Capítulo 3

Integración Compleja

Las integrales son muy importantes en el estudio de funciones de una variable compleja y tiene multiples aplicaciones en Matemáticas Aplicadas.

Dos motivos, que hacen la integración en el plano complejo importante son:

- En aplicaciones aparecen integrales reales que pueden evaluarse mediante integración compleja, mientras que los métodos usuales de cálculo integral real fracasan.

- Algunas propiedades básicas de las funciones analíticas pueden establecerse por integración, mientras que sería difícil demostrarlas aplicando otros métodos. La existencia de derivadas de orden superior de funciones analíticas es una sorprendente propiedad de este tipo [1].

La integración es un concepto de gran importancia y utilidad en el cálculo elemental. La naturaleza bidimensional del plano complejo sugiere considerar integrales a lo largo de curvas arbitrarias en $\mathbb{C}$ en lugar de segmentos del eje real únicamente. Estas "integrales de línea" tienen propiedades interesantes y poco comunes cuando la función que se está integrando es analítica. La integración compleja es una de las teorías de las matemáticas en las que se trabaja con sumo entusiasmo, debido a su accesibilidad.

[1] Este hecho fue demostrado en 1961, sin recurrir a métodos de integración o métodos equivalentes (P. Porcelli y E. H. Connell, Bulletin AMS, Vol. 67, 177-181) quienes aplicaron un teorema de topología de G.T. Whyburn

3.1 Integrales de Línea en el Plano Complejo

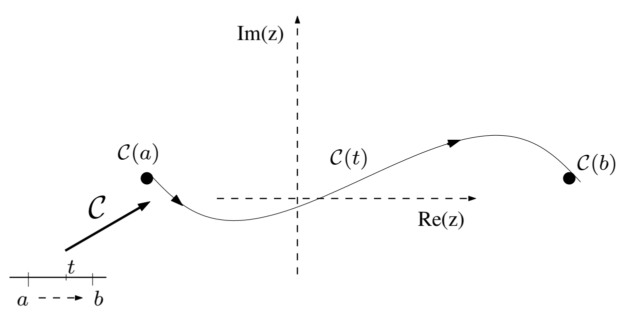
Así como en cálculo real, se distingue entre integrales definidas e integrales indefinidas o antiderivadas (primitivas). Una *integral indefinida* es una función cuya derivada es igual a una función analítica dada en una región. Al invertir las fórmulas conocidas de derivación, se pueden hallar muchos tipos de integrales indefinidas.

La definición de integrales definidas o integrales de línea de funciones complejas $f(z)$, requiere algo de información sobre curvas en el plano complejo, que introducimos a continuación. Se definen integrales de funciones complejas de una variable compleja sobre curvas del plano complejo, en lugar de sobre intervalos de la recta real, (esto se debe a que $\mathbb{C}$ es bidimensional).

Un conjunto de puntos $z = x + i\,y,\ x, y \in \mathbb{R}$ forman un *arco* $\mathcal{C}$ si $x = x(t)$, $y = y(t),\ a \leq t \leq b$ son funciones reales continuas de t. Los puntos de $\mathcal{C}$, se describen por:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ &:\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad t \rightsquigarrow \mathcal{C}(t) = z(t) = x(t) + i\,y(t). \end{aligned}$$

Graficamente



Por ejemplo, $z(t) = t + i3t, \quad 0 \leq t \leq 2,$ representa una porción de la recta $y = 3x$. Mientras que $z(t) = 4cos(t) + i4sen(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi$ define la circunferencia $|z| = 4$.

El arco $\mathcal{C}$ es un *arco simple* o *arco de Jordan*, si no se corta a si mismo; es decir, $\mathcal{C}$ es simple si $\mathcal{C}(t_1) \neq \mathcal{C}(t_2)$ cada vez que $t_1 \neq t_2$. Cuando el arco $\mathcal{C}$ es simple excepto por el hecho de que $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(b)$, se dice que $\mathcal{C}$ es una *curva cerrada* simple o una *curva de Jordan*. Si las funciones $x(t)$ e $y(t)$ poseen derivadas continuas (continuamente diferenciables) en $[a, b]$, se dice que el arco $\mathcal{C}$ es una *curva suave* en $[a, b]$.

Sean $\mathcal{C}$ una curva suave y $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ una función continua (a trozos) sobre $\mathcal{C}$. Si escribimos $z = x + i\,y$, entonces $dz = dx + i\,dy$. Luego la *integral compleja de línea* de $f(z)$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$, escrita como $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$, se define por

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} \Big(u + i\,v\Big)\Big(dx + i\,dy\Big) = \int_a^b \Big(udx - vdy\Big) + i\int_a^b \Big(vdx + udy\Big)} \tag{3.1}$$

o por

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b f\big(\mathcal{C}(t)\big)\Big(\frac{d\mathcal{C}}{dt}\Big)dt}. \tag{3.2}$$

Nótese que al ser $\mathcal{C}$ una curva suave y f una función continua sobre $\mathcal{C}$, la existencia de dicha integral queda garantizada.

En el Cálculo, las integrales definidas son interpretables como áreas, aparte de otras interpretaciones posibles. Excepto en casos especiales, no se dispone de una interpretación, física o geométrica, de las integrales en el plano complejo.

