ELIZABETH GANDICA DE ROA

Licenciada en Matemáticas (1991), Universidad Simón Bolívar (USB), Caracas, Venezuela. Especialista en Administración de Empresas y Magister en Dirección de Empresas, Universidad Católica Dámaso Antonio Larrañaga (1995), Montevideo, Uruguay. Estudios en capacitación pedagógica y doctorante en Educación, de la Universidad Pedagógica Libertador (UPEL). Profesora Asociado a dedicación exclusiva en la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET), docente de las asignaturas Matemática Discreta y Estadística II. Profesora en la Maestría de Mercadeo y Matemática de la UNET. Ponente en congresos nacionales e internacionales sobre estadística, matemática, filosofía y lógica. Profesora de las asignaturas Estadística, cálculo, matemáticas y lógica en la Universidad Católica del Táchira (UCAT), Instituto Universitario de Tecnología Industrial (IUT), Universidad Bicentenaria de Aragua (UBA), Universidad pedagógica Libertador (UPEL), Instituto Universitario de la fuerza aérea de Montevideo,Uruguay, Instituto universitario de mercadeo (ISUM) e Instituto Universitario de tecnología Rodolfo Loero Arismendi (IUTIRLA). Miembro de la Comisión de Estudios de Postgrado de matemática. Actualmente Jefe del Núcleo de Matemática Aplicada del departamento de matemática y física de la UNET.

Serie
TEXTO
06

QA76.9
M35G3 Gandíca de Roa, Elizabeth
Matemática discreta y lógica / Elizabeth Gandíca de Roa – San Cristóbal, Venezuela : Fondo Editorial UNET, 2015.
244 p. ; 22 cm

ISBN 978-980-6300-87-3

1. Matemáticas. 2. Lógica. I. Título.

s.a.

© ELIZABETH GANDICA

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

FEUNET 2015 - 244 p.

© Las publicaciones del FEUNET gozan de protección de los derechos de propiedad intelectual en virtud del protocolo a la Convención Universal sobre Derechos de Autor. Sin previa autorización por escrito por parte del editor, quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones establecidas por las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo publico. Reservados todos los derechos.

© *Fondo Editorial UNET. 2015*
Decanato de Investigación
Universidad Nacional Experimental del Táchira.
Paramillo, San Cristóbal, 5001. Edo. Táchira,
República Bolivariana de Venezuela.

DEPOSITO LEGAL: If 75820155102445
ISBN: 978-980-6300-87-3
FEUNET: ST 0615
DIAGRAMACIÓN: Carolina Wong
DISEÑO DE PORTADA: Adriana Duque
ILUSTRACIONES: Viviana Gandica

IMPRESO EN: LITO ANDES

DIRECCIÓN: Avenida Carabobo, Esquina de Carrera 20 Edificio Marfil Piso 1
Telfs.: (0276) 3561955
San Cristóbal - Táchira - Venezuela

TIRAJE: 250 Ejemplares
TIPO DE PAPEL: Bond base 20

NÚMERO DE EJEMPLARES EDITADOS:

AÑO 2015 - 250 Ejemplares

Las propuestas e ideas presentadas en este texto no son necesariamente las del FEUNET.
Las observaciones, sugerencias y correspondencia se ruega hacerlas llegar al Director del FEUNET,
Decanato de Investigación, Edificio 6(B), Avenida Universidad, Paramillo, San Cristóbal.
Apartado Postal 436. Cod. Post 5001. Edo. Táchira, República Bolivariana de Venezuela.
Telefax: (0276) 3532454 – 3532949 – 3530422 Ext. 179
www.unet.edu.ve – http://investigacion.unet.edu.ve/feunet - investig@unet.edu.ve - fondoed@unet.edu.ve

A MI ESPOSO MARIO,
A MIS HIJOS ERICK Y PIERO
Y A MIS QUERIDOS ESTUDIANTES

TABLA DE CONTENIDO

		Pág.
PRÓLOGO		11
CAPÍTULO 1. CONJUNTOS		13
1.1	INTRODUCCIÓN	15
1.2	CONCEPTO DE CONJUNTO	15
1.3	CONJUNTOS POR EXTENSIÓN Y POR COMPRENSIÓN	16
1.4	CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS	16
1.5	SUBCONJUNTOS Y SUPERCONJUNTOS	17
1.6	IGUALDAD DE CONJUNTOS	17
1.7	CONJUNTO UNIVERSAL Y CONJUNTO VACIO	18
1.8	REPRESENTACIÓN DE CONJUNTOS	18
1.9	OPERACIONES Y LEYES DE CONJUNTOS	19
	Unión	19
	Intersección	19
	Diferencia	20
	Complemento	20
	Suma directa o diferencia simétrica	21
1.10	LEYES DEL Álgebra DE CONJUNTOS	29
1.11	MÉTODO ANALÍTICO	35
CAPÍTULO 2. LÓGICA DE PROPOSICIONES		43
2.1	INTRODUCCIÓN	45
2.2	DEFINICIÓN	45
2.3	NOTACIÓN DE CONJUNTOS VS NOTACIÓN DE LÓGICA	46
2.4	PROPOSICIONES COMPUESTAS	46
2.5	CÁLCULO PROPOSICIONAL	47
2.6	TABLAS DE VERDAD PARA LA COMBINACIÓN DE PROPOSICIONES	47
2.7	ENUNCIADOS CONDICIONALES	48
	Condicional	48
	Bicondicional	49

2.8 TIPOS DE TABLAS DE VERDAD 51
2.9 EQUIVALENCIA LÓGICA 52
2.10 Álgebra DE PROPOSICIONES 52
2.11 ENUNCIADOS CONDICIONALES Y VARIACIONES 54
2.12 ARGUMENTOS E IMPLICACIÓN LÓGICA 60
2.13 CIRCUITOS LÓGICOS 66
2.14 PROCESO PARA OPERAR CIRCUITOS 67
2.15 REGLAS DE INFERENCIA 71
2.16 MÉTODOS PARA APLICAR REGLAS DE INFERENCIA 72
Método formal 72
Método por reducción al absurdo 75

CAPÍTULO 3. LÓGICA DE PREDICADOS 83

3.1 PREDICADOS Y SUS VALORES DE VERDAD 85
3.2 CUANTIFICADOR UNIVERSAL 86
3.3 CUANTIFICADOR EXISTENCIAL 87
3.4 NEGACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES 88
3.5 PROPOSICIONES CON DOS O MÁS CUANTIFICADORES 91
3.6 REGLAS DE INFERENCIA EN LOS PREDICADOS 93
Regla de Eliminación del Cuantificador Universal 94
Regla de Introducción del Universo 94
Regla de Eliminación del Existencial 95
Regla de Introducción del Existencial 95

CAPÍTULO 4. ÁLGEBRA BOOLEANA 101

4.1 INTRODUCCIÓN 103
4.2 EXPRESIONES BOOLEANAS 103
4.3 EXPRESIONES BOOLEANAS Y FUNCIONES BOOLEANAS 104
4.4 FORMA NORMAL DISYUNTIVA Y CONJUNTIVA 106
4.5 EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA EN FORMA CANÓNICA 107
4.6 COMPUERTAS LÓGICAS 108
4.7 MINIMIZACIÓN DE CIRCUITOS / FUNCIONES BOOLEANAS 109

4.8 MÉTODOS PARA SIMPLIFICAR EXPRESIONES CANÓNICAS EN SU FORMA DISYUNTIVA 117
Método de los mapas de Karnauhg 117
Método de Simplificación de Quine-McCluskey 130

CAPÍTULO 5. RELACIONES 145

5.1 INTRODUCCIÓN 147
5.2 RELACIÓN BINARIA 147
5.3 ELEMENTOS DE UNA RELACIÓN 148
5.4 MATRIZ DE UNA RELACIÓN 149
5.5 OPERACIONES CON LAS RELACIONES 150
5.6 RELACIONES BINARIAS SOBRE UN CONJUNTO *A* 153
5.7 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES 154
5.8 RELACIÓN INVERSA 157
5.9 GRAFO DE UNA RELACIÓN 158
5.10 RELACIONES DE EQUIVALENCIA 160

CAPÍTULO 6. TEORÍA DE GRAFOS 167

6.1 INTRODUCCIÓN 169
6.2 GRÁFICAS DIRIGIDAS 169
6.3 CAMINO, LONGITUD DE UN CAMINO Y CICLO 170
6.4 FUENTE, POZO, SUCESORES Y ALCANZABLES DESDE UN VÉRTICE 171
6.5 ALGORITMO DE SINK 172
6.6 GRÁFICAS DIRIGIDAS CON PESO 174
6.7 RED DE ACTIVIDAD 175
6.8 UN ALGORITMO PARA CALCULAR CAMINOS DE PESO MÍNIMO: ALGORITMO DE DIJKSTRA 175
6.9 APLICACIÓN EN MATLAB 179
Instrucciones del Algoritmo de Dijkstra en Matlab 180
6.10 ALGORITMO PARA ENCONTRAR LA RUTA CRÍTICA O EL CAMINO DE PESO MÁXIMO: ALGORITMO DE TIEMPOS DE FLOTACIÓN 187
6.11 GRAFOS NO DIRIGIDOS 193
6.12 CAMINOS SIMPLES, CERRADOS Y ACÍCLICOS 194
6.13 CARACTERÍSTICAS DE UN VÉRTICE 195

lo relacionado con la lógica simbólica. Introduce el lenguaje especial que se utiliza para expresar la matemática con precisión. En este capítulo también se analiza la validez de proposiciones por medio de métodos deductivos como la demostración por el método formal y por el método de reducción al absurdo. El capítulo 3 expone la lógica de predicados. Explica los predicados y cuantificadores, e intenta relacionar esta teoría con el pensamiento de todos los días. El capítulo 4 describe el álgebra booleana como un conjunto de operaciones y reglas para abordar los conjuntos binarios. La finalidad de este capítulo es que el lector adquiera las bases necesarias para entender, representar y manejar circuitos electrónicos básicos, en razón a que la computadora está integrada por estos elementos. En el capítulo 5 se aborda la teoría de relaciones, vistas con un enfoque matricial propio de la informática. El objetivo es que el lector aprenda su representación y manejo, conociendo de antemano que las relaciones y las funciones son esenciales para el dominio de aplicaciones de estructuras de datos y programación estructurada. En el capítulo 6 se expone el tema de grafos, partiendo de la idea de que estos son una representación de las redes de comunicación, incluyendo las redes de computadoras. Se abordan circuitos clásicos como el de Euler, además se estudian grafos cuyas aristas tienen pesos, los cuales representan distancias o costos, mediante la utilización del algoritmo de Dijkstra, que permite eliminar las aristas de mayor peso. Y ya para finalizar, en el capítulo 7 se presenta una introducción al tema de árboles, los cuales se definen como grafos no dirigidos conexos, sin ciclos, ni lazos ni aristas paralelas, que permiten la estructuración de datos requerida en el desarrollo de programas de computación, así como a la evaluación de expresiones matemáticas. Además en este capítulo se aborda el recorrido de árboles y la búsqueda del árbol generador de peso mínimo con la aplicación del algoritmo de Kruskall y el algoritmo de Prim. En los capítulos 6 y 7 se introducen aplicaciones de los algoritmos en Matlab, y se muestran las instrucciones y ejecuciones del programa.

Elizabeth Gandica

CAPÍTULO 1
Conjuntos

Georg Ferdinand Cantor
(San Petersburgo, 1845-Halle, Alemania, 1918)

Matemático, alemán de origen ruso. Se le conoce como el creador de la teoría de Conjuntos. Estudió en la Universidad de Berlín, donde cursó estudios adicionales de Filosofía y Física.

Su primer trabajo sobre Teoría de Conjuntos fue publicado en 1874. En este trabajo demostró que el conjunto de los números enteros tenía el mismo número de elementos que el conjunto de los números pares. También formalizó el concepto de infinito.

Murió en una institución mental, en la cual fue internado debido a las frecuentes crisis nerviosas que padecía. Actualmente es considerado el padre de la Teoría de Conjuntos, punto de partida de gran importancia en el desarrollo de la matemática moderna.

Esta teoría es la base fundamental para el cálculo de las probabilidades y el aprendizaje de la argumentación lógica.

1.1 INTRODUCCION

George Cantor definió un conjunto como una colección de objetos reales o abstractos e introdujo el conjunto potencia y las operaciones entre conjuntos. En 1872 trató de publicar sus resultados en los que afirmaba que así como cambia la cardinalidad de los conjuntos finitos, ya sea porque se disminuye o incrementa el número de elementos de dichos conjuntos, de la misma forma también cambia la cardinalidad de los conjuntos infinitos, de manera que, para cada conjunto infinito conocido existe otro infinito con una cardinalidad mayor.

Ahora se acepta el concepto de infinito y por lo tanto el de la cardinalidad infinita. La teoría de conjuntos es la base de las ciencias de la computación debido a que sirve de fundamento a la teoría del Álgebra booleana, de los lenguajes, de los autómatas, de las relaciones, de las bases de datos, de los grafos, de las redes y de los árboles, entre otros temas.

1.2 CONCEPTO DE CONJUNTO

Un conjunto es cualquier lista bien definida o cualquier colección de objetos y será denotado por letras mayúsculas. Los objetos que componen el conjunto se llaman elementos o *miembros* y se denotan por letras minúsculas.

Notación;

A, B, C, D, E, F.....	Conjuntos
a, b, c, d, e, f..... ..	Elementos

Si "a" es un elemento del conjunto "A", se escribe:
$a \in A$ Se lee "a pertenece al conjunto A"
Si el número 8 no está en el conjunto A, se escribe:
$8 \notin A$ Se lee "el elemento 8 no pertenece al conjunto A"

1.3 CONJUNTOS POR EXTENSION Y POR COMPRENSION

Un conjunto está expresado por extensión cuando es posible enumerar todos sus elementos.

$$A=\{1,2,3,4\}$$

Este conjunto denota el conjunto A cuyos elementos son los números *1*, *2*, *3* y *4*. Los elementos deben ir separados por comas y encerrados entre llaves{}.

Un conjunto está expresado por comprensión cuando se utiliza una propiedad común que cumplen todos sus elementos.

$$A=\{x \text{ es un entero } / x>0\}$$

Se lee "*A* es el conjunto de todos los *x*; tales que *x* es un entero mayor que "0"; esto describe el conjunto *A* cuyos elementos son los números enteros positivos. Una letra, generalmente *x*, se emplea para denotar un elemento representativo del conjunto. El símbolo " / " se lee "tal que".

EJEMPLO 1

Sea el conjunto universal definido como: $U=N=\{1,2,3,4,5,6...\}$, sobre este universo se definen los siguientes conjuntos:

$A=\{1,2,3,4,5\}\rightarrow$ Extensión ó $A=\{x \in U / x \leq 5\}\rightarrow$ Comprensión
$B=\{2,4\}\rightarrow$ Extensión ó $B=\{x \in U / x \text{ es par y } x<5\}\rightarrow$Comprensión
$C=\{2,3,4\}\rightarrow$ Extensión ó $C=\{x \in U / 2 \leq x \leq 4\}\rightarrow$ Comprensión

---

1.4 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto es finito si consta exactamente de *n* elementos diferentes, donde *n* es algún entero positivo; de otra manera es infinito.

1.5 SUBCONJUNTOS Y SUPERCONJUNTOS

Un conjunto *B* es un subconjunto de un conjunto *A*, si cada elemento de *B* pertenece al conjunto *A*; esto es, $x \in B$ *implica* $x \in A$ o de manera equivalente *A* es un superconjunto de *B*, esto se denota como:

$B \subseteq A$ Se lee "*B* es subconjunto de *A*" o "*B* está contenido en *A*" o "*A* es un superconjunto de *B*"

La negación de $B \subseteq A$ se escribe $B \not\subset A$.

1.6 IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos son iguales y se denota como $A=B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$. Es decir, si constan de los mismos elementos, de modo que, cada elemento de *A* pertenece a *B*, y cada elemento de *B* pertenece a *A*. La negación de $A=B$ se escribe $A \neq B$.

EJEMPLO 2

Dado el conjunto $A=\{1,2,3,4\}$. Chequear cuál de las siguientes declaraciones es verdadera y cual falsa.

a) $1 \in A$ Verdadero: "1" es un elemento del conjunto *A*.

b) $1 \subseteq A$ Falso: El símbolo "$\subset$" no es el adecuado para los elementos.

c) $\{2,3\} \subseteq A$ Verdadero: el conjunto formado por los elementos *2* y *3* esta contenido en el conjunto *A*.

d) $\{2,3\} \in A$ Falso: el $\{2,3\}$ no es elemento del conjunto *A*.

e) $8 \notin A$ Verdadero: el elemento "8" no está en el conjunto *A*.

f) $\{1,7,8\} \not\subseteq A$ Verdadero: El conjunto formado por los elementos *1*,*7* y *8* no está en *A*.

IMPORTANTE:

No es notación de conjunto si se escribe $A=[1,2,3,4]$; ni cuando se escribe $A=[1,8]$. La última notación se refiere a la declaración de intervalo. Observe que la primera notación no corresponde a ninguna expresión matemática.

1.7 CONJUNTO UNIVERSAL Y CONJUNTO VACIO

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, todos los conjuntos que se investigan se consideran subconjuntos de un conjunto dado. A este conjunto se le denomina : conjunto universal y lo denotamos por U. Se tiene que sí:

$$\boxed{\begin{array}{ll} U=N, & [1,4]=\{1,2,3,4\} \\ U=Z, & [-1,4]=\{-1,0,1,2,3,4\} \end{array}}$$

El conjunto vacío o conjunto nulo, es aquel conjunto que no contiene elementos. Este conjunto, simbolizado por ϕ, se considera finito y subconjunto de cualquier otro conjunto. Entonces, para cualquier conjunto A, la siguiente declaración es verdadera:

$$\phi \subset A \subset U.$$

1.8 REPRESENTACION DE CONJUNTOS

Los conjuntos pueden representarse gráficamente por medio de diagramas de Venn; estos son representaciones gráficas que muestran la relación entre los elementos de los conjuntos. Por lo general, cada conjunto se representa por medio de un círculo, óvalo o rectángulo, y la forma en que se entrelazan la figuras que representan a los conjuntos muestra la relación que existe entre los elementos de los respectivos conjuntos. El conjunto Universal es representado por el interior del rectángulo. La Figura 1.1 es un ejemplo de un diagrama de Venn:

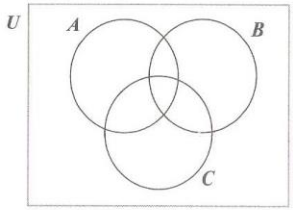


Figura 1.1 Diagramas de Venn

1.9 OPERACIONES Y LEYES DE CONJUNTOS

Unión

La unión de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A; o que pertenecen al conjunto B; o a ambos, se denota por:

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \ \ y \ \ o \ \ x \in B\}$$

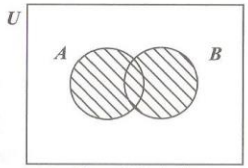


Figura 1.2 $A \cup B$.

Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B. Es decir; los elementos comunes a ambos conjuntos. La intersección está denotada por:

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$$

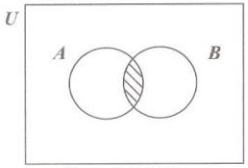


Figura 1.3 $A \cap B$.

Diferencia

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces el conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B, recibe el nombre de diferencia de A y B ó complemento relativo de B con respecto a A, y se denota por medio de:

$$A \mid B = A - B = \{x \in U / x \in A \ y \ x \notin B\}$$

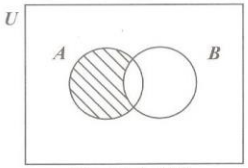


Figura 1.4 $A \mid B$.

Complemento

Si U es el conjunto universal y A es cualquier conjunto, entonces el conjunto de elementos que están en el conjunto universal pero no pertenecen al conjunto A, se llama complemento de A y se denota como:

$$A = \neg A = \sim A = A^c = \{x \in U / x \notin A\}$$

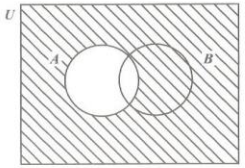


Figura 1.5 $\overline{A}$.

Suma directa o diferencia simétrica

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, el conjunto de elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos recibe el nombre de suma directa o diferencia simétrica de A y B; y se denota por medio de:

$$A \oplus B = A \setminus B \cup B \setminus A = \{x \in U / x \in A \cup B \ y \ x \notin A \cap B\}$$

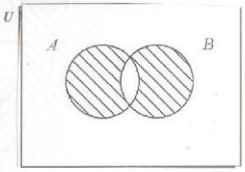


Figura 1.6 $A \oplus B$.

EJEMPLO 3

Dibujar el diagrama de Venn para cada conjunto dado:

a) $(A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$

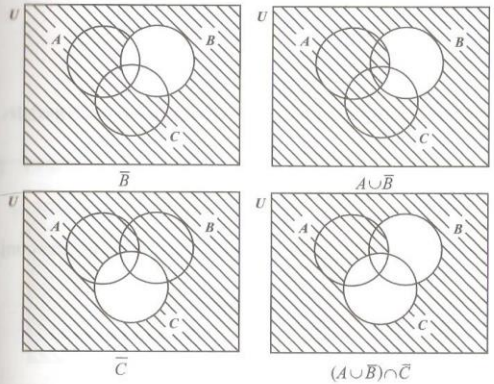


Figura 1.7 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $(A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$

b) $[A\cup(B\setminus\overline{C})]\cap\overline{A}$

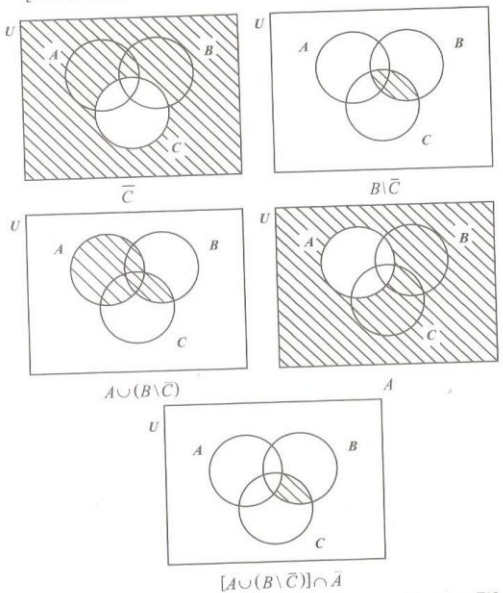


Figura 1.8 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $[A\cup(B\setminus\overline{C})]\cap\overline{A}$

EJEMPLO 4

Representar por medio de diagramas de Venn los siguientes conjuntos:

a) $[A\cup(B\cap\overline{C})]\setminus\overline{B}$
b) $[A\cup(\overline{B}\setminus C)]\setminus[A\cup\overline{B}]$
c) $[\overline{A}\cup\overline{B}\ ]\oplus[\overline{C}\cap B]$

Solución:

a) $[A\cup(B\cap\overline{C})]\setminus\overline{B}$

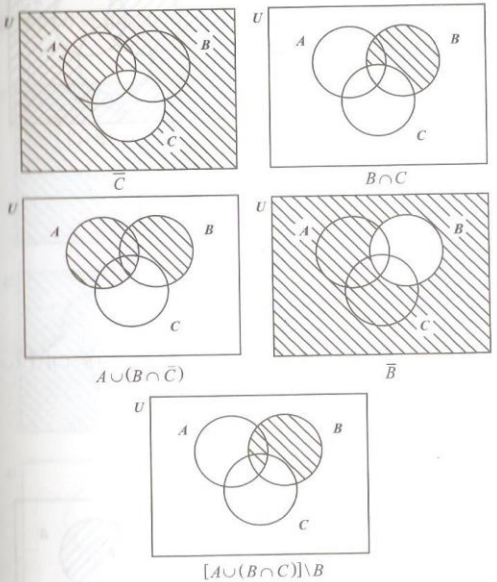
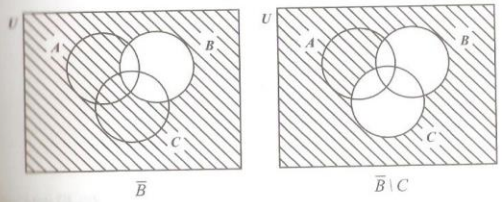


Figura 1.9 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $[A\cup(B\cap C)]\setminus B$

b) $[A\cup(B\setminus C)]\setminus[A\cup B]$



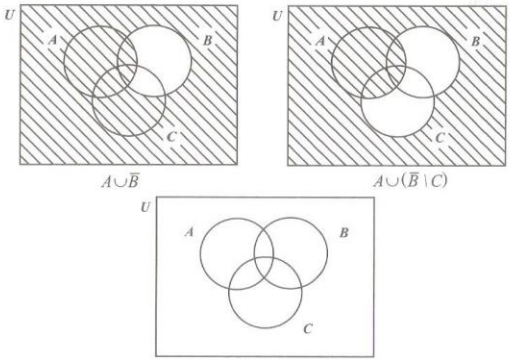


Figura 1.10 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $[A\cup(\overline{B}\setminus C)]\setminus[A\cup\overline{B}]$

c) $[\overline{A}\cup\overline{B}\ ]\oplus[\overline{C}\cap B]$

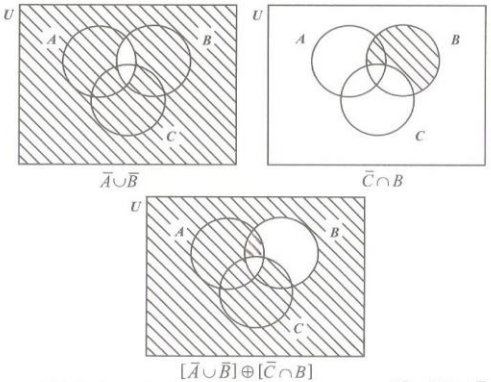


Figura 1.11 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $[\overline{A}\cup\overline{B}]\oplus[\overline{C}\cap B]$

EJEMPLO 5

Representar el siguiente conjunto en diagramas de Venn

a) $[(\overline{A}\oplus B)\setminus\overline{C}]\cup[\overline{A\cap\overline{B}}]$

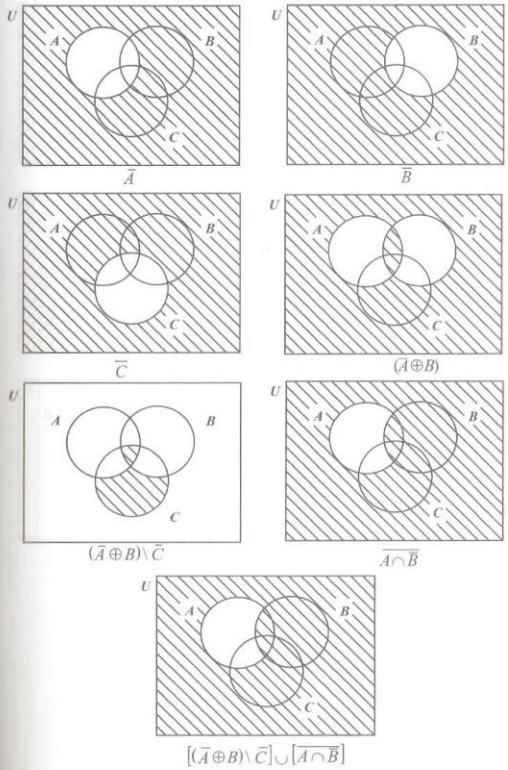


Figura 1.12 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $[(\overline{A}\oplus B)\setminus\overline{C}]\cup[\overline{A\cap\overline{B}}]$

EJEMPLO 6

Representar el siguiente conjunto por medio de diagramas de Venn.

$$[(A\oplus\overline{B})\setminus C]\cap[\overline{A\cup B}]$$

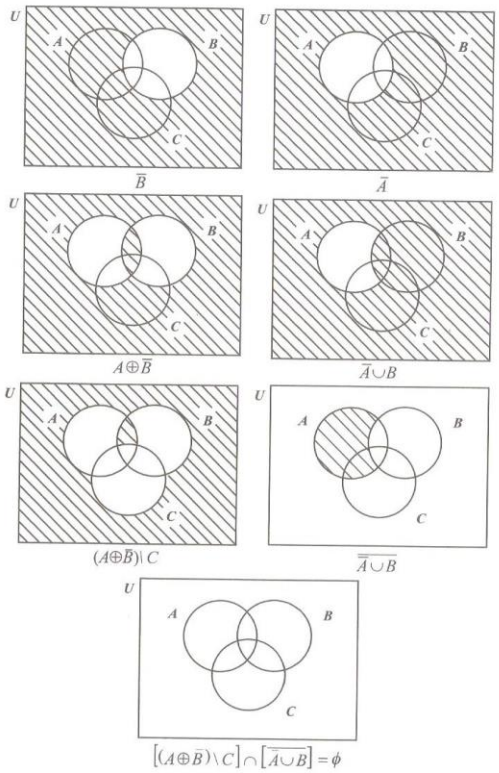


Figura 1.13 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $[(A\oplus\overline{B})\setminus C]\cap[\overline{\overline{A}\cup B}]=\phi$

EJEMPLO 7

Representar el siguiente conjunto en diagramas de Venn

$$[(\overline{A}\oplus B)\setminus\overline{C}]\cup[\overline{A\cap\overline{B}}]$$

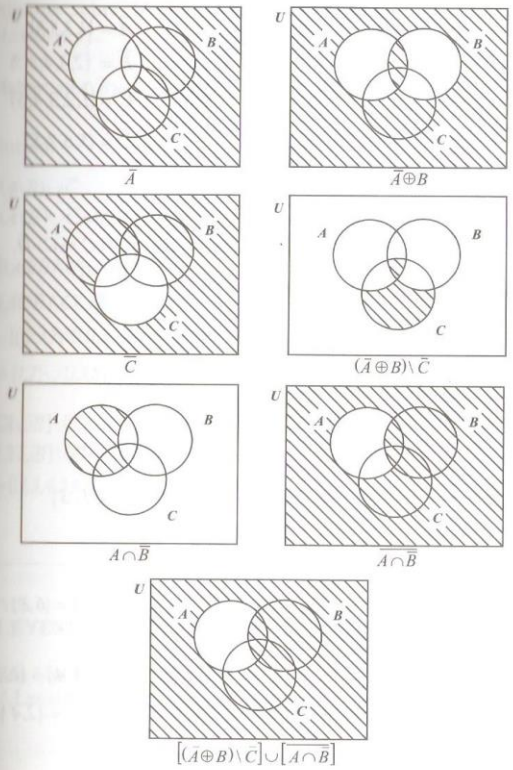


Figura 1.14 Conjunto de diagramas de Venn para obtener $[(\overline{A}\oplus B)\setminus\overline{C}]\cup[\overline{A\cap\overline{B}}]$

EJEMPLO 8

Sea U el conjunto universal $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Sobre él se definen los conjuntos siguientes:

$A=\{x\in U / x \text{ es par}\}=\{2,4,6,8\}$ $\qquad \overline{A}=\{1,3,5,7\}$

$B=\{1,5,8\}$ $\qquad \overline{B}=\{2,3,4,6,7\}$

$C=\{x\in U / x>5\}=\{6,7,8\}$ $\qquad \overline{C}=\{1,2,3,4,5\}$

$D=\{x\in U / 1\le x\le 4\}=\{1,2,3,4\}$ $\qquad \overline{D}=\{5,6,7,8\}$

Hallar:

$a)\ A\cup B,\ b)\ A\cap B,\ c)\ C,\ d)\ D\setminus A,\ e)\ (D\cap B),\ f)\ A\setminus C\cap C\setminus D,$

$g)\ [A\cup(B\setminus C)]\cap[D\setminus A],\ h)\ [A\oplus B]\setminus C.$

Solución:

a) $A\cup B=\{2,4,6,8\}\cup\{1,5,8\}=\{1,2,4,5,6,8\}$

b) $A\cap B=\{2,4,6,8\}\cap\{1,5,8\}=\{8\}$

c) $\overline{C}=\{1,2,3,4,5\}$

d) $D\setminus A=D-A=\{1,2,3,4\}-\{2,4,6,8\}=\{1,3\}$

e) $(D\cap B)=\{1,2,3,4\}\cap\{2,3,4,6,7\}=\{2,3,4\}$

f) $A\setminus C\cap C\setminus D=(A-C)\cap(C-D)=$
$=(\{2,4,6,8\}-\{1,2,3,4,5\})\cap(\{6,7,8\}-\{5,6,7,8\})=\{6,8\}\cap\phi=\phi$

g) $[A\cup(B\setminus\overline{C})]\cap[D\setminus\overline{A}]=$
$=[\{2,4,6,8\}\cup(\{1,5,8\}-\{1,2,3,4,5\})]\cap[\{1,2,3,4\}-\{1,3,5,7\}]$
$=[\{2,4,6,8\}\cup\{8\}]\cap\{2,4\}=\{2,4,6,8\}\cap\{2,4\}=\{2,4\}$

h) $[A\oplus B]\setminus\overline{C}=[\{2,4,6,8\}\oplus\{1,5,8\}]\setminus\{1,2,3,4,5\}=$
$=\{1,2,4,5,6\}-\{1,2,3,4,5\}=\{6\}$

EJEMPLO 9

Sea el conjunto universal $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; y sean A, B y C conjuntos sobre U definidos como: $A=\{2,4,7\}$, $\overline{B}=\{1,3,4,8\}$, $C=\{x\in U/x\ge 3\}$.

Hallar: a)$(A\setminus\overline{B})\cup\overline{C}$, b)$[(A\oplus\overline{B})\setminus C]\cup[\overline{B}\cap\overline{A}]$ y c)$[\overline{A}\cup\overline{B}]\setminus(\overline{C}\cap A)$

Solución:

a) $(A\setminus\overline{B})\cup\overline{C}$
$(A\setminus\overline{B})\cup\overline{C}=(\{2,4,7\}-\{1,3,4,8\})\cup\{1,2\}=\{2,7\}\cup\{1,2\}=\{1,2,7\}$

b) $[(A\oplus\overline{B})\setminus C]\cup[\overline{B}\cap\overline{A}]$
$[(A\oplus\overline{B})\setminus C]\cup[\overline{B}\cap\overline{A}]=$
$=[(\{2,4,7\}\oplus\{1,3,4,8\})\setminus\{3,4,5,6,7,8\}]\cup[\{1,3,4,8\}\cap\{1,3,5,6,8\}]$
$=\{1,2\}\cup\{1,3,8\}=\{1,2,3,8\}$

c) $[\overline{A}\cup\overline{B}]\setminus(\overline{C}\cap A)$
$[\overline{A}\cup\overline{B}]\setminus(\overline{C}\cap A)=[\{1,3,5,6,8\}\cup\{1,3,4,8\}]\setminus(\{1,2\}\cap\{2,4,7\})$
$=[\{1,3,4,5,6,8\}]-\{2\}=\{1,3,4,5,6,8\}$

1.10 LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Sea U el conjunto universal y sean A, B y C conjuntos definidos sobre U. Las siguientes propiedades o leyes del Álgebra se cumplen:

Propiedad Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Propiedad Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Propiedad Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidad:	$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$ $A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$
Idempotencia:	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Complemento:	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \phi$
D'Morgan:	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Involución:	$\overline{\overline{A}} = A$

La verificación de estas propiedades se hace utilizando la representación de conjuntos en diagramas de Venn. Para ello, se representa cada lado de la igualdad y se verifica que sean iguales los dibujos. Este es un método de demostración de igualdad de conjuntos.

EJEMPLO 10

Dadas las siguientes igualdades, demostrarlas aplicando diagramas de Venn.

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (ley de Morgan)

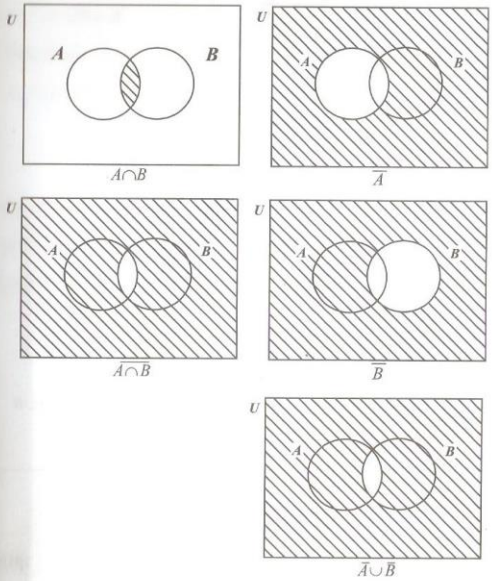
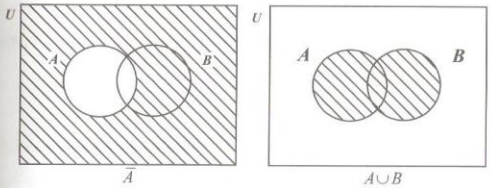
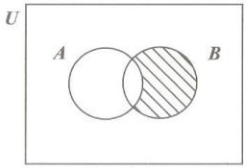


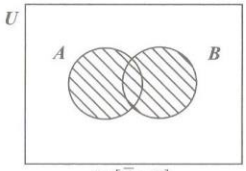
Figura 1.15 Demostración de la Ley de Morgan

b) $A \cup [\overline{A} \cap B] = A \cup B$





$\overline{A} \cap B$



$A \cup [\overline{A} \cap B]$

Figura 1.16 Demostración de la igualdad $A \cup [\overline{A} \cap B] = A \cup B$

EJEMPLO 11

Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos, aplicando propiedades y nombrando cada propiedad utilizada.

a) $\overline{A} \cup [A \cap B] = \overline{A} \cup B$

Solución:

$\overline{A} \cup [A \cap B] = (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B)$ Distributiva
$= U \cap (\overline{A} \cup B)$ Complemento
$= \overline{A} \cup B$ Identidad

b) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B) = A$

Solución:

$(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B) = A \cup (\overline{B} \cap B)$ Distributiva
$= A \cup \phi$ Complemento
$= A$ Identidad

c) $A \cup (A \cap B) = A$

Solución:

$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$ Identidad
$= A \cap (U \cup B)$ Distributiva
$= A \cap U$ Identidad
$= A$ Identidad

d) $[A \cup (B \cap \overline{A})] \cap [A \cup (B \cap \overline{B})] = A$

Solución:

$[A \cup (B \cap \overline{A})] \cap [A \cup (B \cap \overline{B})] = [(A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})] \cap [A \cup \phi]$ Distributiva y complemento
$= [(A \cup B) \cap U] \cap [A]$ Identidad y complemento
$= (A \cup B) \cap A$ Identidad
$= (A \cup B) \cap (A \cup \phi)$ Identidad
$= A \cup (B \cap \phi)$ Distributiva
$= A \cup \phi$ Identidad
$= A$ Identidad

EJEMPLO 12

Simplificar el siguiente conjunto aplicando propiedades y nombrando cada propiedad utilizada.

$$[\overline{A} \cup (B \cap \overline{A})] \cup [\overline{A \cap \overline{B}} \cap (\overline{A} \cup B)]$$

Solución:

$[\overline{A} \cup (B \cap \overline{A})] \cup [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)]$ D'Morgan.
$[\overline{A} \cup (B \cap \overline{A})] \cup [\overline{A} \cup (\overline{B} \cap B)]$ Distributiva
$[\overline{A} \cup (B \cap \overline{A})] \cup [\overline{A} \cup \phi]$ Complemento.

