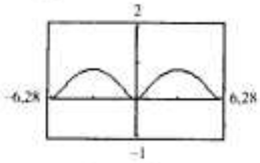
41. $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\dfrac{\cos\theta + \sqrt{5}(\text{sen}\ \theta - 1)}{\cos\theta - \sqrt{5}(\text{sen}\ \theta - 1)}\right| + 0{,}3$



43. $y = \ln\left|\dfrac{1 + \text{sen}\ \theta + \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right|$



45. $y = \frac{1}{2} \ln (3 - 2 \cos \theta)$



47. $y = \frac{3}{2} \ln \left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

49. $y = x \ln |x^2 + x| - 2x + \ln |x + 1| + C$

51. *a)* y *b)* $-\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + C$

53. *a)*, *b)* y *c)* $\frac{1}{3}\sqrt{4 + x^2}\,(x^2 - 8) + C$

55. $\frac{1}{3}$ **57.** $\frac{1}{2}(\ln 4)^2 \approx 0{,}961$ **59.** π

61. $\frac{128}{15}$ **63.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$

65. *a)* $e - 1 \approx 1{,}72$ *b)* 1
c) $\frac{1}{2}(e - 1) \approx 0{,}86$ *d)* 1,46 (regla de Simpson)

67. 3,82 **69.** 0 **71.** ∞ **73.** 1

75. $1.000e^{0,09} \approx 1.094{,}17$ **77.** Converge; $\frac{32}{3}$

79. Diverge

81. *a)* \$6.321.205,59 *b)* \$10.000.000

83. *a)* 0,4581 *b)* 0,0135

87. Falso: $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int (\ln x^2)\frac{2}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du$

88. Verdadero

89. Falso: $\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^3}\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\sqrt{1 - x}\,dx$

90. Verdadero

CAPÍTULO 8

Sección 8.1 *(página 629)*

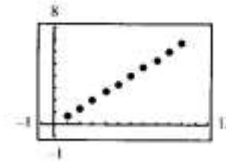
1. 2, 4, 8, 16, 32 **3.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$

5. $-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ **7.** $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{6}, \frac{81}{24}, \frac{243}{120}$

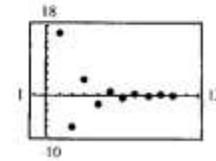
9. 3, 4, 6, 10, 18 **11.** 32, 16, 8, 4, 2 **13.** d

14. a **15.** c **16.** b

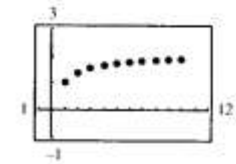
17.



19.



21.



23. 14, 17; sumar 3 al término precedente

25. $\frac{3}{16}, -\frac{3}{32}$; multiplicar por $-\frac{1}{2}$ el término precedente

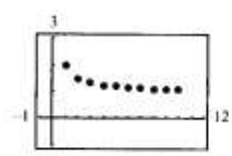
27. $10 \cdot 9$ **29.** $n + 1$ **31.** $\frac{1}{(2n+1)(2n)}$

33. $3n - 2$ **35.** $n^2 - 2$ **37.** $\frac{n+1}{n+2}$

39. $\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}$ **41.** $\frac{n+1}{n}$ **43.** $\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

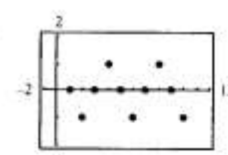
45. $\frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}2^n n!}{(2n)!}$

47.



Converge a 1

49.



Diverge

51. Diverge **53.** Converge a $\frac{3}{2}$ **55.** Converge a 0

57. Converge a 0 **59.** Diverge **61.** Converge a 0

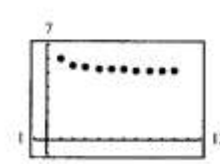
63. Converge a 0 **65.** Converge a e^k

67. Monótona, acotada **69.** No monótona, acotada

71. No monótona, acotada **73.** Monótona, acotada

75. No monótona, acotada

77. *b)*



Límite = 5