Distribución de Probabilidad Continua

Una distribución de probabilidad continua es aquella distribución que define las probabilidades de una variable aleatoria continua. Por lo tanto, una distribución de probabilidad continua solo puede tomar un número infinito de valores dentro de un intervalo (a , b). Esto significa que hay infinitos posibles valores que la variable puede asumir.

A continuación, se reseñan algunas características de la distribución de probabilidad continua:

1. Función de densidad de probabilidad (f.d.p.): En lugar de una función de masa de probabilidad, utilizamos una función de densidad de probabilidad. Esta función describe la forma de la distribución y nos permite calcular probabilidades.
2. Probabilidad en un intervalo: La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor dentro de un intervalo específico se calcula encontrando el área bajo la curva de la f.d.p. en ese intervalo.
3. Probabilidad en un punto: La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor exacto es cero. Esto se debe a que hay infinitos posibles valores, por lo que la probabilidad de que ocurra uno en particular es infinitesimal.
4. La f.d.p. es una función no negativa que cumple las siguientes propiedades:

   - No negatividad: $f(x) \geq 0$ para todo x.

   - Área total bajo la curva es 1: $\int f(x)dx = 1$, donde la integral se toma sobre todo el rango de posibles valores de x.

Para calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entre a y b, se calcula el área bajo la curva de la f.d.p. entre a y b:

$$P(a \leq X \leq b) = \int[a,b]\ f(x)\ dx$$

Distribución Normal (μ, σ)

La distribución normal es una distribución de probabilidad continua cuya gráfica tiene forma de campana gaussiana y es simétrica respecto a su media. Esta distribución es fundamental en estadística y se utiliza ampliamente en diversos campos, desde las ciencias naturales hasta las sociales.

La distribución normal se considera, por mucho, la distribución más importante de todas las distribuciones de probabilidad, ya que no solo permite modelizar un gran número de fenómenos reales, sino que además la distribución normal se puede usar para aproximar otros tipos de distribuciones bajo ciertas condiciones.

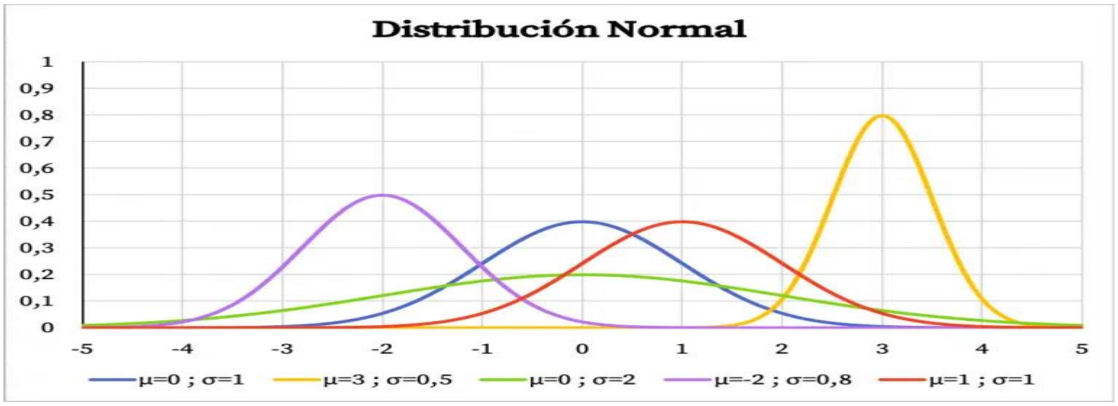
El símbolo de la distribución normal es la letra mayúscula **N**. Así pues, para indicar que una variable sigue una distribución normal se indica con la letra N y se añade entre paréntesis los valores de su media aritmética y su desviación estándar.

$$\mathbf{X \sim N(\mu, \sigma)}$$

Gráfica de la distribución normal

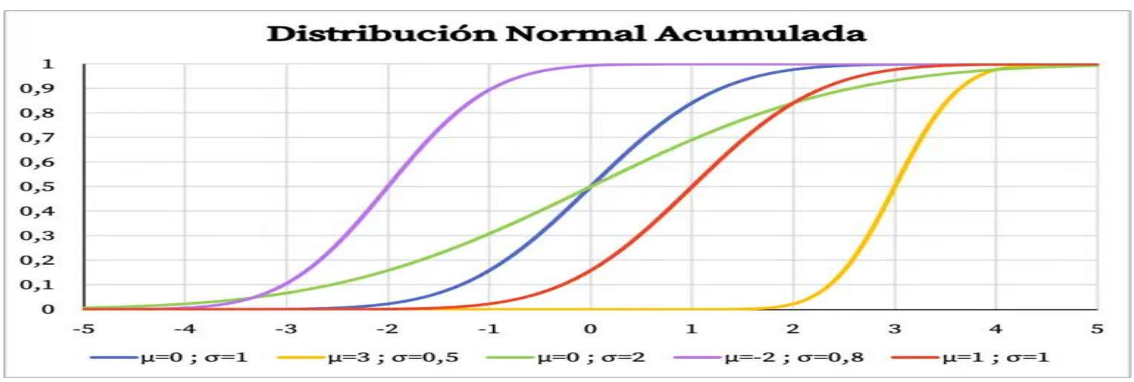
Una vez hemos visto en qué consiste la distribución normal y varios ejemplos de este tipo de distribución de probabilidad, vamos a ver cómo es su gráfica para entender mejor el concepto.

En el siguiente gráfico puedes ver cómo varia la función de densidad de la distribución normal dependiendo de los valores de su media aritmética y de su desviación típica.



Al tener forma de campana centrada en la media aritmética, si una variable tiene una distribución normal significa que el valor más repetido es la media y que los valores alrededor de la media se repiten con más frecuencia que los valores de los extremos. Asimismo, cuanto mayor sea la desviación típica de la distribución normal, más aplastada es la forma de su representación gráfica.

Por otro lado, la gráfica de la función de probabilidad acumulada de la distribución normal también depende de los valores de su media aritmética y su desviación típica, tal y como puedes ver en la siguiente imagen:



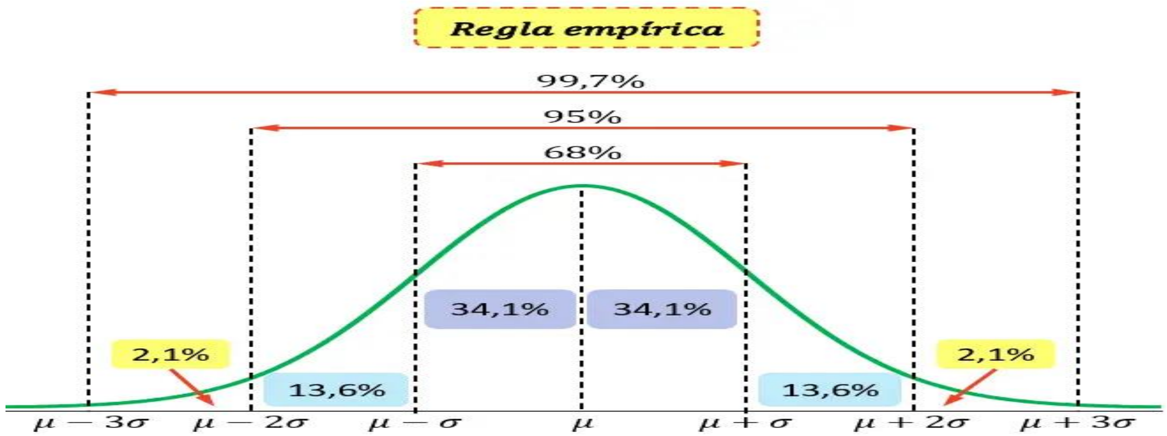
La función de densidad y la función de distribución de la distribución normal permiten calcular probabilidades relacionadas con esta distribución. No obstante, en lugar de utilizar sus fórmulas, puedes usar directamente las tablas de la distribución normal ya que es más rápido.