$[\overline{A} \cup (B \cap \overline{A})] \cup \overline{A}$ Identidad.

$[(\overline{A} \cap U) \cup (\overline{A} \cap B)] \cup \overline{A}$ Identidad y conmutativa.

$[\overline{A} \cap (B \cup U)] \cup \overline{A}$ Distributiva.

$[\overline{A} \cap U] \cup \overline{A}$ Identidad.

$\overline{A} \cup \overline{A}$ Identidad.

$\overline{A}$ Idempotencia.

EJEMPLO 13

Demostrar la siguiente igualdad de conjuntos aplicando propiedades y nombrando cada propiedad utilizada.

$$[(A \oplus \overline{B}) \setminus C] \cap [\overline{\overline{A} \cup B}] = \phi$$

Solución:

Se tiene $A \oplus B = A \setminus B \cup B \setminus A$

Se tiene $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Por lo tanto $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Se demuestra que $[(A \oplus \overline{B}) \setminus C] \cap \left[\overline{\overline{A} \cup B}\right] = \phi$

$\left[[(A \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})] \setminus C\right] \cap [\overline{\overline{A} \cup B}]$ Igualdad de conjuntos.

$\left[[(A \cap B) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})] \cap \overline{C}\right] \cap [\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}]$ Involución, Igualdad de conjuntos, D'Morgan.

$\left[[(A \cap B) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})] \cap \overline{C}\right] \cap [A \cap \overline{B}]$ Involución.

$\left[[(A \cap B) \cap \overline{C}] \cup [(\overline{B} \cap \overline{A}) \cap \overline{C}]\right] \cap [A \cap \overline{B}]$ Distributiva.

$[(A \cap B) \cap \overline{C} \cap A \cap \overline{B}] \cup [(\overline{B} \cap \overline{A}) \cap \overline{C} \cap A \cap \overline{B}]$ Distributiva.

$[(A \cap A) \cap (\overline{B} \cap B) \cap \overline{C}] \cup [(\overline{B} \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \cap (A \cap \overline{A})]$ Conmutativa y asociativa.

$[A \cap \phi \cap \overline{C}] \cup [\overline{B} \cap \overline{C} \cap \phi]$ Idempotencia y complemento.

$\phi \cup \phi$ Identidad.

ϕ Idempotencia.

1.11 METODO ANALITICO

En el método analítico se considera el concepto de inclusión. Para verificar la igualdad de dos conjuntos, se debe probar una doble inclusión. Esto es, si se quiere probar A=B, se probará que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Las pruebas que utilizan diagramas de Venn parecen mucho más fáciles que las pruebas donde se analizan las dos inclusiones mediante elementos. Sin embargo, estos ocultan los procesos del pensamiento lógico y en demostraciones con más de tres conjuntos, los diagramas de Venn resultan difíciles de dibujar. El método analítico solo utiliza lógica y definiciones de operaciones con conjuntos. Esta forma de proceder es más fácil de probar y de comunicar a una computadora.

Algunas implicaciones que serán de utilidad en la aplicación del método analítico son:

$$\text{Método analítico} \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \rightarrow A = B$$

1) $x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A$
2) $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \ y \ x \in B$
3) $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \ ó \ x \in B$
4) $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \ y \ x \notin B$
5) $x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A}$
6) $x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A \ \ y/o \ \ x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \ \ y/o \ \ x \in \overline{B}$
7) $x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \ \ y \ \ x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \ \ y \ \ x \in \overline{B}$
8) $x \in A \Rightarrow x \in A \cup ☼$ cualquier cosa

EJEMPLO 14

Demostrar la ley de Morgan, aplicando el método analítico:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Solución:

Se debe probar dos inclusiones:

a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

Se escoge

$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A \ y/o \ x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \ y/o \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$

b) $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

Se escoge

$x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \Rightarrow x \in \overline{A} \ y/o \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A \ y/o \ x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$

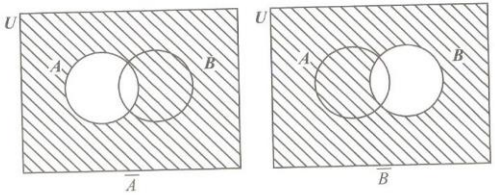
EJEMPLO 15

Demostrar la siguiente igualdad, aplicando los tres métodos vistos

$$\overline{\overline{A} \cup B} = A \cap \overline{B}$$

Solución:

a) Por diagramas;



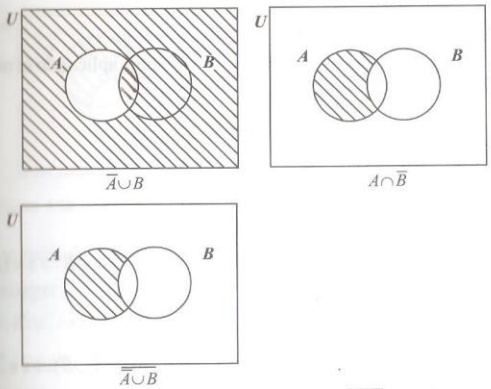


Figura 1.17 Demostración de la igualdad $\overline{\overline{A} \cup B} = A \cap \overline{B}$

b) Por propiedades.

$\overline{\overline{A} \cup B} = A \cap \overline{B}$

$\overline{\overline{A} \cup B} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{B}$ Morgan

$= A \cap \overline{B}$ Involución

c) Por método analítico:

$\overline{\overline{A} \cup B} = A \cap \overline{B}$

Se debe probar dos inclusiones

$\overline{\overline{A} \cup B} \subseteq A \cap \overline{B}$

Escoger

$x \in \overline{\overline{A} \cup B} \Rightarrow x \notin (\overline{A} \cup B) \Rightarrow x \notin \overline{A} \ y \ x \notin B \Rightarrow x \in A \ y \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \in (A \cap \overline{B})$

Ahora,

$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup B}$

Escoger

$x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A \ y \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin \overline{A} \ y \ x \notin B \Rightarrow x \notin (\overline{A} \cup B) \Rightarrow x \in \overline{\overline{A} \cup B}$

EJEMPLO 16

Demostrar la siguiente igualdad de conjuntos aplicando el método analítico.

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

Solución:

a) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset A \cap B$

Escoger

$x \in \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \Rightarrow x \notin \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \notin \overline{A}\ y\ x \notin \overline{B} \Rightarrow x \in A\ y\ x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$

a) $A \cap B \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$

Escoger

$x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A\ y\ x \in B \Rightarrow x \notin \overline{A}\ \ y\ \ x \notin \overline{B} \Rightarrow x \notin (\overline{A} \cup \overline{B}) \Rightarrow x \in \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$

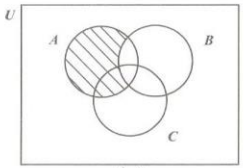
EJEMPLO 17

Demostrar la siguiente igualdad de conjuntos aplicando diagramas de Venn y método analítico:

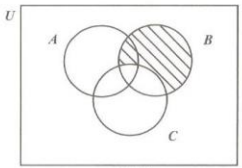
$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$$

Solución:

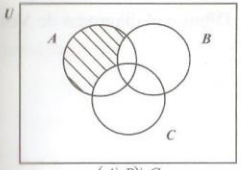
Por diagramas:



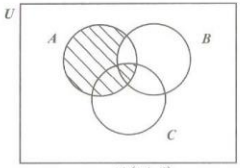
$A \setminus B$



$B \setminus C$



$(A \setminus B) \setminus C$



$A \setminus (B \setminus C)$

Figura 1.18 Demostración de la inclusión de conjuntos $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$

Por método analítico

Escoger

$x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B)\, y\, x \notin C \Rightarrow x \in A\, y\, x \notin B\, y\, x \notin C \Rightarrow x \in A\, y\, [x \notin B\, y\, x \notin C]$

$\Rightarrow x \in A\, y\, x \notin (B \setminus C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C)$

EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 1

1) Enumerar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos. Escribir ∞ para los conjuntos infinitos; ϕ para los conjuntos vacíos.

a) $\{n \in N / n^2 = 2\}$
b) $\{n \in Z / 5 < n \leq 15\}$
c) $\{-1,1\}$
d) $[-1,1]$
e) $\{x \in R / x < 1\, y\, x \geq 2\}$

2) Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{1,7,8\}$, $D = \{1,2,5\}$

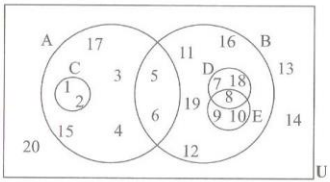
Marcar verdadero o falso en las siguientes afirmaciones.

a) $B \in A$ ( )
b) $C \not\subset A$ ( )
c) $D \not\subset A$ ( )
d) $B \subseteq A$ ( )
e) $1 \in A$ ( )
f) $\phi \in A$ ( )
g) $\{2,5\} \subseteq A$ ( )
h) $\{3,4\} \in A$ ( )

3) Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Dibujar el diagrama de Venn que cumpla con las siguientes condiciones.

$$[A\oplus(\overline{B}\setminus C)]\cap[\overline{C}\cup\overline{A}]$$

4) Dado el siguiente diagrama de Venn:



Calcular los siguientes conjuntos:

a) $[A\setminus\overline{B}]\cup[C\oplus B]$
b) $(\overline{C}\setminus\overline{A})\cup(D\setminus\overline{E})$
c) $[E\cup\overline{D}]\cap[\overline{C}\setminus A]$
d) $[D\cap B]\cup[E\setminus\overline{C}]$

5) Representar en diagramas de Venn los siguientes conjuntos.

a) $(\overline{A}\cap B)\setminus\overline{C}$
b) $[B\oplus(D\setminus C)]\cap[\overline{C}\setminus\overline{A}]$
c) $(B\cap\overline{C})\oplus\overline{A}$
d) $(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B\cap C})$

6) Demostrar por diagramas de Venn las siguientes igualdades de conjuntos.

a) $\overline{A\cup B}=A\cap\overline{B}$
b) $(A\setminus B)=A\cap\overline{B}$
c) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
d) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
e) $A\cup(B\cap A)=A$

7) Sea $U=\{x\in N/1\le x\le 10\}$ el conjunto universal y sobre él los siguientes conjuntos:

$A=\{x\in U/x\ge 3\}$ $\quad\overline{B}=\{x\in U/x\,es\,par\}$
$C=\{x\in U/2\le x<5\}$ $\quad\overline{D}=\{2,5,7,8\}$

Hallar:

a) $[\overline{A}\cap(B\setminus\overline{C})]\cup D$
b) $[\overline{D}\oplus\overline{B}]\setminus[C\oplus\overline{A}]$
c) $(A\oplus B)\setminus(\overline{C}\cap D)$
d) $\overline{A\cap B}\cup(\overline{B}\setminus C)$

8) Demostrar por el método analítico las siguientes igualdades de conjuntos.

a) $\overline{\overline{A}\cap B}=A\cup\overline{B}$
b) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
c) $(A\setminus\overline{B})\cup\overline{A}=\overline{A\cap B}$
d) $\overline{A}\cup(A\cap B)=\overline{A}\cup B$

9) Simplificar cada conjunto aplicando propiedades y nombrándolas.

a) $A\cup[[(A\cap B)\cup\overline{B}]\cap[(A\cap B)\cup\overline{B}]]$
b) $[A\cup(B\cap\overline{A})]\cap[A\cup(B\cap\overline{B})]$
c) $\overline{A\cup(\overline{B\cup\overline{C}})}\cap\overline{A}\cap\overline{(\overline{B\cap\overline{C}})\cup A}$
d) $[\overline{A}\cap(B\cup\overline{A})]\cup[\overline{A\cap B}\cap(\overline{A}\cup B)]$

10) Repetir el ejercicio 6 utilizando el método por propiedades.

11) Sea $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, el conjunto universal y sobre él los siguientes conjuntos:

$A=\{x\in U/1\le x\le 8\}$ $\qquad\overline{B}=\{x\in U/x\ge 6\}$
$C=\{2,5,9,10\}$ $\qquad\overline{D}=\{x\in U/x\,es\,primo\}$

Calcular:

a) $(A \cup \overline{C}) \setminus (\overline{B} \oplus D)$

b) $[(\overline{D} \setminus \overline{A}) \cap (B \cap \overline{A})] \setminus \overline{C}$

12) Demostrar la siguiente igualdad aplicando propiedades.

$(A \cup \overline{B}) \cap [(\overline{A \cup \overline{B}}) \cup \overline{B}] = \overline{B}$

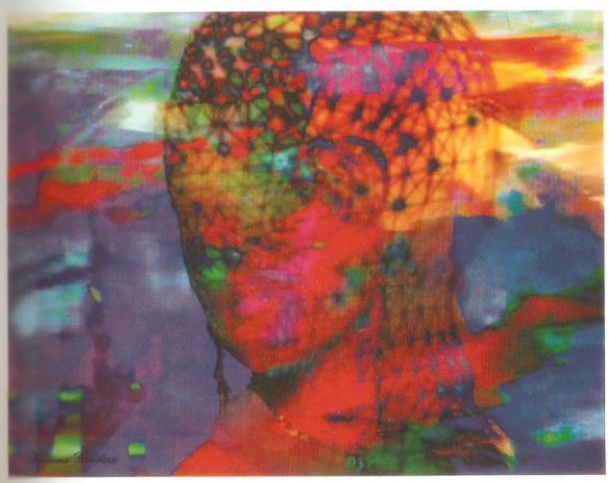
13) Simplificar las siguientes expresiones aplicando propiedades.

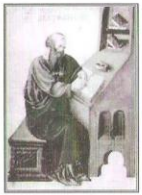
a) $(\overline{A \cup B} \cup C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup A$

b) $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{B \cup A}) \cap (\overline{B} \cup C)$

c) $[A \cup (\overline{\overline{B} \cap C})] \cup (\overline{B} \cap C)$

CAPÍTULO 2
Lógica de Proposiciones





ARISTÓTELES
"PADRE DE LA LOGICA"
(Estagira, 834 a.C, Calcis, 322 a.C.)

Nació en el año 384 a.C. en Estagira, localidad cercana al monte de Athos, por ello se le conoce como <<el Estarigita>>. Fue discípulo de Platón. Filósofo y científico. Es reconocido como el padre fundador de la lógica.

Sus trabajos están reunidos en una obra que se conoce con el nombre de Órganon que significa herramienta, y constituye la primera investigación acerca de los principios del razonamiento válido. Para Aristóteles la lógica era la herramienta necesaria para entender la filosofía y la ciencia.

En líneas generales, la lógica aristotélica permite examinar la validez de los argumentos, analizando su estructura lógica, sin tener en cuenta lo verdadero o falso de las proposiciones que lo componen, de allí la importancia en la informática para el desarrollo de un pensamiento lógico, sistemático y analítico.

2.1 INTRODUCCIÓN

La lógica representa un papel importante en las matemáticas y es esencial en la programación. La lógica se usa en matemáticas para hacer demostraciones de teoremas y en las ciencias de la computación para probar que los programas hacen lo que tienen que hacer. La lógica estudia el razonamiento, esto es, si el razonamiento es correcto. Esta se centra en la relación entre las afirmaciones y no en el contenido de una afirmación en particular. El razonamiento que se muestra a continuación es correcto, aunque el contenido de cada afirmación no lo sea.

"Si las vacas vuelan, tienen alas. Si tienen alas son pájaros. Las vacas vuelan. Por lo tanto las vacas son pájaros".

Entender la lógica resulta útil para aclarar la escritura común, y esto se logra a través del cálculo proposicional, el cual estudia las relaciones lógicas entre objetos llamados proposiciones, que frecuentemente pueden interpretarse como afirmaciones que tienen algún significado en contextos de la vida real.

2.2 DEFINICIÓN

Una proposición es una oración declarativa que sólo puede ser verdadera o falsa. Las siguientes frases son proposiciones:

a) Llueve.
b) Hace frío.
c) Voy al cine.
d) Estudio.
e) El número 2 es par
f) Pablo Neruda es escritor

Las siguientes frases no son proposiciones:

a) ¿En tu casa hay perros?
b) Ir directamente al cine
c) Denme agua, por favor
d) ¿Porque es importante la lógica?

En el cálculo proposicional se utilizan letras minúsculas como $p,q,r,s,t,\ldots$ para simbolizar las proposiciones; estas se combinan para

obtener proposiciones compuestas utilizando símbolos; a estos símbolos se le llaman operadores lógicos.

Los operadores lógicos más utilizados son:

UNION	$\vee$	Se lee "o"
INTERSECCION	$\wedge$	Se lee "y"
CONDICIONAL	$\rightarrow$	Se lee "entonces", "si", "condición necesaria para..."
BICONDICIONAL	$\leftrightarrow$	Se lee "si y solo si", "condición suficiente y necesaria para..."
NEGACION	$\sim$	Se lee " no ocurre"
DOBLE NEGACION	$\downarrow$	Se lee " no ocurre uno ni el otro"

2.3 NOTACIÓN DE CONJUNTOS VS NOTACIÓN DE LÓGICA

Conjuntos	Lógica
$A \cup B$	$p \vee q$
$A \cap B$	$p \wedge q$
$\overline{A}$	$\sim p$
$\overline{A} \cup B$	$p \rightarrow q$
$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \vee q)$
$\overline{A \cup B}$	$\sim (p \vee q)$ $\sim p \wedge \sim q$

2.4 PROPOSICIONES COMPUESTAS

Una proposición compuesta es aquella que está formada por dos o más proposiciones simples conectadas por medio de operadores lógicos.

EJEMPLO 1

a) Si $\underbrace{\text{estudio}}_{E}$, tengo $\underbrace{\text{dinero}}_{D}$ $= E \rightarrow D$

b) Si $\underbrace{\text{tengo carro}}_{p}$, voy $\underbrace{\text{al cine}}_{q}$ $= p \rightarrow q$

c) $\underbrace{\text{Llueve}}_{R}$ y $\underbrace{\text{hace frío}}_{S}$ $= R \wedge S$

d) Si $\underbrace{\text{llueve}}_{R}$ entonces $\underbrace{\text{no estudio}}_{T}$ $= R \rightarrow \sim T$

e) No tengo $\underbrace{\text{carro}}_{C}$ pero tengo $\underbrace{\text{bicicleta}}_{B}$ $= \sim C \wedge B$

f) Si tengo $\underbrace{\text{carro}}_{C}$, te $\underbrace{\text{busco}}_{B}$, te llevo a $\underbrace{\text{cenar}}_{CE}$ y al $\underbrace{\text{cine}}_{CI}$ $= C \rightarrow (B \wedge CE \wedge CI)$

g) No tengo $\underbrace{\text{dinero}}_{D}$ ni nada $\underbrace{\text{que dar}}_{N}$ $= \sim D \wedge \sim N$

2.5 CÁLCULO PROPOSICIONAL

La suposición fundamental del cálculo proposicional consiste en que los valores de verdad de una proposición construida a partir de otras proposiciones, cuando se utilizan operadores lógicos, quedan completamente determinados por los valores de verdad de las proposiciones originales, y de la forma en que se construyó la proposición a partir de ellas. Así, dadas dos proposiciones p y q, estas individualmente pueden tomar solo dos valores posibles: verdadero o falso:

$$p \left\langle \begin{matrix} V \\ F \end{matrix} \right. \qquad q \left\langle \begin{matrix} V \\ F \end{matrix} \right.$$

Al combinarse las dos variables las opciones posibles son: VV, VF, FV, FF.

2.6 TABLAS DE VERDAD PARA LA COMBINACIÓN DE PROPOSICIONES

Las tablas de verdad son una herramienta desarrollada por Charles Peirce en la década de 1880 y se emplean para determinar los posibles valores de verdad de una proposición. Una tabla de verdad está formada por filas y columnas, y el número de filas depende del número de proposiciones diferentes que conforman una proposición compuesta. Asimismo, el número de columnas depende del número de proposiciones que integran la proposición compuesta y del número de operadores

lógicos contenidos en la misma. En general en número de filas es 2^n donde "n" representa el número de proposiciones diferentes que integran una proposición compuesta.

Unión $("\vee")$

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Intersección $("\wedge")$

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Negación $("\sim p")$

p	$\sim p$
V	**F**
F	**V**

2.7 ENUNCIADOS CONDICIONALES

Condicional, $p \rightarrow q$

Muchos enunciados, particularmente en matemáticas, son de la forma "si p entonces q".

Tales enunciados se denominan enunciados condicionales y se indican por: $(p \rightarrow q)$.

El condicional puede leerse también:

a) p implica q
b) p solo si q
c) p es suficiente para q
d) q es necesario para p

El condicional $(p \rightarrow q)$ es verdadero excepto cuando p es verdadero y q es falso. La tabla de verdad del enunciado condicional, es como sigue:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Bicondicional, $(p \leftrightarrow q)$

Otro enunciado común es de la forma "p sí y solo si q" o, simplemente; "p si q". Tales enunciados que se indican por $(p \leftrightarrow q)$ se denominan enunciados bicondicionales. El valor de verdad del enunciado bicondicional satisface la siguiente propiedad: si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces $p \leftrightarrow q$ es verdadero, si p y q tienen valores de verdad diferentes, entonces es falso. La tabla de verdad de este enunciado es como sigue:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

EJEMPLO 2

Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición:
$[p \rightarrow \sim r] \wedge [\sim q \wedge r]$

					I		*II*	
p	q	r	$\sim r$	$p\to\sim r$	$\sim[p\to\sim r]$	$\sim q$	$\sim q\wedge r$	$I\wedge II$
V	V	V	F	F	V	F	F	**F**
V	V	F	V	V	F	F	F	**F**
V	F	V	F	F	V	V	V	**V***
V	F	F	V	V	F	V	F	**F**
F	V	V	F	V	F	F	F	**F**
F	V	F	V	V	F	F	F	**F**
F	F	V	F	V	F	V	V	**F**
F	F	F	V	V	F	V	F	**F**

Tabla 2.1 $\sim[p\to\sim r]\wedge[\sim q\wedge r]$

Observar: * Esta proposición solo es verdadera cuando p es verdadero, q falso y r verdadero.

EJEMPLO 3

Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición:

$$[\sim p\wedge\sim q]\leftrightarrow[\sim r\to(p\wedge\sim q)]$$

					I			*II*	
p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$	$\sim r$	$(p\wedge\sim q)$	$\sim r\to(p\wedge\sim q)$	$I\leftrightarrow II$
V	V	V	F	F	F	F	F	V	**F**
V	V	F	F	F	F	V	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	F	V	V	**F**
V	F	F	F	V	F	V	V	V	**F**
F	V	V	V	F	F	F	F	V	**F**
F	V	F	V	F	F	V	F	F	**V**
F	F	V	V	V	V	F	F	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	F	F	**F**

Tabla 2.2 $[\sim p\wedge\sim q]\leftrightarrow[\sim r\to(p\wedge\sim q)]$

EJEMPLO 4

Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición:

$$[[\sim(p\vee q)\wedge\sim r]\wedge[\sim p\to q]]\vee[\sim r\wedge\sim p]$$

$$\underbrace{[[\sim(p\vee q)\wedge\sim r]\wedge[\sim p\to q]]}_{I}\vee\underbrace{[\sim r\wedge\sim p]}_{II}$$

						1		*2*	*I*	*II*	
p	q	r	$(p\vee q)$	$\sim(p\vee q)$	$\sim r$	$\sim(p\vee q)\wedge\sim r$	$\sim p$	$\sim p\to q$	$1\wedge 2$	$\sim r\wedge\sim p$	$I\vee II$
V	V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	**F**
V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	F	**F**
V	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	**F**
V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	**F**
F	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	**F**
F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	**V**
F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	**F**
F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	**V**

Tabla 2.3 $[[\sim(p\vee q)\wedge\sim r]\wedge[\sim p\to q]]\vee[\sim r\wedge\sim p]$

2.8 TIPOS DE TABLAS DE VERDAD

Algunas proposiciones cuando se les calcula su tabla de verdad poseen únicamente el valor verdadero en su última columna. Tales proposiciones se llaman tautologías. Si contienen el valor de falsedad en su última columna se les llama falacia o contradicción. En caso de tener verdaderos y falsos se les llama Contingencia.

Tipos de tabla de verdad

p	q	r	(proposición)

Tautologia " V"
Falacia " F"
Contingencia " Mezcla V y F "

2.9 EQUIVALENCIA LÓGICA

Se dice que dos proposiciones P (p,q,...,) y Q (p,q,...,) son lógicamente equivalentes si ambas tienen tablas de verdad idénticas.

EJEMPLO 5

Demostrar que las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

Solución:

$$\underbrace{\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)}_{\text{I}} \equiv \underbrace{\sim p}_{\text{II}}$$

				II		*I*
p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
V	V	V	F	**F**	F	**F**
V	F	V	F	**F**	F	**F**
F	V	V	F	**V**	V	**V**
F	F	F	V	**V**	F	**V**

Tabla 2.4 Tabla tipo contingencia. $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

2.10 ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Las proposiciones, bajo la relación de equivalencia lógica, satisfacen varias leyes o identidades. Sean p, q y r proposiciones. Estas proposiciones satisfacen lo siguiente:

Conmutativa:	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Asociativa:	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributiva:	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Idempotencia:	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
Identidad:	$p \wedge V \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$ $p \vee F \equiv p$
Involución:	$\sim(\sim p) \equiv p$
Complemento:	$p \vee \sim p \equiv V$ $p \wedge \sim p \equiv F$
D'Morgan:	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Para demostrar las equivalencias lógicas se utilizan tablas de verdad o propiedades.

Demostrar

Tablas de verdad — *Propiedades*

EJEMPLO 6

Demostrar la siguiente equivalencia de proposiciones aplicando propiedades:

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ D'Morgan.

$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q)$ Distributiva.

$\equiv \sim p \wedge V$ Complemento.

$\equiv \sim p$ Identidad.

2.11 ENUNCIADOS CONDICIONALES Y SUS VARIACIONES

Variantes del condicional:

Condicional	$p \rightarrow q$
Converso:	$q \rightarrow p$
Inverso:	$\sim p \rightarrow \sim q$
Contrapositivo:	$\sim q \rightarrow \sim p$

EJEMPLO 7

Dada la proposición condicional: $\sim(p \vee q) \rightarrow \sim r$, encontrar las variantes del condicional:

Solución:

Converso: $\sim r \rightarrow \sim (p \vee q)$

Inverso: $\sim [\sim (p \vee q)] \rightarrow \sim (\sim r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$

Contrapositivo: $\sim (\sim r) \rightarrow \sim [\sim (p \vee q)] \equiv r \rightarrow (p \vee q)$

EJEMPLO 8

Dado el siguiente enunciado "Es necesario que llueva para que el árbol dé frutas y salga la cosecha"; encontrar las variantes del condicional:

Solución:

Sea p = llueva
q = árbol de frutas
r = Salga cosecha

Simbólicamente se representa como: $(q \wedge r) \rightarrow p$

Converso $\Rightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$ "Si llueve el árbol da frutos y sale la cosecha."

Inverso $\Rightarrow \sim(q \wedge r) \rightarrow \sim p$

$\Rightarrow (\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p$ "Si el árbol no da frutos o no sale la cosecha entonces no llueve"

Contrapositivo $\Rightarrow \sim p \rightarrow \sim (q \wedge r)$

$\Rightarrow \sim p \rightarrow (\sim q \vee \sim r)$ "Si no llueve, entonces el árbol no da frutos o no sale la cosecha"

EJEMPLO 9

Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición:

$$[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \leftrightarrow [\sim p \vee \sim r]$$

Solución.

					I		*II*	
p	q	r	$\sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \rightarrow (q \wedge \sim r)$	$\sim p$	$\sim p \vee \sim r$	$I \leftrightarrow II$
V	V	V	F	F	F	F	F	**V**
V	V	F	V	V	V	F	V	**V**
V	F	V	F	F	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	F	F	V	**F**
F	V	V	F	F	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	V	F	F	V	V	V	**V**
F	F	F	V	F	V	V	V	**V**

Tabla 2.5 Tabla tipo contingencia. $[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \leftrightarrow [\sim p \vee \sim r]$

EJEMPLO 10

Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición:

$$[(p \vee \sim q) \wedge \sim (\sim p \vee q)] \rightarrow [q \leftrightarrow \sim r]$$

Solución:

$$\underbrace{[(p \vee \sim q) \wedge \sim (\sim p \vee q)]}_{I} \rightarrow \underbrace{[q \leftrightarrow \sim r]}_{II}$$

				1			*2*	*I*		*II*	
p	q	r	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$\sim(\sim p \vee q)$	$1 \wedge 2$	$\sim r$	$q \leftrightarrow \sim r$	$I \rightarrow II$
V	V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	**V**
V	V	F	F	V	F	V	F	F	V	V	**V**
V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	V	**V**
V	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F	**F**
F	V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	**V**
F	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	**V**

Tabla 2.6 Tabla tipo contingencia. $[(p \vee \sim q) \wedge \sim (\sim p \vee q)] \rightarrow [q \leftrightarrow \sim r]$

EJEMPLO 11

Demostrar la siguiente equivalencia utilizando tablas de verdad:

$$\{\sim [p \vee \sim q]\} \vee \{\sim p \wedge \sim q\} \equiv \sim p$$

Solución:

				I		*II*	
p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\{\sim [p \vee \sim q]\}$	$\sim p$	$\{\sim p \wedge \sim q\}$	$I \vee II$
V	V	F	V	F	**F**	F	**F**
V	F	V	V	F	**F**	F	**F**
F	V	F	F	V	**V**	F	**V**
F	F	V	V	F	**V**	V	**V**

Tabla 2.7 $\{\sim [p \vee \sim q]\} \vee \{\sim p \wedge \sim q\} \equiv \sim p$

EJEMPLO 12

Demostrar la siguiente equivalencia, utilizando propiedades:

$$\{\sim [p \vee \sim q]\} \vee \{\sim p \wedge \sim q\} \equiv \sim p$$

Solución:

$\equiv \{\sim p \wedge \sim (\sim q)\} \vee \{\sim p \wedge \sim q\}$ D'Morgan.

$\equiv \{\sim p \wedge q\} \vee \{\sim p \wedge \sim q\}$ Involución.

$\equiv \sim p \wedge \{q \vee \sim q\}$ Distributiva.

$\equiv \sim p \wedge V$ Complemento.

$\equiv \sim p$ Identidad.

EJEMPLO 13

Demostrar la siguiente equivalencia, utilizando tablas de verdad:

$$[\sim p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim p \equiv \sim p$$

Solución:

p	q	$\sim p$	$(\sim p \wedge q)$	$[\sim p \vee (\sim p \wedge q)]$	$I \wedge II$
V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	**F**	F	F	**F**
F	V	**V**	V	V	**V**
F	F	**V**	F	V	**V**

Tabla 2.8 $[\sim p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim p \equiv \sim p$

EJEMPLO 14

Demostrar la siguiente equivalencia aplicando propiedades:

$$[\sim p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim p \equiv \sim p$$

Solución:

$\equiv [(\sim p \wedge V) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim p$ Identidad.

$\equiv [\sim p \wedge (V \vee q)] \wedge \sim p$ Distributiva.

$\equiv [\sim p \wedge V] \wedge \sim p$ Identidad.

$\equiv \sim p \wedge \sim p$ Identidad.

$\equiv \sim p$ Idempotencia.

EJEMPLO 15

Simplificar la siguiente proposición, aplicando propiedades y nombrando cada propiedad:

$$\sim [p \vee (\sim q \vee p)] \wedge [\sim p \vee (q \wedge q)]$$

Solución:

$\equiv \sim [p \vee (\sim q \vee p)] \wedge [\sim p \vee (q \wedge q)]$

$\equiv \sim [p \vee (p \vee \sim q)] \wedge [\sim p \vee q]$ Conmutativa, Idempotencia

$\equiv \sim [(p \vee p) \vee \sim q] \wedge [\sim p \vee q]$ Asociativa.

$\equiv \sim [p \vee \sim q] \wedge [\sim p \vee q]$ Idempotencia.

$\equiv [\sim p \wedge \sim (\sim q)] \wedge [\sim p \vee q]$ D'Morgan.

$\equiv [\sim p \wedge q] \wedge [\sim p \vee q]$ Involución.

$\equiv \{[\sim p \wedge q] \wedge \sim p\} \vee \{[\sim p \wedge q] \wedge q\}$ Distributiva.

$\equiv \{[q \wedge \sim p] \wedge \sim p\} \vee \{\sim p \wedge [q \wedge q]\}$ Conmutativa, Asociativa.

$\equiv \{q \wedge [\sim p \wedge \sim p]\} \vee \{\sim p \wedge q\}$ Asociativa, Idempotencia.

$\equiv \{q \wedge \sim p\} \vee \{\sim p \wedge q\}$ Idempotencia.

$\equiv \{\sim p \wedge q\} \vee \{\sim p \wedge q\}$ Conmutativa.

$\equiv \sim p \wedge \{q \vee q\}$ Distributiva.

$\equiv \sim p \wedge q$ Idempotencia.

EJEMPLO 16

Escribir en forma lógica cada proposición:

a) Si el archivo tiene un error, perderé la programación: $A \rightarrow P$

b) Si tengo carro y dinero, buscaremos el libro: $(C \wedge D) \rightarrow L$

c) Si no tengo libro, ni apuntes, perderé el exámen: $(\sim L \wedge \sim A) \rightarrow E$

d) Es necesario ser fuerte para ser marinero: $M \rightarrow F$

e) Es suficiente tener una profesión para tener vivienda: $P \rightarrow V$

2.12 ARGUMENTOS E IMPLICACION LOGICA

ARGUMENTOS

Un argumento es un conjunto de proposiciones o premisas que conducen a una conclusión. Estos pueden ser válidos, cuando las hipótesis llevan lógicamente a la conclusión; o falsos cuando la conclusión no es una consecuencia lógica de las premisas. Tal argumento se simboliza así: $P_1, P_2, \ldots, P_n \rightarrow Q$.

Teorema:

El argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \rightarrow Q$ es válido si y solo si, la proposición $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ es una tautología.

EJEMPLO 17

Dado el siguiente argumento: "Si llueve, vamos al cine. Si vamos al cine, no podremos ir al concierto. Fuimos al concierto. Por lo tanto, no llovió." Escribirlo en forma lógica y chequear si es válido o no.

P = Llueve — 1.- $p \rightarrow q$

q = Ir cine. — 2.- $q \rightarrow \sim r$

r= ir al concierto — 3.- r

$\therefore \sim p$

Solución:

Se elabora la tabla de verdad para el argumento. Se debe calcular el valor de verdad de cada premisa, observe 1, 2 y 3. Luego se interceptan las premisas y se condicionan a la conclusión, que en este caso es $\sim p$. Si se obtiene una tautología el argumento es válido.

			1		2	3		Q	
p	q	r	$p \rightarrow q$	$\sim r$	$q \rightarrow \sim r$	r	$1 \wedge 2 \wedge 3$	$\sim p$	$(1 \wedge 2 \wedge 3) \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F	V	V

Tabla 2.9 Solución del ejemplo 17. Tautología, Válido!!!!

EJEMPLO 18

Dado el siguiente argumento: "Si llueve, vamos al cine. Si vamos al cine, no podremos ir al concierto. Fuimos al concierto. Por lo tanto, no fuimos al cine." Chequear si es válido o no.

Solución:

p = Llueve — 1.- $p \rightarrow q$

q = Ir cine. — 2.- $q \rightarrow \sim r$

r = ir al concierto — 3.- r

$\therefore \sim q$

Se procede igual que en el ejemplo anterior. Se calcula el valor de verdad para cada premisa, luego se interceptan las premisas y se condicionan a la conclusión:

			1		2	3		Q	
p	q	r	$p \to q$	$\sim r$	$q \to \sim r$	r	$1 \wedge 2 \wedge 3$	$\sim q$	$(1 \wedge 2 \wedge 3) \to \sim q$
V	V	V	V	F	F	V	F	F	**V**
V	V	F	V	V	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	F	V	V	F	V	**V**
V	F	F	F	V	V	F	F	V	**V**
F	V	V	V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	F	V	V	V	F	F	F	**V**
F	F	V	V	F	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	F	F	V	**V**

Tabla 2.10 Solución del ejemplo 18. Tautología, Válido!!!!

EJEMPLO 19

Dado el siguiente argumento: "Si llueve, vamos al cine. Si vamos al cine, no podremos ir al concierto. Fuimos al concierto. Por lo tanto, llovió y no fuimos al cine". Chequear si es válido o no

Solución:

p = Llueve
q = Ir cine.
r = ir al concierto

1.- $p \to q$
2.- $q \to \sim r$
3.- r

$\therefore p \wedge \sim q$

			1		2	3			Q	
p	q	r	$p \to q$	$\sim r$	$q \to \sim r$	r	$1 \wedge 2 \wedge 3$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(1 \wedge 2 \wedge 3) \to Q$
V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	**V**
V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	**V**
V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	**V**
F	V	V	V	F	F	V	F	F	F	**V**
F	V	F	V	V	V	F	F	F	F	**V**
F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	**F**
F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	**V**

Tabla 2.11 Solución del ejemplo 19. Contingencia, falso!!!

EJEMPLO 20

Dado el siguiente argumento: "Si llueve, vamos al cine. Si vamos al cine, no podremos ir al concierto. Fuimos al concierto. Por lo tanto, no fuimos al concierto." Chequear si es válido o no

Solución:

p = Llueve
q = Ir cine.
r = ir al concierto

1.- $p \to q$
2.- $q \to \sim r$
3.- r

$\therefore \sim r$

			1	Q	2	3		
p	q	r	$p \to q$	$\sim r$	$q \to \sim r$	r	$1 \wedge 2 \wedge 3$	$(1 \wedge 2 \wedge 3) \to \sim r$
V	V	V	V	F	F	V	F	**V**
V	V	F	V	V	V	F	F	**V**
V	F	V	F	F	V	V	F	**V**
V	F	F	F	V	V	F	F	**V**
F	V	V	V	F	F	V	F	**V**
F	V	F	V	V	V	F	F	**V**
F	F	V	V	F	V	V	V	**F**
F	F	F	V	V	V	F	F	**V**

Tabla 2.12 Solución del ejemplo 20. Contingencia, falso!!!

EJEMPLO 21

Dado el siguiente argumento: "Si mis cálculos son correctos y pago la electricidad, me quedaré sin dinero. Si no pago la electricidad me cortaran la corriente. Por lo tanto si no tengo dinero y no me cortaron la corriente entonces no hice bien mis cálculos." Chequear si es válido o no.

