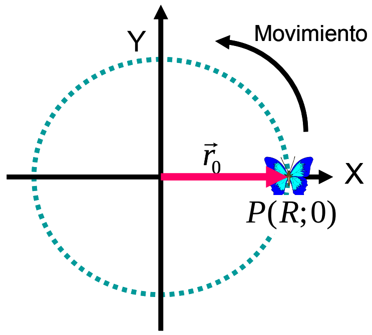
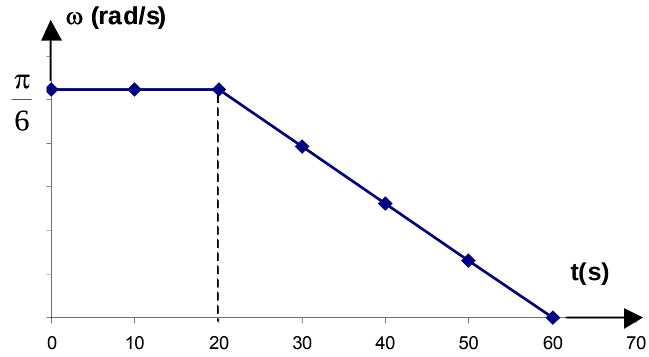
PROBLEMA 3 : Una partícula m se mueve respecto a un sistema de coordenadas XY, describiendo una trayectoria circular de radio R = 0,50 m sobre una mesa de aire, sin fricción, tal y como se muestra en la figura. En el instante t=0s, la partícula pasa por el punto de coordenadas (R, 0) m con una rapidez constante de p/6 rad/s . A los 20 s comienza a disminuir uniformemente su rapidez angular hasta llegar al reposo al cabo de 60 s como se indica en el gráfico $\omega = \omega(t)$.





Determinar:

1. La posición angular para el instante de tiempo t=20s
2. El vector posición ($\vec{r}$) para el instante t=20s:
3. La velocidad angular de la partícula a los 30s.
4. Para el instante t= 30s, La velocidad de la partícula en (m/s):
5. El módulo de la aceleración tangencial de la partícula para t=30s.
6. La aceleración de la partícula para t=30s.
7. Número de vueltas que realiza la partícula durante todo el movimiento
8. En el intervalo $0 \le t \le 20\ s$ ¿La aceleración centrípeta de la partícula es constante?

Para la solución de este problema haremos uso de los siguientes Conceptos, Leyes y Principios.

Leyes y principios	Conceptos	
✓ Cinemática de la partícula	✓ Posición	✓ Velocidad Angular
✓ Trigonometría	✓ Posición Angular	✓ Aceleración Angular
✓ Ecuación de la recta	✓ Desplazamiento Angular	✓ Movimiento en dos dimensiones
	✓ Velocidad	✓ Suma de vectores
	✓ Aceleración	✓ Sistema de Referencia

Se observa que en la figura se indica el vector posición, la posición angular y la rapidez angular en t=0s. A partir de la gráfica de ω(t) obtenemos las velocidades angulares, aceleraciones angulares y desplazamientos angulares que experimenta la partícula durante los movimientos, con esta información es posible construir las funciones posición angular y velocidad angular para cada una de las etapas del movimiento.

SOLUCIÓN

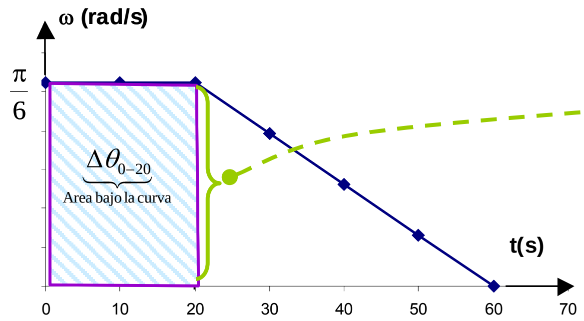
1. La posición angular para el instante de tiempo t=20s.

La posición angular para ese instante de tiempo se puede determinar:

a. A partir del gráfico ω(t), calculando el desplazamiento de la partícula entre los 0 y 20 s

b. Estableciendo la función posición angular para el movimiento de la partícula en el intervalo de 0 a 20 s y calculando la posición a partir de esta ecuación.

