CAPÍTULO 3

VECTORES

Introducción

Las nociones de vectores están implícitamente contenidas en las reglas de composición de las fuerzas y de las velocidades, conocidas hacia el fin del siglo XVII.

Es con relación a la representación geométrica de los números llamados imaginarios como las operaciones vectoriales se encuentran por primera vez implícitamente analizadas, sin que el concepto de vector esté aun claramente definido. Fue mucho más tarde y gracias al desarrollo de la geometría moderna y de la mecánica, cuando la noción de vector y de operaciones vectoriales se concretaron.

El alemán Grassman, en 1844, por métodos geométricos, introdujo formalmente las bases del cálculo vectorial (suma, producto escalar y vectorial).

El inglés Hamilton, por cálculos algebraicos llegó a las mismas conclusiones que Grassman; empleó por primera vez los términos escalar y vectorial.

Hacia el final del siglo XIX, el empleo de los vectores se generalizó a toda la física. Bajo la influencia de los ingleses Hamilton, Stokes, Maxwell, Heaviside y del americano Gibbs (quien utilizó la notación del punto para el producto escalar y del X para el producto vectorial) se amplió el cálculo vectorial, introduciendo nociones más complejas, como los operadores vectoriales gradiente, divergencia y rotacional.

Estudio de Vectores

Supón que te extraviaste cuando conducías tu auto al viajar hacia el oriente de nuestro país, y por ello, decides pedir información sobre la ruta a seguir, en una estación de servicio que conseguiste cerca del lugar donde te encontrabas.

El empleado que te atendió, toma una hoja de papel y empieza a garabatear el camino que debes continuar. Quizá observes algunas flechas en el croquis o dibujo. Dichas flechas representarían probablemente la magnitud (cuántos km) y la dirección (hacia dónde).

Podríamos decir, que, si la longitud de una flecha representa la magnitud o módulo de alguna cantidad, y la dirección de esa flecha muestra la dirección de la cantidad estudiada, entonces la flecha simboliza un **vector.**

Podrás darte cuenta, que los vectores tienen muchas aplicaciones, no solamente en las ciencias exactas, sino también en nuestra vida cotidiana.

Cuando examinamos algunos fenómenos de la naturaleza como, por ejemplo, el lanzamiento de proyectiles, observamos que su movimiento se puede describir con bastante exactitud en el plano; sin embargo, algunas de sus magnitudes, como la velocidad y la aceleración no quedan bien definidas si desconocemos su dirección y sentido porque ellas son cantidades o magnitudes vectoriales.

En este capítulo, nos vamos a limitar a las principales definiciones y operaciones básicas que se pueden realizar en forma geométrica y analítica con los vectores, sin profundizar en el álgebra vectorial.

3.1 Magnitudes Escalares y Vectoriales

Algunas cantidades físicas como el tiempo, la distancia, la masa, la densidad y el volumen, entre otras, quedan bien definidas, mediante un número y su correspondiente unidad. Estas magnitudes no tienen dirección y se conocen como **magnitudes escalares.**

Con ellas se pueden efectuar las operaciones ordinarias de adición, sustracción, producto y división. Ejemplos:

a. Si añadimos 1 kg de azúcar a 2 kg de harina, podemos decir que la mezcla resultante tendrá una masa de 3 kg.

b. Si tenemos en un recipiente 6 litros de un desinfectante para pisos y sacamos 2 litros, entonces, el volumen resultante será de 4 litros

En los ejemplos anteriores, no tiene sentido hablar de dirección. Allí no podemos decir 3 kg de masa hacia el sur o 4 litros de desinfectante hacia el oeste; por lo tanto, estas magnitudes son escalares.

Existen otras magnitudes que no se pueden representar solamente con un número (módulo) y su correspondiente unidad, para ellas es necesario indicar su dirección y sentido de tal forma que su información sea completa y queden bien especificadas. Estas se conocen como **magnitudes vectoriales**.

Para indicar la velocidad de un avión se debe conocer además de su rapidez y unidad, la dirección en la cual se mueve. Por ejemplo, que la velocidad de un Boeing 747 es de 920 km/h en dirección 45º hacia el nor-oeste.

De la misma manera, el desplazamiento, la aceleración, la fuerza, la cantidad de movimiento lineal, entre otras, son cantidades o magnitudes vectoriales que se estudian comúnmente en la física.

Es conveniente destacar que una magnitud vectorial, se representa por medio de una flecha a una escala determinada, que simboliza un **vector**, es decir, un segmento de recta orientado en el espacio. La longitud de la flecha representa el **módulo** del vector, la línea sobre la cual se encuentra es su **dirección y** el **sentido** es el que indica la flecha. El **punto de aplicación** del vector viene siendo el origen de la flecha. Todas estas características, constituyen los **elementos de un vector**.

Los vectores se pueden denotar de muchas formas. Entre las más usadas tenemos las siguientes: $\vec{A}$**,** **A,** $\hat{A}$,$\tilde{A}$

Generalmente se usan letras mayúsculas, pero en el caso de algunas magnitudes físicas, tales como velocidad $\vec{v}$, aceleración $\vec{a}$ y otras, se emplean letras minúsculas, de la misma forma como ellas se simbolizan.

