

15.4 Teorema de Green

- Utilizar el teorema de Green para evaluar una integral de línea.
- Utilizar formas alternativas del teorema de Green.

Teorema de Green

En esta sección se estudiará el **teorema de Green**, que recibe este nombre en honor del matemático inglés George Green (1793-1841). Este teorema establece que el valor de una integral doble sobre una región *simplemente conexa* R está determinado por el valor de una integral de línea a lo largo de la frontera de R .

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \leq t \leq b$, es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, $\mathbf{r}(c) \neq \mathbf{r}(d)$ para todo c y d en el intervalo abierto (a, b) . Una región plana R es **simplemente conexa** si cada curva cerrada simple en R encierra sólo puntos que están en R (ver la figura 15.26).

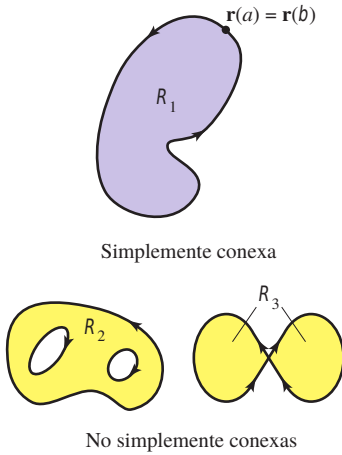


Figura 15.26

TEOREMA 15.8 TEOREMA DE GREEN

Sea R una región simplemente conexa cuya frontera es una curva C suave a trozos, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir, C se recorre *una vez* de manera que la región R siempre quede a la *izquierda*). Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R , entonces

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

DEMOSTRACIÓN Se da una demostración sólo para una región que es vertical y horizontalmente simple, como se muestra en la figura 15.27.

$$\begin{aligned} \int_C M dx &= \int_{C_1} M dx + \int_{C_2} M dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [M(x, y)]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA.$$

De manera similar, se pueden usar $g_1(y)$ y $g_2(y)$ para demostrar que $\int_C N dy = \iint_R \partial N / \partial x dA$. Sumando las integrales $\int_C M dx$ y $\int_C N dy$, se llega a la conclusión establecida en el teorema.

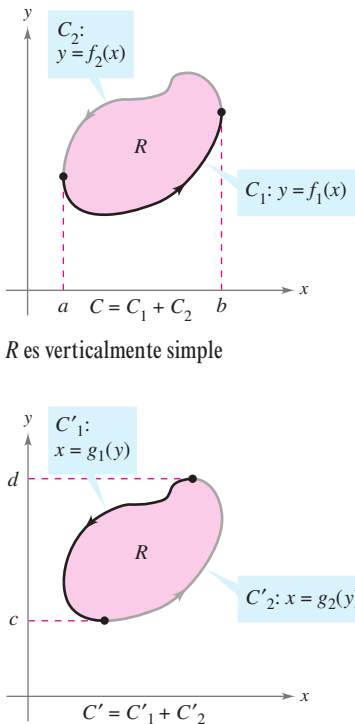
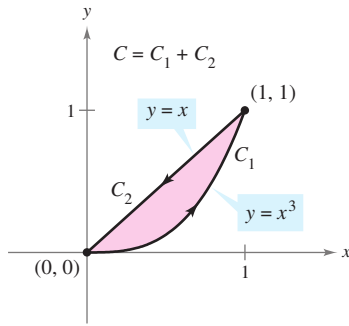


Figura 15.27



C es simple y cerrada, y la región R siempre se encuentra a la izquierda de C

Figura 15.28

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Green

Utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$

donde C es la trayectoria desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$ a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ y desde $(1, 1)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la gráfica de $y = x$, como se muestra en la figura 15.28.

