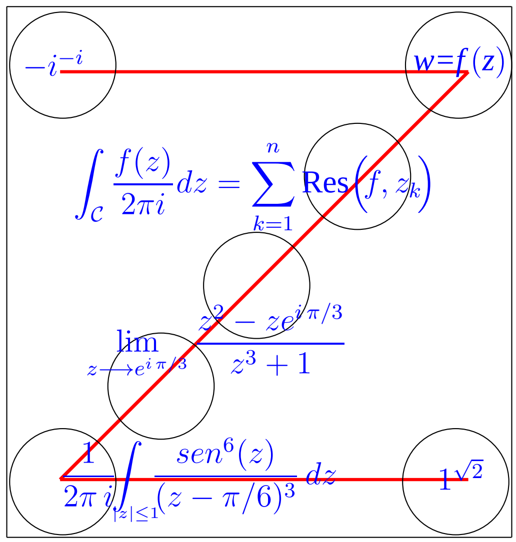
Variable Compleja

Dr. José Atilio Guerrero

August 1, 2016



UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA

DECANATO DE DOCENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

SAN CRISTÓBAL - VENEZUELA

JULIO 2016

Material en Revisión[1]

[1]Email: jaguerrero4@gmail.com, jguerre@unet.edu.ve

Contenido

Capítulo 1

Números Complejos

Aunque tiene gran importancia como una rama activa de la matemática pura, la teoría de las funciones *holomorfas* (llamadas también *analíticas*) debe su existencia y mucho de su prestigio a los éxitos que ha tenido al abordar problemas del campo de las ecuaciones diferenciales, hidrodinámica, teoría del potencial, entre otros. Inicio su existencia independiente a finales del siglo XIX, cuando la "teoría de funciones" tradicionales se dividió en "*teoría de variable real*" y "*teoría de variable compleja*".

La teoría de las funciones complejas es uno de los campos de la matemática más interesantes y tal vez una de las herramientas más útiles en muchas aplicaciones.

El presente material pretende cubrir con lo pautado en el programa de Matemática IV-UNET, referente a Variables Complejas. El mismo se dividirá en tres partes: la primera comprende la introducción y las operaciones básicas de los números complejos, luego se presentan las funciones de variable compleja en donde se estudian los límites, continuidad y derivación de dichas funciones, las funciones analíticas, las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las funciones armónicas, se finaliza con las integrales complejas de línea, el teorema de Cauchy, las integrales indefinidas y las fórmulas integrales de Cauchy.

Es de hacer notar que la gran mayoría por no decir la totalidad de los resultados son usados sin presentar la prueba de ellos. El interesado en dichas pruebas puede consultar los textos recomendados en la bibliografía.

1.1 Números Complejos

Comencemos diciendo una gran verdad:

"la necesidad es la madre de las invenciones".

Partiendo de ese hecho y de que como todas las ecuaciones polinómicas no se pueden resolver en el campo de los números reales, por ejemplo la ecuación polinómica

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.1}$$

no tiene solución en $\mathbb{R}$[1]. De allí surge la necesidad de crear un nuevo sistema numérico, en donde no se presenten este tipo de dificultades; es decir un sistema numérico, en el cual todas las ecuaciones polinómicas se puedan resolver.

Este nuevo sistema numérico se denomina el campo de los *números complejos* y será denotado por medio de la letra $\mathbb{C}$.

Un número complejo z se puede definir como una pareja ordenada (x, y) de números reales; es decir,

$$\boxed{z = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}}. \tag{1.2}$$

De donde se obtiene que

$$\boxed{\mathbb{C} := \Big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\Big\}}.$$

Si identificamos cada real x en la forma $x \equiv (x, 0)$, resulta que $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Dados $z = (x_1, y_1)$ y $w = (x_2, y_2)$ dos números complejos arbitrarios, se definen dos operaciones básicas: la *suma* $z + w$ y la *multiplicación* zw por:

$$z + w = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1.3}$$

$$zw = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2). \tag{1.4}$$

En particular, se tiene que $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ y $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$, así

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \tag{1.5}$$

Al número complejo $(0, 1)$ se le llama *unidad imaginaria* y se denota con la letra *i*; esto es

$$\boxed{i = (0, 1)}.$$

[1] $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales

Ahora, $i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Es decir,

$$\boxed{i^2 = -1}. \tag{1.6}$$

Retornando al problema inicial, pero ahora ubicandonos en los números complejos, resulta que la ecuación $z^2 + 1 = 0$ si se puede resolver; es decir,

$$z^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow z^2 = -1 \Longleftrightarrow z^2 = i^2 \Longleftrightarrow z = \pm i \Longleftrightarrow (z+i)(z-i) = 0.$$

Con esta noción de unidad imaginaria $i = (0,1)$, $i^2 = -1$, la notación más usual para representar un número complejo z es la siguiente

$$\boxed{z = x + i\,y, \;\; x, y \in \mathbb{R}}. \tag{1.7}$$

Pues

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = (x,0) + i(y,0) = x + i\,y.$$

Luego con esta notación se tiene que

$$\boxed{\mathbb{C} = \Big\{x + i\,y : x, y \in \mathbb{R}, i = (0,1), i^2 = -1\Big\}}. \tag{1.8}$$

Observación 1.

A lo largo de este material, los números complejos se representaran usando la noción de la unidad imaginaria.

La *adición* y la *multiplicación* de dos números complejos $z = x + i\,y$ y $w = a + i\,b$, se definen como:

$$z + w = \big(x + i\,y\big) + \big(a + i\,b\big) = \big(x + a\big) + i\,\big(y + b\big), \tag{1.9}$$

$$zw = \big(x + i\,y\big)\big(a + i\,b\big) = \big(xa - yb\big) + i\,\big(xb + ya\big). \tag{1.10}$$

El sistema de los números complejos es, en consecuencia, una extensión natural del sistema de los números reales y gracias a esto, $\mathbb{C}$ junto con las operaciones de adición y multiplicación definidas previamente forman un cuerpo; es decir,

(a) La adición es una operación cerrada en $\mathbb{C}$; esto es, si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $z + w \in \mathbb{C}$.

