Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

23 de junio del 2021

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Una **ecuación lineal** en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación que se puede escribir de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad \boxed{1}$$

Los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y el término b son todos números reales constantes.

- Una **solución de una ecuación lineal** $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ es un vector $(s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n)$ cuyas componentes satisfacen la ecuación, es decir

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

- Una **solución de un sistema de ecuaciones lineales** es una solución de cada ecuación lineal del sistema.
- El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de todas las soluciones del sistema.

Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales sólo puede tener tres tipos de soluciones:

1. Una única solución, en ese caso se dice que el sistema es **compatible determinado**.

2. Un número infinito de soluciones, se le da el nombre de sistema **compatible indeterminado.**

1. Ninguna solución, en este caso el sistema se dice que es **incompatible**.

Ejemplo: Sistema compatible determinado

- Considere el sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas

$$\begin{cases} 2x - 5y = -4 & \boxed{1} \\ 3x + y \ = 11 & \boxed{2} \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema multiplicando 5 a la ecuación $\boxed{2}$ y sumando la ecuación resultante a la ecuación $\boxed{1}$:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 15x + 5y \ = 55 \end{cases} \Rightarrow 17x = 51 \Rightarrow x = 3$$

Sustituyendo $x = 3$ en $\boxed{2}$, tenemos que

$$3(3) + y \ = 11 \Rightarrow y = 11 - 9 = 2$$

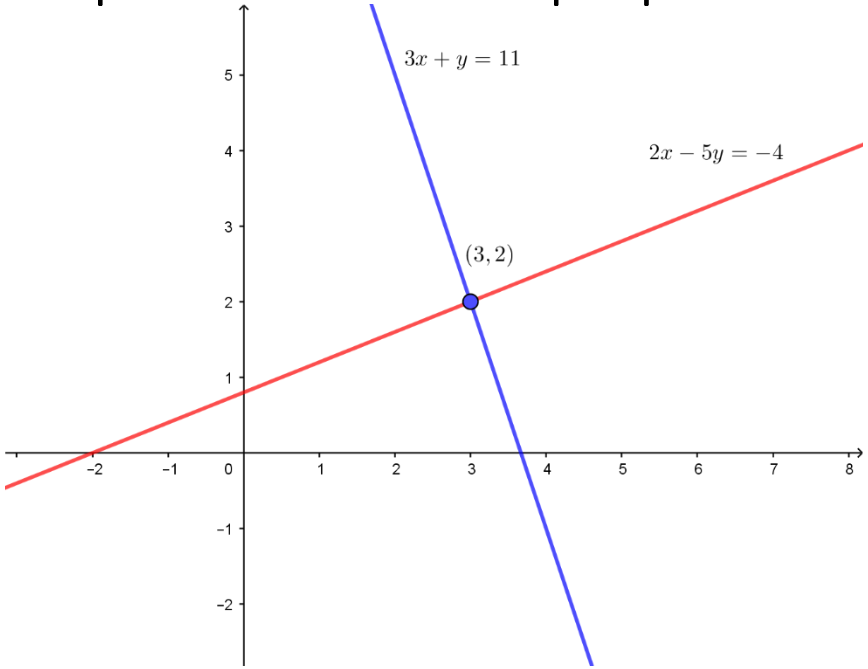
Ejemplo

Entonces una solución del sistema es $(3,2)$, vemos que se satisfacen ambas ecuaciones

$$2(3) - 5(2) = -4 \quad \boxed{1}$$

$$3(3) + 2 = 11 \quad \boxed{2}$$

La grafica de cada ecuación corresponde a una recta, la solución es el punto de intersección de ambas rectas. El sistema es compatible determinado porque tiene una única solución.