Solución Como $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, se sigue que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2.$$

Aplicando el teorema de Green, se tiene entonces

$$\begin{aligned} \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^x [(3x^2 + 3y^2) - 3y^2] dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^x 3x^2 dy dx \\ &= \int_0^1 3x^2 y \Big|_{x^3}^x dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

GEORGE GREEN (1793-1841)

Green, autodidacta, hijo de un molinero, publicó por primera vez el teorema que lleva su nombre en 1828 en un ensayo sobre electricidad y magnetismo. En ese tiempo no había casi ninguna teoría matemática para explicar fenómenos eléctricos.

“Considerando cuán deseable sería que una energía de naturaleza universal, como la electricidad, fuera susceptible, hasta donde fuera posible, de someterse al cálculo. . . me vi impulsado a intentar descubrir cualquier posible relación general entre esta función y las cantidades de electricidad en los cuerpos que la producen.”

El teorema de Green no se puede aplicar a toda integral de línea. Entre las restricciones establecidas en el teorema 15.8, la curva C debe ser simple y cerrada. Sin embargo, cuando el teorema de Green es aplicable, puede ahorrar tiempo. Para ver esto, tratar de aplicar las técnicas descritas en la sección 15.2 para evaluar la integral de línea del ejemplo 1. Para esto, se necesitará escribir la integral de línea como

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \int_{C_1} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy + \int_{C_2} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$

donde C_1 es la trayectoria cúbica dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$, y C_2 es el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema de Green para calcular trabajo

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3 \mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2) \mathbf{j}$$

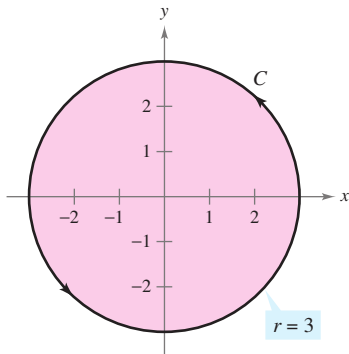


Figura 15.29

Estando sometida a la fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3 \mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2) \mathbf{j}$$

una partícula recorre una vez el círculo de radio 3 mostrado en la figura 15.29. Aplicar el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por \mathbf{F} .

Solución Por el ejemplo 1, se sabe, de acuerdo con el teorema de Green, que

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R 3x^2 dA.$$

En coordenadas polares, usando $x = r \cos \theta$ y $dA = r dr d\theta$, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \iint_R 3x^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 3(r \cos \theta)^2 r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \right]_0^3 d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{243}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{243}{8} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{243\pi}{4}. \end{aligned}$$

Al evaluar integrales de línea sobre curvas cerradas, recuérdese que en campos vectoriales conservativos (campos en los que $\partial N / \partial x = \partial M / \partial y$), el valor de la integral de línea es 0. Éste es fácil de ver a partir de lo establecido en el teorema de Green:

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = 0.$$

EJEMPLO 3 Teorema de Green y campos vectoriales conservativos

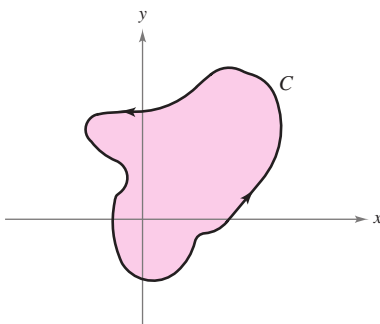
Evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy$$

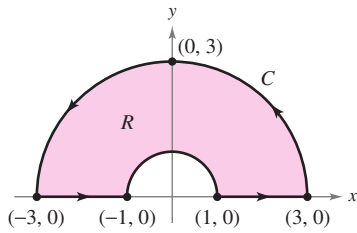
donde C es la trayectoria mostrada en la figura 15.30.

Solución A partir de esta integral de línea, $M = y^3$ y $N = 3xy^2$. Así que, $\partial N / \partial x = 3y^2$ y $\partial M / \partial y = 3y^2$. Esto implica que el campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo, y como C es cerrada, se concluye que

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy = 0.$$



C es cerrada
Figura 15.30



C es suave a trozos

Figura 15.31

EJEMPLO 4 Aplicación del teorema de Green para una curva suave a trozos (o por partes)

Evaluar

$$\int_C (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy$$

donde C es la trayectoria que encierra la región anular mostrada en la figura 15.31.