El módulo de un vector se puede escribir colocando entre barras el símbolo del vector, por ejemplo: $|\vec{F}\,|$ o se puede utilizar el mismo símbolo pero sin la flecha en la parte superior, así: F

3.2 Sistema de coordenadas

En física resulta de gran importancia la ubicación de partículas en el espacio. Por ejemplo, cuando se quiere describir el movimiento de una partícula, es necesario representar las diferentes posiciones que ella va ocupando a medida que transcurre el tiempo, para esto es de gran utilidad el sistema de coordenadas cartesianas, denominado también sistema de coordenadas rectangulares.

Una coordenada se localiza sobre una línea (Ejemplo X= 2); dos coordenadas se ubican como un punto en el plano (Ejemplo: p (-2,1)) y tres coordenadas se localizan como un punto en el espacio (Ejemplo: Q (5,-4,2)).

Para representar puntos en un sistema de coordenadas cartesianas, se escoge una recta horizontal en el plano llamada eje X o eje de las abscisas y una recta vertical llamada eje Y o eje de las ordenadas. El punto de intercepción de estos ejes se llama origen y se denota con la letra O.

Se establece la dirección positiva de X arbitrariamente hacia la derecha del origen y la dirección negativa hacia la izquierda. Mientras que la dirección positiva de Y, se establece arbitrariamente hacia arriba del origen y la dirección negativa hacia abajo. Los ejes X e Y dividen al plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes.** El primer cuadrante es aquel que tiene tanto la abscisa como la ordenada positiva. Los demás cuadrantes se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura1.

-

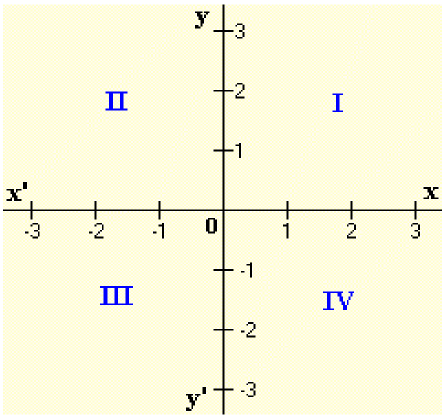
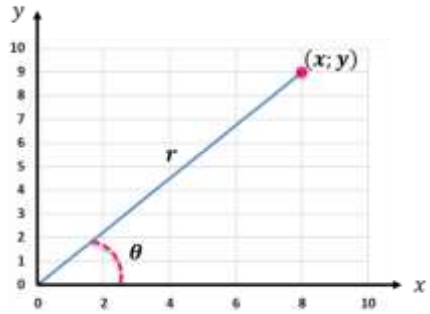


Fig1. Sistema de coordenadas cartesianas

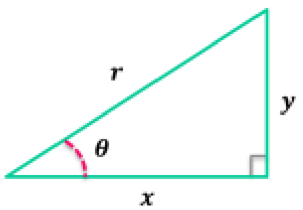
Además del sistema de coordenadas cartesianas, existen otros sistemas que pueden ser utilizados, como es el caso del sistema de coordenadas polares, que en algunas ocasiones resulta más conveniente para representar un punto en el plano.



En este sistema la distancia desde el origen hasta el punto de coordenadas (X, Y) se denota por **r** y el ángulo entre el eje fijo X y r es **Θ**, que suele medirse en sentido contrario a las manecillas del reloj.
El eje X se conoce como eje polar y el punto fijo (o) es llamado polo.

Fig2.ubicación de un punto en el plano

Si en la figura anterior trazamos rectas paralelas a "X" y a "Y" que pasen por el punto (x, y), obtenemos un triángulo rectángulo donde:



$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\quad y = r.\operatorname{sen}\theta$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad x = r.\cos\theta$

Es decir que, a partir de las coordenadas polares planas, se pueden obtener las coordenadas cartesianas; también podemos decir que:

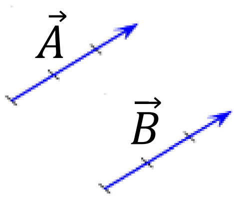
$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \quad y \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

El ángulo θ generalmente se mide en radianes.

3.3 Propiedades de los Vectores

Igualdad de vectores

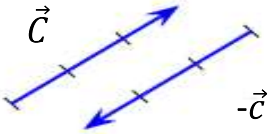
Se dice que dos vectores son iguales cuando tienen igual magnitud o módulo, dirección y sentido. No necesariamente estos vectores empiezan en el mismo punto.



$\vec{A} = \vec{B}$

Vectores opuestos

Dos vectores son opuestos cuando tienen igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos.



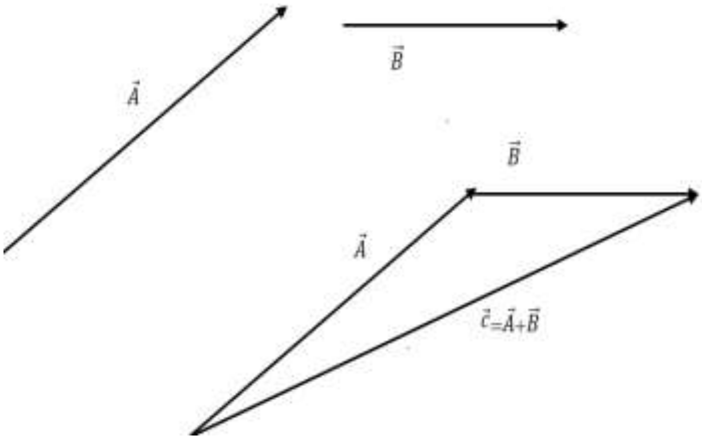
-$\vec{c}$ es el vector opuesto a $\vec{C}$