La distribución normal y la regla empírica

En estadística, la regla empírica, también llamada regla 68-95-99,7, es una regla que define el porcentaje de valores de una distribución normal que se encuentran a tres desviaciones estándar de la media.

En concreto, la regla empírica establece lo siguiente:

- El 68% de los valores de una distribución normal se encuentran a una desviación estándar de la media.
- El 95% de los valores de una distribución normal se encuentran a dos desviaciones estándar de la media.
- El 99,7% de los valores de una distribución normal se encuentran a tres desviaciones estándar de la media.



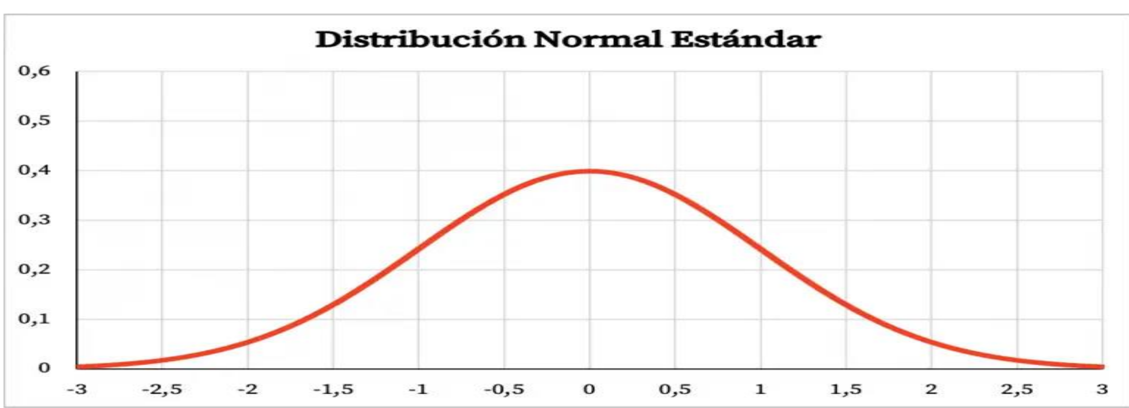
Distribución normal estándar

La distribución normal estándar, también llamada distribución normal unitaria, es el caso más simple de una distribución normal. En concreto, la distribución normal estándar es una distribución normal con valores de media y desviación estándar iguales a 0 y 1 respectivamente.

Cabe destacar que cualquier distribución normal se puede transformar en una distribución normal estándar aplicando un proceso llamado tipificación que consiste en restar a cada uno de los valores su media aritmética y después dividir por su desviación típica.

Además, la distribución normal estándar se usa para determinar cualquier probabilidad de cualquier distribución normal mediante su tabla de probabilidades. De manera que para hallar una probabilidad de una distribución normal primero se tipifica la variable para convertirla en una distribución normal estándar y, posteriormente, se mira en la tabla cuál es el valor de la probabilidad correspondiente.

De modo que la gráfica de la distribución normal estándar es la siguiente:



Fórmula de la distribución normal estándar

Para transformar cualquier distribución normal en una distribución normal estándar, se debe restar la media de la distribución normal a todos sus valores y luego dividir por la desviación estándar de la distribución normal. Así que, la fórmula de la distribución normal estándar es la siguiente:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma) \;\; \rightarrow \;\; Z \sim N(0,1)$$

De este modo, la media aritmética y la desviación estándar de la nueva variable serán 0 y 1 respectivamente, por lo que obtendremos una distribución normal estándar. A este proceso también se le llama tipificación de una variable o normalización de una variable.

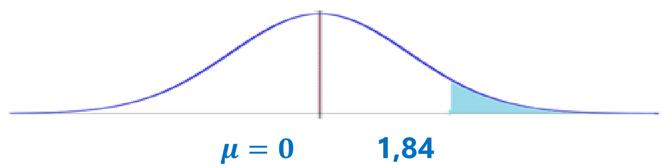
Manejo de la tabla de distribución normal estándar

Ejemplo. Dada una distribución normal estándar, calcule el área bajo la curva que se localiza:

a) a la derecha de z = 1,84

P (Z > 1,84)

En primer lugar, se busca en la tabla de distribución normal el valor de probabilidad, tal como se indica en la figura



z	.03	.04
1.7	0.9582	0.9591
1.8	0.9664	0.9671
1.9	0.9732	0.9738

Como el valor de Z está por encima de la media, P(Z > 1,84), para calcular la probabilidad o el área bajo la curva se resta 1,00 al valor obtenido de la tabla:

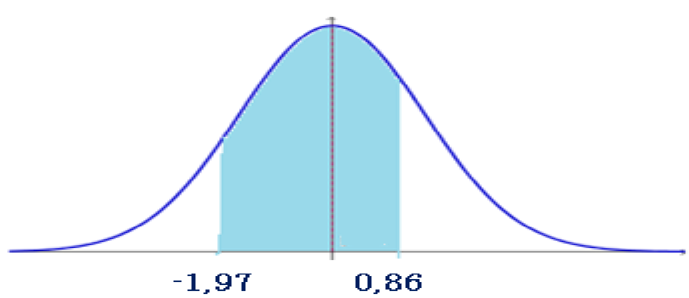
P(Z > 1,84) = 1 – 0,9671 = 0,0329

La probabilidad es de 0,0329

También puede hacerse uso de la función Excel = **DISTR.NORM.ESTAND**

Como P(Z >1,84) , entonces 1 – 0,9671 = 0,0329

b) entre z = –1,97 y z = 0,86



$$P(-1{,}97 < Z < 0{,}86) = P(Z < 0{,}86)] - [P(Z < -1{,}97)]$$

$$P(-1{,}97 \leq Z \leq 0{,}86) = 0{,}8051 - 0{,}0244 = 0{,}78$$

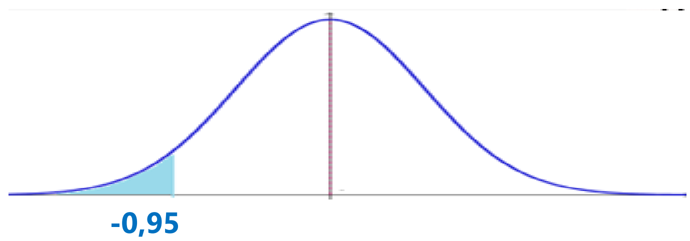
A través de la formula del Excel:

