UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
TEMA I. MATEMÁTICA II
(0826201)

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

1. **DEFINICION DE LA TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN DE FRACCIONES SIMPLES**
2. **TIPOS DE FUNCIONES RACIONALES**
3. **PROCEDIMIENTO PARA FUNCIONES RACIONALES IMPROPIAS**
4. **PROCEDIMIENTO PARA FUNCIONES RACIONALES PROPIAS**
5. **PROCEDIMIENTO PARA INTEGRAR UNA FUNCIÓN RACIONAL**
6. **EJERCICIOS RESUELTOS**
7. **ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA**

OBJETIVO: **CALCULAR INTEGRALES INDEFINIDAS DE FUNCIONES RACIONALES.**

TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN DE FRACCIONES PARCIALES

El método de integración por descomposición de fracciones parciales permite resolver integrales cuya función integrando es una función racional, es decir, $f(x)$ es el cociente de dos funciones polinomiales.

$$f(x) = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n}$$

Recibe el nombre de Función Racional

TIPOS DE FUNCIONES RACIONALES:

- Si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual a el grado del polinomio del denominador, m ≥ n la función racional que se tiene es del tipo **"Impropia**".
- Si el grado del polinomio del numerador es menor a el grado del polinomio del denominador, m < n la función racional que se tiene es del tipo **"Propia".**

Por lo tanto, Existen dos casos en los que podemos hacer uso del método de integración por descomposición de fracciones parciales.

PROCEDIMIENTO PARA FUNCIÓN RACIONAL DEL TIPO IMPROPIA

En este caso el procedimiento a seguir para resolver este tipo de integral es como primer paso realizar la división de polinomios ya que, **"Toda función racional impropia se puede expresar como la suma de una función polinomial más una función racional propia"**, de modo que, la integral dada puede reescribirse de la siguiente manera:

$f(x) =$ función polinomial + función racional propia

$$f(x) = \quad \mathrm{M(x)} \quad + \quad \frac{B(x)}{A(x)}$$

La dificultad fundamental de la integración de fracciones racionales consiste en las funciones racionales propias.

PROCEDIMIENTO PARA FUNCIÓN RACIONAL DEL TIPO PROPIA

En este caso el procedimiento a seguir para resolver este tipo de integral es como primer paso identificar los tipos de fracciones que intervienen en la función integrando, ya que, **"Toda función racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones simples o elementales"**.

De este tipo de fracciones se puede clasificar de 4 formas, las cuales son:

Tipo	Forma	Factor presente	Fracción Simple
1	$(x \pm a)$	**Lineal**	$\frac{A}{(x-a)}$
2	$(x \pm a)^k$	Lineal repetidos k veces K es un número entero, positivo y $K \geq 2$	$\frac{A}{(x-a)^k}$
3	$(ax^2 \pm bx \pm a)$	**Cuadrático Irreducible**	$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)}$
4	$(ax^2 \pm bx \pm a)^k$	Cuadrático Irreducible repetido k veces K es un número entero, positivo y $K \geq 2$	$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$

Para identificar los factores que interviene en la función integrando se debe factorizar el denominador hasta obtener la mínima expresión.

Luego, para descomponer la fracción racional en suma de fracciones simples se debe asignar una fracción simple por cada factor presente en el denominador. Es decir, si el denominador es un polinomio de grado uno le corresponderá una fracción simple para factores lineales del tipo 1 o del tipo 2. El tipo 2 se utilizará cuando el polinomio se repita k veces, en este caso la cantidad de fracciones simples para factores lineales que le corresponda a ese polinomio será igual a k fracciones.

Si el denominador es un polinomio de grado dos irreducible le corresponderá una fracción simple para factores cuadráticos del tipo 3 o del tipo 4. El tipo 4 se utilizará cuando el polinomio se repita k veces, en este caso la cantidad de fracciones simples para factores cuadráticos que le corresponda a ese polinomio será igual a k fracciones.

Después de descomponer la fracción racional en suma de fracciones simples se debe determinar los valores de las constantes esto se puede realizar por igualdad de polinomios o verificando la identidad.