Solución En coordenadas polares, R está dada por $1 \leq r \leq 3$ para $0 \leq \theta \leq \pi$. Y,

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2x - 2y = -2(r \cos \theta + r \sin \theta).$$

Así, por el teorema de Green,

$$\begin{aligned} \int_C (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy &= \iint_R -2(x + y) dA \\ &= \int_0^\pi \int_1^3 -2r(\cos \theta + \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi -2(\cos \theta + \sin \theta) \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(-\frac{52}{3} \right) (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= -\frac{52}{3} [\sin \theta - \cos \theta]_0^\pi \\ &= -\frac{104}{3}. \end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 4, el teorema de Green se utilizó para evaluar integrales de línea como integrales dobles. También se puede utilizar el teorema para evaluar integrales dobles como integrales de línea. Una aplicación útil se da cuando $\partial N / \partial x - \partial M / \partial y = 1$.

$$\begin{aligned} \int_C M dx + N dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R 1 dA & \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ &= \text{área de la región } R \end{aligned}$$

Entre las muchas opciones para M y N que satisfacen la condición establecida, la opción de $M = -y/2$ y $N = x/2$ da la siguiente integral de línea para el área de la región R .

TEOREMA 15.9 INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA

Si R es una región plana limitada o acotada por una curva simple C , cerrada y suave a trozos, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces el área de R está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante una integral de línea

Usar una integral de línea para hallar el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

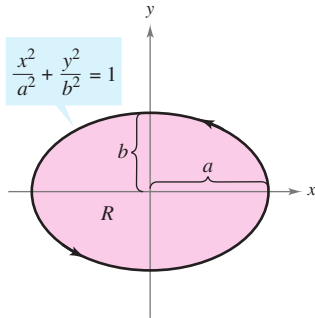


Figura 15.32

Solución Utilizando la figura 15.32, a la trayectoria elíptica se le puede inducir una orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj haciendo

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Por tanto, el área es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) \, dt - (b \sin t)(-a \sin t) \, dt] \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt \\ &= \frac{ab}{2} \left[t \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

El teorema de Green puede extenderse para cubrir algunas regiones que no son simplemente conexas. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

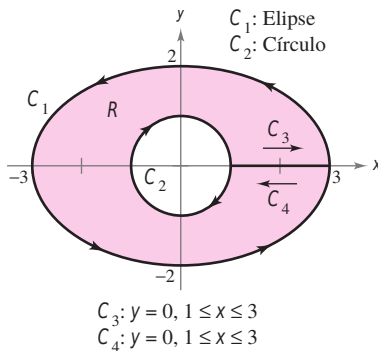
EJEMPLO 6 El teorema de Green extendido a una región con un orificio

Figura 15.33

Sea R la región interior a la elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Evaluar la integral de línea

$$\int_C 2xy \, dx + (x^2 + 2x) \, dy$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la frontera de R , como se muestra en la figura 15.33.

Solución Para empezar, se pueden introducir los segmentos de recta C_3 y C_4 , como se muestra en la figura 15.33. Nótese que como las curvas C_3 y C_4 tienen orientaciones opuestas, las integrales de línea sobre ellas se cancelan entre sí. Además, se puede aplicar el teorema de Green a la región R utilizando la frontera $C_1 + C_4 + C_2 + C_3$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_C 2xy \, dx + (x^2 + 2x) \, dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (2x + 2 - 2x) \, dA \\ &= 2 \iint_R dA \\ &= 2(\text{área de } R) \\ &= 2(\pi ab - \pi r^2) \\ &= 2[\pi(3)(2) - \pi(1^2)] \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

En la sección 15.1 se estableció una condición necesaria y suficiente para campos vectoriales conservativos. Ahí sólo se presentó una dirección de la demostración. Ahora se puede dar la otra dirección, usando el teorema de Green. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ definido en un disco abierto R . Se quiere demostrar que si M y N tienen primeras derivadas parciales continuas y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces \mathbf{F} es conservativo. Supóngase que C es una trayectoria cerrada que forma la frontera de una región conexa contenida en R . Entonces, usando el hecho de que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, se puede aplicar el teorema de Green para concluir que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M dx + N dy \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto es, a su vez, equivalente a mostrar que \mathbf{F} es conservativo (ver teorema 15.7).

