Capítulo 2

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1er. Orden

Se entiende por *ecuación diferencial* cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Muchas leyes de la naturaleza, en física, en química, biología o astronomía, encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Son asimismo abundantes sus aplicaciones en la propia matemática, especialmente en geometría, y también en ingeniería, economía, y en otros muchos campos de las ciencias aplicadas.

Es fácil comprender la razón que se oculta tras una amplia gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. Recordemos que si $y = f(x)$ es una función dada, su derivada se puede interpretar como el *ritmo de cambio* de y con respecto a x. En cualquier proceso natural, las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionadas entre sí por medio de los principios científicos básicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en símbolos matemáticos, el resultado es con frecuencia una ecuación diferencial.

Siguiendo el contenido programatico de la unidad curricular Matemática IV de la UNET, sólo estudiaremos las siguientes aplicaciones: *Crecimiento/Descomposición de poblaciones, la Ley de Enfriamiento de Newton* y *Mezclas*.

2.1 Crecimiento/Descomposición

¿Cómo predecir el crecimiento o la descomposición de una población?

Si estamos interesados en una sola población, se puede considerar que las especies están contenidas en un compartimiento (una caja, una isla, un país, etc.) y estudiar el proceso de crecimiento o descomposición como un sistema de un compartimiento.

Supongamos que se colocan x_0 bacterias en una solución nutriente en el instante $t = t_0$ y que $x = x(t)$ es la población del cultivo en el instante t. Si el alimento y el espacio son ilimitados, y si como consecuencia la población crece en todo momento a un *ritmo proporcional a la población presente en ese momento*, hallar la población en cada momento.

Como mencionamos unas líneas arriba, un modelo matemático para este tipo de problema es plantear un problema de valor inicial, el cual viene dado por

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

donde k es la *constante de proporcionalidad*. Si $k > 0$ la población esta creciendo, mientras que si $k < 0$ la población se esta descomponiendo.

Observemos que la ecuación diferencial en (2.1) es a variables separables, pues

$$\frac{dx}{x} = kdt,$$

al integrar, resulta que $\ln(x) = kt + c$, despejando se obtiene que la solución general de dicha ecuación diferencial es

$$\boxed{x = x(t) = e^{kt+c} = \alpha e^{kt}}.$$

Como $x(t_0) = x_0$, se tiene que $\alpha = x_0$. Por tanto la solución particular del pvi dado es

$$\boxed{x_p(t) = x_0 e^{kt}}.$$

Este tipo de modelo matemático, también sirve para representar: *desintegración radiactiva, temperatura de cuerpos*, entre otros.

Algunos ejemplos resueltos, nos aclaran la situación.

Ejemplo 50.

La tasa de crecimiento de una población x en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si transcurrido el segundo día hay 180 individuos y 300 individuos transcurrido el cuarto día. ¿Cuántos individuos habían inicialmente?

<u>**Solución**</u>

En primer lugar definamos las variables que intervienen. Sean

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \text{ variable independiente } = \text{ tiempo en días,} \\ x = x(t) &\rightarrow \text{ variable dependiente } = \text{ población en cada instante } t. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el problema es

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

y las condiciones dadas son: $x(2) = 180$ y $x(4) = 300$. La interrogante en el problema es: $x(0) = ?$.

Al separar las variables en la ecuación diferencial planteada, integrar y despejar, se obtiene la solución general

$$\boxed{x(t) = \alpha e^{kt}}.$$

Ya que:

$$\begin{aligned} x(2) &= 180 \quad \text{implica que} \quad \alpha e^{2k} = 180 \\ y \\ x(4) &= 300 \quad \text{implica que} \quad \alpha e^{4k} = 300, \end{aligned}$$

luego

$$e^{2k} = \frac{5}{3} \qquad \text{ó} \qquad k = \ln\sqrt{5/3},$$

y

$$\alpha = \frac{180}{e^{2k}} = \frac{180}{5/3} = 108,$$

por lo que la solución particular del problema es $\boxed{x_p(t) = 108e^{\left(\ln\sqrt{5/3}\right)t}}$.

Finalmente en el instante $t = 0$, es decir, inicialmente hay

$$x_p(0) = 108e^{\left(\ln\sqrt{5/3}\right)0} = 108 \text{ individuos.}$$

Ejemplo 51.

La población de una comunidad crece con una tasa proporcional a la población presente en cualquier instante. Inicialmente hay 500 habitantes y aumenta el 15% en diez años. ¿Cuál será la población a los treinta años?