Ejemplo: Sistema compatible indeterminado

- Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = -4 & \boxed{1} \\ -4x + 10y \ = 8 & \boxed{2} \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2 y el resultado lo sumamos a la segunda ecuación vemos que ocurre lo siguiente

$$\begin{cases} 4x - 10y = -8 \\ -4x + 10y \ = 8 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0$$

Podemos ver que las rectas de las ecuaciones lineales, coinciden, es decir la representación gráfica de ambas ecuaciones es la misma recta. Con lo que podemos interpretar que todos los puntos sobre la recta son soluciones de ambas ecuaciones por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo: Sistema de Ecuaciones Incompatible

- Sea el sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas

$$\begin{cases} 2x - 5y = -4 & \boxed{1} \\ 4x - 10y = 11 & \boxed{2} \end{cases}$$

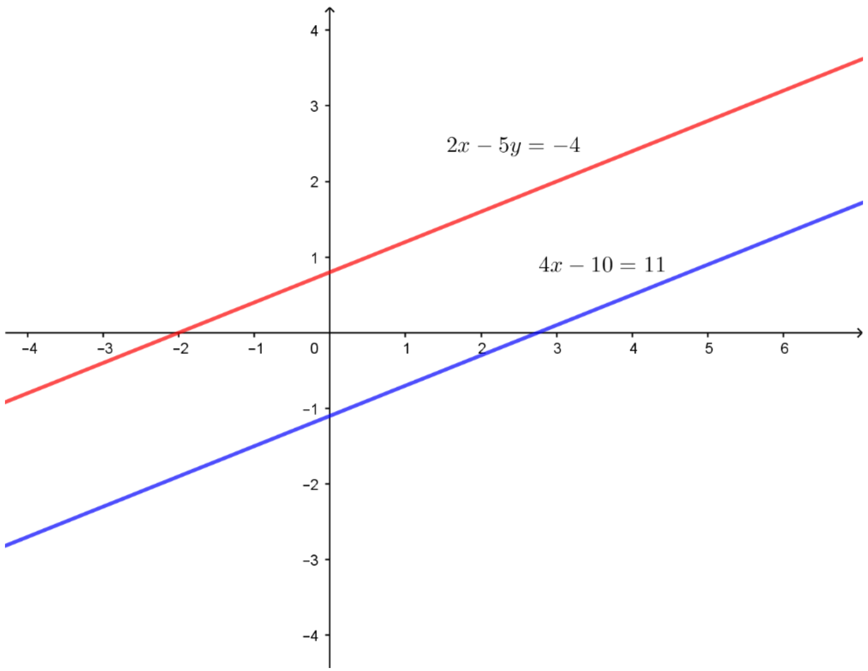
Si multiplicamos la primera ecuación por 2 y el resultado lo sumamos a la segunda ecuación vemos que ocurre lo siguiente

$$\begin{cases} 4x - 10y = -8 \\ -4x + 10y = 11 \end{cases} \Rightarrow 0 = 3$$

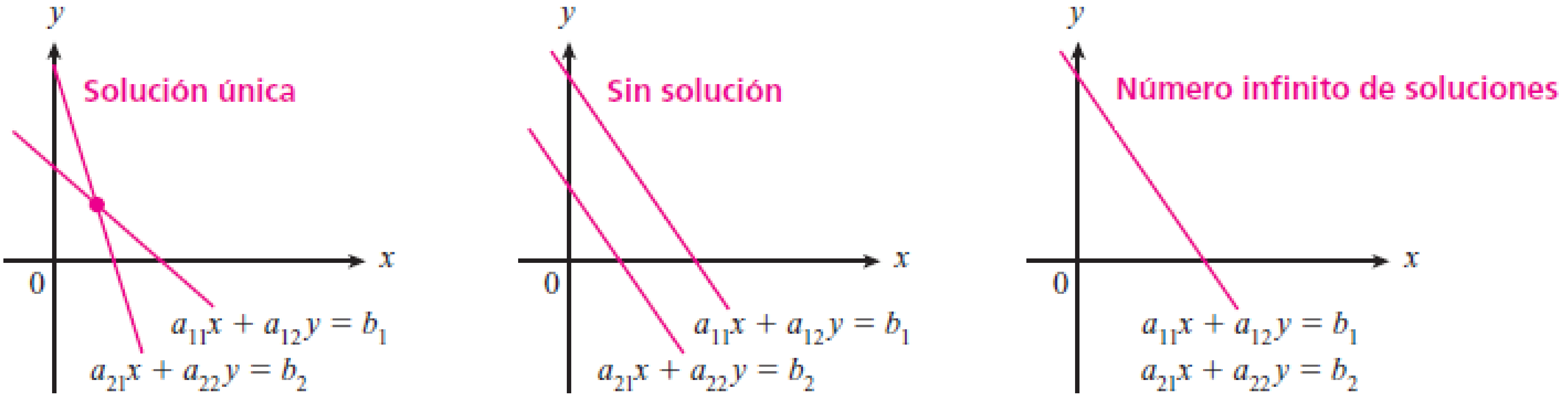
Vemos que resulta algo falso, $0 = 3$, esto nos permite interpretar que el sistema es incompatible.