Al igual que la integral de línea en el caso real, ésta es una transformación líneal, la cual posee propiedades que se preservan del caso real; esto es

$$\boxed{1)\ \int_{\mathcal{C}} \Big[\alpha f(z) + \beta g(z)\Big]dz = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \beta \int_{\mathcal{C}} g(z)dz}. \tag{3.3}$$

$$\boxed{2)\ \int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} \tag{3.4}$$

$$\boxed{3)\ \int_b^a f(z)dz = -\int_a^b f(z)dz} \tag{3.5}$$

4) Sea $w(t)$ una función compleja de la variable real t de la forma $w(t) = u(t) + i\,v(t)$, $t \in [a, b]$. Entonces

$$\boxed{\Big|\int_a^b w(t)dt\Big| \leq \int_a^b |w(t)|dt}. \tag{3.6}$$

En efecto, asumamos que $\displaystyle\int_a^b w(t)dt = w_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ es no nulo. Como $r_0 \in \mathbb{R}$, y la parte real de un número real es él mismo, se tiene que

$$\begin{aligned} r_0 = Re(r_0) &= Re\Big(\int_a^b e^{-i\theta_0} w(t)dt\Big) = \int_a^b Re\Big(e^{-i\theta_0} w(t)\Big)\, dt \\ &\leq \int_a^b \Big|e^{-i\theta_0} w(t)\Big| = \int_a^b |w(t)|\, dt\,. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\Big|\int_a^b w(t)dt\Big| \leq \int_a^b |w(t)|\, dt.$$

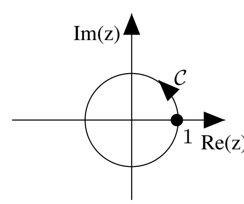
$$\boxed{5)\ \ \Big|\int_{\mathcal{C}} f(z)dz\Big| \leq M\ell} \qquad (3.7)$$

donde ℓ es la longitud de $\mathcal{C}$ y $|f(z)| \leq M$ para todo z sobre $\mathcal{C}$.

Ejemplo 38.

Evaluar $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$, si $f(z) = \dfrac{1}{z}$ y $\mathcal{C} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ es el circulo unitario centrado en el origen recorrido positivamente (antihorario).

<u>Solución</u>



Un bosquejo gráfico de $\mathcal{C}$ es el siguiente:

Parametrizando a $\mathcal{C}$ resulta que

$\mathcal{C}(t) = \cos(t) + i\,\text{sen}(t)$, de donde se sigue que

$$\frac{dz}{dt} = -\text{sen}(t) + i\, \cos(t) \quad \text{y} \quad f(z) = \frac{1}{\cos(t) + i\,\text{sen}(t)}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(z)\Big(\frac{dz}{dt}\Big)dt = \int_0^{2\pi} \frac{-\text{sen}(t) + i\, \cos(t)}{\cos(t) + i\,\text{sen}(t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{i^2\,\text{sen}(t) + i\, \cos(t)}{\cos(t) + i\,\text{sen}(t)}\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\, i\,. \end{aligned}$$

La fórmula de Euler, es de utilidad para simplificar los cómputos. Esto es, la circunferencia unitaria es $z(t) = e^{i\,t}$, luego $f(z(t)) = e^{-i\,t}$, $\quad dz = i\, e^{i\,t}dt$. Por lo tanto

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-i\,t} i e^{i\,t} dt = i\int_0^{2} \pi dt = 2\pi i.$$

Ejemplo 39.

Evaluar $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$, si $f(z) = z$ desde $(0,0)$ hasta $(2,2)$ a lo largo de los caminos:

(a) Trozo de recta que une $(0,0)$ con $(0,2)$ y luego desde $(0,2)$ hasta $(2,2)$.

(b) Trozo de recta que une directamente $(0,0)$ con $(2,2)$.

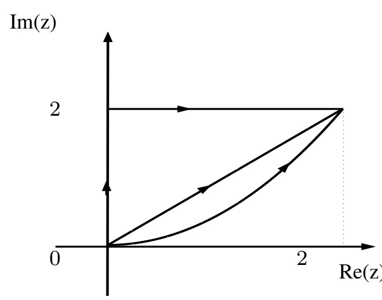
(c) Trozo de la curva $y = x^2/2$ que une $(0,0)$ con $(2,2)$.

Solución

Sea $z = x + i\,y$, luego $f(z) = x + i\,y$ y así $u(x,y) = x$; $v(x,y) = y$. Recordemos que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b \big(udx - vdy\big) + i\int_a^b \big(vdx + udy\big)$$

El gráfico mostrando los tres caminos es:



(a) Es claro que este camino es una curva suave a trozos, por lo que se debe evaluar la integral a través de dos caminos y luego sumar; esto es,
De $(0,0)$ a $(0,2)$ se tiene que $x = 0$ por lo que $dx = 0$ y $0 \leq y \leq 2$. Por lo tanto

$$\int_{(0,0)}^{(0,2)} f(z)dz = \int_{(0,0)}^{(0,2)} \big(xdx - ydy\big) + i\int_{(0,0)}^{(0,2)} \big(ydx + xdy\big) = -\int_0^2 ydy = -2.$$

De $(0,2)$ a $(2,2)$ se tiene que $y = 2$ por lo que $dy = 0$ y $0 \leq x \leq 2$. Así

$$\int_{(0,2)}^{(2,2)} f(z)dz = \int_0^2 xdx + i\int_0^2 2dx = 2 + 4\,i.$$

En consecuencia

$$\int_{(0,0)}^{(2,2)} f(z)dz = \int_{(0,0)}^{(0,2)} f(z)dz + \int_{(0,2)}^{(2,2)} f(z)dz = -2 + (2 + 4\,i) = 4\,i.$$

(b) Sea ℓ el trozo de recta que une directamente a $(0,0)$ con $(2,2)$; es decir, $\ell:\ y = x$. Por lo que $dy = dx;\ \ 0 \le x \le 2$. Luego

$$\int_{\ell} f(z)dz = \int_{(0,0)}^{(0,2)} f(z)dz = 2\,i \int_0^2 x dx = 4\,i.$$

(c) Parametrizando la curva, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}:\ \ [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{C}(t) \ \ &= \ t + i\,\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int_{\ell} f(z)dz &= \int_{(0,0)}^{(0,2)} \big(xdx - ydy\big) + i \int_{(0,0)}^{(0,2)} \big(ydx + xdy\big) \\ &= \int_0^2 \Big(t - \frac{t^3}{2}\Big)dt + i\,\frac{3}{2}\int_0^2 t^2 dt = \Big(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8}\Big)\Big|_0^2 + i\,\frac{t^3}{2}\Big|_0^2 = 4\,i. \end{aligned}$$

Ejemplo 40.

Si $m \in \mathbb{Z},\ \ z_0$ es una constante compleja y $\mathcal{C}$ es la circunferencia de radio ρ con centro z_0 recorrida en sentido antihorario, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi\,i & \text{si } \ m = -1; \\ 0 & \text{si } \ m \neq -1. \end{cases}$$

Ejemplo 41.