Solución

Sean

$$\begin{aligned} t \quad &\to \quad \text{variable independiente} \;=\; \text{tiempo en días}, \\ x = x(t) \quad &\to \quad \text{variable dependiente} \;=\; \text{población en } t. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el problema es

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

la condición inicial es $x(0) = x_0 = 500$ habitantes. Cuando han transcurrido 10 años se tiene que $x(10) = 15\% x_0 + x_0 = 575$ habitantes.

De manera similar que el ejemplo anterior, debemos hallar en primera instancia la solución general de la ecuación diferencial, la cual se obtiene separando variables, integrando y despejando

$$\boxed{x(t) = \alpha e^{kt}}.$$

Como

$$x(0) = 500 \quad \text{entonces} \quad \alpha = 500 \quad \text{y así} \quad x(t) = 500e^{kt} = 500\left(e^{k}\right)^{t}.$$

Además, puesto que $x(10) = 575$ resulta que $e^{10k} = 23/20$, por lo que

$$e^{k} = \left(\frac{23}{20}\right)^{1/10} \qquad \text{ó} \qquad k = \frac{1}{10}\ln(23/20).$$

Por consiguiente, la solución particular del pvi, es

$$\boxed{x_p(t) = 500\left(\frac{23}{20}\right)^{t/10}}.$$

Y así, $x(30) = 500\left(\frac{23}{20}\right)^{3} \approx 760.44$. Es decir, cuando han transcurrido 30 años la población es de 760, en otras palabras la población aumento el 52 $\%$ al transcurrir 30 años.

Ejemplo 52.

Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una tasa proporcional a la población presente en cualquier instante. Si la población se duplicó en cinco años. ¿En cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

Solución

Sean

$$\begin{aligned} t \quad &\to \quad \text{variable independiente} \;=\; \text{tiempo en años}, \\ x = x(t) \quad &\to \quad \text{variable dependiente} \;=\; \text{población en } t. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el problema es

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

la condición inicial es $x(0) = x_0$ habitantes. Adicionalmente se tiene que $x(5) = 2x_0$ habitantes.

Las interrogantes son: determinar el tiempo t que debe transcurrir para que

$$x(t) = 3x_0 \qquad \text{ó} \qquad x(t) = 4x_0$$

La solución general de la ecuación diferencial, la cual se obtiene separando variables, integrando y despejando, es

$$\boxed{x(t) = \alpha e^{kt} = \alpha\left(e^k\right)^t}.$$

Como

$$x(0) = x_0 \quad \text{entonces} \quad \alpha = x_0 \quad \text{y así} \quad x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Además, puesto que $x(5) = 2x_0$ resulta que $2x_0 = x_0 e^{5k}$, por lo que

$$e^{5k} = 2 \qquad \text{ó} \qquad e^k = 2^{1/5} \qquad \text{ó} \qquad k = \frac{\ln(2)}{5}.$$

Por consiguiente, la solución particular del pvi, es

$$\boxed{x_p(t) = x_0 e^{\frac{\ln(2)\,t}{5}}} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{x_p(t) = x_0 2^{t/5}}.$$

Ahora

$$3x_0 = x_p(t) = x_0 2^{t/5} \quad \text{ó} \quad 2^{t/5} = 3 \quad \text{ó} \quad t = \frac{5\ln(3)}{\ln(2)} \approx 7,924.$$

Esto nos dice que deben transcurrir 7,924 años para que la población se triplique y procediendo de manera similar, se obtiene que al cabo de 10 años la población se cuadruplica.

Ejemplo 53.

Si la mitad de cierta cantidad de radio se desintegra[a] en 1600 años, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 2400 años?,¿y de 8000 años?,

[a]**Periodo Medio.** En física, el periodo medio es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. Es, simplemente, el tiempo que transcurre para que se desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial, x_0, y se conviertan en átomos de otro elemento. Mientras mayor sea su semivida, más estable es una sustancia; por ejemplo, la semivida del radio Ra-226, muy radiactivo, es unos 1700 años. En ese lapso, la mitad de determinada cantidad de Ra-226 se transmuta y forma radón, Rn-222. El isótopo más común del uranio, el U-238, tiene periodo medio de 4500 millones de años. Es el tiempo que tarda en transmutarse la mitad de una cantidad de U-238 en plomo 206.

Solución

Sean

$$\begin{aligned} t &\to \text{variable independiente} = \text{tiempo en años}, \\ x = x(t) &\to \text{variable dependiente} = \text{cantidad de radio en } t. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el problema es

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

asumamos que inicialmente (condición inicial) hay una cantidad de x_0 de radio; es decir, $x(0) = x_0$. Adicionalmente se tiene que $x(1600) = x_0/2$.