Ejemplo:

Las gráficas de las ecuaciones lineales del sistema son dos rectas paralelas que no coinciden, Gráficamente vemos que no hay un punto en común.



Sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Dado un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad\;\; \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- Podemos asociar dos matrices

matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matriz aumentada

$$A_a = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La matriz aumentada es la matriz de los coeficientes junto con los términos constantes.

Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Si consideramos los vectores columna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Podemos escribir el sistema de ecuaciones lineales con la notación matricial como

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Ejemplo: Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + \ \ 6x_3 &= 18 \\
4x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 &= 24 \\
2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30
\end{aligned}
$$

- La matriz de coeficiente del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

- La matriz aumentada del sistema es

$$A_a = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

- Si consideramos

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{Entonces el sistema es } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Ejemplo

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Teorema de Rouché -Frobenius

- La condición suficiente y necesaria para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible, es que el rango de la matriz de coeficientes $\rho(A)$ y el rango de la matriz aumentada $\rho(A_a)$ sean iguales, esto es, $\rho(A) = \rho(A_a)$.

- Sea n el número de incógnitas del sistema de ecuaciones lineales, se tiene que:

✓Si $\rho(A) = \rho(A_a) = n$, entonces el sistema es compatible determinado.

✓Si $\rho(A) = \rho(A_a) \neq n$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

Métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

- **Método de eliminación Gaussiana**: En este método se busca una forma escalonada por renglones de la matriz del sistema lineal, luego se plantea el sistema de ecuaciones lineales de la forma escalonada y por último se realiza un proceso de sustitución inversa.
- **Método de eliminación de Gauss-Jordan**: En este caso se transforma la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada reducida por renglones, luego se plantea el sistema de ecuaciones de la forma escalonada y este sugiere la solución del sistema.
- **Nota:** Ambos métodos se basan en el hecho que los sistemas de ecuaciones tanto de la matriz aumentada y sus formas escalonadas son equivalentes, es decir tienen la misma solución.

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema usando el método de eliminación Gaussiana

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

1. Se plantea la matriz aumentada de sistema y usando las operaciones elementales sobre renglones se busca una forma escalonada por renglones:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)
$$

2. Una vez obtenida la forma escalonada, podemos ver que el rango de la matriz de coeficientes es 3 y el rango de la matriz aumentada es 3 también. Por lo que esto nos dice que el sistema es compatible determinado.

Ejemplo

3. Planteamos el sistema de ecuaciones lineales de la última matriz:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

4. Realizamos sustitución inversa. De la última ecuación tenemos que $x_3 = 3$ entonces sustituyendo en las otras ecuaciones:

- $x_2 + 2(3) = 4 \Rightarrow x_2 = 4 - 6 = -2$
- $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9 \Rightarrow x_1 = 9 + 4 - 9 = 4$

5. La solución del sistema es $(4, -2,3)$

Actividades:

- Visualizar el video https://youtu.be/XRcx8-2lLJI sobre el método de eliminación Gaussiana.
- Resolver los siguientes sistemas lineales usando el método de eliminación Gaussiana:

1.
$$\begin{aligned} 9x_1 + 9x_2 - 7x_3 &= 6 \\ -7x_1 \qquad\quad - x_3 &= -10 \\ 9x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 45 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$