Por último, se sustituyen los valores de las constantes en las fracciones simples, se integran ambos miembros y se obtienen sus primitivas.

PROCEDIMIENTO PARA INTEGRAR UNA FUNCIÓN RACIONAL

Se deben seguir los siguientes pasos:

I) Si es una fracción racional impropia, hay que efectuar la división de los polinomios, transformándola a la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

Donde $M(x)$ es el polinomio cociente y $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ es una fracción propia.

II) Descomponer el denominador en factores lineales y cuadráticos.

Atendiendo a la naturaleza de los factores del denominador, se pueden considerar cuatro casos:

CASO 1.- FACTORES LINEALES DISTINTOS

A cada factor lineal, $ax + b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{ax+b}$, siendo A una constante a determinar.

CASO 2.- FACTORES LINEALES Y ALGUNOS SE REPITEN

A cada factor lineal, $ax+b$, que figura n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Siendo los numeradores constantes a determinar.

CASO 3.- FACTORES CUADRÁTICOS DISTINTOS

A cada factor cuadrático, ax^2+bx+c, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$, siendo M y N constantes a determinar.

CASO 4.- FACTORES CUADRÁTICOS Y ALGUNOS SE REPITEN

A cada factor cuadrático irreducible, ax^2+bx+c, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{M_1x+N_1}{ax^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{M_nx+N_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Siendo M_1, M_2, ..., M_n, N_1, N_2, ..., N_n constantes a determinar.

Entonces, si el denominador de una fracción racional propia **hay un producto** de factores lineales y cuadráticos, de la forma:

$$Q(x)=(ax+b)^n\ \ldots\ldots\ (ax^2+bx+c)^n$$

La fracción racional se debe escribir de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}+\ldots\ldots+\frac{M_1x+N_1}{ax^2+bx+c}$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(ax^2+bx+c)^3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{M_nx+N_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Para determinar los coeficientes $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$, $M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots, M_n$, $N_1, N_2, \ldots\ldots\ldots, N_n$, se eliminan los denominadores en ambos miembros de la igualdad anterior y se igualan entre sí los coeficientes de iguales potencias de x en el primero y segundo miembro, para finalmente resolver el sistema de ecuaciones lineales. Otro método para determinar los coeficientes es, dando a la variable x valores numéricos arbitrarios en la igualdad, preferiblemente las raíces del denominador.

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO 6.1

HALLAR

$$\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx$$

Solución:

El grado del polinomio numerador es mayor al grado del polinomio denominador por lo que debemos aplicar la propiedad de las funciones racionales tipo impropia para reescribir la función, entonces, dividimos los polinomios y se escribe de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx = \int \left(x + \frac{8x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\right) dx$$

$$\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\, dx = \int x dx + \int \left(\frac{8x+6}{x^3-6x^2+12x-8}\right) dx \qquad \text{(I)}$$

Vamos a resolver la segunda integral y luego retomamos la expresión completa (I).

$$\int \left(\frac{8x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\right) dx$$

Debemos factorizar el polinomio del denominador; aplicando el método de Ruffini. La demostración de la aplicación del método de Ruffini la puede revisar en el ejercicio 7.6 del capítulo 7 del libro 801 ejercicios resueltos integral en la pagina 204.

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (\boldsymbol{x - 2})^{\mathbf{3}}$$

Sustituyendo la expresión:

$$\int \left(\frac{8x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\right) dx = \int \frac{8x + 6}{(\boldsymbol{x - 2})^{\mathbf{3}}}\, dx$$

Luego, asignamos las fracciones simples según los factores presentes en el denominador: el factor $\boldsymbol{x - 2}$ es lineal y el exponente indica que se repite 3 veces, por lo tanto vamos a tener un total de 3 fracciones simples, las cuales se asignan de la siguiente manera:

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} \quad \ldots..\mathbf{II}$$

- ✓ Las letras ***A, B, C*** representan las constantes que debemos calcular.
- ✓ Observe que la potencia del factor lineal inicia en 1 y va aumentando de 1 unidad hasta llegar a 3 que es la potencia que tiene el factor de la integral.