Formas alternativas del teorema de Green

Esta sección concluye con la deducción de dos formulaciones vectoriales del teorema de Green para regiones en el plano. La extensión de estas formas vectoriales a tres dimensiones es la base del estudio en el resto de las secciones de este capítulo. Si \mathbf{F} es un campo vectorial en el plano, se puede escribir

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

por lo que el rotacional de \mathbf{F} , como se describió en la sección 15.1, está dada por

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial N}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

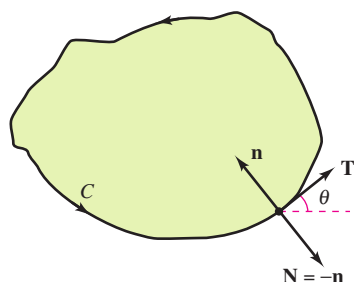
Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \left[-\frac{\partial N}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

Con condiciones apropiadas sobre \mathbf{F} , C y R , se puede escribir el teorema de Green en forma vectorial

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA. \end{aligned} \quad \text{Primera forma alternativa.}$$

La extensión de esta forma vectorial del teorema de Green a superficies en el espacio da lugar al **teorema de Stokes**, que se estudia en la sección 15.8.



$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{n} &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{j} \\ &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{N} &= \sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

Figura 15.34

Para la segunda forma vectorial del teorema de Green, supónganse las mismas condiciones sobre \mathbf{F} , C y R . Utilizando el parámetro longitud de arco s para C , se tiene $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$. Por tanto, un vector unitario tangente \mathbf{T} a la curva C está dado por $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T} = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$. En la figura 15.34 se puede ver que el vector unitario normal exterior \mathbf{N} puede entonces escribirse como

$$\mathbf{N} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, a $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ se le puede aplicar el teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}) \, ds \\ &= \int_a^b \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \int_C M \, dy - N \, dx \\ &= \int_C -N \, dx + M \, dy \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA. \end{aligned}$$

Teorema de Green.

Por consiguiente,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

Segunda forma alternativa.

La generalización de esta forma a tres dimensiones se llama **teorema de la divergencia**, discutido en la sección 15.7. En las secciones 15.7 y 15.8 se analizarán las interpretaciones físicas de divergencia y del rotacional.

15.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, comprobar el teorema de Green evaluando ambas integrales

$$\int_C y^2 \, dx + x^2 \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

sobre la trayectoria dada.

1. C : frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$
2. C : frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$
3. C : cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$
4. C : rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$, $(0, 4)$

CAS En los ejercicios 5 y 6, verificar el teorema de Green utilizando un sistema algebraico por computadora y evaluar ambas integrales

$$\int_C xe^y \, dx + e^x \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

sobre la trayectoria dada.

5. C : circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 4$
6. C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^3$ en el primer cuadrante

En los ejercicios 7 a 10, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral

$$\int_C (y - x) \, dx + (2x - y) \, dy$$

sobre la trayectoria dada.

