



UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

TEMA I. MATEMÁTICA II

(0826201)

MÉTODO POR PARTES

1. **DEFINICIÓN DEL MÉTODO POR PARTES**
2. **MODO DE APLICACIÓN**
3. **PROCEDIMIENTO A SEGUIR PARA APLICACIÓN DEL MÉTODO**
4. **EJERCICIOS RESUELTOS**
5. **ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA**

OBJETIVO: CALCULAR INTEGRALES INDEFINIDAS EMPLEANDO EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

MÉTODO POR PARTES

DEFINICION:

Una razón para transformar una integral en otra es la de producir una integral que sea más fácil de evaluar. Hay dos formas generales de lograr dicha transformación; la primera es la integración por sustitución y la segunda es la *integración por partes*.

La fórmula de integración por partes es una consecuencia sencilla de la regla del producto para derivadas.

Si u y v son funciones diferenciables de x , por la regla del producto tenemos:

$$(u \cdot v)' = (u' \cdot v) + (u \cdot v')$$

O bien

$$u \cdot dv = (u \cdot v)' - (v \cdot du)$$

Finalmente, integrando esta última ecuación se obtiene la fórmula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad \dots\dots\dots (I)$$

La fórmula I expresa una integral que bajo la forma $\int u \cdot dv$ puede reducirse al cálculo de una segunda integral $\int v \cdot du$. Eligiendo adecuadamente u y dv , la segunda integral puede resultar más fácil de calcular que la primera.

A veces, para reducir la integral dada a una inmediata, hay que emplear más de una vez el método de integración por partes.

MODO DE APLICACIÓN

Casi de forma general, este método se aplica para integrales de la forma:

- $\int P(x) Q(x) dx$, donde $P(x)$ es un polinomio y $Q(x)$ es una de las funciones siguientes: $e^{\alpha x}$, $\sin(\alpha x)$, $\cos(\alpha x)$, $\ln(\alpha x)$ y cualquiera de las funciones trigonométricas inversas.

- $\int e^{\alpha x} Q(x) dx$, donde $Q(x)$ es una de las funciones siguientes: $\text{sen}(\alpha x)$, $\text{cos}(\alpha x)$, $\ln(\alpha x)$, y cualesquiera de las funciones trigonométricas inversas
- $\int \ln(x) Q(x) dx$, donde $Q(x)$ es una de las funciones siguientes: $\text{sen}(\alpha x)$, $\text{cos}(\alpha x)$, y cualesquiera de las funciones trigonométricas inversas
- $\int F(x) Q(x) dx$, donde $F(x)$ es la función trigonométrica $\text{sen}(\alpha x)$ ó $\text{cos}(\alpha x)$ y $Q(x)$ es cualquiera de las funciones trigonométricas inversas
- $\int \sec^m(\alpha x) dx$ ó $\int \csc^m(\alpha x) dx$, donde m es un entero impar positivo.

Además, a integrales cuyo integrando contienen:

- Sólo funciones trigonométricas inversas.
- Ciertas raíces cuadradas.
- Sólo logaritmos.

PROCEDIMIENTO:

1. **PASO 1:** Seleccionamos u , utilizando el orden de prioridad de las funciones, el cual lo podemos recordar con la regla nemotécnica de la palabra ILATE cada letra representa a una función (Inversa, Logarítmica, Algebraica, Trigonométrica y Exponencial) y esta se utiliza de la siguiente manera: se identifican cada una de las funciones presentes en la integral y aquella que se ubique primero en el orden de izquierda a derecha será la que debemos seleccionar como u , quedando la segunda expresión para el dv .
2. **PASO 2:** se debe derivar u y integrar el dv . De esta manera se obtienen las partes du y v que aparecen en la formula de integración por partes.
3. **PASO 3:** sustituir las partes en la formula.

4. **PASO 4:** revisar que la expresión integral de la formula sea más sencilla de integrar.
5. **PASO 5:** integrar hasta obtener la primitiva total. De ser necesario, se puede utilizar este método las veces que lo requiera para conseguir la solución final.

EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO 3.1:

Hallar $\int (x \cos(x)) dx$

Paso 1: Seleccionar el u y dv .

$$u = x \quad y \quad dv = \cos(x) dx$$

Derivamos u , $du = dx$

Integramos dv $\int dv = \int \cos(x) dx \rightarrow v = \text{sen}(x) + C$

Paso 2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx \\ &= x \text{sen } x + \cos x + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2:

Hallar $\int e^{3x} \text{sen } 2x dx$

Solución:

Paso 1: Seleccionar el u y dv .

$$u = e^{3x} \quad y \quad dv = \text{sen}(2x) dx$$

Derivamos u , $du = e^{3x} \cdot 3 dx$

Integramos dv $\int dv = \int \text{sen}(2x) dx$ para poder integrar se debe plantear cambio de variable en el argumento ya que la integral no es directa, entonces el cambio es $t = 2x \rightarrow dt = 2 dx$, sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} \rightarrow v &= \frac{1}{2} \int \text{sen}(t) dt \\ \rightarrow v &= -\frac{1}{2} \cos(t) + c \end{aligned}$$

$$\rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

Paso 2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x \, dx$$

Paso 3: La última integral obtenida se resuelve mediante **integración por partes**

Paso 3.1: Seleccionar el u y dv .

$$u = e^{3x} \quad y \quad dv = \cos(2x) \, dx$$

Derivamos u , $du = e^{3x} \cdot 3 \, dx$

Integramos dv $\int dv = \int \cos(2x) \, dx$ para poder integrar se debe plantear cambio de variable en el argumento ya que la integral no es directa, entonces el cambio es $t = 2x \rightarrow dt = 2 \, dx$, sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\rightarrow v = \frac{1}{2} \int \cos(t) \, dt$$

$$\rightarrow v = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(t) + c$$

$$\rightarrow v = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + c$$

Paso 3.2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx$$

Paso 5: Sustituimos el resultado obtenido del paso 3, en el resultado del paso 2 y resolvemos la ecuación resultante

$$\begin{aligned}
\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x \, dx \\
\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx \right) \\
\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx + \frac{9}{4} \int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x \\
\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= \frac{4}{13} \left(-\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x \right) + C \\
\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= \frac{1}{13} e^{3x} (-2 \cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x) + C
\end{aligned}$$

Este tipo de integral es conocida como integral cíclica, ya que la expresión de la integral dada aparece al aplicar la fórmula de integración por partes y su solución se obtiene al agrupar de un solo lado de la igualdad la integral original dada.

EJEMPLO 3.3

Hallar $\int (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} \, dx$

Paso 1: Seleccionar el u y dv .

$$u = (x^3 + 5x^2 - 2) \quad y \quad dv = e^{2x} \, dx$$

Derivamos u , $du = (3x^2 + 10x) \, dx$

Integramos dv $\int dv = \int e^{2x} \, dx$ para poder integrar se debe plantear cambio de variable en el argumento ya que la integral no es directa, entonces el cambio es $t = 2x \rightarrow dt = 2 \, dx$, sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\rightarrow v &= \frac{1}{2} \int e^t \, dt \\
\rightarrow v &= \frac{1}{2} e^t + c \\
\rightarrow v &= \frac{1}{2} e^{2x} + c
\end{aligned}$$

Paso 2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\int (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (3x^2 + 10x) e^{2x} \, dx$$

Paso 3: La última integral obtenida se resuelve mediante integración por partes, obtenemos:

Paso 3.1: Seleccionar el u y dv .

$$u = (3x^2 + 10x) \quad y \quad dv = e^{2x} dx$$

Derivamos u , $du = (6x + 10) dx$

Integramos dv $\int dv = \int e^{2x} dx$, ya fue resuelta anteriormente copiamos la primitiva.

$$\rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

Paso 3.2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\int (3x^2 + 10x) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (3x^2 + 10x) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (6x + 10) e^{2x} dx$$

Paso 4: La última integral obtenida se resuelve mediante integración por partes,

Paso 4.1: Seleccionar el u y dv .

$$u = (6x + 10) \quad y \quad dv = e^{2x} dx$$

Derivamos u , $du = (6) dx$

Integramos dv $\int dv = \int e^{2x} dx$, ya fue resuelta anteriormente copiamos la primitiva.