$\vec{C}$ = -$\vec{C}$

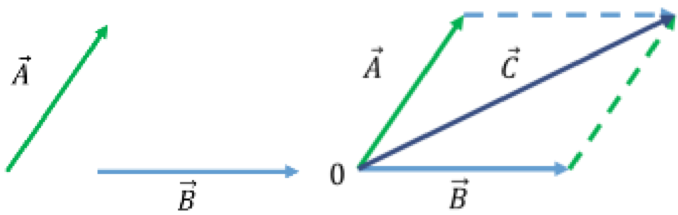
3.4 Operaciones con Vectores en Forma Geométrica

1.- Suma

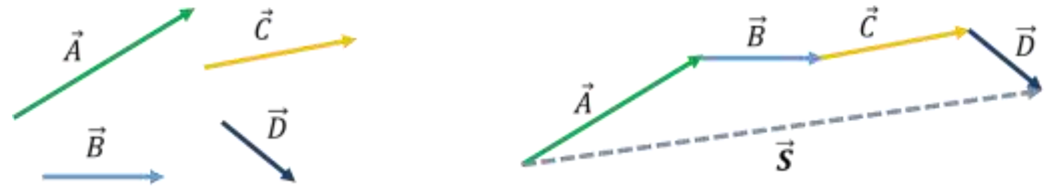
a. <u>Método del triángulo:</u> Dado los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el vector suma $\vec{C}$ se obtiene de la siguiente manera: Se dibuja en el extremo de $\vec{A}$ el vector $\vec{B}$, coincidiendo el origen de $\vec{B}$, con el extremo de $\vec{A}$. El vector suma es $\vec{C}$, que va dirigido desde el origen de $\vec{A}$ hasta el extremo de $\vec{B}$.



b. <u>Método del paralelogramo:</u> La suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mediante este método consiste en lo siguiente: Se colocan dichos vectores sobre un mismo punto de aplicación (o) y trazamos paralelas a estos vectores, formando un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo es el vector resultante $\vec{C}$, siendo este la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



c. <u>Método del polígono:</u> Cuando tenemos más de dos vectores resulta conveniente utilizar este método, que consiste en dibujar los vectores dados uno tras otro, para obtener el vector suma ($\vec{S}$) que va desde el origen del primero hasta el extremo del último



2.- Diferencia

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el vector diferencia $\vec{D}$ se obtiene sumando al vector

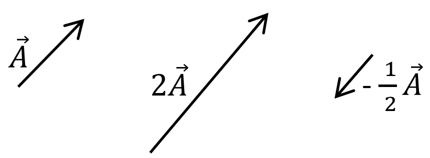
$\vec{A}$ el opuesto de $\vec{B}$, es decir: $\vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B}$

3.- Multiplicación de un escalar por un vector

Para aumentar o disminuir el módulo de un vector, se puede multiplicar por un número, dando como resultado otro vector que tiene por módulo el producto de dicho escalar por el módulo del vector y tendrá la misma dirección del vector dado.

Cuando el número (escalar) es negativo, entonces se obtiene un vector resultante de sentido opuesto al vector dado.

Ejemplo: dado el vector $\vec{A}$ al multiplicarlo por el escalar 2 (numero 2) se obtiene el vector $2\vec{A}$ como se observa en la figura y al multiplicarlo por el escalar $-\frac{1}{2}$ resulta $-\frac{1}{2}\vec{A}$ y de sentido contrario porque es un escalar negativo.



3.5 Componentes Rectangulares de un Vector

Así como un punto tiene coordenadas rectangulares, los vectores también poseen componentes rectangulares, que son las proyecciones del vector sobre los ejes X e Y.

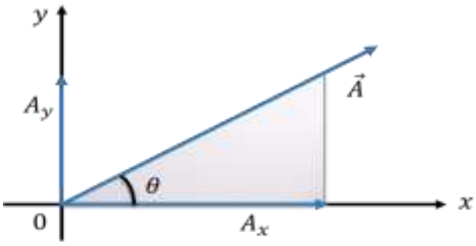
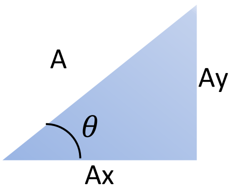


Fig3. componentes rectangulares de un vector

Podemos decir que A_x paralelo al eje X es la proyección o componente del vector $\vec{A}$ en el eje X y A_y Paralelo al eje Y es la proyección o componente del vector $\vec{A}$ en el eje Y. Del triángulo rectángulo sombreado que se observa en la figura 3, podemos obtener los módulos de las componentes del vector aplicando funciones trigonométricas, de la siguiente forma:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|Ay|}{|\vec{A}|} \quad |Ay| = |\vec{A}|.\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{|Ax|}{|\vec{A}|} \quad |Ax| = |\vec{A}|.cos\theta$$

Fig4. módulos de las componentes

La magnitud o longitud de un vector viene dada por la expresión:

$$|\vec{A}| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

La dirección del vector $\vec{A}$ viene dada por el ángulo que forma dicho vector con la dirección positiva del eje X y se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, utilizando la siguiente relación:

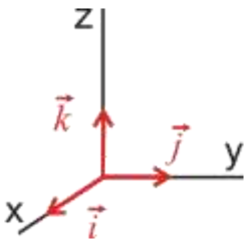
$$\tan\theta = \frac{|Ay|}{|Ax|} \quad \theta = arctg\frac{|Ay|}{|Ax|}$$

Nota: es importante destacar que los signos de las componentes rectangulares de un vector dependen del cuadrante donde el vector se encuentre ubicado.

