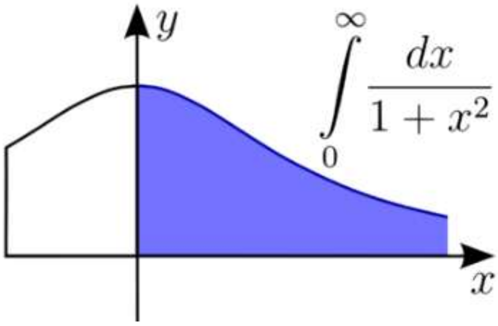
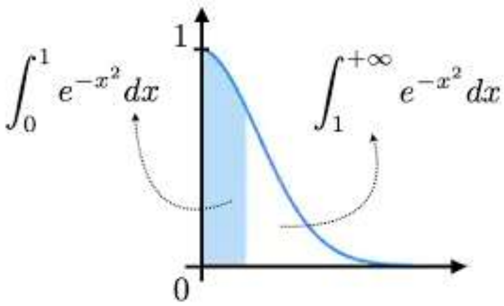
Universidad Nacional Experimental del Táchira
Departamento de Matemática y Física
Asignatura Matemática II (0826201)

Cálculo de Integrales Impropias





1. Integrales Impropias.

Objetivo:

Calcular Integrales Impropias

Hasta ahora hemos estudiado la integral de Riemann de una función f acotada y definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, además de la definición de Integral Definida que se caracteriza por 2 condiciones:

- El Intervalo $[a, b]$ es cerrado y acotado, los extremos pertenecen al intervalo.
- Y la función f es acotada en el intervalo $[a, b]$.

Ahora generalizaremos este concepto:

- Donde los intervalos de integración son Infinitos.
- Donde los intervalos de integración son finitos pero la función f tiene una discontinuidad infinita.

I. **Integrales Impropias de 1ª Especie** Integral de una función acotada, definida en un intervalo no acotado.

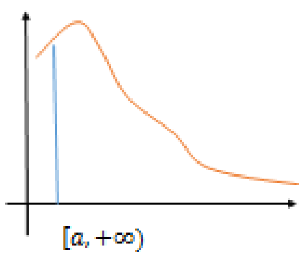
Sus intervalos son de la forma : $(-\infty, \infty +)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$,

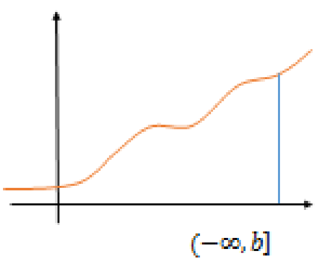
Y las integrales de este tipo son:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \; , \quad \int_{a}^{+\infty} f \quad , \quad \int_{-\infty}^{b} f$$

Siendo f acotada en el intervalo correspondiente.

Estas funciones tienen al eje x como asíntota horizontal.





1. Sea f continua en el intervalo $[a, +\infty)$ y supongamos que se conoce una primitiva F de la función f. Entonces,

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} [F(t) - F(a)]$$

2. Sea f continua en el intervalo $(-\infty, b]$ y supongamos que se conoce una primitiva F de la función f. Entonces,

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} [F(b) - F(t)]$$

3. Sea f continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y supongamos que se conoce una primitiva F de la función f y tomando un valor c del dominio. Entonces,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{c} f(x)dx + \lim_{t \to +\infty} \int_{c}^{t} f(x)dx$$

Así pues, el cálculo del valor de una integral impropia es reducir al cálculo de manera consecutiva de una integral definida y de un límite.

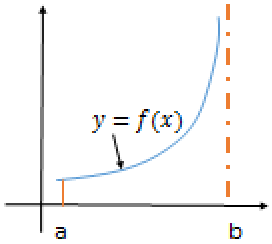
Si los límites existen y tienen valores finitos se dice que la integral impropia ***converge*** y si los límites no existen o no son finitos se dice que la integral ***diverge***.

II. **Integrales Impropias de 2ª Especie**: En este caso nos encontramos con funciones definidas en intervalos tales que tienen un comportamiento asintótico en alguno de sus extremos.

Sus intervalos son de la forma (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$

O en el caso de que la función presente una discontinuidad infinita en un punto c del intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, que en $x = c$ existe una asíntota vertical.