Solución:

p = cálculos correctos
q= electricidad
r= sin dinero.
s = cortar la corriente

1.- $(p\wedge q)\rightarrow r$
2.- $\sim q\rightarrow s$
$\therefore(\sim r\wedge\sim s)\rightarrow\sim p$

					I		II					Q	III	
p	q	r	s	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow r$	$\sim q$	$\sim q\rightarrow s$	$\sim r$	$\sim s$	$\sim r\wedge\sim s$	$\sim p$	$(\sim r\wedge\sim s)\rightarrow p$	$I\wedge II$	$III\rightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	**V**
V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V	V	**V**
V	V	F	V	V	F	F	V	V	F	F	F	V	F	**V**
V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	**V**
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V	**V**
V	F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	**V**
V	F	F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	**V**
V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	**V**
F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V	V	**V**
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	**V**
F	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	**V**
F	F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	**V**
F	F	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	**V**
F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	**V**

Tabla 2.13 Solución del ejemplo 21. Tautología, Válido!!!!

EJEMPLO 22

Dado el siguiente argumento: "Si llueve y tengo auto, te llevo el libro. No tengo auto. Si te llevo el libro, podrás resolver el examen, por lo tanto no podrás resolver el examen." Chequear si es válido o no:

Solución:

p = llueve
q = tengo auto.
r = te llevo el libro.
s = resolver el exámen.

1.- $(p\wedge q)\rightarrow r$
2.- $\sim q$
3.- $r\rightarrow s$
$\therefore\ \sim s$

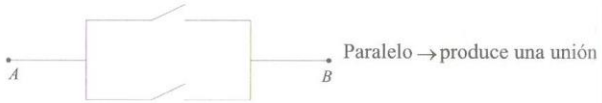
					1	2	3			Q
p	q	r	s	$(p\wedge q)$	$(p\wedge q)\rightarrow r$	$\sim q$	$r\rightarrow s$	$1\wedge 2\wedge 3$	$\sim s$	$(1\wedge 2\wedge 3)\rightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	**V**
V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	**V**
V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	**V**
V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	**V**
V	F	V	V	F	V	V	V	V	F	**F**
V	F	V	F	F	V	V	F	F	V	**V**
V	F	F	V	F	V	V	V	V	F	**F**
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	**V**
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	**V**
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	**V**
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	**V**
F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	**F**
F	F	V	F	F	V	V	F	F	V	**V**
F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	**V**

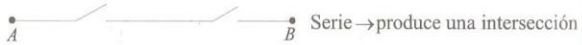
Tabla 2.14 Solución del ejemplo 22. Contingencia. Argumento no válido!!!

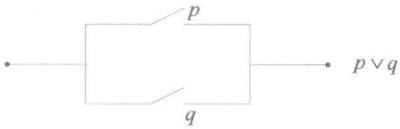
2.13 CIRCUITOS LOGICOS

Los circuitos lógicos son estructuras formadas por interruptores conectados en serie o en paralelo, que además, contienen una batería y una lámpara. En el sentido de circuitos lógicos se trabajará con proposiciones que son las entradas al circuito; y se describirá, una vez recorrido, que proposición de salida produce.

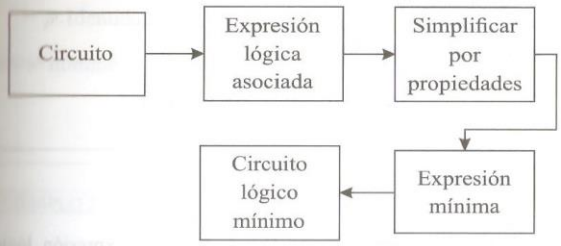
Sean las proposiciones denotadas por ***p,q,r,s,t*** y los circuitos en sus dos formas de conexión:





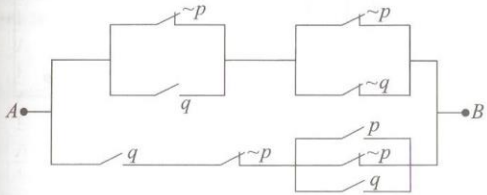


2.14 PROCESO PARA OPERAR CIRCUITOS



EJEMPLO 23

Dado el siguiente circuito lógico; hallar la expresión lógica asociada, simplificar por propiedades y dibujar el circuito mínimo encontrado.



Solución:

Salida: $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee [q \wedge \sim p \wedge (p \vee \sim p \vee q)]$

Simplificación por propiedades:

$[\sim p \vee (q \wedge \sim q)] \vee [q \wedge \sim p \wedge (V \vee q)]$ Distributiva, Complemento.

$[\sim p \vee F] \vee [(q \wedge \sim p) \wedge V]$ Complemento, Identidad.

$\sim p \vee (q \wedge \sim p)$ Identidad, Identidad.

$(\sim p \wedge V) \vee (q \wedge \sim p)$ Identidad.

$\sim p \wedge (V \vee q)$ Distributiva.

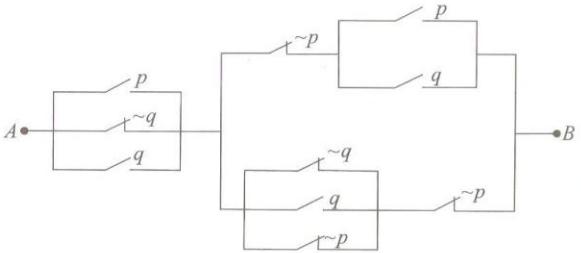
$\sim p \wedge V$ Identidad.

$\sim p$ Identidad.

Circuito mínimo asociado:

EJEMPLO 24

Dado el siguiente circuito lógico; hallar la expresión lógica asociada, simplificar por propiedades y dibujar el circuito mínimo encontrado.



Solución:

Salida: $[p \vee \sim q \vee q] \wedge [[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee [(\sim q \vee q \vee \sim p) \wedge \sim p]]$

Simplificación por propiedades:

$[p \vee V] \wedge [[(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)] \vee [(V \vee \sim p) \wedge \sim p]]$ Complemento, Distributiva, Complemento.

$V \wedge [[F \vee (\sim p \wedge q)] \vee [V \wedge \sim p]]$ Identidad, Complemento, Identidad.

$V \wedge [(\sim p \wedge q) \vee \sim p]$ Identidad, Identidad.

$(\sim p \wedge q) \vee \sim p$ Identidad.

$(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge V)$ Identidad.

$\sim p \wedge (q \vee V)$ Distributiva.

$\sim p \wedge V$ Identidad.

$\sim p$ Identidad.

Circuito mínimo asociado:

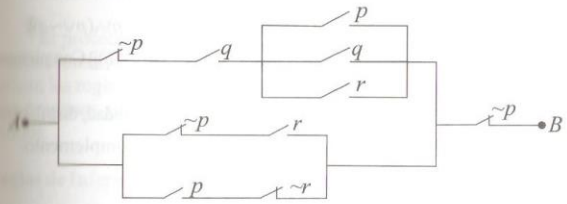
EJEMPLO 25

Dibujar el circuito para la siguiente proposición

$$\{[\sim p \wedge q \wedge [p \vee q \vee r]] \vee [(\sim p \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)]\} \wedge \sim p$$

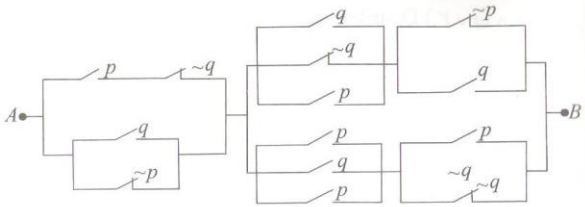
Solución:

Para dibujar el circuito se debe tener en cuenta las llaves, corchetes y paréntesis. Recordar que cada uno de estos, representa una malla en paralelo o en serie:



EJEMPLO 26

Dado el siguiente circuito lógico:



Hallar:

a) Expresión lógica asociada.

b) Simplificación por propiedades.

c) Circuito simplificado.

Solución:

a) Expresión lógica asociada:

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge\{[(q\vee\sim q\vee p)\wedge(\sim p\vee q)]\vee[(p\vee q\vee p)\wedge(p\vee\sim q)]\}$

b) Simplificación por propiedades.

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge\{[(q\vee\sim q\vee p)\wedge(\sim p\vee q)]\vee[(p\vee q\vee p)\wedge(p\vee\sim q)]\}$

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge\{[(V\vee p)\wedge(\sim p\vee q)]\vee[(p\vee q)\wedge(p\vee\sim q)]\}$ Complemento, Conmutativa e Idempotencia

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge\{[V\wedge(\sim p\vee q)]\vee[p\vee(q\wedge\sim q)]\}$ Identidad, distributiva.

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge\{(\sim p\vee q)\vee[p\vee F]\}$ Identidad, complemento.

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge\{(\sim p\vee q)\vee p\}$ Identidad.

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge[(\sim p\vee q)\vee p]$ Identidad.

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]\wedge[V]$ Conmutativa + Complemento + Identidad.

$[(p\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim p)]$ Identidad.

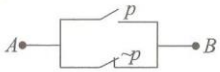
$[(p\wedge\sim q)\vee q]\vee\sim p$ Asociativa.

$[(p\vee q)\wedge(\sim q\vee q)]\vee\sim p$ Distributiva.

$(p\vee q)\vee\sim p$ Complemento + Identidad.

V Asociativa + Complemento + Identidad.

c) Circuito simplificado



Recordar:

$p\vee\sim p=V$

$q\vee\sim q=V$

2.15 REGLAS DE INFERENCIA

La inferencia propone un método que mediante reglas adecuadas sigue válidamente una conclusión partiendo de un conjunto de premisas. Este paso lógico de las premisas a la conclusión es una deducción. La conclusión que se obtiene es una consecuencia lógica de las premisas, si cada paso utilizado para obtener dicha conclusión es permitido por una regla. Y estas reglas que permiten concluir válidamente una conclusión, son llamadas ***Reglas de Inferencia.***

El procedimiento es el siguiente: se empieza con un conjunto de proposiciones simbolizadas que se denominan premisas; luego, se aplican las reglas de inferencia de una manera tal que permita inferir, de esas premisas, una conclusión. Las reglas de inferencia son enunciados válidos.

Reglas de Inferencia

1) Modus Ponendo Ponens (MPP).

$$\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ p \\ \therefore\ q \end{array}$$

2) Modus Tollendo Tollens (MTT).

$$\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore\ \sim p \end{array}$$

3) Silogismo Hipotético (SH).

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to R \\ \hline \therefore\ p \to R \end{array}$$

4) Silogismo Disjuntivo (SD).

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

5) Igualdad del Condicional (LC).

$$p \to q \equiv \sim p \vee q$$

6) Ley de Adición (LA).

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$

7) Ley Simplificación (LS).

$$\left.\begin{array}{l} p \wedge q \\ \therefore\ p \end{array}\right\}$$ Se toma cualquiera de los dos, es decir, p o q

8) Ley Bicondiconal (LB).

$$p \leftrightarrow q \quad \therefore p \to q \ \text{ó} \ \ q \to p$$

9) Ley Combinación (C).

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore\ p \wedge q \end{array}$$

2.16 MÉTODOS PARA APLICAR REGLAS DE INFERENCIA

Existen dos métodos para aplicar reglas de inferencia
- método formal.
- método por reducción al absurdo.

Método formal

En el método formal se escogen las premisas a las que se les puede aplicar alguna de las reglas de inferencia mencionadas anteriormente, estas se van combinando de tal forma que se pueda llegar a la conclusión dada.

EJEMPLO 27

Dado el siguiente argumento, demostrar la conclusión por reglas de inferencia a través del método formal.

(1) $(p \vee q) \to \sim r$
(2) $r \wedge s$
(3) $\sim p \to h$
$\therefore\ h$

Solución:

Se deben combinar las premisas con las que se pueda aplicar alguna regla de inferencia:

(2) $\xrightarrow{LS} r$ (4)
(4) y (1) $\xrightarrow{MTT} \sim(p \vee q) \xrightarrow{Morgan} \sim p \wedge \sim q$ (5)
(5) $\xrightarrow{LS} \sim p$ (6)
(6) y (3) $\xrightarrow{MPP} h$

EJEMPLO 28

Dado el siguiente argumento, demostrar la conclusión por reglas de inferencia método formal.

(1) $p \to (q \wedge r)$
(2) $r \to s$
(3) $\sim (q \wedge s)$
(4) q
$\therefore\ \sim p$

Solución:

$(3) \xrightarrow{Morgan} \sim q \vee \sim s \quad (5)$

$(5) y (4) \xrightarrow{SD} \sim s \; (6)$

$(6) y (2) \xrightarrow{MTT} \sim r \; (7)$

$(7) \xrightarrow{definición} \sim (r \wedge q) \quad (8)$

$(8) y (1) \xrightarrow{MTT} \sim p$

EJEMPLO 29

Dado el siguiente argumento, demostrar la conclusión por reglas de inferencia método formal.

$(1) \quad (p \vee \sim r) \rightarrow \sim p$

$(2) \quad \sim p \rightarrow (h \vee s)$

$(3) \quad p \wedge t$

$(4) \quad \sim h$

$\therefore \; s$

Solución:

$(3) \xrightarrow{LS} p \quad (5)$

$(5) \xrightarrow{LA} (p \vee \sim r) \quad (6)$

$(6) y (1) \xrightarrow{MPP} \sim p \quad (7)$

$(7) y (2) \xrightarrow{MPP} (h \vee s) \quad (8)$

$(8) y (4) \xrightarrow{SD} s$

Otra forma:

$(1) y (2) \xrightarrow{SH} (p \vee \sim r) \rightarrow (h \vee s) \quad (5)$

$(3) \xrightarrow{LS} p \; (6)$

$(6) \xrightarrow{LA} p \vee \sim r \quad (7)$

$(7) y (5) \xrightarrow{MPP} (h \vee s) \quad (8)$

$(8) y (4) \xrightarrow{SD} s$

EJEMPLO 30

Dado el siguiente argumento, demostrar la conclusión por reglas de inferencia método formal.

$(1) \quad \sim p \vee r$

$(2) \quad q \rightarrow (s \wedge t)$

$(3) \quad p \vee \sim s$

$(4) \quad \sim r$

$(5) \quad (h \vee t) \rightarrow q$

$\therefore \sim h \wedge \sim t$

Solución:

$(4) y (1) \xrightarrow{SD} \sim p \quad (6)$

$(6) y (3) \xrightarrow{SD} \sim s \quad (7)$

$(7) \xrightarrow{LA} \sim s \vee \sim t \quad (8)$

$(8) \xrightarrow{Morgan} \sim (s \wedge t) \; (9)$

$(9) y (2) \xrightarrow{MTT} \sim q \quad (10)$

$(10) y (5) \xrightarrow{MTT} \sim (h \vee t) \quad (11)$

$(11) \xrightarrow{Morgan} \sim h \wedge \sim t$

Método por reducción al absurdo

Este método permite igual que el anterior demostrar que un enunciado es válido. Para aplicarlo se comienza negando la conclusión y se introduce en la combinación de las premisas. En esta combinación con las premisas, se debe llegar a una contradicción. Si se produce la contradicción, el argumento es válido.

EJEMPLO 31

Dado el siguiente argumento, demostrar su validez aplicando el método por absurdo.

$(1)\ p \to q$
$(2)\ p \wedge r$
$(3)\ s \to \sim q$
$\therefore\quad \sim s$

Solución:

$(1)\ p \to q$
$(2)\ p \wedge r$
$(3)\ s \to \sim q$
$(4) \sim\sim s$
$\therefore\quad F$

$(4) \xrightarrow{Involución} s\ (5)$
$(5)\, y\, (3) \xrightarrow{MPP} \sim q\ (6)$
$(6)\, y\, (1) \xrightarrow{MTT} \sim p\ (7)$
$(2) \xrightarrow{LS} p\ (8)$
$(7)\, y\, (8) \xrightarrow{C} p \wedge \sim p \equiv F$

Se produce la contradicción!!! Argumento válido!!!

EJEMPLO 32

Dado el siguiente argumento, demostrar su validez aplicando el método por reducción al absurdo.

$(1)\ \sim(s \vee t) \to \sim p$
$(2) \sim s$
$(3)\ q \to \sim r$
$(4) \sim t \to r$
$\therefore\quad (p \vee q) \to t$

Solución:

$(1)\ \sim(s \vee t) \to \sim p$
$(2) \sim s$
$(3)\ q \to \sim r$
$(4) \sim t \to r$
$(5) \sim [(p \vee q) \to t]$
$\therefore\quad F$

$(5) \xrightarrow{LC} \sim [\sim (p \vee q) \vee t]\ (6)$
$(6) \xrightarrow{D'Morgan} \sim\sim (p \vee q) \wedge \sim t\ (7)$
$(7) \xrightarrow{Involución} (p \vee q) \wedge \sim t\ (8)$
$(8) \xrightarrow{LS} \sim t\ (9)$
$(9)\, y\, (4) \xrightarrow{MTT} r\ (10)$
$(10)\, y\, (3) \xrightarrow{MTT} \sim q\ (11)$
$(8) \xrightarrow{LS} (p \vee q)\ (12)$
$(11)\, y\, (12) \xrightarrow{SD} p\ (13)$
$(13)\, y\, (1) \xrightarrow{MTT} \sim\sim (s \vee t)\ (14)$
$(14) \xrightarrow{Involución} (s \vee t)\ (15)$
$(15)\, y\, (2) \xrightarrow{SD} t\ (16)$
$(16)\, y\, (9) \xrightarrow{LC} t \wedge \sim t \equiv F$

EJEMPLO 33

Dado el siguiente argumento, demostrar su validez aplicando el método por reducción al absurdo.

$(1)\ (p \vee q) \rightarrow \sim t$
$(2)\ s \rightarrow q$
$(3)\ p \vee s$
$\therefore\ \sim t$

Solución:

$(1)\ (p \vee q) \rightarrow \sim t$		$(1)\ (p \vee q) \rightarrow \sim t$
$(2)\ s \rightarrow q$		$(2)\ s \rightarrow q$
$(3)\ p \vee s$		$(3)\ p \vee s$
$(4) \sim (\sim t)$	$\rightarrow$	$(4)\ t$
$\therefore\ F$		$\therefore\ F$

$(4)\,y\,(1) \xrightarrow{MTT} \sim (p \vee q)\ (5)$
$(5) \xrightarrow{D'Morgan} \sim p \wedge \sim q\ \ (6)$
$(6) \xrightarrow{LS} \sim p\ (7)$
$(7)\,y\,(3) \xrightarrow{SD} s\,(8)$
$(8)\,y\,(2) \xrightarrow{MPP} q\,(9)$
$(6) \xrightarrow{LS} \sim q\,(10)$
$(9)\,y\,(10) \xrightarrow{C} q \wedge \sim q \equiv F$

EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 2

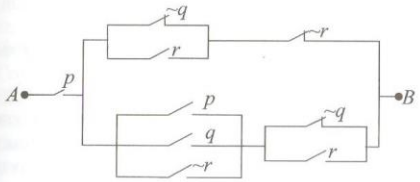
1) Escribir en forma lógica los siguientes enunciados. Sea p = llueve, q = hace frío, r = ir al cine, s = tener dinero.
   a) Si llueve y hace frío, no iremos al cine.
   b) Solo si tengo dinero, iremos al cine.
   c) O llueve o hace frío.
   d) Hacer frío es suficiente para no ir al cine.
   e) Tener dinero es necesario, para ir al cine.
   f) No tengo dinero, ni hace frío.
   g) Si hace frío pero no llueve, iremos al cine.

2) Elaborar la tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas:
   a) $[\sim (p \rightarrow q) \vee (\sim p \wedge r)] \leftrightarrow q$
   b) $[(\sim q \vee r) \rightarrow (\sim q \wedge p)] \vee [\sim p \wedge \sim r]$
   c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim r \vee q) \rightarrow p]$
   d) $[p \vee (r \rightarrow \sim s)] \leftrightarrow [(\sim p \vee q) \rightarrow \sim r]$

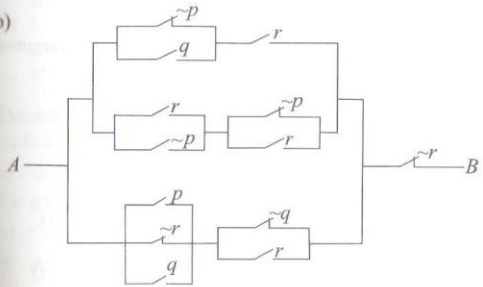
3) Demostrar que las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes. Utilizar tablas de verdad.
   a) $[p \rightarrow q] \wedge [r \rightarrow q] \equiv [(p \wedge r) \rightarrow q]$
   b) $[\sim p \vee q] \wedge r \equiv (p \rightarrow q) \wedge r$
   c) $\sim (p \vee q) \wedge \sim r \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge \sim r$
   d) $\sim (\sim p \wedge \sim q) \vee q \equiv p \vee q$

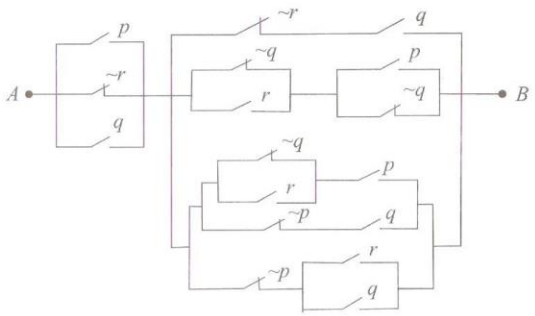
4) Dados los siguientes circuitos lógicos, hallar en cada uno de ellos la expresión lógica asociada, simplificarla y dibujar el circuito simplificado.

a)



b)





5) Demostrar la validez de cada enunciado utilizando tablas de verdad.

a) $p \to q,\ \sim q \wedge r,\ \sim p \to s\ \therefore\ r \wedge s$

b) $\sim q \vee r,\ r \to p,\ q\ \therefore\ p$

c) $p \leftrightarrow q,\ q \to r,\ \sim r \therefore \sim p$

6) Escribir en forma lógica el siguiente enunciado y demostrar su validez aplicando tablas de verdad.

"Si tengo dinero y apruebo el examen, podré graduarme de ingeniero. Si me gradúo de ingeniero, iré a la empresa privada. No tengo dinero, ni voy a la empresa privada. Por lo tanto no me gradué de ingeniero o no aprobé el examen."

7) Demostrar por el método formal, la validez de cada argumento.

a) $p \to q,\ \sim q \wedge r,\ (\sim p \wedge r) \to s\ \therefore\ s$

b) $p \to q,\ r \to s,\ (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim p \vee \sim q)\ \therefore\ (\sim p \vee \sim r)$

c) $p \to \sim q,\ p,\ \sim r \to q\ \therefore\ r \vee t$

d) $r \to p,\ q \to (s \wedge r),\ \sim p \vee t\ \therefore\ (q \to t)$

e) $\sim r \vee \sim s,\ q \to s\ \therefore\ r \to \sim q$

f) $\sim p,\ \sim r \to t,\ \sim s \to p\ \therefore\ \sim (r \wedge s) \to (\sim p \wedge t)$

g) $p \vee q,\ (p \vee s) \to t,\ (q \vee s) \to t\ \therefore\ t$

h) $(p \vee q) \to [r \to (s \wedge t)],\ q \vee p\ \therefore\ r \to \sim (\sim s \vee \sim t)$

i) $p \to (q \wedge r),\ r \to s,\ \sim s\ \therefore\ \sim p \vee t$

j) $p \to q,\ q \leftrightarrow s,\ r \to \sim s,\ p\ \therefore\ \sim r$

8) Dibujar el circuito asociado a cada proposición compuesta.

a) $\{[p \wedge \sim q] \vee [\sim r \wedge p]\} \vee \{p \wedge q \wedge \sim r\}$

b) $(\sim p \vee q) \wedge \{[(\sim p \vee q) \wedge (q \vee \sim r)] \vee \sim p\}$

c) $[(\sim p \vee q) \wedge r] \vee [\sim q \wedge r \wedge p] \vee [(p \vee q) \wedge r]$

d) $[(q \vee r) \wedge \sim p] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge \sim r]$

9) Con los enunciados del ejercicio 7, demostrar la validez del argumento por el método de reducción al absurdo.

10) Dados los siguientes enunciados, escribirlos en forma lógica y demostrar su validez por reglas de inferencia.

a) "Si estudia informática o electrónica, es un gran ingeniero. Es un gran ingeniero si y solo si es buen estudiante. Po lo tanto, si no estudia informática o electrónica y no es un gran ingeniero entonces es un mal estudiante."

b) Está en el equipo de futbol si y solo si es buen jugador y tiene una edad menor a 27 años o pertenece a la universidad. Si está en el equipo de futbol y no es buen jugador ni está en la universidad entonces es de Colombia. Por lo tanto si es de Colombia, entonces es un buen jugador.

c) El programa corre si no tiene errores de compilación. Si no tiene errores de lógica ni de compilación, el programa está bien diseñado y los resultados son satisfactorios. El programa tiene errores de lógica o de compilación. Por lo tanto el programa no corre y los resultados no son satisfactorios.

d) Llueve si y solo si hay nubes. Si hay nubes, hubo anteriormente una evaporización a causa del calor. Llueve. Por lo tanto, hubo una evaporización a causa del calor.

11) Demostrar por el método de reducción al absurdo, la validez de cada argumento.

a) $\sim r \to q,\ t \to \sim q,\ \sim s \to \sim q\ \therefore\ (t \vee \sim s) \to r$

b) $p \vee \sim r,\ r \wedge s,\ p \to \sim t,\ \sim t \to h\ \therefore\ h$

c) $r \to q,\ s \to t,\ q \to s\ \therefore\ r \to (t \vee q)$

d) $p \to q,\ r \to s,\ (\sim q \vee \sim s) \wedge (\sim p \vee \sim q)\ \therefore\ \sim p \vee \sim q$

e) $\sim r \vee p, \sim r \rightarrow \sim q, \sim p \therefore \sim q \vee r$

f) $r \rightarrow s, s \rightarrow q, r \vee (s \wedge t) \therefore \sim q \rightarrow (t \wedge s)$

g) $\sim p \vee q, q \rightarrow r, p \therefore r \vee \sim q$

CAPÍTULO 3
Lógica de Predicados

3.1 PREDICADOS Y SUS VALORES DE VERDAD

La lógica de proposiciones se utiliza cuando es posible determinar claramente si una proposición es falsa o verdadera, pero en la vida real, casi nada es totalmente verdadero o totalmente falso. Por eso se hace necesario el estudio de proposiciones en donde una gran cantidad de conjuntos cumplen con ciertas características y otros no.

La lógica de predicados se basa en que las proposiciones son conjuntos de elementos que tienen una propiedad llamada "predicado" y en este contexto una proposición puede ser verdadera para un grupo de elementos del conjunto, pero falsa para otro.

EJEMPLO 1

Sea: $U = \{x / x \text{ es un ciudadano venezolano}\}$
$P =$ *habla inglés*

A partir de esto se tiene la proposición Px que significará: "x habla inglés"

O bien:

Todos los venezolanos hablan inglés.

Ó Algún venezolano habla inglés.

Ó Algunos venezolanos hablan inglés.

En la lógica de predicados se define un conjunto universo que contiene todos los elementos a los cuales se está sometiendo al predicado. Además se cuenta con los conceptos "todos" y "Algunos" llamados "Cuantificadores".

$\forall$ = "Para todo o todos"
$\exists$ = "Existe alguno, algunos o al menos un elemento"

3.2 CUANTIFICADOR UNIVERSAL.

El cuantificador "Todos" se llama cuantificador universal, y se denota con el símbolo $\forall$.

Si seguimos el ejemplo 1 donde $U = \{x \ / \ x \ es \ un \ ciudadano \ venezolano\}$ y $P = habla \ inglés$, se tendrá que la proposición.

$\forall \ x \in U, Px$ Se lee "Todos los venezolanos hablan inglés".

Esta proposición es verdadera si y solo si Px es verdadera para todo x del U, esto es, si y solo si el dominio de verdad Px es todo U.

EJEMPLO 2

Simbolizar las siguientes proposiciones y determinar su valor lógico.
a) Todas las mujeres son ricas.
b) Todo hombre es mortal.

Solución:

a) Considere la siguiente proposición.
Sea $M = \{x / x \ es \ mujer\}$
$R = es \ rica$

Por lo tanto: $\forall x \in M, Rx$ se lee "Todas las mujeres son ricas".

Y es una proposición falsa, porque no todas las mujeres son ricas.

b) Sea $H = \{x / x \ es \ hombre\}$
$M = es \ mortal$
Por lo tanto: $\forall x \in H, Mx$ se lee "Todo hombre es mortal".

Y es una proposición verdadera, porque todos los seres humanos son mortales.

Observación: Las proposiciones universales generalizan la intersección, esto es, sea U el conjunto universal finito y formado por $\{U_1, ..., U_n\}$. Sea P un predicado, la proposición $\forall x \in U, Px$ es verdadera si y solo si $Pu_1, Pu_2, \ldots, Pu_n$ son todas verdaderas, es decir, si y solo si $Pu_1 \wedge Pu_2 \wedge \ldots \wedge Pu_n$ es verdadera. Luego

$$\forall x \in U, Px \equiv Pu_1 \wedge Pu_2 \wedge \ldots \wedge Pu_n$$

3.3 CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

El cuantificador "algunos" o "Existe al menos uno", se llama cuantificador existencial y se denota con el símbolo $\exists$.

En el ejemplo 1 la proposición $\exists x \in U, Px$

Se lee "Algún venezolano habla inglés"

ó "Existe algún venezolano que habla inglés"

La proposición existencial es verdadera si y solo si Px es verdadera al menos para un x en U. Esto es, si y solo si el dominio de verdad de Px es no vacío.

EJEMPLO 3

Simbolizar las siguientes proposiciones y determinar su valor lógico.
a) Algunos matemáticos son ricos.
b) Existe algún hombre inmortal.
c) Algunos estudiantes son casados.

Solución:

a) Sea $M = \{x / x \ es \ matemático\}$ y sea $Rx, x \ es \ rico$

La proposición queda escrita como:

$\exists x \in M, Rx$ "algunos matemáticos son ricos"

Esta proposición es verdadera.

b) Sea $H=\{x/x\ es\ hombre\}$ y sea $Ix, x\ es\ inmortal$
La proposición dada se escribe como

$\exists x \in H, Ix$ "Existe algún hombre inmortal".

La proposición dada es falsa, pues todos los hombres son mortales.

c) Sea $E=\{x/x\ es\ estudiante\}$ y sea $Cx, x\ es\ casado$

La proposición dada se escribe

$\exists x \in E, Cx$ "Algunos estudiantes son casados"

La proposición dada es verdadera, pues basta con encontrar un estudiante casado.

Observación: Las proposiciones existenciales generalizan la unión.

En efecto, sea U el conjunto universal finito tal que $U=\{U_1,...,U_n\}$ y sea P el predicado, entonces $\exists u \in U, Pu$ es verdadera si y solo si al menos una: $Pu_1, Pu_2,...,Pu_n$ es verdadera, es decir, si y solo si $Pu_1 \vee Pu_2 \vee ... Pu_n$ es verdadera. Luego

$$\exists u \in U, Pu \equiv Pu_1 \vee Pu_2 \vee \ldots \vee Pu_n$$

3.4 NEGACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES.

Las leyes de Morgan vistas en el capítulo anterior proporcionan las relaciones entre la negación, la unión y la intersección. Estas leyes se pueden generalizar haciendo uso de los cuantificadores universal y existencial.

Sea $U = \{U_1,\ldots,U_n\}$ y sea P el predicado universal la expresión

$$\forall x \in U, Px \equiv Pu_1 \wedge Pu_2 \wedge \ldots \wedge Pu_n$$

La expresión negada quedará como:

$$\sim [\forall u \in U, Pu] \equiv \sim [Pu_1 \wedge Pu_2 \wedge \ldots \wedge Pu_n]$$

Aplicando Morgan

$$\equiv \sim Pu_1 \vee \sim Pu_2 \vee \ldots \vee \sim Pu_n$$
$$\equiv \exists u \in U, \sim Pu$$

Por lo tanto, la expresión queda:

$$\sim [\forall u \in U, Pu] \equiv \exists u \in U, \sim Pu$$

Para el cuantificador existencial se procede de igual manera:

$$\exists u \in U, Pu \equiv Pu_1 \vee Pu_2 \vee \ldots \vee Pu_n$$

La negación queda:

$$\sim [\exists u \in U, Pu] \equiv \sim [Pu_1 \vee Pu_2 \vee \ldots \vee Pu_n]$$

Aplicando Morgan

$$\equiv \sim Pu_1 \wedge \sim Pu_2 \wedge \ldots \wedge \sim Pu_n$$

$$\sim [\exists u \in U, Pu] \equiv \forall u \in U, \sim Pu$$

Estas reglas muestran que para negar una proposición con cuantificadores se cambia el cuantificador, de universal a existencial, o de existencial a universal y se niega la proposición cuantificada.

Observación: El valor de verdad para las negaciones se demuestra como sigue:

1) $\sim [\forall u \in U, Pu]$ es verdadera si y solo si $\forall u \in U, Pu$ es falsa.

Si y solo si, Algún $u \in U, Pu$ es falsa.
Si y solo si, Algún $u \in U, \sim Pu$ es verdadera
Si y solo si, $\exists u \in U, \sim Pu$

2) $\sim [\exists u \in U, Pu]$ es verdadera si y solo si $\exists u \in U, Pu$ es falsa.

Si y solo si, Para todo $u \in U, Pu$ es falsa.
Si y solo si, Para todo $u \in U, \sim Pu$ es verdadera
Si y solo si, $\forall u \in U, \sim Pu$

EJEMPLO 4

Negar las siguientes proposiciones.

a) Algunos hombres son ciegos.

b) Todos los trabajadores tienen seguro social.

Solución:

a) Sea $H = \{x / x\ es\ hombre\}$
$Cx = x\ es\ ciego$

La proposición queda escrita como:

$\exists x \in H, Cx$ y su negación:

$\sim [\exists x \in H, Cx] = \forall x \in H, \sim Cx$

Esta negación se lee "Ningún hombre es ciego"

b) Sea $T = \{x / x\ es$ trabajador$\}$
$Sx = x\ tiene\ seguro\ social$

La proposición queda escrita como:

$\forall x \in T, Sx$ y su negación:

$\sim [\forall x \in T, Sx] = \exists x \in T, \sim Sx$

Esta negación se lee "Existe algún trabajador que no tiene seguro social"

EJEMPLO 5

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\exists x \in R, x^2 + 1 = 0$

b) $\forall n \in Z, 2^n > 0$

Solución:

a) $\exists x \in R, x^2 + 1 = 0$ es falso, pues $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en los reales $x^2 = -1$

b) $\forall n \in Z, 2^n > 0$ es verdadero.

La prueba por inducción matemática.

$n = 1,\ 2^1 > 0 \Rightarrow 2 > 0$ se cumple

$n = k,\ 2^k > 0$ Hipótesis

$n = k+1,\ 2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 0$ Porque $2^k > 0 \wedge 2 > 0$

Para todo $n \in Z$

3.5 PROPOSICIONES CON DOS O MÁS CUANTIFICADORES.

En una proposición de dos o más cuantificadores, el orden en que aparecen es muy importante. El cuantificador de la izquierda considera como una sola proposición a lo que está a su derecha. Los cuantificadores se leen de izquierda a derecha.

Si se tiene una proposición de dos variables "x" y "y", se debe tener dos universos U y V, donde U es el universo de "x", y V es el universo de "y", así habrán ocho proposiciones posibles.

1. $\forall x \in A, \exists y \in B, P(x, y)$
2. $\forall x \in A, \forall y \in B, P(x, y)$
3. $\exists x \in A, \exists y \in B, P(x, y)$
4. $\exists x \in A, \forall y \in B, P(x, y)$
5. $\forall y \in B, \exists x \in A, P(x, y)$
6. $\exists y \in B, \forall x \in A, P(x, y)$
7. $\forall y \in B, \forall x \in A, P(x, y)$
8. $\exists y \in B, \exists x \in A, P(x, y)$

Si los cuantificadores son iguales, estos se pueden conmutar, proporcionando, proposiciones equivalentes.

Si los cuantificadores son distintos, no se pueden conmutar, ya que al conmutarlos se obtienen proposiciones diferentes.

EJEMPLO 6

Sea $U = \{x / x\ es\ humano\}$, $V = \{y / y\ es\ mujer\}$ y sea $Hxy = x\ es\ hijo\ de\ y$

Las siguientes proposiciones no son equivalentes.

1) $\forall x \in U, \exists y \in V, Hxy$ Todo ser humano es hijo de una mujer.
2) $\exists y \in V, \forall x \in U, Hxy$ Existe una mujer, tal que todo ser humano es su hijo.

La primera proposición es verdadera, la segunda proposición es falsa.

EJEMPLO 7

Sea $U = \{1,2,3\}$, $V = \{1,2,3,4,5\}$ y sea:

$Pxy = x^2 + y^2 < 40$ con $x \in U$ y $y \in V$

Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1) $\forall x \in U, \forall\ y \in V, P(xy)$ Para todo elemento en U y todo elemento en V se cumple la desigualdad $x^2 + y^2 < 40$.

2) $\forall y \in V, \forall x \in U, P(xy)$ Para todo elemento de V y todo elemento en U se cumple la desigualdad $x^2 + y^2 < 40$.

Las dos proposiciones son equivalentes y verdaderas.

EJEMPLO 8

Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Considerar cada una de las siguientes proposiciones y hallar su valor de verdad.

a) $\forall x \in U, \exists y \in U, x + y < 12$
b) $\forall x \in U, \forall y \in U, x + y < 12$
c) $\exists x \in U, \forall y \in U, x + y < 12$
d) $\exists y \in U, \forall x \in U, x + y < 12$

Solución:

a) Verdadero: para todo elemento de U, existe un elemento en U tal que $x+y=12$

b) Falso: Si $x = 9$ y $y = 8$ no se cumple $x+y=12$

c) Verdadero: Si $x = 1$, la desigualdad se cumple para todos los elementos de U.

d) Verdadero: Si $y = 1$, la desigualdad se cumple para todos los elementos de U.

3.6 REGLAS DE INFERENCIA EN LOS PREDICADOS.

Las reglas tienen vigencia en los predicados. Se introducirán cuatro reglas más, para la introducción y eliminación de los cuantificadores universal y existencial. El procedimiento para demostrar es igual al aplicado en lógica de proposiciones; es decir, los siguientes pasos son los esenciales:

1) Anotar las premisas en forma lógica.
2) Suprimir los cuantificadores utilizando las reglas de inferencia de cuantificadores.
3) Aplicar los métodos proposicionales de deducción para obtener conclusiones sin cuantificadores.
4) Introducir los cuantificadores para obtener la conclusión final, si es necesario.

Regla de Introducción del Universo. (***RIU***)

Si se tiene una proposición en la que figura una constante individual arbitrariamente elegida, se puede inferir válidamente la cuantificación universal de esa proposición.

