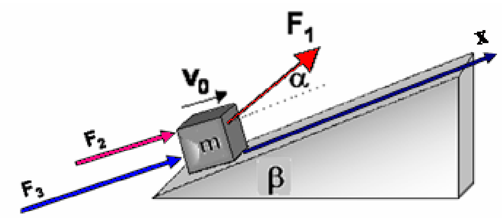
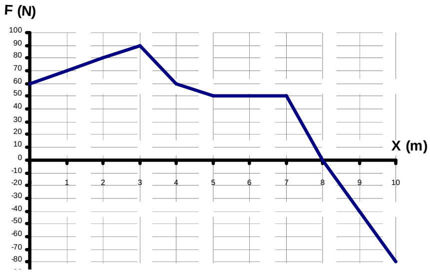
PROBLEMA: Un bloque de 12 kg se mueve con rapidez inicial v0 = 3 m/s a lo largo de un plano rugoso inclinado β = 37° en sentido ascendente, bajo la acción de tres fuerzas aplicadas. Una fuerza constante F1 de intensidad F1 = 60 N, que forma un ángulo $\alpha = 30°$ con la dirección del movimiento, una fuerza F2 que depende de la posición de acuerdo al gráfico F2=F2(x) que se muestra a continuación, y la fuerza F3 que varia con la posición F3=F3(x). El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano es $\mu_C = 0{,}25$.



$$\vec{F}_3 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2\right)\hat{i}\ \text{N}.$$



Para la situación planteada:

1. El trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el bloque entre las posiciones x= 0m a x = 10 m, es:
2. El valor de la energía cinética del bloque cuando pasa por la posición x = 10 m, es:
3. El valor de la rapidez del bloque cuando alcanza la posición x = 10 m, es:
4. Si en el justo momento de pasar por x=10m, las fuerzas F1, F2 y F3 dejan de actuar sobre el bloque, entonces se puede asegurar que el bloque se detiene después de desplazarse:

Para la solución de este problema haremos uso de los siguientes Conceptos, Leyes y Principios.

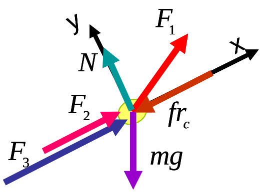
Leyes y Principios.	Conceptos	
✓ Leyes de Newton ✓ Teorema de superposición ✓ Teorema de trabajo y energía cinética	✓ Vector desplazamiento ✓ Fuerza ✓ Trabajo	✓ Energía cinética ✓ Diagrama de cuerpo libre ✓ Multiplicación de vectores (producto punto).

SOLUCIÓN:

1. EL TRABAJO REALIZADO POR TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL BLOQUE ENTRE LAS POSICIONES X = 0 m A X = 10m, ES:

La pregunta se refiere al trabajo neto sobre el bloque, para ello es necesario realizar un diagrama de cuerpo libre del bloque y ubicar TODAS las Fuerzas Externas que actúan sobre él:

D.C.L. Para el bloque



Luego el trabajo neto sería igual a la suma de cada uno de los trabajos realizados por las fuerzas externas, es decir:

$$\sum W_{0-10} = W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} + W_{\vec{F}_3} + W_{m\vec{g}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{fr}}$$

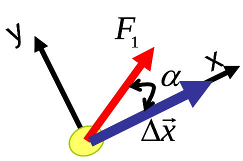
Cálculo del Trabajo realizado por F1

Como F1 es una fuerza constante el trabajo hecho por F1 es:

$$W_{\vec{F}} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{x}|\cos\theta$$

Dibujamos la partícula y ubicamos el vector fuerza y el vector desplazamiento, de tal modo que estén unidos por sus orígenes.

Para determinar el ángulo θ formado entre los vectores F y Δx, observamos que el vector fuerza y la horizontal forman un ángulo α. El desplazamiento ocurre en la dirección del eje x por lo tanto el ángulo formado entre los vectores fuerza y desplazamiento es α, lo que significa que $\theta=\alpha$.