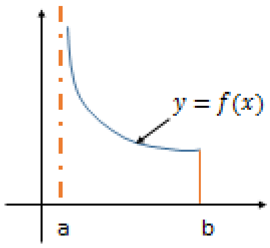
1. Sea f continua en el intervalo $[a, b)$ discontinua infinita en b y supongamos que se conoce una primitiva F de la función f.



Entonces,

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t \to b^-} [F(t) - F(a)]$$

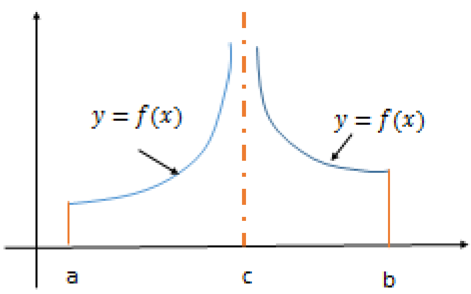
2. Sea f continua en el intervalo $(a, b]$ con discontinuidad en a y supongamos que se conoce una primitiva F de la función f.



Entonces,

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} [F(b) - F(t)]$$

3. Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ excepto en un c y supongamos que se conoce una primitiva F de la función f .



Entonces,

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

Por lo tanto, podemos afirmar que la idea básica que inspira el cálculo de las integrales impropias de segunda especie es integrar hasta un punto t arbitrario en el interior del intervalo y después, hacer tender t al extremo de integración donde la función sea *no acotada.*

Ejemplo A Evaluar la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$$

Solución

La integral corresponde a una integral impropia de 1ª especie

El Dominio de la función son $\mathbb{R}$, por tanto es continua en el intervalo $[0, +\infty)$

Aplicando la definición de integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x/2} dx$$

Hallando la Primitiva

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-2e^{-x/2}\right]_0^b$$

Sustituyendo los valores extremos

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\left(-2e^{-b/2}\right) - \left(-2e^{0/2}\right)\right]$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-2e^{-b/2} + 2\right)$$

Aplicando propiedades de límites

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{e^b}}\right) + \lim_{b\to+\infty} 2$$

Hallando el límite cuando tiende a infinito

$$= 0 + 2 = 2$$

Ejemplo B: Estudiar la convergencia de la Integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$$

Y en caso de convergencia, calcular su valor

Solución:

Determinando el dominio de la función se observa que para $x = 1$ no está definida, por lo tanto, es continua en el intervalo $(1, 2]$ y corresponde a una integral impropia de 2º orden.

Aplicando la definición de integral impropia del caso 2

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{a\to1^+}\int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{a\to1^+}\int_a^2 (x-1)^{-1/3}dx$$

Hallando la Primitiva

$$= \lim_{a\to1^+}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_a^2$$

Aplicando el teorema del cálculo, evaluando en el límite superior menos el límite inferior

$$= \lim_{a\to1^+}\left[\left(\frac{3}{2}(2-1)^{2/3}\right) - \frac{3}{2}(a-1)^{2/3}\right]$$

$$= \lim_{a\to1^+}\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(a-1)^{2/3}\right]$$

Aplicando propiedades de límites

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lim_{a\to1^+}(a-1)^{2/3}$$

Y hallando el límite cuando tiende al valor por de $a = 1^{+}$se tiene

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(1-1)^{2/3} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

Ejemplo C Evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Solución:

La integral corresponde a una integral impropia de 1ª especie

El Dominio de la función son $\mathbb{R}$, por tanto es continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$

Aplicando la definición de integral impropia del caso 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \underbrace{\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2}}_{\text{A}} + \underbrace{\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}}_{\text{B}}$$

Resolviendo la parte A:

Hallando la primitiva

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} [arctg(x)]_{a}^{0}$$

Aplicando el teorema del cálculo, evaluando en el límite superior menos el límite inferior

$$= \lim_{a \to -\infty} [arctg(0) - arctg(a)]$$

Evaluando el límite

$$= 0 - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Resolviendo la parte B:

Hallando la primitiva

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} [arctg(x)]_0^b$$

Aplicando el teorema del cálculo, evaluando en el límite superior menos el límite inferior

$$= \lim_{b\to+\infty} [arctg(b) - arctg(0)]$$

Evaluando el límite

$$= \frac{\pi}{2} - (0) = \frac{\pi}{2}$$

Sumando la parte A y la parte B se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Nota:

$$arctg(0) = 0\,, \qquad arctg(-\infty) = {}^{-\pi}/_{2}\,, \quad arctg(+\infty) = {}^{\pi}/_{2}$$

Ejemplo D: Evaluar la Integral

$$\int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

Solución:

Determinando el dominio de la función se observa que para $x = 4$ no está definida, por lo tanto, es continua en el intervalo $(-\infty, 4) \cup (4, 6]$ y corresponde a una integral impropia combinada de 1º orden y 2º orden.