=DISTR.NORM.ESTAND(0,86) = 0,80510548

= DISTR.NORM.ESTAND(0,86) = 0,02441919

$P(-1{,}97 < Z < 0{,}86) = 0{,}8051 - 0{,}0244 = 0{,}7807$

c) a la izquierda de -0,95

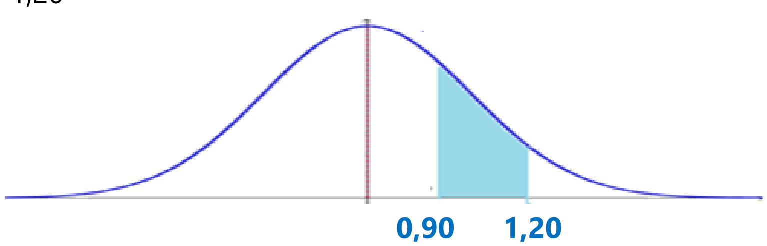


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977

$$P(Z < -0{,}95) = 0{,}1711$$

= DISTR.NORM.ESTAND(-0,95) = 0,1710561

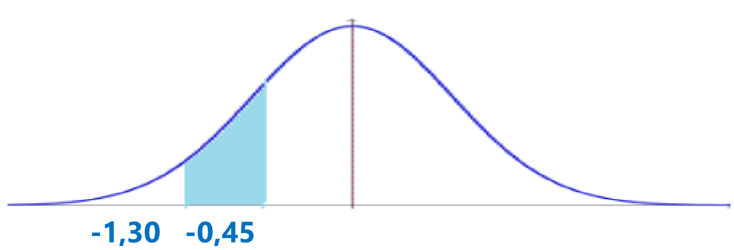
d) entre z = 0,90 y z = 1,20



$$P(0{,}90 < Z < 1{,}20) = P(Z < 1{,}20) - P(Z < 0{,}90)$$

$$P(0{,}90 < Z < 1{,}20) = 0{,}8849 - 0{,}8159 = 0{,}0690$$

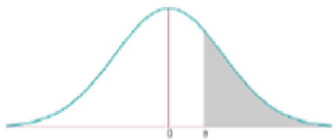
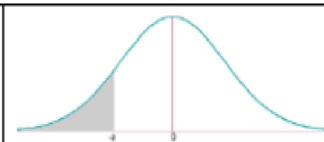
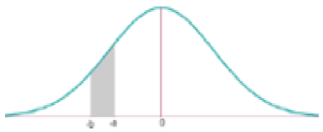
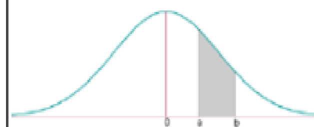
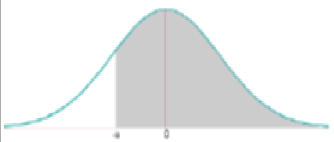
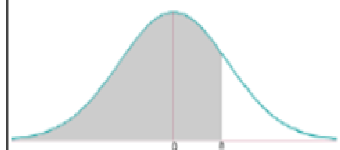
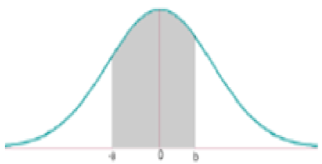
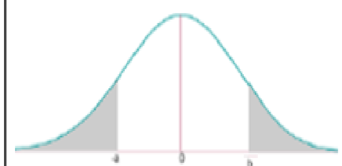
e) entre z = –1,30 y z = –0,45



$$P(-1{,}30 < Z < -0{,}45) = P(Z < -0{,}45) - P(Z < -1{,}30)$$

$$P(-1{,}30 < Z < -0{,}45) = 0{,}3264 - 0{,}0968 = 0{,}2296$$

En resumen

 $P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$	 $P(Z \leq a)$ *
 $P(-a < Z < -b) = P(Z < -a) - P(Z < -b)$	 $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$
 $P(Z > -a) = 1 - P(Z \leq a)$	 $P(Z \leq a)$ *
 $P(-a \leq Z \leq b) = P(Z < b) - P(Z < -a)$	 $P(Z > b) + P(Z \leq a) =$ $[1 - P(Z \leq b)] + P(Z \leq a)$
* Se busca directamente en la tabla de distribución normal estándar	

Ejemplos

1. Sabiendo que la variable *X* se distribuye según una normal con media 20 y varianza 64, determine la probabilidad de extraer al azar una observación cuya puntuación sea:

a) Menor de 26

b) Menor de 18

c) Mayor de 30

d) Mayor de 13,2

e) Entre 16 y 28

f) Entre 24 y 36

Solución $\mu = 20 \qquad \sigma^2 = 64$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 8$$

a) P(X < 26)

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{26-20}{8} = 0{,}75$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = 0,75

P(X < 26) = P(Z < 0,75) = 0,7734

b) P(X < 18)

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{18-20}{8} = -0{,}25$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = -0,25

P(X < 18) = P(Z < -0,25) = 0,4013

c) P(X > 30)

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{30-20}{8} = 1{,}25$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = 1,25.

P(Z < 1,25) = 0,8944

Como nos piden la probabilidad mayor a 30, entonces procedemos de la siguiente manera:

P(Z > 1,25) = 1 – P(Z< 1,25) = 1 – 0,8944 = 0,1056

d) P(X > 13,2)

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{13{,}2-20}{8} = -0{,}85$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = -0,85.

P(Z < -0,85) = 0,1977

Como nos piden la probabilidad mayor a 13,2, entonces procedemos de la siguiente manera:

P(Z > -0,85) = 1 – P(Z< -0,85) = 1 – 0,1977 = 0,8023

e) P(16 < X < 28)

$$z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{16-20}{8} = -0,50$$

$$z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{28-20}{8} = 1,00$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = -0,50 y z = 1,00.

P(Z < -0,50) = 0,3085

P(Z < 1,00) = 0,8413

Como se trata de hallar la probabilidad entre dos regiones, restamos los valores encontrados en la tabla:

P(16 < X < 28) = P(-0,50 < Z < 1,00) = P(Z < 1,00) – P(Z< -0,50)

= 0,8413 – 0,3085 = 0,5328

f) P(24 < X < 36)

$$z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{24-20}{8} = 0,50$$

$$z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{36-20}{8} = 2,00$$

En la tabla de distribución normal buscamos la probabilidad para un z = 0,50 y z = 2,00.

P(Z < 0,50) = 0,6915

P(Z < 2,00) = 0,9772

Como se trata de hallar la probabilidad entre dos regiones, restamos los valores encontrados en la tabla:

P(24 < X < 36) = P(0,50 < Z < 2,00) = P(Z < 2,00) – P(Z< 0,50)

= 0,9772 – 0,6915 = 0,2857

Aproximación normal de las probabilidades binomial

Corrección continuidad: En la teoría de la probabilidad una **corrección por continuidad** es un ajuste que se realiza cuando una distribución discreta se aproxima mediante una distribución continua. Para ello se aplica los siguientes criterios:

$P(X \geq Xi) = P(X \geq Xi - 0{,}5)$

$P(X < Xi) = P(X \leq Xi - 0{,}5)$

$P(X \leq Xi) = P(X \leq Xi + 0{,}5)$

$P(X > Xi) = P(X \geq Xi + 0{,}5)$

$P(X = Xi) = P(Xi - 0{,}5 \leq X \leq Xi + 0{,}5)$

$P(X1 \leq X \leq X2) = P(X1 - 0{,}5 \leq X \leq X2 + 0{,}5)$

Cuando el número de observaciones o ensayos n es relativamente grande, puede utilizarse la distribución de probabilidad normal para aproximar probabilidades binomiales. Una regla empírica conveniente es que tal aproximación es aceptable cuando **$n \geq 30$** y tanto **$np \geq 5$** como **$n(1 - p) \geq 5$**.

Si X es una variable aleatoria binomial con media **$\mu = np$** y varianza **$\sigma^2 = npq$**, entonces la forma limitante de la distribución de

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

conforme $n \to \infty$, es la distribución normal estándar n(z; 0, 1).

Ejemplos

1. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

Solución

Datos: $n = 200$ $p = 0{,}5$ $q = 0{,}5$ P(aprobar el examen) = $P(X > 110)$

$\mu = np = 200 * 0{,}5 = 100$ $\sigma^2 = npq = 200*0{,}5*0{,}5 = 50$ $\sigma = 7{,}07$

$$\mathbf{X \sim B(200,0.5) \rightarrow X \sim N(100,7.07)}$$

Como $P(X > 110)$, entonces $P(X \geq 110+0{,}5) = P(X \geq 110{,}5)$

Aplicando la fórmula de distribución normal estándar

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110{,}5 - 100}{7.07} = 1{,}49$$

$P(X > 110{,}5) = P(Z > 1{,}49) = 1 - P(Z \leq 1{,}49) = 1 - 0{,}9319 = 0{,}0681 = 6{,}81\%$ es la probabilidad de aprobar el examen si contesta más de 110 respuestas correctas.

2. En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 que tengan teléfono.

Solución   p = 1/3   n = 90

P(X ≥ 30)

$\mu = np = 90 * 1/3 = 30$ $\sigma^2 = npq = 90*1/3*2/3 = 20$ $\sigma = 4,47$

P(X ≥ 30) = P(X ≥ 30 - 0,5) = P(X ≥ 29,5)

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{29,5 - 30}{4,47} = -0,11$$

Ejercicios propuestos

1. El diámetro interior del anillo de un pistón terminado se distribuye normalmente con una media de 10 centímetros y una desviación estándar de 0.03 centímetros.

a. ¿Qué proporción de anillos tendrá diámetros interiores que excedan 10,075 centímetros?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el anillo de un pistón tenga un diámetro interior de entre 9.97 y 10.03 centímetros?