Se realiza la suma de fracciones, aplicando el mínimo común múltiplo *(recuerde repasarlo)* y simplificando la expresión para obtener una ecuación

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3} = \frac{A.(x-2)^2 + B.(x-2)^1 + C}{(x-2)^3}$$

Simplificando,

$$8x+6 = A.(x-2)^2 + B.(x-2)^1 + C$$

Resolvemos las potencias

$$8x+6 = A.(x^2-4x+4) + B.(x-2)^1 + C$$

Aplicamos la distributiva

$$8x+6 = (A.x^2 - 4A.x + 4A) + (Bx - 2B) + C$$

Agrupando los términos semejantes

$$8x+6 = A.x^2 + (B-4A).x + (4A-2B+C)$$

Por igualdad de polinomios se tiene:

$$A = \mathbf{0}$$

$$(B-4A) = \mathbf{8} \rightarrow B = \mathbf{8}$$

$$(4A-2B+C) = \mathbf{6} \rightarrow C = \mathbf{6} - 4A + 2B \rightarrow C = \mathbf{22}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación II

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3} = \frac{0}{(x-2)^1} + \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{22}{(x-2)^3}$$

Integrando se tiene,

$$\int \frac{8x+6}{(x-2)^3}dx = \int \frac{8}{(x-2)^2}dx + \int \frac{22}{(x-2)^3}dx$$

Para la solución de las integrales obtenidas se debe aplicar un cambio de variable,

$t = x - 2 \quad \rightarrow dt = dx$ y luego integramos.

$$\int \frac{8x + 6}{(x - 2)^3} dx = 8 \frac{-1}{(x - 2)^1} + 22 \frac{-1}{2.(x - 2)^2} + C$$

Finalmente, retomamos la ecuación I

$$\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx = \int x dx + \int \left(\frac{8x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\right) dx$$

$$\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{(x - 2)^1} - \frac{11}{(x - 2)^2} + C$$

EJERCICIO 6.2

HALLAR

$$\int \frac{x + 1}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 4x + 5)} dx$$

Solución:

El grado del polinomio numerador es menor al grado del polinomio denominador por lo que debemos aplicar la propiedad de las funciones racionales tipo propia para reescribir la función:

Como el denominador ya esta factorizado, verificamos que el factor cuadrático sea irreducible. Esto se hace aplicando la fórmula

$b^2 - 4ac < 0$ Si se cumple esta desigualdad el factor es irreducible

Aplicamos para cada factor presente en la integral

$$(x^2 + x + 2) \rightarrow 1^2 - 4.1.2 < 0 \rightarrow -7 < 0 \,; es\ irreducible$$

$$(x^2 + 4x + 5) \rightarrow 4^2 - 4.1.5 < 0 \rightarrow -4 < 0; es\ irreducible$$

Luego, asignamos las fracciones simples en este caso corresponden a factores cuadráticos, como tenemos dos factores entonces vamos a tener un total de 2 fracciones simples, las cuales se asignan de la siguiente manera:

$$\frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+4x+5)} \quad \ldots\ldots\mathbf{I}$$

- ✓ Las letras ***A, B, C,D*** representan las constantes que debemos calcular.

Se realiza la suma de fracciones, aplicando el mínimo común múltiplo *(recuerde repasarlo)* y simplificando la expresión para obtener una ecuación

$$\frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{(\boldsymbol{Ax+B}).(x^2+4x+5) + (\boldsymbol{Cx+D}).(x^2+x+2)}{(x^2+x+2).(x^2+4x+5)}$$

Simplificando,

$$x+1 = (\boldsymbol{Ax+B}).(x^2+4x+5) + (\boldsymbol{Cx+D}).(x^2+x+2)$$

Aplicamos la distributiva

$$x+1 = \boldsymbol{A}.(\boldsymbol{x^3+4x^2+5x}) + \boldsymbol{B}.(x^2+4x+5) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x^3+x^2+2x}) + \boldsymbol{D}(x^2+x+2)$$

