PROBABILIDAD

Generalidades

El termino de **probabilidad** se refiere a la posibilidad de que ocurra un evento, dado que está cargado de un sentido de incertidumbre, y es porque los resultados no pueden predecirse exactamente debido a la aleatoriedad del fenómeno que se observa. Ejemplo de ello podrían ser algunas de las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuál es la probabilidad de que me saque la lotería?
- ✓ ¿ Qué posibilidad hay de que hoy llueva? para llevar mi paraguas o no.
- ✓ ¿ Existe alguna probabilidad de que repruebe el primer parcial ?
- ✓ ¿Qué cantidad de semillas estarán defectuosas?
- ✓ ¿Qué tan confiable será el sistema?

La probabilidad es el nivel de certeza que tenemos sobre la ocurrencia de cierto evento. Esto, en base a un valor de entre 0 y 1, y cuando más cerca esté de la unidad, significa mayor certidumbre (posible). Por el contrario, cuando se aproxima a cero, existe menor seguridad en el resultado final (imposible).

Para el registro de cualquier información (numérica o categórica) se requiere de la observación, es decir, para conocer la probabilidad de que ocurra un evento es necesario registrar el hecho o fenómeno, que equivale a contar con qué frecuencia ocurre el suceso. Por ejemplo, contar el número de artefactos defectuosos, el número de accidentes laborales, el número de días lluviosos, lo cual permitirá predecir la ocurrencia o no del evento a estudiar.

Para calcular la probabilidad, en el sentido de Laplace, se divide el número de sucesos favorables entre el número total de sucesos posibles.

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\#\, sucesos\ favorables}{\#\, casos\ totales}}$$

Por ejemplo, una caja contiene 15 bolas, de las cuales 10 son blancas y 5 son negras. Si una persona vendada selecciona una bola de la caja, ¿es posible decir con certeza si la bola será blanca o negra?; ¡Definitivamente no! Sin embargo, si puede predecir el color: blanca o negra.

De extraer una bola blanca, la probabilidad es:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{10}{15} = 0,667}$$

De extraer una bola negra, la probabilidad es:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{5}{15} = 0,333}$$

La sumatoria de los eventos debe ser siempre 1. Y en efecto da 1.

σ - Álgebra

Una σ-álgebra es una colección de subconjuntos de un conjunto (a menudo llamado espacio muestral) que cumple con ciertas propiedades específicas.

Formalmente**:** Dado un conjunto Ω (o X), una sigma álgebra F sobre Ω es una colección de subconjuntos de Ω que satisface las siguientes propiedades:

1. Ω pertenece a F: El conjunto completo está incluido en la sigma álgebra.
2. Cerrado bajo complementación: Si un evento A está en F, entonces su complemento A' (o A^c) también está en F.
3. Cerrado bajo uniones contables: Si A_1, A_2, A_3, ... son eventos en F, entonces su unión también está en F.

En resumen, una s-álgebra F incluye al espacio muestral, a sus subconjuntos y es cerrada con respecto a la operación de unión de conjuntos.

Ejemplo. Consideremos un ejemplo sencillo: lanzar una moneda.

Espacio muestral: Ω = {Cara, Cruz}

Sigma álgebra: *F* = {∅, {Cara}, {Cruz}, {Cara, Cruz}}

Verificación de las tres propiedades:

1. Ω ϵ F

2. A ϵ F, entonces su complemento pertenece a F. Por ejemplo, el complemento del conjunto vacío es Ω ϵ F. Otro ejemplo, el $\{Cara\}^c$ es {Cruz} ϵ F.

3. Si A_1, A_2, A_3, ... son eventos en F, entonces su unión también está en F. Ejemplo:

A_1 = {Cara}, A_2 = {Cruz}, entonces (A1 U A2) que es{Cara, Cruz} ϵ F

Esta sigma álgebra cumple con las tres propiedades mencionadas anteriormente.

Ejercicio propuesto

Supongamos que se tienen el experimento de lanzar un dado, cuyo espacio muestral es Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Identificar su respectivo σ-algebra y comprobar si cumple con las propiedades.

Definición de Probabilidad

Definición frecuentista

Sí A es un evento que ocurre n_A veces en *n* resultados posibles, y la experiencia se repite muchas veces o se aumenta el tamaño de la muestra, entonces: $P(A) = \frac{n_A}{n}$

Ejemplo: Durante el mes de julio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas: 32, 31, 28, 29, 33, 32, 31, 30, 31, 31, 28, 28, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 30, 30, 31, 30, 31, 33, 33, 33, 29, 29.

Construimos una tabla de frecuencia

Temperatura (x_i)	nA	P(A)
28	3	0.097
29	6	0.194
30	7	0.226
31	8	0.258
32	3	0.097
33	4	0.129
	31	**1**

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n_A}{n}}$$

P(A) = probabilidad del evento A

n_A= número de veces que ocurre el evento A

n = Número de veces que se repite el experimento

Interpretación. Existe un 0,032 de probabilidad de que en el mes de julio tengamos un día con temperatura de 27°C; también existe la probabilidad de un 22,6% de que tengamos días con temperaturas de 30°C.

Definición clásica o a priori

Sí A es un evento que ocurre $n_A$veces en n resultados posibles, entonces:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{N° \text{ } de \text{ } casos \text{ } favorables \text{ } del \text{ } evento \text{ } A}{N° \text{ } de \text{ } casos \text{ } posibles \text{ } del \text{ } espacio \text{ } muestral \text{ } (S)}$$

Donde P(A) se lee, en general, como "la probabilidad de ocurrencia del evento A"

Ejemplo: En una caja hay 6 bolas rojas y 4 azules. ¿Qué probabilidad hay de que al extraer al azar una bola de la caja sea: **a)** azul? **b)** roja?

Solución:

a) A = Evento de extraer una bola azul

n_A = 6 n = 10 $P(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6$ La probabilidad de extraer una bola azul es de 0,6

b) B = Evento de extraer una bola roja Resp. $P(B) = 0{,}4$

Definición empírica

La probabilidad empírica se obtiene en base a resultados obtenidos de un evento o experimento, esta probabilidad se basa en la frecuencia con la que cierto resultado suceda.

Para poder calcular una probabilidad empírica es necesario realizar el evento o experimento unas cuantas ocasiones, porque esta probabilidad se calcula analizando los resultados anteriormente obtenidos.

Ejemplo. Supongamos que arrojamos una moneda al aire, o bien sale cara o bien sello. Si lanzamos una moneda 1000 veces y anotamos los resultados, encontramos que salió cara 502 veces y sello 498. La frecuencia relativa de aparición de cara es 502/1000 = 0,502, aproximado al valor real que es 50%.

Definición axiomática

Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y A cualquier evento asociado a éste. Se llamará función de probabilidad (o simplemente probabilidad) a P(A) si satisface los siguientes axiomas (axiomas de Kolmogorov):

Axioma 1. Sea S un espacio muestral cualquiera y A un evento, tal que $A \subset S$, entonces se cumple que $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.

Esto significa que la probabilidad de cualquier evento no puede ser más grande que uno, ni ser menor que cero. Si es igual a 1 se llama evento seguro, y cuando es cero se llama evento imposible.

Axioma 2. La probabilidad del espacio muestral S es un evento seguro, es uno: **P(S) = 1**

Por ejemplo, se lanza un dado, si A = S, es decir si el evento A coincide o es igual al espacio muestral, entonces.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

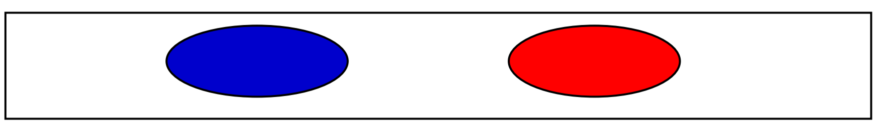
Teorema 1: Si ∅ es el conjunto vacío, entonces la probabilidad de ∅ es igual a 0

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = 0$$

Axioma 3. Si A y B son dos eventos tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Con ∅ igual al conjunto vacío, no contiene elementos o no ocurre, por lo que se deduce que $P(\emptyset) = 0$

Bajo estas condiciones se dice que los eventos A y B son mutuamente excluyentes o dicho de otra manera ambos eventos no ocurren, solo ocurre A o B, pero no ambos.



Ejemplo. Se lanzan dos monedas, cuyo espacio muestral (S) es el siguiente: S = {ss, sc, cs, cc}, por lo que N(S) = 4

Sean: A: el evento de que al lanzar un par de monedas caigan dos sellos exactamente

B: el evento de que al lanzar un par de monedas caiga un sello exactamente.

Los elementos de A y B son: A = { ss } P(A) = 1/4

B = {sc, cs} P(B) = 1/2

Se puede ver que $A \cap B = \emptyset$, no hay elementos en común, por lo que los eventos son **mutuamente exclusivos o disjuntos**, por tanto

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}$$

Nota. En caso de que A y B fueran no mutuamente excluyentes $A \cap B \neq \emptyset$, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Axioma 4. Sea $\{A_i\}$, i =1,2,..., una sucesión disjunta (mutuamente excluyente) de eventos, es decir, Ai ∩ Ak = ∅ para i ≠ k. Entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \boxed{= P(A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_1) + P(A_1) + \cdots + P(A_n)}$$

Este axioma dice que la probabilidad de varios eventos mutuamente exclusivos (que no tienen elementos en común), es igual a la suma de sus probabilidades.

