UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
MATEMÁTICA II (CÓDIGO 0826201T)

SUCESIONES

1. **Sucesiones.**
2. **Límite de una Sucesión.**
3. **Teorema 1: Límite de una Sucesión.**
4. **Teorema 2: Propiedades de los Límites de Sucesiones.**
5. **Teorema del Encaje o del Emparedado para Sucesiones.**
6. **Sucesión Monótona.**
7. **Sucesión Acotada.**
8. **Teorema 3: Sucesión Monótona Acotada.**
9. **Definición de Factorial ($n!$).**

Objetivos: Definir una sucesión, hallar sus términos, estudiar la convergencia, la monotonía y el acotamiento.

1. Sucesiones

En matemáticas, la palabra **Sucesión** se usa en sentido muy parecido al lenguaje usual. Decir que una colección de objetos o eventos están en sucesión, significa que la colección está ordenada de tal manera que tiene un primer miembro, un segundo miembro, un tercer miembro, y así sucesivamente.

Matemáticamente, una sucesión se define como una **función** cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y su rango está en el campo de los números reales. Aunque una sucesión es una función, es común representar las sucesiones empleando subíndices en lugar de la notación habitual de la función. Por ejemplo, en la sucesión: $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$

Al 1 le signa a_1, al 2 se le asigna a_2, y así sucesivamente. Los números $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ son los términos de la sucesión.

El número **a_n es el término n-ésimo o término general** de la sucesión y la sucesión completa se denota por $\{a_n\}$.

Ejemplo 1: Los términos de la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ son:

$$3 + (-1)^1, 3 + (-1)^2, 3 + (-1)^3, \cdots = 2, 4, 2, 4, \cdots$$

Mora Adelaida

2. Límite de una Sucesión

Definición: Sea L un número real. El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es L, escrito como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > M$.
Si el límite L de una sucesión existe, entonces la sucesión converge a L. Si el límite de una sucesión no existe, entonces la sucesión diverge.
Si una sucesión $\{a_n\}$ coincide con una función f en cada entero positivo, si $f(x)$ tiende al límite L a medida que $x \to \infty$, la sucesión debe converger al límite L.

3. Teorema 1: Límite de una sucesión

Sea L un número real. Sea F una función de una variable real tal que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para cada entero positivo n, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Ejemplo 2: Encuentre el límite de una sucesión cuyo término n-ésimo es:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Solución: Recordando el límite especial:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema 1 para concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

4. Teorema 2: Propiedades de los Límites de Sucesiones

Sean c cualquier número real y los límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = K$$

a. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L \pm K$

b. $\lim_{n\to\infty} ca_n = cL$

c. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot K$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{k}, \qquad b_n \neq 0 \;\; y \;\; K \neq 0$

5. Teorema del Encaje o del Emparedado para Sucesiones

Si los límites

$$\lim_{n\to\infty} a_{n=L} = \lim_{n\to\infty} b_n$$

y existe un N tal que $a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall \quad n > N$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

6. Sucesión Monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona si sus términos no son decrecientes, es decir son crecientes, esto es:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots;$$

o sus términos no son crecientes, es decir son decrecientes, esto es:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

7. Sucesión Acotada

Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n. El número M es llamado cota superior de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente si existe un número N tal que $N \geq a_n$, para todo n. El número N es llamado cota inferior de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si lo está inferior y superiormente.

8. Teorema 3: Sucesión Monótona Acotada

Si una sucesión es acotada y monótona, entonces es convergente.

Ejemplo 3: Determinar los cinco primeros términos de la sucesión:

$$\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$$

Solución: Sustituyendo el valor de n desde 1 hasta 5 se obtiene:

$$a_1 = 3 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_2 = 3 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$$
$$a_3 = 3 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$$
$$a_4 = 3 + (-1)^4 = 3 + 1 = 4$$
$$a_5 = 3 + (-1)^5 = 3 - 1 = 2$$

Ejemplo 4: Hallar los términos de la sucesión cuyo término n-ésimo es:

$$a_n = \frac{n}{1-2n}$$

Solución:

$$a_1 = \frac{1}{1-2(1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$a_2 = \frac{2}{1-2(2)} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{1-2(3)} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

Así: $\{a_n\} = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \cdots, \frac{n}{1-2n}, \cdots\right\}$

Ejemplo 5: Hallar el límite de la sucesión cuyo término n-ésimo es:

$$\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$$

Solución: Observando el **ejemplo 3** vemos que los valores se alternan entre 2 y 4, por lo tanto el límite no existe, lo que indica que la sucesión diverge. (Esta sucesión es oscilante).