Si $\mathcal{C}$ es el arco de la circunferencia $|z| = 2$ desde $z = 2$ hasta $z = 2i$. Entonces

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{z+4}{z^3-1}\, dz \right| \leq \frac{6\pi}{7}\,.$$

En efecto, si z es punto de la circunferencia, resulta que

$$|z+4| \leq |z| + 4 = 6 \quad \text{y} \quad |z^3 - 1| \geq \left| |z|^3 - 1 \right| = 7, \quad (|z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||).$$

Por consiguiente cuando z está en la circunferencia $\mathcal{C}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} \frac{z+4}{z^3-1}\, dz \right| &\leq \int_{\mathcal{C}} \left| \frac{z+4}{z^3-1} \right| dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{|z+4|}{|z^3-1|}\, dz \\ &\leq \frac{6}{7} \int_{\mathcal{C}} dz \end{aligned}$$

Como la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$, se tiene que la longitud de la circunferencia $|z| = 2$ es 4π, pero como sólo vamos recorrer el primer cuadrante, entonces la longitud de arco de esta circunferencia de $z = 2$ a $z = 2i$ es π. Y así

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{z+4}{z^3-1}\, dz \right| \leq \frac{6\pi}{7}\,.$$

3.2 Primitivas de Funciones Complejas

Si $f(z)$ y $F(z)$ son funciones analíticas sobre una región $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$ y son tales que $F'(z) = f(z)$, entonces $F(z)$ se denomina una *integral indefinida* o una *primitiva* de $f(z)$ en $\mathcal{D}$, denotada por

$$\boxed{\int f(z)dz = F(z)}\,. \tag{3.8}$$

De manera similar que en el Cálculo la primitiva de una función dada f es única salvo una constante compleja arbitraria. En otras palabras, la primitiva general de f, viene dada por

$$\boxed{\int f(z)dz = F(z) + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}}\,. \tag{3.9}$$

El resultado que sigue es una extensión del teorema fundamental del Cálculo[2] que simplifica la evaluación de muchas integrales de línea. Esta extensión involucra la noción de primitiva de una función continua en algún dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$.

Teorema 42.

Sea $f(z)$ una función continua en un dominio $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) f tiene una primitiva F en $\mathcal{D}$;

(b) las integrales de f a lo largo de curvas contenidas en $\mathcal{D}$ que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen el mismo valor;

(c) las integrales de f a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en $\mathcal{D}$ tienen todas valor cero.

Demostracion.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Sean z_1 y z_2 dos puntos en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ una curva suave desde z_1 hasta z_2 contenida en $\mathcal{D}$, dada por $z = z(t), (a \leq t \leq b)$, luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(z)dz &= \int_{\mathcal{C}} f(z(t))z'(t)dt = F(z(t))\Big|_a^b = F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(z_2) - F(z_1).\end{aligned}$$

Si $\mathcal{C}$ está formado por un número finito de arcos suaves $\mathcal{C}_k(k = 1, \ldots, n)$ y cada $\mathcal{C}_k$ va de un punto z_k a z_{k+1}, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(z)dz &= \int_{\cup_{k=1}^{n}\mathcal{C}_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_k} f(z)dz \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[F(z_{k+1}) - F(z_k)\Big] = F(z_{n+1}) - F(z_1) \\ &= F(z(b)) - F(z(a)).\end{aligned}$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada contenida en $\mathcal{D}$ y consideremos dos puntos diferentes $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, quedando determinados dos arcos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, tales que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$. Por (b),

[2] Si f y F son funciones continuas en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

tenemos

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz,$$

es decir,

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz - \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz = 0,$$

o equivalentemente

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \int_{-\mathcal{C}_2} f(z)dz = 0,$$

en otras palabras

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$

$(c) \Longrightarrow (b)$ Sean $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ un arco que z_1 y z_2 con $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{D}$. Si η es cualquier otro arco que une z_1 y z_2, entonces $\mathcal{C} - \eta$ es una curva cerrada contenida en $\mathcal{D}$, luego por (c), se tiene

$$\int_{\mathcal{C}-\eta} f(z)dz = 0,$$

de donde se sigue que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\eta} f(z)dz.$$

$(b) \Longrightarrow (a)$ De (b) implica que dado cualquier punto $z_0 \in \mathcal{D}$, la función

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(t)dt, \quad z \in \mathcal{D}$$

está bien definida. Ahora sea $\epsilon > 0$, de la continuidad de f en z (¿por qué?), existe un $\delta > 0$ tal que $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ para todo $|w - z| < \delta$. Luego si Δz es tal que $0 < |\Delta z| < \delta$ y $z + \Delta z \in \mathcal{D}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z)\right| \\
&= \frac{1}{\Delta z}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\Big[f(t) - f(z)\Big]dt\right| \\
&\leq \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\Big|f(t) - f(z)\Big||dt| \\
&\leq \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\epsilon\,|dt| = \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto es

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \epsilon$$

para todo δz tal que $0 < |\Delta z| < \delta$, o equivalentemente

$$\lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

es decir

$$F'(z) = f(z).$$

Puesto que z es arbitrario en $\mathcal{D}$, concluimos que F es una primitiva de f en $\mathcal{D}$. ✠

Observación 43.

Este teorema *no* afirma que alguna de esas propiedades sea válida para una f dada en una cierto dominio $\mathcal{D}$. Lo que afirma es que las tres son simultáneamente válidas o falsas.

Ejemplo 44.

5) $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{1+i} = \frac{2}{3}(-1+i).$

6) $\displaystyle\int_{8+\pi i}^{8-\pi i} e^{z/2} dz = 2e^{z/2}\Big|_{8+\pi i}^{8-\pi i} = 0.$

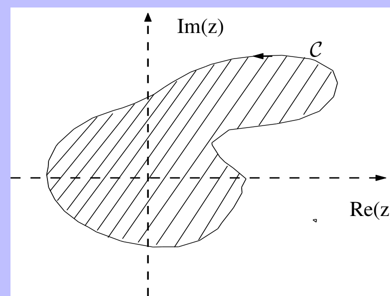
3.3 Teorema de Cauchy-Gousart

El siguiente teorema hace referencia al cálculo de una integral sobre una región cerrada, simple $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ y sobre su frontera la curva $\mathcal{C}$ en donde la función f es analítica, el cual es crucial en la teoría de funciones de una variable compleja.