Es decir, si la proposición se cumple para cualquier elemento elegido arbitrariamente, entonces se cumple para todos.

Regla de Eliminación del Cuantificador Universal. (***REU***)

Como el cuantificador universal establece que se cumple para todos los $x \in U$, esta variable se puede sustituir por una constante individual.

Es decir, $\forall x \in U, Px$, se puede eliminar el cuantificador por Pa, pues si se cumple para todos en particular se cumple para "a".

EJEMPLO 9

Dado el siguiente argumento demostrar su validez.

$$1)\ \forall x, Hx \to Mx$$
$$2)\ Ha \wedge Sp$$
$$3)\ Ma \to Ta$$
$$\therefore \forall x, Tx$$

Solución:

$(1) \xrightarrow{REU} Ha \to Ma\ (4)$ Regla de eliminación del universo.

$(2) \xrightarrow{LS} Ha\ (5)$ Ley de simplificación.

$(4)\ y\ (5) \xrightarrow{MPP} Ma\ (6)$ Modus ponendo ponen

$(6)\ y\ (3) \xrightarrow{MPP} Ta\ (7)$ Modus ponendo ponen

$(7) \xrightarrow{RIU} \forall x, Tx$ Regla de introducción del universo.

Regla de Introducción del Existencial. (***RI*** $\exists$)

Como el existencial es verdadero si y solo si existe por lo menos un ejemplo de sustitución verdadero, se puede concluir válidamente la cuantificación existencial de cualquier ejemplo de sustitución verdadera.

Regla de Eliminación del Existencial. (***RE*** $\exists$)

Se puede eliminar el cuantificador y sustituir su variable por una constante individual siempre y cuando no se haya usado previamente esa constante individual en la deducción. Esto es, si existe un elemento que cumple la proposición se puede sustituir por una constante individual.

EJEMPLO 10

$$1)\ \forall x, Hx \to Rx$$
$$2)\ \exists x, Hx \wedge Cx$$
$$3)\ \forall x, Cx \to Px$$
$$\therefore \exists x, Rx \wedge Px$$

Solución:

$(1) \xrightarrow{RE\exists} Ha \wedge Ca\ (5)$ Regla del eliminación del existencial.

$(2) \xrightarrow{REU} Ha \to Ra\ (4)$ Regla de eliminación universal.

$(3) \xrightarrow{REU} Ca \to Pa\ (6)$ Regla de eliminación universal.

$(5) \xrightarrow{LS} Ha\ (7)$

$(7)\ y\ (1) \xrightarrow{MPP} Ra\ (8)$

$(5) \xrightarrow{LS} Ca\ (9)$

$(9)\ y\ (6) \xrightarrow{MPP} Pa\ (10)$

$(8)\ y\ (10) \xrightarrow{LConj} Ra \wedge Pa\ (11)$

$(11) \xrightarrow{RI\exists} \exists x, Rx \wedge Px$

EJEMPLO 11

Traducir el siguiente argumento a la forma lógica y demostrar si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

"Todos los matemáticos son honrados. Si son honrados son personas amigables. Juan es matemático. Por lo tanto Juan es amigable".

Solución:

Sea H = conjunto de honrados
M = conjunto de matemáticos
A = conjunto de amigables
J = Juan

Entonces el argumento queda expresado como:

$$\begin{array}{l} 1)\ \forall x, Mx \rightarrow Hx \\ 2)\ \forall x, Hx \rightarrow Ax \\ \underline{3)\ Mj} \\ \therefore Aj \end{array}$$

$(1) \xrightarrow{REU} Mj \rightarrow Hj\ (4)$

$(2) \xrightarrow{REU} Hj \rightarrow Aj\ (5)$

$(3)\, y\ (4) \xrightarrow{MPP} Hj\ (6)$

$(6)\, y\, (5) \xrightarrow{REU} Aj$ Argumento válido.

EJEMPLO 12

Traducir a la forma lógica y demostrar. "Algunos tachirenses son de Rubio. Todas las personas de Rubio son amables. Todas las personas amables son buenos ciudadanos. Por lo tanto existe alguien que es buen ciudadano".

Solución:

Sea T = tachirenses
R = personas de Rubio
A = amables
C = buenos ciudadanos

Entonces el argumento queda expresado como:

$$\begin{array}{l} 1)\ \exists x, Tx \wedge Rx \\ 2)\ \forall x, Rx \rightarrow Ax \\ \underline{3)\ \forall x, Ax \rightarrow Cx} \\ \therefore \exists x, Cx \end{array}$$

$(1) \xrightarrow{RE\exists} Ta \wedge Ra\ (4)$

$(2) \xrightarrow{REU} Ra \rightarrow Aa\ (5)$

$(3) \xrightarrow{REU} Aa \rightarrow Ca\ (6)$

$(4) \xrightarrow{LS} Ra\ (7)$

$(7)\, y\ (5) \xrightarrow{MPP} Aa\ (8)$

$(8)\, y\, (6) \xrightarrow{MPP} Ca\ (9)$

$(9) \xrightarrow{RI\exists} \exists x, Cx$

EJEMPLO 13

Dado el siguiente argumento, demostrar su validez.

"Toda cosa viviente es un animal o una planta. El perro de Erick está vivo y no es una planta. Todos los animales tienen corazón. Por lo tanto el perro de Erick tiene corazón".

Solución:

Sea $A = \text{Animal}$
$P = \text{Planta}$
$p = \text{Perro}$
$E = \text{Erick}$
$V = \text{Viviente}$
$C = \text{Corazón}$

$$1)\ \forall x \in V, Ax \vee Px$$
$$2)\ Ep \wedge Vp \wedge \sim Pp$$
$$3)\ \forall x, Ax \rightarrow Cx$$
$$C \therefore, Ep \wedge Cp$$

$$(1) \xrightarrow{REU} Ap \vee Pp\ (4)$$
$$(2) \xrightarrow{LS} \sim Pp\ (5)$$
$$(3) \xrightarrow{REU} Ap \rightarrow Cp\ (6)$$
$$(5)\text{ y }(4) \xrightarrow{SD} Ap\,(7)$$
$$(7)\text{ y }(6) \xrightarrow{MPP} Cp\,(8)$$
$$(2) \xrightarrow{LS} Ep\,(9)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 3

1) Escribir en la forma lógica las siguientes proposiciones.
   a) Todos los seres humanos son mortales.
   b) Algunos estudiantes están becados y estudian en el extranjero.
   c) Todos los pájaros vuelan.
   d) Ningún hombre es inmortal.
   e) Algunos perros son feroces.

2) Determinar el valor lógico de las siguientes proposiciones.
   a) $\exists x \in R, x^2 + 1 = 0$.
   b) $\forall x \in R, \exists x \in R, x^2 + y \geq 0$.
   c) $\exists x \in R, \forall y \in R, y^2 + 1 = x$.

3) Sea $U=\{1,2,3,4,5\}$ decir si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Si son falsas dar un contraejemplo.
   a) $\forall x \in U, x$ es par.
   b) $\exists x \in U, x$ es primo.
   c) $\forall x \in U, \exists\, y \in U, x + y \leq 6$.
   d) $\forall x \in U, x + 1 \geq 2$.

4) Escribir en forma lógica los siguientes argumentos y demostrar si las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas.
   a) Todos los estudiantes tienen un buzón de correo. Todos los que tienen buzón de correo, reciben ofertas de viaje. Julio no recibe ofertas de viaje. Por lo tanto, no todos son estudiantes.
   b) Todos los genios son pobres. Todos los pobres sufren. Existe alguien que no sufre. Por lo tanto, existe alguien que no es genio.
   c) Todas las computadoras guardan archivos. Algunos archivos tienen virus. Todos los archivos con virus bloquean el sistema. Luis tiene una computadora y archivos con virus. Por lo tanto Luis tiene el sistema del computador bloqueado.

5) Escribir en palabras el significado de cada uno de las siguientes proposiciones, e indicar el valor de verdad para cada una de ellas. Sea $U = \{x, x \in N\}$ y $V = \{1,2,3,4,5\}$. Sea $P(x,y): x-y=1$ con $x \in U$ y $y \in V$.

   1) $\forall x \in U, \exists y \in V, P(x,y)$.
   2) $\exists x \in U, \forall y \in V, P(x,y)$.
   3) $\exists x \in U, \exists y \in V, P(x,y)$.
   4) $\forall y \in V, \exists x \in U, P(x,y)$.
   5) $\forall y \in V, \forall y \in U, P(x,y)$.

6) Dados los siguientes argumentos, demostrar su validez aplicando reglas de inferencia.

a) $\forall x,(x=3\rightarrow x=2+1)$
$\forall x,(x=2+1\rightarrow x>2)$
$3+0=3$
$\therefore 3+0>2$

b) $\forall x, Ax\rightarrow Nx$
$\forall x, Nx\rightarrow Ox$
Ap
$\therefore Op$

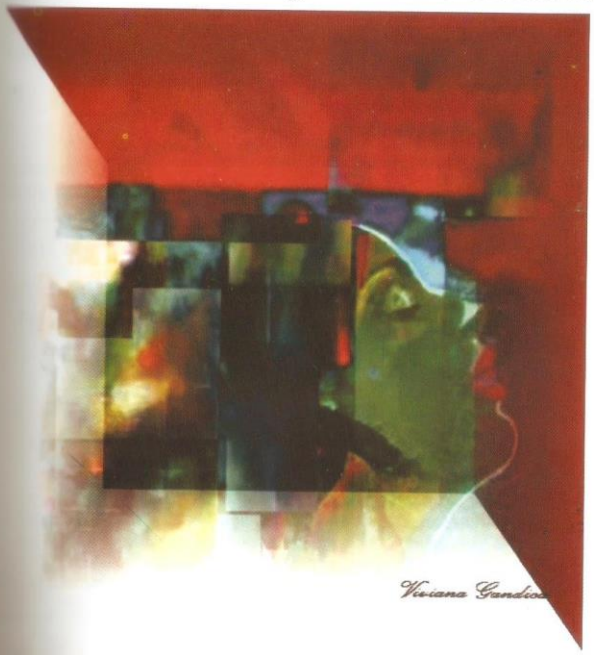
c) $\exists x, Cx\vee\sim Ex$
$\forall x, Cx\rightarrow Dx$
Ep
$\therefore \exists x, Dx$

d) $\forall x, Px\leftrightarrow Ix$
$\forall x, Ix\rightarrow Bx$
$\exists x, Px\wedge Hx$
$\therefore BL$

e) $\forall x,(Ax\wedge Tx)\rightarrow Px$
$Aj\wedge\sim PL$
$\therefore \exists x, Dx$

f) $\exists x, Ox\wedge Mx$
CE
$\forall x, Cx\rightarrow Hx$
$\therefore\sim OE$

CAPÍTULO 4
Álgebra Booleana



GEORGE BOOLE
(Lincoln, Reino Unido, 1815 - Ballintemple, actual Irlanda, 1864).

Autodidacta, aprendió por su cuenta latín y griego. Con 12 años ya era un experto en latín. Tradujo una oda de Horacio. Boole, inventor del Álgebra de Boole, es considerado como uno de los fundadores de las Ciencias de la Computación. En 1854 publicó una investigación de las leyes del pensamiento basada en las teorías matemáticas de lógica y probabilidad.

Boole planteó que las proposiciones lógicas se podían expresar en ecuaciones Álgebraicas y que al manipularlas proporcionaría un método para la deducción lógica. También sustituyó la expresión "y" por la multiplicación; y la expresión "o" por la suma. De esta manera desarrolla un conjunto de propiedades que definen lo que hoy conocemos como Álgebra de Boole o Álgebra booleana.

4.1 INTRODUCCIÓN

El álgebra booleana fue desarrollada por George Boole. En su libro de *An Investigation of the law of tought*; publicado en 1854, muestra las herramientas para manipular las proposiciones en forma Álgebraica. En 1938 la compañía de teléfonos Bell de Estados Unidos utilizó estas herramientas para realizar un análisis de los circuitos de su red telefónica. En este mismo año, el estudiante Claude E. Shannon, del Instituto Tecnológico de Massachusetts, creó la llamada Álgebra de conmutación basada en el álgebra de Boole, para representar las propiedades de conmutación eléctrica biestable, demostrando con esto que el álgebra booleana se adapta al diseño y representación de circuitos lógicos de control basados en relés e interruptores.

4.2 EXPRESIONES BOOLEANAS

Se define un Álgebra Booleana como un conjunto con dos operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$ de elementos distintos 0 y 1, que satisfacen las siguientes leyes:

a) Conmutativa: $x+y=y+x$ $x\cdot y=y\cdot x$	f) Involución: $\bar{\bar{x}}=x$
b) Asociativa: $(x+y)+z=x+(y+z)$ $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$	g) Complemento: $x+\bar{x}=1$ $x\cdot\bar{x}=0$ $\bar{1}=0$ $\bar{0}=1$
c) Distributiva: $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$	h) D'Morgan: $\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$ $\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$
d) Idempotencia: $x+x=x$ $x\cdot x=x$	i) Absorción: $x+(x\cdot y)=x$ $x\cdot(x+y)=x$
e) Identidad: $x\cdot 1=x$ $x\cdot 0=0$ $x+1=1$ $x+0=x$	

Si se comparan los capítulos de teoría de conjuntos, lógicas de proposiciones y Álgebra de Boole, se puede verificar que hay un cambio de notación y las propiedades se cumplen en los tres contextos.

Conjunto →	Lógica →	Álgebra
$A \cup B$	$P \vee Q$	$x + y$
$A \cap B$	$P \wedge Q$	$x \cdot y$
$\overline{A}$	$\sim P$	$\overline{x}$
U	V	1
ϕ	F	0

4.3 EXPRESIONES BOOLEANAS Y FUNCIONES BOOLEANAS

Una expresión booleana en n variables $x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n$ es una cadena finita de símbolos formada recursivamente. Una expresión booleana en variables puede o no contener todas las literales, es decir, variables o sus complementos.

Si $x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n$ son variables booleanas, una función de $B^n = \{x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n\}$ a $B = \{0, 1\}$ recibe el nombre de función booleana de grado n. Cada expresión booleana representa una función booleana, la cual se evalúa sustituyendo el valor de 0 o 1 por cada variable. Los valores de una función booleana, para todas las combinaciones posibles de valores de las variables en la función, se presentan a menudo en tablas de verdad.

EJEMPLO 1

Los valores de la función booleana $f(x, y, z) = \overline{x} + y\overline{z}$ se presentan en la siguiente tabla de verdad.

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{z}$	$y\overline{z}$	$\overline{x} + y\overline{z}$
1	1	1	0	0	0	**0**
1	1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	0	**0**
0	1	1	1	0	0	**1**
0	1	0	1	1	1	**1**
0	0	1	1	0	0	**1**
0	0	0	1	1	0	**1**

Función Booleana

Nota: Aunque el orden de los valores de las variables sea aleatorio, una forma de escribirlos de manera cíclica que será ventajosa es como sigue:

Si hay n variables en la función booleana, habrá 2^n renglones en la tabla de verdad, correspondiente a todas las posibles combinaciones de los valores 0 y 1 de las variables. Se escriben $\frac{1}{2} \times 2^n$ unos seguidos de $\frac{1}{2} \times 2^n$ ceros en la primera columna que representan los valores de la primera variable. Después en la segunda columna se escriben $\frac{1}{4} \times 2^n$ unos y $\frac{1}{4} \times 2^n$ ceros alternativamente, representando los valores de la segunda variable. Luego en la tercera columna se escriben $\frac{1}{8} \times 2^n$ unos y $\frac{1}{8} \times 2^n$ ceros alternativamente, los cuales representan los valores de la tercera variable. Se continúa este procedimiento y en la columna final se escriben $\frac{1}{2^n} \times 2^n$ unos y un cero alternativamente, representado los valores de la variable n-ésima.

EJEMPLO 2

Si $f(w,x,y,z)$ es una función de 4 variables la tabla de verdad correspondiente es:

w	x	y	z
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

Nota: El orden de introducción de los valores es arbitrario. Si se cambia el orden, cambia la función booleana. La función booleana se comporta como una caja negra que produce una salida 0 o 1. Como hay 2^n formas de poner los interruptores y cada posición lleva a alguna de las dos salidas, dependiendo de la función, hay 2^{2^n} funciones booleanas de n variables. El conjunto de funciones booleanas se denota como Fn.

4.4 FORMA NORMAL DISYUNTIVA Y CONJUNTIVA

1) Un mini término de n variables booleanas es un producto booleano de n literales (variables de complemento) en las cuales cada literal aparece exactamente una vez. Por ejemplo $xy, x\bar{y}, \bar{x}y, \bar{x}\bar{y}$ forman el conjunto completo de mini términos de dos variables x e y. Para tres variables x, y, z los mini términos serán: $xyz, xy\bar{z}, x\bar{y}z, x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}yz, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

2) Un maxi término de variables booleanas es la suma de las literales en las cuales cada literal aparece exactamente una vez. Por ejemplo: $x+y, x+\bar{y}, \bar{x}+y, \bar{x}+\bar{y}$.

3) Cuando una función booleana se expresa como una suma de mini términos, se dice que está escrita en su forma normal disyuntiva (FND).

4) Si está escrita como producto de maxi términos se dice que está en su forma normal conjuntiva (FNC).

5) Cuando una función booleana está escrita en FND o FNC se dice que está escrita en forma canónica.

4.5 EXPRESION DE UNA FUNCION BOOLEANA EN FORMA CANONICA

Si la función booleana se representa mediante una tabla de verdad, se expresa en forma normal disyuntiva de la siguiente manera: se escriben los renglones en los cuales la entrada de la columna f es 1. Los unos de la función booleana reciben el nombre de átomos, cada átomo es un mini término, el cual corresponde al uno identificado. Mientras se forma el mini término correspondiente al renglón, la entrada 1 se sustituye por la variable correspondiente y la entrada 0 por el complemento de la variable respectiva.

La expresión canónica disyuntiva para la función booleana, se forma sumando los mini términos correspondientes a los átomos identificados.

EJEMPLO 3

Sea $f(x,y,z)=[(x+y)\cdot(y+z)]+[(y+z+x)\cdot y]$, hallar la expresión canónica disyuntiva de la función:

Solución:

1) Se calcula la tabla de verdad para la función:

$$\underbrace{[(x+\bar{y})\cdot(\bar{y}+\bar{z})]}_{I}+\underbrace{[(\bar{y}+z+\bar{x})\cdot\bar{y}]}_{II}$$

x	y	z	$\bar{y}$	$x+\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{y}+\bar{z}$	$\bar{x}$	$\bar{y}+z+\bar{x}$	$(\bar{y}+z+\bar{x})\cdot\bar{y}$	$(x+\bar{y})\cdot(\bar{y}+\bar{z})$	$I+II$
									II	I	
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	**0**
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	**1**
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	**1**
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	**0**
0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	**0**
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**

1) La función booleana correspondiente es:

0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

2) Se identifican los átomos de la función booleana. Esta función tiene 5 átomos que corresponde al segundo, tercer, cuarto, séptimo y octavo renglón. Estos átomos se escriben como mini términos.

Átomos	Binario		Mini término
1	110	→	xyz
1	101	→	xyz
1	100	→	xyz
1	001	→	xyz
1	000	→	xyz

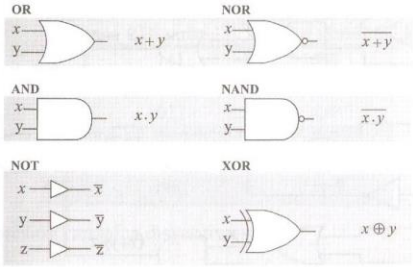
1) La expresión canónica disyuntiva se forma sumando los átomos

$$xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

4.6 COMPUERTAS LOGICAS

En esta sección se analizaran los circuitos lógicos o combinatorios. La salida de un circuito lógico se define de manera única para cada combinación de entradas. Un circuito de este tipo carece de memoria, las entradas anteriores y el estado del sistema no afectan su salida. Los circuitos lógicos se construyen usando dispositivos de estado sólido, llamados compuertas, que son capaces de cambiar los bits.

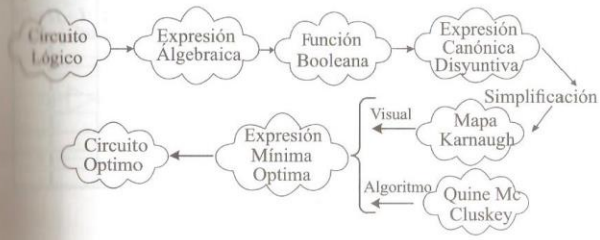
Las compuertas utilizadas para la representación de los circuitos reciben entradas de variables que son bits. Las compuertas más utilizadas son AND, OR, NAND, NOR, XOR y NOT cuya representación se muestra en la tabla siguiente:



4.7 MINIMIZACIÓN DE CIRCUITOS / FUNCIONES BOOLEANAS

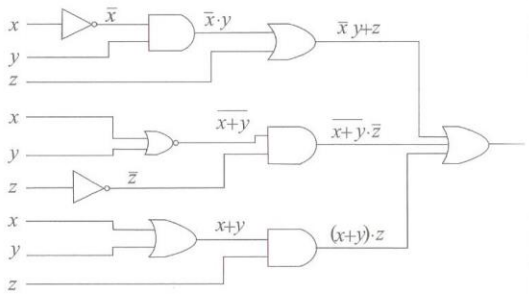
La aplicación importante del Álgebra booleana radica en expresar problemas de diseño de circuitos en una forma simplificada que se entienda con mayor facilidad. La eficiencia de un circuito combinatorio depende del número de compuertas utilizadas y de la manera en que estas se arreglan, en virtud de que el costo del circuito depende hasta cierto punto del número de compuertas del mismo.

El proceso de minimización queda representado en el siguiente esquema:



EJEMPLO 4

Dado el siguiente circuito lógico, hallar la expresión canónica disyuntiva.



Solución:

1) Expresión Álgebraica de salida $[\bar{x}\cdot y+z]+[\overline{(x+y)}\cdot\bar{z}]+[(x+y)\cdot z]$

2) Se calculala tabla de verdad:

$$\underbrace{[\bar{x}\cdot y+z]}_{I}+\underbrace{[\overline{(x+y)}\cdot\bar{z}]}_{II}+\underbrace{[(x+y)\cdot z]}_{III}$$

x	y	z	x	$x\cdot y$	$x\cdot y+z$	$x+y$	$x+y$	z	$(x+y)\cdot z$	$(x+y)\cdot z$	$I+II+III$
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1

3) La función booleana es:

1	0	1	0	1	1	1	1

4) Los átomos en mini términos:

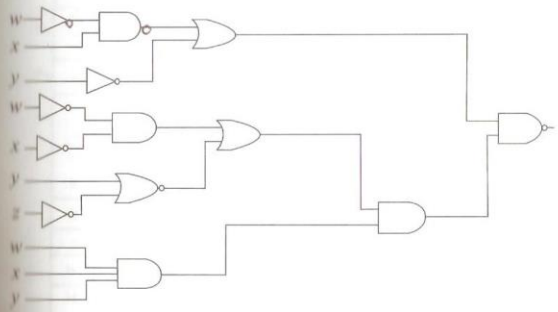
Átomos	Binario		Mini término
1	111	→	xyz
1	101	→	xyz
1	011	→	xyz
1	010	→	xyz
1	001	→	xyz
1	000	→	xyz

5) La expresión canónica disyuntiva:

$$xyz + xyz + xyz + xyz + xyz + xyz$$

EJEMPLO 5

Dado el siguiente circuito lógico, hallar la expresión canónica disyuntiva.



Solución:

1) Salida: $\overline{[(\overline{\overline{w}\cdot x})+\overline{y}]\cdot[[(\overline{w}\cdot\overline{x})+(\overline{y+\overline{z}})]\cdot(w\cdot x\cdot y)]}$

2) Se calculala tabla de verdad, para encontrar la función booleana

$$\overline{\underbrace{[(\overline{\overline{w}\cdot x})+\overline{y}]}_{I}\cdot\underbrace{[[(\overline{w}\cdot\overline{x})+(\overline{y+\overline{z}})]\cdot(w\cdot x\cdot y)]}_{II}}$$

| | | |

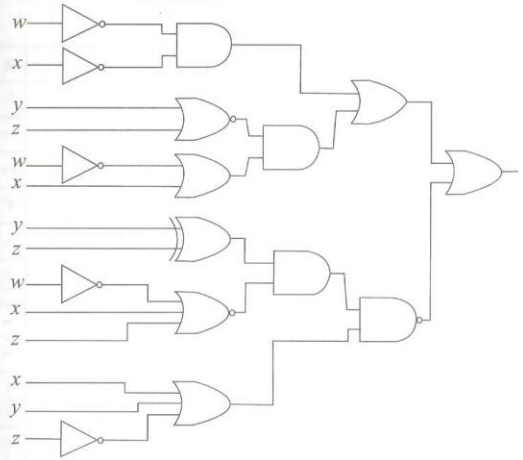
4) Los átomos se expresan de la siguiente manera:

Átomos	Binario		Mini término
1	1111	→	$wxyz$
1	1110	→	$wxy\bar{z}$
1	1101	→	$wx\bar{y}z$
1	1100	→	$wx\bar{y}\bar{z}$
1	1011	→	$w\bar{x}yz$
1	1010	→	$w\bar{x}y\bar{z}$
1	1001	→	$w\bar{x}\bar{y}z$
1	1000	→	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
1	0111	→	$\bar{w}xyz$
1	0110	→	$\bar{w}xy\bar{z}$
1	0101	→	$\bar{w}x\bar{y}z$
1	0100	→	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$
1	0011	→	$\bar{w}\bar{x}yz$
1	0010	→	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$
1	0001	→	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
1	0000	→	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

La expresión canónica disyuntiva queda expresada de la siguiente manera: $wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz$

EJEMPLO 6

Dado el siguiente circuito, hallar la expresión canónica.



1) Se halla la expresión de salida:

$$\{(\overline{w \cdot x}) + [(y+z)\cdot(w+x)]\} + \{((y \oplus z)\cdot(w+x+z))\cdot(x+y+z)\}$$

Recordar!!

$$x \oplus y = x \setminus y \vee y \setminus x = x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{x}$$

2) Se calcula la tabla de verdad, para encontrar la función booleana:

$$\{(\overline{w \cdot x}) + [(y+z)\cdot(w+x)]\} + \{((y \oplus z)\cdot(w+x+z))\cdot(x+y+z)\}$$

$$\left\{\underbrace{(\overline{w \cdot x}) + \underbrace{[(y+z)\cdot(w+x)]}_{1}}_{I}\right\} + \left\{\underbrace{\underbrace{((y \oplus z)\cdot\underbrace{(w+x+z)}_{2})}_{3}\cdot\underbrace{(x+y+z)}_{4}}_{II}\right\}$$

3) Se calcula la función booleana,

w	x	y	z	w	$\overline{x}$	$\overline{wx}$	$y+z$	$y+z$	$\overline{w+x}$	I	I	$y \oplus z$	$w+x+z$	z	$\overline{z}$	4	II	$\overline{II}$	I
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

4) Se calculan los átomos respectivos, como sigue:

Átomos	Binario		Mini término
1	1111	$\rightarrow$	$wxyz$
1	1110	$\rightarrow$	$wxy\overline{z}$
1	1101	$\rightarrow$	$wx\overline{y}z$
1	1100	$\rightarrow$	$wx\overline{y}\overline{z}$
1	1011	$\rightarrow$	$w\overline{x}yz$
1	1001	$\rightarrow$	$w\overline{x}\overline{y}z$
1	1000	$\rightarrow$	$w\overline{x}\overline{y}\overline{z}$
1	0111	$\rightarrow$	$\overline{w}xyz$
1	0110	$\rightarrow$	$\overline{w}xy\overline{z}$
1	0101	$\rightarrow$	$\overline{w}x\overline{y}z$
1	0100	$\rightarrow$	$\overline{w}x\overline{y}\overline{z}$
1	0011	$\rightarrow$	$\overline{w}\overline{x}yz$
1	0010	$\rightarrow$	$\overline{w}\overline{x}y\overline{z}$
1	0001	$\rightarrow$	$\overline{w}\overline{x}\overline{y}z$
1	0000	$\rightarrow$	$\overline{w}\overline{x}\overline{y}\overline{z}$

5) Se calcula la expresión canónica disyuntiva, esta queda expresada de la siguiente manera:

$$wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + \overline{w}xyz + wxyz + \overline{w}xyz + wxyz + wxyz + wxyz$$

4.8 METODOS PARA SIMPLIFICAR EXPRESIONES CANONICAS EN SU FORMA DISYUNTIVA.

Método de los mapas de Karnauhg

El método de mapas de Karnauhg es un método gráfico para simplificar expresiones booleanas que implican seis o menos variables expresadas en la forma de suma de mini términos y que representan circuitos combinacionales. La simplificación requiere la identificación de términos en la expresión que puedan combinarse. Los términos que pueden combinarse se encuentran fácilmente en los mapas de Karnaugh.

Un mapa de Karnaugh o K-diagrama es un diagrama que consiste en cuadrados. Si la expresión booleana contiene n variables, el k-diagrama correspondiente tendrá 2^n cuadrados, cada uno de los cuales representa un mini término. Se coloca un "1" en el cuadrado que representa el átomo de la función booleana. La expresión booleana simplificada que representa la salida se obtiene combinando celdas adyacentes que contengan los átomos.

Las celdas adyacentes son aquellas que representan mini términos que difieren solo de un literal. Para identificar celdas adyacentes en los K-diagramas con el fin de realizar el agrupamiento, debe tenerse en cuenta los siguientes pasos:

1) El número de celdas de un grupo debe ser una potencia de 2, esto es, 2,4,8,....
2) Una celda que contenga un átomo puede incluirse en cualquier número de grupos.
3) Para minimizar la expresión al grado máximo posible, deben preferirse los grupos más grandes que puedan formarse. Es decir, no pueden considerarse grupos de dos celdas si estas dos celdas pueden incluirse en un grupo de cuatro celdas. La idea es cubrir los átomos con el mínimo número posible de grupos de celdas adyacentes, empezando con el grupo más grande. Los átomos que no se puedan incluir en ningún grupo se llaman implicantes primos.
4) Existen celdas adyacentes no solo dentro del interior de k-diagrama, sino también en los extremos de cada columna y de cada renglón; es decir, la celda superior en cualquier columna es adyacente a la celda inferior en la misma columna. La celda más a la izquierda en cualquier renglón es adyacente a la celda más a la derecha en ese renglón.

K-diagramas

1)Dos variables $x,y \rightarrow 4$ posibles átomos.

	y	$\bar{y}$
x		
$\bar{x}$		

x	y	
1	1	xy
1	0	$x\bar{y}$
0	1	$\bar{x}y$
0	0	$\bar{x}\bar{y}$

2) Tres variables $x, y, z \rightarrow 8$ posibles átomos.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

x	y	z	
1	1	1	xyz
1	1	0	xyz
1	0	1	xyz
1	0	0	xyz
0	1	1	xyz
0	1	0	xyz
0	0	1	xyz
0	0	0	xyz

3) Cuatro variables $w,x,y,z \rightarrow 16$ posibles átomos.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

w	x	y	z	
1	1	1	1	$wxyz$
1	1	1	0	$wxyz$
1	1	0	1	$wxyz$
1	1	0	0	$wxyz$
1	0	1	1	$wxyz$
1	0	1	0	$wxyz$
1	0	0	1	$wxyz$
1	0	0	0	$wxyz$
0	1	1	1	$wxyz$
0	1	1	0	$\bar{w}xyz$
0	1	0	1	$wxyz$
0	1	0	0	$\bar{w}xyz$
0	0	1	1	$wxyz$
0	0	1	0	$\bar{w}xyz$
0	0	0	1	$wxyz$
0	0	0	0	$\bar{w}xyz$

4) 5 variables $u, w, x, y, z \rightarrow$ 32 posibles átomos.

u	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

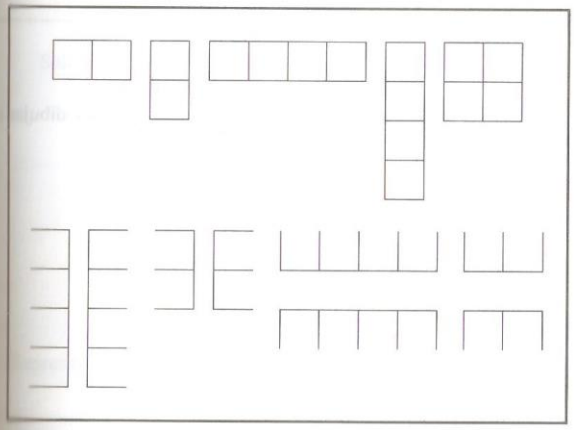
yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	u
				wx
				$w\bar{x}$
				$\bar{w}\bar{x}$
				$\bar{w}x$

u	w	x	y	z	
1	1	1	1	1	$uwxyz$
1	1	1	1	0	$uwxy\bar{z}$
1	1	1	0	1	$uwx\bar{y}z$
1	1	1	0	0	$uwx\bar{y}\bar{z}$
1	1	0	1	1	$uw\bar{x}yz$
1	1	0	1	0	$uw\bar{x}y\bar{z}$
1	1	0	0	1	$uw\bar{x}\bar{y}z$
1	1	0	0	0	$uw\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	1	1	$u\bar{w}xyz$
1	0	1	1	0	$u\bar{w}xy\bar{z}$
1	0	1	0	1	$u\bar{w}x\bar{y}z$
1	0	1	0	0	$u\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$
1	0	0	1	1	$u\bar{w}\bar{x}yz$
1	0	0	1	0	$u\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$
1	0	0	0	1	$u\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
1	0	0	0	0	$u\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	1	1	$\bar{u}wxyz$
0	1	1	1	0	$\bar{u}wxy\bar{z}$
0	1	1	0	1	$\bar{u}wx\bar{y}z$
0	1	1	0	0	$\bar{u}wx\bar{y}\bar{z}$
0	1	0	1	1	$\bar{u}w\bar{x}yz$
0	1	0	1	0	$\bar{u}w\bar{x}y\bar{z}$
0	1	0	0	1	$\bar{u}w\bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	0	0	$\bar{u}w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	0	1	1	1	$\bar{u}\bar{w}xyz$
0	0	1	1	0	$\bar{u}\bar{w}xy\bar{z}$
0	0	1	0	1	$\bar{u}\bar{w}x\bar{y}z$
0	0	1	0	0	$\bar{u}\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$
0	0	0	1	1	$\bar{u}\bar{w}\bar{x}yz$
0	0	0	1	0	$\bar{u}\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$
0	0	0	0	1	$\bar{u}\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	0	0	$\bar{u}\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Aplicación de los K-Diagramas

El método para aplicar lo K-diagramas es el siguiente:

1) Formar el k-diagrama.
2) Marcar en el K-diagrama los átomos.
3) Marcar los bloques posibles que se puedan combinar. Estos son algunos bloques posibles:



En los siguientes ejemplos se muestra la aplicación de los k-Diagramas:

EJEMPLO 7

Dada la siguiente expresión Álgebraica, simplificar por K-diagramas:

$$xyz+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z$$

Solución: Se marcan los átomos en el K-diagrama correspondiente y se forman los bloques con las celdas adyacentes:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$\bar{x}$	1		1	1
$\bar{x}$	1			1

Luego se calcula la expresión óptima quedando: $x\bar{y} + z$

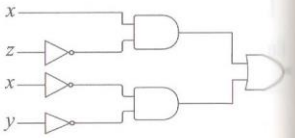
EJEMPLO 8

Dado el K-diagrama, encontrar la expresión óptima y dibujar el circuito optimo:

	yz	yz	$\bar{y}z$	$\bar{y}z$
x		1	1	
x			1	1

Solución:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$			1	1



Expresión óptima: $x\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$

EJEMPLO 9

Dado el siguiente K-diagrama, encontrar la expresión óptima.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1		1
$w\bar{x}$	1		1	1
$\bar{w}\bar{x}$	1		1	1
$\bar{w}x$	1	1		1

Solución:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1		1
$w\bar{x}$	1		1	1
$\bar{w}\bar{x}$	1		1	1
$\bar{w}x$	1	1		1

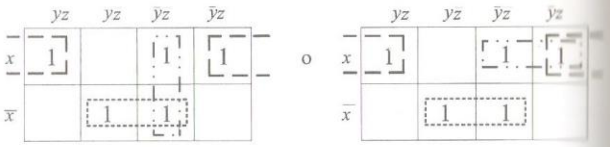
Expresión óptima: $z + xy + \overline{xy}$

EJEMPLO 10

Dado el siguiente K-diagrama de 3 variables, encontrar la expresión óptima:

	yz	yz	$\bar{y}z$	$\bar{y}z$
x	1		1	1
$\bar{x}$		1	1	

Solución:



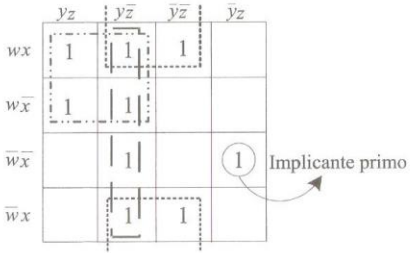
Se tienen dos expresiones óptimas: $xz + yz + \bar{x}z$ o $xz + xy + xz$

EJEMPLO 11

Dado el siguiente K-diagrama de 4 variables, encontrar la expresión óptima y dibujar el circuito óptimo:

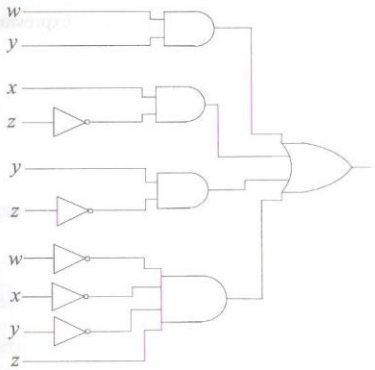
	yz	yz	$\bar{y}z$	$\bar{y}z$
wx	1	1	1	
$w\bar{x}$	1	1		
$\bar{w}\bar{x}$		1		1
$\bar{w}x$		1	1	

Solución:



Expresión óptima: $wy + x\bar{z} + y\bar{z} + \bar{w}xyz$

Circuito óptimo:

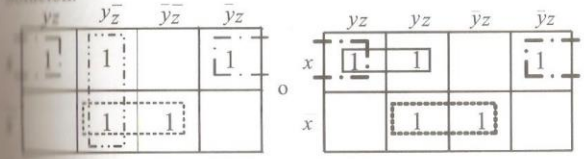


EJEMPLO 12

Dado el siguiente K-diagrama. Encontrar la expresión óptima:

	yz	yz	$\bar{y}z$	$\bar{y}z$
x	1	1		1
$\bar{x}$		1	1	

Solución:



Se tienen dos expresiones óptimas: $xz + yz + \bar{x}z$ o $xz + xy + \bar{x}\bar{z}$

EJEMPLO 13

Dado el siguiente K-diagrama. Encontrar la expresión óptima:

	yz	yz	$\bar{y}z$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1			

Solución:

	yz	yz	$\bar{y}z$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1			

Expresión optima: $x + yz$

EJEMPLO 14

Dado el siguiente K-diagrama, encontrar la expresión óptima:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1		1	1
$w\bar{x}$	1		1	
$\bar{w}\bar{x}$	1			
$\bar{w}x$	1		1	1

Solución:

	yz	yz	yz	yz
wx	1		1	1
$w\bar{x}$	1		1	
$\bar{w}\bar{x}$	1			
$\bar{w}x$	1		1	1

Expresión optima: $yz + xy + wx\bar{y}$

EJEMPLO 15

Dado el siguiente K-diagrama, encontrar la expresión óptima:

	yz	yz	yz	yz
wx	1			1
$w\bar{x}$	1	1	1	1
$\bar{w}\bar{x}$	1	1	1	1
$\bar{w}x$				1

Solución:

	yz	yz	yz	yz
wx	1			1
$w\bar{x}$	1	1	1	1
$\bar{w}\bar{x}$	1	1	1	1
$\bar{w}x$				1

Expresión óptima: $x + yz + wz$

EJEMPLO 16

Dado el siguiente K-diagrama, encontrar la expresión óptima:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx			1	1
$w\bar{x}$		1		
$\bar{w}\bar{x}$		1	1	
$\bar{w}x$			1	1

Solución:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx			1	1
$w\bar{x}$		1		
$\bar{w}\bar{x}$		1	1	
$\bar{w}x$			1	1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx			1	1
$w\bar{x}$		1		
$\bar{w}\bar{x}$		1	1	
$\bar{w}x$			1	1

Se tienen dos expresiones óptimas: $x\bar{y} + \bar{w}\bar{x}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ o $x\bar{y} + \bar{w}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

EJEMPLO 17

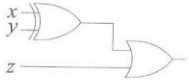
Dado el siguiente K-diagrama, encontrar la expresión óptima y dibujar el circuito óptimo.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1		1	1
$\bar{x}$	1	1		1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1		1	1
$\bar{x}$	1	1		1

Expresión óptima: $z + xy + x\bar{y} = z + (x \oplus y)$

Circuito óptimo:



EJEMPLO 18

Dado el siguiente K-diagrama de 5 variables, encontrar la expresión óptima:

u	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1	1	1
$w\bar{x}$		1	1	
$\bar{w}\bar{x}$			1	
$\bar{w}x$			1	1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{u}$
wx	1	1	1	1	
$w\bar{x}$		1	1		
$\bar{w}\bar{x}$					
$\bar{w}x$			1	1	

Solución:

u	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1	1	1
$w\bar{x}$		1	1	
$\bar{w}\bar{x}$			1	
$\bar{w}x$			1	1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{u}$
wx	1	1	1	1	
$w\bar{x}$		1	1		
$\bar{w}\bar{x}$					
$\bar{w}x$			1	1	

Expresión óptima: $wx + w\bar{z} + u\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}$

Método de Simplificación de Quine-McCluskey

Se ha estudiado que se pueden utilizar K-diagramas para minimizar expresiones canónicas expresadas como mini términos. Sin embargo, los k-diagramas son difíciles de utilizar cuando hay más de cuatro variables. Además, el empleo de los k-diagramas se basa en la inspección visual para identificar qué términos se agrupan. Por estas razones es necesario utilizar un procedimiento para simplificar expresiones canónicas que pueda automatizarse. El método de Quine-McCluskey cumple este requisito y puede utilizarse para funciones booleanas en cualquier número de variables. Fue desarrollado en los años 50 por W. V. Quine y E. J. McCluskey. Básicamente el método consta de dos partes, la primera parte determina qué términos son candidatos a ser incluidos en un desarrollo mínimo como suma de productos booleanos. La segunda parte determina cuáles de esos términos formarán la expresión canónica.

