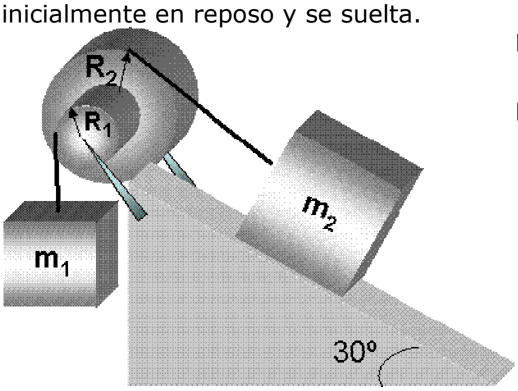
Problema. En el sistema de la figura la cuerda que une al bloque de masa m_1 está enrollada alrededor del cilindro pequeño de la polea y la cuerda que une al bloque de masa m_2 está enrollada alrededor del cilindro grande. La polea está formada por dos cilindros sólidos unidos tal y como se ve en la figura. El sistema está inicialmente en reposo y se suelta.



Los datos son los siguientes:

$m_1 = 10\text{kg}; \quad m_2 = 30\text{kg}$

Los discos que forman la polea son de masa y radio, respectivamente:

Cilindro Grande $M = 20\text{kg}; \quad R_2 = 0,5\text{m}$

Cilindro pequeño $m = 10\text{kg}; \quad R_1 = 0,2\text{m}; \quad g = 9,8\,\text{m/s}^2$

Para el sistema formado por la polea y los bloques determinar

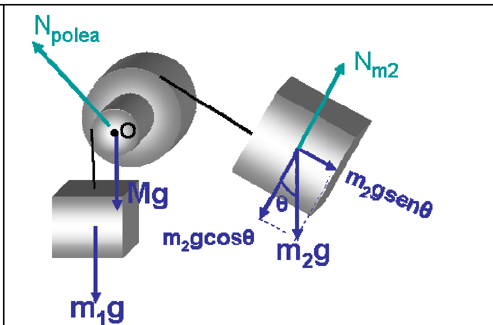
1. ¿Cuál es el valor del torque externo sobre el sistema?
2. ¿Cuál es el valor de la aceleración angular de la polea?
3. ¿Cuál es la rapidez del bloque de masa m2 a los 4 s. de estarse moviendo?

Leyes y principios	Conceptos
▪ Cinemática de la partícula ▪ Segunda ley de Newton	▪ Diagrama de cuerpo libre ▪ Momento de inercia ▪ Momento cinético ▪ Torque

Para el sistema formado por la polea y los bloques determinar

1. ¿Cuál es el valor del torque externo sobre el sistema?

a) Para el cálculo del torque externo sobre el sistema formado por polea, bloque m_2 y bloque m_1 se hace un diagrama de cuerpo libre donde se indican las fuerzas externas que actúan sobre él (ver figura)**. <u>Importante:</u>** no se dibujan las tensiones de las cuerdas por que ellas son parte del sistema y son consideradas de masa despreciable e inextensibles)



b) Se calcula el valor del torque de cada una de estas fuerzas con respecto al eje de rotación de la polea (punto O) y se suman estos torques, el resultado es el valor del torque neto aplicado sobre el sistema:

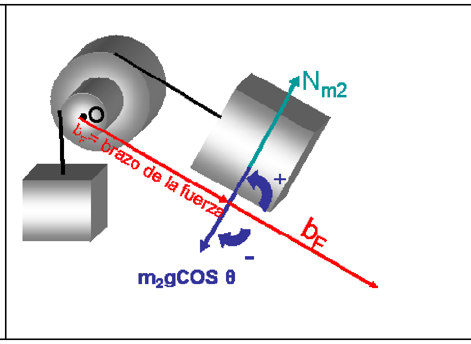
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{m_1 g} + \vec{\tau}_{M_{pol} g} + \vec{\tau}_{N_{pol}} + \vec{\tau}_{m_2 g Sen30} + \vec{\tau}_{m_2 g Cos30} + \vec{\tau}_{N_{m_2}}$$

Los torques $\tau_{m_2 g\cos 30}$ y $\tau_{N_{m_2}}$ **:**

son iguales en magnitud y dirección pero de sentido contrario, **por lo tanto cuando se suman el resultado es cero, puesto que:**

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_{ym2} = 0 \Rightarrow N_{m2} - m2g\cos 30 = 0 \\ &N_{m2} = m2g\cos 30 \\ &\vec{\tau}_{m_2 g Cos30} = -b_F\left|m_2 g\cos 30\right| \\ &\vec{\tau}_{N_{m_2}} = b_F\left|N_{m2}\right| \end{aligned}\right\}$$

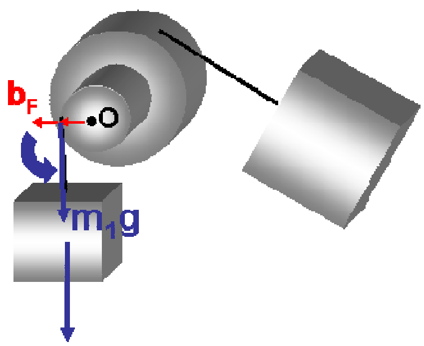
Estas fuerzas tienen el mismo módulo y dirección y sentido contrario, el brazo de la fuerza es el mismo. El signo del torque se obtiene aplicando la regla de la mano derecha.