$$\rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

Paso 4.2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int (6x + 10) e^{2x} dx &= \frac{1}{2} (6x + 10) e^{2x} - 3 \int e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} (6x + 10) e^{2x} - \frac{3}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

Recordar que $\int e^{2x} dx$, ya fue resuelta anteriormente copiamos la primitiva.

$$\rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

Paso 5: Sustituimos el resultado obtenido del paso 4, en el resultado del paso 3

$$\begin{aligned}
 \int (3x^2 + 10x) e^{2x} dx &= \frac{1}{2} (3x^2 + 10x) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (6x + 10) e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} (3x^2 + 10x) e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (6x + 10) e^{2x} - \frac{3}{2} e^{2x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (3x^2 + 10x) e^{2x} - \frac{1}{4} (6x + 10) e^{2x} + \frac{3}{4} e^{2x}
 \end{aligned}$$

Paso 6: Sustituimos el resultado obtenido del paso 5, en el resultado del paso 2

$$\begin{aligned}
 \int (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} dx &= \frac{1}{2} (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (3x^2 + 10x) e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (3x^2 + 10x) e^{2x} - \frac{1}{4} (6x + 10) e^{2x} + \frac{3}{4} e^{2x} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} - \frac{1}{4} (3x^2 + 10x) e^{2x} + \frac{1}{8} (6x + 10) e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + C \\
 &= \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{7}{4} x^2 - \frac{7}{4} x - \frac{1}{8} \right) e^{2x} + C
 \end{aligned}$$

OBSERVACION: Este ejercicio requiere de la aplicación del método por partes varias veces, por lo que podemos ir resolviendo las integrales que se obtienen de manera individual y luego se unen los resultados, así como se hizo en la resolución de este ejercicio.

EJEMPLO 3.4

Hallar $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

Paso 1: Seleccionar el u y dv .

$$u = \ln(x) \quad y \quad dv = \frac{1}{x^3} dx$$

Derivamos u , $du = \frac{1}{x} dx$

Integramos dv $\int dv = \int \frac{1}{x^3} dx$ para poder integrar se debe plantear por propiedades de potencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\rightarrow v &= \int x^{-3} dt \\ \rightarrow v &= \frac{x^{-2}}{-2} + c \\ \rightarrow v &= -\frac{1}{2}x^{-2} + c\end{aligned}$$

Paso 2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^3} dx &= -\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= -\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + C\end{aligned}$$

Como la integral que se obtiene ya fue resuelta previamente, simplemente copiamos la primitiva.

EJEMPLO 3.5

Hallar: $\int \ln^2 x dx$

Paso 1: Seleccionar el u y dv .

$$u = \ln^2(x) \quad y \quad dv = dx$$

Derivamos u , $du = 2\ln(x) \frac{1}{x} dx$

Integramos dv $\int dv = \int dx \rightarrow v = x + c$

Paso 2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx$$

Paso 3: La última integral obtenida se resuelve mediante integración por partes,

Paso 3.1: Seleccionar el u y dv .

$$u = \ln(x) \quad y \quad dv = dx$$

Derivamos u , $du = \frac{1}{x} dx$

Integramos $dv \quad \int dv = \int dx \rightarrow v = x + c$

Paso 3.2: Sustituimos los valores de u y dv en la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x \end{aligned}$$

Paso 4: Sustituimos el resultado obtenido del paso 3, en el resultado del paso 2

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx \\ &= x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

En los siguientes enlaces encontraras otros ejemplos por medio de videos que te pueden ayudar a entender mejor el tema.

REVISAR LOS SIGUIENTES ENLACES

<https://www.youtube.com/watch?v=93kW5colCAU&t=16s>

<https://www.youtube.com/watch?v=6nu-snYlA0Q>

https://www.youtube.com/watch?v=hvYDrt_Aq2U

<https://www.youtube.com/watch?v=jo31gr9xQgE>

ACTIVIDAD

Realizar del Libro 801 ejercicios resueltos los ejercicios propuestos del capítulo 4/ Del 27 al 82.pag 119.