Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Subespacio Vectorial y Conjunto Generador

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

Subespacio Vectorial

Los espacios vectoriales tienen subconjuntos que con las operaciones del espacio también son espacios vectoriales en si mismos. Por ejemplo en el espacio vectorial de las matrices cuadradas de tamaño 2×2, el subconjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices satisface los diez axiomas de la definición de espacios vectoriales. Pero no ocurre lo mismo con el conjunto de las matrices $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ porque no se cumplen los axiomas de cerradura.

Subespacios vectoriales

Se dice que H es un subespacio vectorial de V si H es un subconjunto no vacío de V, y H es un espacio vectorial, junto con las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por un escalar definidas para V.

El siguiente teorema facilita la evaluación de un subconjunto de un espacio vectorial para considerarlo como subespacio. Nos dice que basta con revisar los axiomas de cerradura para saber si un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio.

T ▸ **Teorema 5.2.1** Subespacio vectorial

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

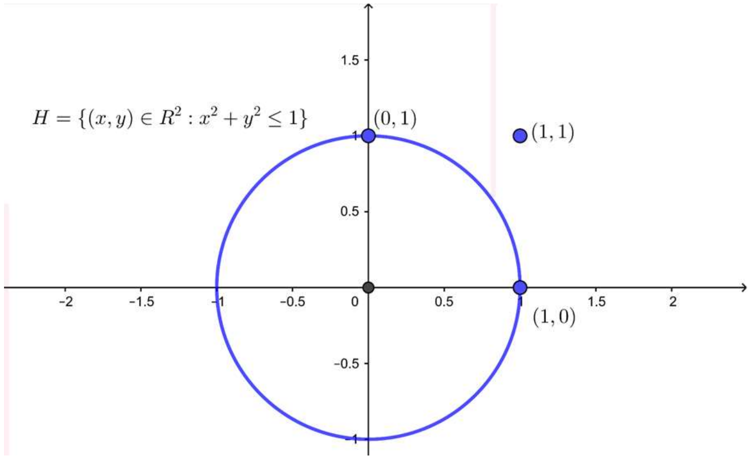
Reglas de cerradura para ver si un subconjunto no vacío es un subespacio

i) Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.

ii) Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para todo escalar α.

Ejemplos:

1. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con las operaciones usuales y $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Gráficamente H es el conjunto de todos los puntos dentro y sobre el círculo de centro $(0,0)$ y de radio 1. H no es subespacio de V porque $(1,0)$ y $(0,1)$ pertenecen a H pero $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin H$



2. Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$. Podemos verificar que H es un subespacio de V porque:
   - $H \neq \emptyset$, ya que como $0 = 2(0)$ entonces $(0,0) \in H$
   - Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H$, entonces $y_1 = 2x_1$ y $y_2 = 2x_2$. De allí que $y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$ y $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in H$
   - Si $(x, y) \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $y = 2x$ y $\alpha y = \alpha(2x) = 2(\alpha x)$. Con eso vemos que $(\alpha x, \alpha y) \in H$.

3. Sea V un espacio vectorial y $\mathbf{0}$ es elemento neutro de V, el subconjunto $H = \{\mathbf{0}\}$ es un subespacio de V. Porque
   - $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$
   - $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Para cada espacio vectorial V, V es un subespacio de sí mismo. todo espacio vectorial V contiene dos subespacios, $\{\mathbf{0}\}$ y V (que coinciden si $V = \{\mathbf{0}\}$). Los subespacios distintos a $\{\mathbf{0}\}$ y V se denominan **subespacios propios.**

Es importante observar que *no todo espacio vectorial tiene subespacios propios.*

EJEMPLO $\mathbb{R}$ no tiene subespacios propios

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}$. Si $H \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces H contiene un número real α diferente de cero. Por el axioma vi), $1 = (1/\alpha)\,\alpha \in H$ y $\beta 1 = \beta \in H$ para todo número real β. Así, si H no es el subespacio trivial, entonces $H = \mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{R}$ **no** tiene subespacios propios.