(b) La adición es asociativa; para $z, v, w \in \mathbb{C}$, resulta

$$z + (v + w) = (z + v) + w.$$

(c) Existe un *elemento neutro* para la adición, denotado por e tal que $z + e = e + z = z$. En este caso $e = 0 + i\,0 = (0, 0)$.

(d) Para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un *inverso aditivo*, denotado por $-z$ tal que $z + (-z) = (-z) + z = e$.

(e) La adición es conmutativa; es decir, si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $z + w = w + z$.

(f) La multiplicación es una operación cerrada en $\mathbb{C}$; es decir, si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $zw \in \mathbb{C}$.

(g) La multiplicación es asociativa; es decir, si $z, v, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$z(vw) = (zv)w.$$

(h) Existencia del elemento neutro para la multiplicación, el cual es el número $1 + i\,0 = (1, 0)$.

(i) Todo complejo no nulo z admite un inverso multiplicativo, denotado por z^{-1} tal que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1 + i\,0$.

(j) La multiplicación es distributiva respecto de la adición; es decir, si $z, v, w \in \mathbb{C}$, entonces $z(v + w) = zv + zw$.

La diferencia esencial que presenta $\mathbb{C}$ con relación al cuerpo de los números reales consiste en que $\mathbb{C}$ no es ordenado. Esto es, para cada par de números reales x y y, siempre es posible saber quien es mayor que quien; es decir, o bien $x < y$ ó $y < x$ ó $x = y$, (Ley de Tricotomia). Mientras que en $\mathbb{C}$, esto no es posible, ya que para cada par de números complejos, $z = x + i\,y$ y $w = a + i\,b$ no es posible determinar si $z < w$ ó $w < z$.

Ya conocida la definición de los números complejos, veamos algunas herramientas para poder realizar operaciones con números complejos. Sea $z = x + i\,y$ un número complejo arbitrario. Entonces:

La *parte real* de z, denotada por $\text{Re}(z)$, es: $\text{Re}(z) = x$.

La *parte imaginaria* de z, denotada por $\text{Im}(z)$, es: $\text{Im}(z) = y$.

El *conjugado* de z, denotado por $\overline{z}$, es:

$$\boxed{\overline{z} = x - i\,y}\,. \tag{1.11}$$

Ahora, si z es no nulo $(z \neq 0)$, se define el *inverso* de z, denotado por z^{-1}, como

$$\boxed{z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}}\,. \tag{1.12}$$

Este inverso z^{-1}, se obtiene procediendo de la siguiente forma:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - i\,y}{(x+i\,y)(x-i\,y)} = \frac{x-i\,y}{x^2+y^2}\,.$$

Gracias a la definición del inverso de un complejo no nulo, se puede definir la *división* entre números complejos, como

$$\boxed{\frac{z}{w} = z\left(\frac{1}{w}\right) = zw^{-1}, \quad w \neq 0}\,. \tag{1.13}$$

Si la parte real de un número complejo es cero, entonces dicho número se denomina un *imaginario puro*.

De estas definiciones, observamos lo siguiente:

Observación 2.

(a) $\text{Re}(z)$ y $\text{Im}(z)$ son números reales.

(b) $\overline{\overline{z}} = z$. (c) z es real si y sólo si $\overline{z} = z$.

(d) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, y por el Principio de Inducción Completa $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}\,.$

(e) $\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$, y por el Principio de Inducción Completa $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}\,.$

(f) $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ y $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}\,.$

Prueba.

De la definición de z se obtiene (a).

(b) Sea $z = x + i\,y$. Entonces $\overline{z} = x - i\,y$ y luego $\overline{\overline{z}} = x + i\,y = z$.

(c) Si $z \in \mathbb{R}$, digamos $z = x = x + i\,0$, entonces $\overline{z} = x - i\,0 = x = z$.

Si $\overline{z} = z$, entonces $x + i\,y = x - i\,y$, de donde se tiene que $y = 0$. Por lo tanto, $z = x \in \mathbb{R}$.

(d) Sean $z = x + i\,y,\ w = a + i\,b$. Entonces $z + w = (x + a) + i\,(y + b)$. Luego

$$\overline{z + w} = (x + a) - i\,(y + b) = x + a - i\,y - i\,b = (x - i\,y) + (a - i\,b) = \overline{z} + \overline{w}$$

(e) $zw = (xa - yb) + i\,(xb + ya)$, luego

$$\overline{zw} = (xa - yb) - i\,(xb + ya) = xa - yb - i\,xb - i\,ya = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

(f) Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{\Big(\text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z)\Big) + \Big(\text{Re}(z) - i\,\text{Im}(z)\Big)}{2} = \text{Re}(z).$$

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{\Big(\text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z)\Big) - \Big(\text{Re}(z) - i\,\text{Im}(z)\Big)}{2i} = \text{Im}(z).$$

✠

1.2 El Plano Complejo

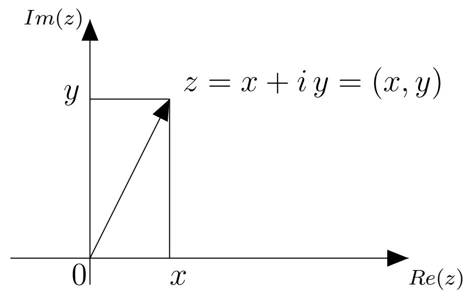
Inicialmente se introdujo la definición de un número complejo como una pareja ordenada de números reales, es decir

$$\mathbb{C} = \Big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Ahora, del conocimiento que tenemos del plano real $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2\,. \tag{1.14}$$

En otras palabras, todo número complejo $z = x + i\,y$ se puede representar en el plano real como un vector que parte del origen y llega al punto (x, y). Esto es,



Plano Complejo

Cuando se utiliza a efectos de representar geométricamente los números complejos $z = x + i\,y$, el plano xy se llama *plano complejo*, el eje x se denomina *eje real* y el eje y es el *eje imaginario*.

