Producto de Matrices y Formas Escalonadas

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

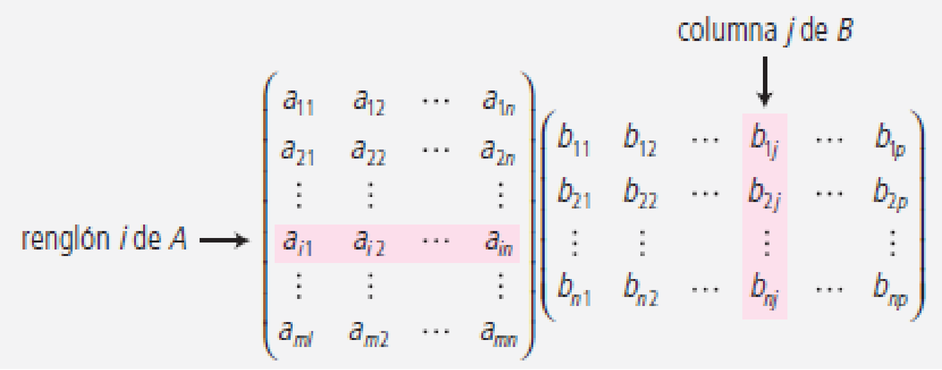
21 de junio del 2021

Producto de Matrices

- Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times p$, entonces podemos definir el producto de A y B como una matriz $C = (c_{ij})$ de tamaño $m \times p$ en donde para cada i y j:

$$cij = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

- Es decir, $cij = (Renglon\ i\ de\ A).(columna\ j\ de\ B)$



- Dos matrices A y B se dicen que son compatibles para la multiplicación A por B si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule AB.

Solución: Como A tiene 3 columnas y B tiene 3 renglones entonces son compatibles para el producto AB. El producto $C = AB$ es una matriz que tiene el número de renglones de A y el número de columnas de B.

Es decir, C es de tamaño 2×4. Entonces: $c_{11} = (2 \quad 0 \quad -3).\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2(7) + 0(2) + (-3)(-3) = 23$

$$c_{12} = (2 \quad 0 \quad -3).\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(-1) + 0(5) + (-3)(1) = -5$$

$$c_{13} = (2 \quad 0 \quad -3).\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(4) + 0(0) + (-3)(2) = 2$$

$$c_{14} = (2 \quad 0 \quad -3).\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2(7) + 0(-4) + (-3)(3) = 5$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4(7) + 1(2) + 5(-3) = 15$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4(-1) + 1(5) + 5(1) = 6$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4(4) + 1(0) + 5(2) = 26$$

$$c_{24} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4(7) + 1(-4) + 5(3) = 39$$

Así, $AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$

Observe que el producto BA no está definido porque el número de columnas de B (cuatro columnas) no coincide con el número de renglones de A (dos renglones).

Propiedades del Producto

- En términos, los productos de matrices no son conmutativos; es decir, casi siempre ocurre que $AB \neq BA$.

- *Ley asociativa de la multiplicación de matrices*

  Si A es una matriz de $n \times m$, B es de $m \times p$ y C es de $p \times q$, entonces

  $$A(BC) = (AB)C$$

  y tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ son matrices de $n \times q$.

- *Leyes distributivas de la multiplicación de matrices*

  Si todos los productos están definidos, entonces

  $$A(B + C) = AB + AC \quad \text{y} \quad (A + B)C = AC + BC$$

Autoevaluación

I) De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es cierta para la multiplicación de las matrices A y B?

a) Se puede realizar sólo si A y B son matrices cuadradas.
b) Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij}.
c) $AB = BA$.
d) Se puede realizar sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

II) ¿Cuál de los siguientes sería el tamaño de la matriz producto AB si se multiplica la matriz A de 2×4 por la matriz B de 4×3?

a) 2×3 *b*) 3×2 *c*) 4×4
d) Este producto no se puede calcular.

III) Indique cuál de los siguientes enunciados es correcto para las matrices A y B si AB es un vector columna.

a) B es un vector columna.
b) A es un vector renglón.
c) A y B son matrices cuadradas.
d) El número de renglones de A debe ser igual al número de columnas de B.

IV) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto AB es cierta si A es una matriz de 4×5?

a) B debe tener cuatro renglones y el resultado tendrá cinco columnas.
b) B debe tener cinco columnas y el resultado será una matriz cuadrada.
c) B debe tener cuatro columnas y el resultado tendrá cinco renglones.
d) B debe tener cinco renglones y el resultado tendrá cuatro renglones.

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) II) *a*) III) *a*) IV) *d*)

Ejercicios Propuestos

- Realice los productos indicados

1) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, encuentre un vector no nulo $b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $Ab = 6b$.

8) Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Forma Escalonada Reducida por Renglones

Una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Ejemplo

Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Forma Escalonada por Renglones

- Una matriz está en la forma escalonada por renglones si cumple las condiciones i), ii) y iii) de la matriz en forma escalonada reducida por renglones.
- **Ejemplo:** Las siguientes matrices están en forma escalonada por renglones

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Operaciones Elementales por Renglones

Permiten transformar una matriz A a alguna de sus formas escalonadas por renglones, la matriz obtenida se llama la matriz escalonada por renglones asociada a la matriz A, las operaciones son las siguientes:

i) Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii) Intercambiar dos renglones.

Notación

1. $R_i \rightarrow cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]

2. $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.

3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".

Rango de una matriz

Dada una matriz A el rango de una matriz denotado por $\rho(A)$ es el número de renglones distintos de cero de la matriz escalonada por renglones asociada a la matriz A.

Ejemplo: Reduzca la siguiente matriz a la forma escalonada y determine el rango de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz en forma escalonada,
$\rho(A) = 3$

Para mayor comprensión veamos los detalles de algunas operaciones:

- $R_1 \longrightarrow \frac{1}{2}R_1$ consiste en reemplazar el renglón uno por $\frac{1}{2}R_1$

$$(2 \quad 4 \quad 6 \quad 18) \longrightarrow (2/2 \quad 4/2 \quad 6/2 \quad 18/2) \rightarrow (1 \quad 2 \quad 3 \quad 9)$$

- $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$ reemplazamos el renglón dos por $R_2 - 4R_1$

$$\boxed{(4 \quad 5 \quad 6 \quad 24)} \begin{array}{l} \rightarrow (4 \quad 5 \quad 6 \quad 24) - 4(1 \quad 2 \quad 3 \quad 9) \\ \rightarrow (4-4 \quad 5-8 \quad 6-12 \quad 24-36) \\ \rightarrow (0 \quad -3 \quad -6 \quad -12) \end{array}$$

- $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$ reemplazamos el renglón tres por $R_3 - 3R_1$

$$\boxed{(3 \quad 1 \quad -2 \quad 4)} \begin{array}{l} \rightarrow (3 \quad 1 \quad -2 \quad 4) - 3(1 \quad 2 \quad 3 \quad 9) \\ \rightarrow (3-3 \quad 1-6 \quad -2-9 \quad 4-27) \\ \rightarrow (0 \quad -5 \quad -11 \quad -23) \end{array}$$

De modo similar se procede con el resto de renglones de acuerdo a las operaciones indicadas

Nota:

- En la siguiente clase se va a dar un método para conseguir la forma escalonada de una matriz.
- Primero se introducirá la relación entre matrices y sistemas de ecuaciones lineales y luego se daran los métodos Gaussiano y el de Gauss-Jordan que sugieren como encontrar la forma escalonada en el primer caso y la forma escalonada reducida por renglones en el segundo.

Hasta la próxima!