2. Una fabrica de tornillos produce un tipo de tornillo con un diámetro promedio de 6,5 ± 1,5 mm. Suponiendo que sigue una distribución normal, calcule la probabilidad de encontrar tornillos con diámetro:

a. Mayor que 7 mm

b. Entre 6 y 7 mm

3. El peso de los artículos producidos por una fábrica tiene distribución normal con una media de 50 gr y una desviación estándar de 5 gr. Calcule:

a. La probabilidad que un artículo elegido al azar un peso de más de 60 gr.

b. La probabilidad que tendrían un peso menor a 40 gr y mayor a 54 gr.

4. La tolerancia especificada para aceptar los ejes producidos por una fábrica es que el diámetro sea 0,45 ± 0,005 cm. Si los ejes producidos por la fábrica tienen distribución normal con media 0,452 y desviación estándar 0,003 cm. Determine cuantos ejes serán rechazados de cada lote de 500 ejes producidos.

5. Proponga un ejercicio.

Tabla A.4 Áreas bajo la curva normal

0 z

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Distribución Exponencial (β)

La distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua que se utiliza principalmente para modelar el tiempo que transcurre entre dos eventos sucesivos en un proceso de Poisson. Por consiguiente, es ideal para modelar fenómenos que ocurren aleatoriamente a una tasa constante en el tiempo.

Las distribuciones exponenciales se utilizan habitualmente en cálculos de fiabilidad de productos, es decir, el tiempo que dura un producto.

Entre sus características están:

- Continua: La variable aleatoria que sigue una distribución exponencial puede tomar cualquier valor real positivo.
- Positiva: Solo toma valores positivos, ya que representa el tiempo.
- Sin memoria: Una propiedad distintiva es que "olvida" el pasado. Esto significa que la probabilidad de que un evento ocurra en un intervalo de tiempo futuro no depende del tiempo transcurrido hasta ese momento. Por ejemplo, si una bombilla tiene una vida útil exponencial, la probabilidad de que se queme en la próxima hora es la misma, sin importar cuánto tiempo haya estado encendida.

Se utiliza en los siguientes casos:

- Tiempos de espera: Modelar el tiempo que transcurre entre eventos aleatorios, como:
    - Tiempo entre llamadas telefónicas en un centro de atención al cliente.
    - Tiempo entre llegadas de clientes a una tienda.
    - Vida útil de componentes electrónicos.
    - Tiempo entre desintegraciones radiactivas.
- Fenómenos de Poisson: Relacionada con el proceso de Poisson, que modela el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo fijo.
- Teoría de la fiabilidad: Para modelar la vida útil de sistemas y componentes.

La variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial, con parámetro β, si su función de densidad es dada por

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \qquad \beta > 0}$$

donde:

- x: El valor de la variable aleatoria (tiempo).
- β: El parámetro de tasa, que representa el número promedio de eventos por unidad de tiempo. ($\boldsymbol{\beta} = 1/\lambda$)

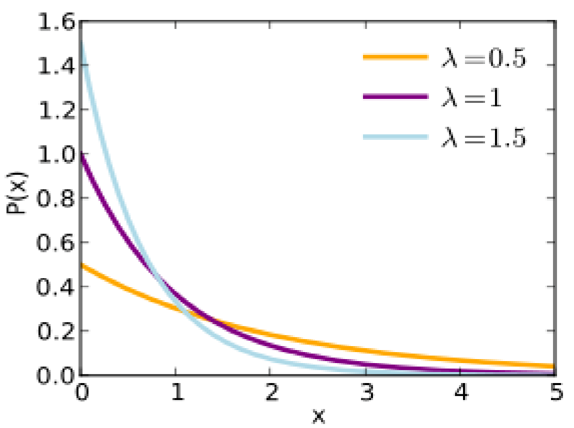
La función de distribución acumulada (fda) da la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual a un cierto valor x:

$$\mathbf{F(x) = 1 - e^{-x/\beta}}$$

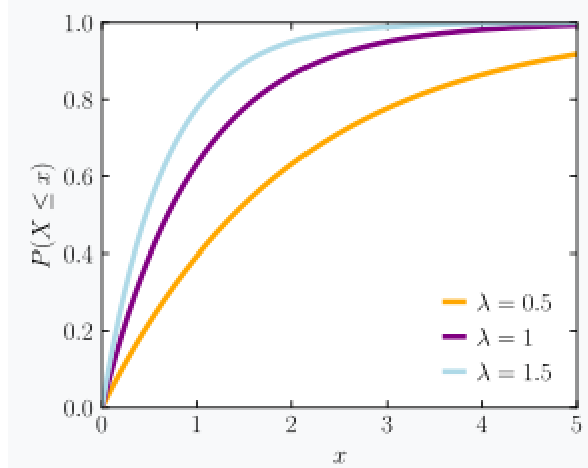
Las fórmulas para el cálculo de la esperanza matemática o media y varianza en la distribución exponencial son respectivamente:

$$\mathbf{E(X) = \beta} \qquad \mathbf{Var(X) = \beta^2}$$

La gráfica de una distribución exponencial es una curva decreciente exponencial, comenzando en un valor alto en x = 0 y acercándose asintóticamente al eje x.



Función de densidad de probabilidad



Función de distribución de probabilidad

<u>Ejemplo</u>: El tiempo de revisión del motor de un avión sigue una distribución exponencial con media 22 minutos.

a) Encontrar la probabilidad de que el tiempo de revisión sea menor a 10 minutos.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de revisión del motor dure por lo menos 25 minutos?

c) Si un motor lleva un tiempo de revisión de 30 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 40 minutos?

d) ¿Cuál es el tiempo de revisión de un motor superado por el 10% de los tiempos de revisión?

e) Encontrar la media y la varianza del tiempo de revisión.

f) Se seleccionan cinco motores, ¿Cuál es el número esperado de motores que duran por lo menos 25 minutos (considerando las 5)?

g) Suponga que el tiempo de revisión de un motor sigue una distribución Poisson con media de 3 hora por día. ¿Cuál es la probabilidad que el tiempo transcurrido entre la llegada de dos motores consecutivos en algún día sea menor a 3 hora por día?

<u>Solución</u>

a) P(X < 10) = ?

β = 22 min

$$\mathbf{f(x)} = \int_0^{10} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\, dx = \int_0^{10} \frac{1}{22} e^{-10/22}\, dx = 0,3652$$

También se puede resolver mediante la función de distribución acumula: **F(x) = 1 -** $e^{-x/\beta}$

F(x) = 1 - $e^{-10/22}$ **= 0,365**

En Excel: **=DISTR.EXP(x; lamba; acum)**

La probabilidad de que el tiempo de revisión sea menor a 10 minutos es 0,365 o 36,5%.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de revisión del motor dure por lo menos 25 minutos?

$$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1-(1 - e^{-25/22}) = 0,321$$

c) Si un motor lleva un tiempo de revisión de 30 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 40 minutos?

Debido a la propiedad de "falta de memoria" de la distribución exponencial, el hecho de que el tiempo de revisión del motor lleve un tiempo de revisión de 30 minutos, no afecta la probabilidad de que dure más tiempo. Es como si estuviéramos empezando a contar el tiempo desde cero. Por lo tanto, esta pregunta es equivalente a la pregunta: "¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 25 minutos?.

P(X>40|X>30) **Por la propiedad de falta de memoria esta propiedad es igual a:**

P(X>25)=0,321

d) ¿Cuál es el tiempo de revisión de un motor superado por el 10% de los tiempos de revisión?