Teorema 45 (Teorema de Cauchy-Gousart)**.**

Si una función f es analítica en todos los puntos interiores a una curva cerrada simple y sobre los puntos de $\mathcal{C}$, entonces

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0}$$



Demostracion.

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple, dada por $z = z(t), \ \ a \leq t \leq b$, recorrida en *sentido positivo* (antihorario). Supongamos que f es analítica en $\mathcal{C}$ y en su interior. De la definición de integral, tenemos

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Considerando $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(z)dz &= \int_a^b \Big(ux' - vy'\Big)dt + i\int_a^b \Big(vx' + uy'\Big)dt \\ &= \int_a^b \Big(udx - vdy\Big) + i\int_a^b \Big(vdx + udy\Big) \quad (\text{ vistas como integrales de línea en } \mathbb{R}) \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \Big(-v_x - u_y\Big)dxdy + i\iint_{\mathcal{R}} \Big(u_x - v_y\Big)dxdy,\end{aligned}$$

esta últimas dos integrales dobles es debido al Teorema de Green en el plano real. [3]

Puesto que f es analítica en toda la región $\mathcal{R}$ y sobre la curva $\mathcal{C}$, la parte real e imaginaria de f satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, por lo tanto

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$ ✠

[3] *Teorema de Green*. Si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$, así como sus derivadas parciales de primer orden, son continuas en la región cerrada $\mathcal{R}$ formada por la curva cerrada simple $\mathcal{C}$ y todos sus puntos interiores. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \Big(Pdx + Qdy\Big) = \iint_{\mathcal{R}} \Big(Q_x - P_y\Big)dA.$$

Observación 46.

Nótese que, una vez establecido que el valor de esa integral es cero, la orientación de $\mathcal{C}$ es irrelevante. En otras palabras, (3.3) es válido también si $\mathcal{C}$ se recorre en sentido negativo, ya que en ese caso

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = -\int_{-\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$

Ejemplo 47.

La función $f(z) = e^{z^3}$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ y su derivada $f'(z) = 3z^2e^{z^3}$ es continua en todo $\mathbb{C}$, luego para cualquier curva cerrada simple $\mathcal{C}$ sin importar su orientación, resulta

$$\int_{\mathcal{C}} e^{z^3} dz = 0.$$

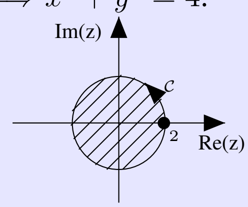
Ejemplo 48.

Pruebe (sin resolver la integral) que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (z^2+3z)dz = 0$, donde $\mathcal{C}$ es la curva generada por la circunferencia $|z| = 2$ orientada positivamente.

<u>Solución</u>

Sean $f(z) = z^2 + 3z$ y $z = x + i\,y$. Ahora $|z| = 2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 4$.

La región esta representada en la gráfica.



Ahora $f'(z) = 2z + 3$ existe en todo el plano complejo, en particular existe en la región interna y en el borde de dicha circunferencia.

Esto nos dice que $f(z)$ es analítica allí mismo y como $\mathcal{C}$ es una curva suave y cerrada, el teorema de Cauchy-Gousart asegura que

$$\int_{\mathcal{C}} (z^2 + 3z)dz = 0.$$

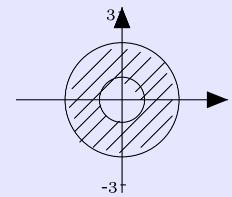
Ejemplo 49.

Determine el valor de la integral de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2+9)}$ cuando la región es generada por $1 \le |z| \le 2$.

Solución

$1 \le |z| \le 2 \Longleftrightarrow 1 \le x^2 + y^2 \le 4.$

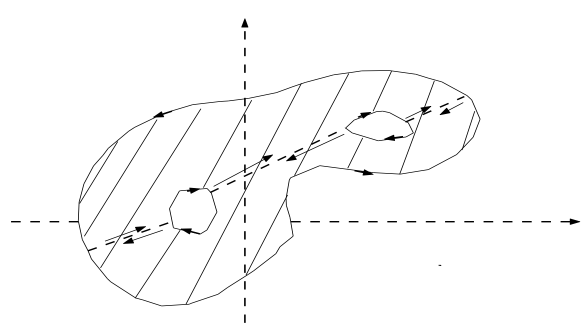
Esto nos dice que la región es el anillo circular mostrado en la gráfica



Ahora $f'(z) = \dfrac{-4z^2 - 18}{z^3(z^2+9)^2}$ no existe si y sólo si $z^3(z^2+9)^2 = 0$ si y sólo si $z = 0, z = \pm 3\,i$. Es decir, $f(z)$ no es analítica en esos puntos. Por otro lado, es obvio que dichos puntos están fuera de la región, por lo que concluimos que la función es analítica en $1 \le |z| \le 2$ y gracias al Teorema de Cauchy-Gousart

$$\int\limits_{1\le|z|\le 2} \frac{1}{z^2(z^2+9)} dz = 0.$$

El Teorema de Cauchy-Gousart se puede, asimismo, extender de modo que admita integrales a lo largo de contornos como el de la siguiente figura



Observese que el recorrido de las curvas se hará a través de las curvas y de las poligonales introducidas, como lo indica la figura. El siguiente resultado es una extensión del Teorema de Cauchy-Gousart para tales regiones.

Teorema 50.

Supongamos que

(i) $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, con orientación positiva.

(ii) $\mathcal{C}_{_k},\ k = 1, 2, \cdots, n$ denota un número finito de curvas cerradas simples, orientadas positivamente, interiores a $\mathcal{C}$ y cuyos interiores no tienen puntos en común.