La distancia que hay desde el origen hasta el punto (x, y), se denomina el *módulo* del número complejo $z = x + i\,y$, se denota por $|z|$ y se define por

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)}}. \tag{1.15}$$

1.2.1 Propiedades del Módulo

Sean $z, w, z_1, z_2, \cdots, z_n$ números complejos arbitrarios. Entonces

(a) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0, \quad 0 = 0 + i\,0; \qquad |z| \geq 0.$

(b) $|zw| = |z||w|$, y por el principio de inducción completa $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|.$

(c) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}, \quad w \neq 0.$

(d) $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|.$

(e) $\Big|Re(z)\Big| \leq |z|; \quad \Big|Im(z)\Big| \leq |z|.$

(f) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad Triangular), y por el principio de inducción completa

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

(g) $\Big||z|-|w|\Big| \leq |z-w|$.

Prueba.

(a) Es claro que por definición $|z| \geq 0$.

Sea $z = x + i\,y$. Si $|z| = 0$, entonces $x^2 + y^2 = 0$, de donde se sigue que $x = y = 0$; es decir, $z = 0$.

Si $z = 0$, es claro que $|z| = 0$.

(b) Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Ya que $z\overline{z} = |z|^2$, resulta que

$$|zw|^2 = \big(zw\big)\big(\overline{zw}\big) = \big(zw\big)\big(\overline{z}\,\overline{w}\big) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2 = \big(|z||w|\big)^2$$

Y asi, $|zw| = |z||w|$.

(c) Sean $z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Entonces

$$\Big|\frac{z}{w}\Big|^2 = \Big(\frac{z}{w}\Big)\overline{\Big(\frac{z}{w}\Big)} = \Big(\frac{z}{w}\Big)\Big(\frac{\overline{z}}{\overline{w}}\Big) = \frac{z\overline{z}}{w\overline{w}} = \frac{|z|^2}{|w|^2} = \Big(\frac{|z|}{|w|}\Big)^2$$

De donde $\Big|\dfrac{z}{w}\Big| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

(d) Si $z = x + i\,y$ entonces $\overline{z} = x - i\,y$, $-z = -x - i\,y$, $-\overline{z} = -x + i\,y$. De donde se obtiene que

$$|\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

(e) Sea $z = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z)$. Claramente $\text{Re}^2(z) \leq \text{Re}^2(z) + Im^2(z)$ y $\text{Im}^2(z) \leq \text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)$. Luego

$$\sqrt{\text{Re}^2(z)} \leq \sqrt{\text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)} \quad \text{y} \quad \sqrt{\text{Im}^2(z)} \leq \sqrt{\text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)}$$

Y así, $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.

(f) Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} |z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) &= (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 \end{aligned}$$

Ahora $z\overline{w} + w\overline{z} = 2\text{Re}(z\overline{w})$, así

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + 2\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = \Big(|z| + |w|\Big)^2 \end{aligned}$$

Por lo que $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(g) $\big||z|-|w|\big| \leq |z-w| \iff -|z-w| \leq |z|-|w| \leq |z-w|$.

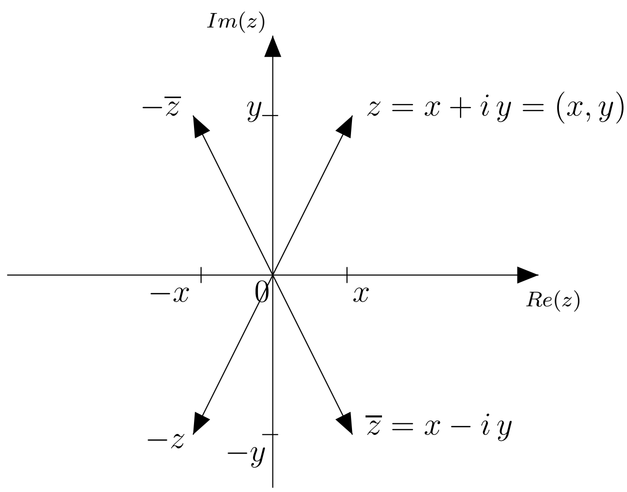
Ahora, $|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w|$, de donde se sigue que

$$|z|-|w| \leq |z-w|.$$

Por otro lado, $|w| = |w-z+z| \leq |w-z| + |z|$, es decir

$$-|z-w| \leq |z|-|w|. \qquad ✠$$

Gracias a esta representación en el plano complejo, se puede trabajar solamente con el primer cuadrante; es decir, cualquier número complejo puede ser pensado o visto como un complejo en el primer cuadrante $(\text{Re}(z) > 0,\ \text{Im}(z) > 0)$. Para ello veamos el siguiente diagrama



Representación gráfica de $z, \overline{z}, -z, -\overline{z}$

Observe que si $z = x + i\,y$ entonces $z\overline{z} = x^2 + y^2$. De donde se sigue que $z\overline{z} = |z|^2$. Luego si $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$, resulta que

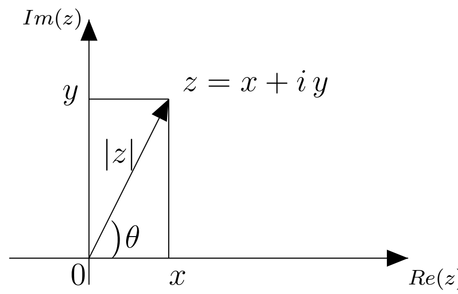
$$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}. \tag{1.16}$$

1.3 Forma Polar de un Complejo

Sean $z = x + i\,y$ un número complejo arbitrario, θ el ángulo formado por z y el eje $\text{Re}(z)$ medido en sentido antihorario a partir del eje $\text{Re}(z)$. Del gráfico se sigue que

$$x = |z|\cos(\theta)$$

$$y = |z|\text{sen}(\theta)$$



Luego

$$z = x + i\,y = |z|\Big(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)\Big)$$

Por convenio, esta última expresión se abrevia en la forma:

$$\boxed{z = |z|\text{cis}(\theta)}. \tag{1.17}$$

Esta manera de representar un número complejo, se denomina la *forma polar* de z. El número θ se llama un *argumento* de z, y escribimos $\theta = arg(z)$, el cual toma cualquier valor de entre infinitos posibles, que difieren dos a dos en multiplos de 2π, esto último se debe a la periodicidad del seno y del coseno. Estos valores se pueden determinar mediante la ecuación

$$\boxed{tg(\theta) = \frac{y}{x}}.$$

donde el cuadrante que contiene al punto correspondiente a z debe ser especificado. En general,

$$\boxed{z = |z|cis(\theta + 2n\pi), \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}. \tag{1.18}$$

Si $z = 0$, el ángulo θ no existe, (¿Porqué?). Se sobreentiende que cualquier número complejo que vaya a ser escrito en forma polar debe ser distinto de cero.