Las interrogantes son:

$$x(2400) = ?; \qquad x(8000) = ?.$$

La solución general de la ecuación diferencial, la cual se obtiene separando variables, integrando y despejando, es

$$\boxed{x(t) = \alpha e^{kt} = \alpha\left(e^k\right)^t}.$$

Como

$$x(0) = x_0 \quad \text{entonces} \quad \alpha = x_0$$

Además, puesto que $x(1600) = x_0/2$ resulta que $x_0/2 = x_0 e^{1600k}$, por lo que

$$e^{1600k} = 1/2 \qquad \text{ó} \qquad e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1600}.$$

En consecuencia, la solución particular del pvi, es

$$\boxed{x_p(t) = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}}.$$

Luego

$$x_p(2400) = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{2400/1600} = \frac{\sqrt{2}\,x_0}{4}.$$

Esta cantidad de radio que permanece al cabo de 2400 años representa el 35,3553 $\%$ de la cantidad original, y

$$x(8000) = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{8000/1600} = \frac{x_0}{32},$$

es decir, permanece aproximadamente el 3,125 $\%$ del radio original al transcurrir 8000 años.

Ejemplo 54.

La rapidez con la que se desintegran núcleos radiactivos es proporcional al número de núcleos que están presentes en una muestra dada. La mitad del número original de núcleos radiactivos ha experimentado la desintegración en un periodo de 1500 años. ¿Qué porcentaje de núcleos radiactivos originales continuarán después de 4500 años?, ¿En cuántos años quedará solamente un décimo del número original?

<u>Solución</u>

Sean

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \text{ variable independiente } = \text{ tiempo en años,} \\ x = x(t) &\rightarrow \text{ variable dependiente } = \text{ número de núcleos radiact. en } t. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el problema es

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

con $x(0) = x_0$ y $x(1500) = x_0/2$.

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{x(t) = \alpha e^{kt}}.$$

Como

$$x(0) = x_0 \quad \text{entonces} \quad \alpha = x_0$$

Además, puesto que $x(1500) = x_0/2$ resulta que $e^k = (1/2)^{1/1500}$, por lo que la solución particular del pvi, es

$$\boxed{x_p(t) = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1500}}.$$

Cuando han trancurrido 4500 años se tiene que

$$x_p(4500) = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{4500/1500} = \frac{x_0}{8}\,.$$

Es decir, que un octavo o el 12,5 $\%$ del número de radiactivos originales quedará después de 4500 años.

Finalmente

$$\begin{aligned}\frac{x_0}{10} = \quad x(t_1) \quad &= x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t_1/1500} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1/1500} = \frac{1}{10} \\ \Longleftrightarrow \quad t_1 &= 1500\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 4985 \text{ años.}\end{aligned}$$

2.2 Ley de Enfriamiento de Newton

Esta ley[1] afirma que:

"*En un cuerpo que se está enfriando, la rápidez con que la temperatura del cuerpo cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea*".

En otras palabras, si $T = T(t)$ es la temperatura del cuerpo, T_A es la temperatura del medio que rodea al cuerpo y K es la constante de proporcionalidad, entonces

$$\frac{dT}{dt} = K\big(T - T_A\big). \tag{2.2}$$

Observación 55.

Como suponemos que el cuerpo se enfria, se debe cumplir que $T > T_A$; en consecuencia, lo lógico es que $K < 0$.

Ejemplos resueltos, que nos permiten ilustrar esta ley.

[1] Newton aplicó esta ley para estimar la temperatura de una bola de hierro al rojo vivo. Se conocía tan poco sobre las leyes de trasmisión del calor en ese tiempo que este resultado, no siendo sino una aproximación grosera, mejoraba cuanto se sabía hasta entonces.

Ejemplo 56.

Una bola de cobre se calienta hasta una temperatura de 100 °C. Después, en el instante $t = 0$, se coloca en un recipiente con agua que se mantiene a una temperatura de 30 °C. Al término de tres minutos la temperatura de la bola es 70 °C. ¿En qué tiempo la temperatura de la bola es 31 °C?.

Solución

Sean

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \text{ variable independiente } = \text{ tiempo en minutos,} \\ T = T(t) &\rightarrow \text{ variable dependiente } = \text{ temperatura de la bola de cobre en } t, \\ T_A &= 30\,^\circ\text{ C.} \end{aligned}$$

Los datos iniciales son: $T(0) = 100°\text{C}$ y $T(3) = 70°\text{C}$.