Si una función f es analítica en la región cerrada por los puntos interiores a $\mathcal{C}$ o del propio $\mathcal{C}$, excepto los puntos interiores a cada $\mathcal{C}_k$, entonces

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_k} f(z)dz = 0}\,.$$

Demostracion.

Para la demostración de este teorema, introducimos una serie de poligonales que conecten las distintas curvas. Esto es: sea L_1 el segmento de recta que une $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C}_1$, L_2 el segmento de recta que une $\mathcal{C}_1$ con $\mathcal{C}_2$, y así sucesivamente, L_n el segmento de recta que une $\mathcal{C}_{n-1}$ con $\mathcal{C}_n$ y L_{n+1} el segmento de recta que une $\mathcal{C}_n$ con $\mathcal{C}$. Gracias a estas poligonales, se forman dos curvas cerradas simples $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, que están formados cada uno de ellos por los arcos poligonales L_k o $-L_k$ y porciones de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_k$, y recorridos de manera tal que la región encerrada por cada uno de ellos quede a la izquierda.

Ahora como f es analítica en el interior de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y sobre dichas curvas cerradas, por el Teorema de Cauchy-Gousart se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)dz \\ &= \oint_{\mathcal{C}} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\mathcal{C}_k} f(z)dz. \end{aligned}$$

Es de recalcar que las integrales sobre los segmentos L_k se cancelan dos a dos, sólo contribuyen las integrales sobre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_k$. ✠

El siguiente corolario es una consecuencia particularmente importante del teorema anterior.

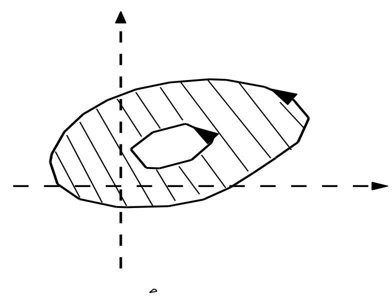
Corolario 51 (Principio de Deformación de Caminos)**.**

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas cerradas simples positivamente orientadas, donde $\mathcal{C}_2$ es interior a $\mathcal{C}_1$. Si una función f es analítica en la región cerrada que forman esas curvas y los puntos situados entre ellas, entonces

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz}. \tag{3.10}$$

Demostración
Según el Teorema 50,

$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \oint_{-\mathcal{C}_2} f(z)dz = 0.$$



Luego

$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = -\oint_{-\mathcal{C}_2} f(z)dz$$

$$= \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)dz.$$

✠

Ejemplo 52.

Para la circunferencia $\mathcal{C}_1$, $|z| = 4$ y $\mathcal{C}_2$ el contorno del cuadrado formado por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$, ambas con orientación positiva, se deduce que

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{z+2}{sen(z/2)} dz = \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{z+2}{sen(z/2)} dz, \qquad (\text{ ¿por qué?}).$$

3.4 Fórmula Integral de Cauchy

La consecuencia más importante del Teorema de Cauchy-Gousart es la fórmula de la integral de Cauchy. Esta fórmula es de utilidad para calcular un gran número de integrales complejas de una manera eficaz y rápida. De igual importancia es su rol primordial en la demostración del sorprendente hecho de que las funciones analíticas tienen derivadas de todos los órdenes (siguiente sección).

Teorema 53 (Fórmula Integral de Cauchy)**.**

Sea f analítica en el dominio interior y en los puntos de una curva cerrada simple $\mathcal{C}$, orientada positivamente. Si z_0 es un punto del dominio interior a $\mathcal{C}$, entonces

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}. \tag{3.11}$$

Demostracion.

Por ser f analítica en el dominio interior y en los puntos de una curva cerrada simple $\mathcal{C}$, ella es continua en dicha región, en particular f es continua en z_0 (pues $z_0 \in \text{int}\mathcal{C}$). Esto es, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\big|f(z) - f(z_0)\big| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad |z - z_0| < \delta. \tag{3.12}$$

Sea $\mathcal{C}_R$ una circunferencia orientada positivamente dada por $|z - z_0| = R$, con R suficientemente pequeña para que $\mathcal{C}_R \subset \mathcal{C}$. Ahora la función $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ esta bien definida y es analítica en los puntos de $\mathcal{C},\ \mathcal{C}_R$ así como en la región comprendida entre ellas, luego por el principio de deformación de caminos, se sigue que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,.$$

Puesto que $f(z) = \big(f(z) - f(z_0)\big) + f(z_0)$, resulta

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{\big(f(z) - f(z_0)\big) + f(z_0)}{z - z_0}\, dz,$$

ó

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0)\int_{\mathcal{C}_R} \frac{dz}{z - z_0}\, dz = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \tag{3.13}$$

Como

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{dz}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$$

la ecuación (3.13) se reduce a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) 2\pi i = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \tag{3.14}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| &= \left|\int_{\mathcal{C}_R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \int_{\mathcal{C}_R} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \\
&\leq \int_{\mathcal{C}_R} \frac{\left|f(z)-f(z_0)\right|}{|z-z_0|}\,|dz| < \int_{\mathcal{C}_R} \frac{\epsilon\,|dz|}{R}, \quad \text{por} \quad (3.12) \\
&= \frac{\epsilon 2\pi R}{R} = 2\pi\epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ es número positivo arbitrariamente pequeño, haciendo $\epsilon \longrightarrow 0$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| = 0.$$

Por consiguiente

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

✠

Ejemplo 54.

$a)$ $$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z(z^2-16)} = \int_{|z|=3} \frac{1/(z^2-16)}{z-0}\,dz = 2\pi i f(0) = -\frac{\pi}{8}i.$$

$b)$ $$\int_{|z|=2} \frac{z^3+1}{z(z-3)^2}\,dz = \frac{2\pi}{9}i.$$

Una consecuencia de la fórmula integral de Cauchy, es el siguiente resultado.

