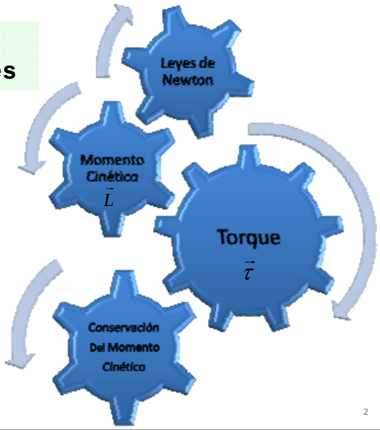
TEMA 12

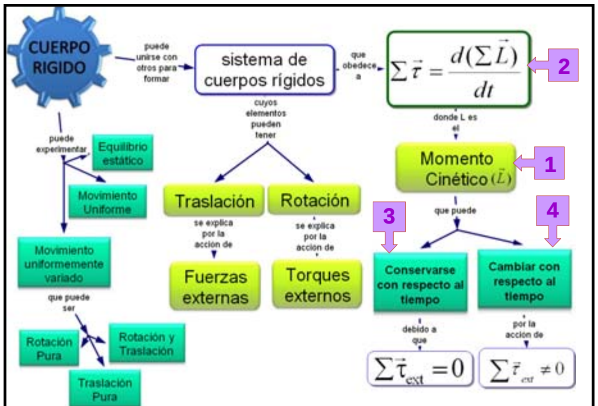
DINAMICA ROTACIONAL

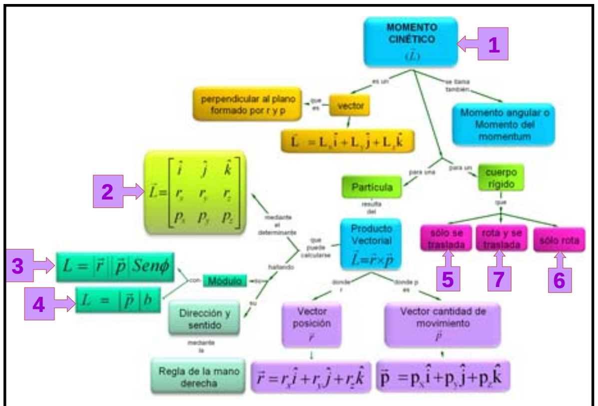
RIGIDOS II

Material diseñado y elaborado
por Prof.: Amada Padilla
para el curso de Física I de la UNET.
Marzo, 2010

Contenidos conceptuales







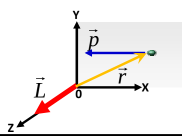
Momento Cinético, $\vec{L}$ (kgm^2/s)

El momento cinético es también llamado momento de la cantidad de movimiento, momento angular o cantidad de movimiento angular, es el análogo rotacional de la cantidad de movimiento.

El *momento cinético* para la partícula respecto al origen *0* se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Como resulta del producto cruz de los vectores cantidad de movimiento y posición de la partícula, el momento cinético es perpendicular a éstos dos vectores, es decir, es perpendicular al plano del movimiento, siendo además el momento cinético una cantidad vectorial (un vector).



Si se conocen de forma vectorial los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$

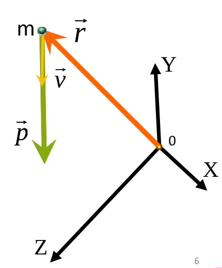
En este caso para determinar el momento cinético de una partícula respecto del origen de un sistema de referencia, se hace partir de la definición de momento cinético:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

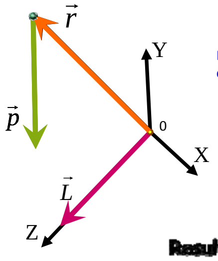
Considérese un sistema de coordenadas XYZ:

Considérese la cantidad de movimiento que experimenta la partícula: $\vec{p} = m\vec{v}$

Determínese el vector $\vec{r}$, como el vector que va desde el origen del sistema de coordenadas hasta la partícula.



Si se conocen de forma vectorial los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$



Determínese el momento cinético de la partícula, a partir de la expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

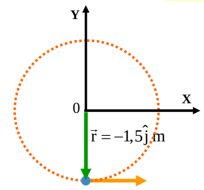
La solución del producto cruz se hará mediante el cálculo del determinante:

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}$$

Resultando: $\boxed{\vec{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k} \; \left(Kg.m^2/s^2\right)}$

Ejercicio 12.1

Una partícula de masa 0,5 kg, describe un movimiento circular. En el instante de tiempo t=3s la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}_3 = -5\hat{j}$ m, experimentando una velocidad $\vec{v}_3 = 6\hat{i}$ m/s. Determine el momento cinético de la partícula en t=3s.