Procedemos a calcular el trabajo hecho por F1, mientras el bloque se desplaza desde la posición x=0m hasta la posición x=10m:

$$W_{\vec{F}_1} = |\vec{F}_1|\,|\Delta\vec{x}|\cos\theta$$

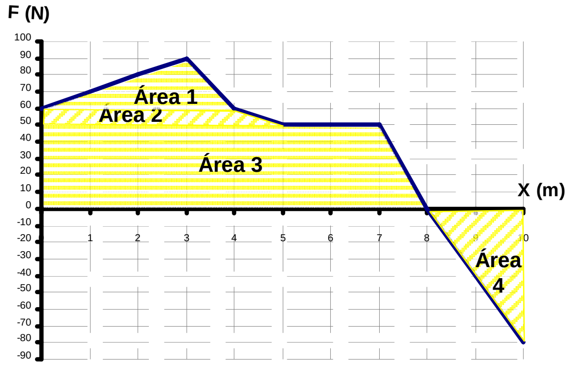
$$W_{\vec{F}_1} = |\vec{F}_1|\,|\Delta\vec{x}|\cos\alpha$$

$$W_{\vec{F}_1\,0-10} = |60|\,|10|\cos 30^{\circ}$$

$$W_{\vec{F}_1\,0-10} = 519{,}61\ \text{J}.$$

Cálculo del Trabajo realizado por F2

Observamos que F2 es una fuerza que varia con la posición y además contamos con la gráfica F2= F2(x), en este caso el área bajo la curva desde 0 a 10m, representa el trabajo realizado por F2 sobre el bloque.



Cálculo del área 1:

Área1=Área de un triángulo

$$\text{Área1} = \frac{b*h}{2} \Rightarrow \text{Área1} = \frac{(4*30)}{2} \Rightarrow \text{Área1} = 60$$

Cálculo del área 2:

Área2=Área de un trapecio

$$\text{Área2} = \frac{(B+b)*h}{2} \Rightarrow \text{Área2} = \frac{(5+4)*10}{2} \Rightarrow \text{Área2} = 45$$

Cálculo del área 3:

$$\text{Área3}=\frac{(B+b)*h}{2} \Rightarrow \text{Área3} = \frac{(7+8)*50}{2} \Rightarrow \text{Área3} = 375$$

Cálculo del área 4:

$$\text{Área4}=\frac{b*h}{2} \Rightarrow \text{Área4} = \frac{(-80)*2}{2} \Rightarrow \text{Área4} = -80$$

Luego el trabajo hecho por F2, mientras el bloque se desplaza 10m es:

$$W_{\vec{F}2\ 0-10} = \text{Área1} + \text{Área2} + \text{Área3} + \text{Área4}$$

$$W_{\vec{F}} = 60+45+375-80 \Rightarrow W_{\vec{F}} = 400 \text{ J.}$$

Cálculo del Trabajo realizado por F3

Observamos que F3 es una fuerza que varia con la posición por lo que el trabajo realizado por F3 sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m es:

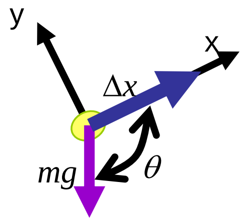
$$W_{\vec{F}_3\ 0-10} = \int \vec{F}_3 . d\,\vec{r} = \int \vec{F}_{3_x} . d\,x + \int \vec{F}_{3_y} . d\,y \Rightarrow W_{\vec{F}_3\ 0-10} = \int_0^{10} \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 \right) dx \Rightarrow W_{\vec{F}_2\ 0-10} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 \Big|_0^{10}$$

$$W_{\vec{F}_3\ 0-10} = \frac{1}{6}(10)^2 + \frac{1}{12}(10)^3 - \left(\frac{1}{6}(0)^2 + \frac{1}{12}(0)^3 \right) \Rightarrow W_{\vec{F}_3\ 0-10} = 100 \text{ J}$$

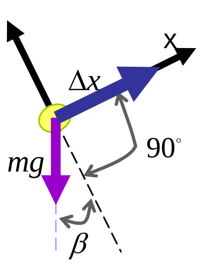
Cálculo del Trabajo realizado por mg

Para determinar el trabajo realizado por mg sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m, lo hacemos a partir de la definición de producto punto ya que el peso (mg) es una fuerza constante.

Ubicamos en la partícula los vectores Fuerza y Δx.