7. C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2 - 2x$
8. C : $x = 2 \cos \theta$, $y = \sin \theta$
9. C : frontera de la región interior al rectángulo acotado por $x = -5$, $x = 5$, $y = -3$ y $y = 3$, y exterior al cuadrado acotado por $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ y $y = 1$.
10. C : frontera de la región interior al semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ y exterior al semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$

En los ejercicios 11 a 20, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

11. $\int_C 2xy \, dx + (x + y) \, dy$
C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$ y $y = 1 - x^2$
12. $\int_C y^2 \, dx + xy \, dy$
C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ y $x = 9$
13. $\int_C (x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy$ 14. $\int_C (x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy$
C: $x^2 + y^2 = 16$ C: $r = 1 + \cos \theta$
15. $\int_C e^x \cos 2y \, dx - 2e^x \sin 2y \, dy$
C: $x^2 + y^2 = a^2$
16. $\int_C 2 \arctan \frac{y}{x} \, dx + \ln(x^2 + y^2) \, dy$
C: $x = 4 + 2 \cos \theta$, $y = 4 + \sin \theta$
17. $\int_C \cos y \, dx + (xy - x \sin y) \, dy$
C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$
18. $\int_C (e^{-x^2/2} - y) \, dx + (e^{-y^2/2} + x) \, dy$
C: frontera de la región comprendida entre las gráficas del círculo $x = 6 \cos \theta$, $y = 6 \sin \theta$ y la elipse $x = 3 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$
19. $\int_C (x - 3y) \, dx + (x + y) \, dy$
C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$
20. $\int_C 3x^2 e^y \, dx + e^y \, dy$
C: frontera de la región comprendida entre los cuadrados cuyos vértices son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$, y $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ y $(2, -2)$

Trabajo En los ejercicios 21 a 24, utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} sobre una partícula que se mueve, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por la trayectoria cerrada C .

21. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$
C: $x^2 + y^2 = 1$
22. $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - 3y)\mathbf{i} + (e^y + 6x)\mathbf{j}$
C: $r = 2 \cos \theta$
23. $\mathbf{F}(x, y) = (x^{3/2} - 3y)\mathbf{i} + (6x + 5\sqrt{y})\mathbf{j}$
C: contorno del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$
24. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + y)\mathbf{i} + 4xy^2\mathbf{j}$
C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 9$

Área En los ejercicios 25 a 28, utilizar una integral de línea para hallar el área de la región R .

25. R : región acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$
26. R : triángulo acotado por las gráficas de $x = 0$, $3x - 2y = 0$ y $x + 2y = 8$
27. R : región acotada por las gráficas de $y = 5x - 3$ y $y = x^2 + 1$
28. R : región interior al lazo de la hoja o folio de Descartes acotada por la gráfica de
- $$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$

Desarrollo de conceptos

29. Enunciar el teorema de Green.
30. Dar la integral de línea para el área de una región R acotada por una curva simple suave a trozos C .

En los ejercicios 31 y 32, utilizar el teorema de Green para verificar las fórmulas de las integrales de línea.

31. El centroide de una región de área A acotada por una trayectoria simple cerrada C es

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 \, dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \int_C y^2 \, dx.$$

32. El área de una región plana acotada por la trayectoria simple cerrada C dada en coordenadas polares es

$$A = \frac{1}{2} \int_C r^2 \, d\theta.$$

CAS Centroides En los ejercicios 33 a 36, utilizar un sistema algebraico por computadora y los resultados del ejercicio 31 para hallar el centroide de la región.

33. R : región acotada por las gráficas de $y = 0$ y $y = 4 - x^2$
34. R : región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$
35. R : región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$, $0 \leq x \leq 1$
36. R : triángulo cuyos vértices son $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) , donde $-a \leq b \leq a$

CAS Área En los ejercicios 37 a 40, utilizar un sistema algebraico por computadora y los resultados del ejercicio 32 para hallar el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación polar.

37. $r = a(1 - \cos \theta)$ 38. $r = a \cos 3\theta$
39. $r = 1 + 2 \cos \theta$ (lazo interior) 40. $r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$

41. a) Evaluar $\int_{C_1} y^3 \, dx + (27x - x^3) \, dy$, donde C_1 es el círculo unitario dado por $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) Encontrar el valor máximo de $\int_C y^3 \, dx + (27x - x^3) \, dy$, donde C es cualquier curva cerrada en el plano xy , orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Para discusión

42. Para cada trayectoria dada, verificar el teorema de Green al demostrar que

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Para cada trayectoria, ¿cuál de las integrales es más fácil evaluar? Explicar.