Conceptos Básicos

Experimento aleatorio (EA)

Es todo experimento que cuando se repite bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo, tal es el caso del lanzamiento de una moneda o de un dado.

Para que sea un EA debe reunir los siguientes requerimientos:

1. Puede repetirse un número ilimitado de veces bajo las mismas condiciones
2. Es posible conocer por adelantado todos los posibles resultados a que puede dar origen.
3. No puede predecirse con exactitud el resultado en una realización particular de ese experimento.

Ejemplos

- Seleccionar de un lote un artículo para conocer su calidad.
- La amplitud y la fase de la intensidad de la luz emitida por una fuente.
- El resultado de un partido de fútbol.
- El número de semillas germinadas.
- La resistencia mínima de un conjunto de resistencias en una línea de producción.

Espacio muestral (EM)

Es el espacio de un experimento aleatorio y corresponde al conjunto de todos los posibles, diferentes y razonables resultados a que puede dar origen un experimento. Se denota por Q, S o Ω. Puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Ω finito: número de libros prestados en una biblioteca.

Ω infinito numerable: número de trabajos enviados a una impresora.

Ω infinito no numerable: duración de un determinado componente.

***A todo elemento de un EM se le denomina punto muestral o resultado elemental*.**

Ejemplo. Consideremos el lanzamiento de una moneda. El conjunto S es el conjunto de los símbolos *C* y *S*, donde *C* denota cara y *S* denota sello. También *A* es la clase de todos los subconjuntos de S, {(C), (S), (C,S), ∅}.

En el caso de dos monedas, el espacio muestral sería: S = {(C,C), (C,S), (S,C), (S,S)} y el conjunto A,

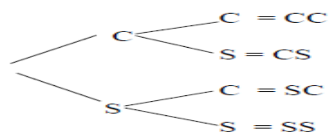
A = { ∅, {(C,C)}, {(C,S)}, {(S,C), {(S,S)}, (C,C), (C,S)},{(C,C), (S,C)},{(C,C),(S,S)},

{(C,S), (S,C)},{(S,S), (S,C)}, {(C,C),(C,S)}, {(C,C), (C,S), (S,C)},{(C,C),(C,S),(S,S)},

{(C,C), (S,C),(S,S)},{(C,S), (S,C)}, {(S,S)}, Ω}

Donde el primer elemento del par denota el resultado del primer lanzamiento, el segundo elemento, el resultado del segundo lanzamiento. El evento al menos una cara está formada por los puntos muestrales (C,C); (C,S); (S,C). El evento a lo más una cara es la colección de puntos muestrales (C,S); (S,C); (S,S).

Otra manera de representar el EM de un experimento sería a través de un diagrama de árbol. Veamos un ejemplo con el lanzamiento de una moneda:



Ω = {CC, CS, SC, SS}

¿Cuál sería el espacio muestral en el lanzamiento de dos dados?

Tipos de EM

- Continuo cuando contiene un numero infinito no numerable de puntos muestrales. Se dice que un conjunto infinito es no numerable cuando es imposible conseguir un par de números reales entre los cuales no sea posible hallar otro número real.

- Discreto cuando contiene un numero finito de puntos muestrales.

Ejemplo.

- De espacios muestrales continuos: S = {Peso de las personas} S = {X/ 0,10 < X < 0,20}

- De espacios muestrales discretos: S = {Lanzamientos de un dado}

S = {Cantidad de artículos defectuosos} = {D, DB, DDB...}

Indicar que tipo de espacio muestral es (a) la vida en años de cierto componente electrónico, (b) los números primos y (c) la extracción de una carta.

Evento, suceso o hecho

Corresponde a cualquier subconjunto del espacio muestral. Se podría decir que son todos los posibles subconjuntos del EM.

S = {CC, CS, SC, SS} Los subconjuntos serían: A = {CC, CS} B = {CS, SS}

Los eventos se clasifican en:

1. Simples, cuando contienen un solo espacio muestral por ejemplo obtener un cinco en el lanzamiento de dado. A = {5}, donde S = {1,2,3,4,5,6}

2. Compuestos, más de dos puntos muestrales, por ejemplo, obtener números pares en el lanzamiento de un dado: A {(2,2), (2,4)}, donde S = {(1,1),(1,2),(1,3), (1,4), (1,5),(1,6),.....,(6,6)}

Existen dos tipos de eventos o sucesos:

1. Evento seguro**:** Siempre se verifica después del experimento aleatorio, son los mismos del espacio muestral.

$$E = S \quad y \quad N(E) = N(S)$$

2. Evento Imposible: Es aquel que nunca se verifica como resultado del experimento aleatorio. No tiene elementos de interés para su fenómeno. Es un subconjunto de *S*, y la única posibilidad es que el evento imposible sea el *conjunto vacío*.

$$\Phi \subset S, \quad y \quad N(\Phi) = 0$$

Maneras de escribir y enunciar los eventos:

1. Por extensión S = {1,2,3,4,5,6}
2. Por comprensión S ={X / X es un número par en el lanzamiento de un dado}

Eventos mutuamente excluyentes

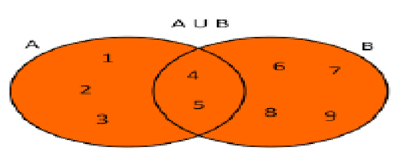
Se dice que dos eventos A y B de un espacio muestral Ω son mutuamente excluyentes si no contienen elementos en común, o sea si la intersección de A y B es el conjunto vacío ($A \cap B = \emptyset$).

Por la teoría de conjuntos se tiene:

Si A y B son dos eventos de Ω, la <u>unión</u> de estos eventos conforma un nuevo conjunto, que contiene a los puntos muestrales de A y de B. La unión de A y B se denota por A∪B.

<u>Ejemplo</u>. Dado los subconjuntos A = {1,2,3,4,5} B = {4,5,6,7,8,9}

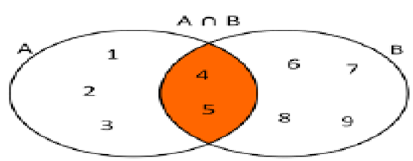
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$



Si A y B son dos eventos de Ω, la <u>intersección</u> de estos eventos conforma un nuevo conjunto, que contiene a los puntos muestrales que pertenecen a A y a B simultáneamente. Se denota la intersección de A y B por A ∩ B.

<u>Ejemplo</u>. Dado los subconjuntos A = {1,2,3,4,5} B = {4,5,6,7,8,9}

$$A \cap B = \{,4,5\}$$



Evento complemento, para cualquier evento A se define el evento complemento de A como aquel evento constituido por todos aquellos puntos muestrales de S que no están en A. Se denota como A', A^c, $\bar{A}$. Si el evento A no ocurre es sinónimo de que el evento A' ha ocurrido

A = {1,2,3,4,5}   B= {4,5,6,7,8,9}   S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

A' = {6,7,8,9}   B' = {1,2,3}

Ejemplo. Supongamos el experimento de lanzar una moneda tres veces.

El espacio muestral es:

S = {(S,S,S), (S,S,C), (S,C,S), (C,S,S), (C,C,S), (C,S,C), (S,C,C), (C,C,C) }

1. Evento simple: B: Que salgan tres sellos; B ={ (S,S,S) }
2. Evento compuesto: E: Que salgan al menos dos sellos; E = { (S,S,S), (S,S,A), (S,A,S), (A,S,S) }
3. Evento posible: A: Que salga dos caras; A = { (C,C,S), (C,S,C), (S,C,C), (C,C,C) }
4. Evento imposible: B: Que salga cuatro sellos; B = { ϕ }
5. Por extensión S = {(S,S,S), (S,S,C), (S,C,S), (C,S,S), (C,C,S), (C,S,C), (S,C,C), (C,C,C)}
6. Por comprensión S ={X / X sea un sello y dos caras}

Regla Aditiva de la Probabilidad

1. Si A y B son dos eventos no mutuamente excluyentes, entonces:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

2. Si A y B son mutuamente excluyentes, no pueden presentarse simultáneamente:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Al ser A y B eventos mutuamente excluyentes, $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0}$

3. Si A_1, A_2,…,A_n son mutuamente excluyentes, entonces

$$\boldsymbol{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup An) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(An)}$$

4. Para tres eventos A, B y C

$$\boldsymbol{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

Si A y A' son eventos complementarios, entonces

$$\boldsymbol{P(A) = 1 - P(A')}$$
$$\boldsymbol{1 = P(S) = P(A\ U\ A') = P(A) + P(A')}$$

Ejemplos.

1. Al final del semestre, Juan se va a graduar en la facultad de ingeniería industrial en una universidad. Después de tener entrevistas en dos compañías donde quiere trabajar, él evalúa la

probabilidad que tiene de lograr una oferta de empleo en la compañía A como 0.8, y la probabilidad de obtenerla de la compañía B como 0.6. Si, por otro lado, considera que la probabilidad de que reciba ofertas de ambas compañías es 0.5, ¿Cuál es la probabilidad de que obtendrá al menos una oferta de esas dos compañías?

Datos: P(A) = 0,8   P(B) = 0,6   P(A∩B) = 0,5

P(obtendrá al menos una oferta de esas dos compañías) = ?

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}5 = 0.9$$

Se tiene una probabilidad del 0,9 (o 90%) de que obtendrá al menos una oferta de esas dos compañías.