El *valor principal* de $arg(z)$, denotado por *Arg(z)*, se define como el único valor de $arg(z)$ tal que $-\pi < arg(z) \leq \pi$. Gracias a esto

$$arg(z) = Arg(z) + 2n\pi, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

1.4 Forma Exponencial de un Complejo

Sea $z = x + i\,y = |z|\text{cis}(\theta)$. Recordando las series de potencias de las funciones seno, coseno y de la exponencial, se tiene

$$sen(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \;\; cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \;\; e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Haciendo el cambio $i\,z$ por z en la exponencial, resulta

$$
\begin{aligned}
e^{i\,z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^n}{n!} = 1 + \frac{i\,z}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^6 z^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \;+\; i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(z) \;+\; i\,\text{sen}(z).
\end{aligned}
$$

Es decir

$$\boxed{e^{iz} = \text{cis}(z)}. \tag{1.19}$$

Por lo que

$$\boxed{z = |z|\text{cis}(\theta) = |z|e^{i\,\theta}}. \tag{1.20}$$

Esta última forma de representar un número complejo se conoce como la *fórmula de Eüler* de z. Esta fórmula de Eüler de un complejo es muy útil y práctica al momento de realizar cálculos con números complejos.

1.5 Potencias y Raíces de un Complejo

Para cada $z = |z|e^{i\,\theta}$ y $w = |w|e^{i\,\beta}$, resulta

$$zw = \left(|z|e^{i\,\theta}\right)\left(|w|e^{i\,\beta}\right) = |z||w|\, e^{i\,(\theta+\beta)}\,.$$

Si $z = w$, entonces $|z| = |w|$, $\theta = \beta$, luego $z^2 = |z|^2 e^{i\,2\theta}$. En general, para $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$, obtenemos

$$\boxed{z^n = |z|^n e^{i\,n\theta},\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}. \tag{1.21}$$

Esta fórmula nos permite hallar cualquier potencia entera de $z \in \mathbb{C}$, y se denomina *fórmula de Mö*ivre.

Para el caso de las raíces de números complejos, llamaremos *raíz n-ésima* de $z \in \mathbb{C}$ no nulo a otro complejo w tal que

$$\boxed{w^n = z}. \tag{1.22}$$

Para determinar una fórmula adecuada para estas raíces n-ésimas, procedemos de la siguiente manera: sean $z = |z|e^{i\theta}$ y $w = |w|e^{i\mu}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
w^n = z \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(|w|e^{i\mu}\right)^n = |z|e^{i\theta} \Longleftrightarrow |w|^n e^{in\mu} = |z|e^{i\theta} \\
&\Longleftrightarrow \quad |w|^n = |z| \text{ y } n\mu = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\
&\Longleftrightarrow \quad |w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ y } \mu = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, las raíces n-ésimas de z son los números complejos

$$\boxed{w = \sqrt[n]{|z|}\ e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}.$$

En esta expresión en forma exponencial se aprecia que todas las raíces están situadas en la circunferencia $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, centrada en el origen, y están uniformemente espaciadas cada $2\pi/n$ radianes, a partir del argumento inicial θ/n. Evidentemente, todas las raíces distintas se obtienen al hacer $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Los restantes valores de k ya no producen valores nuevos.

Por lo tanto, las raíces n-ésimas de cualquier complejo z, vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
&\boxed{w_k = \sqrt[n]{|z|}\ e^{i\left(\theta+2k\pi\right)/n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1} \\
&= \sqrt[n]{|z|}\,\text{cis}\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Para terminar con esta primera parte, definamos las ecuaciones polinómicas. Una expresión de la forma

$$\boxed{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0} \tag{1.24}$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$[2], se denomina *ecuación polinómica compleja* de grado n. Las soluciones de dicha ecuación se llaman *ceros* del polinomio o *raíces* de la ecuación. Gracias al *Teorema Fundamental del Algebra* [3] (como veremos en una sección más adelante), la ecuación (1.24) se puede reescribir en la forma

$$\boxed{a_n(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\cdots(z - z_n) = 0} \tag{1.25}$$

en donde $z_1, z_2, \cdots, z_n$ son los ceros de (1.24).

[2] $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

[3] Todo polinomio de grado $n \geq 1$ admite, por lo menos, una raíz en $\mathbb{C}$

1.6 Problemas Resueltos

(1) Dados $z = 3 - 2i$ y $w = 4 + i$. Calcule: (a) $z + w$; (b) zw; (c) z/w; (d) $(z - w)\overline{z}$.

Solución

(a) $z + w = (3 - 2i) + (4 + i) = 7 - i$.

(b) $zw = (3 - 2i)(4 + i) = 12 + 3i - 8i - 2i^2 = 14 - 5i$.

(c)
$$\frac{z}{w} = \frac{3-2i}{4+i} = \left(\frac{3-2i}{4+i}\right)\left(\frac{\overline{4+i}}{\overline{4+i}}\right) = \frac{(3-2i)(4-i)}{(4+i)(4-i)}$$
$$= \frac{12 - 3i - 8i + 2i^2}{16 - 4i + 4i - i^2} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}\,i.$$

(d) $z - w = (3 - 2i) - (4 + i) = -1 - 3i$ y $\overline{z} = 3 + 2i$. Entonces

$$(z - w)\overline{z} = (-1 - 3i)(3 + 2i) = -3 - 2i - 9i - 6i^2 = 3 - 11i\,.$$

(2) Dados $z = \sqrt{3} + i, u = -\sqrt{3} + 3i, v = 2 - 2\sqrt{3}\,i$. Efectuar $2z - (u^2 - v) - u/z$.