El método de Quine-McCluskey utiliza la siguiente secuencia de pasos para simplificar una expresión canónica de forma disyuntiva:

1) Expresar cada término en n variables por medio de una cadena de bits de longitud n con un 1 en la posición i-ésima, si x_i interviene en el mini término; y un 0 en esa posición si interviene $\overline{x}_i$
2) Agrupar las cadenas de bits según el número de unos que contengan.
3) Determinar todos los productos de $n-1$ variables que se pueden formar realizando la suma booleana de mini términos del desarrollo. Los mini términos que se pueden combinar entre sí corresponden con cadenas de bits que difieren exactamente en una posición. Representar estos productos en $n-1$ variables mediante cadenas que tienen un 1 en la posición i-ésima si x_i interviene en el producto, un 0 en esa posición si interviene $\overline{x}_i$ y un guión es esa posición si no hay en el producto ningún literal en la variable x_i.
4) Determinar todos los productos de $n-2$ variables, que se puedan formar, realizando la suma booleana de los productos de $n-1$ variables obtenidos en el paso previo. Los productos que se pueden combinar entre sí, se representan por medio de cadenas de bits, que tienen un guión en la misma posición y difieren exactamente en una posición.

5) Mientras sea posible, continuar combinando productos booleanos, para obtener productos con menos variables.
6) Hallar todos los productos booleanos que han aparecido pero no se han utilizado, para formar un producto booleano con un literal menos.
7) Hallar el menor conjunto de estos productos booleanos, de modo que la suma de dichos productos represente a la función booleana. Esto se hace formando una tabla que muestra cuales son los mini términos recubiertos, y cuáles son los productos que los recubre. Cada término tiene que estar recubierto por al menos un producto.

El primer paso al utilizar la tabla es hallar todos los implicantes primos esenciales. Una vez hallados los implicantes primos esenciales, se puede simplificar la tabla eliminando las columnas correspondientes a los mini términos recubiertos por cada implicante primo. Luego se deben seleccionar aquellos productos que cubran más números de mini términos. Ningún mini término debe quedar sin ser cubierto. Esta búsqueda en profundidad dará la solución óptima.

EJEMPLO 19

Dada la siguiente expresión canónica en 4 variables, encontrar la expresión óptima aplicando el método antes descrito:

$$wxyz + wxy\overline{z} + w\overline{x}yz + w\overline{x}\overline{y}\overline{z} + w\overline{x}\overline{y}z + \overline{w}\overline{x}\overline{y}\overline{z} + \overline{w}\overline{x}\overline{y}z + \overline{w}xyz + \overline{w}x\overline{y}z$$

Solución:

Se forma la tabla inicial del método. En la primera columna se colocan los átomos o mini términos; en la segunda la cadena de bits que representa el mini término; en la tercera se agrupan aquellos mini términos que difieren de una sola variable y así sucesivamente.

Átomo	Cadena de bits	Paso 1	Cadenas de bits	Paso 2	Cadenas de bits
$(1)wxyz$	1111	$(1,2)wxy$	111-	$(1,2)wxy$	111-
$(2)wx\bar{y}\bar{z}$	1110	$(1,3)wyz$	1-11	$(1,3)wyz$	1-11
$(3)w\bar{x}yz$	1011	$(4,5)w\bar{x}\bar{y}$	100-	$(4,5,6,7)\bar{x}\bar{y}$	-00-
$(4)w\bar{x}\bar{y}z$	1000	$(4,6)\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	-000	$(7,9)\bar{w}\bar{y}z$	0-01
$(5)w\bar{x}\bar{y}z$	1001	$(5,7)\bar{x}\bar{y}z$	-001	$(8,9)\bar{w}xz$	01-1
$(6)w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0000	$(6,7)\bar{w}\bar{x}\bar{y}$	000-		
$(7)\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	0001	$(7,9)\bar{w}\bar{y}z$	0-01		
$(8)\bar{w}xyz$	0111	$(8,9)\bar{w}xz$	01-1		
$(9)\bar{w}x\bar{y}z$	0101				

Después de finalizada la primera tabla, se forma la tabla final de decisión; se coloca en la primera fila los átomos; y en la primera columna las expresiones candidatas a formar la expresión canónica que viene de la tabla inicial.

Se inicia la selección, examinando aquellas columnas que tienen marcada una sola "x"; la expresión candidata que corresponda, formará parte de la expresión óptima. Luego, se examinan los átomos que no hayan sido cubiertos por las expresiones anteriores, y se introduce en la expresión óptima, aquella expresión candidata que cubra más átomos. La selección termina cuando todos los átomos estén cubiertos.

Tabla final

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
wxy	x	x							
wyz	x		x						
$\bar{x}\bar{y}$				x	x	x	x		x
$\bar{w}yz$							x		x
$\bar{w}xz$								x	x

Se chequean las columnas con una sola "x". Se escogen las columnas 2, 3, 4, 5, 6, y 8; en este caso: $\bar{x}\bar{y}$, wxy, wyz, $\bar{w}xz$. Con estas expresiones quedan cubiertos todos los átomos. Se observa que la expresión $\bar{w}yz$, no es necesaria. Por lo tanto la expresión óptima es:

$$\bar{x}\bar{y} + wxy + wyz + \bar{w}xz$$

EJEMPLO 20

Dada la siguiente expresión canónica, encontrar la expresión óptima por Quine-McClusckey.

$$wxyz + w\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}xyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}xy\bar{z}$$

Solución:

Átomo	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
$(1)wxyz$	$(1,2)wyz$	$(1,2,3,4)yz$	$(1,2,3,4,5,8,10,12)y$	$(1,2,3,4,5,8,10,12)y$
$(2)w\bar{x}yz$	$(1,4)xyz$	$(1,2,5,8)wy$	$(1,2,3,4,5,12,8,10)y$	$(2,3,7,11)\bar{x}z$
$(3)\bar{w}\bar{x}yz$	$(1,5)wxy$	$(1,4,2,3)yz$	$(1,2,5,8,3,4,10,12)y$	$(3,10,9,11)\bar{w}x$
$(4)\bar{w}xyz$	$(2,3)\bar{x}yz$	$(1,4,5,12)xy$	$(1,2,5,8,3,10,4,12)y$	$(5,6)wx\bar{z}$
$(5)wxy\bar{z}$	$(2,7)w\bar{x}z$	$(1,5,2,8)wy$	$(1,4,2,3,5,8,10,12)y$	
$(6)wx\bar{y}\bar{z}$	$(2,8)w\bar{x}y$	$(1,5,4,12)xy$	$(1,4,2,3,5,12,8,10)y$	
$(7)w\bar{x}\bar{y}z$	$(3,4)\bar{w}yz$	$(2,3,7,11)\bar{x}z$	$(1,4,5,12,2,8,3,10)y$	
$(8)w\bar{x}y\bar{z}$	$(3,10)\bar{w}xy$	$(2,7,3,11)\bar{x}z$	$(1,5,2,8,3,4,10,12)y$	
$(9)\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$(3,11)\bar{w}xz$	$(2,8,3,10)\bar{x}y$	$(1,5,2,8,3,10,4,12)y$	
$(10)\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$(4,12)\bar{w}xy$	$(3,4,10,12)\bar{w}y$	$(1,5,4,12,2,8,3,10)y$	
$(11)\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	$(5,6)wx\bar{z}$	$(3,10,4,12)\bar{w}y$	$(2,3,7,11)\bar{x}z$	
$(12)\bar{w}xy\bar{z}$	$(5,8)wy\bar{z}$	$(3,10,9,11)\bar{w}x$	$(3,10,9,11)\bar{w}x$	
	$(5,12)xy\bar{z}$	$(3,11,9,10)\bar{w}x$	$(5,6)wx\bar{z}$	
	$(7,11)\bar{x}\bar{y}z$	$(5,6)wx\bar{z}$		
	$(8,10)\bar{x}yz$	$(5,8,10,12)yz$		
	$(9,10)\bar{w}x\bar{z}$	$(5,12,8,10)y\bar{z}$		
	$(9,11)\bar{w}\bar{x}y$			
	$(10,12)\bar{w}y\bar{z}$			

Tabla final

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	x	x	x	x	x			x		x		x
$\bar{x}z$		x	x				x				x	
wx			x						x	x	x	
wxz					x	x						

Expresión óptima: $y + xz + wx + wxz$

EJEMPLO 21

Dada la siguiente función booleana

1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1

1) Encontrar la expresión canónica.

2) Simplificar la ecuación por K-diagramas.

3) Dibujar el circuito óptimo.

Solución:

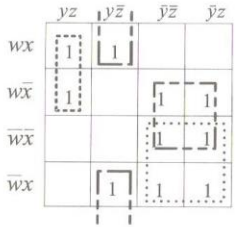
Se forma la tabla para chequear los átomos. Se tienen 16 bits, correspondientes a 4 variables: $wxyz$. Recordar que el orden es importante.

w	x	y	z	F	
1	1	1	1	**1**	$\rightarrow wxyz$
1	1	1	0	**1**	$\rightarrow wxy\bar{z}$
1	1	0	1	**0**	
1	1	0	0	**0**	
1	0	1	1	**1**	$\rightarrow w\bar{x}yz$
1	0	1	0	**0**	
1	0	0	1	**1**	$\rightarrow w\bar{x}\bar{y}z$
1	0	0	0	**1**	$\rightarrow w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	1	**0**	
0	1	1	0	**1**	$\rightarrow \bar{w}xy\bar{z}$
0	1	0	1	**1**	$\rightarrow \bar{w}x\bar{y}z$
0	1	0	0	**1**	$\rightarrow \bar{w}x\bar{y}\bar{z}$
0	0	1	1	**0**	
0	0	1	0	**0**	
0	0	0	1	**1**	$\rightarrow \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	0	**1**	$\rightarrow \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

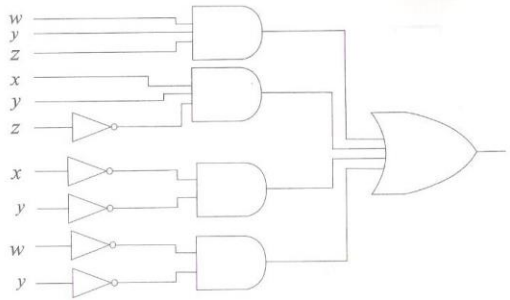
1) Expresión canónica:

$$wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz$$

2) K – diagrama:



Expresión óptima: $wyz + xyz + xy + wy$



EJEMPLO 22

En el ejercicio anterior, encontrar la expresión óptima aplicando el método de Quine–McCluskey.

Solución:

Se forma la tabla inicial del método.

Átomo	Paso 1	Paso 2	Paso 3
(1)$wxyz$	(1,2)wxy	(1,2)wxy	(1,2)wxy
(2)$wxyz$	(1,3)wyz	(1,3)wyz	(1,3)wyz
(3)$wxyz$	(2,6)xyz	(2,6)xyz	(2,6)xyz
(4)$wxyz$	(3,4)wxz	(3,4)wxz	(3,4)$w\bar{x}z$
(5)$wxyz$	(4,5)wxy	(4,5,9,10)xy	(4,5,9,10)xy
(6)$wxyz$	(4,9)$\bar{x}\bar{y}z$	(4,9,5,10)xy	(6,8)wxz
(7)$wxyz$	(5,10)xyz	(6,8)wxz	(7,8,9,10)wy
(8)$wxyz$	(6,8)wxz	(7,8,9,10)wy	
(9)$wxyz$	(7,8)wxy	(7,9,8,10)wy	
(10)$wxyz$	(7,9)$\bar{w}yz$		
	(8,10)wyz		
	(9,10)$\overline{wxy}$		

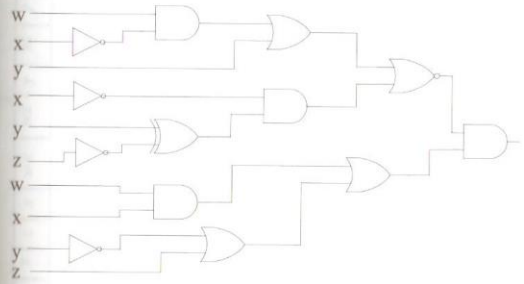
Tabla final:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
wxy	x	x								
wyz	x		x							
xyz		x				x				
wxz			x	x						
$\bar{x}\bar{y}$				x	x				x	x
$w\bar{x}\bar{z}$						x		x		
wy							x	x	x	x

Expresión óptima: $wyz + xyz + xy + wy$

EJEMPLO 23

Dado el siguiente circuito, encontrar las expresiones booleana, canónica y óptima por K-diagramas. Además dibujar el circuito óptimo.



Solución:

1) Expresión Álgebraica de salida:

$$[wx+y]+[x(y\oplus z)]\cdot[w\cdot x+(y+z)]$$

2) Se calcula la tabla de verdad:

$$\underbrace{\underbrace{[wx+y]}_{2}+\underbrace{\left[\underbrace{x\underbrace{(y\oplus z)}_{1}}_{3}\right]}_{I}}\cdot\underbrace{\left[\underbrace{w\cdot x}_{4}+\underbrace{(y+z)}_{5}\right]}_{II}$$

										1			3					I				II	
w	x	y	z	$\bar{x}$	wx	$w\bar{x}+y$	$y\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$y\bar{x}+\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}(I)$	2+3	$\bar{2}+3$	wx	y+z	4+5	I, II
1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0

3) Se encuentra la función booleana:

0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0

3) Se escribe los átomos en mini términos:

Átomos	Binario		Mini término
1	1101	→	$wxyz$
1	1100	→	$wxy\bar{z}$
1	0101	→	$wx\bar{y}z$
1	0100	→	$wx\bar{y}\bar{z}$
1	0001	→	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

5) Se forma la expresión canónica disyuntiva:

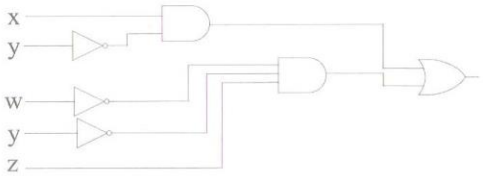
$$wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

6) Se simplifica por K-diagramas:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx			1	1
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				1
$\bar{w}x$			1	1

7) Expresión óptima: $xy + wyz$

8) Circuito óptimo:



EJERCICIOS PROPUESTOS CAPÍTULO 4

1) Simplificar las siguientes expresiones Álgebraicas, aplicar propiedades y nombrar cada propiedad utilizada.

a) $(x+y)\bar{y}+xy+xz+z$

b) $(y+z)x+x+x(x+y)+z$

c) $xy+xyz+z\ (y+x)$

2) Dadas las siguientes expresiones Álgebraicas, encontrar la función booleana y la expresión canónica correspondiente a cada una de ellas.

a) $x[y+z]+yz+xyz$

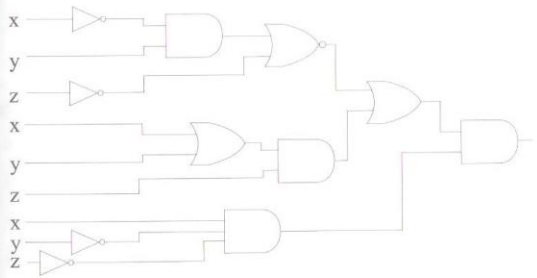
b) $(x+y)\ z+xz+xy+yz$

c) $xy(y+z)+xy+xyz$

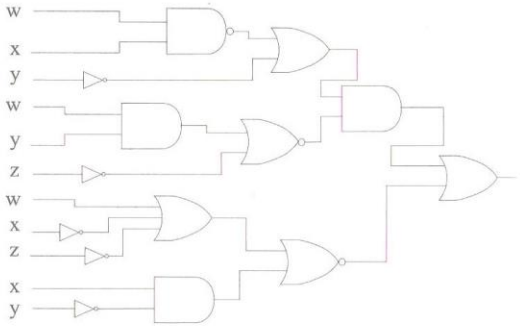
d) $[xy+z+x(y+z)][x+zy]$

3) Dados los siguientes circuitos lógicos, hallar la expresión de salida y simplificar por K-diagramas. Dibujar el circuito óptimo.

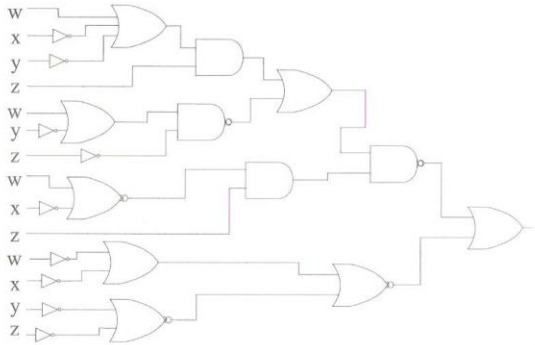
a)



b)



c)



4) Dados los siguientes K-diagramas, encontrar la expresión optima:

a)

1		1	1
1	1		

b)

	1		1
	1	1	

c)

	1	1	
1	1	1	
	1	1	
	1	1	1

d)

1	1	1	1
1		1	1
1			1
1			1

e)

1			1
	1	1	
1	1	1	1

1			1
	1	1	
	1	1	
1		1	1

f)

	1		
1		1	1
1		1	
	1		

			1
1		1	
1		1	
			1

g)

		1	1
1		1	1
1		1	1
		1	1

h)

1			
	1		1
	1	1	1
1	1	1	

5) Encontrar la expresión óptima, utilizar Quine-McCluskey.

a) $xyz + xyz + xyz + xyz + xyz$

b) $\overline{w}xyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz$

c) $\overline{w}xyz + \overline{w}xyz + wxyz + wxyz + wxyz + wxyz$

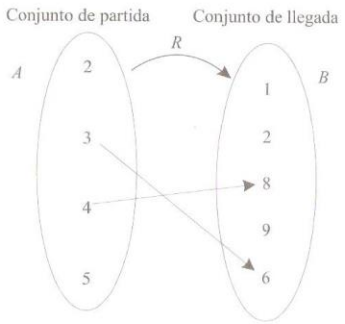
d) $\overline{u}\overline{w}xyz + \overline{u}wxyz + uwxyz + uwxyz + uwxyz + \overline{u}\overline{w}xyz + uwxyz + uwxyz$

6) En el ejercicio 5, dibujar el circuito óptimo para cada expresión Álgebraica óptima.

CAPÍTULO 5
Relaciones

5.1 INTRODUCCIÓN

Una relación es una correspondencia entre dos elementos de dos conjuntos con ciertas propiedades. En computación las relaciones se utilizan en bases de datos, estructuras de datos, redes autómatas y lenguajes. Las relaciones generalizan el concepto de funciones. La presencia del par ordenado (x, y) se interpreta como la existencia de una relación entre x e y. Una relación de un conjunto a otro, es una tabla que lista los elementos de primer conjunto, relacionados con los elementos del segundo conjunto. Al primer conjunto se le llamará conjunto de partida; y al segundo, conjunto de llegada. Gráficamente esto es:



5.2 RELACIÓN BINARIA

Una relación binaria es aquella cuyos elementos son pares ordenados, constituidos a partir de dos conjuntos. En toda relación de pares ordenados no vacía se tienen dos conjuntos: el dominio de R, definido como el conjunto de todos los primeros elementos de los pares de una relación, el cual es subconjunto del conjunto de partida A, y el rango o codominio de R, definido como el conjunto que está formado por los segundos elementos de los pares ordenados de la relación R el cual es un subconjunto del conjunto de llegada B.

5.3 ELEMENTOS DE UNA RELACIÓN

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una relación binaria R de $A \rightarrow B$, es un conjunto de pares ordenados, subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, que cumple con una proposición dada. La relación se indica como sigue:

$$R = \{ (x, y) \in A \times B \,/\, "\, a \ Relacionado \ \ b\, " \}$$

El conjunto $\{ x \in A \,/\, (x, y) \in R \ \ para \ alguna \ \ y \in B \}$ se llama dominio de la relación R.

El conjunto $\{ y \in B \,/\, (x, y) \in R \ \ para \ alguna \ \ x \in A \}$ se llama rango de la relación R.

EJEMPLO 1

Dados los conjuntos: $A=\{1,2,3,4,5\}$ y $B=\{2,4,6,8,10\}$ y sea R una relación de A sobre B.

El conjunto Universo para esta relación es: $U = A \times B$

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (1,2)(1,4)(1,6)\ (1,8)(1,10) \\ (2,2)(2,4)(2,6)(2,8)(2,10) \\ (3,2)(3,4)(3,6)(3,8)(3,10) \\ (4,2)(4,4)(4,6)(4,8)(4,10) \\ (5,2)(5,4)(5,6)(5,8)(5,10) \end{array} \right\}$$

a) Si la relación R se define como: $R=\{ (x,y) \in A \times B / x \leq y \}$ los elementos de esta relación serán:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (1,2)(1,4)(1,6)(1,8)(1,10) \\ (2,2)(2,4)(2,6)(2,8)(2,10) \\ (3,4)(3,6)(3,8)(3,10) \\ (4,4)(4,6)(4,8)(4,10) \\ (5,6)(5,8)(5,10) \end{array} \right\}$$

Y los elementos para el dominio y rango serán:

Dominio: $\{1,2,3,4,5\}$
Rango: $\{2,4,6,8,10\}$

b) Si la relación R se define como: $R=\{ (x,y) \in A \times B / x = y \}$, el conjunto de pares ordenados de esta relación queda expresado como: $R=\{(2,2)(4,4)\}$. Los conjuntos de pares ordenados que forman el dominio y rango quedan definidos como sigue:

Dominio: $\{2,4\}$ Rango: $\{2,4\}$

5.4 MATRIZ DE UNA RELACIÓN

Sean A y B dos conjuntos, no vacíos, finitos, con m y n número de elementos respectivamente. Sea R una relación de $A \rightarrow B$; entonces es posible representar a R como una matriz $M_R = \left[m_{ij} \right]$ booleana de tamaño mxn cuyos elementos se definen como:

$$M_R = \begin{cases} 1 & xRy \quad x \in A, y \in B \\ 0 & x \not R y \end{cases}$$

Filas $\rightarrow$ están formadas por los elementos del conjunto de partida
Columnas $\rightarrow$ están formadas por los elementos del conjunto de llegada.

La representación matricial es muy importante, esta permite llevar a cabo las operaciones con relaciones, sobre todo cuando se tienen relaciones muy grandes.

EJEMPLO 2

Sean los conjuntos: $A=\{2,3,5\}$ y $B=\{4,6,9,10\}$, sea la relación R, $R: A \rightarrow B$ tal que:

$$R = \{ (2,4)(2,6)(2,10)(3,6)(3,9)(5,10) \}$$

Esta relación se puede representar en forma de matriz como sigue:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 4 & 6 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \end{array}$$

Los elementos del conjunto A se representan como filas y los del conjunto B como columnas. Se coloca un 1 en los pares relacionados y 0 en los no relacionados.

5.5 OPERACIONES CON LAS RELACIONES

Sea R y S dos relaciones binarias finitas $R: A \rightarrow B$ y $S: A \rightarrow B$ cuyas matrices de relación son M_R y M_S. Se definen las operaciones sobre ambas relaciones de la siguiente manera:

- ✓ **Unión** $R \cup S$: $M_{R\cup S} = M_R + M_S$ suma de matrices término a término.
- ✓ **Intersección** $R \cap S$: $M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$ "$\wedge$" producto Booleano término a término.
- ✓ **Diferencia** $R \setminus S$: $M_{R\setminus S} = M_R \wedge \neg M_S$, $\neg M_S$, negación de la matriz S.
- ✓ **Complemento** $\overline{R}$: $M_{\overline{R}} = \neg M_R \Rightarrow$ Negación de la matriz M_R.

EJEMPLO 3

Sean A y B conjuntos definidos como: $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{2,5,7,9\}$; y sean $R: A \rightarrow B$ y $S: A \rightarrow B$, relaciones definidas por:

$$R = \{(1,2)(1,9)(2,2)(2,7)(4,7)\} \qquad S = \{(2,2)(2,5)(3,2)(2,7)(2,9)(4,5)\}$$

Hallar:

a) $M_R, M_S, M_{\overline{R}}, M_{\overline{S}}$

b) $M_{R\cup S}, M_{R\cap S}, M_{R\setminus S}, M_{\overline{R}\setminus\overline{S}}, M_{\overline{R}\cup\overline{S}}, M_{(R\cap S)\setminus S}$

Solución:

a)

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} \end{array}$$

$$M_{\overline{R}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4} \end{array} \qquad M_{\overline{S}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4} \end{array}$$

b)

$$M_{R\cup S}=M_R+M_S$$

$$M_{R\cup S}=\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} + \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_{R\cap S}=M_R\wedge M_S$$

$$M_{R\cap S}=\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \wedge \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{R\setminus S}=M_R\wedge\neg M_S$$

$$M_{R\setminus S}=\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \wedge \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_{\bar{R}\setminus\bar{S}}=M_{\bar{R}}\wedge\neg M_{\bar{S}}=M_{\bar{R}}\wedge M_S$$

$$M_{\bar{R}\setminus\bar{S}}=\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \wedge \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{\bar{R}\cup\bar{S}}=M_{\bar{R}}+M_{\bar{S}}$$

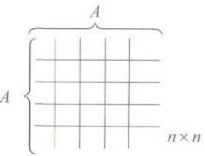
$$M_{\bar{R}\cup\bar{S}}=\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} + \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$(M_{R\cap S})\setminus S=M_{R\cap S}\wedge\neg M_S$$

$$M_{R\cap S\wedge\neg M_S}=\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \wedge \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

5.6 RELACIONES BINARIAS SOBRE UN CONJUNTO A

Sea A un conjunto finito de n elementos; y sea R una relación de $A\rightarrow A$. Este tipo de relación, tiene asociada una matriz de relación M_R cuadrada, en donde el número de filas es igual al número de columnas.

$M_R=$ 

EJEMPLO 4

Sea A el conjunto definido como: $A=\{1,2,3,4\}$ y sea R la relación definida como:

$$R : A \to A \;; R = \{ (a,b) \in A \times A / a \geq b \} .$$

El conjunto universo $A \times A$, se define como:

$$A \times A = \begin{Bmatrix} (1,1)(1,2)(1,3)(1,4) \\ (2,1)(2,2)(2,3)(2,4) \\ (3,1)(3,2)(3,3)(3,4) \\ (4,1)(4,2)(4,3)(4,4) \end{Bmatrix}$$

Y la relación R se define por:

$$R = \begin{Bmatrix} (1,1)(2,1)(2,2)(3,1)(3,2) \\ (3,3)(4,1)(4,2)(4,3)(4,4) \end{Bmatrix}$$

Luego la matriz de relación es una matriz cuadrada:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5.7 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Algunas relaciones binarias $R: A \to A$ cumplen ciertas propiedades:

1) Reflexiva: Una relación es reflexiva cuando todo elemento del conjunto A esta relacionado consigo mismo; es decir: $(a,a) \in R, \forall (a,a) \in A \times A$. En la matriz de relación, se observa todos los elementos de la diagonal principal con valor igual a 1.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2) Irreflexiva: Una relación es irreflexiva cuando ningún elemento del conjunto A esta relacionado consigo mismo. Esto es: $(a,a) \notin R, \forall (a,a) \in A \times A$. En la matriz de relación se observa todos los elementos de la diagonal principal con valor igual a 0.

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

3) Simétrica: Se dice que una relación es simétrica cuando $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$. En notación matricial la relación es simétrica si cumple:

$$M_R = M_R^T$$

Recordar!!! La matriz transpuesta se halla realineando las filas de la matriz original; es decir, las filas de matriz M serán las columnas de la matriz transpuesta.

4) Anti simétrica: Una relación en anti simétrica cuando uno de los pares colocados simétricamente no está en la relación, lo cual significa: $(a,b) \in R \; y \; (b,a) \in R \Rightarrow a = b$.

En términos de matrices, se dice anti simétrica si se cumple:

$$M_R \wedge M_R^T \leq I$$

"$\wedge$" Producto Booleano término a término.

$I \Rightarrow$ Matriz identidad, la cual queda representada como.

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{Bmatrix}$$

Algunas matrices identidad son:

$$I_{2\times2} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad I_{3\times3} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad I_{4\times4} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

5) **Transitiva:** Una relación es transitiva si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ $\Rightarrow (a,c) \in R$

En términos matriciales una relación es transitiva si se cumple la siguiente desigualdad: $M_R \odot M_R \leq M_R$. "$\odot$" Se refiere al producto usual de matrices booleano.

EJEMPLO 5

Sea $R: A \rightarrow A$ una relación con $A = \{1,2,3\}$ y $R = \{(1,3)(2,3)(3,2)(3,3)(2,2)(1,2)\}$

Su matriz de relación es:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Chequear qué tipo de relación es:

- ✓ Reflexiva $\Rightarrow$ No / observe la diagonal.
- ✓ Irreflexiva $\Rightarrow$ No
- ✓ Simétrica $M_R = M_R^T \Rightarrow$ No

$$M_R^T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- ✓ Antisimétrica $M_R \wedge M_R^T \leq I \Rightarrow$ No

$$M_R \wedge M_R^T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \wedge \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \leq \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- ✓ Transitiva $M_R \odot M_R \leq M_R$ $M_R \odot M_R \leq M_R \Rightarrow$ Si

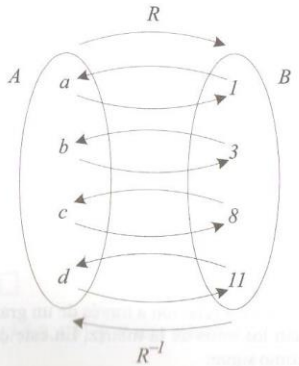
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+1+1 & 0+1+1 \\ 0+0+0 & 0+1+1 & 0+1+1 \\ 0+0+0 & 0+1+1 & 0+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.8 RELACION INVERSA

Sea $R : A \rightarrow B$; se define la relación inversa como el conjunto $\{(y,x) \in B \times A / (x,y) \in R\}$, y se denota por $R^{-1}: B \rightarrow A$.

$$M_R^{-1} = M_R^T$$



EJEMPLO 6

Sea $R{:}A \to B$, con $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{2,4,6,8\}$. Se define R como la relación formada por $R=\{(1,4)(1,8)(2,6)(3,6)(4,1)\}$. Hallar R^{-1}.

Solución:

Sea $R^{-1}=\{(a,b)\in B\times A\,/\,(a,b)\in R\}$ así, R^{-1} queda formada por los pares: $R=\{(4,1)(8,1)(6,2)(6,3)(1,4)\}$

5.9 GRAFO DE UNA RELACIÓN

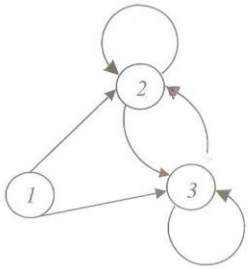
Se ha visto que una relación $R{:}\ A\to A$, se puede representar enumerando sus pares ordenados o utilizando una matriz booleana. Otra manera de mostrar una relación es por medio de una representación gráfica. Cada elemento del conjunto A se representa mediante un punto y cada par ordenado, se representa por medio de un segmento orientado, cuyo sentido viene indicado por una flecha. Se utiliza esta representación en las relaciones finitas; las cuales se denominan grafos *dirigidos* o *digrafos*. Los elementos de A se llaman vértices, y las flechas que asocian los elementos aristas.

EJEMPLO 7

Sea $A=\{1,2,3\}$, y R una relación de A en A cuya matriz de relación está dada por:

$$M_R=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para representar esta relación a través de un grafo, se dibujan tres vértices y se cuentan los unos de la matriz. En este caso se obtienen 6 aristas, dibujadas como sigue:



Nota: la digrafica de R^{-1}, la inversa de R, tiene exactamente las mismas aristas de la digrafica de R, pero las direcciones de estas se encuentran invertidas.

La digrafica que representa una relación puede usarse para determinar las propiedades de la relación.

1) Una relación R es reflexiva si y solo si, existe un bucle o lazo en cada vértice de la digrafica. Si ningún vértice tiene bucle o lazo, la relación es irreflexiva.

2) Una relación R es simétrica si y solo si, para toda arista entre vértices distintos, su digrafica tiene una arista en la dirección opuesta.

3) Una relación R es antisimétrica si y solo si, entre vértices distintos, no hay dos aristas en direcciones opuestas.

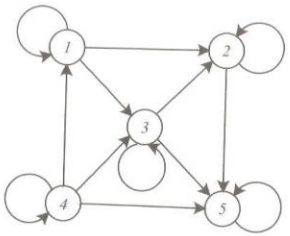
4) Una relación R es transitiva si y solo sí, siempre que haya una arista del vértice a al b; y del vértice b al c; existe una arista del vértice a al c.

EJEMPLO 8

Sean $A=\{1,2,3,4,5\}$ y R una relación de A en A, cuya matriz de relación es:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{5\times 5} \end{array}$$

El grafo asociado es:



Observar:

a) Es reflexiva porque todos los vértices tienen lazo o bucle.
b) No es simétrica.
c) No es antisimétrica.
d) No es transitiva; observar que de 1 a 3 hay arista, de 3 a 5 hay arista; pero de 1 a 5 no hay arista.

5.10 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación de equivalencia es aquella relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

EJEMPLO 9

Sea R una relación sobre el conjunto de los números enteros. Es decir $R: Z \rightarrow Z$ definida como:

$$R = \{(a,b) \in Z \times Z \,/\, a \equiv b \,(mod\ 6)\}$$

Recordar!!! La relación de congruencias $a \equiv b$ $(mod\ k)$ significa que $a-b$ es un múltiplo de k, con k entero positivo.

Demostrar que R, es una relación de equivalencia.

Solución:

a) Reflexiva: para verificar que R es reflexiva, se debe probar que $(a, a) \in R \forall a$, esto es probar: $a - a$ es múltiplo de 6. Esto se cumple pues $a - a = 0$; y 0 es múltiplo de 6.

b) Simétrica: para verificar simetría se debe probar que si $(a, b) \in R$, entonces, (b,a) también pertenece a R. Si $(a,b) \in R \Rightarrow a\text{-}b$ es múltiplo de 6, por lo tanto, $b - a$ también es múltiplo de 6. $\therefore R$ simétrica.

c) Transitiva: se debe probar que sí $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$. Sí $(a, b) \in R$, $a - b$ es múltiplo de 6, y si $(b, c) \in R$, $b - c$ es múltiplo de 6, por lo tanto $a - c$ es múltiplo de 6, esto es $(a, c) \in R$, R es transitiva. $\therefore R$ es una relación de equivalencia.

EJEMPLO 10

Sea R una relación sobre el conjunto de los enteros positivos, tales que $(a,b) \in R$ sí y solo si a^2+b es par. Demostrar que R es una relación de equivalencia.

Solución:

a) Reflexiva: se debe probar que $(a,a) \in R$. Si $(a,a) \in R$ se debe probar $\Rightarrow a^2+a$ es par.

$a^2 + a = a\,a + a = a\,(a + 1) =$ par. Debido a que a y $(a + 1)$ son enteros positivos consecutivos, por lo tanto $(a, a) \in R$ $\therefore R$ es reflexiva.

b)Simétrica: se debe probar que si $(a,b) \in R$ también $(b,a) \in R$.