Lo planteado anteriormente, también se puede generalizar para obtener las componentes rectangulares de un vector en el espacio, con su correspondiente magnitud y dirección.

3.6 Vectores Unitarios

Son vectores adimensionales (sin unidad), de módulo uno (1), utilizados para expresar las direcciones de los vectores, pero ellos no tienen ningún otro significado físico. Se usan simplemente para describir la dirección de un vector en el espacio.



Los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ se usan para indicar las direcciones de los ejes x, y, z respectivamente, estos vectores también se conocen como versores. De esta forma el vector $\vec{A}$ se puede escribir analíticamente así:

$$\vec{A} = Ax\hat{\imath} + Ay\hat{\jmath} + Az\hat{k}$$

Al determinar el vector unitario de un vector dado, se obtiene otro vector cuyo módulo es la unidad y su dirección y sentido es la misma del vector del cual es unitario. El vector unitario se expresa como $\widehat{U} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

El vector $\vec{A}$ en función de su vector unitario se expresa de la siguiente manera:

$$\widehat{U} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{Ax\hat{\imath}+Ay\hat{\jmath}+Az\hat{k}}{|\vec{A}|}$$

Ejemplo: Dados los siguientes puntos en el espacio A(0,0,0) y B(4,5,3) expresar el vector $\overrightarrow{AB}$ en términos de los vectores unitarios y encontrar un vector unitario $\widehat{U}$ en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

Para determinar las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, se resta la componente X del extremo B con la componente X del origen A, la componente Y del extremo B con la componente Y del origen A, la componente Z del extremo B con la componente Z del origen A, de esta manera:

AB (4-0, 5-0, 3-0) = AB (4, 5,3)

La ubicación del punto (4,5,3), la gráfica del vector $\overrightarrow{AB}$ en el espacio y los cosenos directores se pueden observar en la figura 5.

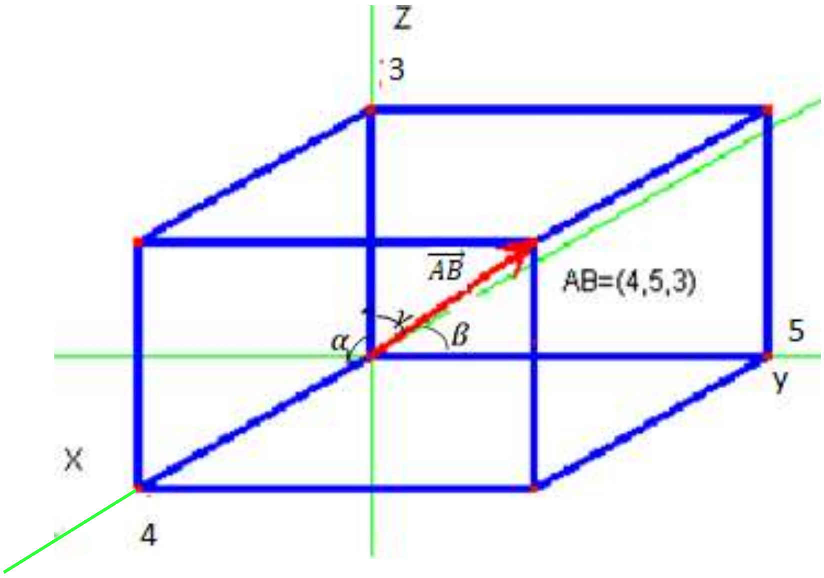


Fig5.ubicación de un punto y un vector en el espacio

Dicho vector se escribe en función de los vectores unitarios de la siguiente forma:

$\overrightarrow{AB} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}.$

El módulo de $\overrightarrow{AB}$ es:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = 5\sqrt{2}$

El vector unitario $\widehat{U}$ será:

$$\widehat{U} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{4\hat{\imath}+5\hat{\jmath}+3\hat{k}.}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{5}{5\sqrt{2}}\hat{\jmath} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{k}$$

Para fijar la dirección de la recta que contiene al vector $\vec{A}$ en el espacio, usamos los cosenos directores mediante las siguientes expresiones:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \qquad \cos\beta = \frac{A_Y}{|\vec{A}|} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

Los cosenos directores para el ejemplo anterior son:

$$\cos\alpha = \frac{AB_X}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0{,}60$$

$$\cos\beta = \frac{AB_y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = 0{,}70$$

$$\cos\gamma = \frac{AB_z}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = 0{,}42$$

3.7 Operaciones con Vectores en Forma Analítica

1.- Suma

Dados los vectores $\vec{A} = Ax\hat{\imath} + Ay\hat{\jmath} + Az\hat{k}$ y $\vec{B} = Bx\hat{\imath} + By\hat{\jmath} + Bz\hat{k}$,el vector suma $\vec{S}$ se define como:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (Ax + Bx)\hat{\imath} + (Ay + By)\hat{\jmath} + (Az + Bz)\hat{k}$$