Solución

$2z = 2\sqrt{3} + 2i$; $u^2 = (-\sqrt{3} + 3i)^2 = -6 - 6\sqrt{3}\,i$,

$u^2 - v = (-6 - 6\sqrt{3}\,i) - (2 - 2\sqrt{3}\,i) = -8 - 4\sqrt{3}\,i$ y

$\dfrac{u}{z} = \dfrac{u\,\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \dfrac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \sqrt{3}\,i$. Entonces

$$\begin{aligned} 2z - (u^2 - v) - \frac{u}{z} &= (2\sqrt{3} + 2i) - (-8 - 4\sqrt{3}\,i) - \sqrt{3}\,i \\ &= (2\sqrt{3} + 8) + i(2 + 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(3) Efectuar las operaciones indicadas

$$\begin{aligned} (a)\ \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} &= \left(\frac{5+5i}{3-4i}\right)\left(\frac{3+4i}{3+4i}\right) + \left(\frac{20}{4+3i}\right)\left(\frac{4-3i}{4-3i}\right) \\ &= \frac{-5 + 35\,i}{25} + \frac{80 - 60\,i}{25} = 3 - i. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(b)\ \frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} &= \frac{5}{(1-i)(5-5i)} = \frac{1}{(1-i)(1-i)} \\
&= \frac{1}{-2i} = \frac{2i}{-4i^2} = \frac{i}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
(c)\ i^2(1+i)^3 = -(1+3i+3i^2+i^3) = -1-3i+3+i = 2-2i.
$$

(4) (a) Encuentre todas las potencias (enteras y positivas) de $z = i$.

Solución

$$
i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 i = -i; \quad i^4 = (i^2)^2 = 1;
$$

$$
i^5 = i^2 i^3 = i; \quad i^6 = (i^2)^3 = -1; \quad i^7 = i^3 i^4 = -i; \quad i^8 = (i^2)^4 = 1;
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

Continuando de esta manera, se observa que las potencias de $z = i$ se repiten cada cuatro; es decir, las potencias de i son sólo $1, i, -1, -i$. Ya que las potencias de i se repiten cada cuatro, un algoritmo para hallar una potencia mayor de i, es dividir la potencia entre cuatro, luego, el resto de esta división es la potencia que le corresponde a la potencia deseada; por ejemplo, hallar i^{115}. El algoritmo dice que realice la división $115/4$, esto produce

$$
\begin{array}{r|l}
115 & \underline{\;4\;\;\;} \\
35 & 28 \\
3 &
\end{array}
$$

de donde se obtiene que $i^{115} = i^3 = -i$.

$$
\begin{aligned}
(b)\quad \frac{8i^{58} + 7i^{15} - 2i^{21}}{3i - 2} &= \frac{8i^2 + 7i^3 - 2i}{-2+3i} = \frac{-8-9i}{-2+3i} \\
&= \left(\frac{-8-9i}{-2+3i}\right)\left(\frac{-2-3i}{-2-3i}\right) \\
&= \frac{16 + 24i + 18i + 27i^2}{4 - 9i^2} = -\frac{11}{13} + \frac{42}{13}i\,.
\end{aligned}
$$

(5) Calcule $(\overline{z})^4$, si $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

Solución

$\overline{z} = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Luego

$$\overline{z}^{\,4} = \left(\overline{z}^{\,2}\right)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\,.$$

(6) Pruebe que: (a) $\mathrm{Im}(i\,z) = \mathrm{Re}(z)$; (b) $\mathrm{Re}(i\,z) = -\mathrm{Im}(z)$.

Prueba.

Si $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, entonces

$$i\,z = i\Big(\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)\Big) = -\mathrm{Im}(z) + i\,\mathrm{Re}(z)$$

De donde se tiene que

$$\mathrm{Im}(i\,z) = \mathrm{Re}(z) \;\text{ y }\; \mathrm{Re}(i\,z) = -\mathrm{Im}(z).$$

(7) Determinar los números complejos z en los siguientes casos: (a) $(1+i)+z = -i$; (b) $i\,z = (1+i)(1-i)$.

Solución

(a) $(1+i)+z = -i \iff z = -i-(1+i) \iff z = -1-2i$.

(b) $i\,z = (1+i)(1-i) \iff i\,z = 2 \iff z = 2/i \iff z = -2i$.

(8) Determine los números complejos $z = 3x+i2y$, $w = 5y-ix$, tales que $z+w = 7+5i$.

Solución

Agrupando los términos resulta que $(3x+5y)+i(2y-x) = 7+5i$, de donde se sigue que

$$\begin{cases} 3x+5y = & 7 \\ -x+2y = & 5 \end{cases}$$

y así, $x=-1$; $y=2$. Esto es, $z = -3+4i$ y $w = 10+i$.

(9) Pruebe que: (a) $\overline{\overline{z}+3i} = z-3i$; (b) $\overline{i\,z} = -i\,\overline{z}$.

Prueba.

(a) $\overline{\overline{z}+3i} = \overline{\overline{z}} + \overline{3i} = z-3i$.

(b) Sea $z = \mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)$. Entonces $i\,z = -\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Re}(z)$. Luego

$$\begin{aligned} \overline{i\,z} &= \overline{-\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Re}(z)} = -\mathrm{Im}(z) - i\,\mathrm{Re}(z) = -\Big(\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Re}(z)\Big) \\ &= -\Big(-i^2\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Re}(z)\Big) = -i\Big(\mathrm{Re}(z)-i\mathrm{Im}(z)\Big) = -i\,\overline{z}. \end{aligned}$$

(10) Calcular: $(a)\ \left|3(2+i)-4(3-2i)\right|$; $(b)\ (2+i)^3-3(2+i)^2+4(2+i)-8$;

$(c)\ \left|\dfrac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2+i)-(3-2i)+3-i}\right|^2.$

Solución

$$\begin{aligned}(a)\quad \left|3(2+i)-4(3-2i)\right| &= \left|(6+3i)-(12-8i)\right| = \left|-6+11i\right| \\ &= \sqrt{36+121} = \sqrt{157}.\end{aligned}$$

$$(b)\quad (2+i)^3-3(2+i)^2+4(2+i)-8 = -7+3i\,.$$

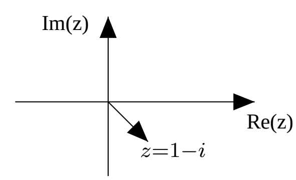
$$\begin{aligned}(c)\quad \left|\frac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2+i)-(3-2i)+3-i}\right|^2 &= \left|\frac{6-4i+2+i-5-i}{4+2i-3+2i+3-i}\right|^2 \\ &= \left|\frac{3-4i}{4+3i}\right|^2 = \left(\frac{|3-4i|}{|4+3i|}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{16+9}}\right)^2 = 1.\end{aligned}$$

(11) Expresar en forma polar: $(a)\ 1-i$; $(b)\ -1+\sqrt{3}\,i$; $(c)\ -\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$.