Si $(a,b) \in R \Rightarrow a^2+b$ es par, esto significa que a y b son ambos pares o ambos impares. En cualquier caso también resulta b^2+a par, por consiguiente $(b,a) \in R$, $\therefore R$ es simétrica.

c)Transitiva: se debe probar que sí $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

Si $(a,b) \in R \Rightarrow a^2+b$ es par, si $(b,c) \in R \Rightarrow b^2+c$ es par, esto se cumple para cuando a,b,c son pares o cuando a,b,c son impares, por lo tanto $a^2+c=$ par
$\therefore (a,c) \in R$ en cualquier caso.

EJERCICIOS PROPUESTOS CAPÍTULO 5

1) Sea R una relación de A en B, sea $A=\{2,3,4\}$, $B=\{4,5,6,7\}$, y sea R definida como $R=\{(a,b)/a \text{ divide } b\}$

   a) Hallar los elementos de R.
   b) Representar a R matricialmente.
   c) Hallar dom(R) y rang(R).
   d) Hallar la relación inversa R^{-1}.

2) Sea $A=\{a,b,c\}$ definir cuatro relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4; sobre A tales que:

   a) R_1 sea reflexiva y no sea simétrica, anti simétrica ni transitiva.
   b) R_2 sea simétrica y no sea reflexiva, anti simétrica ni transitiva.
   c) R_3 sea anti simétrica y no sea reflexiva, simétrica ni transitiva.
   d) R_4 sea transitiva y no sea simétrica, reflexiva ni anti simétrica.

3) En cada una de las relaciones en $\mathbb{Z}$, verificar que tipo de relación existe:

   a) $R_1=\{(x,y)/x+y<3\}$.
   b) $R_2=\{(x,y)/3 \text{ divide } (x+y)\}$.
   c) $R_3=\{(x,y)/x+y \le 2\}$.
   d) $R_4=\{(x,y)/x^2+x=y^2+y\}$.

4) Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y sea $R: A \to A$ definida como:
   $R=\{(a,b) \in A \times A / a+b \le 2\}$.

   a) Verificar que tipo de relación es.
   b) Dibujar el grafo asociado a la relación.

5) Dadas las siguientes matrices asociadas a las relaciones R y S, sobre A y B con $A=\{a,b,c\}$ y $B=\{x,y\}$.

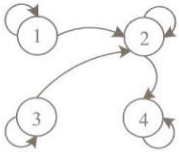
$$M_R: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_S: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar:

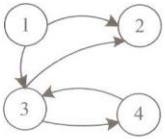
   a) $M_{R \cup \bar{S}}$
   b) $M_{\bar{R}}$
   c) $M_{\overline{S \cap R}}$
   d) $M_{R \setminus \bar{S}}$
   e) $M_{S \oplus R}$
   f) $M_{\bar{S} \setminus \bar{R}}$

6) Dado los siguientes grafos para relaciones de A sobre A con $A=\{1,2,3,4\}$. Verificar que tipos de relaciones son y mostrar la matriz para cada grafo.

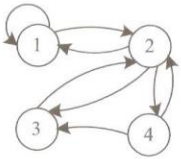
a)



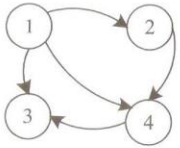
b)



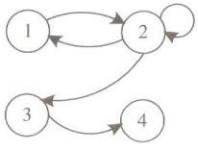
c)



d)



e)



7) Dadas las siguientes matrices asociadas a relaciones de A en A con $A=\{x,y,z,w\}$. Dibujar los grafos asociados a cada relación.

a) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8) Dadas $R: A \to B$ y $S: A \to B$ con $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{x,y,z\}$ definidas como $R=\{(1,x)(2,x)(3,y)(3,z)\}$ y $S=\{(2,x)(2,z)(3,x)(3,y)(3,z)\}$.

Hallar:

a) $M_{\overline{R}}$ b) $M_{\overline{S}}$ c) $M_{S\cup\overline{R}}$ d) $M_{R\setminus S}$

e) $M_{S\oplus\overline{R}}$ f) $M_{\overline{S}\cap R}$ g) $M_{R\cup(\overline{S}\setminus R)}$

9) Dada la relación R sobre el conjunto de enteros tal que: $R=\{(a,b)/a=b$ ó $a=-b\}$ demostrar que la relación R es una relación de equivalencia.

10) Dada la relación R sobre el conjunto de Z^+ definida como $R=\{(a,b)\ /\ a+b^2\ es\ par\}$ demostrar que R es una relación de equivalencia.

11) Si R es una relación sobre $A=\{1,2,3,4\}$ tal que $(a,b)\in R$ si y solo si $a+b=par$.

Encontrar la matriz de la relación. Determinar las matrices de R^{-1}, $\overline{R}$ y R^2.

12) Si la matriz de relación R sobre $\{1,2,3,4\}$ esta dada por:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Listar los pares ordenados de la relación.
b) Verificar que tipo de relación es R

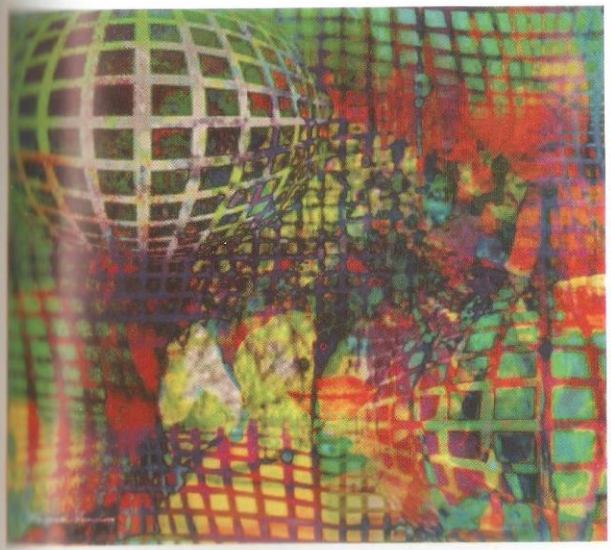
13) Determinar si la relación R sobre el conjunto de personas es refleja, simétrica, anti simétrica y/o transitiva, donde $a\,R\,b$ sí:

a) b es más baja que a.
b) a y b nacieron el mismo día.
c) a tiene el mismo apellido que b.
d) a y b tienen un abuelo en común.

14) Sea R una relación definida sobre A, $A \neq \emptyset$ demostrar:

a) Si R es simétrica, entonces R^{-1} es simétrica.
b) Si R es reflexiva entonces $R \cap R^{-1}$ es reflexiva.
c) Si R es anti simétrica entonces $R \cap R^{-1}$ es anti simétrica.

CAPÍTULO 6
Teoría de Grafos



LEONHARD EULER

Euler nació en Basilea en 1707. A los 23 años fue nombrado profesor de Física y tres años después de Matemáticas, en la Academia de Berlín. Vivió 25 años en Berlín en donde escribió mas de 380 artículos, entre ellos uno de Funciones Matemáticas y otro sobre Cálculo Diferencial.

Euler realizó aportes muy valiosos en la aritmética, la física, la astronomía y la geografía. En el área de la informática se le considera el creador de la Teoría de Grafos. En 1736 resolvió el problema de los Puentes de Königsberg. Esta solución aportada por Euler se conoce actualmente como el primer teorema de la teoría de grafos.

Euler, casi ciego, muere en septiembre de 1783.

6.1 INTRODUCCIÓN

La teoría de grafos es una disciplina antigua con muchas aplicaciones modernas. Sus ideas básicas las introdujo el gran matemático suizo Leonard Euler en el siglo XVII. Euler utilizó los grafos para resolver el problema de los puentes de Könisgberg, que se estudiarán más adelante.

Los grafos se emplean para resolver problemas en diversas áreas del conocimiento, como ciencias computacionales, ciencias físicas, ingeniería eléctrica y de comunicaciones y economía. Se ha utilizado esta teoría en el estudio de las redes de internet, en problemas para hallar el camino más largo o más corto entre ciudades, etc.

Se comenzará con el estudio de la gráficas dirigidas, las cuales son diagramas de flujo cuyas líneas de conexión tienen direcciones asociadas en ellas. Posteriormente a las líneas de conexión se les asignará "pesos" y se analizará el efecto resultante al eliminar las direcciones.

6.2 GRÁFICAS DIRIGIDAS

Una gráfica dirigida o digráfica G, consiste en un conjunto no vacío de vértices denotados como $V(G)$ y en un conjunto de aristas denotado como $A(G)$; junto con una función γ de $A(G)$ en $V(G) \times V(G)$. Si "e" es una arista de G, y $\gamma(e) = < p, q >$, entonces p se llama vértice inicial de e y q el vértice final. Se interpretará como: "e está dirigida de p a q".

Un dibujo de la digráfica G es un diagrama que consta de puntos correspondientes a los elementos de $V(G)$ y a flechas correspondiente a los elementos de $A(G)$, tales que si $\gamma(e) = < p,q >$ entonces la flecha correspondiente de "e" va del punto etiquetado como p al punto etiquetado como q.

EJEMPLO 1

Sean $V(G)=\{1,2,3,4\}$ y $A(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ y la función γ definida como: $\gamma(e_1)=<1,1>$, $\gamma(e_2)=<2,1>$, $\gamma(e_3)=<2,2>$, $\gamma(e_4)=<2,3>$,

$\gamma(e_5)$=<3,2>, $\gamma(e_6)$=<3,3>, $\gamma(e_7)$=<4,3>. Una representación del grafo dirigido es:

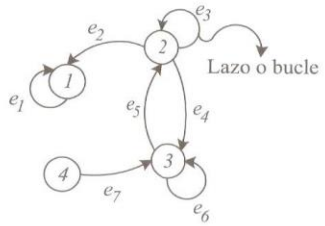
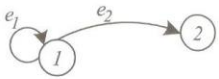


Figura 6.1 Grafo dirigido.

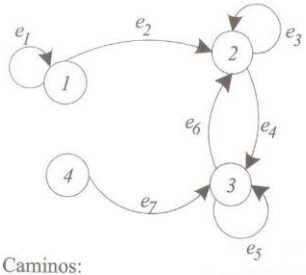
6.3 CAMINO, LONGITUD DE UN CAMINO Y CICLO

a) Camino: es una sucesión de aristas, de modo que el vértice final de una arista es el vértice inicial de la siguiente arista.



$e_1 e_2 = (1,1)(1,2) = 112$

b) Longitud de camino: Se determina por la cantidad de aristas que forman el camino.

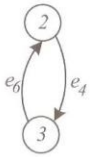


$e_1 = (1,1)$
$e_2 = (1,2)$
$e_3 = (2,2)$
$e_4 = (2,3)$
$e_5 = (3,3)$
$e_6 = (3,2)$
$e_7 = (4,3)$

Caminos:

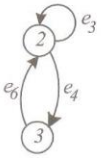
$e_1 e_1 e_2 e_4 e_5 e_6 e_3$ Longitud de camino: 7
$e_7 e_6 e_3 e_4$ Longitud: 4

c) Camino cerrado: es un camino cuyo vértice inicial coincide con el vértice final.

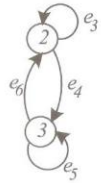


$e_4 e_6 = 232$, longitud: 2

$e_5 = 33$, longitud : 1



$e_3 e_4 e_6 = 2\,2\,3\,2$, longitud : 3



$e_3 e_4 e_5 e_6 = 2\,2\,3\,3\,2$, longitud : 4

d) Ciclo: es un camino cerrado que no repite vértices ni aristas, a excepción del vértice de inicio y final del camino.

$$e_1 = 11 \quad e_4 e_6 = 232 \quad e_5 = 33$$

6.4 FUENTE, POZO, SUCESORES Y ALCANZABLES DESDE UN VÉRTICE

a) Vértice Fuente: es un vértice al que no llega ninguna arista; es decir, no es vértice final de ninguna arista.

b) Vértice Pozo: es aquel vértice que no es vértice inicial de ninguna arista, de forma que todas las aristas llegan a ese vértice.

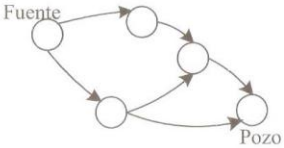


Figura 6.2 Gráfico con vértice, pozo y fuente.

c) Sucesores de un vértice: es el conjunto formado por todos los vértices, tales que exista una arista entre el vértice estudiado y los otros vértices de la gráfica. Se denota como:

$$Suc(v) = \{ u \in V(G) / \text{hay una arista entre } v \text{ y } u \}$$

d) Alcanzables de un vértice: es el conjunto formado por todos los vértices, tales que existe un camino entre el vértice estudiado y los otros vértices de la gráfica. Se denota como sigue:

$$R(v) = \{ u \in V(G) / \text{existe un camino de } v \text{ a } u \}$$

e) Una gráfica sin ciclos es una gráfica acíclica.

6.5 ALGORITMO DE SINK

El algoritmo de Sink encuentra los pozos cuando se aplica a una gráfica dirigida, acíclica y finita G. El algoritmo utiliza el conjunto de sucesores de un vértice definido como:

$$Suc(v) = \{ u \in V(G) / \text{hay una arista entre } v \text{ y } u \}$$

A continuación la secuencia de pasos que resume el Algoritmo de Sink:

- **Paso 1:** Dada la gráfica G, definir $V(G)$ como conjunto de vértices de la gráfica.
- **Paso2:** Elegir cualquier vértice v en $V(G)$.
- **Paso 3:** Calcular el conjunto de $Suc(v)$.
  Si $Suc(v) \neq \phi$, Elegir un vértice u en $Suc(v)$, reemplazar v por u, y regresar al paso 3.

  Si $suc(v) = \phi$, ir al paso 4.
- **Paso 4:** Sea Pozo $V(G) = v$
- **Paso 5:** Elegir un vértice en $V(G)$ que no haya sido chequeado. Si todos los vértices $V(G)$ han sido revisados, finalizar. En caso contrario, regresar al paso 2.

EJEMPLO 2

Dado el siguiente gráfico dirigido, encontrar los pozos correspondientes. Aplicar algoritmo de Sink.

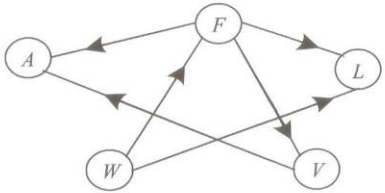


Figura 6.3 Grafo dirigido para aplicar el algoritmo de Sink.

Solución:

Sea $V(G) = \{ A, F, L, V, W \}$ conjunto de vértices de la gráfica.

Elegir cualquier vértice en $V(G)$: Por ejemplo A.

Calcular el conjunto de sucesores del vértice A. Sea $Suc(A) = \{ \ \} = \phi$

Como sucesores de A es un conjunto vacío, entonces A es un pozo.

$SINK(G) = A$

Ahora elegir un vértice en $V(G)$ que no haya sido chequeado, ejemplo F.
Calcular sucesores de F.

$Suc(F)=\{L,V,A\}$

Como sucesores de F es distinto del conjunto vacío, elegir otro vértice, por ejemplo L.

Calcular sucesores de L.

$Suc(L)=\{\ \}$

$SINK\ (G)=L$

Elegir W

$Suc(W)=\{F,L\}$

Elegir V

$Suc(V)=\{A\}$

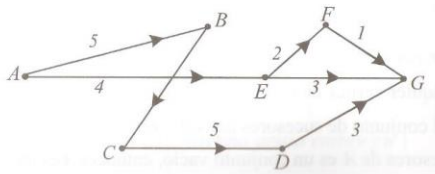
$Suc(A)=\{\ \}$

$SINK\ (G)=A$

6.6 GRÁFICAS DIRIGIDAS CON PESO

Los grafos dirigidos pesados, son aquellos a los que se les asigna una magnitud o peso en cada una de las aristas. Los grafos pesados se utilizan para representar redes informáticas y pueden emplearse para estudiar costos de comunicación, los tiempos de respuesta de los ordenadores o la distancia entre ordenadores. La figura muestra un grafo dirigido con peso.

El peso puede representar distancia, costo, utilidad, tiempo, temperatura, unidades de producción, entre otros.



6.7 RED DE ACTIVIDAD

Se define una red de actividad como una gráfica acíclica, con pesos no negativos, una única fuente y un único pozo. En las redes de actividad el interés es encontrar caminos de peso mínimo desde la fuente hasta el pozo, o caminos de peso máximo o rutas críticas de la fuente al pozo. El peso de un camino se encuentra sumando los pesos de todas las aristas que forman el camino.

6.8 UN ALGORITMO PARA CALCULAR CAMINOS DE PESO MÍNIMO: ALGORITMO DE DIJKSTRA

"Si en 10 años más, cuando ustedes estén haciendo algo rápido y sucio, repentinamente visualizan que yo estoy mirando por sobre sus hombros y se dicen a sí mismos, – a Dijkstra no le hubiera gustado esto -, eso sería suficiente inmortalidad para mí".

Dijkstra estudió Física Teórica en la Universidad de Leiden. Trabajó como investigador para Burroughs Corporation a principios de los años 1970.

Recibió el Premio Turing en 1972. Entre sus contribuciones a las ciencias de la computación está la solución del problema del camino más corto, también conocido como el algoritmo de Dijkstra, la notación polaca inversa y el relacionado algoritmo *shunting yard, the multiprogramming system*, el algoritmo del banquero y la construcción del semáforo para coordinar múltiples procesadores y programas. Dijkstra murió el 6 de agosto de 2002 después de una larga lucha contra el cáncer.

Hay diferentes algoritmos para hallar un camino de longitud mínima entre dos vértices. En el caso de redes de actividades el interés esta en encontrar el camino de peso mínimo entre la fuente y el pozo.

El algoritmo de Dijkstra encuentra caminos de peso mínimo, desde un vértice inicial a cualquier otro vértice de la gráfica G. En cada iteración el algoritmo introduce un vértice de tal forma que el peso acumulado del camino sea mínimo. El algoritmo utiliza una simbología de etiquetas definidas así:

$$[a,b]_k \begin{cases} a = \textit{distancia menor acumulada} \\ b = \textit{vértice que precede} \\ k = \textit{número de iteración del algoritmo} \end{cases}$$

- **Paso 1:** Sea la gráfica G, con vértices $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ y aristas $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ de peso no negativo.
- **Paso 2:** Comenzar en cualquier vértice v_1. Colocar la primera etiqueta con distancia 0, iteración 0 y vértice precedente 0. Es decir, marcar el vértice de inicio v_1 con la etiqueta $[0,0]_0$.
- **Paso 3:** Chequear los pesos de las aristas del vértice v_1 a los otros vértices que conecta. Etiquetar cada vértice, tomando la distancia menor acumulada, colocando el vértice precedente y la iteración correspondiente. Si en el vértice chequeado existe una etiqueta de peso menor esta no se altera; si es de peso mayor esta se elimina y queda la nueva de peso menor; y si el peso es igual se debe colocar la nueva etiqueta quedando también la antigua, esto refleja que el camino mínimo no es único. Suponga que las aristas son $< v_1, v_2 >$ y $< v_1, v_3 >$. Etiquetar el vértice v_2 con la etiqueta $[w_1, v_1]_1$, y el vértice v_3 con la etiqueta $[w_2, v_2]_2$; donde w_i representa el peso mínimo acumulado del camino desde el vértice v_1 al vértice chequeado.
- **Paso 4:** Elegir el vértice que tenga menor w_i, y escoger ese vértice para repetir el paso 3. El peso w_i se va incrementado en cada iteración, pero siempre será el peso mínimo acumulado. Cuando no existan más vértices para chequear, finalizar. Ir al paso 5. El último vértice etiquetado tendrá una etiqueta que acumula el peso mínimo del camino desde el vértice inicial hasta el vértice final, y tendrá el número de iteraciones utilizadas.
- **Paso 5:** Tomar la etiqueta del vértice final y retroceder para armar el camino. El peso del camino mínimo será el peso que tiene marcada la etiqueta del vértice final.

EJEMPLO 3

Dada la siguiente digráfica, hallar el camino de peso mínimo de la fuente al pozo.

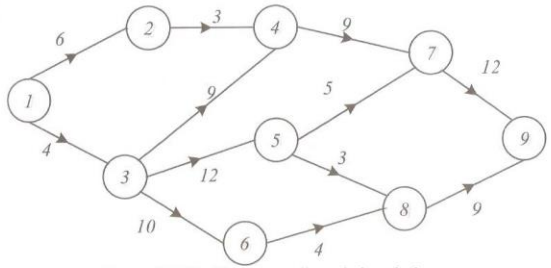
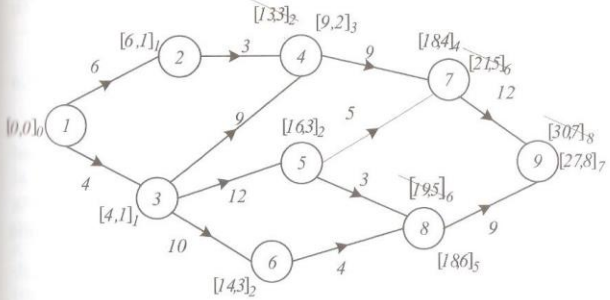


Figura 6.4 Digráfica para aplicar el ejemplo 3.

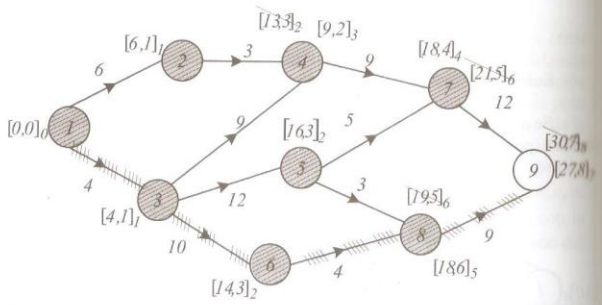
Solución:

Se quiere encontrar el camino de peso mínimo del vértice 1 (fuente) al vértice 9 (pozo)



Comenzar en el vértice *1*, etiquetar como sigue: $[0,0]_0$. Luego chequear la arista desde *1* a otros vértices. En este caso *2*, *3*. Calcular los pesos de los caminos. Etiquetar en el vértice *2* como sigue $[6,1]_1$ que significa distancia menor *6*, vértice que precede *1* e iteración *1*. Así mismo; etiquetar el vértice *3* con $[4,1]_1$. Una vez colocadas las etiquetas, escoger el vértice que tenga menor distancia. Para este ejemplo el vértice *3* conecta, con los vértices *4*, *5* y *6*, etiquetar dichos vértices como sigue: el vértice *4* quedará con etiqueta $[13,3]_2$, el vértice *5* con etiqueta $[16,3]_2$ y el vértice *6* con etiqueta $[14,3]_2$.

Repetir el procedimiento: ahora escoger entre los vértices con etiqueta el que tenga distancia menor. Los vértices ya marcados no se toman en cuenta, el elegido será el vértice *2*. Chequear de nuevo la arista *2* a los otros vértices; en este caso el vértice *4*. Observar que la nueva etiqueta en *4* será $[9,2]_3$ y como esta es menor que la distancia actual se sustituye, con lo cual la etiqueta de *4* ahora es $[9,2]_3$. Se repite el procedimiento, encontrando así que el peso del camino mínimo es *27* y el camino mínimo es: $\Rightarrow 1,3,6,8,9$. Luego que se tiene identificado el camino mínimo se marca en la digráfica.



EJEMPLO 4

Dada la siguiente digráfica, encontrar el camino de peso mínimo de la fuente al pozo

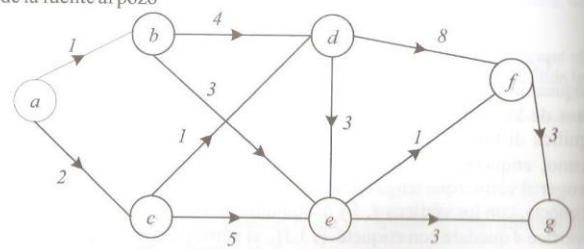
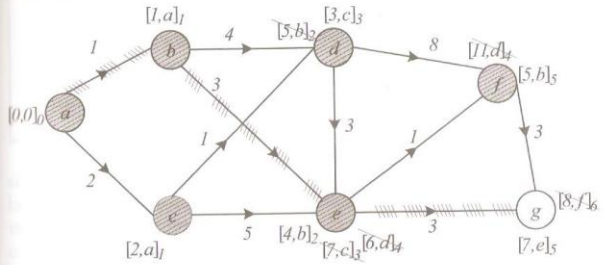


Figura 6.5 Digráfica para aplicar el ejemplo 4.

Proceder como en el ejemplo anterior.

Solución:



Ruta mínima $\Rightarrow 7$
Camino $\Rightarrow a,b,e,g$
Longitud $\Rightarrow 3$

6.9 APLICACIÓN EN MATLAB

La disponibilidad de programas de computación es una herramienta de apoyo auxiliar para estimular el aprendizaje. Para reflejar la importancia de la computación digital en la solución de problemas de grafos, se incluye una muestra de programas de computadora que permiten ejecutar algunos métodos. El empleo de estos programas ayuda a resolver ejercicios propuestos en diversos textos de enseñanza sobre del tema. Cada programa muestra una breve descripción del mismo, indicando los datos que requiere, e incluye el listado de sus instrucciones, permitiendo al lector su operación y reproducción. El lenguaje de computadora empleado es MATLAB. Estos programas constituyen material de apoyo al proceso didáctico de los métodos y ofrecen una experiencia de aprendizaje interactivo, al automatizar el cálculo y servir de referencia comprobatoria al resultado obtenido manualmente, además de capacitar al usuario en la confirmación del mecanismo funcional del algoritmo y mejorar la comprensión de los procedimientos. Para ejecutar los programas se recomienda seguir los siguientes pasos:

- Ejecutar el programa MATLAB: Una vez obtenido el prompt de MATLAB >>
- En la barra del menú principal pulsar las opciones: **File/ New/ Script**
- Escribir una a una todas las instrucciones del programa
- En la barra principal, Pulsar la opción **Debug / Save File and Run**
- Asignar un nombre al archivo, por ejemplo Prim, y pulsar el recuadro **Guardar**

Una vez guardado, luego que aparezca el prompt >> el programa puede ejecutarse desde la ventana de MATLAB tecleando el nombre del mismo. MATLAB reconoce el archivo de extensión **.m** para ser ejecutado internamente. Los caracteres en cada instrucción del programa deben ser tecleados exactamente como aparecen. MATLAB diferencia los caracteres mayúscula de minúscula. Es decir, en MATLAB, la letra **a** es diferente de **A**.

Instrucciones del Algoritmo de Dijkstra en Matlab

Para ingresar los datos del grafo a resolver por el programa, primero determine la cantidad ***n*** de nodos o vértices que posee el grafo. Luego, disponga los pesos o costos desde cada nodo ***i*** a cada nodo ***j*** en una matriz de ***n*** filas por ***n*** columnas. Al momento de ejecución, el programa solicitará cada uno de los elementos de la matriz, requiriendo su posición de fila, columna y el peso o costo de la arista (***i, j***). Una vez ingresados los datos de entrada, el programa ofrecerá la respuesta esperada.

Algoritmo de Dijkstra: Ruta de Costo Mínimo

```
Seguir = 'S';
while Seguir =='S'|| Seguir =='s'
clc; clear all; Corregir = 'S';
disp('     *** ALGORITMO DE DIJKSTRA ***');
disp('       Trayectoria de Costo Minimo');
disp(' ')
disp('Los valores de entrada, correspondientes a los');
disp('Pesos/Costos, se guardan en una Matriz M(i,j) de ');
```



```
disp('n filas x n columnas. Cada Peso señala una conexión');
disp('desde el nodo I al nodo J. El Programa autogenera ')
disp('un valor infinito cuando no hay conexión entre ');
disp('nodos y además, asigna el valor Cero (0) como costo');
disp('por conexión de un nodo consigo mismo.')
disp(' ')
disp('Indique la posición de fila I. Luego teclee');
disp('la posición de columna J del valor a ingresar.');
disp('Después de ingresar un dato, Pulsar la tecla Enter.');
disp(' ');
letras = ['A';'B';'C';'D';'E';'F'; 'G';'H';'I';'J';'K'; 'L';
'M';'N';'O';'P';'Q';'R';'S';'T';'U';'V';'W';'X';'Y';'Z'];
n=input('¿Cuántos Vértices o Nodos tiene el Grafo? = ');
for i=1:n
  for j= 1:n
    M(i,j)= inf;
    if i==j
      M(i,j)=0;
    end
  end
end
Resp = 'S';
while Corregir == 'S'|| Corregir =='s'
while Resp =='S'|| Resp =='s'
  disp(' ')
  disp('Cordenada de Fila y Columna de Costo a Ingresar:')
  i = input('¿Qué Fila? ...: ');
  j = input('¿Qué Columna?.: ');
  M(i,j)=input('Ingrese el valor de costo: ');
  disp(' ')
  Resp = input('¿Desea Ingresar Otro Valor? S/N:','s');
end
disp(' ')
disp('  Verifique Valores Ingresados a la Matriz:');
disp(M);
Resp = 'S';
Corregir=input('Corregir algún Peso M(i,j)? S/N : ', 's');
end
```

```
NF = n;   Max = Inf;  NA = 1;
for i=1:n
  Costos(i)=Max;
  N(i)=i;
end
Costos(NA)=0;
Cuenta=1;   L=length(N);
while Cuenta < n
 R=L-1;
 for j=1:R
   if N(j)< NA
     VA=N(j);
     NB(j)=VA;
   else
     VA=N(j+1);
     NB(j)=VA;
   end
 end
 N=NB;
 L=length(N);
 for A=1:L
    i=N(A);
     if Costos(NA) + M(NA,i) < Costos(i)
       Costos(i)= Costos(NA) + M(NA,i);
       Aux(i)=NA;
     end
 end
 i=N(1);
 mini=Costos(i);
 for A=1:L
    i=N(A);
    if Costos(i)<=mini
      mini=Costos(i);
      NA=i;
    end
 end
 Cuenta=Cuenta+1;
end
```



```
Cuenta=1; NF2=NF;
while NF2~=1
 T(Cuenta)=NF2;
 VA=Aux(NF2); NF2=VA;
 Cuenta=Cuenta+1;
end
T(Cuenta)=1; Long=length(T);
for j=1:Long
 VA=T(Long+1-j); RutMin(j)=VA;
end
clc;
disp('-------------------------------------------------')
disp(' ')
disp('     ***  ALGORITMO DE DIJKSTRA    ***');
disp('      Ruta de la Trayectoria más Corta');
disp(' ')
disp('            Matriz de Entrada:');
disp(M);
fprintf('\n Respuestas:\n' )
disp(' ')
fprintf('Costo Minimo Origen a Destino=  %d \n',Costos(n))
fprintf('Nodo Final de la Trayectoria = %s \n',letras(NF))
disp(' ')
disp('Costos Minimos desde el Nodo Origen a otros Nodos')
disp(Costos)
disp(' ')
disp('Ruta Optima:(A=1,B=2,C=3, D=4, E=5, F=6, G=7,
...)');
disp(' ')
disp(RutMin);
fprintf(' %5c ',transpose(letras(RutMin)))
disp(' ')
Continuar = 'S';
disp('*********************************************
***');
disp(' ');
Seguir= input(' ¿Desea Analizar Otro Grafo? S/N: ', 's');
end
```

EJEMPLO 5

Dada la siguiente gráfica, aplicar el algoritmo de Dijkstra siguiendo las instrucciones en Matlab.

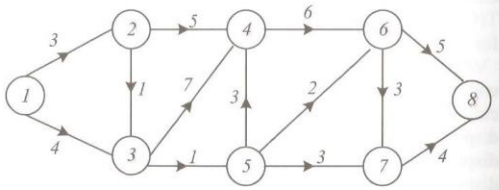


Figura 6.6 Gráfica para aplicar el ejemplo 5.

Solución:

Para introducir la información de la gráfica en el programa, se debe preparar la matriz de pesos. Sea $M(i,j)$ la matriz. Esta matriz contiene los pesos de las aristas que forman la gráfica. Observar que donde no existe arista se coloca el máximo peso, es decir infinito (∞). La matriz $M(i,j)$ para la gráfica del ejemplo queda expresada como:

$$M(i,j)=\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & - & 3 & 4 & - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & 1 & 5 & - & - & - & - \\ 3 & - & - & - & 7 & 1 & - & - & - \\ 4 & - & - & - & - & 6 & - & - & - \\ 5 & - & - & - & 3 & - & 2 & 3 & - \\ 6 & - & - & - & - & - & - & 3 & 5 \\ 7 & - & - & - & - & - & - & - & 4 \\ 8 & - & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

Teniendo almacenado el programa en Matlab con las instrucciones dadas anteriormente, el programa inicia mostrando una breve descripción del algoritmo y pide ingresar el número de vértices o nodos de la gráfica. La pantalla de inicio se muestra en la figura 6.7

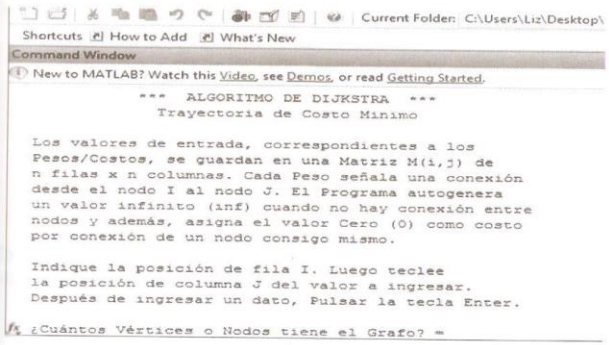


Figura 6.7 Ventana de dialogo de Matlab. Breve descripción del algoritmo de Dijkstra

En el ejemplo dado, el ingreso es de 8 nodos o vértices. Una vez introducido el número de vértices, pulsar enter y el programa pide el ingreso, uno por uno, de los pesos de las aristas; debiendo introducir el número de fila, el número de columna y el peso respectivo. El programa asignará peso infinito si no hay conexión entre dos vértices y asignará el valor cero en las aristas $<i, i>$. En este algoritmo es importante cuidar el orden de introducción ya que la arista $<i, j>$ no es la misma que la $<j, i>$. Figura 6.8

```
*** ALGORITMO DE DIJKSTRA ***
Trayectoria de Costo Minimo

Los valores de entrada, correspondientes a los
Pesos/Costos, se guardan en una Matriz M(i,j) de
n filas x n columnas. Cada Peso señala una conexión
desde el nodo I al nodo J. El Programa autogenera
un valor infinito (inf) cuando no hay conexión entre
nodos y además, asigna el valor Cero (0) como costo
por conexión de un nodo consigo mismo.

Indique la posición de fila I. Luego teclee
la posición de columna J del valor a ingresar.
Después de ingresar un dato, Pulsar la tecla Enter.

¿Cuántos Vértices o Nodos tiene el Grafo? = 8

Cordenada de Fila y Columna de Costo a Ingresar:
¿Qué Fila? ...: 1
¿Qué Columna?.: 2
fx Ingrese el valor de costo: 3
```

Figura 6.8 Ventana de dialogo de Matlab. Descripción del algoritmo Dijkstra e ingreso de las aristas con sus respectivos pesos.

Una vez culminado el ingreso de los datos de la gráfica, el programa muestra la matriz con los valores introducidos, esto con el fin de corregir algún error. Ver Figura 6.9.

```
Cordenada de Fila y Columna de Costo a Ingresar:
¿Qué Fila? ...: 7
¿Qué Columna?.: 8
Ingrese el valor de costo: 4

¿Desea Ingresar Otro Valor? S/N:n

  Verifique Valores Ingresados a la Matriz:
     0     3     4   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf
   Inf     0     1     5   Inf   Inf   Inf   Inf
   Inf   Inf     0     7     1   Inf   Inf   Inf
   Inf   Inf   Inf     0     6   Inf   Inf   Inf
   Inf   Inf   Inf     3     0     2     3   Inf
   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf     0     3     5
   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf     0     4
   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf     0

fx Corregir algún Peso M(i,j)? S/N :
Start  Waiting for input
```

Figura 6.9 Ventana de dialogo Matlab. Matriz de pesos introducidos.

Si no hay nada que corregir, al pulsar enter se obtendrá el cuadro de respuesta. Este cuadro muestra el peso mínimo de origen a destino. En este ejemplo se muestra el valor 12, el cual es el peso mínimo del camino que va de la fuente al pozo. Se muestra el nodo final de la trayectoria, en este caso *H* o nodo *8*, esto dependerá de cómo esta nombrada la gráfica original, si se nombran los vértices numéricamente o alfabéticamente. El programa muestra los dos estilos. El cuadro respuesta también ofrece los costos mínimos y la ruta óptima. En el ejemplo el camino de peso mínimo es: 1-3-5-6-8. Ver Figura 6.10.

```
Respuestas:

Costo Minimo desde Origen a Destino=  12
Nodo Final de la Trayectoria = H

Costos Minimos desde el Nodo Origen a otros Nodos
    0     3     4     8     5     7     8    12


Ruta Optima:(A=1,B=2,C=3, D=4, E=5, F=6, G=7, ...)

    1     3     5     6     8

    A     C     E     F     H
-------------------------------------------------
fx      ¿Desea Analizar Otro Grafo? S/N:
Start  Waiting for input
```

Figura 6.10 Ventana de dialogo de Matlab. Cuadro de respuesta. Ruta óptima y el peso del camino mínimo.

6.10 ALGORITMO PARA ENCONTRAR LA RUTA CRÍTICA O EL CAMINO DE PESO MÁXIMO: ALGORITMO DE TIEMPOS DE FLOTACIÓN.

En las gráficas dirigidas pesadas (graficas con valores en sus aristas), se puede estar interesados en encontrar la ruta crítica o camino de pesos máximo de la fuente al pozo. Una ruta crítica define una cadena de nodos o vértices las cuales conectan eventos de inicio y final del grafo. El método de cálculo de la ruta crítica se denomina tiempos de flotación.

En cada vértice se coloca una etiqueta que lleva los valores de *fpi* y *fut* de la siguiente manera:

$$\overline{fut|fpi}$$

La etiqueta *"fpi"* es el peso máximo del camino que hay de la fuente al vértice chequeado; y *"fut"* es la diferencia entre el peso máximo del camino que hay de la fuente al pozo y el peso máximo que hay del vértice chequeado al pozo.

Pasos del algoritmo de Tiempos de Flotación.

El algoritmo se ejecuta en dos fases:

Fase hacia Adelante. En esta fase se introduce los valores de la etiqueta "fpi" para cada vértice hasta llegar al vértice pozo.

Paso 1: Comenzar etiquetando el vértice fuente $fpi = 0$.

Paso 2: Ir a cada vértice y chequear los caminos de peso máximo desde la fuente al vértice chequeado y etiquetar ese vértice con el máximo hasta llegar al vértice pozo.

Fase hacia Atrás En esta fase se introducen los valores del "fut" hasta llegar al vértice fuente.

Paso 3: Chequear el vértice pozo y colocar *fut* igual a la diferencia que hay entre el *fpi* del vértice pozo y el peso máximo que hay desde el vértice chequeado al pozo que es cero.