2. Suponga que se descubre que, en un grupo de 500 estudiantes universitarios de ultimo ano, 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 tienen esos tres hábitos nocivos para la salud. Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, calcule la probabilidad de que el estudiante

a) Fume o consuma bebidas alcohólicas

b) Coma entre comidas o consuma bebidas alcohólicas

c) No fume o no coma entre comidas.

d) Fume o consuma bebidas alcohólicas o coma entre comidas

Solución

Sean los siguientes eventos:

F = estudiantes que fuman   P(F) = 210/500

B = estudiantes que consumen bebidas alcohólicas   P(B) = 258/500

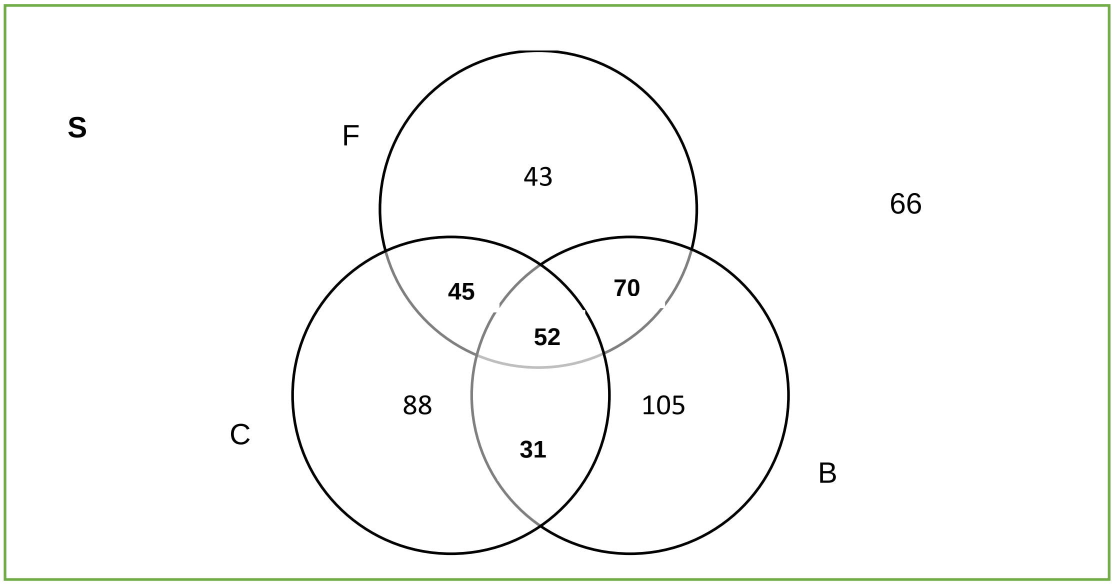
C = estudiantes que comen entre comidas   P(C) = 216/500

P(F y B) = 122/500

P(C y B) = 83/500

P(F y C) = 97/500

P(F y B y C) = 52/500



a) Fume o consuma bebidas alcohólicas

P(F o B) = P(F U B) = P(F) + P(B) – P(F ∩ B)

P(F U B) = 210/500 + 258/500 – 122/500 = 346/500 = 0,692

b) Coma entre comidas o consuma bebidas alcohólicas

P(C o B) = P(C U B) = P(C) + P(B) – P(C ∩ B)

P(C U B) = 216/500 + 258/500 – 83/500 = 391/500 = 0,782

c) No fume o no coma entre comidas

P(F′ o C′) = P(F′ U C′) = P(F′) + P(C′) – P(F′ ∩ C′)

P(F′) = 1 – P(F) = 1 – 210/500 = 29/50

P(C′) = 1 – P(C) = 1 – 216/500 = 71/125

P(F′ ∩ B′) (aplicar las leyes de Morgan)

Leyes de Morgan: $(A' \cap B') = A' \cup B' = (A \, U \, B)'$

$(A' U \, B') = A' \cap B' = (A \, \cap B)'$

P(F′ ∩ C′) = P(F U C)′ = 1 – P(F U C) = 1 – [P(F) + P(C) – P(F ∩ C)] =

= 1 –(210/500 + 216/500 – 97/500) = 1 – 329/500 =171/500

P(F′ o C′) = P(F′ U C′) = 29/50 + 71/125 – 171/500 = 0,806

d) Fume o consuma bebidas alcohólicas o coma entre comidas

P(F U B U C) = P(F) + P(B) + P(C) – P(F ∩ B) - P(F ∩ C) - P(B ∩ C) + P(F ∩ B ∩ C) =

P(F U B U C) = 210/500 + 258/500 + 216/500 – 122 /500 – 97/500 – 83/500 + 52/500 =

P(F U B U C) = 434/500 = 0,868

3. Existe interés por la vida de un componente electrónico. Suponga que se sabe que la probabilidad de que el componente funcione más de 6000 horas es 0,42. Suponga, además, que la probabilidad de que el componente *no dure más de* 4000 horas es 0,04.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea menor o igual a 6000 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea mayor que 4000 horas?

Solución

Sea A = componente funciona más de 6000 horas P(A) = 0,42

Sea B = componente no funciona más de 4000 horas P(B) = 0,04

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea menor o igual a 6000 horas?

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0{,}42 = 0{,}58$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea mayor que 4000 horas?

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

4. El administrador de una empresa desea conocer la relación del tipo de cliente y la forma de pago, para lo cual aplicó un cuestionario durante un mes a sus clientes, obteniendo los siguientes datos:

	Pagos		
Cliente	Crédito (C)	Contado (A)	Total
Frecuente (F)	80	65	145
Eventual (E)	30	25	55
Total	110	90	200

a) ¿Qué probabilidad existe de que sea cliente frecuente?

$$P(F) = 145/200$$

b) ¿Qué probabilidad hay de que sea cliente frecuente y pague a crédito?

$$P(F \text{ y } C) = 80/200$$

c) ¿Qué probabilidad de que sea un cliente eventual o pague a crédito?

$$P(E \cup C) = P(E) + P(C) - P(E \cap C) =$$

$$P(E \cup C) = 55/200 + 110/200 - 30/200 = 135/200 = 0{,}675$$

d) ¿Qué probabilidad de que el administrador seleccione un cliente sea eventual y no pague al contado?

$$P(E \cap C') = P(E \cap C) = 25/200 = 0{,}125$$

Ejercicios propuestos

1. Supongamos que en una fábrica de automóviles, el 5% de los coches presentan un defecto en el sistema eléctrico, el 3% un defecto en la pintura y el 2% un defecto en ambos sistemas. ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar tenga al menos uno de estos defectos?.

2. Una empresa de telecomunicaciones está evaluando la fiabilidad de una nueva antena de telefonía móvil. Se sabe que el 2% de las antenas de este tipo fallan debido a problemas electrónicos, el 1% debido a daños físicos y el 0.5% debido a ambos problemas. ¿Cuál es la probabilidad de que una antena seleccionada al azar tenga al menos uno de estos problemas?

3. Una fábrica de automóviles realiza un control de calidad exhaustivo en sus vehículos. Se registra si un vehículo presenta defectos en la pintura (P) o en el sistema eléctrico (E). Los resultados de la inspección se muestran en la siguiente tabla de contingencia:

	Defecto en la pintura		
Sistema eléctrico	Defecto en pintura (P)	Sin defecto en pintura (P^c)	Total
Defecto eléctrico (E)	20	24	
Sin defecto eléctrico (E^c)	40	38	
Total			

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil seleccionado al azar tenga al menos un defecto (ya sea en la pintura o en el sistema eléctrico)?

b. ¿Cuál es la probabilidad que no tenga ningún defecto?

c. ¿Cuál es la probabilidad que tenga un defecto eléctrico pero no tenga defecto en pintura?

Regla de Multiplicación en Probabilidad

La regla de multiplicación es una herramienta fundamental en la teoría de la probabilidad que nos permite calcular la probabilidad de que ocurran dos o más eventos de manera conjunta. En otras palabras, nos ayuda a determinar la probabilidad de que sucedan varias cosas a la vez.

Se utiliza para los siguientes eventos:

Eventos independientes: Si dos eventos A y B son independientes (es decir, la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro), entonces la probabilidad de que ambos ocurran se calcula multiplicando sus probabilidades individuales: **$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.**

Ejemplo de eventos independientes:

- Lanzar una moneda dos veces y obtener cara en ambos lanzamientos.

- Sacar una bola roja de una urna y luego, sin reponerla, sacar otra bola roja.

Eventos dependientes: Si los eventos no son independientes (la ocurrencia de uno afecta la probabilidad del otro), utilizamos la probabilidad condicional: $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$. Donde: $P(B|A)$ representa la probabilidad de que ocurra B dado que A ya ha ocurrido.

Ejemplo de eventos dependientes:

Sacar un as de una baraja de 52 cartas y luego, sin reponerla, sacar otro as.

Elegir al azar a una persona de una población y luego elegir a otra persona del mismo grupo.

Ejemplos

1. Supongamos que tenemos una bolsa con 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Sacamos una bola al azar y luego, sin reponerla, sacamos otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas rojas?

Solución

Eventos**:**

A: Sacar una bola roja en el primer intento.

B: Sacar una bola roja en el segundo intento, dado que ya sacamos una roja en el primero.

Probabilidades**:**

P(A) = 5/8 (hay 5 bolas rojas de 8 totales)

P(B|A) = 4/7 (si ya sacamos una roja, quedan 4 rojas de 7 totales)

Aplicando la regla de multiplicación: P(A y B) = P(A) * P(B|A) = (5/8) * (4/7) = 5/14

Por lo tanto, la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 5/14.