El torque hecho por el peso de la polea (Mg) y el hecho por la normal sobre la polea (N_{polea}) es cero, puesto que la línea de acción de estas fuerzas pasan por el punto O, es decir, r=0.Por lo tanto la expresión queda como:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{m_1g} + \cancel{\vec{\tau}}^{0}_{M_{pol}g} + \cancel{\vec{\tau}}^{0}_{N_{pol}} + \vec{\tau}_{m_2gSen30} + \underbrace{\left(\vec{\tau}_{m_2gCos30} + \vec{\tau}_{N_{m_2}}\right)}_{=0} \Rightarrow \sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{m_1g} + \vec{\tau}_{m_2gSen30}$$

Para calcular $\vec{\tau}_{m_1g}$:



$$\vec{\tau}_{m_1g} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Como la línea de acción de la fuerza (peso de m_1) es tangente al disco, entonces el radio del disco es el brazo de la fuerza, por lo que podemos obtener el modulo del torque hecho por esta fuerza como: $\tau_{m_1g} = |b||\vec{F}|$

La dirección y el sentido por la regla de la mano derecha.

Cálculos:

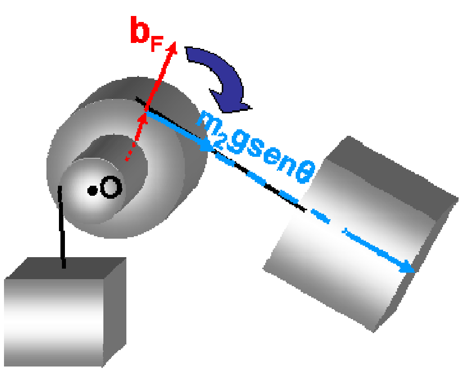
$$\tau_{m_1g} = |b||\vec{F}| \Rightarrow \tau_{m_1g} = |R||mg|$$

$$\tau_{m_1g} = |0,2||10(9,8)| \Rightarrow \tau_{m_1g} = 19,6 \text{ Nm}$$

Luego aplicando la regla de la mano derecha:

$$\vec{\tau}_{m_1g} = +19,6\ \hat{k}\ \text{Nm}$$

Para calcular $\tau_{m_2gsen30}$:



$$\vec{\tau}_{m_2gsen30} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Al igual que en el caso anterior la línea de acción de la fuerza (peso de m_2) es tangente al disco, por lo tanto el radio es el brazo de la fuerza y podemos obtener el módulo del τ_{m_2g} a partir de:

$$\tau_{m_2gsen30} = |b||\vec{F}|$$

La dirección y el sentido por la regla de la mano derecha.

Cálculos:

$$\tau_{m_1g} = |b||\vec{F}| \Rightarrow \tau_{m_1g} = |R||m_2g|\text{sen }30$$

$$\tau_{m_1g} = |0,5||30(9,8)|\text{sen }30 \Rightarrow \tau_{m_1g} = 73,5$$

Luego aplicando la regla de la mano derecha:

$$\vec{\tau}_{m_1g} = -73,5\ \hat{k}\ \text{Nm}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{m_1g} + \vec{\tau}_{m_2gSen30} = -73,5 + 19,6 \qquad \sum \vec{\tau}_{ext} = -53,9\ \hat{k}\ \text{Nm}$$

Nota: El signo del torque externo nos indica el sentido de giro de la polea, es decir que ésta acelerará angularmente en la dirección del eje z negativo (sentido horario), como parte del reposo α y ω tienen igual dirección y sentido

2. Y ¿Cuál es el valor de la aceleración angular de la polea?

La aceleración angular de la polea se determina a partir de la segunda ley de Newton para cuerpos rígidos:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{SIST}}{dt} \ldots\ldots(0)$$

$$\vec{L}_{SIST} = \vec{L}_{POLEArot} + \vec{L}_{m1trasl} + \vec{L}_{m2trasl}$$

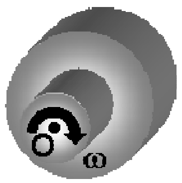
Donde:

$$\vec{L}_{POLEArot} = I_{polea}\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_{m1trasl} = \vec{r} \times \vec{p}_{m1}$$

$$\vec{L}_{m2trasl} = \vec{r} \times \vec{p}_{m2}$$

Para calcular $\vec{L}_{POLEA}$:



$\vec{L}_{POLEA} = I_{polea}\vec{\omega}$; Para hallar el momento de inercia de la polea se suman los momentos de inercia de cada uno de los discos:

$I_{polea} = I_{disco1} + I_{disco2}$

$I_{polea} = I_{disco1} + I_{disco2} \Rightarrow I_{polea} = \frac{1}{2}m\left(R_1\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(R_2\right)^2$

$I_{polea} = \frac{1}{2}(10)(0,2)^2 + \frac{1}{2}(20)(0,5)^2 \Rightarrow I_{polea} = 2,7\ kg\ m^2$

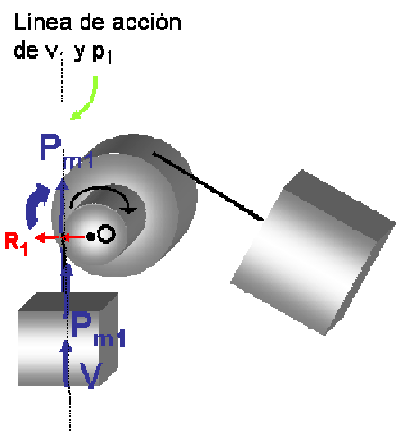
Ecuación Momento cinético de la polea: La polea adquiere una velocidad angular de sentido negativo:

$\vec{L}_{POLEA} = I_p\vec{\omega}$

$\vec{L}_{POLEA} = -I_p\omega\ \hat{k}\ \ Nm$

$\vec{L}_{POLEA} = -I_p\omega$ ....(1)

Para calcular $\vec{L}_{m1}$:



$\vec{L}_{m_1} = \vec{r}\times\vec{p}_{m_1} \Rightarrow L_{m_1} = |\vec{r}||\vec{p}_{m_1}|Sen\theta$

Como la línea de acción del vector cantidad de movimiento de m_1 es tangente al disco, entonces el radio del disco es perpendicular a p_{m1}

$L_{m_1} = |b||\vec{p}|$ donde

Ecuación Momento cinético del bloque m_1: $L_{m_1} = R_1 \times m_1 v_1$

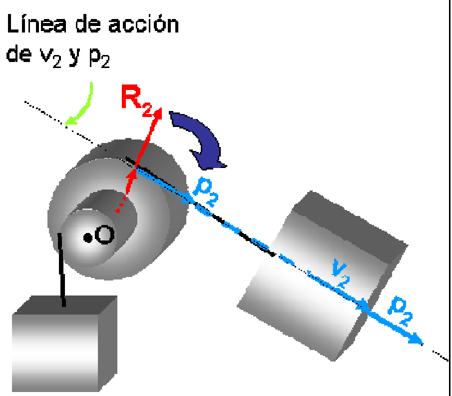
La velocidad que experimenta el bloque m_1 es en módulo igual a la velocidad que experimenta el cilindro de radio R_1 en su periferia, por lo tanto: $v_1 = R_1 \times \omega$

$L_{m_1} = (R_1)(m_1)(R_1)\times(\omega) \Rightarrow L_{m_1} = m_1(R_1)^2 \times \omega$

La dirección y el sentido se determina por la regla de la mano derecha.

$\vec{L}_{m_1} = -m_1(R_1)^2 \times \omega\ \hat{k}\ \ Nm \ldots(2)$

Para calcular $\vec{L}_{m2}$:



$\vec{L}_{m2} = \vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow L_{m2} = |\vec{r}||\vec{p}|sen\theta$

De igual modo que en anterior caso la línea de acción del vector cantidad de movimiento de m_2 es tangente al disco, entonces el radio del disco es perpendicular a p_{m2}

$L_{m_2} = |b||\vec{p}|$

Ecuación Momento cinético del bloque m_2: $L_{m_2} = R_2 \times m_2 v_2$

La velocidad que experimenta el bloque m_2 es en módulo igual a la velocidad que experimenta el cilindro de radio R_2 en su periferia, por lo tanto: $v_2 = R_2 \times \omega$

$L_{m2} = (R_2)(m_2)(R_2)\times(\omega) \Rightarrow L_{m_2} = m_2(R_2)^2 \times \omega$

La dirección y el sentido por la regla de la mano derecha.