Solución

Recordemos que la forma polar de $z = x+i\,y$ es $z = |z|\text{cis}(\theta) = |z|e^{i\theta}$. Así

(a) $|z| = \sqrt{2}$.

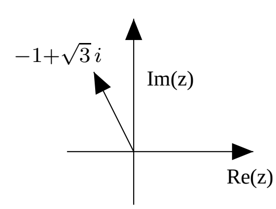


Ya que z está en el cuarto cuadrante, resulta que

$\theta = 2\pi - arctg(-1/1) = 7\pi/4$

Luego, $z = 1-i = \sqrt{2}cis(7\pi/4) = \sqrt{2}e^{i\,7\pi/4}$.

(b) $|-1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1+3} = 2$.



Como z está en el segundo cuadrante,

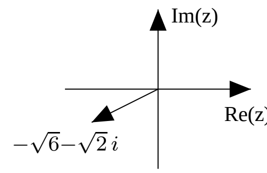
resulta que, $\theta = \pi - arctg(-\sqrt{3}/1) = 2\pi/3$

Luego, $-1+\sqrt{3}\,i = 2cis(2\pi/3) = 2e^{i\,2\pi/3}$.

(c) $|-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$.

Como z está en el tercer cuadrante,

resulta que, $\theta = \pi + arctg(\sqrt{2}/\sqrt{6}) = 7\pi/6$



Luego, $-\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}\,\text{cis}(7\pi/6) = 2\sqrt{2}\,e^{i\,7\pi/6}$.

(12) Calcular: $(a)\ \Big(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i\Big)^{10}$; $(b)\ \Big(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\Big)^{-3}$.

Solución

(a) Por (c) del problema anterior, se tiene que:

$$-\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}\,e^{i\,7\pi/6}.$$

Luego usando la fórmula de Möivre, resulta que

$$\begin{aligned}\Big(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i\Big)^{10} &= \Big(2\sqrt{2}\,e^{i\,7\pi/6}\Big)^{10} = (2\sqrt{2})^{10}e^{i\,10(7\pi/6)}\\ &= 32768e^{i\,35\pi/3} = 32768\,\text{cis}(35\pi/3)\\ &= 16384 - 16384\sqrt{3}\,i\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\quad \Big(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\Big)^{-3} &= \Big(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\Big)^{3} = \Big(\frac{\sqrt{2}\,e^{i\,\pi/4}}{2e^{i\,\pi/6}}\Big)^{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,e^{i\,3(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}(\pi/4) = \frac{1}{4}+\frac{i}{4}.\end{aligned}$$

(13) Hallar en cada caso todas las raíces requeridas:
$(a)\ \sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$; $(b)\ \sqrt{1-\sqrt{3}\,i}$; $(c)\ \sqrt[n]{1}$.

Solución

Recordemos que $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\,e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k = 0,1,2,\cdots,n-1$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Como $n = 4$, resulta que $k = 0,1,2,3$; $|-8-8\sqrt{3}\,i| = 16$; $\theta = 4\pi/3$, de donde se sigue que $-8-8\sqrt{3}\,i = 16\,e^{i\,4\pi/3}$ y así las raíces cuartas vienen dadas por

$$w_4^k = \sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{4\pi/3\ +\ 2k\pi}{4}\right)},\ k = 0,1,2,3.$$

Es decir,

$$\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i} = \begin{cases} 1+\sqrt{3}\,i, & \text{si } k=0\\ -\sqrt{3}+i, & \text{si } k=1\\ -1+\sqrt{3}\,i, & \text{si } k=2\\ \sqrt{3}-i, & \text{si } k=3.\end{cases}$$

(b) Puesto que $n = 2$ entonces $k = 0, 1$; $1 - \sqrt{3}\, i = 2e^{i\, 5\pi/3}$, luego las raíces cuadradas vienen dadas por

$$w_2^k = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi/3\ +\ 2k\pi}{4}\right)}, \;\; k = 0, 1.$$

Por consiguiente

$$\sqrt{1 - \sqrt{3}\, i} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{si } k = 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

(c) Sea $n \geq 2$. Es claro que en este caso $\theta = 0$, $|1| = 1$, luego $1 = e^{i\,0}$. Por consiguiente

$$\sqrt[n]{1} = e^{i\, 2k\pi/n}, \;\; k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

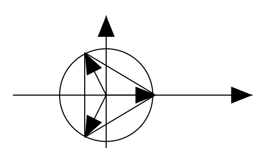
Analicemos algunos valores de n. Para $n = 2$, $k = 0, 1$ y

$$\sqrt{1} = e^{i\, 2k\pi/2} = e^{i\, k\pi} = \begin{cases} e^{i\,0} \\ e^{i\,\pi} \end{cases} = \begin{cases} \text{cis}(0) \\ \text{cis}(\pi) \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ -1. \end{cases}$$

Para $n = 3$, resulta que $k = 0, 1, 2$ luego

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\, 2k\pi/3} = \begin{cases} e^{i\,0} \\ e^{i\,\pi} \\ e^{i\,4\pi/3} \end{cases} = \begin{cases} \text{cis}(0) \\ \text{cis}(2\pi/3) \\ \text{cis}(4\pi/3) \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i. \end{cases}$$

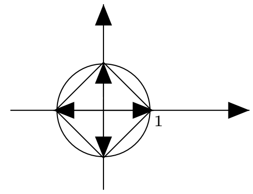
La interpretación gráfica de estas tres raíces cúbicas de la unidad, es que ellas son los vértices de un triángulo equilatero; es decir,



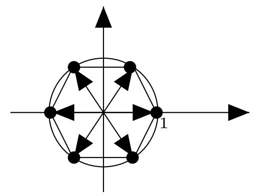
Para $n = 4$, $k = 0, 1, 2, 3,$

$$\sqrt[4]{1} = e^{i\, 2k\pi/3} = \begin{cases} e^{i\,0} \\ e^{i\,\pi/2} \\ e^{i\,\pi} \\ e^{i\,3\pi/2} \end{cases} = \begin{cases} \text{cis}(0) \\ \text{cis}(\pi/2) \\ \text{cis}(\pi) \\ \text{cis}(3\pi/2) \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ i \\ -1 \\ -i. \end{cases}$$

Gráficamente las cuatro raíces cuartas de la unidad son los vértices de un rombo; es decir,



En general, cuando $n \geq 3$, las n-ésimas raíces de la unidad, corresponden a puntos situados en los vértices de un poligono regular de n-lados inscrito en el circulo unitario y donde siempre una raíz n-ésima es uno; por ejemplo si $n = 6$, se tienen seis raíces sextas de la unidad, las cuales están ubicadas en los vértices de un hexagono.