Ejemplo 6:: Determine el límite de la sucesión cuyo término n-ésimo es:

$$a_n = \frac{n}{1-2n}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-2n} \to \left(Indeterminación\ \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Dividiendo el numerador y el denominador por n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} - 2} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto la sucesión converge a $-\frac{1}{2}$

Ejemplo 7: Comprobar que la sucesión cuyo término n-ésimo es: $a_n = \frac{n^2}{2^n - 1}$ converge.

Solución: Para aplicar la regla de L'Hopital se debe considerar la función de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} \rightarrow \left(Indeterminación\ \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln 2 \cdot 2^x} \rightarrow \left(Indeterminación\ \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Aplicando de nuevo L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(ln2)^2 2^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Como $f(n) = (a_n)$ para todo entero positivo, puede aplicarse el teorema 1 para concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n - 1} = 0$$

Por lo tanto la sucesión converge a 0.

Ejemplo 8: Determinar si la sucesión $\left\{n \cdot \sin \frac{\pi}{n}\right\}$ es convergente o divergente.

Solución: Debemos determinar se existe el límite del término n-ésimo. Sea: $f(x) = x \cdot sen\left(\frac{x}{n}\right)$, hallamos:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \rightarrow (Indeterminación\ \infty \cdot 0)$$

Ya que $f(x)$ puede escribirse como: $f(x) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x}$, Luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x} \rightarrow (Indeterminación\ \frac{0}{0})$$

Aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pi$$

Por lo tanto podemos concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

cuando n es un entero positivo. Así la sucesión converge a π.

9. Definición de Factorial ($n!$)

El símbolo $n!$ (se lee n factorial) se usa para simplificar algunas fórmulas.
Sea n un entero positivo, entonces n! se define como: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$
casos especiales: $0! = 1! = 1$.

Ejemplo 9: Utilizar el teorema del encaje para comprobar que la sucesión $\{c_n\} = \left\{\frac{1}{n!}\right\}$ converge.

Solución: Para aplicar el teorema del encaje, se deben encontrar dos sucesiones convergentes que puedan relacionarse con la sucesión dada. Dos posibilidades son:

$$\{a_n\} = -\frac{1}{2^n} \quad y \quad \{b_n\} = \frac{1}{2^n}$$

ambas convergen a 0. Comparando el término $n!$ con 2^n, se puede ver que:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n = 24 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n \ (n \geq 4)$$

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ (n \geq 4)$$

Esto implica que para $n \geq 4$, $2^n \leq \mathrm{n}!$, y se tiene que:

$$-\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{para} \quad \mathrm{n} \geq 4$$

Por lo tanto por el teorema del encaje:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

entonces la sucesión converge a 0.

Ejemplo 10: Hallar una sucesión $\{a_n\}$ cuyos 5 primeros términos son:

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \cdots$$

y después determine si la sucesión particular converge o diverge.

Solución: Primero se observa que los numeradores son potencias sucesivas de 2 y los denominadores son los enteros pares positivos, obteniendo el siguiente esquema

$$\frac{2^1}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^3}{5}, \frac{2^4}{7}, \frac{2^5}{9}, \cdots, \frac{2^n}{2n-1}$$

Obteniendo la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{2n-1}\right\}$

Utilizando la regla de L'Hopital para evaluar:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{2x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(ln2) \cdot 2^x}{2} = \infty$$

Por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2n-1} = \infty$$

Por lo tanto la sucesión diverge.

Ejemplo 11: Determinar una sucesión cuyos primeros cinco términos son:

$$-\frac{2}{1}, \frac{8}{2}, -\frac{26}{6}, \frac{80}{24}, -\frac{242}{120}, \cdots$$

y después determine si converge o diverge.

Solución: Note que los numeradores son de la forma $3^n - 1$ y factorizando los denominadores se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \\ 6 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 24 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 120 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \end{aligned}$$

Esto sugiere que los denominadores son de la forma $n!$, como los signos se alternan, se puede escribir el termino general o n-ésimo como

$$a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{3^n - 1}{n!}\right)$$

De la discusión hecha en el **ejemplo 9** sobre el crecimiento de $n!$, se puede concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{n!} = 0$$

Así la sucesión obtenida converge a 0.