Se busca un X que acumula a su derecha una probabilidad de 0,1. Que es lo mismo decir, acumula a su izquierda una probabilidad de 0,9.

$$F(X) = 1 - e^{-X/22} \Rightarrow 0,9 = 1 - e^{-X/22} \Rightarrow e^{-X/22} = 1-0,9 \Rightarrow e^{-X/22} = 0,1$$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\Rightarrow \ln(e^{-X/22}) = \ln(0,1) \quad \Rightarrow \quad -x/22 = \ln(0,1)$$

$$X = -22 \times \ln(0,1) = 50,66 \text{ min}$$

e) Encontrar la media y la varianza de tiempo de revisión.

E(X) = $\beta = 22$ **min** **Var(X) =** $\beta^2 = (22)^2 = 484$ **min**

Supongamos que el costo de revisión es 200 unidades monetarias fijas al que se le suma 10 unidades monetarias por el tiempo que dure la revisión. Encontrar la media y la varianza del costo.

Sea C el costo de revisión y X el tiempo de reparación

C = 200 + 10X

La media seria: C = 200 + 10E(X) = 200 + 10*(22) = 420 unidades monetarias

La varianza sería: V = (200 + 10X) ⇒ V = 10^2 *V(X) = 100 x 22^2 = 48.400 unidades monetarias

f) Se seleccionan cinco motores, ¿Cuál es el número esperado de motores que duran por lo menos 25 minutos (considerando las 5)?

N = 5 E(X) = ?

Se tiene una distribución binomial, ya que el número de ensayos: n = 5. La probabilidad de éxito en cada ensayo: p = 0,321 (probabilidad del apartado b)

$$\mathbf{E(X) = n * p = 5 * 0{,}321 \approx 1{,}61}$$

Se espera que, en promedio,1,61 de los 5 motores seleccionados duren en la revisión por lo menos 25 min.

g) Suponga que el tiempo de revisión de un motor sigue una distribución Poisson con media de 3 hora por día. ¿Cuál es la probabilidad que el tiempo transcurrido entre la llegada de dos motores consecutivos en algún día sea menor a 3 hora por día?

Para resolver el problema, utilizamos la información dada sobre la llegada de motores que sigue una distribución de Poisson con una media de 1 hora por día. El tiempo entre llegadas consecutivas de motores sigue una distribución exponencial.

Convertir horas a días: 3 hora * 1 día/24 horas = 3/24 día = 1/8 día

$\beta = 1/\lambda = \mathbf{1/3}$ $\mathbf{x/\beta = (1/8) / (1/3) = 3/8}$

$$\mathbf{P(X < 1/8) = 1 - e^{-x/\beta}} = 1 - \mathbf{e^{-3/8} = 0{,}317}$$

La probabilidad que el tiempo transcurrido entre la llegada de dos motores consecutivos en algún día sea menor a 3 hora por día es de 0,317.

Ejercicios propuestos

1. La duración en miles de Km. de cierto tipo de llantas, es una variable aleatoria con distribución exponencial con media 40 mil Km. Calcule la probabilidad que una de estas llantas dure:

   a. No más de 30 mil Km.

   b. Al menos 20 mil Km.

2. El tiempo de espera en una cola de un banco sigue una distribución exponencial con una media de 5 minutos. Determine:

   a. La probabilidad de que un cliente espere menos de 3 minutos?

   b. Si un cliente ya ha esperado 2 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que espere al menos 2 minutos más?

   c. El tiempo esperado y su desviación estándar.

3. El tiempo de vida de un componente electrónico sigue una distribución exponencial con una media de 2000 horas.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que un componente dure más de 3000 horas?

b. Si un componente ha funcionado durante 1500 horas , ¿cuál es la probabilidad de que funcione al menos 500 horas más?

c. ¿Cuál es el tiempo de vida que se supera con una probabilidad del 95%?

4. Proponga un ejercicio.

Distribución Gamma (α, β)

La distribución gamma es una distribución de probabilidad continua que se utiliza para modelar una amplia variedad de fenómenos, especialmente aquellos relacionados con tiempos de espera, cantidad de precipitaciones, ingresos, procesos estocásticos. Es una distribución muy flexible, con dos parámetros que permiten ajustar su forma a diferentes situaciones.

Entre sus características principales están las siguientes:

- Continuidad: La variable aleatoria que sigue una distribución gamma puede tomar cualquier valor real positivo.
- Dos parámetros:
  - Forma (**α**): Controla la forma de la curva. Para valores pequeños de α, la distribución es sesgada a la derecha, mientras que para valores grandes se aproxima a una distribución normal.
  - Escala (**β**): Controla la dispersión de la distribución.
- Flexibilidad: Puede modelar una amplia gama de formas, desde distribuciones muy sesgadas hasta distribuciones casi simétricas.
- Relación con otras distribuciones:
  - Exponencial**:** La distribución gamma con α=1 es una distribución exponencial.
  - Chi-cuadrado: La distribución gamma con α=k/2 y β= 2 es una distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad.

La función de densidad de probabilidad de la distribución gamma es:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

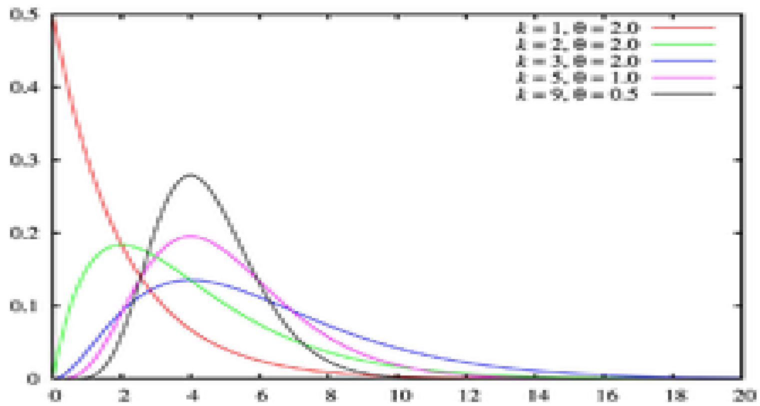
α > 0, β > 0, son los parámetros

La función gamma es

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

La media y varianza son: **E(X) = αβ, Var(X) = αβ²**

Representación gráfica. La forma de la distribución gamma varía dependiendo de los valores de los parámetros k y θ. A continuación se presentan algunos ejemplos:



<u>Ejemplo</u>: Supongamos que el tiempo (en minutos) que tarda un mecánico en reparar un determinado tipo de máquina sigue una distribución gamma con parámetros α = 3 y β = 10. Se pide:

a) Calcular la media y la varianza del tiempo de reparación.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una reparación tome menos de 20 minutos?

c) Si se reparan 3 máquinas de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo total de reparación sea menor a 50 minutos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que una reparación tome más de 25 minutos?

<u>Solución</u>: α = 3 y β = 10.

a) Media y varianza del tiempo de reparación

E(X) = αβ = 3 * 10 = 30 minutos.

Var(X) = $\alpha\beta^2$ = 3 * 10^2 = 300 minutos^2.

b) P(X < 20)

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} = \frac{1}{10^3.\Gamma(\alpha)} x^{3-1} e^{-x/10}$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)! = (3-1)! = 2! = 2$$

También se puede resolver así

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{3-1} e^{-x} dx = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{1000\ x\ 2} x^2 e^{-x/10}$$

$$P(X < 20) = \int_0^{20} \frac{1}{2000} x^2 e^{-x/10}\ dx$$

$$P(X < 20) = 0,323$$

c) n = 3 máquinas, P(X< 50)

<u>Nota</u>. Cuando sumamos n variables aleatorias independientes que siguen distribuciones Gamma con los mismos parámetros β, la suma sigue una distribución Gamma con parámetros nα y β.

¿Por qué no multiplicamos β por 3?

- β representa el tiempo medio de reparación por máquina: Este parámetro nos indica cuánto tiempo, en promedio, tarda en repararse una sola máquina.
- La cantidad de máquinas no afecta al tiempo medio por máquina: Si aumentamos el número de máquinas, el tiempo promedio que tarda cada una en repararse sigue siendo el mismo. Es decir, si una máquina tarda 10 minutos en promedio, 5 máquinas también tardarán 10 minutos en promedio cada una.
- β (escala): Permanece constante porque representa una propiedad intrínseca de cada máquina.

