Conservación de Momento Cinético

En un parque infantil un niño de masa m_n observa un tiovivo que está en reposo y decide montarse sobre él, para esto sale corriendo hacia el tiovivo con velocidad constante $\vec{v}_n$. Si el niño salta sobre el tiovivo y cae en el punto P cuya posición es $\vec{r}_p$, determine:

Nota: el tiovivo puede considerarse como un disco de masa m_T y radio R_T

Datos:

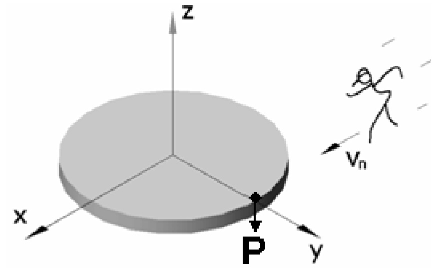
$m_n = 40\,\text{kg}$

$\vec{v}_n = -4\hat{i}$ (m/s)

$\vec{r}_P = 2\hat{j}$ (m)

$R_T = 2\,\text{m}$

$m_T = 20\,\text{kg}$



Leyes y Principios	Conceptos
▪ Cinemática de la partícula ▪ Segunda ley de Newton para cuerpo Rígido	▪ Diagrama de cuerpo libre ▪ Momento de inercia $I = \sum m_i r_i^2$ (Masas puntuales) $I = I_{cm} + Md^2$ (Cuerpo continuo) ▪ Momento cinético $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ▪ Torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Solución

Consideraciones:

a) Se considera al niño como una partícula.

b) Para el sistema formado por el tiovivo y el niño: en el eje del tiovivo no existe fuerza de roce, por lo tanto el torque debido a la fricción es nulo, y además no existen torques de fuerzas externas (existen fuerzas y torques entre el niño y el tiovivo pero tanto como las fuerzas y los torques son internos, de manera que se cancelan).

Por lo tanto: $\sum \tau_{ext} = 0$ **lo que significa que se conserva el Momento cinético del sistema:** $\sum \vec{L}_o = \sum \vec{L}_f = \text{constante}$

1. ¿Cuál es la velocidad angular del niño y el tiovivo una vez que estén girando juntos?

Se determina el valor del momento cinético inicial del sistema tiovivo-niño y por el principio de conservación del momento cinético: $\sum \vec{L}_o = \sum \vec{L}_f \;\ldots\ldots(1)$

Donde el momento cinético final del sistema está relacionado con la **velocidad angular del tiovivo y niño una vez que estén girando juntos** y a partir de esta ecuación calcular esta velocidad.

Justo antes del niño subir al tiovivo. $\sum \vec{L}_o = \vec{L}_{tiovivo,rot} + \vec{L}_{niño,traslac} \;\ldots\ldots(2)$

Momento cinético inicial $\left(\sum \vec{L}_0\right)$:De las condiciones iniciales se tiene que el tiovivo se encuentra en reposo y el niño se esta trasladando

Para la Rotación, tiovivo

$\vec{L}_{tiovivo} = I\vec{\omega}_0 = I_P\vec{\omega}_0$

$\vec{L}_{tiovivo} = I_P(0)$

$\vec{L}_{tiovivo} = 0\,\text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$

$\vec{L}_{tiovivorot\,0}$ = Momento cinético inicial en la rotación

$\vec{L}_{rot\,0} = 0$ ($\omega_{inicial}$ cero)

Para la Traslación, niño:

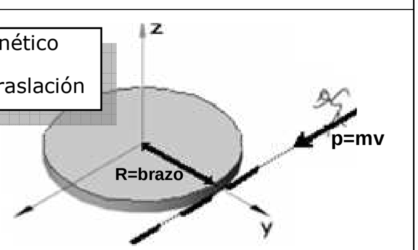
$\vec{L}_{niñotrasl} = \vec{r} \times \vec{p}_0$

$\vec{L}_{tral\,0}$ = Momento cinético inicial del niño en traslación

$L_{niñotrasl} = \text{brazo} \times |\vec{p}_0|$

$L_{niñotrasl} = R \times mv_0$

Con esta ecuación obtenemos el módulo del momento cinético



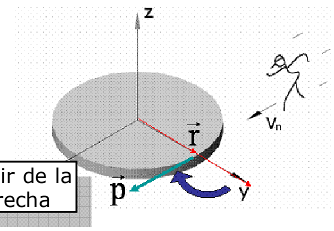
La dirección y sentido del momento cinético en traslación se obtiene aplicando la regla de la mano derecha, por lo tanto:

$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}} = -\ R \times (mv_0)\ \hat{k}$$

Se obtuvo a partir de la regla de la mano derecha

$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}} = -2(40)(4)\ \hat{k}$$

$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}} = -320\ \hat{k}\ \text{kgm}^2/\text{s}$$



Luego Sustituyendo los valores de momento cinético inicial en la rotación y traslación en la ecuación 2 tenemos que:

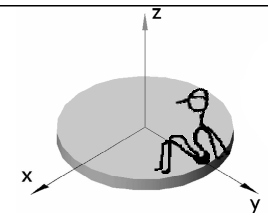
$$\sum\vec{L}_o = \vec{L}_{\text{tiovivorot}} + \vec{L}_{\text{niñotrasl}} \Rightarrow \sum\vec{L}_o = 0 + (-320)$$

$$\sum\vec{L}_o = -320\ \hat{k}\quad \text{kgm}^2/\text{s}$$

Justo cuando el niño esta en el tiovivo sujeto en el extremo, calculamos el valor del Momento cinético final $\left(\sum\vec{L}_f\right)$, a partir de:

$$\sum\vec{L}_f = \vec{L}_{\text{tiovivo}} + \vec{L}_{\text{niño}} \ldots\ldots(3)$$

En este momento el niño deja de trasladarse $\left(\vec{L}_{\text{trasl}} = 0\right)$, comienza a rotar junto con la plataforma



Para la Rotación:

El niño es considerado como una masa puntual por lo que el momento de inercia es

$$\sum\vec{L}_{\text{rot f}} = I\vec{\omega}_f = (I_{\text{tiov}} + I_{\text{niño}})\vec{\omega}_f$$

$$\sum\vec{L}_{\text{rot f}} = (\frac{1}{2}MR^2 + m_{\text{niño}}r^2)\ \vec{\omega}_f \Rightarrow \sum\vec{L}_{\text{rot f}} = (\frac{1}{2}MR^2 + m_{\text{niño}}R^2)\ \vec{\omega}_f$$

$$\sum\vec{L}_{\text{rot f}} = 200\ \vec{\omega}_f$$

Sustituyendo los valores de momento cinético final en la rotación y traslación en la ecuación 3 tenemos que:

$$\sum\vec{L}_f = 200\,\vec{\omega}_f$$

Sustituyendo los momentos cinéticos iniciales y finales en la ecuación 1, se puede obtener de :

$$\sum\vec{L}_o = \sum\vec{L}_f \quad \Rightarrow \quad -320 = 200\ \vec{\omega}_f \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_f = \frac{-320}{200}\hat{k}$$

$$\vec{\omega}_f = -1{,}6\ \hat{k}\ \ \text{rad/s}$$

Una vez que el niño quede en el tiovivo, ambos se mueven con una velocidad angular de **1,6 rad/s** y girarán en sentido horario, en torno al eje Z.

2. Si el niño se mueve sobre el tiovivo hasta quedar a una distancia de 1,5 m de la periferia del tiovivo, cuál es la nueva velocidad angular del sistema niño+tiovivo en esta oportunidad?

Como ya se determinó el valor del momento cinético inicial del sistema tiovivo-niño $\left(\sum\vec{L}_0\right)$ y por el principio de conservación del momento cinético sabemos que: $\sum\vec{L}_0 = \sum\vec{L}_f$ se calcula la nueva velocidad angular del sistema usando esta misma ecuación pero con una nueva condición.

Una vez que el niño quede a $1{,}5\,\text{m}$ de la periferia del tiovivo, es decir, va a tener una nueva r con respecto al eje de rotación del tiovivo: r=0,5 m.