2. Supongamos que una fábrica tiene un sistema de alarma compuesto por dos componentes independientes: un sensor de movimiento (evento A) y una sirena (evento B). Para que la alarma suene correctamente, ambos componentes deben funcionar. Supongamos que la probabilidad de que el sensor de movimiento falle es del 2% y la probabilidad de que la sirena falle es del 3%. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de alarma funcione correctamente?.

Solución

P(A) = 1 - P(A') = 1 – 0,02 = 0,98

P(B) = 1 - P(B') = 1 – 0,03 = 0,97

Dado que los componentes son independientes, podemos aplicar la regla de multiplicación:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) * P(B) = 0.98 * 0.97 \approx 0{,}9506$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el sistema de alarma funcione correctamente es de aproximadamente 95,06%.

Ejercicios propuestos

Supongamos que un puente está soportado por dos pilares principales. La probabilidad de falla de cada pilar durante un terremoto de cierta magnitud es del 2%. ¿Cuál es la probabilidad de que el puente colapse completamente durante el terremoto, asumiendo que la falla de un pilar no afecta la probabilidad de falla del otro?

Una fábrica de automóviles produce dos componentes clave: motores y transmisiones. La probabilidad de que un motor salga defectuoso es de 0.02, y la probabilidad de que una transmisión salga defectuosa es de 0,01. Suponiendo que los defectos en los motores y las transmisiones son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que un automóvil salga con ambos componentes defectuosos?

Probabilidad Condicional

Se define como la probabilidad de que ocurra un evento B cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A y se denota como P(B/A) y se lee **"la probabilidad condicional de B dado que ocurrió A"**. Se denota de la siguiente manera:

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad si\, P(A) > 0$$

Ejemplo.

1. Si P(A) = 0,6 ; P(B) = 0,4 y P(A∩B)=0,18. Calcular:

a) P(A|B)

b) P(B|A)

Solución

a) P(A|B) = la probabilidad condicional de A dado que ocurrió B

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}40} = 0{,}45$$

b) P(B|A) = la probabilidad condicional de B dado que ha ocurrido A

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}18}{0{,}60} = 0{,}30$$

2. Una cafetería desea conocer la opinión de sus clientes con respecto al servicio prestado y la calidad de sus productos. A cada cliente se le entrega un cuestionario para que lo conteste. De este cuestionario se seleccionó en forma aleatoria la pregunta de calidad del servicio. Los resultados obtenidos de la primera semana se muestran en el siguiente cuadro.

	Calidad de servicio			
	Bueno (B)	Regular (R)	Malo (M)	Total
Hombre (H)	25	21	8	54
Mujer (F)	20	18	6	44
Niño (N)	10	5	3	18
Total	55	44	17	116

a) ¿Cuál es la probabilidad de que indique que el servicio es bueno dado que sea hombre?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que indique que el servicio es malo dado que sea mujer?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea niño dado que indique que el servicio sea bueno?

Solución

a) P(B/H)

$$P\left({}^{B}/_{H}\right) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)} = \frac{25/116}{54/116} = 0{,}463$$

La probabilidad de seleccionar una persona que indique que el servicio sea bueno dado que sea hombre es 0,463.

b) P(M/F)

$$P\left({}^{M}/_{F}\right) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{6/116}{44/116} = 0{,}136$$

La probabilidad de seleccionar una persona que indique que el servicio sea malo dado que sea mujer es 0,136.

c) P(N/B)

$$P\left({}^{N}/_{B}\right) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} = \frac{10/116}{55/116} = 0{,}182$$

La probabilidad de seleccionar una persona que sea niño dado que indique que el servicio sea bueno es 0,182.

3. El 76% de los ríos de Sudamérica tienen un alto contenido de nitritos y el 45% contienen acumulación de plásticos. Además, el 30% contienen alto contenido de nitritos y acumulación de plásticos. Si se toma al azar un río de Sudamérica, ¿cuál es la probabilidad que presente una acumulación de plásticos dado que tiene un alto contenido de nitritos?

Solución

Sea A el evento de alto contenido de nitritos y B la acumulación de plásticos, tenemos lo siguiente:

P(A) = 0,76 P(B) = 0,45 P(A ∩ B) = 0,30

P(B/A) = ?

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}30}{0{,}76} = 0{,}395$$

La probabilidad sería del 0,395 o 39,5%.

Ejercicios propuestos

1. Un taller sabe que por término medio acuden: por la mañana 5 automóviles con problemas eléctricos, 8 con problemas mecánicos y 4 con problemas de chapa, y por la tarde 3 con problemas eléctricos, tres con problemas mecánicos y uno con problemas de chapa.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana?

b.. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil con problemas chapa acuda por la tarde?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil asista en la mañana con problemas mecánicos?

2. Una fábrica de microprocesadores produce dos tipos de chips: A y B. Estos chips pueden ser enviados a dos centros de distribución: X e Y. Los datos de producción y envío se resumen en la siguiente tabla de contingencia:

	Centro de distribución X	Centro de distribución Y
Chip A	200	300
Chip B	150	250

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un chip seleccionado al azar sea del tipo B, dado que fue enviado al centro de distribución Y?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un chip seleccionado al azar provenga del centro de distribución X?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el chip seleccionado provenga del centro de distribución X, dado que el tipo de chip enviado fue el B?

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Variable aleatoria

La V.A. es un valor numérico que corresponde a un resultado de un experimento aleatorio. Algunos ejemplos son: número de caras obtenidas al lanzar seis veces una moneda, número de llamadas que recibe un teléfono durante una hora, tiempo de fallo de un componente eléctrico,. Es decir, toda aquella variable que está influenciada por la probabilidad se conoce como V.A.

Dentro de las variables aleatorias existen, fundamentalmente, dos tipos. Su clasificación, depende del tipo de número que arroja la función matemática. Una variable aleatoria puede ser de dos tipos:

Variable aleatoria discreta: Una variable aleatoria es discreta si los números a los que da lugar son números enteros. La forma de calcular las probabilidades de una variable aleatoria discreta es a través de la función de probabilidad.

Variable aleatoria continua: Una variable aleatoria es continua en caso de que los números a los que dé lugar no sean números enteros. Es decir, tengan decimales. La probabilidad de que se dé un suceso determinado correspondiente a una variable aleatoria continua, viene establecida por la función de densidad.

Función de probabilidad

Toda variable aleatoria tiene asociada una función de probabilidad, f(x).

1. En las variables discretas se conoce como función de masa de probabilidad (f.m.d.). Asigna a cada valor posible de la variable una probabilidad específica, de manera que la suma de todas las probabilidades sea igual a 1. Se escribe como $\boldsymbol{f(x) = P(X = x)}$ que corresponde a la probabilidad en un punto X.

2. En las variables continuas se conoce como función de densidad de probabilidad (fdp). A diferencia de la f.m.p., la f.d.p. no representa directamente una probabilidad, sino la densidad de probabilidad en un punto. El área bajo la curva de la f.d.p. en un intervalo nos da la probabilidad de que la variable tome un valor dentro de ese intervalo. Se escribe como $\boldsymbol{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$ que es lo mismo decir $\boldsymbol{P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx}$

La función de probabilidad permite:

1. Modelar fenómenos aleatorios: Nos permite describir matemáticamente cómo se comportan los eventos aleatorios.

2. Calcular probabilidades: Podemos utilizar la función de probabilidad para calcular la probabilidad de que ocurra un determinado evento.

3. Tomar decisiones: En muchos campos, como la economía, la ingeniería y las ciencias sociales, se utilizan las funciones de probabilidad para tomar decisiones bajo incertidumbre.

Cabe destacar, que una variable aleatoria es una función que asigna un valor, usualmente numérico, al resultado de un experimento aleatorio

<u>Ejemplo:</u> Supongamos que tenemos una variable aleatoria X que representa el número de caras que obtenemos al lanzar dos monedas. Los posibles valores de X son 0, 1 y 2 (0 caras, 1 cara o 2 caras). La fmp de X sería la siguiente:

Evento	Valor de X	Probabilidad
0 ceros	0	¼
1 cara	1	½
2 caras	2	1/4

Función de distribución acumulativa (FDA)

También conocida como función de distribución, representa la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual a un cierto valor x. Es decir, F(x) = P(X ≤ x).

1. En las variables aleatorias discretas, la función de la función de distribución acumulada es $\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad -\infty < t < \infty.}$ Además,. $\boldsymbol{\sum_{x} f(x) = 1}$.

2. En las variables aleatorias continuas, la función de distribución acumulada es $\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.}$

Como se interpreta el valor obtenido:

Probabilidad acumulada: F(x) representa la probabilidad de que la variable aleatoria X tome cualquier valor menor o igual a x.

Área bajo la curva: En el caso de variables aleatorias continuas, F(x) representa el área bajo la curva de densidad de probabilidad hasta el punto x.

Entre sus propiedades de la FDA:

- No decreciente: A medida que x aumenta, F(x) también aumenta o permanece constante.

- Valores entre 0 y 1: 0 ≤ F(x) ≤ 1 para cualquier valor de x.

- Límites:

Límite cuando x tiende a menos infinito: F(-∞) = 0.

Límite cuando x tiende a infinito: F(∞) = 1.

¿Para qué sirve la FDA?