$\vec{r} = -1{,}5\hat{j}$ m

$\vec{p} = \left(0{,}5 * 6\hat{i}\right)$ kg.m/s

$\vec{p} = 3\hat{i}$ kg.m/s

Considérese un del sistema de coordenadas XYZ

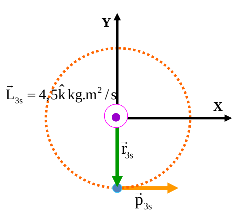
Considérese el vector cantidad de movimiento de la partícula, que es $\vec{p} = m\,\vec{v}$

Determínese el vector $\vec{r}$, como el vector que va desde el origen hasta la partícula

El momento cinético de la partícula se calcula a partir de la expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Continuación Ejercicio 12.1



El momento cinético en t=3s es:

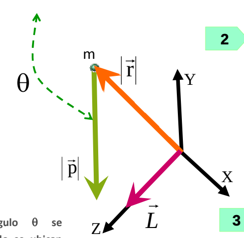
$$\vec{L}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{p}_3$$
$$\vec{L}_3 = (-1{,}5\hat{j}) \times (3\hat{i})$$
$$\vec{L}_3 = -4{,}5\hat{j} \times \hat{i}$$
$$\vec{L}_3 = -4{,}5(-\hat{k})$$
$$\vec{L}_3 = 4{,}5\;\hat{k}\;\; kg.m^2/s$$

El momento cinético es perpendicular a los vectores r y p, en este caso el momento cinético es dibujado saliendo de la pantalla.

Si se conocen el módulo del vector r y el módulo del vector p

Se puede resolver: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

A partir de la expresión: $\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{p}\right| sen\theta$



1 Donde el ángulo θ se determina cuando se ubican los vectores r y p unidos por sus orígenes (cola con cola).

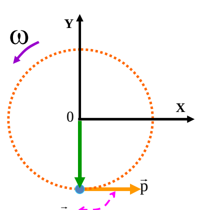
2 La dirección y sentido se determina con la regla de la mano derecha. Haciendo rotar a $\vec{r}$ hacia $\vec{p}$

3 De tal modo que el momento cinético sea:

$$\vec{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k}$$

Ejercicio 12.2

Una partícula de masa 0,5 kg, describe un movimiento circular. En el instante de tiempo t=3s la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}_3 = -5\hat{j}$ m, experimentando una rapidez V_3= 6 m/s. Determine el momento cinético de la partícula en t=3s



$\theta = 90^o$

Considérese un del sistema de coordenadas XYZ

Determínese el módulo del vector , que es el módulo del vector que va desde el origen hasta la partícula:

$$\left|\vec{r}\right| = 1{,}5m$$

Considérese el módulo del vector cantidad de movimiento de la partícula, que es $\left|\vec{p}\right| = \left|m\;\vec{v}\right|$

$$\left|\vec{p}\right| = 0{,}5 * 6$$
$$\left|\vec{p}\right| = 3\,kg.m/s$$

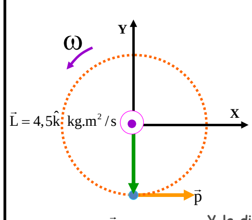
Dibújense los vectores r y p, de tal modo que queden unidos por sus orígenes.

Determínese el ángulo que forman los vectores r y p cuando están colita con colita.

Continuación 12.2

El momento cinético de la partícula se determina a partir de la expresión:

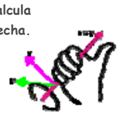
$$L = \left|\vec{r}\right| . \left|\vec{p}\right| . Sen\theta$$



El momento cinético en t=3s es:

$$L_3 = \left|\vec{r}_3\right| . \left|\vec{p}_3\right| . Sen\theta$$
$$L_3 = 1{,}5 * 3 * Sen90^o$$
$$L_3 = 4{,}5\;\; kg.m^2/s$$

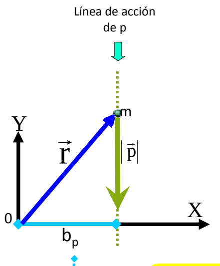
Y la dirección y sentido se calcula con la regla de la mano derecha. Haciendo rotar a $\vec{r}$ hacia $\vec{p}$



$$\vec{L} = 4{,}5\hat{k}\;\; kg.m^2/s$$

El momento cinético es perpendicular a los vectores r y p, en este caso el momento cinético es dibujado saliendo de la pantalla.