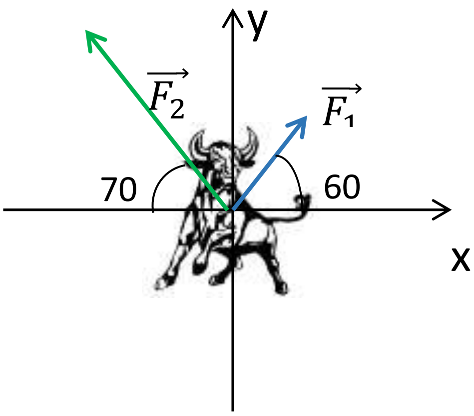
2- Diferencia

Sean los vectores $\vec{A} = Ax\hat{\imath} + Ay\hat{\jmath} + Az\hat{k}$ y $\vec{B} = Bx\hat{\imath} + By\hat{\jmath} + Bz\hat{k}$, se define el vector diferencia $\vec{D}$ como:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (Ax - Bx)\hat{\imath} + (Ay - By)\hat{\jmath} + (Az - Bz)\hat{k}$$

Ejercicios resueltos

Dos estudiantes de producción animal intentan introducir a una manga un obstinado toro para Vacunarlo, jalándolo mediante dos cuerdas. Cada uno de ellos ejercen fuerzas de módulos F_1= 90N y F_2= 110N que forman ángulos de 60º y 70º respectivamente, como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza neta que ejercen los estudiantes sobre el toro.

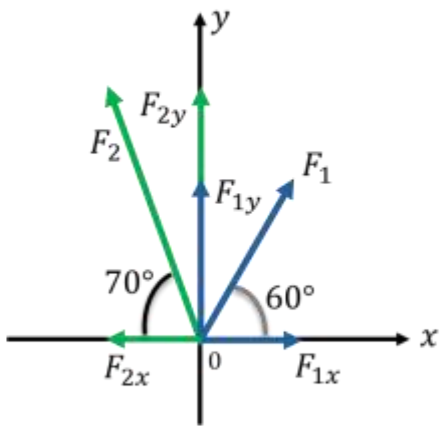


Solución:

Para poder calcular la fuerza neta o fuerza resultante, es necesario indicar las componentes de los vectores $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$

$\overrightarrow{F_{1X}} = F_1.\cos 60 = 90N.\cos 60^o = 45,00N$ =45,00i N

$\overrightarrow{F_{1y}} = F_1.sen 60 = 90N.sen 60^o = 77,94N$ =77,94j N



$siendo \vec{F_1} = \vec{F_{1x}}\hat{i} + \vec{F_{1y}}\hat{j}$

$\vec{F_1} = 45,00\hat{i} + 77,94\hat{j}[N]$

$\vec{F_{2X}} = \vec{F_2}.\cos 70^{\circ} = -110N.\cos 70^{o} = -37,62N$

$\vec{F_{2y}} = \vec{F_2}.sen 70^{\circ} = 110N.sen70^{o} = 103,36N.$ De donde

$\vec{F_2} = \vec{F_{2x}}\hat{i} + \vec{F_{2y}}\hat{j}$

$\vec{F2} = -37,62\hat{i} + 103,36\hat{j}[N]$

La fuerza neta se obtiene sumando $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ asì:

$\vec{F_R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x})\hat{i} + (F_{1y} + F_{2y})\hat{j}$

$\vec{F_R} = (45,00 + 37,62)\hat{i} + (77,94 + 103,36)\hat{j}[N]$

$\vec{F_R} = 7,38\hat{i} + 181,30\hat{j}[N]$

si el toro retrocede con una fuerza $\vec{F_T} = 12,5\hat{i} - 230,0\hat{j}[N]$.

Calcular la diferencia entre la fuerza neta ejercida por los estudiantes y la fuerza del toro.

$\vec{D} = \vec{F_R} - \vec{F_T} = (7,38\hat{i} + 181,30\hat{j}) - (12,5\hat{i} - 230,0\hat{j})[N]$.

$\vec{D} = (7,38 - 12,5)\hat{i} + (181,30 + 230,0)\hat{j}$

$\vec{D} = [-5,12\hat{i} + 411,30\hat{j}][N]$.

3. Producto Escalar o Producto Punto

El producto escalar de dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ es una cantidad escalar que se obtiene multiplicando los módulos de los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ por el coseno del ángulo θ entre ellos.
Se escribe $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ y se lee $\vec{A}\ punto\ \vec{B}$

$\vec{A}\,.\,\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = ABcos\theta$

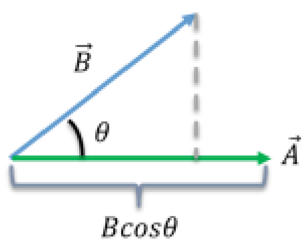
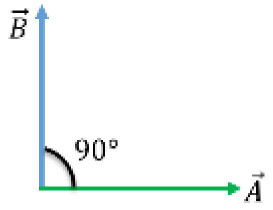


Fig6.proyección del vector B sobre el vector A

Podemos decir que el producto escalar $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ es igual al módulo o magnitud de $\vec{A}$ multiplicado por la proyección del vector $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$, como se observa en la figura 6

Casos especiales:

1.- Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares ($\theta = 90°$), entonces $\vec{A}\,.\vec{B}$ = 0



2.- Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ apuntan en la misma dirección ($\theta = 0°$), entonces $\vec{A}\,.\vec{B}$ =. Se dice que el producto escalar en este caso es máximo ya que cos0°=1.

3.- Si los vectores $\vec{A}$ y $\overrightarrow{B}$ apuntan en direcciones opuestas ($\theta = 180°$), entonces $\vec{A}\,.\vec{B}$ = -AB el producto escalar es mínimo ya que Cos 180° = -1

4.- Si $\theta < 90°$ el producto escalar será positivo.