$\vec{L}_{m_2} = -m_2(R_2)^2 \times \omega\ \hat{k}\ \ Nm \ldots(3)$

Retomando la ecuación (0), vamos a determinar la parte derecha de la igualdad $\frac{d\vec{L}_{SIST}}{dt}$:

$\frac{d\vec{L}_{SIST}}{dt} = \frac{d(\vec{L}_{POLEA} + \vec{L}_{m1} + \vec{L}_{m2})}{dt}$ sustituyendo las ecuaciones 1, 2 y 3 se tiene:

$\frac{d\vec{L}_{SIST}}{dt} = \frac{d\left(-I_p\omega - m_1(R_1)^2\omega - m_2(R_2)^2\omega\right)}{dt}$, sacando factor común ω y puesto I_P, m_1, m_2, R_1, R_2 no cambian con el tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_{SIST}}{dt} = -\left(I_p + m_1(R_1)^2 + m_2(R_2)^2\right)\frac{d(\omega)}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{SIST}}{dt} = -\left(I_p + m_1(R_1)^2 + m_2(R_2)^2\right)\alpha$$

De la pregunta 1, conocemos el valor de $\sum\vec{\tau}_{ext}$, y sustituyendo en la ecuación (0), $\sum\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{SIST}}{dt}$, se obtiene el valor de la aceleración angular de la polea:

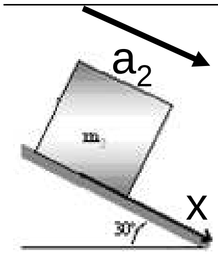
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = -\left(I_p + m_1(R_1)^2 + m_2(R_2)^2\right)\alpha$$

$$-53,9 = -\left(2,7 + 10(0,2)^2 + 30(0,5)^2\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{-53,9}{-\left(2,7 + 10(0,2)^2 + 30(0,5)^2\right)}$$

$$\alpha = 5,08 \quad rad/s^2$$

3. ¿Cuál es la rapidez del bloque de masa m_2 a los 4 s. de estarse moviendo?



El bloque de masa m_2 experimenta un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV), por lo que la función velocidad de es: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

La aceleración de m_2 es igual en módulo a la aceleración tangencial (en la periferia) del cilindro de radio R_2

$$a_2 = \alpha R_2 \quad \Rightarrow a_2 = 5,08 \times 0,5 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2,54 \ m/s^2$$

Luego: $\vec{v} = 0 + 2,54t$ $\qquad \vec{v}_4 = 10,17 \ m/s$

4. El momento cinético total del sistema a los 4 s. de estarse moviendo es:

Para determinar el momento cinético total del sistema lo podemos hacer de dos maneras, a través de:

a) El cálculo de los momentos cinéticos de cada uno de los cuerpos

El momento cinético total es: $\vec{L} = \vec{L}_{rot} + \vec{L}_{trasl}$

Donde:

$$\vec{L}_{rot} = I_{polea}\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_{trasl} = \vec{L}_{m_1} + \vec{L}_{m_2}$$

De las ecuaciones 1, 2 y 3, obtenidas de la **pregunta 2**:

$$\vec{L}_{rot} = -I_p\omega$$

$$\vec{L}_{trasl} = \vec{L}_{m_1} + \vec{L}_{m_2} \Rightarrow \vec{L}_{trasl} = -m_1(R_1)^2 \times \omega \quad -m_2(R_2)^2 \times \omega$$

Para t= 4s:

$$\vec{L}_{rot\,4} = -I_p\omega_4$$

$$\vec{L}_{trasl\,4} = -m_1(R_1)^2 \times \omega_4 \quad -m_2(R_2)^2 \times \omega_4$$

El valor de la velocidad angular la obtenemos a partir de la función velocidad angular para MCUV que es:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t \quad \Rightarrow \vec{\omega} = 0 - 5,08t$$

$$\vec{\omega}_4 = -5,08(4) \quad \Rightarrow \vec{\omega} = -20,32 \text{ rad/s}$$

En este caso nos interesa es el módulo de la velocidad angular: $\omega = 20,32$ rad/s

Luego el momento cinético es:

$$\vec{L}_{rot\,4} = -2,7(20,32) \Rightarrow \vec{L}_{rot\,4} = -54,86 \text{ Nm}$$

$$\vec{L}_{trasl\,4} = -10(0,2)^2(20,32) \quad -30(0,5)^2(20,32) \Rightarrow \vec{L}_{trasl\,4} = -160,53 \text{ Nm}$$

$$\vec{L}_4 = -54,86 - 160,53 \Rightarrow \vec{L}_4 = -215,39 \text{ Nm}$$

b) La segunda ley de Newton para cuerpos rígidos

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Se observa que el momento cinético $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)$ varía con el tiempo en forma constante debido a que el torque externo $\left(\sum \tau_{ext}\right)$ no cambia, por lo tanto:

$$-53,9 = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} = -53,9\,dt$$

$$\int_0^4 d\vec{L} = \int_0^4 -53,9\,dt$$

Integrando:

$$\int_0^4 d\vec{L} = \int_0^4 -53,9\,dt \quad \Rightarrow \vec{L}_4 = -53,9 \times t\Big|_0^4$$

$$\vec{L}_4 = -53,9(4)$$

$$\vec{L}_4 = -215,6 \text{ Nm}$$