Si se conoce el módulo de la cantidad de movimiento y la perpendicular a la línea de acción del vector cantidad de movimiento



Se puede calcular el módulo del momento cinético a partir del brazo del vector cantidad de movimiento, en este caso el módulo del momento cinético será igual a:

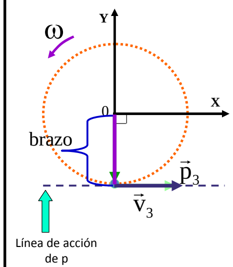
$$|\vec{L}| = b_p\,|\vec{p}| = b_p\,|m\vec{v}|$$

Y la dirección y sentido se determina con la regla de la mano derecha. Haciendo rotar a r hacia p. Cuando los dos vectores están unidos por sus orígenes.

Siendo el brazo del vector cantidad de movimiento la perpendicular (distancia más corta) desde el eje de giro a la línea de acción del vector cantidad de movimiento.

Ejercicio 12.3

Una partícula de masa 0,5 kg, describe un movimiento circular de radio 1,5m. En el instante de tiempo t=3s la partícula experimenta una velocidad $\vec{v}_3 = 6\hat{i}\ m/s$, tal y como se muestra en la figura. Determine el momento cinético de la partícula en t=3s



Considérese un del sistema de coordenadas XYZ

Considérese el módulo del vector cantidad de movimiento de la partícula, que es $|\vec{p}| = |m\ \vec{v}|$

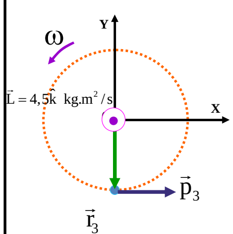
$$|\vec{p}| = 0{,}5 * 6$$

$$|\vec{p}| = 3\ kg.m/s$$

Dibújense el vector p, y determínese el brazo de éste vector como la recta perpendicular desde el origen del sistema de coordenadas hasta la línea de acción de p.

$$brazo = |\vec{r}| = 1{,}5m$$

Continuación Ejercicio 12.3



Determínese el módulo del momento cinético a partir de:

$$L_3 = brazo\,|\vec{p}\ |$$

$$L_3 = R * |\vec{p}_3|$$

$$L_3 = 1{,}5 * 3$$

$$L_3 = 4{,}5\ kg.m^2/s$$

Dibújense el vector r, y ubíquese de tal modo que quede unido su origen con el origen del vector p.

Y la dirección y sentido se determina con la regla de la mano derecha. Haciendo rotar a $\vec{r}$ hacia $\vec{p}$

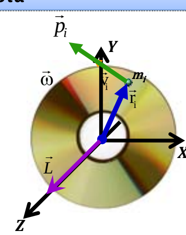
$$\vec{L} = 4{,}5\hat{k}\ \ kg.m^2/s$$

El momento cinético es perpendicular a los vectores r y p, en este caso el momento cinético es dibujado saliendo de la pantalla.

Momento Cinético $\vec{L}$ Para un cuerpo rígido que sólo rota

En la figura se muestra un disco que se encuentra en el plano X,Y con su centro en el origen.

El disco gira en torno a su eje (eje z) con velocidad angular $\vec{\omega}$



Si se considera el momento cinético para una partícula m_i que se mueve en el disco, se tiene:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$

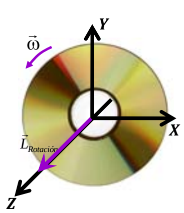
$$\vec{L}_i = r_i m_i v_i\ sen 90^0\,\hat{k} = r_i m_i v_i\,\hat{k}$$

$$pero\quad v = \omega r \Rightarrow \vec{L}_i = m_i r_i^2\vec{\omega}$$

Al sumar el momento cinético de todas las partículas del disco, y considerando que la distribución de las masas es simétrica con respecto al eje, que se denomina **eje de simetría**, se tiene:

$$\vec{L}_0 = m_1 r_1^2\vec{\omega} + m_2 r_2^2\vec{\omega} + m_3 r_3^2\vec{\omega} + \ldots = \sum m_i r_i^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

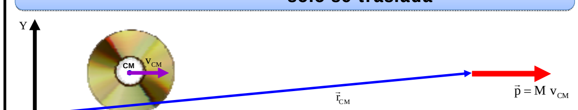
Momento Cinético $\vec{L}$ Para un cuerpo rígido que sólo rota



