1. Considere la función $\boldsymbol{f(x,y)=\sqrt{\ln(x-y+2)}}$
   a. Indique cuáles de los siguientes puntos están en el dominio de $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{(0,0),(2,1),(-0.5,1),(1,5)}$
   b. Describir en forma conjuntista y gráfica el dominio de $\boldsymbol{f}$.
   c. Realice el mapa de contorno de la función con las tres curvas de nivel $\boldsymbol{f(x,y)=k}$ para $\boldsymbol{k=0,1,2,3}$
   d. Responda: ¿es posible definir la curva de nivel para $\boldsymbol{k<0}$?

<u>Solución:</u>

a. Evaluamos

$$f(0,0)=\sqrt{\ln(0-0+2)}=\sqrt{\ln(2)}\approx 0.83 \Rightarrow (0,0)\in Dom\ f$$

$$f(2,1)=\sqrt{\ln(2-1+2)}=\sqrt{\ln(3)}\approx 1.1 \Rightarrow (2,1)\in Dom\ f$$

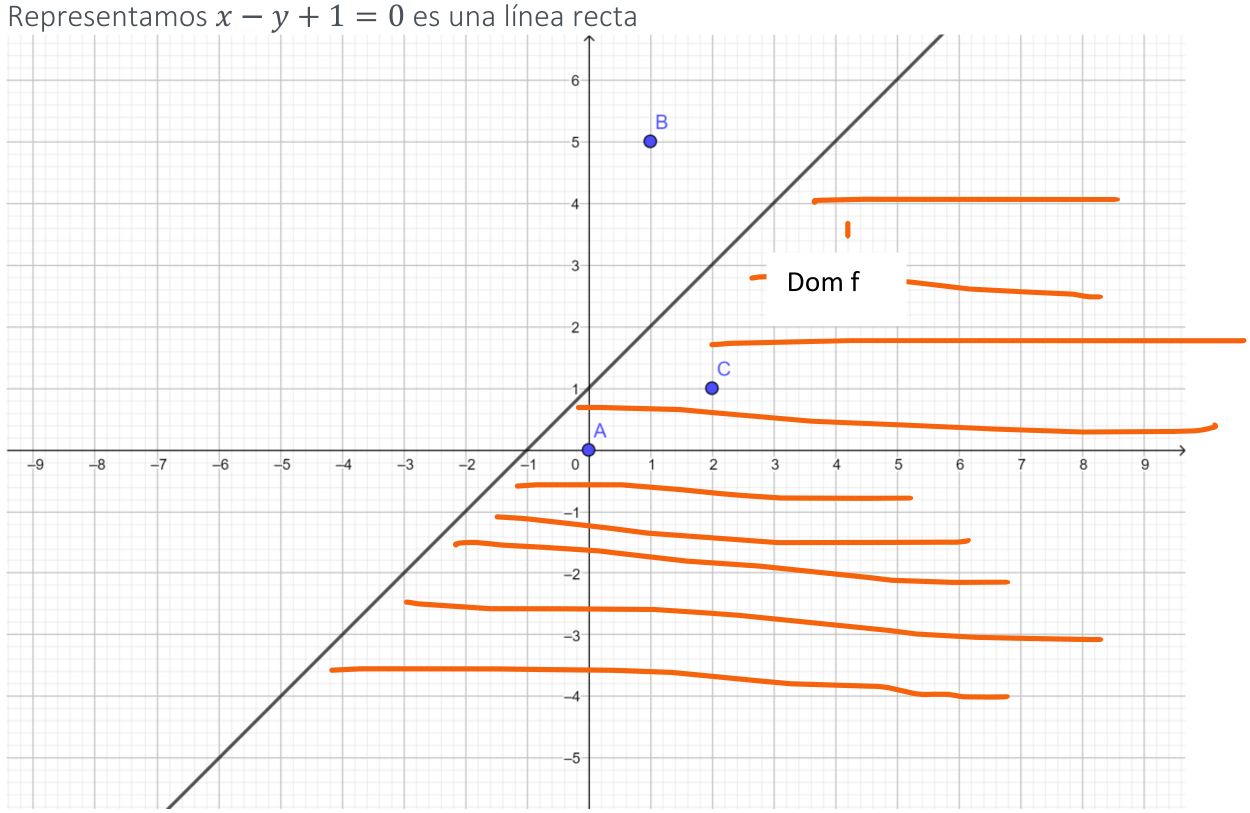
$$f(-0.5,1)=\sqrt{\ln(-0.5-1+2)}=\sqrt{\ln(0.5)}=\sqrt{-0.69}\ No\ existe \Rightarrow (-0.5,1)\notin Domf$$

