Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Independencia Lineal y Base de un Espacio Vectorial

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

Independencia y Dependencia Lineal

- Empecemos este tema por la definición formal que aparece en el libro de algebra lineal de Grossman:

Definición

Dependencia e independencia lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero* tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

Ejemplo:

Consideremos en $V = \mathbb{R}^3$ los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ podemos ver que los tres vectores son linealmente dependientes porque:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6-8 \\ -2+12-10 \\ 0-3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir conseguimos tres escalares distintos de cero tales que su combinación lineal es igual al vector nulo.

Ejemplo:

Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no son linealmente dependientes porque la única forma que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. En ese caso decimos que los vectores son linealmente independientes.

El siguiente teorema puede resultar útil:

Teorema: Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son linealmente dependientes si al menos uno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros vectores

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes porque $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, es decir, porque $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ es combinación lineal de los otros dos vectores.

Sistemas de Ecuaciones lineales Homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si los términos constantes de todas las ecuaciones son iguales a cero, es decir, es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

De lo contrario se dice que no es homogéneo. Estos sistemas son compatibles porque al menos tienen la solución trivial $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0,0, \ldots, 0)$. Pero pueden ser determinados o indeterminados. Es decir pueden tener una única solución o infinita soluciones.

Relación entre sistemas lineales homogéneos y vectores linealmente independientes:

- El siguiente teorema nos aporta una herramienta útil para determinar si un conjunto de vectores es linealmente independientes

Teorema

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ejemplo: Determine si en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\{(2,-1,3),(4,0,2),(-1,-6,0)\}$ son L.I.

Como son tres vectores vamos a buscar tres escalares $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que

$$x(2,-1,3) + y(4,0,2) + z(-1,-6,0) = (0,0,0)$$

Realizamos las operaciones indicadas en el lado izquierdo:

$$(2x + 4y - z, -x + 4y - 6z, 3x + 2y) = (0,0,0)$$

Igualamos las componentes de cada vector y nos queda el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x - 6z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Vemos que el sistema es homogéneo, si es determinado los vectores son LI de lo contrario son linealmente dependientes. Aplicamos el método de Gaus-Jordan para averiguarlo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & -11 & 0 \\ 0 & 2 & -18 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -18 & 0 \\ 0 & 4 & -11 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{1/2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{-4R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{1/25R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -6R_3 + R_1 \\ 9R_3 + R_2 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

De la última matriz vemos que el sistema es compatible determinado y por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo: Determinar si en P_2 el conjunto el conjunto $\{-x, x^2 - 2x, 3x + 5x^2\}$

Igual que en el caso anterior buscamos tantos escalares como vectores tenga el conjunto, en este caso buscamos tres escalares $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1(-x) + c_2(x^2 - 2x) + c_3(3x + 5x^2) = 0x^2 + 0x + 0$$

Multiplicando y sumando polinomios obtenemos

$$-c_1x + c_2x^2 - 2c_2x + 3c_3x + 5c_3x^2 = 0x^2 + 0x + 0$$
$$(c_2+5c_3)x^2 + (-c_1 - 2c_2 + 3c_3)x = 0x^2 + 0x + 0$$

Por la igualdad de polinomios planteamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} c_2 + 5c_3 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases}$$

Usamos el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{-2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

De esta última matriz vemos que el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz aumentada pero diferente al número de incógnitas por lo tanto el sistema es compatible indeterminado y los vectores son linealmente dependientes.

Ejercicios Propuestos: Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente independiente.

1. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $4 - 3x + 3x^2, 4 - 2x - 2x^2$

7. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

8. En $C[0, 1]$: e^x, e^{-x}

9. En $C[0, 1]$: $\operatorname{sen} x, \cos x$

10. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}$?

Base de un espacio Vectorial

Definición

Base

Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^n$ el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ definidos como siguen son una base y se denomina base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- En P_n el conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base y se denomina la base canónica para P_n.

El siguiente teorema nos dice que un vector se escribe de forma única como una combinación lineal de los elementos de la base.

Teorema

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V y si $\mathbf{v} \in V$, entonces existe un conjunto *único* de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$.

Por ejemplo, podemos ver que para el polinomio $x^3 - 4x + 1$ los únicos escalares que existen para que se pueda escribir como combinación lineal de la base canónica son $c_1 = 1, c_2 = -4, c_3 = 0, c_4 = 1$, no existe otra posibilidad.

- En un espacio vectorial no pueden existir dos bases con cantidades diferentes de vectores.

Teorema

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son bases en un espacio vectorial V, entonces $m = n$; es decir, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

- Lo que permite plantear la siguiente definición:

Dimensión

Si el espacio vectorial V tiene una base con un número finito de elementos, entonces la **dimensión** de V es el número de vectores en todas las bases y V se denomina **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera, V se denomina **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.