Corolario 55 (Fórmula del Valor Medio)**.**

Si f es analítica en el disco $|z-z_0| < R, \;\; R > 0$, entonces para todo $0 < r \leq R$ y todo z tal que $|z-z_0| < r$, se tiene que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

3.5 Derivadas de Funciones Analíticas

Otro resultado importante de las funciones analíticas y que engloba el teorema de la sección anterior es que, las funciones analíticas, poseen **derivadas de todos los órdenes**. Esto es muy sorprendente porque difiere bastante de lo que sucede en cálculo real. De hecho, si una función real es diferenciable una vez, nada puede concluirse acerca de la existencia de la segunda derivada o derivadas superiores. Así, en este sentido las funciones analíticas complejas se comportan mucho más sencillamente que las funciones reales que tienen primera derivada.

Teorema 56 (Derivadas de Funciones Analíticas)**.**

Si f es una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$, entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en $\mathcal{D}$. Los valores de las derivadas en un punto $z_0 \in \mathcal{D}$ están dados por

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw} \quad \text{y} \quad \boxed{f''(z) = \frac{1}{\pi\, i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw}. \tag{3.15}$$

y en general

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\, i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots} \tag{3.16}$$

donde $f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'', \cdots$.

Demostracion.

Definamos la función $d : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $d(w) = |w - z|$, (es decir, d es la distancia mínima de z a $\mathcal{C}$).

Sea Δz un número complejo tal que $0 < |\Delta z| < d$, luego por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z-\Delta z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right)\frac{1}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{\big(w-z-\Delta z\big)\big(w-z\big)}\,dw\,. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(w)\,dw}{(w-z)^2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\left(\frac{f(w)}{\big(w-z-\Delta z\big)\big(w-z\big)} - \frac{f(w)}{(w-z)^2}\right)dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\Delta z\, f(w)\,dw}{\big(w-z-\Delta z\big)\big(w-z\big)^2}\,.
\end{aligned}$$

Por otra parte como $|w-z|\geq d$ entonces $1/d \geq 1/|w-z|$ y $|w-z-\Delta z| \geq \big||w-z|-\Delta z\big| \geq d-\Delta z,$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(w)\,dw}{(w-z)^2}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\Delta z\, f(w)\,dw}{\big(w-z-\Delta z\big)\big(w-z\big)^2}\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{|\Delta z||f(w)||dw|}{(d-\Delta z)d^{\,2}} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\frac{|\Delta z|M}{(d-\Delta z)d^{\,2}}\int_{\mathcal{C}}|dw| \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{|\Delta z|M\,L}{(d-\Delta z)d^{\,2}} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \Delta z \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

donde $M=\max\Big\{|f(w)| : w\in\mathcal{C}\Big\}$ y $L=\displaystyle\int_{\mathcal{C}}|dw|$ es la longitud de $\mathcal{C}$.

En consecuencia

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\longrightarrow 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(w)dw}{(w-z)^2}\,.$$

Procediendo de manera similar se verifica para $f''(z)$. El caso general, se demuestra por induccion. ✠

Para una mejor utilidad del caso general y para el cálculo de ciertas integrales, (3.16) se suele reescribir en la forma

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi\, i}{n!}f^{(n)}(z_0), \quad n=0,1,2,3,\cdots}\,. \tag{3.17}$$

Teorema 57.

Si una función es analítica en un dominio $\mathcal{D}$, entonces ella admite derivadas de todos los órdenes en ese dominio y las derivadas son funciones analíticas en $\mathcal{D}$.

Demostracion.

Sea f una función analítica en un punto $z_0\in\mathcal{D}$. Entonces existe un entorno $|z-z_0|<\epsilon$ de z_0 en el que f es analítica. Por consiguiente, existe una circunferencia C_0, orientada positivamente, centrada en z_0 y de radio $\epsilon/2$, tal que f es analítica en el interior de C_0 y en los puntos de C_0. Luego para todo $z \in \text{int}\mathcal{C}_0$, el Teorema 56 implica que

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)dw}{(w-z)^3}.$$

La existencia de $f''(z)$ en el entorno $|z - z_0| < \epsilon/2$, significa que f' es analítica en z_0. Procediendo con un argumento similar aplicado a f', concluimos que f'' es analítica. Y así sucesivamente, hasta obtener que $f^{(n)}$ es analítica. ✠

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corolario 58.

Si una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un punto $z = x + iy$, sus funciones componentes u y v tienen derivadas parciales continuas de todo orden en ese punto.

Demostracion.
Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica en $z = x + iy$. Entonces f' existe y así f es continua en dicho punto. Por otro lado, como

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

se sigue que las derivadas parciales de primer orden de u y v son continuas en tal punto. En consecuencia f'' es analítica y continua en z, con

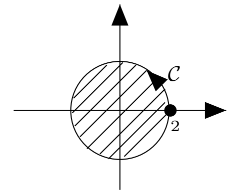
$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = v_{yx} - iu_{yx}.$$ ✠

Ejemplo 59.

Calcular el valor de $\displaystyle\int_{|z|\leq 2} \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz.$

<u>Solución</u>
$|z| = 2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$

Un bosquejo de la región en cuestión nos la da el siguiente gráfico:



El método más apropiado para resolver esta integral es a través de las fórmula general de las integrales de Cauchy

$$\int_c \frac{f(z)}{(z-z_o)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi\, i}{n!}\, f^{(n)}(z_o), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

donde la función debe ser analítica en toda la región incluyendo su frontera y z_0 debe pertenecer a la región. Aca debemos identificar la función y al punto z_0, para esto factorizamos el denominador del integrando para obtener

$$\frac{z}{(9-z^2)(z+i)} = \frac{z}{(3-z)(3+z)(z+i)} = \begin{cases} \dfrac{z/(3-z)(z+i)}{3+z}, & z_0 = 3 \\[2ex] \dfrac{z/(3+z)(z+i)}{3-z}, & z_0 = -3 \\[2ex] \dfrac{z/(9-z^2)}{z+i}, & z_0 = -i \end{cases}$$

Observemos que las dos primeras posibilidades no pueden ser ya que el punto z_0 cae fuera de la región en cuestion, mientras que en la tercera posibilidad $z_0 = -i$ si pertenece a la región, por lo que

$$f(z) = \frac{z}{9-z^2}, \qquad z_0 = -i, \qquad n = 0.$$

Ahora $f'(z) = \dfrac{1}{9-z^2}$ existe en todo el plano complejo excepto en los puntos ± 3, por lo que $f(z)$ es analítica en toda la región, luego

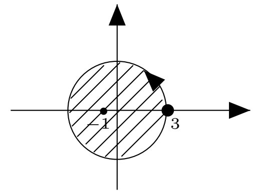
$$\begin{aligned} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz &= \int_c \frac{z/(9-z^2)}{(z+i)^{0+1}}\,dz = \frac{2\pi\, i}{0!}\, f^{(0)}(z_0) \\ &= 2\pi\, i f(-i) = 2\pi\, i\Big(\frac{-i}{9-i^2}\Big) = \pi/5. \end{aligned}$$

Ejemplo 60.