Paso 4: Etiquetar cada vértice hacia atrás, el *fut* será la diferencia entre el peso máximo del camino de la fuente al pozo y el peso máximo que hay de cada vértice al pozo.

Paso 5: Una vez completadas las etiquetas de cada vértice, calcular la holgura para cada arista con la siguiente fórmula:

$$F(u,v) = fut(v) - fpi(u) - w(u,v)$$

Donde $w(u,v)$ representa el peso de la arista $< u, v >$

Cuando $F(u,v) = 0$, esto representa que la arista $< u, v >$ forma parte de la ruta crítica. A estas aristas se les denomina aristas críticas.

EJEMPLO 6

Dada la siguiente digrafica, encuentre la Ruta crítica desde la fuente hasta el pozo.

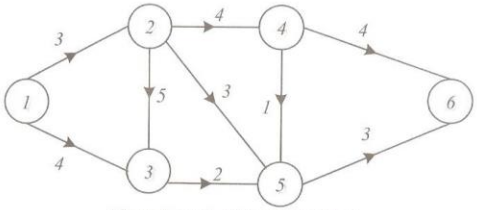


Figura 6.11 Digráfica del ejemplo 6.

Solución:

Se comienza en el vértice 1, que en este caso es el vértice fuente, etiquetar con $\overline{|0}$, y así seguir con cada vértice, por ejemplo la etiqueta en el vértice 2 es $\overline{|3}$ porque el camino de peso máximo del vértice 1 al vértice 2 es 3. Observar que se está asignando el *fpi*. Tomar la etiqueta del vértice 5, para asignar el *fpi* en el vértice 5, examinar los caminos posibles del vértice 1 al vértice 5 y escoger el camino de peso máximo. En este caso hay tres caminos: el camino 1245 cuyo peso es 8, el camino 1235 cuyo peso es 10 y el camino 135 cuyo peso es 6. El camino a escoger es el de peso máximo "10", etiquetar como $\overline{|10}$. Así etiquetar todos los vértices, hasta llegar al pozo. Observar que el *fpi* del pozo es el peso de camino máximo. Este proceso se refiere como *"hacia adelante"*.

Ahora proceder hacia atrás para asignar el valor del *fut* en cada vértice. Comenzar por el vértice pozo, y asignar el *fut* igual al *fpi* del vértice pozo. Esto es $\overline{13|13}$, ver el vértice 4; su etiqueta es $\overline{9|7}$, ya que 7 es el peso máximo de un camino entre 1 y 4, y 9 es la diferencia entre 13 y el peso máximo del camino que hay desde 4 hasta 6 (pozo). Observar el vértice 2, hay cuatro caminos desde 2 hasta 6 (pozo), estos caminos son: 246 cuyo peso es 8, 2356 cuyo peso es 10, 256 cuyo peso es 6 y 2456 cuyo peso es 8. Ahora escoger el peso máximo, en este caso "10", por lo tanto la diferencia da 3, y la etiqueta queda como $\overline{3|3}$. Así retroceder hasta el vértice fuente.

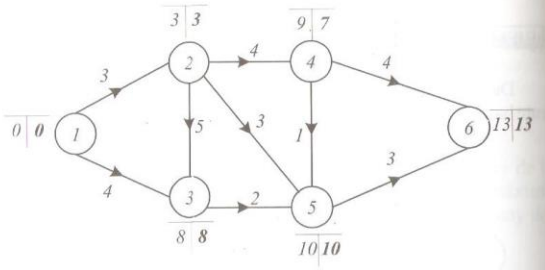


Figura 6.12 Digráfica con los resultados de la aplicación de la ruta crítica.

Luego calcular la Holgura en cada vértice, como sigue:

$$F(v_1,v_2)=fut(v_2)-fpi(v_1)-w(v_1,v_2)$$

	fut	*fpi*	*w*	*F*	
(1,2)	3	0	3	0	✓
(1,3)	8	0	4	4	
(2,3)	8	3	5	0	✓
(2,4)	9	3	4	2	
(2,5)	10	3	3	4	
(3,5)	10	8	2	0	✓
(4,5)	10	7	1	2	
(4,6)	13	7	4	2	
(5,6)	13	10	3	0	✓

Así calculando la flotación en cada vértice, se encuentran las aristas críticas (marcadas)

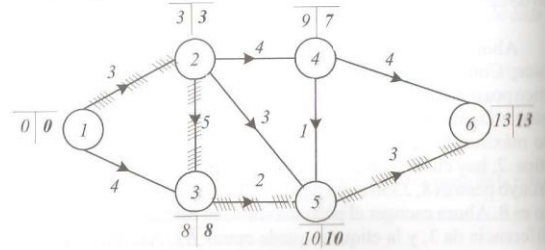


Figura 6.13 Resultado final ejemplo 6.

Camino pesa ⇒ *13*
Camino crítico ⇒ *1,2,5,6*
Longitud ⇒ *4*

EJEMPLO 7

Dada la siguiente digráfica, encuentre la Ruta crítica desde la fuente hasta el pozo.

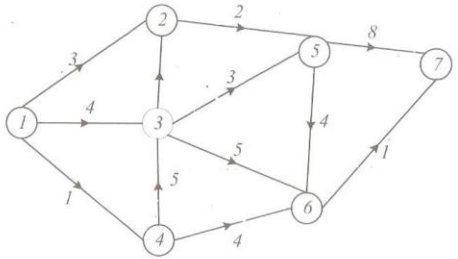


Figura 6.14 Digráfica del ejemplo 7.

Solución:

Fase "hacia adelante", comenzar con el vértice 1 y etiquetar con $\overline{|0}$, luego asignar el *fpi* en cada vértice. Recordar que es el peso máximo del camino que hay entre el vértice 1 (vértice fuente) y el vértice chequeado. Por ejemplo el vértice 2 quedará con etiqueta $\overline{|9}$ porque 9 es peso máximo del camino 1 a 2. El vértice 3 queda etiquetado como $\overline{|6}$ y el vértice 4 con $\overline{|1}$. Ver ahora el vértice 5, su etiqueta es $\overline{|11}$, el vértice 6 su etiqueta $\overline{|15}$, y chequear el vértice 7 cuya etiqueta será $\overline{|19}$. Ahora hacer fase hacia atrás, asignar *fut*, esto es, comenzar en el vértice 7, su etiqueta será $\overline{19|19}$, chequear el vértice 6 su etiqueta será $\overline{18|15}$, chequear el vértice 5 su etiqueta será $\overline{11|11}$, el vértice 4 queda con $\overline{1|1}$, el vértice 3 con $\overline{6|6}$, el vértice 2 con $\overline{9|9}$ y el vértice 1 con $\overline{0|0}$.

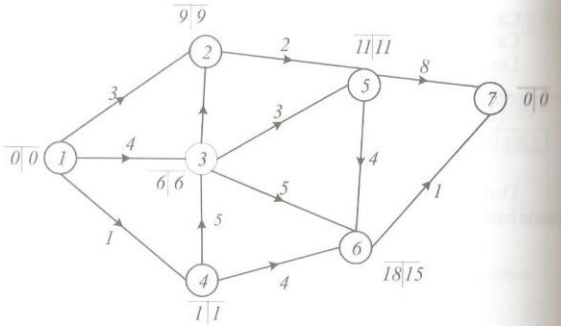


Figura 6.15 Aplicación ruta crítica al ejemplo 7.

Después de tener todos los vértices etiquetados, calcular la holgura en cada vértice.

$$F(v_1, v_2) = fut(v_2) - fpi(v_1) - w(v_1, v_2)$$

	fut	*fpi*	*w*	*H*	
(1,2)	9	0	3	6	
(1,3)	6	0	4	2	
(1,4)	1	0	1	0	✓
(2,5)	11	9	2	0	✓
(3,2)	9	6	3	0	✓
(3,5)	11	6	3	2	
(3,6)	18	6	5	7	
(4,3)	6	1	5	0	✓
(4,6)	18	1	4	13	
(5,6)	18	11	4	3	
(5,7)	19	11	8	0	✓
(6,7)	19	15	1	3	

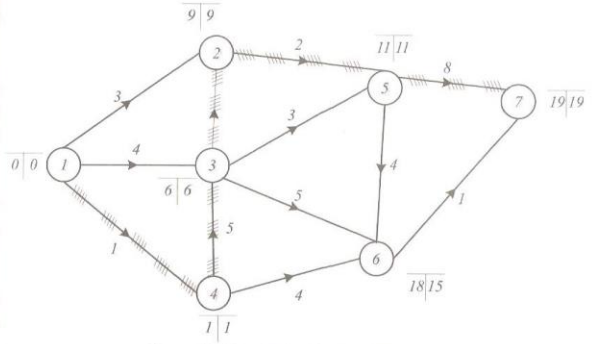


Figura 6.16 Resultados finales ejemplo 7.

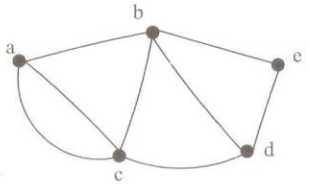
Peso máximo $\Rightarrow$ *19*
Camino crítico $\Rightarrow$ *1,4,3,2,5,7*
Longitud $\Rightarrow$ *5*

6.11 GRAFOS NO DIRIGIDOS

Se estudiarán ahora grafos cuyas aristas no tienen una dirección asociada a ellas. Estas gráficas no están asociadas a pares ordenados de vértices como las gráficas dirigidas, son gráficas que tienen un conjunto no ordenado de vértices. Siguiendo la notación de las gráficas dirigidas se define una gráfica G no dirigida que consiste en dos conjuntos: un conjunto de vértices $V(G)$ y un conjunto $A(G)$ de aristas, junto con una función γ de $A(G)$ al conjunto $\{(u,v) \ / \ u,v \in V(G)\}$ de todos los subconjuntos de $V(G)$ con uno o dos elementos. Para una arista e de $A(G)$, los elementos de $\gamma(e)$ son los vértices de e o los extremos de e; se dice que e une sus extremos. Un **lazo o bucle** es una arista con un solo extremo. Dos aristas distintas e y f con $\gamma(e) = \gamma(f)$ se llaman aristas paralelas o múltiples.

Si una gráfica no tiene aristas paralelas se pueden identificar las aristas nombrando sus extremos, en cuyo caso se escribirá $e(u,v)$ en lugar

de $\gamma(e)=(u,v)$. También se puede escribir $e\ (u)$ si e es un lazo o bucle en lugar de $e\ (u,u)$.



6.12 CAMINOS SIMPLES, CERRADOS Y ACICLICOS

1) Un camino de longitud n, desde el vértice u hasta el vértice v, es una sucesión de aristas $(e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n)$ junto con una sucesión de vértices $(v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{n+1})$, con $\gamma(e_i)=(v_i,v_{i+1})$, para $i=1,\ldots,n$ y $v_1=u$, $v_{n+1}=v$.

2) Si $e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n$ es un camino de u a v, con sucesión de vértices $v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{n+1}$, entonces $e_n,e_{n-1},e_{n-2},\ldots,e_1$, con sucesión de vértices $v_{n+1},v_n,\ldots,v_1$, es un camino de v a u. Si $u=v$, se dice que el camino es un camino cerrado.

3) Un camino es simple si todas sus aristas son diferentes. Así un camino simple no puede utilizar una misma arista dos veces, pero puede pasar por un mismo vértice más de una vez.

4) Un camino es simple cerrado si comienza en un vértice y termina en el mismo vértice.

5) Una gráfica es acíclica si no tiene ciclos.

6) Un camino es acíclico si la subgráfica que consiste en los vértices y aristas del camino es acíclica.

7) Un Ciclo es un camino cerrado que no repite vértices a excepción del primero y del último.

6.13 CARACTERÍSTICAS DE UN VÉRTICE

Recibe el nombre de valencia de un vértice v, indicado por $V(v)$, de una gráfica G, el total de aristas incidentes con ese vértice. Un vértice es de grado par o impar según sea par o impar su valencia. Es de valencia cero cuando se trata de un vértice aislado.

Un lazo o bucle puede considerarse formado por dos aristas incidentes, por ello la valencia de un lazo es dos. Si un vértice tiene valencia uno se le denomina vértice terminal o colgante.

En una gráfica G, se verifica que la suma de las valencias de todos los vértices es el doble del número de aristas de la gráfica.

6.14 REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LOS GRAFOS

Existen dos tipos de matrices que son muy útiles para la representación de grafos: la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia.

1). Sea G un grafo con m vértices y n aristas. La matriz de adyacencia $A=(a_{ij})$ de G es una matriz $m\times m$ definida como:

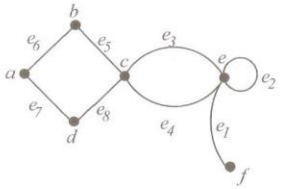
$$a_{ij}=\begin{cases} k & \textit{número de aristas conectadas entre los vértices } i \textit{ y } j \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Sea G un grafo de m vértices y n aristas. La matriz de incidencia $I=m_{ij}$ de G es una matriz booleana $m\times n$ definida por:

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & \textit{si el vértice } v_i \textit{ pertenece a la arista } e_j \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

EJEMPLO 8

Dado el siguiente gráfico, encontrar las matrices de adyacencia e incidencia correspondientes:



Solución:

Matriz de adyacencia

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de incidencia

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

EJEMPLO 9

Dadas las matrices de adyacencia e incidencia:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad I = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

El grafo tendrá 4 vértices. El vértice 1 tiene una arista que va de v_1 a v_1; tiene 3 aristas de v_1 a v_2; y 2 aristas de v_1 a v_3.

Notar que la matriz de incidencia representa las aristas que salen o entran a cada vértice. Observar que el v_1 tiene una incidencia en $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$; por ello tiene un uno (1) en las posiciones de esas aristas.

6.15 GRAFOS EULERIANOS

Uno de los problemas más viejos, relacionados con la teoría de las gráficas, fue el problema de los puentes de Königsberg, también llamado más específicamente problema de los siete puentes de Königsberg, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya solución dió origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a Königsberg, el antiguo nombre que recibía la ciudad rusa de Kaliningrado, que durante el siglo XVIII formaba parte de Prusia Oriental, como uno de los ducados del Reino de Prusia. Esta ciudad es atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados Puente del herrero, Puente conector, Puente verde, Puente del mercado, Puente de madera, Puente alto y Puente de la miel.

El problema fue formulado en el siglo XVIII y planteaba lo siguiente:

Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregolya dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

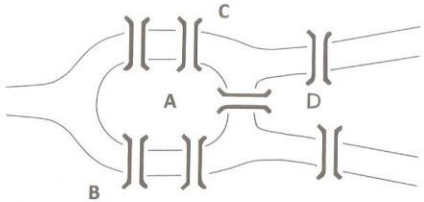


Figura 6.17 Representación de la Isla Königsberg

La respuesta es negativa, es decir, no existe una ruta con estas características. El problema puede resolverse aplicando un método de fuerza bruta, lo que implica probar todos los posibles recorridos existentes. Sin embargo, Euler en 1736 en su publicación *«Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis»* demostró una solución

generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en que ciertos accesos estén restringidos a ciertas conexiones, tales como los puentes de Königsberg.

Para dicha demostración, Euler recurre a una abstracción del mapa, enfocándose exclusivamente en las regiones terrestres y las conexiones entre ellas. Cada puente lo representó mediante una línea que unía a dos puntos, cada uno de los cuales representaba una región diferente. Así el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos, transitar por todas las líneas una única vez, y regresar al mismo punto de partida.

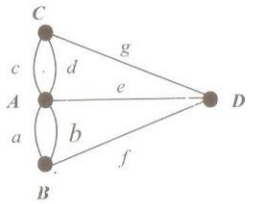


Figura 6.18 Grafo de la Isla Königsberg

Demostración

Euler determinó, en el contexto del problema, que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. En efecto, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. Sin embargo, el requisito adicional del problema dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir más de un único punto conectado con un número impar de líneas.

En particular, como en este diagrama los cuatro puntos poseen un número impar de líneas incidentes (tres de ellos inciden en tres líneas, y el restante incide en cinco), entonces se concluye que es imposible definir un camino con las características buscadas.

Esta abstracción del problema ideada por Euler dió pie a la primera noción de grafo, En la teoría de grafos, existe un concepto llamado ***circuito euleriano***, llamado así justamente en honor a Leonhard Euler, que representa cualquier camino dentro de un grafo particular, capaz de recorrer todas las aristas una única vez, regresando finalmente al mismo vértice original.

La solución dada por Euler al problema de los puentes de Kónisgberg dio origen al teorema de Euler y al algoritmo de Fleury.

6.16 TEOREMA DE EULER

Si todos los vértices de una gráfica G conexa tienen valencia par, entonces la gráfica tiene un circuito euleriano.

Corolario:

Una gráfica conexa finita que tiene exactamente dos vértices de valencia impar tiene un camino Euleriano.

Demostración:

La demostración del teorema de Euler se hace con la aplicación del algoritmo de Fleury. Este algoritmo encuentra caminos o circuitos Eulerianos. En cada iteración del algoritmo se forman dos conjuntos; *Vs* conjunto de vértices y *Es* conjunto de aristas. Estos dos conjuntos representan el orden en que la gráfica debe ser recorrida para poder formar el camino o circuito Euleriano.

Algoritmo de Fleury

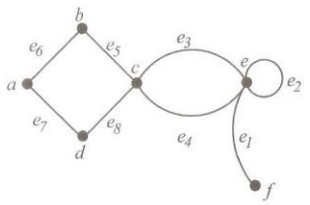
- **Paso1:** Sea G la gráfica conexa y finita con vértices $v_1, v_2, v_3,..., v_n$, que define el conjunto $V(G)$; y $e_1, e_2, e_3,..., e_n$, las aristas que definen el conjunto $A(G)$ de G.
- **Paso 2:** Calcular la valencia de cada vértice del conjunto $V(G)$. Si hay 2 vértices de valencia impar o todos los vértices de valencia par. Ir al paso 3. En caso contrario finalizar. No se puede aplicar el algoritmo.
- **Paso 3:** Empezar en cualquier vértice v de valencia impar si lo hay. En otro caso empezar en cualquier vértice v. Inicie $Vs = v$ y $Es = \phi$.
- **Paso 4:** Si no hay ninguna arista que se quede en v. Finalizar.

  Si hay exactamente una arista en v, digamos e_i, de v a w, entonces quitar e_i de $A(G)$ y v de $V(G)$ e ir al paso 5.

  Si hay más de una arista en v, elegir una de ellas, por ejemplo e_i de v a w, de tal modo que su eliminación no desconecte la gráfica; quitar e_i de $A(G)$ e ir al paso 5.
- **Paso 5:** Añadir w al final de Vs, añadir e_i al final de Es, reemplazar v por w y regresar al paso 4.

EJEMPLO 10

Dado el siguiente grafo, encontrar el camino o circuito euleriano si los hay.



Solución:

Se calculan las valencias de cada vértice como sigue:

$V(a) = 2$

$V(b) = 2$

$$V(c) = 4$$
$$V(d) = 2$$
$$\left.\begin{array}{l} V(e) = 5 \\ V(f) = 1 \end{array}\right\} 2 \text{ impar}$$

Como hay dos vértices de valencia impar, se puede construir un camino euleriano. Para conseguir el camino, se aplicará el algoritmo de Fleury:

Comenzar en un vértice de valencia impar. En este caso, comenzar en e o f. Elegir f. Sea:

$Es = \phi$
$Vs = \{f\}$

Chequear aristas de f. Como hay una sola arista, escoger e_1 y añadir a Es ; y el vértice final de e_1; es decir e, añadirlo a Vs.

$f = e_1$
$Es = \{e_1\}$
$Vs = \{fe\}$

Ahora chequear aristas de e.

Como hay tres aristas en e, escoger cualquiera de ellas, de tal forma que su eliminación no desconecte la gráfica. En este caso se puede elegir cualquiera, por ejemplo e_2, entonces añadir e_2 al conjunto Es y el vértice final de e_2, e añadirlo a Vs.

$e = e_2, e_3, e_4$
$Es = \{e_1, e_2\}$
$Vs = \{fee\}$

Chequear aristas de e. Seguir el mismo procedimiento; tomar por ejemplo e_3, añadirla a Es y el vértice final c añadirlo a Vs.

$e = e_3, e_4$
$Es = \{e_1, e_2, e_3\}$
$Vs = \{feec\}$

Chequear aristas de c. Escoger e_8

$c = e_4, e_5, e_8$
$Es = \{e_1, e_2, e_3, e_8\}$
$Vs = \{feecd\}$

Chequear aristas de d.

$d = e_7$
$Es = \{e_1 . e_2 . e_3 . e_8 . e_7\}$
$Vs = \{feecda\}$

Chequear aristas de a.

$a = e_6$
$Es = \{e_1 . e_2 . e_3 . e_8 . e_7 . e_6\}$
$Vs = \{feecdab\}$

Chequear aristas de b.

$b = e_5$
$Es = \{e_1 . e_2 . e_3 . e_8 . e_7 . e_6 . e_5\}$
$Vs = \{feecdabc\}$

Chequear aristas de c.

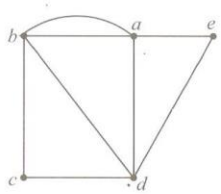
$c = e_4$
$Es = \{e_1 . e_2 . e_3 . e_8 . e_7 . e_6 . e_5 . e_4\}$
$Vs = \{feecdabce\}$

Fin

El camino euleriano es: $Es = \{e_1 . e_2 . e_3 . e_8 . e_7 . e_6 . e_5 . e_4\}$
$Vs = \{feecdabce\}$

EJEMPLO 11

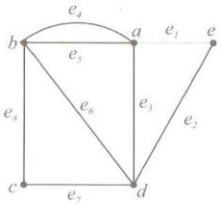
Dado el siguiente grafo, encontrar el camino o circuito euleriano, si lo hay.



Solución:

Calcular las valencias de cada vértice y nombrar las aristas de la gráfica, como sigue:

$V(a) = 4$
$V(b) = 4$
$V(c) = 2$
$V(d) = 4$
$V(e) = 2$



Como todos los vértices tienen valencia par, se puede construir un circuito euleriano a través del algoritmo de fleury:

Comenzar en c.
$Es = \phi$
$Vs = \{c\}$

Chequear aristas de c.
$c = e_7, e_8$
$Es = \{e_7\}$
$Vs = \{cd\}$

Chequear aristas de d.

$e = e_2 . e_3 . e_6$
$Es = \{e_7 . e_3\}$
$Vs = \{cda\}$

Chequear aristas de a.

$a = e_1 . e_4 . e_5$
$Es = \{e_7 . e_3 . e_1\}$
$Vs = \{cdae\}$

Chequear aristas de e.

$e = e_2$
$Es = \{e_7, e_3, e_1, e_2\}$
$Vs = \{cdaed\}$

Chequear aristas de d.

$e = e_6$
$Es = \{e_7, e_3, e_1, e_2, e_6\}$
$Vs = \{cdaedb\}$

Chequear aristas de b.

$b = e_8, e_4, e_5$
$Es = \{e_7, e_3, e_1, e_2, e_6, e_4\}$
$Vs = \{cdaedba\}$

Chequear aristas de a.

$a = e_5$
$Es = \{e_7, e_3, e_1, e_2, e_6, e_4, e_5\}$
$Vs = \{cdaedbab\}$

Chequear aristas de b.

$b = e_8$
$Es = \{e_7 . e_3 . e_1 . e_2 . e_6 . e_4 . e_5 . e_8\}$
$Vs = \{cdaedbabc\}$

Fin

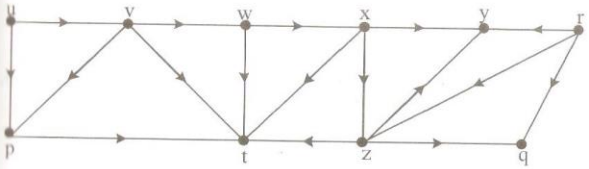
El circuito euleriano es: $Es = \{e_7 . e_3 . e_1 . e_2 . e_6 . e_4 . e_5 . e_8\}$
$Vs = \{cdaedbabc\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS CAPÍTULO 6

1) Dado el siguiente grafo:

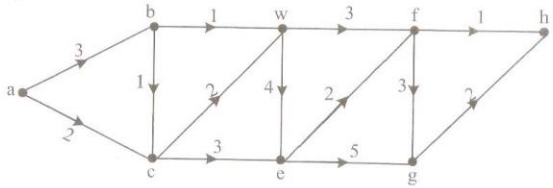
a) Encontrar los pozos aplicando algoritmo de SINK.

b) Encontrar el conjunto de alcanzables para cada vértice.

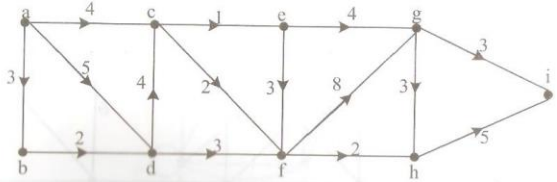


2) Dados los siguientes grafos, encontrar la ruta crítica aplicando tiempos de flotación en cada uno de ellos.

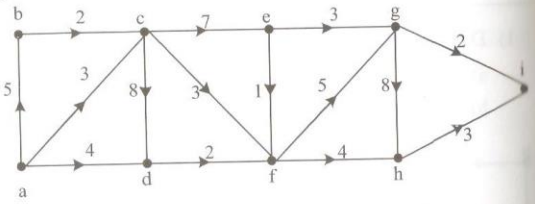
a)



b)

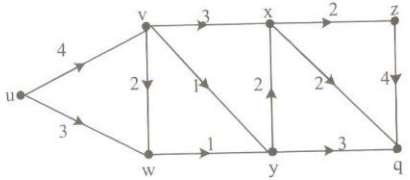


c)

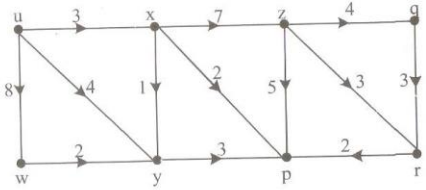


3) En los siguientes grafos encontrar el camino mínimo, aplicando el algoritmo de Dijkstra.

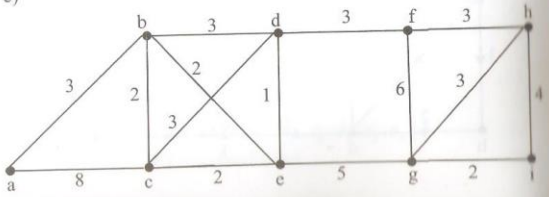
a)



b)

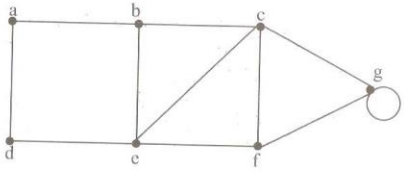


c)

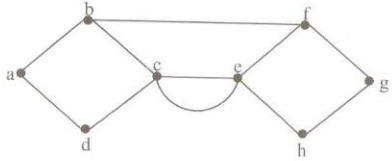


4) Dados los siguientes grafos, verificar mediante la aplicación del algoritmo de Fleury si existe camino o circuito euleriano:

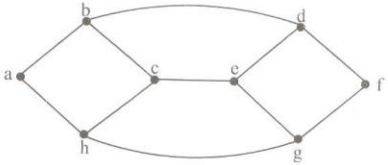
a)



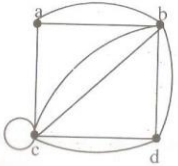
b)



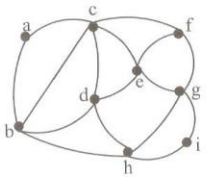
c)



d)



5) Dado el siguiente grafo:

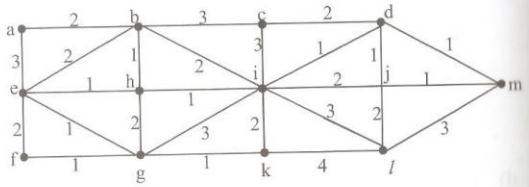


Encontrar:

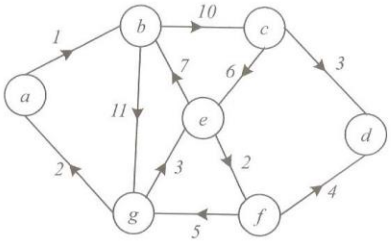
a) Un camino de longitud 4.
b) Un ciclo.
c) Un camino cerrado de longitud 10.
d) Un camino euleriano si lo hay.

6) Determinar la ruta más corta en el siguiente grafo, usando el algoritmo de Dijkstra.

a) Para ir del vértice g hasta m.
b) Para ir del vértice a hasta m.



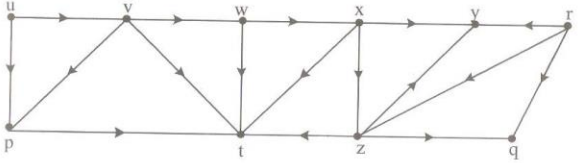
7) Dado el siguiente grafo:



a) Determinar todos los ciclos.
b) ¿Cuál es el ciclo de menor peso?

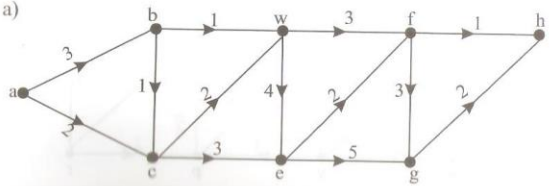
8) Dado el siguiente grafo:

a) Encontrar los pozos aplicando algoritmo de SINK.
b) Encontrar el conjunto de alcanzables para cada vértice.

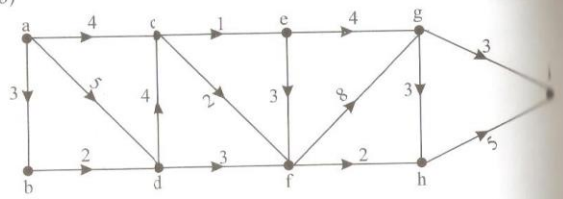


9) Dados los siguientes grafos, encontrar la ruta crítica aplicando tiempos de flotación en cada uno de ellos.

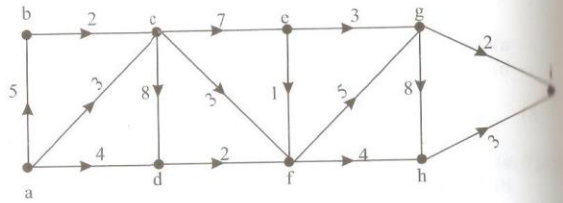
a)



b)

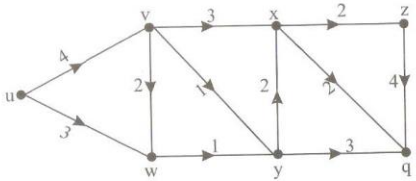


c)

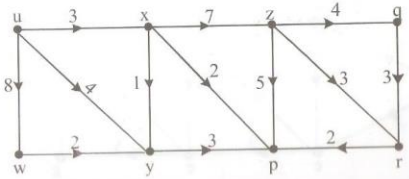


10) En los siguientes grafos encontrar el camino mínimo. Aplicar el algoritmo de Dijkstra.

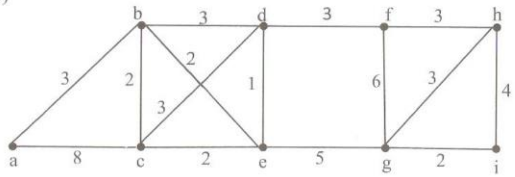
a)



b)

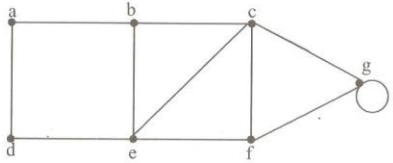


c)

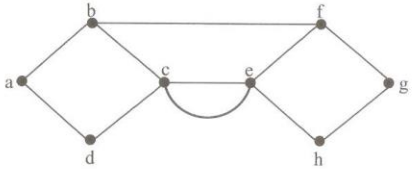


11) Dados los siguientes grafos, encontrar el camino o circuito euleriano. Si es posible, aplicar algoritmo de Fleury.

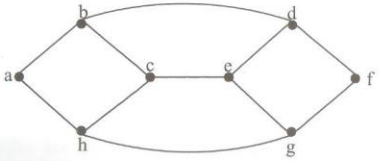
a)



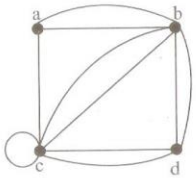
b)



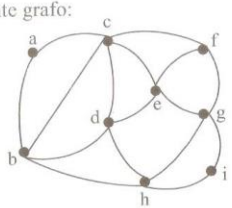
c)



d)



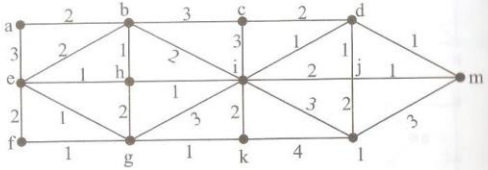
12) Dado el siguiente grafo:



Encontrar:

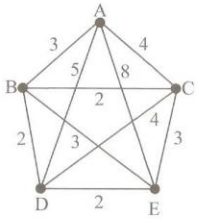
a) Un camino de longitud 4.
b) Un ciclo.
c) Un camino cerrado de longitud 10.
d) Un camino euleriano si lo hay.

13) Determinar la ruta más corta en el siguiente grafo, usando el algoritmo de Dijkstra.



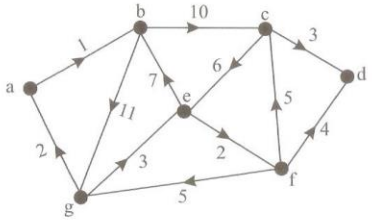
a) Para ir del vértice g hasta m.
b) Para ir del vértice a hasta m.

14) Considerar el siguiente grafo, en el que se representa la distancia en kilómetros entre las cinco entradas de una urbanización privada y los caminos existentes dentro de la misma.



a) Partiendo de la entrada A ¿es posible recorrer todas las entradas una sola vez y regresar al punto de partida? ¿y desde D?.
b) Encontrar un recorrido de peso mínimo que liste todas las entradas y regrese al punto de partida.

15) Dado el siguiente grafo:



a) Determinar todos los ciclos.
b) ¿Cuál es el ciclo de menor peso?

16) En el ejercicio 11, encontrar las matrices de incidencia y adyacencia para cada una de las gráficas dadas.

17) Dadas las matrices de incidencia y adyacencia, dibujar la gráfica respectiva.

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad I = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

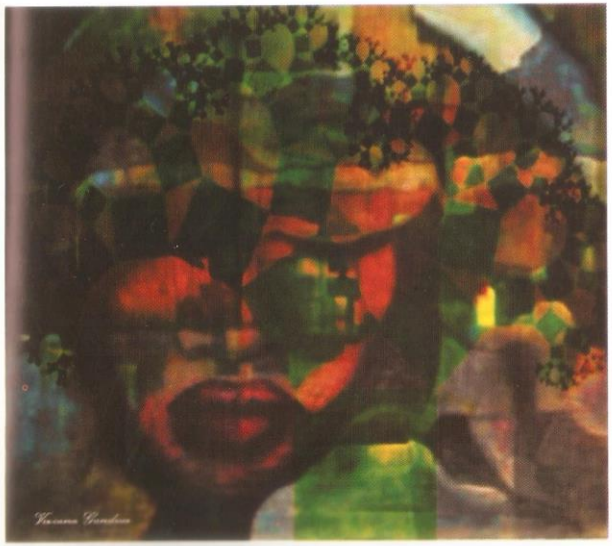
b)

$$A = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad I = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c)

$$A = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad I = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

CAPÍTULO 7
Árboles



7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará una clase particular de grafos llamados árboles. Este tipo de grafos se utiliza para representar estructuras jerárquicas y para representar etiquetas o direcciones de una manera organizada. Se estudiarán dos tipos de árboles: los no dirigidos pesados y los dirigidos que se denominan arboles enraizados.

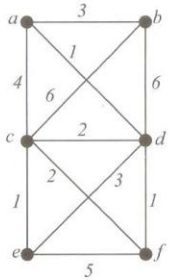
7.2 ÁRBOLES

Un árbol es una gráfica acíclica conexa, que no tiene lazos ni aristas paralelas.

Dada una gráfica G de ella se pueden obtener muchas gráficas que cumplen la definición de árbol. Estas se obtienen eliminando las aristas que forman ciclos. Con este procedimiento se pueden encontrar distintos árboles de una misma gráfica.

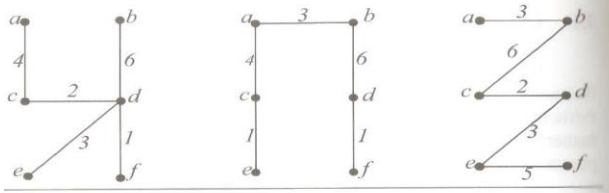
EJEMPLO 1

Dada la siguiente gráfica, obtener árboles.



Solución:

Si se eliminan las aristas que forman ciclos, se obtienen algunos grafos que son árboles



7.3 ÁRBOL GENERADOR

Sea G una gráfica conexa. Una subgráfica T de G se llama árbol generador, si T es una árbol y si T incluye todos los vértices de G. Es decir, T se obtiene quitando algunas aristas de G que produzcan ciclos, y manteniendo todos los vértices de ella.

Los árboles dibujados en el ejemplo anterior son árboles generadores de G. Observar que ellos tienen pesos diferentes; recordar que el peso de una gráfica se calcula sumando los pesos de las aristas que forman la gráfica.

Ahora será de interés encontrar para una gráfica G, árboles generadores de peso mínimo. Para ello se mostrarán dos algoritmos: el algoritmo de Kruskal y el algoritmo de Prim.

7.4 ALGORITMO DE KRUSKAL

JOSEPH BERNARD KRUSKAL

Nació en 1928 en la ciudad de New York, estudió en la Universidad de Chicago y obtuvo doctorado en Princeton en 1954.

Fue profesor de matemáticas en la Universidad de Princeton, Universidad de Wisconsin y en la Universidad de Michigan. Su aporte a la teoría de árboles fue su trabajo en árboles generadores de peso mínimo. Kruskal diseñó un algoritmo para encontrar árboles generadores de peso mínimo.

La sencillez del algoritmo le hizo dudar de la publicación, sin embargo, animado por sus compañeros del doctorado, publicó su artículo de dos páginas y media. La aplicación más importante de este algoritmo es el diseño de redes telefónicas.

El algoritmo de Kruskal, encuentra árboles generadores de peso mínimo en una gráfica conexa y finita. Es un algoritmo sencillo y muy fácil de utilizar. Para aplicar el algoritmo de Kruskal solo se requiere que las aristas estén ordenadas de menor a mayor peso. El algoritmo procede de una en una por las aristas de G, empezando con los pesos más pequeños y eligiendo aquellas que no introduzcan ciclos. El algoritmo calcula el conjunto E, el cual está formado por las aristas que finalmente formaran el árbol. En cada iteración entrará una arista al conjunto E. Cuando el algoritmo se detiene, el conjunto E debe ser el conjunto de aristas del árbol generador de peso mínimo de G. La notación $E \cup \{e_i\}$ en los pasos del algoritmo representa un subgráfica cuyo conjunto de aristas es $E \cup \{e_i\}$ y el conjunto de vértices es $V(G)$. El siguiente cuadro resume los pasos para el algoritmo de Kruskal.