Procedemos a determinar el ángulo (θ) formado entre los vectores fuerza (mg) y desplazamiento (Δx) observemos que los vectores están dibujados de tal modo que quedan unidos por sus orígenes.



Ángulo (θ) formado entre los vectores fuerza (mg) y desplazamiento (Δx) es:

$\theta = 90^\circ + \beta \;\Rightarrow\; \theta = 90^\circ + 37^\circ$

$\theta = 127^\circ$

Luego el trabajo realizado por mg sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m es:

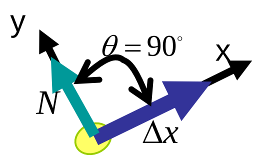
$$W_{m\vec{g}} = |m\vec{g}|\,|\Delta\vec{x}| \cos\theta \Rightarrow W_{m\vec{g}} = |m\vec{g}|\,|\Delta\vec{x}| \cos 127^\circ$$

$$W_{m\vec{g}\ 0-10} = |12*(-9,8)|\,|10| \cos 127^\circ \Rightarrow W_{m\vec{g}\ 0-10} = -707,73 \text{ J.}$$

Cálculo del Trabajo realizado por N

Para determinar el trabajo realizado por N sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m, lo hacemos a partir de la definición de producto punto ya que la fuerza normal es una fuerza constante.

Ubicamos en la partícula los vectores F y Δx.



Observamos que el ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento es de 90º.

Por lo tanto la fuerza normal no realiza ningún trabajo sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m.

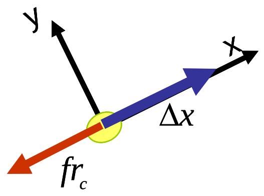
$$W_N = |N|\,|\Delta\vec{x}| \cos 90^\circ$$

$$W_N = 0 \; J.$$

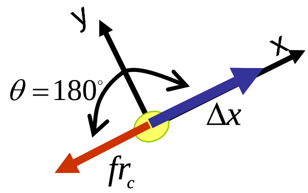
Cálculo del Trabajo realizado por la fuerza de roce

Para determinar el trabajo realizado por fr_c sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m, lo hacemos a partir de la definición de producto punto ya que esta fuerza es una fuerza constante.

Ubicamos en la partícula los vectores F y Δx.



Observamos que el ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento es de 180º.



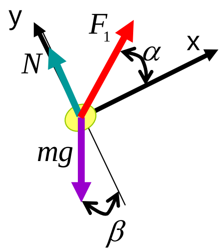
El trabajo hecho por la fuerza de roce sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m lo determinamos como:

$$W_{fr_c} = |fr_c|\,|\Delta\vec{x}|\cos\theta$$

$$W_{fr_c} = |fr_c|\,|\Delta\vec{x}|\cos 180^o$$

$$W_{fr_c\ 0-10} = |\mu_c N|\,|10|\cos 180^o$$

Para determinar el Trabajo realizado por la fuerza de roce, es necesario determinar el valor de la fuerza normal:



Cálculo de la fuerza Normal (N):

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$N + F_1 Sen\alpha - mgCos\beta = 0$$

$$N = mgCos\beta - F_1 Sen\alpha$$

$$N = 12*9{,}8Cos37^o - 60Sen30^o$$

$$N = 63{,}92 \text{ N.}$$

Por lo tanto el trabajo hecho por la fuerza de roce es:

$$W_{fr_c} = |fr_c|\,|\Delta\vec{x}|\cos\theta \Rightarrow W_{fr_c} = |fr_c|\,|\Delta\vec{x}|\cos 180^o$$

$$W_{fr_c\ 0-10} = |\mu_c N|\,|10|\cos 180^o$$

$$W_{fr_c\ 0-10} = |0{,}25*63{,}92|\,|10|\cos 180^o$$

$$W_{fr_c\ 0-10} = -159{,}8 \text{ J.}$$

Finalmente, el trabajo hecho por todas las fuerzas externas sobre el bloque mientras éste se desplaza 10m es:

$$\sum W_{0-10} = W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} + W_{\vec{F}_3} + W_{m\vec{g}} + W_N + W_{fr_c}$$

$$\sum W_{0-10} = 519{,}61 + 400 + 100 - 707{,}73 + 0 - 159{,}8$$

$$\sum W_{0-10} = 152{,}08 \text{ J.}$$

2. EL VALOR DE LA ENERGÍA CINÉTICA DEL BLOQUE CUANDO PASA POR X =10 m, ES:

Para determinar el valor de energía cinética cuando el bloque pasa por la posición x=10m hacemos uso del teorema de trabajo y energía cinética: $\sum W_{0-10} = K_{x=10} - K_{x=0}$

Donde:

$\sum W_{0-10}$ Es el trabajo neto sobre el bloque, mientras éste se desplaza desde x=0m hasta x=10m.