- Calcular probabilidades: Permite calcular la probabilidad de que la variable aleatoria caiga dentro de un intervalo.

- Comparar distribuciones: Se puede utilizar para comparar diferentes distribuciones de probabilidad.

- Inferencia estadística: Es fundamental en muchos procedimientos de inferencia estadística.

En la distribución de probabilidad debe tenerse en cuenta medidas estadísticas, similar al caso de variables vista en estadística descriptiva, con la salvedad que en las variables aleatorias se incluye el factor de probabilidad.

Para tener en cuenta el uso de algunos términos al momento de resolver ejercicios del cálculo de probabilidad, por ejemplo:

- ✓ Probabilidad de al menos 10, sería $P\ (X\ \geq 10) =\ 1 - P(X <\ 10) = 1 - P(X\ \leq 9)$
- ✓ Probabilidad a lo sumo 10, sería $P(X\ \leq\ 10) =\ P(X\ =\ 0) + \ldots + P(X\ =\ 10)$
- ✓ Probabilidad a lo más 10, sería $P(X\ \leq\ 10)$
- ✓ Probabilidad como mínimo 10, sería $P(X \geq 10)$
- ✓ Probabilidad menos de 10, seria $P(X\ <\ 10)\ =\ P(X\ \leq\ 9)$
- ✓ Probabilidad de un máximo de 10, sería $P(X\ \leq\ 10)$
- ✓ Probabilidad de 10 o más, sería $P(X\ \geq\ 10)$
- ✓ Probabilidad de 10 o menos, sería $P(X\ \leq\ 10)$
- ✓ Probabilidad por lo menos 12, sería P(X ≥ 12) = 1 – P(X < 12)
- ✓ Probabilidad no más de 4, seria P(X ≤ 4)
- ✓ Probabilidad no más de 4, sería P(X ≤ 4)
- ✓ Probabilidad de que exactamente 3, sería P(X =3) – P(X=2)

Esperanza Matemática

La esperanza matemática de una variable aleatoria *X* es el número que expresa el valor medio del fenómeno que representa dicha variable, y constituye la principal medida de centralización de la distribución de una V.A. Se denota como ***E(X).*** También es llamada valor esperado, y es igual a la sumatoria de las probabilidades de que exista un suceso aleatorio, multiplicado por el valor del suceso aleatorio.

Variable aleatoria discreta	**Variable aleatoria continua**
Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores x1, x2, ... con f.m.p. *P(X = xi) para i = 1,2,3…* $$\boldsymbol{\mu = E[X] = \sum_i x_i * f(x_i)}$$ La media se obtiene multiplicando cada valor de X por su probabilidad y sumando estos productos para todos los posibles valores de X (el sumatorio se puede extender desde 1 hasta n, ó ∞.).	Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad *f(x)* $$\boldsymbol{\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}$$ Cuando la variable aleatoria sólo tome valores en un intervalo (a, b), la media se puede escribir también como: $$\boldsymbol{\mu = E[X] = \int_{a}^{b} x f(x) dx}$$

Varianza y Desviación Estándar

Sea una variable aleatoria X se define:

1. Varianza de X: $\boldsymbol{\sigma^2 = Var[X] = E[X - E[X]^2] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0}$

2. Desviación estándar de X: $\boldsymbol{\sigma = DE[X] = \sqrt{Var[X]}}$

Variable aleatoria discreta	**Variable aleatoria continua**
$Var(X) = E[(X-\mu)]^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$ $Var\ [X] = \sum_x x^2 f(x) - [\sum_x x f(x)]^2 = E[X^2] - E[X]^2$ $\sigma = DE[X] = \sqrt{Var[X]}$	$Var(X) = E[(X-\mu)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 fxdx$ $Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx]^2$ $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$ $\sigma = DE[X] = \sqrt{Var[X]}$

Distribución de Probabilidad Discreta

Una distribución de probabilidad discreta es aquella distribución que define las probabilidades de una variable aleatoria discreta. Por lo tanto, una distribución de probabilidad discreta solo puede tomar un número finito de valores (generalmente enteros).

Entre algunas de las características de la distribución de probabilidad discreta tenemos las siguientes:

1. La variable aleatoria solo puede tomar un número finito o contablemente infinito de valores.
2. Estos valores suelen ser números enteros, aunque pueden ser cualquier conjunto de valores discretos.
3. La función de probabilidad llamada también función de masa de probabilidad (f.m.p.) se denota como P(X=x), asigna una probabilidad a cada uno de los posibles valores de la variable aleatoria. La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1 (exhaustividad).
4. Se representa mediante una gráfica de barras, donde la altura de cada barra indica la probabilidad asociada a un valor particular de la variable aleatoria.
5. Esperanza (media): Es el valor promedio que se espera obtener al realizar un gran número de experimentos.
6. Varianza: Mide la dispersión de los valores de la variable aleatoria respecto a la media.
7. Desviación estándar: Es la raíz cuadrada de la varianza y proporciona una medida de la dispersión en las mismas unidades que la variable aleatoria.

Distribución Binomial (x, n, p)

También llamada distribución binómica, es una distribución de probabilidad que cuenta el número de éxitos al realizar una serie de experimentos dicotómicos e independientes con una probabilidad de éxito constante.

La distribución binomial es una distribución que describe el número de resultados con éxito de una secuencia de ensayos de Bernoulli.

Por ejemplo, el número de veces que sale cara al lanzar una moneda 25 veces es una distribución binomial, porque la otra posibilidad es que salga 25 veces sello.

En general, el número total de experimentos realizados se define con el parámetro **n**, mientras que **p** es la probabilidad de éxito de cada experimento. De modo que una variable aleatoria que sigue una distribución binomial se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{X \sim Bin(n, p)}$$

Hay que tener en cuenta que en una distribución binomial se repite exactamente el mismo experimento *n* veces y los experimentos son independientes entre sí, de modo que la probabilidad de éxito de cada experimento es la misma (**p**).

La función de probabilidad de la distribución binomial se denota por **P(X = x)**, donde X es la variable aleatoria que representa el número de éxitos, x es un valor específico de X (número de éxitos), n es el número total de ensayos y p es la probabilidad de éxito en cada ensayo.

La fórmula para calcular la probabilidad de una distribución binomial es la siguiente:

$$\mathbf{P[X\ =\ x]\ =\binom{n}{x}\ p^x(1-p)^{n-x}}$$

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{x!\,(n-x)!}}$$

$$\mathbf{P[X\ =\ x]\ =\ \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\ p^x(1-p)^{n-x}}$$

Por otro lado, la probabilidad acumulada de la distribución binomial se calcula sumando las probabilidades del número de casos de éxito en cuestión y todas las probabilidades anteriores. De modo que la fórmula para calcular una probabilidad acumulada de una distribución binomial es la siguiente:

$$\mathbf{P[X \le x] = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

La esperanza (media o valor esperado) y la varianza son respectivamente

$$\boldsymbol{E(X)\ =\ n.p} \qquad\qquad \boldsymbol{Var(X)\ =\ n.p.q}$$

Ejemplo. Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 0,60. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

a) Las cinco personas

b) Al menos tres personas

c) Exactamente dos personas

d) Hallar la media y la varianza

Solución n = 5 p = 0,60

a) P(X = 5)

$$P[X\ =\ 5] = \frac{5!}{5!\,(5-5)!}\ (0{,}6)^5(1-\ 0{,}6)^{5-5} = 0{,}078$$

La probabilidad de que transcurridos 30 años vivan las cinco personas es 0,078

b) x al menos 3 personas = P(X ≥ 3) = 1 – P(X < 3) = 1 – P(X ≤ 2)

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X= 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \le 2) = {}_5C_0 * (0.6)^0 * (0{,}4)^5 + {}_5C_1 * (0{,}6)^1 * (0{,}4)^4 + {}_5C_2 * (0{,}6)^2 * (0{,}4)^3 = 0{,}317$$

Nota. nCx es una manera de representar la combinatoria

c) P(X = 2)

$$P(X = 2) = {}_5C_2 * (0{,}6)^2 * (0{,}4)^3 = 0{,}230$$

d) Hallar la media y la varianza

$$\mu = E[X] = n.p = 5 * 0{,}60 = 3$$

$$\sigma^2 = V[X] = n.p.(1-p) = 5 * 0{,}60 * 0{,}4 = 0{,}12$$

En Excel podemos utilizar la siguiente función:

=DISTR.BINOM.N(núm_éxito;ensayos;prob_éxito;acumulado)

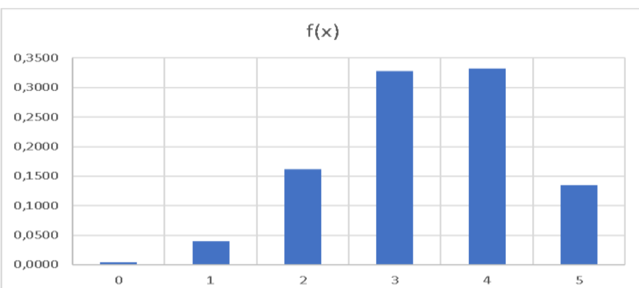
Siendo núm_éxito el valor de x; ensayos el valor de n; prob_éxito el valor de la probabilidad y acumulado (verdadero o falso)

En la siguiente tabla se muestra la función de probabilidad [f(x)] y la función de distribución acumulada [F(x)] haciendo uso del Excel.