A) A PARTIR DEL GRÁFICO :



Podemos determinar el **desplazamiento angular de la partícula a partir de la gráfica ω(t) como el área bajo curva.** Para ello hallamos el área que esta comprendida entre la curva y el eje del tiempo. En este caso, sería el área de un rectángulo.

$$\text{Area de un rectángulo} = b\times h = \frac{\pi}{6}\times 20 = \frac{10\pi}{3}\ rad$$

$$\Delta\theta_{0-20} = \text{Area bajo la curva} \Rightarrow \Delta\theta_{0-20} = \frac{10\pi}{3}\ rad$$

Por definición el desplazamiento angular es la variación de la posición angular: $\Delta\theta_{0-20} = \theta_{20} - \theta_0$

Si despejamos la posición angular para t=20s: $\theta_{20} = \Delta\theta_{0-20} + \theta_0$

Entonces podemos obtener la posición angular para ese instante de tiempo:

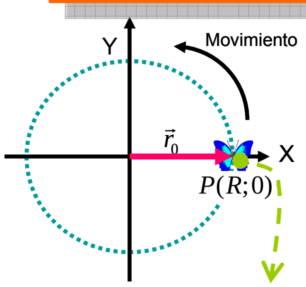
$$\theta_{20} = \underbrace{\Delta\theta_{0-20}}_{\text{Area bajo la curva } \omega(t)} + \theta_0$$

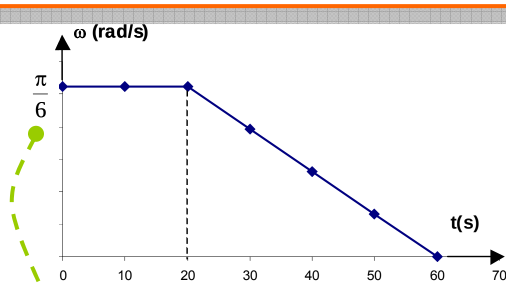
$$\theta_{20} = \frac{10\pi}{3}\ rad + (0\,rad) \Rightarrow \boxed{\theta_{20} = \frac{10\pi}{3}\ rad}$$

B) A PARTIR DE LA FUNCIÓN POSICIÓN ANGULAR

Para el intervalo de tiempo 0≤t ≤20 s., la partícula experimenta un MCU, la función posición angular que describe este movimiento es: $\theta = \theta_0 + \vec{\omega}\, t$

Donde: $\begin{cases} \theta: \text{Posición Angular de la partícula en cualquier instante dentro de un intervalo de tiempo} \\ \theta_0: \text{Posicion Angular al inicio del intervalo} \\ \omega: \text{Velocidad Angular al inicio del intervalo} \end{cases}$





De la figura observamos que el vector Posición y el eje X inicialmente forman un ángulo de 0 rad, es decir que la posición angular en t=0s es 0 rad. $\theta_0 = 0 rad$

De la gráfica ω(t) tomamos el valor de la velocidad angular en t=0s.

$$\omega = \frac{\pi}{6}\ rad/s$$

Ahora construimos la función posición angular que describe el movimiento de la partícula en el intervalo 0≤t ≤20 s.

$$\theta = \theta_0 + \vec{\omega}\, t \Rightarrow \theta = 0 + \frac{\pi}{6}\, t$$

En el instante de tiempo t=20s, la posición angular de la partícula es:

$$\theta_{20} = 0 + \frac{\pi}{6}\times 20$$

$$\boxed{\theta_{20} = \frac{10}{3}\pi\ \ rad}$$

2. El vector posición $\vec{r}$ para el instante t=20s:

La posición de la partícula para cualquier instante de tiempo la podemos calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\vec{r} = r\ Cos\ \theta\ \hat{i} + r\ Sen\ \theta\ \hat{j}$$

Donde:

$\vec{r}$ es la posición de la partícula para un instante de tiempo t

r es el radio de la trayectoria descrita por la partícula

θ es la posición angular de la partícula para un instante de tiempo t

De la ecuación anterior observamos que para determinar la posición ($\vec{r}$) de la partícula en un instante de tiempo dado, primero debemos calcular la posición angular (θ) en ese instante de tiempo. Es decir:

$$\vec{r}_t = r\ Cos\ \theta_t\ \hat{i} + r\ Sen\ \theta_t\ \hat{j}$$

Luego para determinar la posición de la partícula en el instante t=20s debemos calcular la posición angular para t=20s, este valor se calculó en la **pregunta 1** por lo que: $\theta_{20} = \dfrac{10\pi}{3}\ rad$

Finalmente, para el instante t=20s, la posición de la partícula es:

$$\vec{r}_{20} = r\ Cos\ \theta_{20}\ \hat{i} + r\ Sen\ \theta_{20}\ \hat{j}$$

$$\vec{r}_{20} = 0{,}5\ Cos\ (\frac{10\pi}{3})\ \hat{i} + 0{,}5\ Sen\ (\frac{10\pi}{3})\ \hat{j} \Rightarrow \vec{r}_{20} = 0{,}5\ Cos\ (\frac{10\pi}{3})\ \hat{i} + 0{,}5\ Sen\ (\frac{10\pi}{3})\ \hat{j}$$

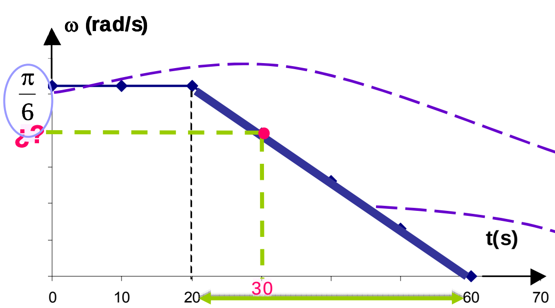
$$\boxed{\vec{r}_{20} = -0{,}25\ \hat{i} - 0{,}43\ \hat{j}\ \ m}$$

3. La velocidad angular de la partícula a los 30s.

Si observamos en el gráfico ω(t), no se logra leer el valor de la velocidad angular de la partícula para este instante de tiempo (30s.). Por lo tanto debemos conseguir otra forma de hacerlo. A partir del gráfico podemos primero construir la función velocidad angular del movimiento experimentado por la partícula para ese intervalo (20 a 60s), para luego calcular con esa función la velocidad angular de la partícula a los 30s.

Observamos que la partícula esta experimentando un movimiento circular uniformemente variado en ese intervalo (20 a 60s), la función velocidad angular que describe este movimiento es: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\alpha} t$

Donde:
$$\begin{cases} \vec{\omega}: \text{Velocidad angular de la partícula en cualquier instante dentro de un intervalo de tiempo} \\ \vec{\omega}_0: \text{Velocidad angular al inicio del intervalo} \\ \vec{\alpha}: \text{Aceleración angular en el intervalo} \end{cases}$$



Para construir la función velocidad angular que describe el movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo 20≤t≤60s.:

a. Leemos, del gráfico ω(t), el valor de la velocidad angular que tiene la partícula al inicio del movimiento circular uniformemente variado, es decir en t=20s.

$$\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_{20} = \frac{\pi}{6}\ \ rad/s$$

b. En el intervalo 20≤t≤60s., calculamos el valor de la aceleración angular representada por la pendiente de la línea tangente a la curva en el gráfico ω(t).

$$\vec{\alpha} = \langle \vec{\alpha} \rangle_{20-60} = \frac{\vec{\omega}_{60} - \vec{\omega}_{20}}{\Delta t}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{0 - \frac{\pi}{6}}{60-20} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{\pi}{240}\ \hat{k}\ \ rad/s^2$$

La función velocidad angular del movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo 20≤t≤60s, es:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}\ t \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{240}\ t$$

Recordemos que esta etapa comenzó a los 20s, es decir que t=30-20=10s. Entonces la velocidad angular de la partícula en este instante de tiempo es:

$$\vec{\omega}_{30} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{240} \times 10 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{30} = \frac{\pi}{8}\ \hat{k}\quad rad/s}$$

Nota: Recordemos que siempre que se pida una posición angular o velocidad angular en un instante determinado se le debe restar a este instante de tiempo, el tiempo en el que se inició el movimiento que estamos estudiando