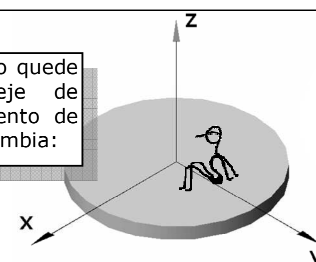
Para esta nueva condición, el momento cinético final $\left(\sum\vec{L}_{f2}\right)$:

$$\sum\vec{L}_{f2} = \vec{L}_{\text{tiovrot}} + \vec{L}_{\text{niñorot}}$$

Cuando el niño quede a 0.5m del eje de rotación el momento de inercia del niño cambia:

$$\sum\vec{L}_{f2} = (I_{\text{tiov}} + I_{\text{niño}})\,\vec{\omega}_{f2} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + m_{\text{niño}}r^2\right)\vec{\omega}_{f2}$$

$$\sum\vec{L}_{f2} = \left(\frac{1}{2}(20)(2)^2 + 40(0,5)^2\right)\vec{\omega}_{f2} \quad \Rightarrow \sum\vec{L}_{f2} = 50\vec{\omega}_{f2}$$



Luego por el principio de conservación del momento cinético se tiene:

$$\sum \vec{L}_o = \sum \vec{L}_f \quad \Rightarrow \quad -320 = 50\ \vec{\omega}_f$$

$$\vec{\omega}_{f2} = \frac{-320}{50}\hat{k} \Rightarrow \vec{\omega}_{f2} = -6,4\ \hat{k}\ \text{rad/s}$$

La velocidad angular del tiovivo y niño aumenta porque el momento de inercia del niño disminuyó.

3. Si en otro instante el niño esta localizado en la periferia del tiovivo, y decide lanzarse desde el punto P con una velocidad de $\vec{v} = 2\,\hat{i}\ \text{m/s}$, Cuál será la nueva velocidad angular del tiovivo?

Por el principio de conservación del momento cinético: $\sum \vec{L}_0 = \sum \vec{L}_f$ se puede obtener el valor de la velocidad angular del tiovivo una vez que el niño se lancé de la periferia de éste.

Ahora el niño se traslada y el tiovivo sigue rotando:

$$\sum \vec{L}_{f3} = \vec{L}_{\text{tiovrot } f} + \vec{L}_{\text{niñotrasl } f}$$

Para la rotación:

$$\vec{L}_{\text{tiovivorot } f3} = \vec{L}_{\text{tioviv } f3} = I_{\text{tiov}}\vec{\omega}_{f3}$$

$$\vec{L}_{\text{tiovivorot } f3} = \frac{1}{2}MR^2\vec{\omega}_{f3}$$

$$\vec{L}_{\text{tioviv } f3} = \frac{1}{2}(20)(2)^2\vec{\omega}_{f3} = 40\vec{\omega}_{f3}$$

Para la traslación:

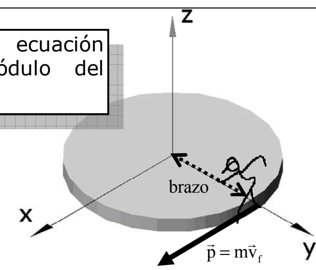
$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}_{f3}} = \vec{r}\times\vec{p}_f$$

$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}_{f3}} = \text{brazo}\times|\vec{p}_f|$$

Con esta ecuación obtenemos el módulo del momento cinético

$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}_{f3}} = R\times mv_f$$

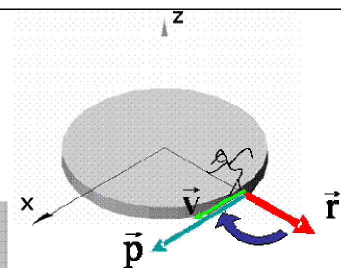
$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}_{f3}} = 2(40)(2) = 160\,\text{kgm}^2/\text{s}$$



La dirección y sentido del momento cinético en traslación se obtiene aplicando la regla de la mano derecha, por lo tanto:

$$\vec{L}_{\text{niñotrasl}_{f3}} = -160\,\hat{k}\ \ \text{kgm}^2/\text{s}$$

Se obtuvo a partir de la regla de la mano derecha



Luego por el principio de conservación del momento cinético se tiene:

$$\sum \vec{L}_o = \sum \vec{L}_{f3} \Rightarrow \quad -320 = -160 + 40\ \vec{\omega}_{f3}$$

$$\vec{\omega}_{f3} = \frac{-320+160}{40}\hat{k} \Rightarrow \vec{\omega}_f = -4\ \hat{k}\ \text{rad/s}$$

La velocidad angular del tiovivo aumenta porque el niño empuja a la plataforma en el mismo sentido del movimiento que ella tiene al saltar.