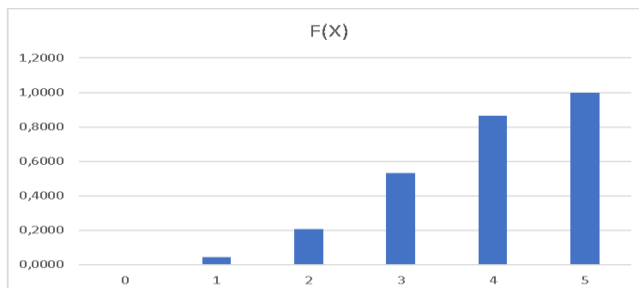
- Para f(x) utilizamos la siguiente función =DISTR.BINOM.N(A2;B2;C2;FALSO)

- Para F(x) utilizamos la siguiente función =DISTR.BINOM.N(A2;B2;C2;VERDADERO)

X	N	P	f(x)	F(X)
0	5	0,67	0,0039	0,0039
1	5	0,67	0,0397	0,0436
2	5	0,67	0,1613	0,2050
3	5	0,67	0,3275	0,5325
4	5	0,67	0,3325	0,8650
5	5	0,67	0,1350	1,0000



Gráfica de función de probabilidad



Gráfica de función de distribución

Distribución Poisson (λ)

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad que define la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante un período de tiempo. Es decir, la distribución de Poisson sirve para modelizar variables aleatorias discretas que describen el número de veces que se repite un fenómeno en un intervalo de tiempo.

Por ejemplo, el número de llamadas que recibe una central telefónica por minuto es una variable aleatoria discreta que se puede definir utilizando la distribución de Poisson.

La distribución de Poisson tiene un parámetro característico, que se representa con la letra griega λ e indica el número de veces que se espera que ocurra el evento estudiado durante un intervalo dado.

$$\boldsymbol{X \sim Poisson(\lambda)}$$

En general, la distribución de Poisson se usa para modelizar estadísticamente sucesos cuya probabilidad de ocurrencia es muy baja. Por ejemplo:

- El número de personas que entran en una tienda en una hora
- El número de vehículos que pasan la frontera entre dos países durante un mes.
- El número de llamadas que recibe una central telefónica por minuto.
- El número de piezas defectuosas producidas por una fábrica durante un día.

En una distribución de Poisson, la probabilidad de que ocurran exactamente ***x*** eventos en un intervalo dado, cuando la tasa promedio de ocurrencia es **λ**, se calcula mediante la siguiente fórmula, que corresponde a la función de distribución:

$$\mathbf{P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}}$$

Para determinar la probabilidad acumulada **(P[X ≤ x])** se deben hallar las probabilidades de todos los valores hasta el valor en cuestión y luego sumar todas las probabilidades calculadas.

La media y varianza son:

$$\mathbf{E[X] = \lambda} \qquad \mathbf{Var[X] = \lambda}$$

Ejemplo. El número de productos vendidos por una marca sigue una distribución de Poisson de λ=5 unidades/día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día haya vendido justo 7 unidades? ¿Y la probabilidad de que en un día haya vendido 3 unidades o menos?

Solución λ = 5 unidades / día

a) Vendido justo 7 unidades

b) Vendido 3 unidades o menos

c) Calcular la media y la desviación estándar

a) P(X = 7)

$$P[X = 7] = \frac{e^{-5}.5^{7}}{7!} = 0{,}104$$

La probabilidad de que un día haya vendido 7 unidades es de 0,104 o 10,4%

b) P(X ≤ 3)

$$P(X \leq 3) = P(X= 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P[X = 0] = \frac{e^{-5}.5^{0}}{0!} = 0{,}007$$

$$P[X = 1] = \frac{e^{-5}.5^{1}}{1!} = 0{,}034$$

$$P[X = 2] = \frac{e^{-5}.5^{2}}{2!} = 0{,}084$$

$$P[X = 3] = \frac{e^{-5}.5^{3}}{3!} = 0{,}140$$

$$P(X \leq 3) = 0{,}007 + 0{,}034 + 0{,}084 + 0{,}140 = 0{,}265$$

c) Hallar la media y la desviación estándar

$$\mu = E[X] = \lambda = 5$$

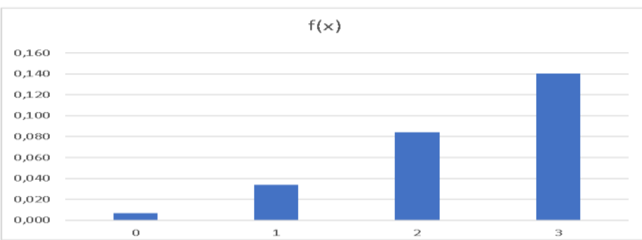
$$\sigma = DE[X] = \sqrt{\lambda} = \sqrt{5} = 2{,}24$$

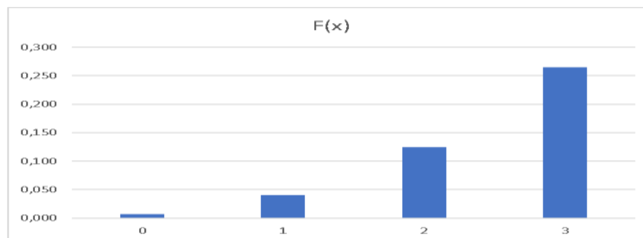
En Excel se utiliza la función:

=POISSON.DIST(x; media;acumulada)

Haciendo uso de la función mencionada tenemos que la función de probabilidad f(x) y la función de distribución F(x) son las siguientes:

X	λ	f(x)	F(x)
0	5	0,007	0,007
1	5	0,034	0,040
2	5	0,084	0,125
3	5	0,140	0,265





Aproximación Binomial a Poisson

La distribución binomial y la de Poisson son dos herramientas fundamentales en probabilidad y estadística. Aunque modelan fenómenos diferentes, bajo ciertas condiciones, la distribución binomial se puede aproximar a la distribución de Poisson, lo que simplifica significativamente los cálculos.

¿Cuándo es útil esta aproximación?

1. Número de ensayos grande (n): Cuando el número de ensayos en una distribución binomial es muy grande.
2. Probabilidad de éxito pequeña (p): Cuando la probabilidad de éxito en cada ensayo es muy pequeña.

Ejemplo. En un estudio de higiene industrial y seguridad, una población de trabajadores de un grupo de industrias que manejan procesos, donde hay ruido, el 5% sufren de problemas emocionales que interfieren con su trabajo. Si se saca una muestra aleatoria de 60 trabajadores, ¿Cuál es la probabilidad de que más de 2 trabajadores sufran de disturbios emocionales?

Solución p = 0,05 n = 60

P(X > 2) = 1 – P(X ≤ 2)

Como no tenemos λ se calcula mediante $\lambda = n.p$

$$\lambda = 60\ x\ 0{,}05 = 3$$

$$P[X = 0] = \frac{e^{-3}.3^{0}}{0!} = 0{,}0498$$

$$P[X = 1] = \frac{e^{-3}.3^{1}}{1!} = 0{,}1494$$

$$P[X = 2] = \frac{e^{-3}.3^{2}}{2!} = 0{,}2240$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240) = 0{,}5768$$

Ejercicios propuestos

1. Una fábrica tiene una norma de control de calidad consistente en elegir al azar diariamente 20 artículos producidos y determinar el número de unidades defectuosas. Si hay dos o más artículos defectuosos la fabricación se detiene para la inspección de los equipos. Se conoce por experiencia que la probabilidad de que un artículo producido sea defectuoso es 5%. Encuentre: (a) La probabilidad de que en cualquier día de la producción se detenga al aplicar esta norma de control de calidad. (b) ¿Qué probabilidad se obtendría si la norma de control de calidad establecida por la fábrica es menor de 3 artículos?. (c) Determine el valor promedio y la desviación estándar de artículos producidos defectuosos.

2. Una empresa produce circuitos integrados. Se sabe que el 2% de los circuitos presentan defectos. Si se selecciona una muestra aleatoria de 100 circuitos, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 estén defectuosos?.

3. Una línea de producción fabrica componentes electrónicos. La probabilidad de que un componente sea defectuoso es de 0.05. Si se seleccionan 50 componentes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que a lo más 2 estén defectuosos?

4. Un ingeniero de seguridad afirma que sólo 40% de los trabajadores utilizan cascos de seguridad cuando comen en el lugar de trabajo. Suponga que esta afirmación es cierta y (a) calcule la probabilidad de que 4 de 6 trabajadores elegidos al azar utilicen sus cascos mientras comen en el lugar de trabajo. (b) Calcular la probabilidad de que 2 a 4 trabajadores usen cascos mientras comen en el lugar de trabajo.

4. El número promedio de accidentes automovilísticos en una determinada carretera por semana es de 2. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana específica ocurran exactamente 4 accidentes? (b) ¿ Cuál es la probabilidad de que en una semana específica ocurran menos de 4 accidentes?. (c) Determine la media y varianza.

5. Imagina que una fábrica produce bombillas. La probabilidad de que una bombilla sea defectuosa es de 0.002 (es decir, 0.2%). Si se produce un lote de 5000 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 15 bombillas sean defectuosas?

6. Una empresa de prefabricados de concreto produce vigas. Se sabe que, en promedio, ocurren 0.5 defectos por viga. Si se produce un lote de 200 vigas, ¿cuál es la probabilidad de que haya a lo más 2 vigas defectuosas?