Ejemplos:

- El espacio $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n, lo que denotamos por $Dim(\mathbb{R}^n) = n$ porque la base canónica tiene n elementos y por el teorema visto anteriormente toda base va a tener la misma cantidad de vectores.
- El espacio P_n tiene dimensión $n + 1$, es decir, $Dim(P_n) = n + 1$
- El espacio de las matrices de tamaño $n \times m$, M_{nm}, la dimensión es $m.n$, ¿por qué?, una respuesta a esto lo pueden ver en la página 315 del libro de Algebra Lineal de Grossman.
- El espacio de todas las funciones reales continuas en $[0,1]$ tiene dimensión infinita, porque no existe una base finita para este espacio.

Ejercicio: Determine si el conjunto $A = \{(0,0,-4),(1,2,-1),(5,9,0)\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$

Tenemos que revisar si los vectores son linealmente independientes y si generan a todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Para ello podemos considerar un elemento general del espacio (a,b,c) y buscar tres escalares c_1, c_2, c_3 tales que:

$$c_1(0,0,-4) + c_2(1,2,-1) + c_3(5,9,0) = (a,b,c)$$
$$(c_2 + 5c_3, 2c_2 + 9c_3, -4c_1 - c_2) = (a,b,c)$$

Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_2 + 5c_3 = a \\ 2c_2 + 9c_3 = b \\ -4c_1 - c_2 = c \end{cases}$$

Para que el conjunto A sea base el sistema anterior debe ser compatible determinado. Lo compatible nos indica que el conjunto genera a todo $\mathbb{R}^3$ y lo determinado que es linealmente independiente.

- Resolvemos el sistema por el método de eliminación de Gauss- Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & a \\ 0 & 2 & 9 & b \\ -4 & -1 & 0 & c \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 0 & c \\ 0 & 2 & 9 & b \\ 0 & 1 & 5 & a \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{\substack{-\frac{1}{4}R_1 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 0 & -c/4 \\ 0 & 1 & 5 & a \\ 0 & 2 & 9 & b \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{\substack{-\frac{1}{4}R_2 + R_1 \\ -2R_2 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & -\frac{c}{4} - \frac{a}{4} \\ 0 & 1 & 5 & a \\ 0 & 0 & -1 & b - 2a \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & -\frac{a+c}{4} \\ 0 & 1 & 5 & a \\ 0 & 0 & 1 & 2a - b \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{\substack{-\frac{4}{5}R_3 + R_1 \\ -5R_3 + R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9a - 5b - c}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -9a + 5b \\ 0 & 0 & 1 & 2a - b \end{array}\right)$$

Podemos ver que el sistema es compatible determinado por lo que el conjunto A es una base de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Encontrar una base para el subespacio $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$

Para encontrar una base para π partimos que si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi$ entonces

$$2x - y + 3z = 0$$

Es decir, $y = 2x + 3z$ así

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo que nos indica que $\pi = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y también puede verse que ambos vectores son linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro) , por lo tanto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para π y $Dim\ \pi = 2$

Los siguientes teoremas pueden ser útiles para saber si un conjunto es una base para un espacio vectorial:

Teorema

Suponga que dim $V = n$. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ es un conjunto de m vectores linealmente independientes en V, entonces $m \leq n$.

Teorema

Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces H tiene dimensión finita y

$$\boxed{\dim H \leq \dim V}$$

Teorema

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n constituyen una base para V.

Ejemplo: aplicación de los teoremas anteriores

- El conjunto de vectores $\{(1,2),(1,1),(1,0)\}$ no es linealmente independiente porque la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2 y el conjunto tiene tres vectores de acuerdo al primer teorema anterior para que un conjunto en $\mathbb{R}^2$ sea linealmente independiente la cantidad de vectores debe ser menor o igual a 2.

- El conjunto $\{(1,2),(1,1)\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$ porque tiene dos vectores que son linealmente independientes porque ninguno es múltiplo del otro. De acuerdo al último teorema es condición suficiente para garantizar que es una base para $\mathbb{R}^2$.

Ejercicios Propuestos

- Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial al que se refiere:

1. En P_2: $x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3$
2. En P_3: $1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$
3. En P_2: $10 - x - 10x^2, -23 + 14x + 53x^2, -1 + 4x + 11x^2$
4. En P_3: $3, x^3 - 4x + 6, x^2$
5. En M_{22}: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - y = 0\}$; $(1, 1), (4, 4)$
7. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 2x + 3y = 0\}$; $(3, -6), (6, -4), (-6, 4)$

- Encuentre una base para los siguientes subespacios:

$H_1 = \{(x, y, z): x + 2y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): 3y + 2z = 0\}$

- Halle una base para el conjunto solución de los siguientes sistemas homogéneos:

1. $$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 2x + 8y - 10z &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 - 8x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 11x_2 - 11x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 12x_1 + 11x_3 - 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$