- a) C : triángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$
 b) C : círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$

43. **Para pensar** Sea

$$I = \int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

donde C es una circunferencia orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Mostrar que $I = 0$ si C no contiene el origen. ¿Cuál es el valor de I si C contiene al origen?

44. a) Sea C el segmento de recta que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Mostrar que

$$\int_C -y dx + x dy = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

- b) Sean (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) los vértices de un polígono. Demostrar que el área encerrada es

$$\frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)].$$

Área En los ejercicios 45 y 46, utilizar el resultado del ejercicio 44b para hallar el área encerrada por el polígono cuyos vértices se dan.

45. Pentágono: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(1, 4)$, $(-1, 1)$

46. Hexágono: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, $(0, 3)$, $(-1, 1)$

En los ejercicios 47 y 48, demostrar la identidad, donde R es una región simplemente conexa con frontera C . Suponer que las derivadas parciales requeridas de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_N f$ y $D_N g$ son las derivadas en dirección del vector normal exterior N de C , y se definen por $D_N f = \nabla f \cdot N$ y $D_N g = \nabla g \cdot N$.

47. Primera identidad de Green:

$$\iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dA = \int_C f D_N g ds$$

[Sugerencia: Utilizar la segunda forma alternativa del teorema de Green y la propiedad $\text{div}(f\mathbf{G}) = f \text{div} \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

48. Segunda identidad de Green:

$$\iint_R (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dA = \int_C (f D_N g - g D_N f) ds$$

(Sugerencia: Utilizar la primera identidad de Green, dada en el ejercicio 47, dos veces.)

49. Utilizar el teorema de Green para demostrar que

$$\int_C f(x) dx + g(y) dy = 0$$

si f y g son funciones derivables y C es una trayectoria cerrada simple suave a trozos.

50. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa R . Demostrar que si C es cerrada, simple y suave, y $N_x = M_y$, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

PROYECTO DE TRABAJO**Funciones hiperbólicas y trigonométricas**

- a) Dibujar la curva plana representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \cosh t \mathbf{i} + \sinh t \mathbf{j}$ en el intervalo $0 \leq t \leq 5$. Mostrar que la ecuación rectangular que corresponde a $\mathbf{r}(t)$ es la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Verificar el dibujo utilizando una herramienta de graficación para representar la hipérbola.
- b) Sea $P = (\cosh \phi, \sinh \phi)$ el punto de la hipérbola correspondiente a $\mathbf{r}(\phi)$ para $\phi > 0$. Utilizar la fórmula para el área

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

para verificar que el área de la región mostrada en la figura es $\frac{1}{2}\phi$.

- c) Mostrar que el área de la región indicada está también dada por la integral

$$A = \int_0^{\sinh \phi} [\sqrt{1 + y^2} - (\coth \phi)y] dy.$$

Confirmar la respuesta del inciso b) aproximando esta integral numéricamente para $\phi = 1, 2, 4$ y 10 .

- d) Considerar la circunferencia unitaria dada por $x^2 + y^2 = 1$. Sea θ el ángulo formado por el eje x y el radio a (x, y) . El área del sector correspondiente es $\frac{1}{2}\theta$. Es decir, las funciones trigonométricas $f(\theta) = \cos \theta$ y $g(\theta) = \sin \theta$ podrían haber sido definidas como las coordenadas del punto $(\cos \theta, \sin \theta)$ en el círculo unitario que determina un sector de área $\frac{1}{2}\theta$. Escribir un párrafo breve explicando cómo definir las funciones hiperbólicas de una manera similar, utilizando la “hipérbola unitaria” $x^2 - y^2 = 1$.