5.- Si $90° < \theta < 180°$ entonces el resultado del producto escalar es un número negativo.

Propiedades del producto escalar

1.- Es conmutativo: $\vec{A}\,.\vec{B}$ =$\vec{B}\,.\vec{A}$

2.- Es distributivo: $\vec{A}\,.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}\,.\vec{B}$ +$\vec{A}\,.\vec{C}$

3.- m($\vec{A}\,.\vec{B}$) = $(m\vec{A}\,).\vec{B}$ = $\left(\vec{A}\,.\vec{B}\right).m$ donde m es un escalar.

Producto escalar de vectores unitarios

Sabemos que los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ están en las direcciones positivas x, y, z respectivamente y que tienen módulo igual a 1.

Aplicando la definición del producto escalar tenemos: $\hat{\imath}.\hat{\imath} = |\hat{\imath}|.|\hat{\imath}|cos0° = 1.1.1 = 1$, de la misma forma se determina que: $\hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$; si multiplicamos $\hat{\imath}.\hat{\jmath}$ se tiene

$\hat{\imath}.\hat{\jmath} = |\hat{\imath}|.|\hat{\jmath}|cos90° = 1.1.0 = 0$; de igual forma se obtiene que : $\hat{\imath}.\hat{k} = \hat{\jmath}.\hat{k} = 0$

En la siguiente tabla se resume el producto escalar de los vectores unitarios:

.	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

Producto escalar de dos vectores conociendo sus expresiones analíticas

Consideremos los vectores: $\vec{A} = Ax\hat{\imath} + Ay\hat{\jmath} + Az\hat{k}$ y $\vec{B} = Bx\hat{\imath} + By\hat{\jmath} + Bz\hat{k}$

El producto escalar de dichos vectores es: $\vec{A} \, . \vec{B} = (AxBx) + (AyBy) + (AzBz)$

Si $\vec{A} = \vec{B}$ $entonces$:

$$\vec{A} \, . \vec{A} = Ax^2 + Ay^2 + Az^2 = \left|\vec{A}\right|^2$$

4. Producto Vectorial o Producto Cruz

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define el producto vectorial de dichos vectores representado por $\vec{A} \times \vec{B}$ (se lee $\vec{A}$ $cruz$ $\vec{B}$) como el vector que tiene las siguientes características:

- El módulo es igual al producto de los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ multiplicado por el seno del ángulo que se forma entre ellos: $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| sen\theta = ABsen\theta$
- La dirección del vector resultante es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$
- El sentido está determinado por la regla de la mano derecha, ilustrado en la figura7

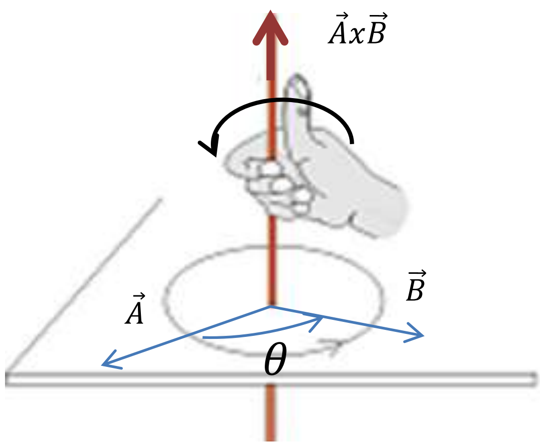


fig7.regla de la mano derecha

La regla consiste en girar los dedos de A $hacia$ B cerrando la mano de acuerdo al ángulo θ. El sentido del producto vectorial lo da el pulgar extendido.

Propiedades del Producto Vectorial

1.- No es conmutativo: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2.- Es distributivo: $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

3.- $m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)m$; donde m es un escalar.

4.- Si $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son diferentes de cero y $\vec{A} \times \vec{B} = 0$, entonces $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son paralelos.

($\theta = 0°\ \ o\ \theta = 180°$)

5.- Si los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son perpendiculares, entonces $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|$= AB

Producto vectorial de vectores unitarios

Para este producto se cumple que:

$$\overrightarrow{U_1} \times \overrightarrow{U_2}\ \ puede\ ser \begin{Bmatrix} 0\ si\ \widehat{U}_1 \parallel \widehat{U}_2 \\ o \\ \widehat{U}_3\ si\ \widehat{U}_1 \perp \widehat{U}_2 \end{Bmatrix}$$

$\perp$ = perpendiculares

$\parallel$ = paralelos

De acuerdo a esto tenemos:

$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = |\hat{\imath}|.|\hat{\imath}|sen0° = 1.1.0 = 0.$

De igual manera obtenemos que: $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

Si multiplicamos: $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = |\hat{\imath}|.|\hat{\jmath}|sen90° = 1.1.1 = 1$

Así mismo tenemos que: $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{k} = 1$

Resumiendo, en la siguiente tabla se muestran los cálculos de la multiplicación vectorial de vectores unitarios:

$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0$	$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0$	$\hat{k} \times \hat{k} = 0$
$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$	$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$	$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$
$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$	$\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$	$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$

Producto Vectorial en Forma Analítica

Sean los vectores: $\vec{A} = Ax\hat{\imath} + Ay\hat{\jmath} + Az\hat{k}$ y $\vec{B} = Bx\hat{\imath} + By\hat{\jmath} + Bz\hat{k}$

El producto vectorial $\vec{A}$ con $\vec{B}$ puede expresarse así:

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

Obteniéndose que:

$$\vec{A}\,x\,\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}$$

Actividades Complementarias

1. Construye un mapa conceptual sobre las magnitudes físicas escalares y vectoriales, que incluya por lo menos los siguientes aspectos: ¿Qué son? ¿Cuáles son sus características? ¿Qué utilidad tienen? ¿Cómo se pueden representar? ¿Qué importancia tienen en la descripción de fenómenos físicos? Indique ejemplos de cada una de las magnitudes.