4. Para el instante t= 30s, La velocidad de la partícula en (m/s):

La velocidad de la partícula para cualquier instante de tiempo la podemos calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\vec{v}_t = -r\omega_t\ Sen\ \theta_t\ \hat{i} + r\ \omega_t\ Cos\ \theta_t\ \hat{j}$$

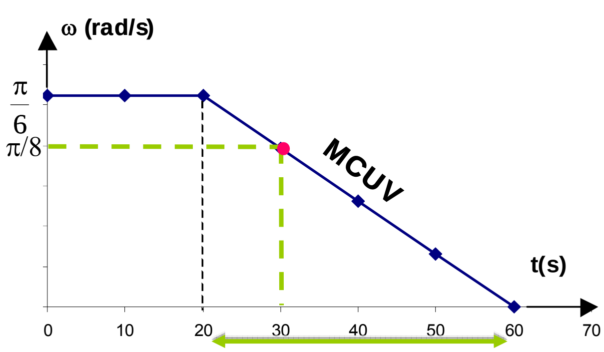
Donde:
- $\vec{v}_t$ es la velocidad de la partícula para un instante de tiempo t
- r es el módulo del vector posición es decir, el radio de la trayectoria descrita por la partícula
- ω_t es la rapidez angular de la partícula para un instante de tiempo t
- θ_t es la posición angular de la partícula para un instante de tiempo t

Para t=30s, la velocidad de la partícula es: $\vec{v}_{30} = -r\omega_{30}\ Sen\ \theta_{30}\ \hat{i} + r\ \omega_{30}\ Cos\ \theta_{30}\ \hat{j}$

Para determinar el valor de la velocidad de la partícula en el instante t=30s, debemos calcular la posición angular (θ) y la velocidad angular (ω) en ese instante de tiempo.

En este caso en la pregunta anterior determinamos el valor de la velocidad angular en t=30s ($\vec{\omega}_{30} = \frac{\pi}{8}\ \hat{k}\quad rad/s$).

Para determinar θ_{30}, podemos hacerlo construyendo la función posición angular que describe el movimiento de la partícula y a partir de esta función determinar θ_{30}. También la podemos calcular a partir del desplazamiento angular entre 0 y 30s.
En este caso vamos a construir la función posición angular entre los 20 y 60s.



La partícula entre 20≤t≤60s describe MCUV, la función posición angular es:

$$\theta = \theta_0 + \vec{\omega}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2$$

Donde:

$$\theta_0 = \theta_{20} = \frac{10\pi}{3}\ rad$$

$$\omega = \frac{\pi}{6}\quad rad/s$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{240}\ rad/s^2$$

Construyendo la función posición angular del movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo 20≤t≤60s, es:

$$\theta = \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{480}t^2$$

Recordemos que esta etapa comenzó a los 20s, es decir que t=30-20=10s. Entonces la posición angular de la partícula en este instante de tiempo es:

$$\theta_{30} = \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\times 10 - \frac{\pi}{480}\times 10^2 \Rightarrow \theta_{30} = \frac{115\pi}{24}\ rad$$

Sustituyendo los valores de θ_{30} y ω_{30} en la ecuación para determinar la velocidad, obtenemos el valor de la velocidad de la partícula en t=30s:

$$\vec{v}_{30} = -r\omega_{30}\ Sen\ \theta_{30}\ \hat{i} + r\ \omega_{30}\ Cos\ \theta_{30}\ \hat{j}$$

$$\vec{v}_{30} = -0,5\times(\frac{\pi}{8})\ Sen\ (\frac{115\pi}{24})\ \hat{i} + 0,5\times(\frac{\pi}{8}) Cos\ (\frac{115\pi}{24})\ \hat{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_{30} = -0,1195\hat{i} - 0,1558\,\hat{j}\ \ m/s}$$