La interrogante es: determinar un tiempo t_1 de tal manera que en ese instante

$$T(t_1) = 31^\circ\text{ C.}$$

La ecuación diferencial que modela el problema es dada por la ley del enfriamiento de Newton, es decir

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 30).$$

Esta ecuación diferencial es a variables separables. La solución general se determina, separando las variables, integrando y despejando, lo que produce

$$\boxed{T(t) = \alpha e^{Kt} + 30}.$$

Como

$$\begin{aligned} T(0) &= 100 \quad \text{entonces} \quad \alpha = 70 \quad \text{y} \\ T(3) &= 70 \quad \text{implica que} \quad e^{3K} = \frac{4}{7} \\ \text{ó} \quad e^K &= \left(\frac{4}{7}\right)^{1/3}, \end{aligned}$$

por lo que la solución particular del problema es:

$$\boxed{T_p(t) = 70\left(\frac{4}{7}\right)^{t/3} + 30}.$$

Por tanto,

$$T(t_1) = 31 \iff 70\left(\frac{4}{7}\right)^{t_1/3} + 30 = 31 \iff \left(\frac{4}{7}\right)^{t_1/3} = \frac{1}{70}$$
$$\iff t_1 = \frac{3\ln(1/70)}{\ln(4/7)} \approx 22,7754,$$

es decir, al cabo de 22,7754 minutos la temperatura de la bola es de 31°C.

Ejemplo 57.

Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es 70°F y se lleva al exterior, donde la temperatura es 10°F. Pasado treinta segundos el termómetro indica 50°F.¿Cuál es la lectura cuando ha transcurrido un minuto? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a 15°F?.

<u>Solución</u>

Sean

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \text{ variable independiente } = \text{ tiempo en segundos,} \\ T = T(t) &\rightarrow \text{ variable dependiente } = \text{ temperatura del termómetro en } t, \\ T_A &= 10\,^\circ\text{ C.} \end{aligned}$$

Los datos iniciales son: $T(0) = 70°\text{C}$ y $T(30) = 50°\text{C}$.

Las interrogantes son: determinar la temperatura del termómetro al cabo de un minuto y determinar el tiempo necesario para que el termómetro indique 15°F, esto es

$$T(60) = \ ? \qquad \text{y} \qquad t_1 = \ ? \quad \text{tal que} \quad T(t_1) = 15.$$

La ecuación diferencial que modela el problema es dada por la ley del enfriamiento de Newton, es decir

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 10).$$

Esta ecuación diferencial es a variables separables. La solución general se determina, separando las variables, integrando y despejando, lo que produce

$$\boxed{T(t) = \alpha e^{Kt} + 10}.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} T(0) &= 70 \qquad \text{entonces} \quad \alpha = 60 \quad \text{y} \\ T(30) &= 50 \qquad \text{implica que} \quad e^{30K} = \frac{2}{3} \\ \text{ó} \quad e^{K} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/30}, \end{aligned}$$

por lo que la solución particular del problema es:

$$\boxed{T_p(t) = 60\left(\frac{2}{3}\right)^{t/30} + 10}.$$

Por tanto,

$$T(60) = 60\left(\frac{2}{3}\right)^{60/30} + 10 = \frac{110}{3} \approx 36,6°\text{F},$$

y

$$15 = T(t_1) \iff 60\left(\frac{2}{3}\right)^{t_1/30} + 10 = 15 \iff \left(\frac{2}{3}\right)^{t_1/30} = \frac{1}{12}$$

por lo que $t_1 = \dfrac{-30\ln(12)}{\ln(2/3)} \approx 183,6$ segundos ≈ 3.06 minutos.

Ejemplo 58.

¿Cuánto debe mantenerse un pastel en un horno a 250°F para pasar de 70°F a 179°F, si en otro horno a 350°F, duró exactamente 30 minutos?.

Solución

Sean

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \text{ variable independiente } = \text{ tiempo en minutos,} \\ T = T(t) &\rightarrow \text{ variable dependiente } = \text{ temperatura del termómetro en } t, \\ T_{A_1} &= 250\,°\,\text{F}, \\ T_{A_2} &= 350\,°\,\text{F}. \end{aligned}$$

La interrogante es: determinar el tiempo t_1 que debe transcurrir para que la temperatura del pastel en el horno uno pase de 70°F a 170°F, es decir es

$$t_1 = \ ? \qquad \text{para que} \quad T = 70 \longrightarrow T = 170.$$

La ecuación diferencial que modela el problema es dada por la ley del enfriamiento de Newton, es decir

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_A).$$

Esta ecuación diferencial es a variables separables. La solución general se determina, separando las variables, integrando y despejando, lo que produce

$$\boxed{T(t) = \alpha e^{Kt} + T_A}.$$

En este problema como tenemos más información relacionada con el horno dos, realizamos la integral definida de la ecuación diferencial, esto es