Hallar $\displaystyle\int_{|z|\leq 3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz.$

Solución

La región en cuestión esta dada por $|z| \leq 3 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 9$.
y esta representada por la gráfica siguiente



Es claro que $f(z) = e^{2z}, \quad z_0 = -1, \quad n = 3$.

De donde se sigue que $f'(z) = 2e^{2z}$ existe

en todo el plano complejo y en particular

en la región generada por $|z| \leq 3$; es decir, $f(z)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$. Luego

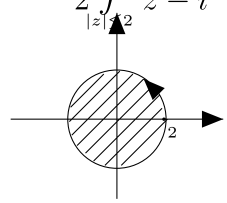
$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\, dz \quad = \quad \frac{2\pi\, i}{3!}\, f'''(-1) = \frac{2\pi\, i}{6}\big(8\, e^{-2}\big) = \frac{8}{3}\pi e^{-2} i.$$

Ejemplo 61.

Evaluar $\displaystyle\int_{|z|\leq 2} \frac{\cos(z)}{z^3 + z}\, dz.$

Solución

$$\int_{|z|\leq 2} \frac{\cos(z)}{z^3+z}\, dz = \int_{|z|\leq 2} \frac{\cos(z)}{z}\, dz - \frac{1}{2}\int_{|z|\leq 2} \frac{\cos(z)}{z+i}\, dz - \frac{1}{2}\int_{|z|\leq 2} \frac{\cos(z)}{z-i}\, dz$$



La región en cuestión esta dada en la siguiente gráfica. De donde se sigue que en cualquiera de estos tres casos $f(z) = \cos(z),\ n = 0,$ y que

$z_0 = 0,\ z_0 = -i,\ z_0 = i$

respectivamente. Además $f'(z) = -\text{sen}(z)$ existe en todo $\mathbb{C}$; es decir que la función es analítica en todo el plano complejo. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z^3+z}\, dz \quad &= \quad \frac{2\pi\, i}{0!}\, f^{(0)}(0) - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi\, i}{0!}\, f^{(0)}(-i) - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi\, i}{0!}\, f^{(0)}(i) \\
&= \quad 2\pi\, i\, \cos(0) - \pi\, i\, \cos(-i) - \pi\, i\, \cos(i) \\
&= \quad 2\pi\left(1 - \frac{1+e^2}{2e}\right) i.
\end{aligned}$$

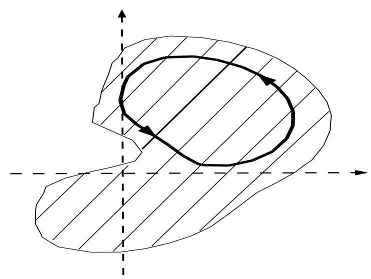
Para finalizar con esta sección, veremos un resultado debido a E. Morera (1856-1909). En la demostración del mismo se aprovecha el hecho de que la derivada de una función analítica es de nuevo analítica.

Teorema 62 (Teorema de Morera)**.**

Sea f una función continua en un dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. Si

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0 \qquad (3.18)$$

para toda curva cerrada $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{D}$, entonces f es analítica en $\mathcal{D}$.



Demostracion.

Por el teorema sobre primitivas (Capítulo 2), las hipótesis sobre f implican que ella tiene primitiva en $\mathcal{D}$, es decir, existe una función $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ en todo punto de $\mathcal{D}$, luego F es analítica y por el Teorema 57 concluimos que f es analítica en $\mathcal{D}$. ✠

3.6 Problemas Propuestos

(1) Calcular las siguientes integrales

$$(a) \int_1^2 \Big(\frac{1}{t} - i\Big)^2 dt; \quad (b) \int_0^{\pi/6} e^{i\,2t} dt; \quad (c) \int_0^{\infty} e^{-zt} dt.$$

(2) Probar que si m y n son números enteros,

$$\int_0^{2\pi} e^{i\,m\theta} e^{-i\,n\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 2\pi & \text{si} \quad m = n. \end{cases}$$

(3) Demuestre que para todo x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, las funciones P_n definidas por

$$P_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(x + i\sqrt{1 - x^2}\,\cos(\theta)\Big)^n d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

satisfacen la desigualdad $|P_n(x)| \leq 1$.

(4) Dados los caminos $\mathcal{C}$ y la función f, usar representaciones paramétricas para $\mathcal{C}$, o para los fragmentos de $\mathcal{C}$, con el fin de calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$.

(a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ y $\mathcal{C}$ es

(i) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}, \ 0 \leq \theta \leq \pi$

(ii) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}, \ \pi \leq \theta \leq 2\pi$

(iii) el círculo $z = 2e^{i\theta}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(b) $f(z) = z - 1$ y $\mathcal{C}$ es el arco desde $z = 0$ hasta $z = 2$ dado por

(i) el semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$

(ii) el segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real.

(c) $f(z) = \pi e^{\pi \overline{z}}$ y $\mathcal{C}$ es el contorno del cuadrado con vértices en los puntos $0, 1, 1+i$ e i, orientado positivamente.

(d) $\mathcal{C}$ es el arco desde $z = -1 - i$ hasta $z = 1 + i$ a lo largo de la curva $y = x^3$ y

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y < 0 \\ 4y & \text{si} \quad y > 0. \end{cases}$$

(5) Evalue $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \Big[(x + 2y)dx + (y - 2x)dy\Big]$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ definida por $x = 4\cos(t), \ \ y = 3\text{sen}(t), \ \ 0 \leq t \leq 2\pi,$ recorrida en sentido positivo.