Tabla A.1 Sumas de probabilidad binomial $\sum_{x=0}^{r} b(x;n,p)$

		P									
N	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
1	**0**	0.9000	0.8000	0.7500	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	**0**	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.3600	0.2500	0.1600	0.0900	0.0400	0.0100
	1	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8400	0.7500	0.6400	0.5100	0.3600	0.1900
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	**0**	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2160	0.1250	0.0640	0.0270	0.0080	0.0010
	1	0.9720	0.8960	0.8438	0.7840	0.6480	0.5000	0.3520	0.2160	0.1040	0.0280
	2	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9360	0.8750	0.7840	0.6570	0.4880	0.2710
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	**0**	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.9477	0.8192	0.7383	0.6517	0.4752	0.3125	0.1792	0.0837	0.0272	0.0037
	2	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8208	0.6875	0.5248	0.3483	0.1808	0.0523
	3	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9744	0.9375	0.8704	0.7599	0.5904	0.3439
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	**0**	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	**0**	0.5314	0.2621	0.1780	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000
	1	0.8857	0.6554	0.5339	0.4202	0.2333	0.1094	0.0410	0.0109	0.0016	0.0001
	2	0.9842	0.9011	0.8306	0.7443	0.5443	0.3438	0.1792	0.0705	0.0170	0.0013
	3	0.9987	0.9830	0.9624	0.9295	0.8208	0.6563	0.4557	0.2557	0.0989	0.0159
	4	0.9999	0.9984	0.9954	0.9891	0.9590	0.8906	0.7667	0.5798	0.3446	0.1143
	5	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9959	0.9844	0.9533	0.8824	0.7379	0.4686
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	**0**	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0280	0.0078	0.0016	0.0002	0.0000	
	1	0.8503	0.5767	0.4449	0.3294	0.1586	0.0625	0.0188	0.0038	0.0004	0.0000
	2	0.9743	0.8520	0.7564	0.6471	0.4199	0.2266	0.0963	0.0288	0.0047	0.0002
	3	0.9973	0.9667	0.9294	0.8740	0.7102	0.5000	0.2898	0.1260	0.0333	0.0027
	4	0.9998	0.9953	0.9871	0.9712	0.9037	0.7734	0.5801	0.3529	0.1480	0.0257
	5	1.0000	0.9996	0.9987	0.9962	0.9812	0.9375	0.8414	0.6706	0.4233	0.1497
	6		1.0000	0.9999	0.9998	0.9984	0.9922	0.9720	0.9176	0.7903	0.5217
	7			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
8	**0**	0.4305	0.1678	0.1001	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	
	1	0.8131	0.5033	0.3671	0.2553	0.1064	0.0352	0.0085	0.0013	0.0001	
	2	0.9619	0.7969	0.6785	0.5518	0.3154	0.1445	0.0498	0.0113	0.0012	0.0000
	3	0.9950	0.9437	0.8862	0.8059	0.5941	0.3633	0.1737	0.0580	0.0104	0.0004
	4	0.9996	0.9896	0.9727	0.9420	0.8263	0.6367	0.4059	0.1941	0.0563	0.0050
	5	1.0000	0.9988	0.9958	0.9887	0.9502	0.8555	0.6846	0.4482	0.2031	0.0381
	6		0.9999	0.9996	0.9987	0.9915	0.9648	0.8936	0.7447	0.4967	0.1869
	7		1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9832	0.9424	0.8322	0.5695
	8				1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	**0**	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0101	0.0020	0.0003	0.0000		
	1	0.7748	0.4362	0.3003	0.1960	0.0705	0.0195	0.0038	0.0004	0.0000	
	2	0.9470	0.7382	0.6007	0.4628	0.2318	0.0898	0.0250	0.0043	0.0003	0.0000
	3	0.9917	0.9144	0.8343	0.7297	0.4826	0.2539	0.0994	0.0253	0.0031	0.0001
	4	0.9991	0.9804	0.9511	0.9012	0.7334	0.5000	0.2666	0.0988	0.0196	0.0009
	5	0.9999	0.9969	0.9900	0.9747	0.9006	0.7461	0.5174	0.2703	0.0856	0.0083
	6	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9750	0.9102	0.7682	0.5372	0.2618	0.0530
	7		1.0000	0.9999	0.9996	0.9962	0.9805	0.9295	0.8040	0.5638	0.2252
	8			1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9899	0.9596	0.8658	0.6126
	9					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	**0**	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000		
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0473	0.0064	0.0001
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7		0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8		1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9				1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	**0**	0.3138	0.0859	0.0422	0.0198	0.0036	0.0005	0.0000			
	1	0.6974	0.3221	0.1971	0.1130	0.0302	0.0059	0.0007	0.0000		
	2	0.9104	0.6174	0.4552	0.3127	0.1189	0.0327	0.0059	0.0006	0.0000	
	3	0.9815	0.8389	0.7133	0.5696	0.2963	0.1133	0.0293	0.0043	0.0002	
	4	0.9972	0.9496	0.8854	0.7897	0.5328	0.2744	0.0994	0.0216	0.0020	0.0000
	5	0.9997	0.9883	0.9657	0.9218	0.7535	0.5000	0.2465	0.0782	0.0117	0.0003
	6	1.0000	0.9980	0.9924	0.9784	0.9006	0.7256	0.4672	0.2103	0.0504	0.0028
	7		0.9998	0.9988	0.9957	0.9707	0.8867	0.7037	0.4304	0.1611	0.0185
	8		1.0000	0.9999	0.9994	0.9941	0.9673	0.8811	0.6873	0.3826	0.0896
	9			1.0000	1.0000	0.9993	0.9941	0.9698	0.8870	0.6779	0.3026
	10					1.0000	0.9995	0.9964	0.9802	0.9141	0.6862
	11						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
12	**0**	0.2824	0.0687	0.0317	0.0138	0.0022	0.0002	0.0000			
	1	0.6590	0.2749	0.1584	0.0850	0.0196	0.0032	0.0003	0.0000		
	2	0.8891	0.5583	0.3907	0.2528	0.0834	0.0193	0.0028	0.0002	0.0000	
	3	0.9744	0.7946	0.6488	0.4925	0.2253	0.0730	0.0153	0.0017	0.0001	
	4	0.9957	0.9274	0.8424	0.7237	0.4382	0.1938	0.0573	0.0095	0.0006	0.0000
	5	0.9995	0.9806	0.9456	0.8822	0.6652	0.3872	0.1582	0.0386	0.0039	0.0001
	6	0.9999	0.9961	0.9857	0.9614	0.8418	0.6128	0.3348	0.1178	0.0194	0.0005
	7	1.0000	0.9994	0.9972	0.9905	0.9427	0.8062	0.5618	0.2763	0.0726	0.0043
	8		0.9999	0.9996	0.9983	0.9847	0.9270	0.7747	0.5075	0.2054	0.0256
	9		1.0000	1.0000	0.9998	0.9972	0.9807	0.9166	0.7472	0.4417	0.1109
	10				1.0000	0.9997	0.9968	0.9804	0.9150	0.7251	0.3410
	11					1.0000	0.9998	0.9978	0.9862	0.9313	0.7176
	12						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	**0**	0.2542	0.0550	0.0238	0.0097	0.0013	0.0001	0.0000			
	1	0.6213	0.2336	0.1267	0.0637	0.0126	0.0017	0.0001	0.0000		
	2	0.8661	0.5017	0.3326	0.2025	0.0579	0.0112	0.0013	0.0001		
	3	0.9658	0.7473	0.5843	0.4206	0.1686	0.0461	0.0078	0.0007	0.0000	
	4	0.9935	0.9009	0.7940	0.6543	0.3530	0.1334	0.0321	0.0040	0.0002	
	5	0.9991	0.9700	0.9198	0.8346	0.5744	0.2905	0.0977	0.0182	0.0012	0.0000
	6	0.9999	0.9930	0.9757	0.9376	0.7712	0.5000	0.2288	0.0624	0.0070	0.0001
	7	1.0000	0.9988	0.9944	0.9818	0.9023	0.7095	0.4256	0.1654	0.0300	0.0009
	8		0.9998	0.9990	0.9960	0.9679	0.8666	0.6470	0.3457	0.0991	0.0065
	9		1.0000	0.9999	0.9993	0.9922	0.9539	0.8314	0.5794	0.2527	0.0342
	10			1.0000	0.9999	0.9987	0.9888	0.9421	0.7975	0.4983	0.1339
	11				1.0000	0.9999	0.9983	0.9874	0.9363	0.7664	0.3787
	12					1.0000	0.9999	0.9987	0.9903	0.9450	0.7458
	13						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	**0**	0.2288	0.0440	0.0178	0.0068	0.0008	0.0001	0.0000			
	1	0.5846	0.1979	0.1010	0.0475	0.0081	0.0009	0.0001			
	2	0.8416	0.4481	0.2811	0.1608	0.0398	0.0065	0.0006	0.0000		
	3	0.9559	0.6982	0.5213	0.3552	0.1243	0.0287	0.0039	0.0002		
	4	0.9908	0.8702	0.7415	0.5842	0.2793	0.0898	0.0175	0.0017	0.0000	
	5	0.9985	0.9561	0.8883	0.7805	0.4859	0.2120	0.0583	0.0083	0.0004	
	6	0.9998	0.9884	0.9617	0.9067	0.6925	0.3953	0.1501	0.0315	0.0024	0.0000
	7	1.0000	0.9976	0.9897	0.9685	0.8499	0.6047	0.3075	0.0933	0.0116	0.0002
	8		0.9996	0.9978	0.9917	0.9417	0.7880	0.5141	0.2195	0.0439	0.0015
	9		1.0000	0.9997	0.9983	0.9825	0.9102	0.7207	0.4158	0.1298	0.0092
	10			1.0000	0.9998	0.9961	0.9713	0.8757	0.6448	0.3018	0.0441
	11				1.0000	0.9994	0.9935	0.9602	0.8392	0.5519	0.1584
	12					0.9999	0.9991	0.9919	0.9525	0.8021	0.4154
	13					1.0000	0.9999	0.9992	0.9932	0.9560	0.7712
	14						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		P									
n	***R***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
15	**0**	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000				
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000			
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000		
