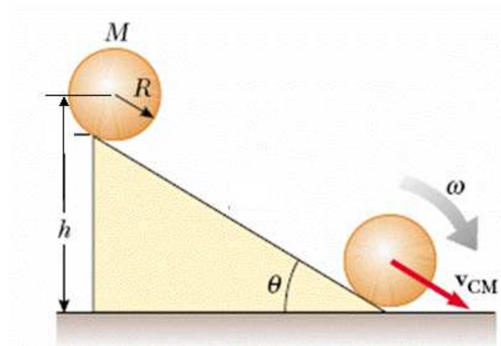
Problema

Una esfera maciza de masa M y de radio R, se suelta desde el reposo desde la parte superior de un plano inclinado en el que rueda sin deslizar, tal y como se muestra en la figura.

Determinar la rapidez al final del plano.



Solución

Para la obtención de la rapidez de la esfera al final del plano se puede hacer mediante dos métodos: **Conservación de la energía**
Método dinámico

Método de Conservación de la Energía

Entre la superficie y el cuerpo rígido existe fuerza de roce, sin embargo **el trabajo de esta fuerza es cero**, debido a que el punto en contacto entre la esfera y el cilindro (el centro instantáneo de rotación) es un punto que siempre es distinto, es decir la fuerza de roce actúa siempre en un punto distinto al no ocurrir deslizamiento. Por lo tanto **no hay pérdida de energía mecánica** y podemos afirmar que:

$$E_{0(\text{parte superior plano})} = E_{f(\text{parte inferior plano})}$$

$$\cancel{K_0}^{0} + U_{go} = K_f + \cancel{U_{gf}}^{0}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \ldots[1]$$

Sabiendo que: $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ y $\begin{matrix} V_{CM} = \omega R \\ \omega = V_{CM}/R \end{matrix}$ y sustituyendo en la ecuación [1]:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2$$

$$\cancel{M}gh = \frac{1}{2}\cancel{M}v_{CM}^2 + \frac{1}{5}\cancel{M}v_{CM}^2$$

$$gh = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)V_{CM}^2 = \frac{7}{10}V_{CM}^2$$

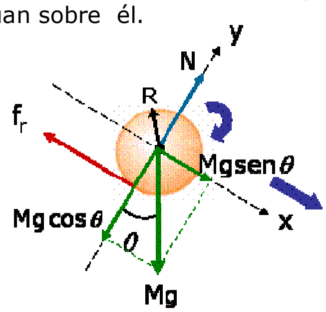
despejando V_{CM} :

$$V_{CM}^2 = \frac{10}{7}gh \Rightarrow V_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Método Dinámico

Para la aplicación de este método es necesario realizar el diagrama de cuerpo libre de la esfera e identificar las fuerzas que actúan sobre él.

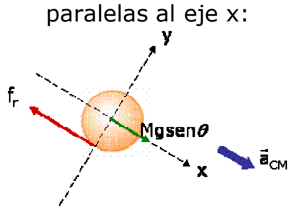
Diagrama de Cuerpo Libre, DCL:



Luego se trabaja por separado la traslación y la rotación aplicando la 2da Ley de Newton.

Traslación $\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM}$

En este paso se identifican las fuerzas paralelas al eje x:



$$\sum \vec{F_x} = M\vec{a}_{CM}$$
$$Mgsen\theta - f_r = Ma_{CM} \qquad [2]$$

Y se identifican las fuerzas en el eje Y:

$$\sum \vec{F_y} = 0$$
$$N - Mg\cos\theta = 0$$
$$N = Mg\cos\theta$$

Rotación $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

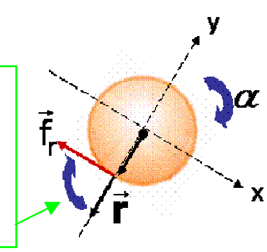
Sabiendo que torque es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Debemos identificar entonces qué fuerzas están realizando torque respecto al CM de la esfera,

la normal y el peso no hacen torque con respecto al CM (Centro de Masa) del cuerpo rígido, ya que sus líneas de acción pasan por dicho punto y tienen brazos de palanca nulo. La f_r tiene un brazo de palanca R respecto al CM:

Aplicando la regla de la mano derecha, el torque es negativo, es decir, en sentido antihorario



y recordando que $a_{CM} = \alpha r \Rightarrow \alpha = \dfrac{a_{CM}}{r}$

$$-r\,(f_r) = -I_{CM}\,\alpha$$
$$r\,(f_r) = I_{CM}\left(\frac{a_{CM}}{r}\right)$$
$$\cancel{r^2}\,(f_r) = \left(\frac{2}{5}M\cancel{r^2}\right)a_{CM}$$
$$f_r = \frac{2}{5}Ma_{CM} \qquad [3]$$

Sustituyendo (3) en (2) se tiene: $\cancel{M}gsen\theta - \frac{2}{5}\cancel{M}a_{CM} = \cancel{M}a_{CM} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{5}{7}gsen\theta \ldots [4]$

De las ecuaciones de movimiento:

$$v_{CM}^2 = \cancel{v_0^2}^{\,0} + 2a_{CM}\,x$$
$$v_{CM}^2 = 2\left(\frac{5}{7}g\cancel{sen\theta}\right)\left(\frac{h}{\cancel{sen\theta}}\right) \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \ldots [5]$$

Por trigonometría: $x = \dfrac{h}{sen\theta}$

Como se puede observar se lleva a la misma ecuación de rapidez de la esfera por cualquiera de los dos métodos.

Sí los datos son los siguientes, M=2Kg, R=0.5m, h=1m, θ=30º, g=9.8m/s^2 ; determinar

2.- La fuerza de roce
3.- El módulo de la aceleración angular de la esfera
4.- La rapidez angular de la esfera en la parte inferior del plano

Para determinar la fuerza de roce, por la ecuación [2] sabemos que:

$$f_r = \frac{2}{5} M a_{CM} \qquad [2]$$

Observamos que conocemos la masa de la esfera pero no la aceleración del CM; sin embargo podemos determinarla a partir de la ecuación **[4]**

$$a_{CM} = \frac{5}{7} g sen\theta \ldots [4]$$

$$a_{CM} = \frac{5}{7}(9.8 sen 30º) = 3.5 m/s^2$$

Y la fuerza de roce es: $f_r = \frac{2}{5}(2)(3.5) = 2.8N$

El módulo de la aceleración angular de la esfera la podemos hallar a partir de la aceleración del CM, usando la ecuación:

$\alpha = \frac{a_{CM}}{r} = \frac{3.5}{0.5} = 7 rad/s^2$ con sentido horario

La rapidez angular de la esfera en la parte inferior del plano se puede determinar de varias formas. En este caso usaremos la ecuación de la rapidez del centro de masa [5], deducida en la 1era parte del problema y a partir de esta calcular ω:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7} gh} \ \ldots [5]$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}(9.8)(1)}$$

$$v_{CM} = 3.74 m/s$$

Sabiendo que:

$$v_{CM} = \omega r$$

$$\omega = \frac{v_{CM}}{r} = \frac{3.74}{0.5}$$

$$\omega = 7.48 rad/s$$