En el primer intervalo $(-\infty, 4)$ debemos tomar un valor c que pertenezca al intervalo

Aplicando la definición de integral impropia

$$\int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{4} \frac{dx}{(4-x)^2}}_{\text{Separando en 2 integrales}} + \int_{4}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} + \int_{0}^{4} \frac{dx}{(4-x)^2} + \int_{4}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} + \lim_{b\to4^-} \int_{0}^{b} \frac{dx}{(4-x)^2} + \lim_{a\to4^+} \int_{a}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

Hallando la integral Indefinida o primitiva

$$\int \frac{dx}{(4-x)^2} = \int (4-x)^{-2} dx$$

Aplicando cambio de variable o sustitución

$$u = 4 - x$$

$$du = -dx$$

$$= -\int u^{-2} du = -\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{1}{u}$$

$$\textit{volviendo a la variable}$$

$$\int \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4-x}$$

Aplicando el teorema del cálculo, evaluando en el límite superior menos el límite inferior

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{4-x}\right]_a^0 + \lim_{b\to4^-} \left[\frac{1}{4-x}\right]_0^b + \lim_{a\to4^+} \left[\frac{1}{4-x}\right]_a^6$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\left(\frac{1}{4-0}\right) - \left(\frac{1}{4-a}\right)\right] + \lim_{b\to4^-} \left[\left(\frac{1}{4-b}\right) - \left(\frac{1}{4-0}\right)\right] + \lim_{a\to4^+} \left[\left(\frac{1}{4-6}\right) - \left(\frac{1}{4-a}\right)\right]$$

Evaluando los límites

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\infty}\right) + \left(\underbrace{\cancel{\frac{1}{0}}}_{\infty} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{-2} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{0}}}_{\infty}\right)$$

Se tiene

$$\int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2} = \infty$$

Por tanto, la integral impropia diverge.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales y estudiar su convergencia

1.	$\int_9^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$R:\ diverge$
2.	$\int_e^{\infty} \frac{1}{x.\ln x} dx$	$R:\ diverge$
3.	$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$	$R: \frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$
4.	$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2x-3)^3}$	$R:\ -\frac{1}{4}$
5.	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$	$R:\ diverge$
6.	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}$	$R:\ \frac{\pi}{3}$
7.	$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$	$R:\ \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$
8.	$\int_3^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$	$R: 2\sqrt{7}$
9.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$R:\ \frac{\pi}{2}$
10.	$\int_1^3 \frac{dx}{x^3}$	$R:\ diverge$
11.	$\int_0^4 \frac{dx}{(2-3x)^{1/3}}$	$R: \frac{1}{2}\left(2^{2/3} - 10^{2/3}\right)$
12.	$\int_0^{-4} \frac{x}{16-2x^2} dx$	$R:\ diverge$
13.	$\int_0^{\pi/2} \frac{senx}{1-cosx} dx$	$R:\ diverge$
14.	$\int_0^{\pi/2} tan^2x.sec^2x.dx$	$R:\ diverge$
15.	$\int_0^{\infty} e^{-x}.senx.dx$	$R:\ \frac{1}{2}$

16.	$\int_{-3}^{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$	$R:\ 0$
17.	$\int_{-\infty}^{1} e^{2x} dx$	$R:\ \frac{1}{2}e^2$
18.	$\int_{0}^{6} \frac{2x.dx}{(x^2-4)^{2/3}}$	$R:\ 9\sqrt[3]{4}$
19.	$\int_{-\infty}^{0} \frac{x.dx}{(x^2+1)^{5/2}}$	$R:\ -\frac{1}{3}$
20	$\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$	$R:\ \frac{\pi}{2}+1$
21.	$\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$ $sugerencia: hacer\ \ x = (\sqrt{x})^2$	$R:\ \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

Importante

Para ampliar la información, consultar el libro Cálculo de Larson, Capitulo Nº 7, Integración, 6ta Edición.