(14) Pruebe que: $(a)\ \left|e^{i\,\theta}\right| = 1$; $(b)\ \overline{e^{i\,\theta}} = e^{-i\,\theta}$.

Prueba.

$(a)\ \left|e^{i\,\theta}\right| = \left|\,\text{cis}(\theta)\right| = \left|\,\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)} = 1.$

(b) Como $e^{i\,\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)$, se tiene que

$$\overline{e^{i\,\theta}} = \cos(\theta) - i\,\text{sen}(\theta) = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta) = e^{-i\,\theta}.$$

(15) Resuelva las siguientes ecuaciones: $(a)\ z^2 + (2i-3)z + (5-i) = 0$; $(b)\ z^3 - 2z - 4 = 0$.

<u>**Solución**</u>

$$\begin{aligned}(a)\ z &= \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2} \\ &= \frac{3-2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2} = \frac{3-2i \pm (1-4i)}{2} = \begin{cases} 2-3i \\ 1+i. \end{cases}\end{aligned}$$

Luego

$$z^2 + (2i-3)z + (5-i) = (z-2+3i)(z-1-i) = 0.$$

$(b)\ z^3 - 2z - 4 = (z-2)(z^2+2z+2) = 0.$ Ahora

$$z^2 + 2z + 2) = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i.$$

De donde

$$z^3 - 2z - 4 = (z-2)(z+1-i)(z+1+i) = 0.$$

(16) Represente analítica y gráficamente los siguientes conjuntos:

(a) $\mathcal{A} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2\right\}$; (b) $\mathcal{B} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2\right\}$;

(c) $\mathcal{C} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 3\right\}$; $\mathcal{D} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-2i| < 2\right\}$; $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$;

(d) $\mathcal{E} = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+i| \leq 2\right\}$; (e) $\mathcal{F} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z+3i| > 4\right\}$;

(f) $Im(z) > 1$; $Im(z) = 1$.

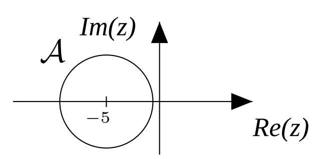
Solución

Sea $z = x + i\,y$.

$$(a)\ z \in \mathcal{A} \iff \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \iff \left|\frac{x+i\,y-3}{x+i\,y+3}\right| = 2$$

$$\iff \left|\frac{(x-3)+i\,y}{(x+3)+i\,y}\right| = 2$$
$$\iff |(x-3)+i\,y| = 2|(x+3)+i\,y|$$
$$\iff \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$
$$\iff (x-3)^2+y^2 = 4\big[(x+3)^2+y^2\big]$$
$$\iff x^2+10x+y^2+9=0$$
$$\iff \boxed{(x+5)^2+y^2=16}.$$

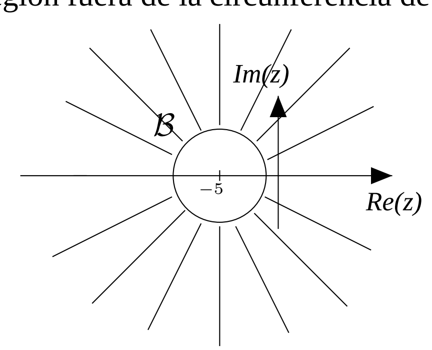
Esto nos dice que $\mathcal{A}$ es una circunferencia de centro $(-5,0)$ y radio 4.



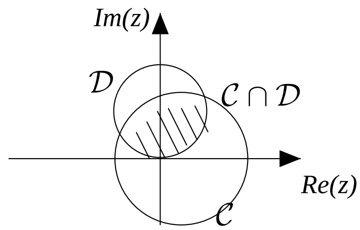
$$(b)\ z \in \mathcal{B} \iff \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2 \iff (x-3)^2+y^2 < 4\big[(x+3)^2+y^2\big]$$

$$\iff x^2+10x+y^2+9>0 \iff \boxed{(x+5)^2+y^2>16}$$

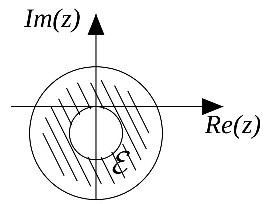
Es decir, $\mathcal{B}$ es toda la región fuera de la circunferencia de centro $(-5,0)$ y radio 4.



$$(c)\ \ z \in \mathcal{C} \iff |z-1| < 3 \iff (x-1)^2 + y^2 < 9$$
$$z \in \mathcal{D} \iff |z-2i| < 2 \iff x^2 + (y-2)^2 < 4$$



$$(d)\ \ z \in \mathcal{E} \iff 1 < |z+i| \leq 2 \iff 1 < |x + i(y+1)| \leq 2$$
$$\iff 1 < \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 2$$
$$\iff 1 < x^2 + (y+1)^2 \leq 4.$$



1.7 Problemas Propuestos

(1) Efectuar cada una de las siguientes operaciones:

$$(a)\ (4-3i) + (2i-8);\ \ (b)\ 3(-1+4i) - 2(7-i);\ \ (c)(3+2i)(2-i);$$

$$(d)\ (i-2)\Big[2(1+i) - 3(i-1)\Big];\ \ (e)\ (4+i)(3+2i)(1-i);\ \ (f)\ \frac{2-3i}{4-i}$$

$$(g)\ \frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2};\ \ (h)\ (2i-1)^2\left[\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right]$$

$$(i)\ 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3;\ \ (j)\ 1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1+i}}}$$

$$(k)\ 2(\sqrt{3}+i) - \left[(-\sqrt{3}+3i)^2 - (2-2\sqrt{3}\,i)\right] - 2\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+i}$$