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{T-350} = K dt \quad & \Longleftrightarrow \quad \int_{70}^{170} \frac{dT}{T-350} = \int_0^{30} K dt \\
& \Longleftrightarrow \quad \ln \left| T - 350 \right|_{70}^{170} = K \cdot t \Big|_0^{30} \\
& \Longleftrightarrow \quad K = \ln \left(9/14\right)^{1/30} \approx 0,03333.
\end{aligned}
$$

De aqui obtenemos el valor de la constante de proporcionalidad y asumiendo que es la misma constante de proporcionalidad si trabajamos en el horno uno, resulta que al integrar de nuevo definidamente pero con datos del horno uno, se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{T-250} = K dt \quad & \Longleftrightarrow \quad \int_{70}^{170} \frac{dT}{T-350} = \ln \left(9/14\right)^{1/30} \int_0^{t_1} dt \\
& \Longleftrightarrow \quad \ln \left| T - 250 \right|_{70}^{170} = \ln \left(9/14\right)^{1/30} \cdot t \Big|_0^{t_1} \\
& \Longleftrightarrow \quad t_1 = \left(\frac{\ln(4/9)}{\ln(9/14)} \right)^{1/30} \approx 1,0204.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 59.

Por razones obvias, la sala de disección de un forense se mantiene fria a una temperatura constante de 5°C. Mientras se encontraba realizando la autopsia a una victima de un asesinato, el propio forense es asesinado, y su cadaver es robado. A las 10:00 am el ayudante del forense descubre el cadaver (del forense) con una temperatura de 23°C. Al mediodía, su temperatura es de 18.5°C. Asumiendo que el forense tenía en vida la temperatura normal de 37°C, ¿a que hora fue asesinado el forense?.

Solución

Sean

$$
\begin{aligned}
t \quad & \rightarrow \quad \text{variable independiente} = \text{tiempo en horas}, \\
T = T(t) \quad & \rightarrow \quad \text{variable dependiente} = \text{temperatura del cadaver del forense en } t, \\
T_A = 5\,^\circ\text{C} \quad & \rightarrow \quad \text{medio que rodea el cadaver del forense.}
\end{aligned}
$$

Los datos iniciales son: $T(10) = 23°\text{C}$ y $T(12) = 18,5°\text{C}$.

La interrogante es: determinar el tiempo t_1 en que fue asesinado el forense, es decir

$$t_1 = \ ?.$$

La ecuación diferencial que modela el problema es dada por la ley del enfriamiento de Newton, por lo que

$$\frac{dT}{dt} = K(T-5).$$

Esta ecuación diferencial es a variables separables. La solución general se determina, separando las variables, integrando y despejando, lo que produce

$$\boxed{T(t) = \alpha e^{Kt} + 5}.$$

Ya que

$$\begin{aligned} 23 &= T(10) = \alpha e^{10K} + 5 \qquad \text{entonces} \quad \alpha e^{10K} = 18 \quad \text{y} \\ 18,5 &= T(12) = \alpha e^{12K} + 5 \qquad \text{implica que} \quad \alpha e^{12K} = 13,5 \end{aligned}$$

y así

$$e^K = \left(\frac{18}{13,5}\right)^{-1/2} \qquad \text{y} \qquad \alpha = 18\left(\frac{18}{13,5}\right)^5,$$

por lo que la solución particular del problema es:

$$\boxed{T_p(t) = \frac{18^6}{13,5^5}\left(\frac{18}{13,5}\right)^{-t/2} + 5}.$$

Para determinar la hora de la muerte del forense, asumimos que en ese instante la temperatura del forense era de 37°C. Por lo tanto

$$37 = T(t_1) = \frac{18^6}{13,5^5}\left(\frac{18}{13,5}\right)^{-t_1/2} + 5,$$

despejando el tiempo, resulta

$$t_1 = \frac{2\ln\left(\frac{32(13,5)^5}{18^6}\right)}{\ln\left(\frac{13,5}{18}\right)} = 6.$$

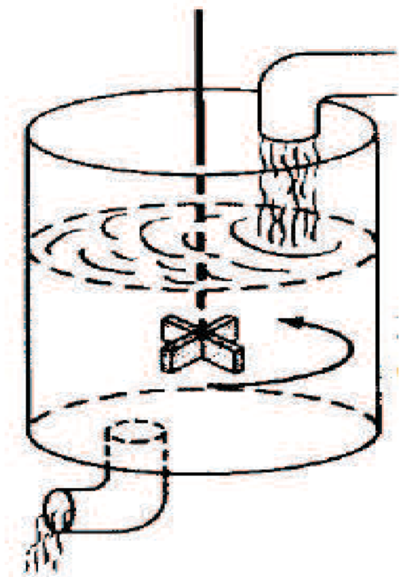
Es decir, el forense fue asesinado a las 6:00 am.

