Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Método de Eliminación Gauss-Jordan

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

Ejemplo 1: Utilizar el método de eliminación de Gauss- Jordan para resolver el sistema

$$\begin{aligned} -2x + y + 6z &= 18 \\ 5x \quad\quad + 8z &= -16 \\ 3x + 2y - 10z &= -3 \end{aligned}$$

- Planteamos la matriz aumentada del sistema y por medio de operaciones elementales sobre renglones buscamos la forma escalonada reducida por renglones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 6 & 18 \\ 5 & 0 & 8 & -16 \\ 3 & 2 & -10 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{R_1 \to -1/2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -3 & -9 \\ 5 & 0 & 8 & -16 \\ 3 & 2 & -10 & -3 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{\substack{R_2 \to -5R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_1 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -3 & -9 \\ 0 & 5/2 & 23 & 29 \\ 0 & 7/2 & -1 & 24 \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{R_2 \to \frac{2}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 46/5 & 58/5 \\ 0 & 7/2 & -1 & 24 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{\substack{R_1 \to 1/2R_2 + R_1 \\ R_3 \to -7/2R_2 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8/5 & -16/5 \\ 0 & 1 & 46/5 & 58/5 \\ 0 & 0 & -166/5 & -83/5 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to -\frac{5}{166}R_2 \atop \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8/5 & -16/5 \\ 0 & 1 & 46/5 & 58/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \to -8/5R_3 + R_1 \\ R_2 \to -46/2R_3 + R_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz coeficientes , el rango de la matriz aumentada y el número de incógnitas es igual a 3, por lo que el sistema es compatible determinado. El sistema de la última matriz es

$$\begin{gathered} x = -4 \\ y = 7 \\ z = 1/2 \end{gathered}$$

La solución del sistema es $(-4,7,1/2)$

Ejemplo 3: Utilizar el método de eliminación de Gauss- Jordan para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + \ \ 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

- La matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

- Buscamos la forma escalonada reducida por renglones

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la última matriz, vemos que los rangos de la matriz de coeficientes y aumentada es igual a 2:

$$\rho(A) = \rho(A_a) = 2$$

Pero el sistema tiene tres incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado.

- De la forma escalonada reducida por renglones obtenida tenemos que el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 \quad - \quad x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

- Se tiene dos ecuaciones para tres incógnitas, si despejamos x_1 y x_2 en términos de x_3 obtenemos que

$$x_1 = 1 + x_3$$
$$x_2 = 4 - 2x_3$$

- Vemos que hay infinitas soluciones, por cada valor de x_3 hay una solución. Por ejemplo:

$$x_3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 + 0 = 1 \\ x_2 = 4 - 2(0) = 4 \end{matrix} \Rightarrow (1,4,0)\ es\ una\ soluci\acute{o}n$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = 4 - 2(1) = 2 \end{matrix} \Rightarrow (2,2,1)\ es\ una\ soluci\acute{o}n$$

En general, podemos decir que el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1 + x_3 \ \wedge x_2 = 4 - 2x_3\}$$

Ejemplo 3: Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

- La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

- Buscamos la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada:

$$\xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

De la última matriz, tenemos que los rangos de la matriz de coeficientes y aumentada son diferentes:

$$\rho(A) = 2 \quad \text{y} \quad \rho(A_a) = 3$$

Por lo que podemos concluir que el sistema es incompatible, no existe solución.

Ejemplo 4: Una florista ofrece tres tamaños de arreglos florales que contienen rosas, margaritas y crisantemos. Cada arreglo pequeño contiene una rosa, tres margaritas y tres crisantemos. Cada arreglo mediano contiene dos rosas, cuatro margaritas y seis crisantemos. Cada arreglo grande contiene cuatro rosas, ocho margaritas y seis crisantemos. Un día, la florista nota que usó un total de 24 rosas, 50 margaritas y 48 crisantemos para surtir pedidos de estos tres tipos de arreglos. ¿Cuántos arreglos de cada tipo elaboró?