EJEMPLO Un subespacio propio de M_{mn}

Sea M_{mn} el espacio vectorial de matrices de $m \times n$ con componentes reales y sea $H = \{A \in M_{mn}: a_{11} = 0\}$. Por la definición de suma de matrices y multiplicación por un escalar, es obvio que los dos axiomas de cerradura se cumplen de manera que H es un subespacio.

EJEMPLO subespacio propio de C[0, 1]

Si $f \in C[0, 1]$, entonces $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe. Sea $H = \{f \in C[0,1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$. Si $f \in H$ y $g \in H$, entonces $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 0 + 0 = 0$ y $\int_0^1 \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Así $f + g$ y αf están en H para todo número real α. Esto muestra que H es un subespacio propio de $C[0, 1]$.

EJEMPLO Un subconjunto que no es un subespacio propio de M_{nn}

Sea $V = M_{nn}$ (las matrices de $n \times n$) y sea $H = \{A \in M_{nn}: A \text{ es invertible}\}$. Entonces H no es un subespacio ya que la matriz cero de $n \times n$ no está en H.

Teorema 5.2.2

Sea H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

Demostración

Observe que $H_1 \cap H_2$ es no vacío porque contiene al $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$ y $\mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. Entonces como H_1 y H_2 son subespacios, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1$, y $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_2$. Esto significa que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. De manera similar, $\alpha\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$. Por lo tanto, se cumplen los dos axiomas de cerradura y $H_1 \cap H_2$ es un subespacio.

Ejercicios Propuestos

Determine si el subconjunto H es un subespacio del espacio vectorial V

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): x = 3, y \in \mathbb{R}\}$
2. $V = M_{nn}$; $H = \{D \in M_{nn}$; D es diagonal$\}$
3. $V = M_{nn}$; $H = \{T \in M_{nn}$; T es triangular superior$\}$
4. $V = P_4$; $H = \{p \in P_4$: grado $p = 4\}$
5. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n$: $p(0) = 0$ y $p'(0) = 0\}$
6. $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)dx = 1\}$
7. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = f(1) = 0\}$

8. Sea $V = M_{22}$; sean $H_1 = \{A \in M_{22}: a_{11} = 0\}$ y $H_2 = \left\{A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}\right\}$.

a) Demuestre que H_1 y H_2 son subespacios.

b) Describa el subconjunto de $H = H_1 \cap H_2$ y muestre que es un subespacio.

Combinación Lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\boxed{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n}$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ el vector $(3,5,-8)$ es combinación lineal de $v_1 = (1,2,-4)$, $v_2 = (4,1,2)$ y $v_3 = (2,0,3)$ porque

$$(3,5,-8) = 3(1,2,-4) + (-1)(4,1,2) + 2(2,0,3)$$
$$(3,5,-8) = (3-4+4, 6-1+0, -12-2+6)$$

EJEMPLO Una combinación lineal en M_{23}

En M_{23}, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, lo que muestra que $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO Combinaciones lineales en P_n

En P_n todo polinomio se puede escribir como una combinación lineal de los "monomios" $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Conjunto generador

Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\boxed{\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n}$$

EJEMPLO Cuatro vectores que generan a M_{22}

Como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a M_{22}.

EJEMPLO El espacio generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$. Entonces $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1(2, -1, 4) + a_2(4, 1, 6)\}$.

¿Cuál es la apariencia de H? Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in H$, entonces se tiene $x = 2a_1 + 4a_2$, $y = -a_1 + a_2$ y $z = 4a_1 + 6a_2$. Si se piensa que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones se pueden ver como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas a_1, a_2. Este sistema se resuelve en la forma usual:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x + 2y \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & \frac{x+2y}{6} \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{6} - \frac{2y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{x}{6} + \frac{y}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3+z} \end{array}\right)$$

Se observa que el sistema tiene una solución únicamente si $\frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3} + z = 0$; o multiplicando por -3, si

$$5x - 2y - 3z = 0$$

es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Ejercicios Propuestos:

- Determine si el conjunto dado genera el espacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

2. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. En P_2: $x^2 + 1; x^2 - 1; x + 6$

4. En P_2: $-12x + 5x^2,\ -9 - 27x + 8x^2, -3 - 5x + x^2$

5. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

- Describa el espacio generado por los vectores

1. $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 20 \\ -23 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 24 \\ -2 \end{pmatrix}$