En este caso su valor fue calculado en la pregunta anterior:

$$\sum W_{0-10} = 152{,}08 \text{ J.}$$

$K_{x=0m}$ Es La energía cinética que tiene el bloque cuando se encuentra en la posición x=0m, corresponde a la energía cinética inicial y la determinamos a partir de la expresión:

$$K = \frac{1}{2}m(v)^2$$

Se nos dice que inicialmente el bloque se mueve con una rapidez de 3m/s, por lo que podemos determinar el valor de la energía cinética inicial:

$$K_{x=0} = \frac{1}{2}m*(v_{x=0})^2$$

$$K_{x=0} = \frac{1}{2}12*(3)^2 \Rightarrow K_{x=0} = 54 \text{ J.}$$

$K_{x=10}$ Es La energía cinética que tiene el bloque cuando se encuentra en la posición x=0m

Despejando del teorema de trabajo y energía cinética, tenemos:

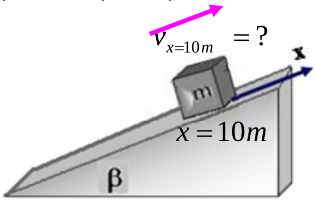
$$K_{x=10} = \sum W_{0-10} + K_{x=0}$$

$$K_{x=10} = 152{,}08 + 54$$

$$\boxed{K_{x=10} = 206{,}08 \text{ J.}}$$

3. EL VALOR DE LA RAPIDEZ DEL BLOQUE CUANDO ALCANZA LA POSICIÓN X =10 m, ES:

Recordamos que en la pregunta anterior calculamos la energía cinética del bloque justo cuando pasa por la posición x=10m, a partir de este valor y de la definición de energía cinética determinamos la rapidez del bloque cuando éste pasando por la posición x=10m.



La energía cinética que tiene el bloque cuando se encuentra en la posición x=10m, es:

$$K_{x=10} = \frac{1}{2} m * (v_{x=10})^2$$

Cálculo de la rapidez del bloque cuando se encuentra en la posición x=10m:
Despejando la rapidez a partir de la ecuación de energía cinética:

$$v_{x=10} = \sqrt{\frac{2K_{x=10}}{m}} \Rightarrow v_{x=10} = \sqrt{\frac{2*206{,}08}{12}}$$

$$v_{x=10} = 5{,}86 \;\; m/s$$

4. SI EN EL JUSTO MOMENTO DE PASAR POR x=10m, LAS FUERZAS F1, F2 Y F3 DEJAN DE ACTUAR SOBRE EL BLOQUE. ENTONCES SE PUEDE ASEGURAR QUE EL BLOQUE SE DETIENE DESPUÉS DE DESPLAZARSE:

Para la situación planteada conocemos la energía cinética del bloque justo cuando pasa por la posición X=10m y se nos esta diciendo que justo cuando el bloque se desplaza X metros se detiene es decir que justo en ese momento la energía cinética del bloque es cero. Por lo tanto conocemos la energía cinética inicial y la energía cinética final, entonces podemos afirmar que:

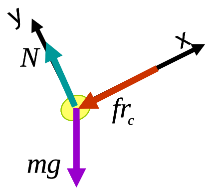
$$\Delta K_{10-X} = \underbrace{K_X}_{\substack{\text{es cero porque} \\ \text{su rapidez final} \\ \text{es cero}}} - K_{x=10} \Rightarrow \Delta K_{10-X} = -K_{x=10}$$

$$\Delta K_{10-X} = -206{,}08 \text{ J.}$$

Luego, el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el bloque provoca un cambio en su energía cinética, entonces a partir del teorema de trabajo y energía cinética podemos afirmar que:

$$\sum W_{10-X} = \Delta K_{10-X} \Rightarrow \sum W_{10-X} = -206{,}08 \text{ J.}$$