- De la información del enunciado tenemos

Tipo de Arreglos	Pequeño	Mediano	Grande
Rosas	1	2	4
Margaritas	3	4	8
Crisantemos	3	6	6

- Si denotamos por x la cantidad de arreglos pequeños, y la cantidad de arreglos medianos y z la cantidad de arreglos grandes, entonces :

✓ Por la cantidad de rosas usadas se tiene que : $x + 2y + 4z = 24$

✓ Por la cantidad de margaritas usadas se tiene que : $3x + 4y + 8z = 50$

✓ Por la cantidad de crisantemos usados se tiene que $3x + 6y + 6z = 48$

- Lo anterior nos permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} x+2y+4z=24 \\ 3x+4y+8z=50 \\ 3x+6y+6z=48 \end{gathered}$$

- Resolvemos el sistema usando el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 3 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 6 & 6 & 48 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \longrightarrow -3R_1+R_2 \\ R_3 \longrightarrow -3R_1+R_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_2 \longrightarrow -1/2R_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \rightarrow -2R_2+R_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_3 \longrightarrow -1/6R_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \longrightarrow -2R_3+R_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

De la última matriz podemos concluir que el sistema es compatible determinado y la solución es $(2,3,4)$. Es decir la florista elaboró:

2 arreglos pequeños

3 arreglos medianos

4 arreglos grandes.

Ejemplo 4: Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1, consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada vez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de especie de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25.000 unidades del alimento A, 20.000 unidades del alimento B y 55.000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿Cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Si utilizamos la información del problema, se observa que x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades del alimento A, x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades del alimento A y x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$ unidades del alimento A. Entonces,

Suministro total del alimento A

Suministro total del alimento B

Suministro total del alimento C

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

Utilizando reducción de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la ultima matriz vemos que los rangos de las matrices de coeficiente y aumentada del sistema son iguales a 2, como el sistema tiene tres incógnitas entonces el sistema es compatible indeterminado. A

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5\,000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$x_1 = 40\,000 - 5x_3$$
$$x_2 = x_3 - 5\,000$$
$$5\,000 \leq x_3 \leq 8\,000$$

Ejercicios Propuestos:

Tomado del libro Algebra Lineal de Grossman, Stanley. Capitulo I

Problemas 1.2

En los problemas del 1 al 6 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones de los sistemas dados.

1.
$$\begin{aligned} 9x_1 + 9x_2 - 7x_3 &= 6 \\ -7x_1 \qquad\quad - x_3 &= -10 \\ 9x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 45 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 9x_2 - 7x_3 &= 2 \\ - x_3 &= -2 \\ -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

Tomados del Libro: Algebra Lineal de Poole,David. Capitulo 2, ejercicios 2.4

4. **(a)** En su bolsillo usted tiene algunas monedas de cinco, diez y 25 centavos. En total tiene 20 monedas y exactamente el doble de monedas de diez centavos que de cinco. El valor total de las monedas es $3.00. Encuentre el número de monedas de cada tipo.

(b) Encuentre *todas* las posibles combinaciones de 20 monedas (de cinco, diez y 25 centavos) que sumarían exactamente $3.00.

5. Un cafetalero vende tres mezclas de café. Una bolsa de la mezcla de la casa contiene 300 gramos de grano colombiano y 200 gramos de grano rostizado francés. Una bolsa de la mezcla especial contiene 200 gramos de grano colombiano, 200 gramos de grano keniano y 100 gramos de grano rostizado francés. Una bolsa de mezcla gourmet contiene 100 gramos de grano colombiano, 200 gramos de grano keniano y 200 gramos de grano rostizado francés. El comerciante tiene a la mano 30 kilogramos de grano colombiano, 15 kilogramos de grano keniano y 25 kilogramos de grano rostizado francés. Si quiere usar todos los granos, ¿cuántas bolsas de cada tipo de mezcla puede elaborar?