¿Por qué multiplicamos α por 3?

- α determina la forma de la distribución: Este parámetro nos indica la forma de la curva de la distribución Gamma.
- Al aumentar el número de máquinas, cambia la forma de la distribución: Cuando sumamos varias variables aleatorias Gamma independientes (como los tiempos de reparación de las 5 máquinas), la forma de la distribución resultante cambia. Al multiplicar α por 5, estamos ajustando la forma de la distribución para reflejar el hecho de que estamos sumando 5 tiempos de reparación.
- α (forma): Se multiplica por 5 porque refleja la suma de 5 variables aleatorias Gamma independientes.

$\alpha_t = 3 \text{ x } 3 = 9$ $\quad\quad$ $\beta_t = 10$ $\quad\quad$ P(X < 50)

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} = \frac{1}{10^3.\Gamma(9)} x^{9-1} e^{-x/10}$$

$$\Gamma(9) = (9-1)! = 8! = 40.320$$

$$P(X < 50) = \int_0^{50} \frac{1}{10^9 x 40320} x^8 e^{-x/10}\, dx$$

$$P(X < 50) = 0,07$$

d) P(X > 25) = 1 - P(X ≤ 5)

$$P(X > 25) = 1 - \int_0^{25} \frac{1}{2000} x^2 e^{-x/10}\, dx$$

$$P(X > 25) = 1 - 0,456 = 0,544$$

También se resuelve de la siguiente manera:

$$P(X > 25) = \int_{25}^{\infty} \frac{1}{2000} x^2 e^{-x/10} \, dx = 0,544$$

Ejercicios propuestos

1. En cierta ciudad, el consumo diario de energía eléctrica en millones de Kw-hora puede modelarse como una variable aleatoria con distribución Gamma con parámetros α = 3 y β = 2. Si la planta de energía tiene una capacidad de producción diaria de doce millones de Kw-hora.

a. Calcule la probabilidad que el suministro de energía sea insuficiente.

b. La probabilidad entre 10 a 12 millones de Kw-hora.

2. Suponga que el tiempo, en horas, necesario para reparar una bomba de calor es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con los parámetros α = 2 y β = 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llamada de servicio requiera:

a. a lo sumo una hora para reparar la bomba de calor?

b. al menos dos horas para reparar la bomba de calor?

c. Determine el valor esperado, varianza y desviación estándar.

3. Supongamos que el tiempo de vida de una batería (en horas) sigue una distribución Gamma con parámetros α = 3 y β = 20.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una batería dure más de 50 horas?

b. De que dure entre 25 a 45 horas

c. ¿Cuál es el tiempo de vida medio de una batería?

4. Proponga un ejercicio.

Distribución beta (α, β)

La distribución beta es una familia de distribuciones de probabilidad continúa definida en el intervalo (0,1). Sus dos parámetros de forma, α y β, permiten una gran flexibilidad para ajustar la distribución a diferentes tipos de datos.

Se utiliza para modelar variables aleatorias que representan proporciones, porcentajes o probabilidades.

1. Proporciones: Modelar la proporción de éxitos en un número fijo de ensayos (por ejemplo, la proporción de piezas defectuosas en una producción).

2. Probabilidades subjetivas: Representar la incertidumbre sobre la probabilidad de un evento (por ejemplo, la probabilidad de que un nuevo producto tenga éxito).

3. Análisis bayesiano: Como distribución a priori para parámetros que representan probabilidades.

3. Simulación: Generar números aleatorios que sigan una distribución beta para simular procesos estocásticos.

Entre las características principales están:

Soporte: (0,1)

Parámetros: α y β (ambos positivos)

- **α:** Controla la forma de la distribución en la parte izquierda del intervalo (0,1).
- **β:** Controla la forma de la distribución en la parte derecha del intervalo (0,1).

Flexibilidad: La forma de la distribución puede variar ampliamente dependiendo de los valores de α y β.

Casos particulares:

- Si α = β = 1, la distribución es uniforme en (0,1).
- Si α = β > 1, la distribución es simétrica y unimodal.
- Si α > 1 y β > 1, la distribución es unimodal y tiene un máximo en el intervalo (0,1).
- Si α < 1 y β < 1, la distribución es U-shaped.

La función de densidad de probabilidad de la distribución beta es:}

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad 0 < x < 1$$

donde:

- x: Valor de la variable aleatoria (entre 0 y 1)
- α, β: Parámetros de forma
- B(α, β): Función beta, una constante de normalización. La función beta es:

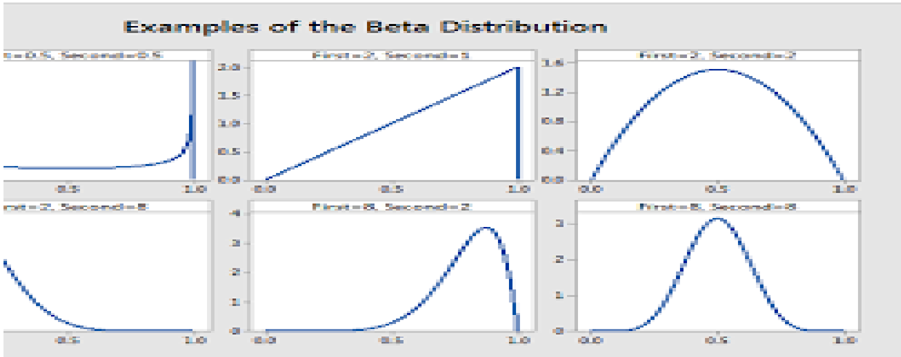
$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad para\ \alpha,\beta > 0$$

Donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma

La media y la varianza de una distribución beta en la que los parámetros α y β son:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Representación gráfica. La forma de la distribución beta puede variar ampliamente dependiendo de los valores de los parámetros α y β. A continuación, se muestran algunos ejemplos:



Ejemplo. Un distribuidor de cierto producto lleva su establecimiento al inicio de cada semana. La proporción del artículo que vende semanalmente se puede modelar con distribución con la distribución Beta con α = 4, β = 2.

a) Encuentre la probabilidad que en alguna semana venda al menos 90%.

b) Encuentre la probabilidad que en alguna semana venda menos del 50%.

c) Encuentre el valor esperado y varianza de la proporción de venta semanal.

Solución α = 4, β = 2

a) P(X al menos 0,9) = P(X ≥ 0,9)

$$\boldsymbol{B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(2)\Gamma(4)}{\Gamma(2+4)} = \frac{(1)!.(3)!}{(5)!} = \frac{1}{20}}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 0,9) = \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_{0,9}^1 \frac{1}{\frac{1}{20}} x^{4-1}(1-x)^{2-1}\,dx = 20\int_{0,9}^1 x^3(1-x)dx}$$
$$\boldsymbol{= 0,082\ )\ 8,2\%}$$

También se puede resolver de la siguiente manera

$$\boldsymbol{P(X \geq 0,9) = 1 - P(X < 0,9)}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 0,9) = 1 - \int_0^{0,90} \frac{1}{\frac{1}{20}} x^{4-1}(1-x)^{2-1}\,dx = 1 - 0,919 = 0,081}$$

b) P(X menos 0,5) = P(X < 0,5)

$$\boldsymbol{P(X < 0,5) = \int_0^{0,50} \frac{1}{\frac{1}{20}} x^3(1-x)dx = 0,188 = 18,8\%}$$

c) Media y varianza

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = 0{,}667$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{4\,x\,2}{(4+2)^2(4+2+1)} = 0{,}032$$

Ejercicios propuestos

1. Suponga que la variable aleatoria X tiene una distribución beta con α = 1 y β = 3.

a. Determine la media y la varianza de X.

b. Calcule la probabilidad de que X > 1/3.