2.3 Mezclas

Al mezclar dos líquidos en un recipiente, al cual le entra y le sale a un determinado ritmo un fluido, a veces se originan ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

2.3.1 Planteamiento del Modelo

Se permite que una sustancia fluya hacia una cierta mezcla en un recipiente, con una cierta rapidez, y la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación. Además, la mezcla uniforme deberá salir del recipiente, con alguna rapidez; en todo caso se busca determinar la cantidad de dicha sustancia presente en la mezcla en cada momento.



En primer lugar definamos las variables involucradas:

$$\begin{aligned} t \quad &\rightarrow \quad \text{variable independiente} = \text{tiempo}, \\ x = x(t) \quad &\rightarrow \quad \text{variable dependiente} = \text{cantidad de sustancia en el recipiente en } t. \end{aligned}$$

En este caso, la razón de cambio de x en cada instante t es la tasa neta de la diferencia entre la razón de entrada de la sustancia y la razón de salida de la sustancia; es decir,

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \text{tasa de entrada} \\ \text{de la sustancia} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{tasa de salida} \\ \text{de la sustancia} \end{pmatrix}$$

Observese que:

(a) La tasa (razón) de entrada, representa la entrada de la sustancia y su rapidez.

(b) En cuánto a la tasa (razón) de salida, hay que ser un poco más meticuloso, pues se debe saber la cantidad de sustancia que hay en cada instante y ver su rapidez de salida.

Los siguientes ejemplos ilustran el planteamiento de este modelo y por supuesto la solución del mismo.

Ejemplo 60.

Un tanque contiene inicialmente 50 galones de agua pura. En el instante $t = 0$, salmuera que contiene 2 libras de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 3 gal/min. La mezcla se mantiene uniforme agitándola y después de estar bien agitada sale simultáneamente del tanque con la misma rapidez. ¿Qué cantidad de sal se encuentra en el tanque en cualquier instante $t > 0$?, ¿Qué cantidad de sal hay después de un largo periodo de tiempo?

Solución

Sean

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \quad \text{tiempo en minutos(variable independiente)}, \\ x = x(t) &\rightarrow \quad \text{cantidad de sal en el recipiente en } t \text{ (variable dependiente)}. \end{aligned}$$

Inicialmente se tiene que $x(0) = 0$. Determinemos ahora las tasas de entrada y salida de la salmuera.

- La salmuera entra a razón de 3 gal/min, y cada galón contiene 2 libras de sal, por lo que la razón de entrada de salmuera es:

$$(2\text{lib/gal})(3\text{gal/min}) = 6 \text{ lb/min}.$$

- Como la rapidez de la salida es igual a la rapidez de entrada. El tanque contiene 50 galones de la mezcla en cualquier instante (esto es, el tanque ni se esta vaciando ni se esta llenando). Ahora bien estos 50 galones de mezcla contienen x libras de sal en cada momento t, luego la concentración de sal que hay en el tanque en cada instante t es $x/50$ lib/gal. Y como la mezcla sale a razón de 3 gal/min, resulta que la:

$$\text{razón de salida } = \left(\frac{x}{50}\text{lib/gal}\right)(3\text{gal/min}) = \frac{3x}{50} \text{ lb/min}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial, que modela este problema es

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{50} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dx}{100 - x} = \frac{3dt}{50}\,.$$

Integrando y despejando, se tiene que la solución general es:

$$\boxed{x(t) = 100 - \alpha e^{-3t/50}}\,.$$

Como $x(0) = 0$ resulta que $\alpha = 100$, luego la solución particular es

$$\boxed{x_p(t) = 100\big(1 - e^{-3t/50}\big)} \mapsto \text{ esta es la cantidad de sal en el tanque en cada instante.}$$

Por consiguiente

$$x_p(25) = 100\big(1 - e^{-3\cdot 25/50}\big) = 100\big(1 - e^{-3/2}\big) \quad \text{libras de sal.}$$

Cuando ha transcurrido un periodo largo de tiempo, digamos cuando $t \to \infty$, en el tanque hay

$$\lim_{t\to\infty} x_p(t) = \lim_{t\to\infty} 100\big(1 - e^{-3\cdot 25/50}\big) = 100 \quad \text{libras de sal.}$$

Ejemplo 61.

Un recipiente contiene inicialmente 50 galones de salmuera en donde se han disuelto 10 libras de sal. Salmuera que contiene 2 libras de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 5 galones por minuto. La mezcla se matiene uniforme mediante agitación, y la misma sale simultáneamente a razón de 3 galones por minuto. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en cualquier instante $t > 0$?, ¿Cuánta sal hay cuando han transcurrido 15 minutos?.