$$f(1,5)=\sqrt{\ln(1-5+2)}=\sqrt{\ln(-2)}\ No\ existe \Rightarrow (1,5)\notin Dom\ f$$

b. Debemos considerar

$$\ln(x-y+2)\geq 0 \Rightarrow x-y+2\geq 1 \Rightarrow x-y+1\geq 0$$

Representamos $x-y+1=0$ es una línea recta



$$Dom\ f=\{(x,y)\in R^2: x-y+1\geq 0\}$$

c. El mapa de contorno para $k = 0,1,2,3$, hacemos $f(x,y) = k$

$$k = \sqrt{\ln(x - y + 2)} \Rightarrow \ln(x - y + 2) = k^2$$

$$x - y + 2 = e^{k^2} \Rightarrow x - y + 2 - e^{k^2} = 0$$

Cuando $k = 0$

$$x - y + 2 - e^0 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

Cuando $k = 1$

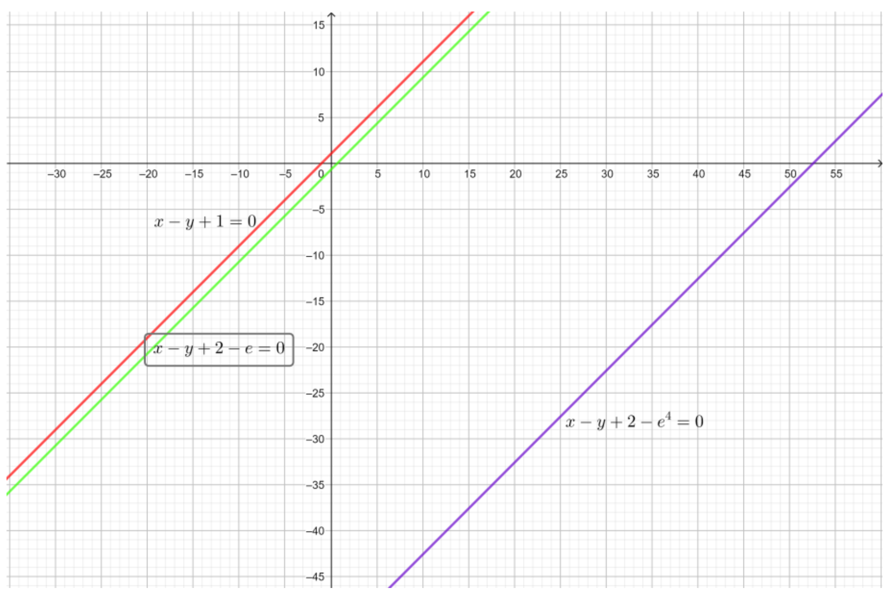
$$x - y + 2 - e^{1^2} = 0 \Rightarrow x - y + 2 - e = 0$$

Cuando $k = 2$

$$x - y + 2 - e^4 = 0$$

Cuando $k = 3$

$$x - y + 2 - e^9 = 0$$



d. No es posible definir curvas de nivel para $k < 0$, porque $f(x,y) \geq 0$

2. Sea la función

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}}$$

a. Determine si $\boldsymbol{f}$ es continua en $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$. Justifique su respuesta.
b. Halle $\boldsymbol{f_x(0,0)}$ y $\boldsymbol{f_y(0,0)}$
c. Diga si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$. Justifique su respuesta