5. El módulo de la aceleración tangencial de la partícula para t=30s:

El módulo de la aceleración tangencial que experimenta la partícula lo determinamos a partir de la siguiente expresión:

$$a_T = \alpha R$$

En t= 30s la partícula esta describiendo un MCUV como contamos con un gráfico ω(t), la aceleración angular de la partícula esta representada como la pendiente de la línea recta. En el desarrollo de la **pregunta 3**, ya se calculó el valor de la aceleración angular:

$$\alpha = -\frac{\pi}{240}\ \hat{k}\ rad/s^2$$

Esta aceleración angular es la misma para todo el intervalo. El módulo de la aceleración tangencial es:

$$a_T = R\alpha$$

$$a_T = 0,5\times\frac{\pi}{240} \Rightarrow \boxed{a_T = 0,0065\ m/s^2}$$

6. La aceleración de la partícula para t=30s:

La aceleración de la partícula para cualquier instante de tiempo la podemos calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\vec{a} = \left(-r\,\omega^2_t \cos\ \theta_t\ \hat{i}\ -\ r\ \omega^2_t sen\ \theta_t\ \ \hat{j}\right) + \left(-r\,\alpha\, sen\ \theta_t\ \hat{i}\ +\ r\ \alpha \cos\ \ \theta_t\ \hat{j}\right)$$

Donde:

$\vec{a}$ es la aceleración de la partícula para un instante de tiempo t

r es el módulo del vector posición es decir, el radio de la trayectoria descrita por la partícula

α es la aceleración angular de la partícula

ω_t es la rapidez angular de la partícula para un instante de tiempo t

θ_t es la posición angular de la partícula para un instante de tiempo t

Para t=30s, la aceleración de la partícula es:

$$\vec{a}_{30} = \left(-r\,\omega^2_{30} \cos\ \theta_{30}\ \hat{i}\ -\ r\ \omega^2_{30} sen\ \theta_{30}\ \ \hat{j}\right) + \left(-r\,\alpha\, sen\ \theta_{30}\ \hat{i}\ +\ r\ \alpha \cos\ \ \theta_{30}\ \hat{j}\right)$$

Para determinar el valor de la aceleración de la partícula en el instante t=30s, debemos calcular la posición angular (θ) y la velocidad angular (ω) en ese instante de tiempo y la aceleración angular experimentada por la partícula.

En este caso los valores de θ_{30}, ω_{30} ya fueron calculados en las preguntas 3 y 4.

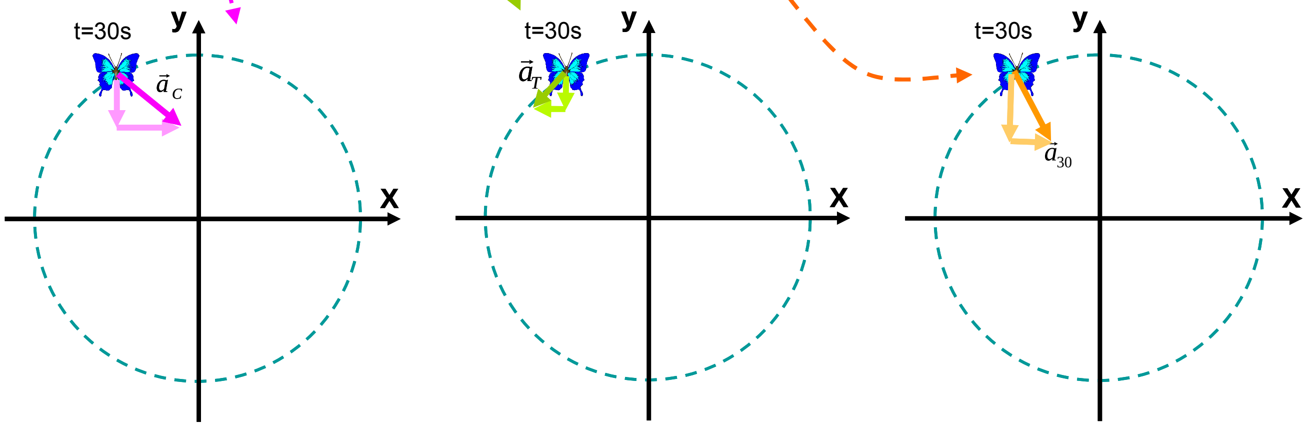
Sustituyendo los valores de θ_{30}, ω_{30} y α, en la ecuación para determinar la aceleración, obtenemos el valor de la aceleración de la partícula en t=30s:

$$\vec{a}_{30} = \left(-r\,\omega^2_{30}\cos\,\theta_{30}\,\hat{i} - r\,\omega^2_{30}\,sen\,\theta_{30}\,\hat{j}\right) + \left(-r\,\alpha\,sen\,\theta_{30}\,\hat{i} + r\alpha\cos\,\theta_{30}\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{a}_{30} = \left(-0,5\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\cos(\frac{115\pi}{24})\hat{i} - 0,5\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 sen(\frac{115\pi}{24})\,\hat{j}\right) + \left(-0,5(-\frac{\pi}{240})\,sen(\frac{115\pi}{24})\,\hat{i} + 0,5(-\frac{\pi}{240})\cos(\frac{115\pi}{24})\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{a}_{30} = \underbrace{(0,061\,\hat{i} - 0,046\,\hat{j})}_{\text{vector aceleración centrípeta}} + \underbrace{(0,004\,\hat{i} + 0,010\,\hat{j})}_{\text{vector aceleración tangencial}}$$

$$\vec{a}_{30} = \underbrace{0,065\,\hat{i} - 0,036\,\hat{j}}_{\text{vector aceleración}}\;m/s^2$$

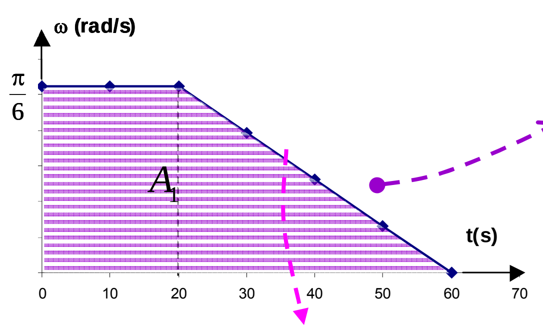


7. Número de vueltas que realiza la partícula durante todo el movimiento.

El número de vueltas que realiza la partícula lo determinamos a partir de la expresión:

$$\text{Nro Vueltas} = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

El desplazamiento angular lo determinamos haciendo uso de la gráfica ω(t), ya que el área bajo la curva representa el desplazamiento angular.



El desplazamiento angular durante todo el movimiento de la partícula es:

$$\Delta\theta_{0-60} = A_1$$

$$A_1 = \text{Area de trapecio} \Rightarrow A_1 = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

$$A_1 = \frac{(60+20)\times\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{20\pi}{3}\,rad$$

$$\Delta\theta_{0-60} = \frac{20\pi}{3}\;rad$$

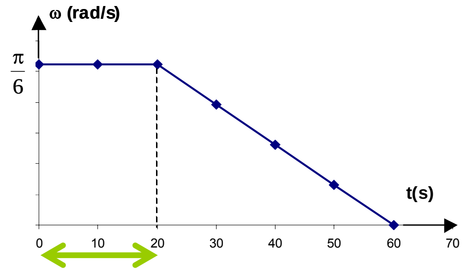
El número de vueltas que realiza la partícula durante su movimiento es:

$$\text{Nro Vueltas} = \frac{\Delta\theta_{0-60}}{2\pi} = \frac{\frac{20\pi}{3}}{2\pi} = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{\text{Nro Vueltas} = 3,33\,vueltas}$$

8. En el intervalo $0 \le t \le 20\ s$ ¿La aceleración centrípeta de la partícula es constante?

Para responder a esta pregunta revisamos el tipo de movimiento que esta desarrollando la partícula en el intervalo 0≤t≤20s, a partir del gráfico ω(t).



El movimiento que experimenta la partícula es MCU, por lo tanto la aceleración de la partícula durante este intervalo es:

$$\vec{a} = \vec{a}_c$$

El módulo de la aceleración centrípeta es: $a_c = r\,\omega^2$

En este caso la rapidez angular (ω) es constante, por lo tanto el módulo de la aceleración centrípeta es constante, sin embargo la aceleración centrípeta no es constante porque la dirección y el sentido de este vector están cambiando en el tiempo.