Solución

Sean

$$\begin{aligned} t &\to \quad \text{tiempo en minutos(variable independiente)},\\ x = x(t) &\to \quad \text{cantidad de sal en el recipiente en } t \text{ (variable dependiente)}. \end{aligned}$$

Inicialmente se tiene que $x(0) = 10$ lb/sal. Determinemos ahora las tasas de entrada y salida de la salmuera, procediendo de manera análoga al ejemplo anterior, se tiene que:

- La salmuera entra a razón de 3 gal/min, y cada galón contiene 2 libras de sal, por lo que la razón de entrada de salmuera es:

$$(2 \text{ lib/gal})(5 \text{ gal/min}) = 10 \text{ lb/min}.$$

- En este caso la rapidez de la salida es diferente de la rapidez de entrada. La concentración resulta un poco más compleja. Como al tanque entra salmuera a razón de 5 gal/min pero sale con una rapidez más lenta 3 gal/min, hay una ganancia neta de 5-3= 2 gal/min de salmuera en el tanque. En consecuencia, después de t minutos la cantidad de salmuera en el tanque es de $50 + 2t$ galones. Por consiguiente, la concentración de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{x}{50+2t} \ \text{lib/gal.}$$

Ya que la mezcla sale con una rapidez de 3 gal/min, resulta que la razón de salida de la mezcla es de

$$\left(\frac{x}{50+2t} \ \text{lb/gal}\right)(3 \ \text{gal/min}) = \frac{3x}{50+2t} \ \text{lb/min.}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial, que modela este problema es

$$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3x}{50+2t} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{3x}{50+2t} = 10\,.$$

La solución general es:

$$x(t) = e^{-\int \frac{3dt}{50+2t}} \left[\int 10 e^{\int \frac{3dt}{50+2t}} dt + K \right]$$

ó

$$\boxed{x(t) = 4(t+25) + \frac{K}{(2t+50)^{3/2}}}\,.$$

Puesto que $x(0) = 10$ resulta que $K = -22500\sqrt{2}$. Y así la solución particular es:

$$\boxed{x_p(t) = 4(t+25) - \frac{22500\sqrt{2}}{(2t+50)^{3/2}}} \ \text{lb/min.}$$

Finalmente

$$x(15) = 160 - \frac{22500\sqrt{2}}{(2\cdot 15+50)^{3/2}} = 115 \ \text{libras de sal.}$$

Ejemplo 62.

Un tanque está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con 10 libras de sal disueltas. Le entra salmuera con 1/2 libra de sal por galón a un flujo de 6 gal/min. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale un flujo de 4 gal/min. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque al cabo de 30 minutos.

Solución

Sean

$$
\begin{aligned}
t &\rightarrow \text{ tiempo en minutos(variable independiente),}\\
x = x(t) &\rightarrow \text{ cantidad de sal en el recipiente en } t \text{ (variable dependiente).}
\end{aligned}
$$

Inicialmente se tiene que $x(0) = 10$ lb/sal.

- La entrada de sal al tanque es de:

$$(1/2 \text{ lib.sal/gal})(6 \text{ gal/min}) = 3 \text{ lb.sal/min.}$$

- Como al tanque le entra salmuera a razón de 6 gal/min y le sale el liquido con una rapidez de 4 gal/min, en cada instante de tiempo t en el tanque hay una cantidad de

$$100 + (6 - 4)t = 100 + 2t \text{ gal de salmuera.}$$

  Por otro lado, en el tanque en cualquier instante t hay una cantidad de

$$\frac{x}{100 + 2t} \text{ lb.sal/gal,}$$

  como el flujo sale a razón de 4 gal/min, resulta que la razón de salida de la mezcla es de

$$\left(\frac{x}{100 + 2t} \text{ lb/gal}\right)(4 \text{ gal/min}) = \frac{4x}{100 + 2t} \text{ lb/min.}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial, que modela este problema es

$$\frac{dx}{dt} = 3 - \frac{2x}{50 + t} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{2x}{50 + t} = 3\,.$$

La solución general es:

$$\boxed{x(t) = 50 + t + \frac{K}{(50 + t)^2}}\,.$$

Ya que $x(0) = 10$ resulta que $K = -100000$. Y así la solución particular es:

$$\boxed{x_p(t) = 50 + t - 100000(50 + t)^{-2}} \text{ lb/min.}$$

Finalmente

$$x(30) \approx 64,4 \text{ libras de sal.}$$

2.4 Problemas Propuestos

Resuelva los siguientes problemas sobre aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden.

1. La tasa de crecimiento de la población de una ciudad en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si el número de habitantes se ha sextuplicado en 10 años. ¿Qué tiempo tarda la población en duplicar su cantidad inicial?.