(6) Evalue $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 - i\,y^2)dz$ a lo largo de

(a) la parábola $y = 2x^2$ desde $(1,1)$ hasta $(2,8)$

(b) la recta desde $(1,1)$ hasta $(1,8)$ y luego desde $(1,8)$ hasta $(2,8)$.

(7) Evalue $\displaystyle\int_{i}^{2-i} (3xy + i\,y^2)dz$ a lo largo de

(a) la recta que une a $z = i$ con $z = 2 - i$

(b) la curva $x = 2t - 2, \ \ y = 1 + t - t^2$.

(8) Evalue $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \overline{z}^2 dz$ cuando $\mathcal{C}$ está definido por $|z - 1| = 1$.

(9) Evalue $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (5z^4 - z^3 + 2z)dz$ a lo largo de

(a) el círculo $|z| = 1$

(b) el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$

(c) las parábolas $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ y $x = y^2$ desde $(1,1)$ hasta $(0,0)$.

(10) Evalue $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(\overline{z}^2 dz + z^2 d\overline{z}\right)$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ definida por $z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 = (2-2i)z + (2+2i)\overline{z}$ desde $z = 1$ hasta $z = 2+2i$.

(11) Evalue $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-2}$ a lo largo de

(a) el círculo $|z-1| = 5$

(b) el cuadrado con vértices $2 \pm 2i, \ -2 \pm 2i$.

(12) Demuestre que $\displaystyle\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2-1}\right| \leq \frac{\pi}{3}$, donde $\mathcal{C}$ es el arco $|z| = 2$ desde $z = 2$ hasta $z = 2i$.

(13) Verificar que si $\mathcal{C}$ es el contorno del triángulo con vértices en los puntos $0, \ 3i$ y -4, orientado positivamente, entonces

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \left(e^z - \overline{z}\right) dz\right| \leq 60.$$

(14) Si $\mathcal{C}_R$ es la mitad superior de $|z| = R \ (R > 2)$, orientada positivamente, entonces

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\, dz\right| \leq \frac{\pi R\left(2R^2+1\right)}{\left(R^2-1\right)\left(R^2-4\right)}.$$

(15) Si $\mathcal{C}_R$ es $|z| = R \ (R > 1)$, orientada positivamente, entonces

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} \frac{Log(z)}{z^2}\, dz\right| < 2\pi\left(\frac{\pi + \ln(R)}{R}\right),$$

y que

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{Log(z)}{z^2}\, dz = 0.$$

(16) Verifique el teorema de Cauchy para las funciones: $(a)\ f(z) = 3z^2 + i\,z - 4$; $(b)\ f(z) = 5\mathrm{sen}(2z)$; $(c)\ f(z) = 3\cosh(z+2)$, si $\mathcal{C}$ es el cuadrado con vértices en $1 \pm i, \ -1 \pm i$.

(17) Dada $G(z) = \displaystyle\int_{\pi - \pi i}^{z} \cos(\zeta) d\zeta$.

(a) Pruebe que $G(z)$ es independiente del camino que une $\pi - \pi\, i$ con el punto arbitrario z.

(b) Determine $G(\pi\, i)$.

(c) Encuentre $G'(z)$.

(18) Dada $G(z) = \int_{1+i}^{z} \text{sen}(\zeta^2)d\zeta$.

(a) Pruebe que $G(z)$ es una función analítica de z.

(b) Encuentre $G'(z)$.

(19) Pruebe que $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$. Cuando el contorno $\mathcal{C}$ es el círculo $|z| = 1$, con cualquier orientación, y cuando

$$(a)\ f(z) = \frac{z^2}{z-3}; \quad (b)\ f(z) = ze^{-z}; \quad (c)\ f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$$

$$(d)\ f(z) = sech(z); \quad (e)\ f(z) = tg(z); \quad (f)\ f(z) = Lg(z+2).$$

(20) Evaluar las siguientes integrales

(a) $\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z-2}\, dz$, si $\mathcal{C}$ es $|z| = 3$.

(b) $\int_{\mathcal{C}} \frac{sen(3z)}{z+\pi/2}\, dz$, si $\mathcal{C}$ es $|z| = 5$.

(c) $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{3z}}{z-\pi\, i}\, dz$, si $\mathcal{C}$ es $|z-1| = 4$.

(d) $\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz$, si $\mathcal{C}$ es el contorno del rectángulo cuyos vértices son los puntos $-i, 2-i, 2+i, i$.

(21) Sea $\mathcal{C}$ el contorno del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, con $\mathcal{C}$ recorrido positivamente. Calcular las siguientes integrales

$$(a)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-z}}{z-\frac{\pi}{2}\, i}\, dz; \quad (b)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{z^3+8z}\, dz; \quad (c)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{2z+1}\, dz$$

$$(d)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{tg(z/2)}{(z-x_0)^2}\, dz, \quad -2 < x_0 < 2; \quad (e)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{\cosh(z)}{z^4}\, dz.$$

(22) Hallar el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del círculo $|z-i| = 2$ en sentido positivo, cuando

$$(a)\ g(z) = \frac{1}{z^2+4}; \qquad (b)\ g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}.$$

(23) Calcular las integrales

$$(a)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{z+z^2}{(z-1)^2}\, dz; \quad (b)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^3}\, dz; \quad (c)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{\text{sen}(z)}{z^2}\, dz$$

$$(d) \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-z}\text{sen}(z)}{z^2}\, dz; \quad (e) \int_{\mathcal{C}} \frac{\text{sen}(z)}{z^n}\, dz$$

si $\mathcal{C}$ es el contorno del círculo $|z| = 2$.

(24) Encuentre el valor de

$$(a) \int_{\mathcal{C}} \frac{\text{sen}^6(z)}{z - \pi/6}\, dz; \quad (b) \int_{\mathcal{C}} \frac{sen^6(z)}{(z - \pi/6)^3}\, dz$$

si $\mathcal{C}$ es el círculo $|z| = 1$.