Para determinar el trabajo neto sobre el bloque mientras éste se desplaza a partir de la posición x=10m una distancia X realizamos un diagrama de cuerpo libre del bloque a fin de ubicar TODAS las Fuerzas Externas que actúan sobre éste mientras se desplaza:



Luego el trabajo neto será igual a la suma de cada uno de los trabajos realizados por las fuerzas externas, es decir:

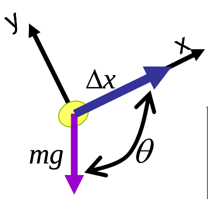
$$\sum W_{10-X} = W_{m\vec{g}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{fr}}$$

$$\sum W_{10-X} = W_{m\vec{g}} + W_{\vec{fr}} = -206{,}08 \; J.$$

Cálculo del Trabajo realizado por mg

Para determinar el trabajo realizado por mg sobre el bloque mientras éste se desplaza X m, lo hacemos a partir de la definición de producto punto ya que el peso (mg) es una fuerza constante.

$$W_{m\vec{g}} = |m\vec{g}|\,|\Delta\vec{x}| \cos\theta$$



Procedemos a determinar el ángulo (θ) formado entre los vectores fuerza (mg) y desplazamiento (Δx) :

$\theta = 90^\circ + \beta \;\; \Rightarrow \; \theta = 90^\circ + 37^o \Rightarrow \theta = 127^o$

Luego el trabajo realizado por mg sobre el bloque mientras éste se desplaza Xm es:

$$W_{m\vec{g}} = |m\vec{g}|\,|\Delta\vec{x}| \cos\theta \Rightarrow W_{m\vec{g}} = |m\vec{g}|\,|\Delta\vec{x}| \cos 127^o$$

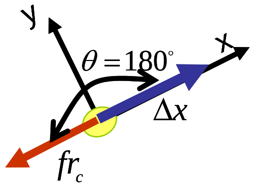
$$W_{m\vec{g}_{10-X}} = |12*(-9{,}8)|\,|X| \cos 127$$

$$W_{m\vec{g}_{10-X}} = -70{,}77X \quad \text{J.}$$

Cálculo del Trabajo realizado por la fuerza de roce

Para determinar el trabajo realizado por frc sobre el bloque mientras éste se desplaza Xm, lo hacemos a partir de la definición de producto punto ya que esta fuerza es una fuerza constante.

$$W_{fr_C} = |fr_C|\,|\Delta\vec{x}|\cos\theta$$



Observamos que el ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento es de 180º. $\theta = 180^{\circ}$

Luego el trabajo realizado por mg sobre el bloque mientras éste se desplaza Xm es:

$$W_{fr_c} = |fr_c|\,|\Delta\vec{x}|\cos 180^{\circ}$$

$$W_{fr_c\ 10-X} = |\mu_c N|\,|10|\cos 180^{\circ}$$

$$W_{fr_c\ 10-X} = |\mu_c \times mg\cos 37^{\circ}|\,|\Delta\vec{x}|\cos 180^{\circ}$$

$$W_{fr_c\ 10-X} = |0,25 * 12 * 9,8 * \cos 37^{\circ}|\,|X|\cos 180^{\circ}$$

$$W_{fr_c\ 10-X} = -23,48X \quad \text{J.}$$

Finalmente, el trabajo hecho por todas las fuerzas externas sobre el bloque mientras éste se desplaza desde la posición x=10m hasta que se detiene es:

$$\sum W_{10-X} = W_{m\vec{g}} + W_{fr_c}$$

$$\sum W_{10-X} = -70,77X - 23,48\ X$$

$$\sum W_{10-X} = -94,25X \quad \text{J.}$$

Y por el teorema de trabajo y energía cinética, podemos afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el bloque es:

$$\sum W_{10-X} = -206,08\ J.$$

Cuando despejamos X, podemos afirmar que el bloque se detiene después de desplazarse:

$$X = \frac{-206,08}{-94,25} \Rightarrow X = 2,19\ \text{m.}$$