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001		
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0093	0.0007	0.0000	
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0950	0.0152	0.0008	
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8		0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9		0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0022
	10		1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11			1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12				1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13					1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14						1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	**0**	0.1853	0.0281	0.0100	0.0033	0.0003	0.0000				
	1	0.5147	0.1407	0.0635	0.0261	0.0033	0.0003	0.0000			
	2	0.7892	0.3518	0.1971	0.0994	0.0183	0.0021	0.0001			
	3	0.9316	0.5981	0.4050	0.2459	0.0651	0.0106	0.0009	0.0000		
	4	0.9830	0.7982	0.6302	0.4499	0.1666	0.0384	0.0049	0.0003		
	5	0.9967	0.9183	0.8103	0.6598	0.3288	0.1051	0.0191	0.0016	0.0000	
	6	0.9995	0.9733	0.9204	0.8247	0.5272	0.2272	0.0583	0.0071	0.0002	
	7	0.9999	0.9930	0.9729	0.9256	0.7161	0.4018	0.1423	0.0257	0.0015	0.0000
	8	1.0000	0.9985	0.9925	0.9743	0.8577	0.5982	0.2839	0.0744	0.0070	0.0001
	9		0.9998	0.9984	0.9929	0.9417	0.7728	0.4728	0.1753	0.0267	0.0005
	10		1.0000	0.9997	0.9984	0.9809	0.8949	0.6712	0.3402	0.0817	0.0033
	11			1.0000	0.9997	0.9951	0.9616	0.8334	0.5501	0.2018	0.0170
	12				1.0000	0.9991	0.9894	0.9349	0.7541	0.4019	0.0684
	13					0.9999	0.9979	0.9817	0.9006	0.6482	0.2108
	14					1.0000	0.9997	0.9967	0.9739	0.8593	0.4853
	15						1.0000	0.9997	0.9967	0.9719	0.8147
	16							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		P									
n	*r*	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
17	**0**	0.1668	0.0225	0.0075	0.0023	0.0002	0.0000				
	1	0.4818	0.1182	0.0501	0.0193	0.0021	0.0001	0.0000			
	2	0.7618	0.3096	0.1637	0.0774	0.0123	0.0012	0.0001			
	3	0.9174	0.5489	0.3530	0.2019	0.0464	0.0064	0.0005	0.0000		
	4	0.9779	0.7582	0.5739	0.3887	0.1260	0.0245	0.0025	0.0001		
	5	0.9953	0.8943	0.7653	0.5968	0.2639	0.0717	0.0106	0.0007	0.0000	
	6	0.9992	0.9623	0.8929	0.7752	0.4478	0.1662	0.0348	0.0032	0.0001	
	7	0.9999	0.9891	0.9598	0.8954	0.6405	0.3145	0.0919	0.0127	0.0005	
	8	1.0000	0.9974	0.9876	0.9597	0.8011	0.5000	0.1989	0.0403	0.0026	0.0000
	9		0.9995	0.9969	0.9873	0.9081	0.6855	0.3595	0.1046	0.0109	0.0001
	10		0.9999	0.9994	0.9968	0.9652	0.8338	0.5522	0.2248	0.0377	0.0008
	11		1.0000	0.9999	0.9993	0.9894	0.9283	0.7361	0.4032	0.1057	0.0047
	12			1.0000	0.9999	0.9975	0.9755	0.8740	0.6113	0.2418	0.0221
	13				1.0000	0.9995	0.9936	0.9536	0.7981	0.4511	0.0826
	14					0.9999	0.9988	0.9877	0.9226	0.6904	0.2382
	15					1.0000	0.9999	0.9979	0.9807	0.8818	0.5182
	16						1.0000	0.9998	0.9977	0.9775	0.8332
	17							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	**0**	0.1501	0.0180	0.0056	0.0016	0.0001	0.0000				
	1	0.4503	0.0991	0.0395	0.0142	0.0013	0.0001				
	2	0.7338	0.2713	0.1353	0.0600	0.0082	0.0007	0.0000			
	3	0.9018	0.5010	0.3057	0.1646	0.0328	0.0038	0.0002			
	4	0.9718	0.7164	0.5187	0.3327	0.0942	0.0154	0.0013	0.0000		
	5	0.9936	0.8671	0.7175	0.5344	0.2088	0.0481	0.0058	0.0003		
	6	0.9988	0.9487	0.8610	0.7217	0.3743	0.1189	0.0203	0.0014	0.0000	
	7	0.9998	0.9837	0.9431	0.8593	0.5634	0.2403	0.0576	0.0061	0.0002	
	8	1.0000	0.9957	0.9807	0.9404	0.7368	0.4073	0.1347	0.0210	0.0009	
	9		0.9991	0.9946	0.9790	0.8653	0.5927	0.2632	0.0596	0.0043	0.0000
	10		0.9998	0.9988	0.9939	0.9424	0.7597	0.4366	0.1407	0.0163	0.0002
	11		1.0000	0.9998	0.9986	0.9797	0.8811	0.6257	0.2783	0.0513	0.0012
	12			1.0000	0.9997	0.9942	0.9519	0.7912	0.4656	0.1329	0.0064
	13				1.0000	0.9987	0.9846	0.9058	0.6673	0.2836	0.0282
	14					0.9998	0.9962	0.9672	0.8354	0.4990	0.0982
	15					1.0000	0.9993	0.9918	0.9400	0.7287	0.2662
	16						0.9999	0.9987	0.9858	0.9009	0.5497
	17						1.0000	0.9999	0.9984	0.9820	0.8499
	18							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		p									
n	***r***	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
19	**0**	0.1351	0.0144	0.0042	0.0011	0.0001					
	1	0.4203	0.0829	0.0310	0.0104	0.0008	0.0000				
	2	0.7054	0.2369	0.1113	0.0462	0.0055	0.0004	0.0000			
	3	0.8850	0.4551	0.2631	0.1332	0.0230	0.0022	0.0001			
	4	0.9648	0.6733	0.4654	0.2822	0.0696	0.0096	0.0006	0.0000		
	5	0.9914	0.8369	0.6678	0.4739	0.1629	0.0318	0.0031	0.0001		
	6	0.9983	0.9324	0.8251	0.6655	0.3081	0.0835	0.0116	0.0006		
	7	0.9997	0.9767	0.9225	0.8180	0.4878	0.1796	0.0352	0.0028	0.0000	
	8	1.0000	0.9933	0.9713	0.9161	0.6675	0.3238	0.0885	0.0105	0.0003	
	9		0.9984	0.9911	0.9674	0.8139	0.5000	0.1861	0.0326	0.0016	
	10		0.9997	0.9977	0.9895	0.9115	0.6762	0.3325	0.0839	0.0067	0.0000
	11		1.0000	0.9995	0.9972	0.9648	0.8204	0.5122	0.1820	0.0233	0.0003
	12			0.9999	0.9994	0.9884	0.9165	0.6919	0.3345	0.0676	0.0017
	13			1.0000	0.9999	0.9969	0.9682	0.8371	0.5261	0.1631	0.0086
	14				1.0000	0.9994	0.9904	0.9304	0.7178	0.3267	0.0352
	15					0.9999	0.9978	0.9770	0.8668	0.5449	0.1150
	16					1.0000	0.9996	0.9945	0.9538	0.7631	0.2946
	17						1.0000	0.9992	0.9896	0.9171	0.5797
	18							0.9999	0.9989	0.9856	0.8649
	19							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	**0**	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000					
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000				
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002				
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0000			
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003			
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000		
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003		
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	
	10		0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11		0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12		1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13			1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14				1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15					0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16					1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17						0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18						1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19							1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20								1.0000	1.0000	1.0000

Tabla A.2 Sumas de probabilidad de Poisson $\sum_{x=0}^{r} p(X;\lambda)$

	λ								
r	**0.1**	**0.2**	**0.30**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000
	λ								
r	**1.0**	**1.5**	**2.0**	**2.5**	**3.0**	**3.5**	**4.0**	**4.5**	**5.0**
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000
	λ								
r	**5.5**	**6.0**	**6.5**	**7.0**	**7.5**	**8.0**	**8.5**	**9.0**	**9.5**
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911

18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20						0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996

	λ								
r	**10.0**	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989
24	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317

	λ								
r	**10.0**	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751

17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989
24	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317
25		0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554
26		1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718
27			0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827
28			1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897
29				1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941
30					0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967
31					1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982
32						1.0000	0.9999	0.9996	0.9990
33							0.9999	0.9998	0.9995
34							1.0000	0.9999	0.9998
35								1.0000	0.9999
36									0.9999
37									1.0000