2. Una empresa fabrica componentes electrónicos. La proporción de componentes defectuosos en cada lote se modela como una variable aleatoria con distribución beta con parámetros α = 2 y β = 5.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga menos del 20% de componentes defectuosos?

b. ¿Cuál es el porcentaje promedio de componentes defectuosos en un lote?

3. Si la proporción de una marca de televisores que requiere servicio durante el primer año de operación es una variable aleatoria que tiene una distribución beta con α = 3 y β = 2.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 80% de los nuevos modelos de esta marca que se vendieron este año requieran servicio durante su primer año de operación?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que menos del 70% de los nuevos modelos de esta marca que se vendieron este ano requieran servicio durante su primer año de operación?

4. Proponga un ejercicio

Distribución Weibull (α, β)

La distribución de Weibull es una distribución de probabilidad continua que destaca por su capacidad para modelar una amplia variedad de fenómenos, especialmente aquellos relacionados con la fiabilidad y la vida útil. Su característica distintiva es la capacidad de representar tasas de falla variables, lo que la hace ideal para analizar la evolución de los fallos en sistemas y componentes. Gracias a su versatilidad, la distribución de Weibull encuentra aplicación en campos tan diversos como la ingeniería, la física, la economía y las ciencias de la vida.

Este modelo se usa en problemas relacionados con fallas de materiales y estudios de confiabilidad.

Entre las características de esta distribución se destacan:

1. Versatilidad: La distribución Weibull es muy flexible debido a sus parámetros, lo que le permite adaptarse a una amplia variedad de formas de distribución.

2. Tres parámetros: Generalmente se define por tres parámetros:

- Forma (α): Determina la forma de la curva de distribución y describe cómo cambia la tasa de falla a lo largo del tiempo.

α < 1: Tasa de falla decreciente con el tiempo (los elementos tienden a fallar al principio de su vida útil).

α = 1: Tasa de falla constante con el tiempo (la probabilidad de falla es la misma en cualquier momento).

α > 1: Tasa de falla creciente con el tiempo (los elementos tienden a fallar al final de su vida útil).

Una forma de 3 se aproxima a una curva normal. Un valor de forma bajo, por ejemplo 1, da una curva con asimetría hacia la derecha. Un valor de forma alto, por ejemplo 10, da una curva con asimetría hacia la izquierda.

- Escala (**β**): Este parámetro influye en la dispersión de los datos y representa un valor característico de la distribución. Por ejemplo, en el contexto de la fiabilidad, podría representar la vida útil media de los elementos.
- Ubicación **(γ):** Este parámetro representa el valor mínimo posible para la variable aleatoria. Aunque no siempre se incluye en la definición de la distribución de Weibull, puede ser útil en algunas aplicaciones para modelar situaciones en las que existe un tiempo mínimo antes de que pueda ocurrir un fallo.

Se utiliza en los siguientes casos:

- Análisis de supervivencia: Para modelar el tiempo hasta que ocurre un evento, como la falla de un componente o la muerte de un organismo.
- Fiabilidad: Para evaluar la vida útil de productos y sistemas.
- Ingeniería de materiales: Para estudiar la resistencia de materiales.
- Meteorología: Para modelar la velocidad del viento.
- Economía: Para analizar el tiempo de vida de productos o servicios.

La función de densidad de probabilidad (fdp) de la distribución Weibull es:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^{\alpha}} \qquad \alpha, \beta, x\ > 0$$

• x: Valor de la variable aleatoria.

• α: Parámetro de forma.

• β: Parámetro de escala.

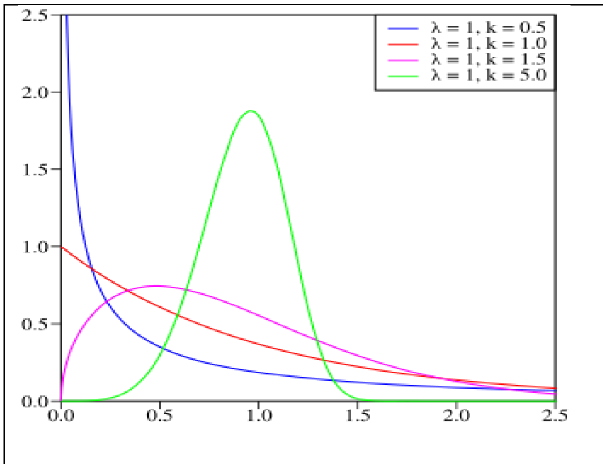
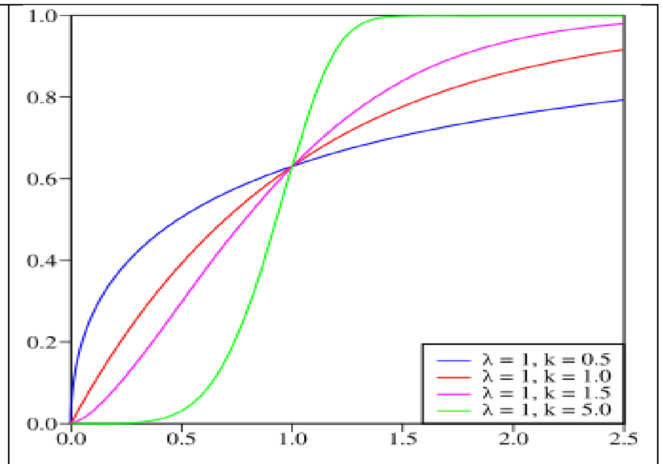
La función de distribución acumulada de una variable aleatoria Weibull es:

$$\mathrm{F(x)} = 1 - \mathrm{e}^{(-\mathrm{x}/\beta)^{\alpha}}$$

La media y varianza son respectivamente

$$E(X) = \beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \qquad Var(X) = \beta^2\left[\Gamma^{\cdot\cdot}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \left((\Gamma^{\cdot\cdot}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right]$$

Las representaciones gráficas son,

	
Función de distribución, f(x)	**Distribución de probabilidad, F(x)**

Ejemplo. Supongamos que la vida útil en horas de un componente electrónico tiene una distribución Weibull, X ~W(0.1, 0.5). Determine

a) La probabilidad que dure más de 300 horas

b) La probabilidad de que dure menos de 250 horas

c) La probabilidad de que dure entre 250 y 300 horas

d) El valor esperado y desviación estándar

Solución $\alpha = 0{,}1 \quad \beta = 0{,}5$

a) P(X > 300)

$$\boldsymbol{P(X > 300) = 1 - P(X \leq 300) = 1 - (1 - e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}) = 1 - \left(1 - e^{\left(-\frac{300}{0,5}\right)^{0,1}}\right) = 0,150}$$

Otra manera de resolverlo

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{300}^{\infty} \frac{0,1}{0,5}\left(\frac{x}{0,5}\right)^{0,1-1} e^{-(x/0,5)^{0,1}} dx = 0,150}$$

b) P(X < 250)

$$\boldsymbol{P(X < 250) = 1 - e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} = 1 - e^{\left(-\frac{250}{0.5}\right)^{0,1}} = 0,845}$$

Otra manera

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{0}^{250} \frac{0,1}{0,5}\left(\frac{x}{0,5}\right)^{0,1-1} e^{-(x/0,5)^{0,1}} dx = 0,845}$$

c) La probabilidad de que dure entre 250 y 300 horas

$$\boldsymbol{f(x)} = \int_{250}^{300} \frac{\mathbf{0,1}}{\mathbf{0,5}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{0,5}}\right)^{\mathbf{0,1-1}} \boldsymbol{e}^{-(x/0,5)^{0,1}}\boldsymbol{dx} = \mathbf{0,005}$$

d) El valor esperado y desviación estándar

$$(X) = \beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = 0,5\ x\ \Gamma\left(1+\frac{1}{0,1}\right) = 0,5\ x\ \Gamma(11-1)! = 1.814.400\ horas$$

$$Var(X) = \beta^2\left[\Gamma^{\cdot\cdot}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \left((\Gamma^{\cdot\cdot}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right] = (0,5)^2\left[\Gamma^{\cdot\cdot}\left(1+\frac{2}{0,1}\right) - \left((\Gamma^{\cdot\cdot}\left(1+\frac{1}{0,1}\right)\right)^2\right]$$

$$= 0,25\ x\left[\Gamma^{\cdot\cdot}(20)! - \left((\Gamma^{\cdot\cdot}(10)\right)!^2\right] = 6.08x\ 10^{17}\ horas^2$$

$$DE(X) = \sqrt{Var(X)} = 117886023,7\ horas$$

Confiabilidad de un componente electrónico

La confiabilidad de un componente electrónico es un concepto fundamental en ingeniería, ya que permite evaluar la calidad, durabilidad y desempeño de los dispositivos electrónicos.