El momento cinético para un cuerpo rígido que sólo rota en torno a un eje de simetría es igual a

$$\vec{L}_{Rotación} = I\vec{\omega}$$

Momento Cinético $\vec{L}$ Para un cuerpo rígido que sólo se traslada



El momento cinético de un cuerpo rígido que se traslada se determina a partir de la expresión:

$$\vec{L}_{traslación} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Como el cuerpo rígido es un sistema de partículas, consideramos que el centro de masa se mueve como sí toda la masa estuviese concentrada en este punto.

$$\vec{L}_{traslación} = \vec{r}_{CM} \times M\,\vec{V}_{CM}$$

El momento cinético para un cuerpo rígido que sólo se traslada es igual al momento cinético del CM

Momento Cinético $\vec{L}$ Para un cuerpo rígido que rota y se traslada

Para hallar el momento cinético para un cuerpo que rota y se traslada se suman los momentos cinéticos de sólo rotación y sólo traslación

Momento cinético sólo rotación

$$\vec{L}_{Rotación} = I\vec{\omega}$$

Momento cinético sólo Traslación

$$\vec{L}_{Traslación} = \vec{r}_{CM} \times \vec{p}_{CM}$$

Momento cinético para un cuerpo que rota y se traslada

$$\vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{r}_{CM} \times \vec{p}_{CM}$$

Relación entre momento cinético y torque de una fuerza

Al recordar la segunda ley de Newton para una partícula en función de su cantidad de movimiento se tiene:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}$$

Ahora haremos la deducción de la expresión rotacional de la segunda ley de Newton en función del momento total de una fuerza (torque) que actúa sobre una partícula y su momento cinético.

La derivada del momento cinético con respecto al tiempo es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{d\,t}(\vec{r} \times \vec{p}) \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\,t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}$$

Recordamos que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ y $\vec{p} = m\vec{v}$, por lo que el producto cruz entre estos vectores es cero, por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} \;\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \mathrm{m}\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} \;\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \mathrm{m}\vec{a}$$

Y torque es $\vec{r} \times \vec{F}$, por lo que la expresión queda:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

Analogía rotacional de la segunda Ley de Newton para una partícula

Momento Cinético total de un sistema de partículas

Para hallar el momento cinético para un sistema de partículas, se suman los momentos cinéticos de cada una de las partículas

$$\vec{L}_{total} = \sum \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n$$

Momento cinético Total de un sistema de partículas

$$\vec{L}_{total} = \sum \vec{L}_i$$

Segunda Ley de Newton para un sistema de partículas

Si el momento cinético total para un sistema es ΣL y el torque externo neto es $\Sigma\tau_{ext}$, entonces para un sistema:

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\sum \vec{L}_{sistema}}{dt}}$$

De aquí podemos afirmar que los torques externos provocan un cambio en el momento cinético total del sistema.

Principio de conservación del momento cinético

Si la suma de los torques externos al sistema es igual a cero:

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext} = 0}$$

Entonces, en este caso, podemos afirmar que el momento cinético total del sistema no cambia, es decir:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\sum \vec{L}_{sistema}}{\mathrm{dt}} \Rightarrow 0 = \frac{\mathrm{d}\sum \vec{L}_{sistema}}{\mathrm{dt}}$$

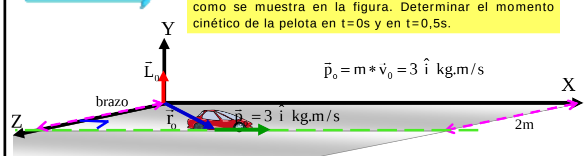
Por lo tanto:

$$\sum \vec{L} = \text{constante}$$

Es decir: $\boxed{\sum \vec{L}_{inicial} = \sum \vec{L}_{final}}$

Ejercicio 12.4

Un carrito de masa 3 kg, se mueve por un plano horizontal con velocidad constante de $\vec{v} = 1\hat{i}$ m/s, tal y como se muestra en la figura. Determinar el momento cinético de la pelota en t=0s y en t=0,5s.



$$\vec{p}_o = m * \vec{v}_0 = 3\ \hat{i}\ \text{kg.m/s}$$

El módulo del momento cinético del carrito en t=0s, es:

$$L_0 = \text{brazo} * |\vec{p}_{t=0s}|$$

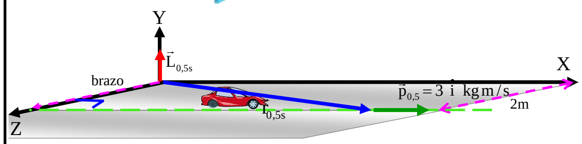
$$L_0 = 2 * |3| \Rightarrow L_0 = 6\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Y la dirección y sentido se determina con la regla de la mano derecha.