Solución:

a. Vemos que $f(0,0)=0$ ahora procedemos a hallar el límite de f cuando $(x,y)\rightarrow(0,0)$. Usando coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}=\lim_{r\to0}\frac{3(r\cos\theta)^2(r\operatorname{sen}\theta)^2}{(r\cos\theta)^4+(r\operatorname{sen}\theta)^4}=\lim_{r\to0}\frac{3r^4\cos^2\theta\, sen^2\theta}{r^4\,(\cos^4\theta+sen^4\theta)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}=\lim_{r\to0}\frac{3\cos^2\theta\, sen^2\theta}{\cos^4\theta+sen^4\theta}$$

Indicativo de que el límite no existe. Podemos tomar los siguientes caminos:

$$\overbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}}^{x=y}=\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{3x^2x^2}{x^4+x^4}=\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{3x^4}{2x^4}=\frac{3}{2}$$

$$\overbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}}^{x=0}=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{30^2y^2}{0^4+y^4}=\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{0}{y^4}=0$$

No existe el límite.

Por lo tanto $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$

b. Por definición:

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Entonces:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-0}{h}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3h^2 0^2}{h^4+0^4}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{30^2h^2}{0^4+0^4}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

c. No es diferenciable porque no es continua en $(0,0)$

3. **Suponga que en cierta región del espacio el potencial eléctrico $\boldsymbol{V}$ está dado por $\boldsymbol{V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz}$**
   a. **Determinar la razón de cambio del potencial en el punto $\boldsymbol{P(3,4,5)}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{\vec{v} = i + j + k}$**
   b. **En qué dirección $\boldsymbol{V}$ se incrementa más rápidamente en $\boldsymbol{P}$**
   c. **Encuentre la razón de cambio máxima de incremento de $\boldsymbol{V}$ en el punto $\boldsymbol{P}$.**

Solución:

a. Es la derivada direccional que se determina usando la siguiente fórmula:

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).\vec{u}$$

Donde $\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle$ y $\vec{u}$ es un vector unitario en dirección del vector dado:

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{i+j+k}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$$

$$\nabla V(x,y,z) = \langle 10x - 3y + yz, -3x + xz, xy\rangle$$

$$\boldsymbol{V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz}$$

$$\nabla V(3,4,5) = \langle 10(3) - 3(4) + 4(5), -3(3) + 3(5), 3(4)\rangle$$

$$\nabla V(3,4,5) = \langle 38,6,12\rangle$$

Luego

$$D_u V(x,y,z) = \nabla V(x,y,z).\overrightarrow{u_v}$$

$$D_u V(3,4,5) = \langle 38,6,12\rangle.\langle\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \frac{38}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{56}{\sqrt{3}}$$

a. En qué dirección V se incrementa más rápidamente en P

Es el gradiente de V

$$\nabla V(3,4,5) = \langle 38,6,12 \rangle$$

b. Encuentre la razón de cambio máxima de incremento de V en el punto P.
Es el módulo del gradiente

$$\|\langle 38,6,12 \rangle\| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624} \approx 40.3$$

4. **Considere el elipsoide $\boldsymbol{2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10}$ y el punto $\boldsymbol{P = (2,0,6)}$**
   a. **Determina la ecuación del plano tangente al elipsoide en el punto $\boldsymbol{P}$**
   b. **Halle las ecuaciones paramétricas de la recta normal al elipsoide en el punto $\boldsymbol{P}$**
   c. **Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente al elipsoide en el punto $\boldsymbol{P}$ que se encuentra en el plano $\boldsymbol{y = 0}$**

Solución:

a. Es el plano que tiene como vector normal el gradiente de la función

$$F(x,y,z) = 2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 - 10$$

$$\nabla F(x,y,z) = \langle 4(x-2), 2(y-1), 2(z-3) \rangle$$

$$\nabla F(2,0,6) = \langle 4(2-2), 2(0-1), 2(6-3) \rangle = \langle 0,-2,6 \rangle$$