Cuando se aplica la distribución de Weibull, con frecuencia es útil determinar la **tasa de fallas** (algunas veces denominada tasa de riesgo) para tener conocimiento del desgaste o deterioro del componente. Comencemos por definir la confiabilidad de un componente o producto como la probabilidad de que funcione adecuadamente por al menos un tiempo específico en condiciones experimentales específicas. Por lo tanto, si R(t) se define como la confiabilidad del componente dado en el tiempo t, escribimos

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(t)dt = 1 - F(t)$$

donde F(t) es la función de distribución acumulativa de T. La probabilidad condicional de que un componente fallará en el intervalo de T = t a T = t + Δt, dado que sobrevive hasta el tiempo t, es

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

Al dividir esta proporción entre Δt y tomar el límite como Δt → 0, obtenemos la tasa de fallas, denotada por Z(t). De aquí,

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}\frac{1}{R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

que expresa la tasa de fallas en términos de la distribución del tiempo de operación antes de la falla.

Como Z(t) = f (t)/[1 – F(t)], entonces la tasa de falla es dada como sigue:

$$\mathbf{Z(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}}, \quad \mathbf{t > 0}$$

- **Z(t):** Tasa de fallas en el instante de tiempo t
- **α:** Parámetro de forma

- **β:** Parámetro de escala (tasa de falla en t=0)
- **t:** Tiempo

La **tasa de fallas** en un instante de tiempo específico t para una distribución de Weibull representa la probabilidad instantánea de que un componente falle en ese momento, dado que ha sobrevivido hasta ese punto.

Interpretación de la tasa de fallas

La cantidad Z(t) es bien llamada tasa de fallas porque realmente cuantifica la tasa de cambio con el tiempo de la probabilidad condicional de que el componente dure una Δt adicional dado que ha durado el tiempo t. La tasa de disminución (o crecimiento) con el tiempo también es importante. Los siguientes puntos son fundamentales.

a) Si $\beta = 1$, la tasa de fallas = α, es decir, una constante.

b) Si $\beta > 1$, Z(t) es una función creciente del tiempo t que indica que el componente se desgasta con el tiempo.

c) Si $\beta < 1$, Z(t) es una función decreciente del tiempo t y, por lo tanto, el componente se fortalece o endurece con el paso del tiempo.

¿Por qué es importante la Distribución Weibull en la Confiabilidad?

La distribución Weibull es una herramienta estadística muy utilizada para modelar la vida útil de componentes electrónicos debido a su flexibilidad y capacidad para adaptarse a diferentes patrones de falla. Esta distribución permite describir situaciones en las que la tasa de falla puede aumentar, disminuir o permanecer constante con el tiempo.

Ventajas de utilizar la distribución Weibull:

1. Versatilidad**:** Se adapta a una amplia variedad de formas de distribución de vida útil.

2. Interpretación física: Los parámetros de la distribución tienen una interpretación física relacionada con la tasa de falla.

3. Estimación de parámetros: Existen métodos estadísticos eficientes para estimar los parámetros de la distribución a partir de datos de vida.

¿Cómo se aplica la distribución Weibull en la confiabilidad?

1. Recolección de datos: Se recolectan datos de vida de una muestra de componentes bajo condiciones de operación controladas.

2. Estimación de parámetros: Se utilizan métodos estadísticos como el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros de la distribución Weibull (forma, escala y ubicación).

3. Análisis de la curva de bañera: La curva de bañera es una representación gráfica de la tasa de falla en función del tiempo. La distribución Weibull puede modelar las diferentes etapas de la curva de bañera: falla temprana, vida útil y desgaste.

4. Predicción de la vida útil: Una vez estimados los parámetros, se puede utilizar la función de distribución acumulada de Weibull para calcular la probabilidad de falla en un tiempo específico.

5. Análisis de confiabilidad: Se pueden realizar análisis de confiabilidad como la tasa de falla, la vida media, la vida útil B10 (tiempo para el que el 10% de los componentes han fallado), etc.

<u>¿Qué otros factores influyen en la confiabilidad?</u>

Además de la distribución Weibull, otros factores influyen en la confiabilidad de un componente electrónico:

- Diseño: La calidad del diseño y la elección de los materiales.
- Fabricación: Los procesos de fabricación y control de calidad.
- Condiciones ambientales: Temperatura, humedad, vibración, etc.
- Uso y mantenimiento: La forma en que se utiliza el componente y las tareas de mantenimiento realizadas.

<u>Ejemplo</u>. Suponga que tenemos un componente electrónico cuya vida útil se modela con una distribución de Weibull con $\alpha = 0.02$ y $\beta = 1.5$. Para calcular la tasa de falla a las 1000 horas, simplemente sustituimos los valores en la fórmula:

$$\mathbf{h(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}}$$

$$Z(1000) = 0.02 * 1.5 * (0.02 * 1000)^{(1.5-1)} = 0{,}06 \text{ fallas/hora}$$

Esto significa que, a las 1000 horas de funcionamiento, hay una probabilidad de 0,06 de que el componente falle en la siguiente hora.

El tiempo de vida X, en horas, de un artículo en el taller mecánico tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 0{,}01$ y $\beta = 2$. ¿Cuál es la talla de falla?

$$\mathbf{Z\,(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1} = 0{,}01 * 2 * (0{,}01t)^{2-1} = 0{,}0002t}$$

Por lo tanto, la tasa de falla en función del tiempo t (en horas) es h(t) = 0.0002t fallas por hora.

Esta ecuación nos dice que la tasa de falla aumenta linealmente con el tiempo. Esto indica un patrón de desgaste, lo cual es típico cuando $\beta > 1$. A medida que el artículo envejece, es más probable que falle.

En conclusión, para este artículo con una distribución de Weibull con los parámetros dados, la tasa de falla aumenta a una tasa constante de 0.0002 fallas por hora por cada hora adicional de uso.

Nota: Si deseas calcular la tasa de falla en un momento específico, simplemente sustituye el valor de t en la ecuación h(t). Por ejemplo, para t = 100 horas, h(100) = 0.0002 * 100 = 0.02 fallas por hora.

Ejercicios propuestos

1. Suponga que la vida útil en horas de un componente electrónico tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 0{,}1$ y $\beta = 0{,}5$.

a. Calcule la probabilidad que dure más de 300 horas.

b. Calcule la probabilidad de que dure entre 150 y 200 horas.

c. Calcule la vida útil promedio y su varianza.

2. El tiempo de vida X, en horas, de un artículo en el taller mecánico tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 0.01$ y $\beta = 2$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que falle antes de 8 horas de uso?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que falle más de 10 horas de uso?

c. Determine los tres momentos.

3. La duración de un ventilador, en hora, que se usa en un sistema computacional tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ventilador dure más de 10.000 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un ventilador dure menos de 5.000 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un ventilador dure entre 3.000 y 9.000 horas?

4. (Taza de fallas). Se ha realizado un estudio de fiabilidad sobre un lote de 100 componentes electrónicos. Los datos recopilados son los tiempos hasta el fallo de cada componente, expresados en horas. Ajustar una distribución de Weibull a los datos y estimar la tasa de fallos a las 1000 horas de funcionamiento. Suponga los siguientes parámetros: forma = 1,5 y escala = 2000 horas.