2. Repase el teorema de Pitágoras, las funciones Trigonométricas y las leyes del seno y el coseno utilizando un triángulo rectángulo y uno oblicuángulo.

3. Elabore una lista de 5 magnitudes escalares relacionadas con fenómenos que ocurran a tu alrededor.

4. Elabore una lista de 5 magnitudes vectoriales relacionadas con fenómenos que ocurran a tu alrededor.

5. Analice si de la combinación de las magnitudes escalares y vectoriales mencionadas anteriormente, resultan magnitudes que tengan un significado desde el punto de vista físico

6. Utilizando elementos tales como: alambres, cables, palillos, pitillos, plastilina y otros, construye un modelo tridimensional para visualizar un vector en el espacio con sus componentes rectangulares.

Preguntas de Selección con Única Respuesta

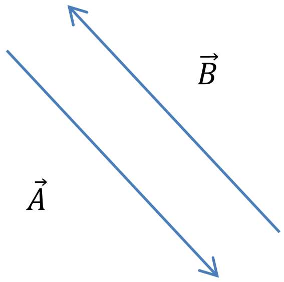
1. Son magnitudes escalares:
    a. Fuerza y aceleración
    b. Velocidad angular y tiempo
    c. Trabajo y masa
    d. Impulso y momento cinético

2. Las siguientes magnitudes tienen carácter vectorial:
    a. La energía cinética y el volumen
    b. Desplazamiento y torque
    c. Aceleración y rapidez
    d. Peso y trabajo

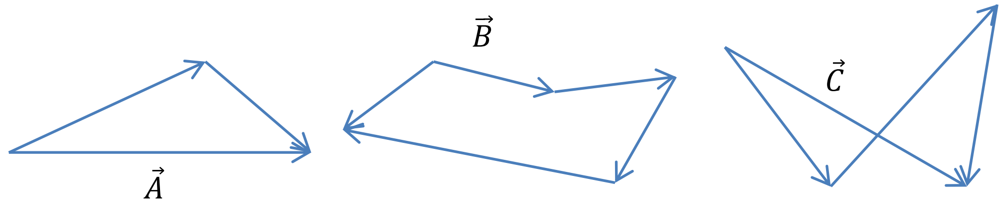
3. El tiempo transcurrido desde la formación del sistema solar hasta nuestros días, es una magnitud:
    a. Escalar, ya que es un número acompañado de su correspondiente unidad.
    b. Vectorial, porque el tiempo transcurre sólo hacia adelante
    c. Fundamental e invariable
    d. Constante ya que el sistema solar no envejece.

4. Es un ejemplo de magnitud vectorial:
    a. El tiempo, ya que se puede medir y siempre tiene sentido; transcurre hacia adelante. Podemos hablar de un tiempo antes de Cristo (A.C) y después de Cristo (D.C); como ocurre con los vectores, unos tienen sentido positivo y otros sentidos negativos.
    b. El petróleo que produce el país, ya que tiene origen (los yacimientos), una magnitud (número de barriles diarios), un sentido (recolectar divisas para el desarrollo del país) y una dirección (las grandes refinerías del mundo).
    c. La vida de un hombre, ya que tiene origen (al nacer), una magnitud (la edad), Un sentido (llegar a viejo y alcanzar sus objetivos) y una dirección (la muerte).
    d. Cuando el automóvil del piloto venezolano Pastor Maldonado Experimenta variaciones de velocidad en la pista.
5. Las componentes de un vector:
    a. Son independientes de la magnitud del vector
    b. Están afectadas de un signo dependiendo del cuadrante donde se encuentren ubicadas
    c. No están afectadas de un signo ya que son independientes del cuadrante donde están ubicadas.
    d. Son independientes de la dirección y sentido del vector

6. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura son:
   a. Nulos porque $\vec{A} + \vec{B} = 0$
   b. Opuestos, ya que tienen igual módulo, dirección y sentido
   c. Opuestos, ya que tienen igual módulo y dirección, pero sentidos contrarios.
   d. Inversos porque $\vec{A} = \vec{B}$

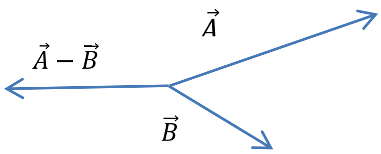


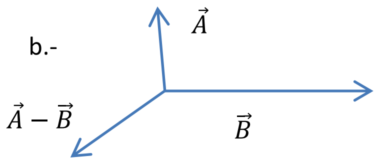
7. En las siguientes figuras, son vectores resultantes de sumas vectoriales:

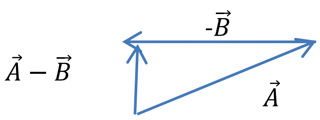


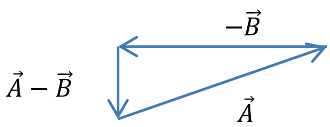
   a. $\vec{B}\ y\ \vec{C}$
   b. $\vec{A}\ y\ \vec{B}$
   c. $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$
   d. $\vec{A}\ y\ \vec{C}$

8. Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el vector diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ es:

a.-


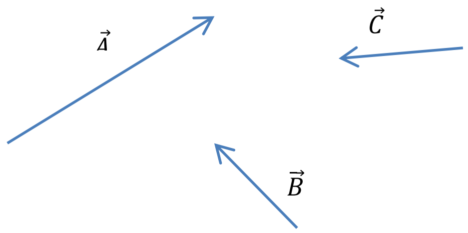
b.-


c.-


d.-


Problemas propuestos

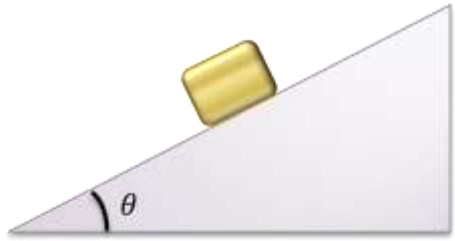
1. Hallar en forma geométrica las siguientes sumas y diferencias con los vectores dados $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$
   a. $\vec{A} + \vec{B}$
   b. $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$
   c. $\vec{A} - \vec{B}$
   d. $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$



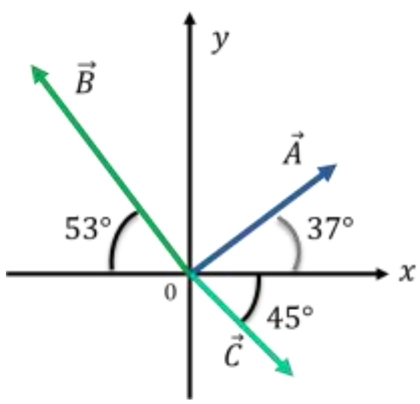
2. Un barco navega hacia el norte con una rapidez de 10 nudos. Sabiendo que la rapidez de la marea es de 5 nudos y dirigida hacia el Oeste, calcule el módulo, dirección y sentido del vector velocidad resultante del barco.
   NOTA: El nudo es la velocidad de un barco que recorre una milla marina (1852m) por hora. Es decir que 1 nudo equivale a 1,852 km/h.

3. Un joven tira de una cuerda atada a un cuerpo con una fuerza de 200 N. La cuerda forma un ángulo de 30º con el suelo. Hallar las componentes de la fuerza aplicada sobre la cuerda.

4. Una caja de peso w =350N se apoya sin rozamiento en un plano inclinado de θ =25º con la horizontal. Hallar:
   a. Las componentes del peso
   b. El mínimo valor de la fuerza F paralela al plano que será necesario aplicar a la caja para que ascienda por el plano inclinado.



5. Dados los vectores de la figura



$|\vec{A}|$= 20 unidades

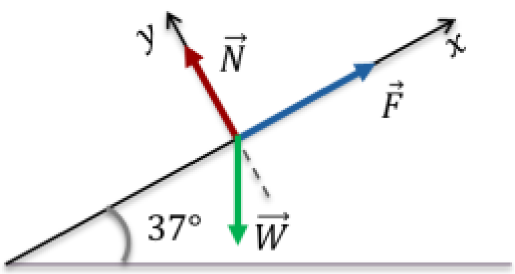
$|\vec{B}|$= 5 unidades

$|\vec{C}|$ = 10 unidades

Calcular:

a. Las componentes de cada vector
b. La componente del vector suma resultante
c. La magnitud del vector suma $|\vec{S}|$
d. La dirección del vector suma

6. La suma de los tres vectores de la figura es igual a cero. ¿Cuál debe ser el valor de los vectores F y N?



7. Un ingeniero agrónomo quiere calcular el ancho de un río y para ello se queda de pie directamente frente a un árbol en el lado opuesto. Luego camina 80m a lo largo de la ribera del río y después mira hacia el árbol. El ángulo que se forma entre la línea que parte del ingeniero y termina en el árbol es de 37º. ¿cuál es el ancho del río?
8. Un atleta camina 100m hacia el este, a continuación, 60m hacia el sur, después 40m hacia el oeste y finalmente 20m hacia el norte. Determine:
   a. La magnitud del vector desplazamiento desde el punto de partida al de llegada
   b. La dirección de dicho vector
9. El pirata Jack Sparrow se quedó atrapado en un laberinto mientras buscaba un tesoro. Para encontrar la salida camina 20m hacia el norte (de acuerdo a su brújula), luego da un giro de 90ºa la derecha y camina 10m, efectúa otro giro de 90ºa la derecha y camina 15m. Determine el módulo y la dirección del vector desplazamiento desde su posición inicial.
10. El vagón de una montaña rusa se mueve 60,96m horizontalmente y después viaja 41,15m en un ángulo de 30ºsobre la horizontal. Luego recorre 41,15m en un ángulo de 40º por debajo de la horizontal. ¿Cuál es el desplazamiento del vagón desde su punto de partida? ¿Qué dirección tiene dicho vector?
11. En el primer día de una excursión, un montañista camina desde su campamento 28Km hacia el sureste, formando un ángulo de 45º por debajo de la horizontal. El segundo día camina 45km en una dirección de 60º al noreste, llegando a un segundo campamento. Calcule la magnitud del vector desplazamiento entre los dos campamentos.