- **Paso 1:** Sea G una gráfica conexa, finita y de pesos no negativos con vértices $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ que definen el conjunto $V(G)$; y $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ las aristas que definen el conjunto $A(G)$ de G. Ordenar de menor a mayor peso las aristas $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ de la gráfica.
- **Paso 2:** Iniciar el conjunto $E = \phi$.
- **Paso 3:** Mientras no se haya chequeado todas las aristas de la gráfica, elegir la arista de menor peso posible, por ejemplo e_1. Ir al paso 4.

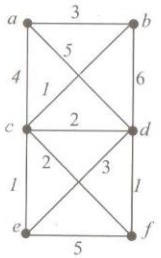
  Si ya se chequearon todas las aristas de la gráfica ir al paso 5.
- **Paso 4:** Formar el conjunto $E = E \cup \{e_i\}$

  Si $E \cup \{e_j\}$ no forma ciclos, reemplazar E por $E \cup \{e_j\}$ e ir al paso 3.

  Si $E \cup \{e_i\}$ forma ciclos, no reemplazar aristas y repetir el paso 3.
- **Paso 5:** Dibujar el árbol generador de peso mínimo con las aristas que estén en el conjunto E. Finalizar.

EJEMPLO 2

Dada la siguiente gráfica, encontrar el árbol generador de peso mínimo, aplicando el algoritmo de Kruskal.



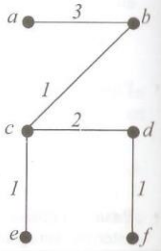
Solución:

Ordenar las aristas de menor a mayor peso. El orden no es importante, recordar que el árbol generador de peso mínimo no es único. Luego introducir aristas de tal forma que su inclusión no produzca ciclos. El árbol debe contener todos los vértices de la gráfica.

Ordenar de menor a mayor peso las aristas de la gráfica

$ce=1$
$df=1$
$cb=1$
$cd=2$
$cf=2$
$ed=3$
$ab=3$
$ac=4$
$ad=5$
$ef=5$
$bd=6$

Árbol generador de peso mínimo



$w(T) = 8$

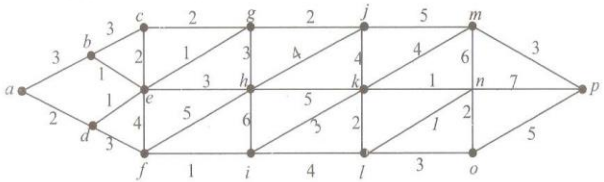
Procedimiento:

Comenzar introduciendo por orden las aristas. Seleccionar la arista ce de peso 1. Luego la siguiente menor, en este caso df; luego cb, e

ir chequeando que la introducción de ellas a la gráfica no forme ciclos. Así sucesivamente. Observar que entran las aristas de peso uno. Luego al chequear las de peso 2; se ve que la arista cf no puede ser introducida ya que forma un ciclo. Seguir chequeando las de peso 3. La arista ed forma ciclo. Entra ab y de ahí en adelante no se pueden introducir más aristas ya que formarían ciclos. El árbol dibujado es un árbol generador de peso mínimo. La forma de ordenar las aristas de menor a mayor peso es aleatoria, así que la subgráfica que forma el árbol generador de peso mínimo no es única.

EJEMPLO 3

Dada la siguiente gráfica, encontrar el árbol generador de peso mínimo, aplicando el algoritmo de Kruskal



Ordenar las aristas de menor a mayor peso

$be=1$	$ln=1$	$ce=2$	$ab=3$	$ik=3$	$ef=4$	$pl=4$	$op=5$
$de=1$	$kn=1$	$kl=2$	$df=3$	$mp=3$	$hj=4$	$fh=5$	$mn=6$
$eg=1$	$ad=2$	$no=2$	$bc=3$	$lo=3$	$kj=4$	$hk=5$	$hi=6$
$fi=1$	$cg=2$	$gj=2$	$eh=3$	$gh=3$	$km=4$	$jm=5$	$np=7$

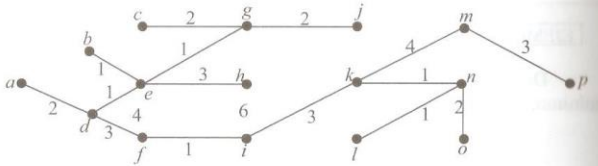
Comenzar con $E=\phi$

Tomar la primera arista de menor peso be. Así $E=\{be\}$

Tomar la siguiente de y chequear $E=\{be,de\}$. Si no forma ciclos, esa arista forma parte del árbol; así seguir hasta chequear todas las aristas.

$be=1$ ✓	$ln=1$ ✓	$ce=2\times$	$ab=3\times$	$ik=3$ ✓	$ef=4\times$	$pl=4\times$	$op=5\times$
$de=1$ ✓	$kn=1$ ✓	$kl=2\times$	$df=3$ ✓	$mp=3$ ✓	$hj=4\times$	$fh=5\times$	$mn=6\times$
$eg=1$ ✓	$ad=2$ ✓	$no=2$ ✓	$bc=3\times$	$lo=3\times$	$kj=4\times$	$hk=5\times$	$hi=6\times$
$fi=1$ ✓	$cg=2$ ✓	$gj=2$ ✓	$eh=3$ ✓	$gh=3\times$	$km=4$ ✓	$jm=5\times$	$np=7\times$

Al final E será $E=\{be, de, eg, fi, ln, kn, ad, cg, no, gj, df, eh, ik, mp, km\}$



$w(T) = 30$

7.5 ALGORITMO DE PRIM

PRIM CLAY

(Sweetwater, 1921) Americano matemático y científico de la computación. En 1941, Prim obtuvo su licenciatura en ingeniería eléctrica de la Universidad de Princeton .En 1949, recibió su Ph.D. en Matemáticas. Durante su carrera en los Laboratorios Bell, Robert Prim junto con un compañero de trabajo José Kruskal desarrollaron dos algoritmos diferentes para encontrar un árbol de expansión mínimo en un promedio ponderado gráfico, un bloque básico de tropiezo en diseño por ordenador de la red. El algoritmo de Prim encuentra un árbol generador de peso mínimo, formando en cada iteración un subgrafica conexa, esto lo hace diferente al algoritmo de Kruskall.

El algoritmo de Prim es un algoritmo perteneciente a la teoría de los grafos que permite encontrar un árbol generador de peso mínimo en un grafo conexo, no dirigido y cuyas aristas están etiquetadas. En otras palabras, el algoritmo encuentra un subconjunto de aristas que forman un árbol con todos los vértices, donde el peso total de todas las aristas en el

árbol es el mínimo posible. Si el grafo no es conexo, entonces el algoritmo encontrará el árbol generador mínimo para uno de los componentes conexos que forman dicho grafo no conexo.

El algoritmo incrementa continuamente el tamaño de un árbol, comenzando por un vértice inicial al que se le van agregando sucesivamente vértices cuya distancia a los anteriores es mínima. Esto significa que en cada paso, las aristas a considerar son aquellas que inciden en vértices que ya pertenecen al árbol. El árbol generador de peso mínimo estará completamente construido cuando no queden más vértices por agregar.

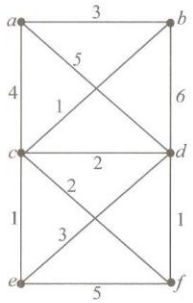
En cada iteración se va completando el conjunto M. El conjunto M contiene los vértices de la gráfica que van siendo introducidos en cada iteración. El algoritmo se detiene cuando el conjunto M sea igual al conjunto de vértices de la gráfica G, es decir igual a $V(G)$. En el cuadro siguiente se muestran los pasos del algoritmo de Prim.

- **Paso 1:** Dada la gráfica G, definir $V(G)$ como el conjunto de vértices y $A(G)$ como el conjunto de aristas de la gráfica.
- **Paso 2:** Iniciar el conjunto $M=\phi$
- **Paso 3:** Elegir cualquier vértice v en $V(G)$. Hacer $M=\{v\}$.
- **Paso 4:** Elegir una arista (v, u) en $A(G)$ de menor peso posible, con v en M y u en $V(G)/M$. Si hay empate romperlo arbitrariamente.
- **Paso 5:** Tomar el vértice u e introducirlo en el conjunto M. Así se obtiene $M=\{v,u\}$
- **Paso 6:** Si $M\neq V(G)$ regresar al paso 4.

  Si $M=V(G)$ Finalizar. El conjunto M tendrá todos los vértices de la gráfica que forman el árbol generador de peso mínimo.
- **Paso 7:** Dibujar el árbol generador.

EJEMPLO 4

Dada la siguiente gráfica, hallar el árbol generador de peso mínimo, aplicando el algoritmo de Prim.



Solución:

Sea $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$

Comenzar en cualquier vértice, escoger a

$M=\{a\}$

Chequear aristas que salen de los vértices que están en M a los vértices que están fuera de M

$(a,b)=3*$
$(a,c)=4$
$(a,d)=5$

Escoger la arista de menor peso. Los empates se rompen arbitrariamente.

Sea (a,b) la arista escogida, añadir b al conjunto M

$M=\{a,b\}$

Chequear aristas que salen de M. No olvidar chequear las aristas de los vértices que ya fueron introducidos en M

$(a,c)=4$
$(a,d)=5$
$(b,d)=6$
$(b,c)=1*$

Escoger (b,c), añadir c al conjunto M

$M=\{a,b,c\}$

Chequear aristas que salen de M.

$(a,d)=5$
$(b,d)=6$
$(c,e)=1*$
$(c,f)=2$
$(c,d)=2$

Escoger (c,e), añadir e al conjunto M.

$M=\{a,b,c,e\}$

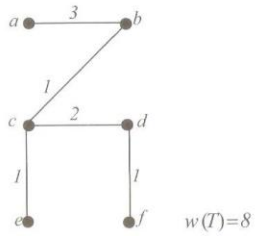
Chequear aristas que salen de M.

$(a,d)=5$
$(b,d)=6$
$(c,d)=2*$
$(c,f)=2$
$(e,f)=5$
$(e,d)=3$

$M=\{a,b,c,e,d\}$

Chequear aristas que salen de M.
$(c,f)=2$
$(e,f)=5$
$(d,f)=1*$

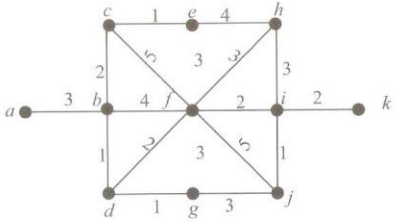
$M=\{a,b,c,e,d,f\}$
Como $M=V(G)$
Parar.



$w(T)=8$

EJEMPLO 5

Dada la siguiente gráfica, hallar el árbol generador de peso mínimo, aplicando el algoritmo de Prim.



Solución:

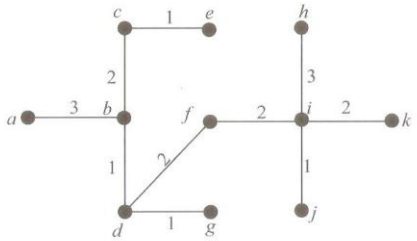
Sea $V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k\}$

Comenzar en cualquier vértice, escoger de $V(G)$. Sea a el vértice de inicio.

Sea $M=\{a\}$

Chequear aristas desde los vértices de M a $V(G)/M$. Así que chequear $ab=3$ como solo hay una arista tomar esa. Hacer $M=\{a,b\}$ y chequear aristas de M a $V(G)/M$. Chequear $bc=2$, $bd=1*$, $bf=4$ elegir la

arista de menor peso, esta es $bd=1$, hacer $M=\{a,b,d\}$. Chequear aristas de M a $V(G)/M$ esto es $bc=2$, $bf=4$, $dg=1*$, $df=2$, elegir la de menor peso, esta es $dg=1$, hacer $M=\{a,b,d,g\}$, volver a chequear de M a $V(G)/M$, $bc=2*$, $bf=4$, $df=2$, $gf=3$, $jg=3$, Hacer $M=\{a,b,d,g,c\}$. Chequear aristas de M a $V(G)/M$, $bf=4$, $df=2$, $gf=3$, $gj=3$, $ce=1*$, $cf=5$. Elegir $ce=1$ $M=\{a,b,d,g,c,e\}$, chequear $bf=4$, $df=2*$, $gf=3$, $gj=3$, $cf=5$, $ef=3$, $eh=4$. $M=\{a,b,d,g,c,e,f\}$, chequear ahora $gj=3$, $eh=4$, $fh=3$, $fi=2*$, $fj=5$. $M=\{a,b,d,g,c,e,f,i\}$, chequear ahora $eh=4$, $fh=3$, $gj=3$, $fj=5$, $ih=3$, $ik=2$, $ij=1*$. $M=\{a,b,d,g,c,e,f,i,j\}$. Chequear ahora: $eh=4$, $fh=3$, $ih=3$, $ik=2*$, elegir $ik=2$. Hacer $M=\{a,b,d,g,c,e,f,i,j,k\}$. Ahora chequear $eh=4$, $fh=3$, $ih=3$, hay dos opciones $fh=3$ o $ih=3$, elegir cualquiera, ejemplo $ih=3$. $M=\{a,b,d,g,c,e,f,i,j,k,h\}$ Como $M=V(G)$ pare.



7.6 APLICACIÓN EN MATLAB

Para incluir el algoritmo de Prim en el programa Matlab, se deben seguir las instrucciones dadas en la sección 6.9 del capítulo anterior, una vez seguidos estos pasos, se debe almacenar el programa teniendo en cuenta que los caracteres en cada instrucción del programa deben ser tecleados exactamente como aparecen. MATLAB diferencia los caracteres mayúscula de minúscula.

Instrucciones del Algoritmo de Prim en Matlab

Algoritmo de Prim: Árbol de Expansión Mínima

```
Seguir = 'S';
while Seguir =='S'|| Seguir =='s'
  clc; clear all; Corregir = 'S';
 disp('        *** ALGORITMO DE PRIM   ***');
 disp('        Árbol de Expansión Mínimo');
 disp(' ')
 disp('Guarda los valores de entrada en Matriz de n filas.');
 disp('Representan Pesos desde Nodos Origen hacia Destino.');
 disp(' ')
 disp('Teclee Peso de I a J, solo si hay conexión desde el );
 disp('I al J. El programa lo repite desde J a I');
 disp('No hace falta incluir costos infinito o cero.');
 disp('Solo ingrese costos de aristas I a J con valor.');
 disp(' ')
 letras =['A';'B';'C';'D';'E';'F'; 'G';'H';'I';'J';'K'; 'L';
 'M';'N';'O';'P';'Q';'R';'S';'T';'U';'V';'W';'X';'Y';'Z'];
 n=input('¿Cuántos Vértices o Nodos tiene el Grafo? = ');
 disp(' ');
 for i=1:n
      for j= 1:n
         M(i,j)= inf;
         if i==j
            M(i,j)=0;
         end
      end
   end
   Resp = 'S';
   while Corregir == 'S'|| Corregir =='s'
    while Resp =='S'|| Resp =='s'
      disp(' ')
    disp('Posición de Fila y Columna del Peso a Ingresar:')
      i = input('¿Qué Fila? : ');
      j = input('¿Qué Columna? : ');
    M(i,j)=input('Ingrese el Peso de nodo I a Nodo J: ');
      M(j,i) = M(i,j);
```

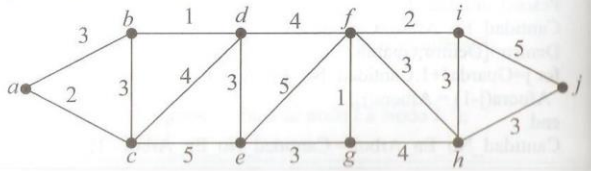


```
      disp(' ');
      Resp = input('¿Ingresar Otro Valor? S/N : ', 's');
    end
    disp(' ');
    disp('Los Valores Ingresados a la Matriz son:');
    disp(M);
    Resp = 'S';
Corregir=input('¿Corregir algún Valor i,j? S/N : ', 's');
  end
Dentro=1;
Cantidad_En_Arbol=1;
Cantidad_de_Aristas = 0;
Afuera=(2:n)';
Cantidad_No_En_Arbol=n-1;
disp('');
En_Arbol=Dentro(1:Cantidad_En_Arbol);
Fuera=Afuera(1:Cantidad_No_En_Arbol);
% Iterar mientras haya nodos fuera del árbol
while Cantidad_En_Arbol < n
   Min = Inf;
   for i = 1: Cantidad_En_Arbol
    for j = 1: Cantidad_No_En_Arbol,
       i2 = Dentro(i);   j2 = Afuera(j);
       if M(i2,j2)< Min && M(i2,j2)~=0
         Min=M(i2,j2);
         GuardaJ=j;  Guarda2I=i2;  Guarda2J=j2;
       end
    end
   end
   Cantidad_de_Aristas = Cantidad_de_Aristas+ 1;
   AAEM(Cantidad_de_Aristas,1)=Guarda2I;
   AAEM(Cantidad_de_Aristas,2)=Guarda2J;
   Pesos(Cantidad_de_Aristas,1)=Min;
   Cantidad_En_Arbol=Cantidad_En_Arbol+1;
   Dentro=[Dentro;Guarda2J];
   for j=GuardaJ+1:Cantidad_No_En_Arbol,
     Afuera(j-1) = Afuera(j);
   end;
   Cantidad_No_En_Arbol = Cantidad_No_En_Arbol - 1;
```

```
    En_Arbol=Dentro(1:Cantidad_En_Arbol);
    Fuera=Afuera(1:Cantidad_No_En_Arbol);
    if not(isempty(Fuera))
    end
end
clc;
disp('    ***  ALGORITMO DE PRIM.  ***');
disp('      Árbol de Expansión Mínimo');
disp(' ')
disp('Matriz de Entrada:');
disp(M);
disp('( A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5, ...)');
disp('Vértices del Árbol y sus Pesos: ');
R1 = letras(AAEM(:,1));   R2 = letras(AAEM(:,2));
RR = [R1 R2];             R = [AAEM Pesos];
disp(' ')
disp('  Desde Hasta  Peso')
disp(R);
disp ('Aristas de Expansión:');
disp(RR)
Peso=sum(Pesos);
disp(' ')
fprintf('Peso Total del Árbol de Expansión Mínimo =');
disp(Peso);
disp(' ')
disp('-----------------------------------------------------')
Seguir = input('¿Desea Analizar Otro Grafo? S/N' , 's');
end
```

EJEMPLO 6

Dada la siguiente gráfica, aplicar el algoritmo de Prim utilizando instrucciones en Matlab.



Solución:

Para introducir la información de la gráfica en el programa, se debe preparar la matriz de pesos. Sea $M(i,j)$ la matriz. Esta matriz contiene los pesos de las aristas que forman la gráfica. La matriz $M(i,j)$ para la gráfica del ejemplo queda expresada como:

$$M=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 3 & 2 & - & - & - & - & - & - & - \\ 3 & - & 3 & 1 & - & - & - & - & - & - \\ 2 & 3 & - & 4 & 5 & - & - & - & - & - \\ - & 1 & 4 & - & 3 & 4 & - & - & - & - \\ - & - & 5 & 3 & - & 5 & 3 & - & - & - \\ - & - & - & 4 & 5 & - & 1 & 3 & 2 & - \\ - & - & - & - & 3 & 1 & - & 4 & - & - \\ - & - & - & - & - & 3 & 4 & - & 3 & 3 \\ - & - & - & - & - & 2 & - & 3 & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - & 3 & 5 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

Una vez almacenado el programa en Matlab, se ordena la ejecución desde la ventana de inicio de Matlab. Esta primera ventana muestra una breve descripción del algoritmo y solicita al usuario que indique la cantidad de nodos o vértices que tiene la gráfica. Ver Figura 7.1 .

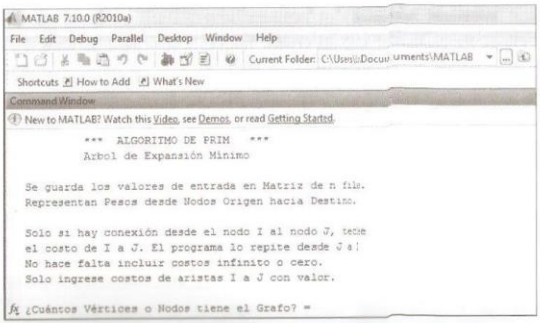


Figura 7.1 Ventana de inicio de Matlab. Descripción del algoritmo y pregunta de inicio

En el ejemplo se marcan 10 nodos, y al pulsar enter, el programa va solicitando el ingreso uno a uno de los elementos de la matriz. El programa solicitará la posición de fila, columna y luego solicitará el peso respectivo. Para el ejemplo, primero se introduce fila 1, columna 2, peso 3. Al pulsar enter, el programa preguntara si se quiere introducir otro dato. Si la respuesta es afirmativa, el programa solicitará el número de fila, el número de columna, y el peso correspondiente. Este proceso se repetirá hasta finalizar la introducción de todos los elementos en la matriz. Ver Figura 7.2.

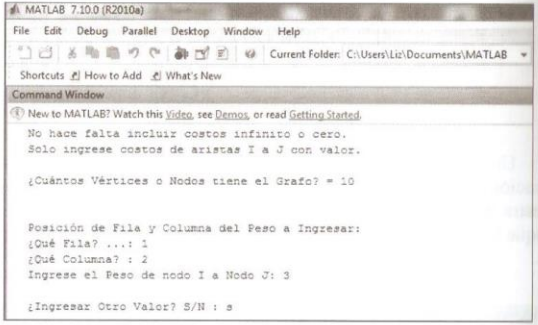


Figura 7.2 Ventana de dialogo Matlab. Introducción de datos del grafo.

Una vez culminado el ingreso de los datos el programa muestra los valores ingresados en una matriz, con la finalidad de posibilitar correcciones. Ver Figura 7.3.

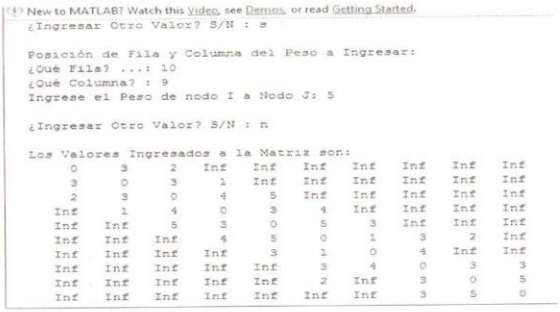


Figura 7.3 Ventana de dialogo Matlab. Matriz de pesos introducida

El programa permite corregir cualquier valor que haya sido ingresado. Si no hay correcciones, al pulsar enter se mostrara una matriz numérica que contiene las aristas que forman el árbol generador de peso mínimo y el peso respectivo. Luego lista las aristas utilizando nomenclatura literal y en la última línea de la pantalla se indica el peso mínimo del árbol generador. En el ejemplo el árbol generador tiene peso 21, y las aristas que forman el árbol son: *ab,ac,bd,de,eg,gf,fi,fh,hj*. Ver Figura 7.4 y Figura 7.5

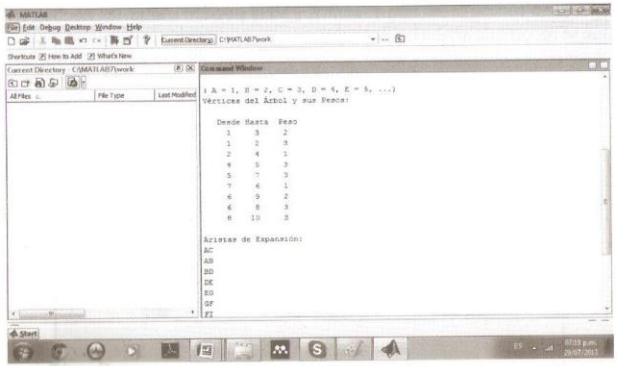


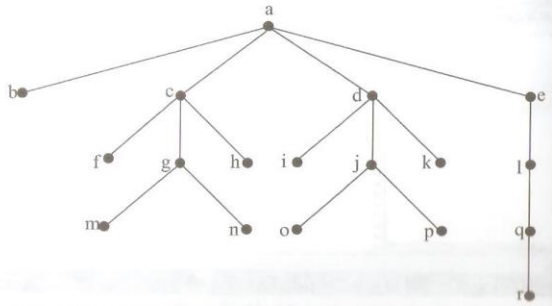
Figura 7.4 Ventana de dialogo de Matlab. Matriz numérica de aristas que forman el árbol generador de peso mínimo

```
Aristas de Expansión:

AC  AB  BD  DE  EG  GF  FI  FH  HJ

Peso Total del Árbol de Expansión Mínimo =  21

-----------------------------------------------

¿Desea Analizar Otro Grafo? S/N

-----------------------------------------------
```

Figura 7.5 Ventana de dialogo Matlab. Aristas que forman el árbol generador de peso mínimo. Peso del árbol

7.7 ÁRBOLES ENRAIZADOS

Se puede transformar cualquier gráfica no dirigida en una gráfica dirigida asociándole direcciones a sus aristas. Si la gráfica original es un árbol, se obtiene un árbol dirigido. Si todas las flechas parten de un solo vértice, el árbol dirigido se llama árbol enraizado, y el vértice es la raíz. Los árboles enraizados por lo general se dibujan como el mostrado en la figura. Se coloca la raíz en el centro y se le pueden quitar las flechas ya que se recorre de arriba hacia abajo.



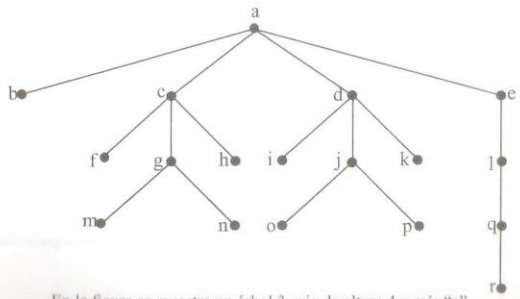
Partes de un árbol enraizado

A los vértices de valencia 1 en un árbol enraizado se les denomina *Hojas*, con una excepción: la raíz puede tener valencia uno pero no se llamará hoja. Viendo el árbol como una gráfica dirigida, su raíz es la única fuente y las hojas serán todos pozos. Los vértices restantes a veces se llaman *nodos interiores* y las hojas *nodos terminales*.

Se adopta la convención de que si (u,w) es una arista de un árbol enraizado entonces u es el padre de w y w es el hijo de u. Cada vértice excepto la raíz tiene exactamente un padre. Un padre puede tener muchos hijos. De manera más general, w es un descendiente de u siempre que $w \neq u$ y que u sea un vértice en el único camino simple de la raíz a w. Finalmente, para cualquier vértice u el subárbol con raíz u es precisamente el árbol que consta de u, de todos los descendientes y de las aristas dirigidas que lo conectan. Siempre que u sea una hoja, el subárbol con raíz u es un árbol trivial de un vértice.

Un árbol enraizado es una árbol *m–ario* si cada padre tiene a lo más m hijos. Los arboles *2–arios* se llaman *árboles binarios*.

El *número de nivel* de un vértice u es la longitud del único camino simple desde la raíz r hasta u. En particular la raíz tiene numero nivel 0. La altura de un árbol enraizado es el máximo de los números de nivel de sus vértices.



En la figura se muestra un árbol 3-ario de altura 4 y raíz "a".

7.8 RECORRIDOS DE ÁRBOLES

La búsqueda de profundidad proporciona maneras de "caminar" por un árbol. Es decir, recorrerlo en forma sistemática de modo que se visite cada vértice exactamente una vez. Se muestran tres métodos para recorrer árboles. Estos recorridos se definen en forma recursiva.

Un algoritmo de recorrido de árbol, es un algoritmo para enlistar todos los vértices de un árbol enraizado ordenado finito. Los tres algoritmos más comunes son los que dan recorrido en preorden, inorden (solo aplicable los arboles binarios) y postorden.

Recorido Preorden

En el recorrido preorden, la raíz se enlista primero y los subárboles se enlistan en el orden de sus raíces. Por la forma en que se dibuja un árbol enraizado ordenado, el orden será de izquierda a derecha. Sus salidas son una lista del árbol con raíz v.

Regla: Raíz - Izquierdo - Derecho

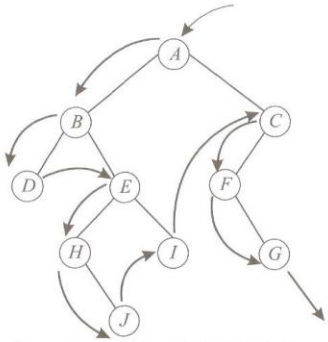
Algoritmo Preorden (v)

Paso 1: Enlistar los subárboles con los hijos de v como raíz. [Utilizar preorden (w) para enlistar T para cada hijo w de v].

Paso 2: Enlistar T_v poniendo en una hilera v seguido por las listas del paso 1 en el orden de izquierda a derecha.

EJEMPLO 7

Dado el siguiente árbol, hallar un recorrido preorden:



Preorden: T = ABDEHJICFG

Recorrido Postorden:

En el recorrido postorden, los subárboles se enlistan primero en orden y después se enlistan las raíces.

Regla: Izquierdo - Derecho - Raíz

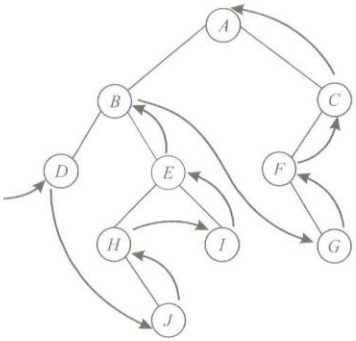
Algoritmo Preorden (v)

Paso 1: Enlistar los subárboles con los hijos de v como raíz. [Utilizar postorden (w) para cada hijo w].

Paso 2: Enlistar T_v poniendo en una hilera las listas del paso 1 en el orden de izquierda a derecha seguidas por v.

EJEMPLO 8

Dado el siguiente árbol, hallar un recorrido postorden:



Postorden: T= DJHIEBGFCA

Recorrido Inorden

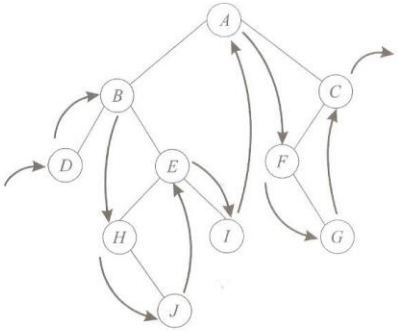
Para árboles binarios enraizados, el recorrido en inorden comienza enlistando la raíz v entre los subárboles a su izquierda y a su derecha en T_v.

Regla: Izquierdo - Raíz - Derecho

Algoritmo Inorden (v)
Paso 1: Enlistar el subárbol de la izquierda [utilizar INORDEN (w) para el hijo w a la izquierda de v].
Paso 2: Enlistar el subárbol de la derecha [utilizar INORDEN (u) para el hijo de u a la derecha de v].
Paso 3: Enlistar T_v poniendo en línea el resultado del paso 1, después v y luego el resultado del paso 2.

EJEMPLO 9

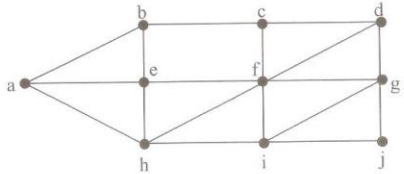
Dado el siguiente árbol, encuentre el recorrido inorden.



INORDEN: T= DBHJEIAFGC

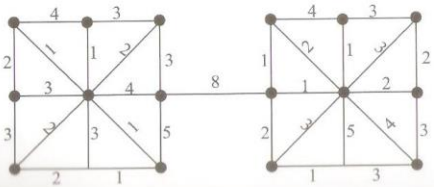
EJERCICIOS PROPUESTOS CAPÍTULO 7

1) Dado el siguiente grafo, dibujar 3 árboles generadores.

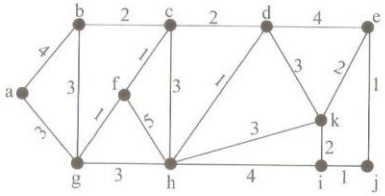


2) Dados los siguientes grafos, encontrar arboles generadores de peso mínimo. Utilizar el algoritmo de Kruskall.

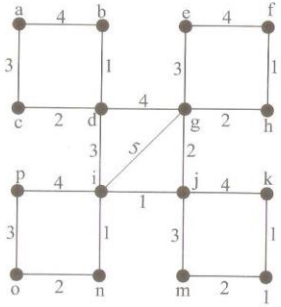
a)



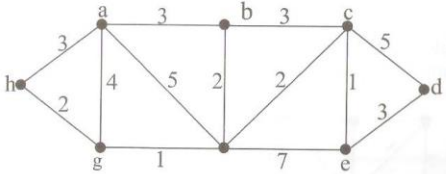
b)


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k

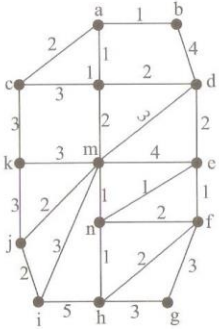
c)


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
p

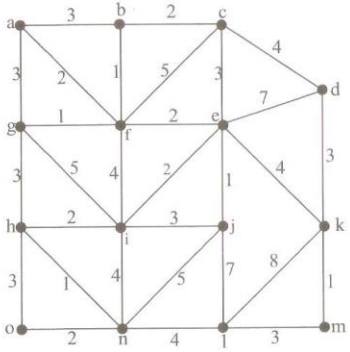
d)


a
b
c
d
e
g
h

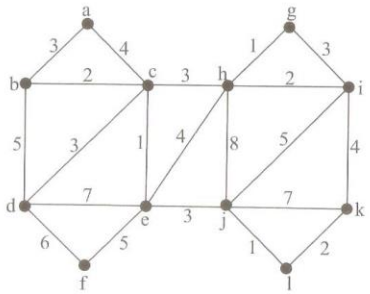
e)


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
m
n

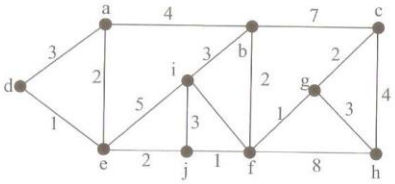
f)


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o

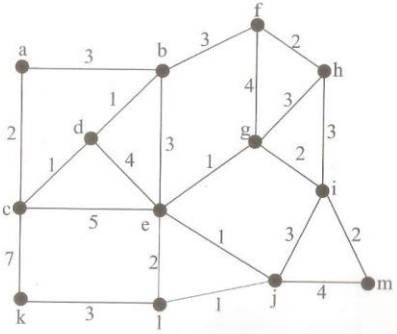
g)



h)

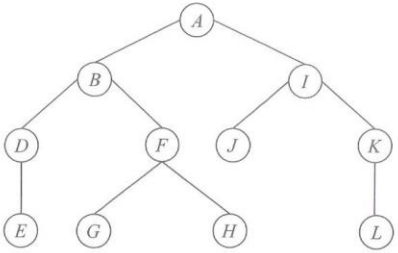


i)

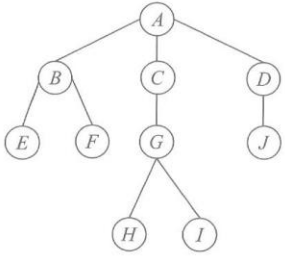


3) Hallar un recorrido preorden, postorden y uno inorden si los hay para los siguientes árboles.

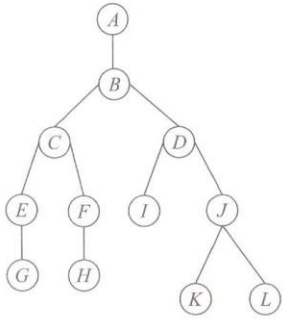
a)



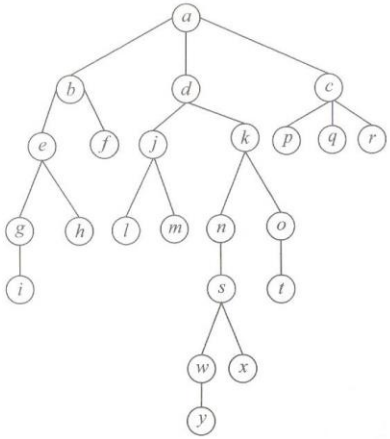
b)



c)



4) Dado el siguiente árbol calcular que tipo de árbol es y su altura.



5) Con los grafos del ejercicio 2, encontrar un árbol generador de peso mínimo, aplicar el algoritmo de Prim. Comprobar los resultados en MATLAB.

UNET

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA

Raúl Alberto Casanova Ostos
Rector
José Alexander Contreras
Vicerrector Académico
Martín Paz Pellicani
Vicerrector Administrativo
Elcy Yudith Nuñez
Secretaria

Luis Villanueva
Decano de Investigación
Silverio Bonilla Sánchez
Decano de Docencia
Miguel Ángel García Porras
Decano de Postgrado
José Andrés Molina Chacón
Decano de Extensión
Lisett Josefina Santos Sánchez
Decana de Desarrollo Estudiantil

FEUNET

CONSEJO EDITORIAL

Decanato de Investigación
Andrés Chacón (Principal)
Jazael Pernía (Suplente)

Decanato de Docencia
Jhon Amaya (Principal)
Cora Infante (Suplente)

Decanato de Extensión
Salvador Galiano (Principal)
Carmen Saldivia (Suplente)

Decanato de Postgrado
Oscar Medina (Principal)
Solvey Romero (Suplente)

Decanato de Desarrollo Extudiantil
Ana Rita Delgado (Principal)
Clarinés Urdaneta (Suplente)

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

Este libro ha sido escrito con la finalidad de proporcionar a los estudiantes una exposición más completa y fácil para entender el razonamiento lógico y profundizar en las aplicaciones de la matemática discreta. Está dirigido a los estudiantes que se inician en la carrera de Ingeniería en Informática. Su contenido está estructurado en siete capítulos, donde se definen conceptos fundamentales, se muestran numerosos ejemplos; y se propone al lector ejercicios para consolidar un aprendizaje significativo. Los ejemplos y ejercicios mostrados en este libro forman parte de una colección particular, recopilada en años de experiencia como docente en esta asignatura.

En los capítulos 6 y 7 se introducen aplicaciones de los algoritmos en Matlab y se muestran las instrucciones y ejecuciones del programa, esto tiene un carácter interactivo ya que el lector puede editarlos, introducir datos y verificar los ejercicios a través de una herramienta computacional.

Su enfoque, eminentemente didáctico, desarrollara en el estudiante un pensamiento abstracto, analítico y lógico, esencial para generar teorías y aplicaciones en el área de la ingeniería informática.

ISBN: 978-980-6300-87-3