Observamos que r y p se encuentran en el plano XZ, por lo tanto al aplicar la regla de la mano derecha, obtenemos el momento cinético en la dirección de Y.

$$\vec{L}_0 = 6\ \hat{j}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Continuación Ejercicio 12.4



El módulo del momento cinético del móvil en t=0,5s, es:

$$L_{0,5s}=\text{brazo}\left|\vec{p}_{0,5s}\right|$$
$$L_{0,5s}=2*\left|3\right|\Rightarrow L_{0,5s}=6\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Y la dirección y sentido se determina con la regla de la mano derecha.

Observamos que el momento cinético del carrito no cambia con respecto al tiempo, es decir:

$$\vec{L}_{0s}=\vec{L}_{0,5s}=6\ \hat{j}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Que el momento cinético del carrito no cambie con respecto al tiempo, es debido a que el torque neto sobre el carrito es cero.

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0$$

Ahora revisemos el Problema Resuelto que se refiere a conservación del momento cinético

Si la suma de los torques externos al sistema es distinta de cero:

$$\sum\vec{\tau}_{ext}\neq 0$$

Entonces, en este caso, podemos afirmar que el momento cinético total del sistema está cambiando debido al torque neto aplicado por lo tanto:

$$\sum\vec{\tau}_{ext}=\frac{d\sum\vec{L}_{sistema}}{dt}$$

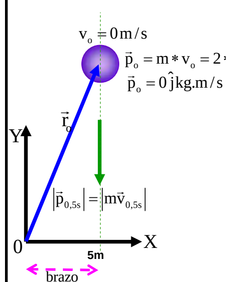
Sí las fuerzas externas son constantes, el torque neto debido a éstas fuerzas es constante, por lo tanto el momento cinético cambia con respecto del tiempo de manera constante.

Ejercicio 12.5

Una pelota de masa 2 kg, se deja caer desde un punto ubicado a 6m de altura y a una distancia de 5m respecto de la vertical, tal y como se muestra en la figura. Mientras la pelota desciende únicamente se traslada. Determinar el momento cinético de la pelota en t=0s y en t=0,5s.

El módulo del momento cinético de la pelota en t=0s, es cero porque justo en ese instante la cantidad de movimiento de la pelota es cero.

$$\vec{L}_0=0\quad \text{kg.m}^2/\text{s}$$



El módulo del momento cinético de la pelota en t=0,5s, lo podemos determinar a partir de la expresión:

$$L_{0,5s}=\text{brazo}\left|\vec{p}_{0,5s}\right|$$

Para determinar de la cantidad de movimiento en t=0,5s., primero calculamos la velocidad de la pelota en ese instante de tiempo:

$$\vec{v}_y=\vec{v}_0+\vec{g}t\ \Rightarrow\vec{v}_y=-9{,}8t$$
Para $t=0{,}5s$:
$$\vec{v}_y=-9{,}8*0{,}5\ \Rightarrow\vec{v}_{y\ t=0,5s}=-4{,}9\hat{j}\text{m/s}$$

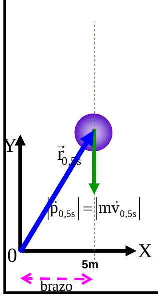
Continuación Ejercicio 12.5

Y la cantidad de movimiento es:
$$\vec{p}_{t=0,5}=m*\vec{v}_{t=0,5s}\ \Rightarrow\vec{p}_{t=0,5}=(2*-4{,}9)$$
$$\vec{p}_{t=0,5}=-9{,}8\ \text{kg.m/s}$$

Luego, el módulo del momento cinético de la pelota en t=0,5s, es:

$$L_{0,5s}=5*\left|-9{,}8\right|$$
$$L_{0,5s}=49\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Y la dirección y sentido se determina con la regla de la mano derecha.



$$\vec{L}_{0,5s}=-49\ \hat{k}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Observamos que el momento cinético de la pelota cambia con respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}\neq 0$$

Éste cambio en el momento cinético de la pelota es debido a un torque externo.

Ahora revisemos el Problema Resuelto que se refiere a un sistema de rígidos, con variación del momento cinético