2. La población de una ciudad crece con una rapidez que es proporcional al número de habitantes presentes en cualquier instante de tiempo. Si la población de dicha ciudad era de 30000 en 1970 y de 35000 en 1980. ¿Cuál será la cantidad de población en 1990?.

3. Un cultivo de bacterias de una población crece a un ritmo proporcional a la población existente. Entre las 6 pm y las 7 pm la población se triplica. ¿A qué hora será cien veces mayor que la que había a las 6 pm?. (Resp. Hacia las 10:11 pm)

4. Un moho crece a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente había 2 gramos. En dos días ha pasado a haber tres gramos. Si $x = x(t)$ es la masa de moho en el instante t, pruebe que $x(t) = 2(3/2)^{t/2}$. Calcular la cantidad de moho al cabo de diez días. (Resp. Unos 15,2 gramos)

5. Un tanque contiene 50 litros de agua. Al tanque entra salmuera, que tiene k gramos de sal por litro, a razón de 3/2 litros por minuto. La mezcla, bien homogénea, sale del tanque a razón de un litro por minuto. Si la concentración de sal debe ser 20 gramos por litro a los 20 minutos. ¿Cuál es el valor de k?.

6. Un recipiente contiene 200 litros de agua en el que se han disuelto 30 gramos de sal. Al recipiente entra agua pura a una razón de 4 litros por minuto. La mezcla se mantiene uniforme, y sale a un ritmo de 3 litros por minuto. Determine la cantidad de sal que hay en el recipiente al cabo de 25 minutos. Apoyandose en la gráfica de la solución, determine aproximadamente el instante en que en el recipiente la cantidad de sal es nula.

7. Un cuerpo se enfria desde 60 °C hasta 50 °C en 15 minutos y el aire en que se encuentra se conserva a 30 °C. ¿En que tiempo se enfriará el cuerpo desde 100 °C hasta 80 °C en el aire que se conserva a 50 °C?.

8. El isótopo radiactivo torio 234 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente del mismo. Si 100 mg de este material se reducen a 82,04 mg en una semana, encontrar una expresión para la cantidad presente en cualquier instante. También, hallar

el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que la masa decaiga hasta la mitad de su valor original.

9. El isótopo radiactivo plutonio 241 decae de forma que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -0,0525Q$$

en donde Q se mide en miligramos y t en años. **(a)** Determine la vida media τ del plutonio 241. **(b)** Si en este momento se cuenta con 50 mg de plutonio, ¿cuánto quedará en 10 años?.

10. El radio 226 tiene una vida media de 1620 años. Encuéntrese el periodo en el que un cuerpo de este material se reduce a tres cuartas partes de su tamaño original.

11. Suponga que inicialmente se encuentran 100 mg de torio 234 en un recipiente cerrado y que a éste se le agrega torio 234 con una rapidez constante de un mg/día. **(a)** Halle la cantidad $Q(t)$ de torio 234 que hay en el recipiente en cualquier instante. **(b)** Halle la cantidad límite Q_1 de torio 234 que existirá en el recipiente cuando $t \longrightarrow \infty$. **(c)** ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes que la cantidad de torio 234 en el recipiente disminuya hasta ser 0,5 mg como máximo más del valor límite Q_1?. **(d)** Si al recipiente se le agrega torio 234 con una rapidez de k mg/día, encuentre el valor de k que se requiere a fin de mantener un nivel constante de 100 mg de torio 234.

12. Suponga que la temperatura de una taza de café obedece la Ley de Newton del Enfriamiento. Si el café tiene una temperatura de 200 °F cuando acaba de servirse y un minuto después se ha enfriado hasta 190 °F en un recinto cuya temperatura es de 70 °F, determine cuándo el café alcanza una temperatura de 150 °F.

13. Suponga que, a medianoche, se descubre un cuerpo con una temperatura de 85 °F, y que la temperatura ambiente es constante de 70 °F. El cuerpo se envía rápidamente (suponga que instántaneamente) a la morgue, en donde la temperatura ambiente se mantiene a 40 °F. Al cabo de una hora se encuentra que la temperatura del cuerpo es de 60 °F. Estime el momento de la muerte.

14. Suponga que un recinto que contiene 1200 pies^3 de aire originalmente está libre de monóxido de carbono. A partir del intstante $t = 0$, se introduce al recinto humo de cigarro, que contiene 4% de monóxido de carbono, a razón de 0,1 pies^3/min y se permite que la mezcla bien circulada salga a la misma razón. **(a)** Halle una expresión para la concentración de monóxido de carbono en el recinto, en cualquier instante $t > 0$. **(b)** La