Ejemplo 12: Determinar si la sucesión cuyo término n-ésimo es: $a_n = 2 + (-1)^n$ es monótona.

Solución: Hallando los primeros cinco términos se tiene: $1, 3, 1, 3, 1, \cdots$

Los términos se alternan entre 1 y 3, por lo tanto la sucesión no es monótona (no es creciente ni decreciente).

Ejemplo 13: Determinar si la sucesión que tiene el n-ésimo termino $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona.

Solución: Los primeros términos de la sucesión $\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \cdots, \frac{2n}{n+1}$ nos hace pensar que la sucesión crece. Para cerciorarnos de esto, basta probar que:

$$a_n \le a_{n+1}$$

$$\frac{2n}{1+n} \leq \frac{2(n+1)}{1+(n+1)}$$
$$\frac{2n}{1+n} \leq \frac{2n+2}{n+2}$$
$$2n \cdot (n+2) \leq (2n+2) \cdot (n+1)$$
$$2n^2 + 4n \leq 2n^2 + 2n + 2n + 2$$

Agrupando términos y efectuando las respectivas operaciones:

$$2n^2 - 2n^2 + 4n - 2n - 2n \leq 2$$
$$0 \leq 2$$

Esta última desigualdad es verdadera, lo cual nos permite asegurar que la sucesión es monótona creciente.

Ejemplo 14: Comprobar que la sucesión cuyo término general es: $b_n = e^{\frac{1}{n^2+1}}$ es monótona decreciente.

Solución: Para comprobar que la sucesión es decreciente se debe probar que:

$$b_n \geq b_{n+1}$$
$$e^{\frac{1}{n^2+1}} \geq e^{\frac{1}{(n+1)^2+1}}$$

Por propiedades de la función exponencial (bases iguales implica que los exponentes deben ser iguales), entonces:

$$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

Tomando en cuenta que ambos miembros de la inecuación son positivos y operando convenientemente, se tiene que:

$$(n+1)^2 + 1 \geq n^2 + 1$$
$$n^2 + 2n + 1 + 1 \geq n^2 + 1$$
$$n^2 - n^2 + 2n + 2 \geq 1$$
$$2n \geq 1 - 2$$
$$n \geq -\frac{1}{2}$$

Lo cual es verdadero para todo n, en consecuencia la sucesión es estrictamente decreciente y por lo tanto monótona.

Nota importante: para estudiar la monotonía se debe comprobar analíticamente que se cumple para todo n. Se puede hacer resolviendo la inecuación resultante o por rmedio de la primera derivada. No basta con observar que sugieren los primeros términos.

Ejemplo 15: Determinar si la sucesión cuyo término general es: $a_n = \frac{2^n}{n!}$ es convergente (utilice monotonía y acotamiento).

Solución: Los términos de la sucesión son: $2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \cdots$ se observa que: $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$ y así sucesivamente, por lo que la sucesión puede ser decreciente, para ello se debe verificar que:

$$a_n \geq a_{n+1}$$

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Aplicando la definición de factorial y propiedades de las potencias

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^n \cdot 2}{(n+1)(n+1-1)!}$$

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^n \cdot 2}{(n+1)n!}$$

Simplificando se obtiene:

$$1 \geq \frac{2}{(n+1)}$$

$$n+1 \geq 2$$

$$n \geq 1$$

Desigualdad verdadera para todo n, por lo tanto la sucesión es decreciente y monótona.

Observando términos de la sucesión: $2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \cdots$ el valor mas grande que toma la sucesión es 2, por lo que una cota superior de la sucesión es 2 (cualquier número mayor que 2 es cota superior, pero la mínima cota superior es 2).

Los términos de la sucesión decrecen sin llegar a ser 0, por lo que una cota inferior de la sucesión es 0 (cualquier número menor que 0 es cota inferior, pero la máxima cota inferior es 0).

Por lo tanto la sucesión es acotada.

La sucesión es acotada y monótona, por lo tanto es convergente.

Para ampliar el tema y los ejercicios propuestos, consultar en la biblioteca digital el Capitulo 8 sesión 8.1del libro Cáculo 1, Larson.

NOTA: Este material esta en revisión, cualquier error hacerlo saber a su profesora.