(2) Si $z = 1 - i$; $u = -2 + 4i$; $w = \sqrt{3} - 2i$. Evalue

$$(a)\ |2u - 3z|^2;\quad (b)\ \left(w - \overline{w}\right)^5;\quad (c)\ |z\,\overline{u} + u\,\overline{z}|;\quad (d)\ \left|\frac{z + u + 1}{z - u + i}\right|;$$

$$(e)\ \frac{1}{2}\left(\frac{w}{\overline{w}} + \frac{\overline{w}}{w}\right);\ \ (f)\ \overline{(u + w)(z - w)};\ (i)\ \text{Im}\left(\frac{zu}{w}\right)$$

$$(g)\ \left|z^2 + \overline{u}^{\,2}\right|^2 + \left|\overline{w}^{\,2} - u^2\right|^2;\ (h)\ \text{Re}\left(2z^3 + 3u^2 - 5w^3\right);$$

(3) Calcule

$$(a)\ \text{Re}\left(\frac{1 - i}{2 + i}\right);\quad (b)\ \text{Im}\left(\frac{(1 + i)^2}{e^{-i\pi}}\right);\quad (c)\ \text{Re}\left(z^n\right),\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(4) Pruebe que si el producto de números complejos es cero entonces al menos uno de ellos es cero.

(5) Pruebe que

(a) $\sqrt{2}\,|z| \geq \left|\text{Re}(z)\right| + \left|\text{Im}(z)\right|$; (b) $\left|\dfrac{z + w}{u + v}\right| \leq \dfrac{|z| + |w|}{\big||u| - |v|\big|}$;

(c) Si $|z| < 1$ entonces $\left|\text{Im}\left(1 - \overline{z} + z^2\right)\right| < 3$;

(d) $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$; (e) $\text{Re}(z) = \text{Im}(iz)$;

(f) Si $\text{Im}(z) > 0$, entonces $\text{Im}(z^{-1}) < 0$;

(g) Si $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$ son, ambos números reales negativos, entonces z_1 y z_2 deben ser números reales;

(h) Si $|z| < 1$ y $|a| < 1$, entonces $\left|\dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| < 1$

(6) Efectue cada una de las siguientes operaciones y realice su representación en el plano complejo

$$(a)\ (2 + 3i) + (4 - 5i);\ \ (b)\ (7 + i) - (4 - 2i);\ \ (c)\ 3(1 + i) + 2(4 - 3i) - (2 + 5i)$$

(7) Si $z = 4 - 3i$ y $u = -1 + 2i$. Obtenga analítica y gráficamente

$$(a)\ |z + u|;\ \ (b)\ |z - u|;\ \ (c)\ \overline{z} - \overline{u};\ \ (d)\ |2\,\overline{z} - 3\,\overline{u} - 2|$$

(8) Los vértices A, B, C de un triángulo ABC están dados por $z = 1 + 2i$, $u = 4 - 2i$ y $w = 1 - 6i$ respectivamente. Pruebe que dicho triángulo es isosceles.

(9) La posición vectorial de los puntos A y B son $2+i$ y $3-2i$ respectivamente.

(a) Encuentre una ecuación para el segmento de recta $\overrightarrow{AB}$.

(b) Encuentre una ecuación para la recta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ en su punto medio.

(10) Exprese en forma polar, los siguientes números complejos

$$(a)\ 2-2i;\ \ (b)\ -1+\sqrt{3}\,i;\ \ (c)\ 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i;\ \ (d)\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\ \ (e)\ -3-4i;$$

$$(f)\ 1-2i;\ \ (g)\ \frac{-2}{1+\sqrt{3}\,i};\ \ (h)\ \frac{i}{-2-2i};\ \ (i)\ 1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+i}}}$$

(11) Evalue cada una de las siguientes operaciones y exprese el resultado en la forma $z = \text{Re}(z)+i\,\text{Im}(z)$

$$(a)\ \Big(5\text{cis}(20^o)\Big)\Big(3\text{cis}(40^o)\Big);\ \ (b)\ \Big(2\text{cis}(50^o)\Big)^6;\ \ (c)\ \frac{\Big(8\text{cis}(40^o)\Big)^3}{\Big(2\text{cis}(60^o)\Big)^4}$$

$$(d)\ \frac{\Big(3e^{i\,\pi/6}\Big)\Big(2e^{-i\,5\pi/4}\Big)\Big(6e^{i\,5\pi/3}\Big)}{\Big(4e^{i\,2\pi/3}\Big)^2};\ \ (e)\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$$

(12) Encuentre todas las raíces indicadas

$$(a)\ \sqrt{2\sqrt{3}-2i};\ \ (b)\ \sqrt[5]{-4+4i};\ \ (c)\ \sqrt[4]{-16};\ \ (d)\ \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}\,i};$$

$$(e)\ \sqrt[3]{8};\ \ (f)\ \sqrt[6]{-16+16\sqrt{3}\,i};\ \ (g)\ \sqrt[5]{-8-8\sqrt{3}\,i}$$

(13) Resuelva las siguientes ecuaciones

$$(a)\ 5z^2+2z+10=0;\ (b)\ z^2+(i-2)z+(3-i)=0;\ (c)\ z^4+z^2+1=0$$

(14) Encuentre dos números complejos cuya suma sea 4 y cuyo producto es 8.

(15) Determinar analítica y gráficamente los siguientes conjuntos

(a) $\mathcal{A}=\Big\{z\in\mathbb{C}: z(\overline{z}+2)=3\Big\};$ $(b)\ \mathcal{B}=\Big\{z\in\mathbb{C}: \overline{z}-\frac{1}{z}=0\Big\}.$

(c) $\mathcal{C}=\Big\{z\in\mathbb{C}: Im(z^2)=4\Big\};$

(d) $\mathcal{D}=\Big\{z\in\mathbb{C}: -2\le Im(z)<3\Big\}.$

(e) $\mathcal{E}=\Big\{z\in\mathbb{C}: |z-4|\ge|z|\Big\}.$