La ecuación del plano es

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$0(x-2) - 2(y-0) + 6(z-6) = 0$$

$$-2y + 6z - 36 = 0$$

$$2y - 6z + 36 = 0$$

b. Es la recta normal que tiene como dirección el vector gradiente:

$$\begin{cases} x = 2 + 0t \\ y = 0 - 2t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$$

c. Esa recta tiene como pendiente la derivada de

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_x}{F_z} = \frac{4(x-2)}{2(z-3)} = 0 \qquad clase\ 5$$

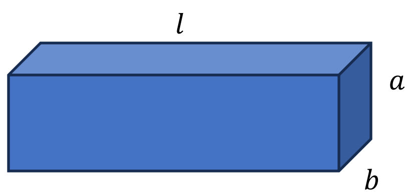
$$z - 6 = 0(x-2) \Rightarrow z = 6$$

$$x = t, y = 0, z = 6$$

5. La suma de la longitud y el perímetro de la sección transversal de una caja rectangular a entregar por cierto tipo de servicio de transporte no puede exceder de 108 pulgadas. Hallar las dimensiones del paquete de máximo volumen que puede enviarse por este servicio.

   Solución: Tenemos que

$$l + 2a + 2b = 108 \Rightarrow l = 108 - 2a - 2b$$



$$V = l.a.b$$

Primera forma: usando el teorema de las segundas derivadas. Para ello debemos escribir la función a maximizar en términos de dos variables:

$$V = (108 - 2a - 2b)ab = 108ab - 2a^2b - 2ab^2$$

Derivamos con respecto a ambas variables:

$$V_a = 108b - 4ab - 2b^2$$

$$V_b = 108a - 2a^2 - 4ab$$

Planteamos el sistema

$$\begin{cases} 108b - 4ab - 2b^2 = 0 \\ 108a - 2a^2 - 4ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(108 - 4a - 2b) = 0 \\ a(108 - 2a - 4b) = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$b = 0 \quad y \quad 108 - 4a - 2b = 0$$

Cuando $b = 0$ y sustituimos en la segunda ecuación:

$$a\big(108 - 2a - 4(0)\big) = 0 \Rightarrow a(108 - 2a) = 0 \Rightarrow a = 0 \ \ y \ \ a = 54$$

Cuando $108 - 4a - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 108 - 4a \Rightarrow b = 54 - 2a$ sustituyendo en la segunda ecuación

$$a(108 - 2a - 4(54 - 2a)) = 0$$

$$a(108 - 2a - 216 + 8a) = 0 \Rightarrow a(6a - 108) = 0 \Rightarrow a = 0 \ \ y\ a = 18$$

De estas últimas $b = 54 \ \ y \ \ b = 18$. Los puntos críticos son

$$(0{,}0), (54{,}0), (0{,}54), (18{,}18)$$

Para ver donde está el máximo volumen se usa:

$$D = V_{aa}V_{bb} - (V_{ab})^2 = 16ab - (108 - 4a - 4b)^2$$

$$V_{aa} = -4b, V_{bb} = -4a, V_{ab} = 108 - 4a - 4b$$

	D	V_{aa}	
(18,18)	$D(18{,}18) = 5220 > 0$	$V_{aa}(18{,}18) = -72$	Es un máximo local

Para obtener el máximo volumen las dimensiones de la caja son $a = 18, b = 18\ y$

$$l = 108 - 2(18) - 2(18) = 36$$

Segunda forma: es por los multiplicadores de Lagrange. En ese caso:

$$g(a, b, l) = l + 2a + 2b - 108$$

$$f(a, b, l) = a.b.l.$$

Se plantea que:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\langle bl, al, ab\rangle = \lambda\langle 2{,}2{,}1\rangle$$

Igualando cada componente

$$\begin{cases} bl = 2\lambda \\ al = 2\lambda \\ ab = \lambda \\ l + 2a + 2b = 108 \end{cases}$$

De 1 y 2

$$bl = al$$

$$a = b$$

De 2 y 3

$$al = 2ab \Rightarrow l = 2b$$

En 4

$$2b + 2b + 2b = 108 \Rightarrow 6b = 108 \Rightarrow b = 18$$

De allí $a = 18 \;\; y \;\; l = 36$