Agrupando los términos semejantes

$$x+1 = (A+C).(x^3) + (4A+B+C+D).(x^2) + (5A+4B+2C+D)(x) + (5B+2D)$$

Por igualdad de polinomios se tiene:

$$(A+C) = 0$$
$$(4A+B+C+D) = 0$$
$$5A+4B+2C+D = 1$$
$$5B+2D = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, **se deja al estudiante como práctica la solución del sistema**. Se obtienen los siguientes valores: $A = 0,\ \ B = \frac{1}{3},\ \ C = 0\ \ y\ \ D = \frac{-1}{3}$

Sustituyendo los valores en la ecuación I

$$\frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{\boldsymbol{0x+\frac{1}{3}}}{(x^2+x+2)} + \frac{\boldsymbol{0x+\frac{-1}{3}}}{(x^2+4x+5)}$$

Integrando se tiene,

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^2+x+2)}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^2+4x+5)}dx$$

Para la solución de las integrales obtenidas se debe completar cuadrados y aplicar un cambio de variable, para que las integrales se expresen de forma directa.

Al completar cuadrados, se obtienen:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+\ 2)^2+1}dx$$

Los cambios de variables son: $t = x + \frac{1}{2} \rightarrow dt = dx$ y $u = x + 2 \rightarrow du = dx$ luego integramos.

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left((t)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right)}dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(u)^2+1}du$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}dx = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) - \frac{1}{3}\frac{1}{1}arctg\left(\frac{u}{1}\right) + C$$

Finalmente, devolvemos el cambio:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}dx = \frac{2\sqrt{7}}{21}arctg\left(\frac{2\sqrt{7}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{7}\right) - \frac{1}{3}arctg\,(x+\ 2) + C$$

EJERCICIO 6.3

HALLAR $\int \frac{x^5\ dx}{(x+2)\,(x^2-2x+4)\,(1-x^6)}$

SOLUCIÓN:

El grado del polinomio numerador es menor al grado del polinomio denominador por lo que debemos aplicar la propiedad de las funciones racionales tipo propia para reescribir la función.

Como el denominador ya esta factorizado, verificamos que sea la mínima expresión, que los factores presentes sean solo lineales y/o cuadrático irreducibles.

Factorizando, se tiene:

$$(x+2)(x^2-2x+4)(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2)$$

Observamos que hay presentes tres factores lineales distintos $(x+2)(1-x)(1+x)$ y tres factores cuadráticos irreducibles distintos $(x^2-2x+4)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$ por lo que se van a generar 9 constantes para calcular, generando un sistema de ecuaciones bastante grande y que posiblemente sea complejo de calcular.

Entonces analizando de nuevo la integral, esta se puede reescribir de la siguiente manera:

Resolvemos la multiplicación y acomodamos las potencias

$$\int \frac{x^5 \ dx}{(x+2)(x^2-2x+4)(1-x^6)} = \int \frac{x^3}{(x^3+8)\left(1-(x^3)^2\right)} x^2 dx$$

Planteamos un cambio de variable

$$\boldsymbol{t = x^3 \ \rightarrow \ dt = 3x^2 dx}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{x^3}{(x^3+8)(1-(x^3)^2)} x^2 dx = \frac{1}{3} \int \frac{t}{(t+8)(1-t^2)} dt}$$

La integral que se obtiene es más sencilla, ahora si aplico la técnica de integración por descomposición de fracciones parciales.

Resolvemos

$$\boldsymbol{\int \frac{t}{(t+8)(1-t^2)} dt}$$

Factorizamos el denominador

$$(t+8)(1-t^2) = (t+8)(1-t)(1+t)$$

Asignamos las fracciones simples

$$\frac{t}{(t+8)(1-t)(1+t)} = \frac{A}{(t+8)} + \frac{B}{(1-t)} + \frac{C}{(1+t)} \quad \text{.....I}$$

- ✓ Las letras ***A, B, C*** representan las constantes que debemos calcular.

Se realiza la suma de fracciones, aplicando el mínimo común múltiplo *(recuerde repasarlo)* y simplificando la expresión para obtener una ecuación

$$t = A(1-t)(1+t) + B(t+8)(t+1) + C(t+8)(1-t)$$

El planteamiento del sistema de ecuaciones y la resolución del mismo, **se deja al estudiante como práctica**. Se obtienen los siguientes valores: $A = \frac{8}{63},\ B = \frac{1}{18}\ y\ C = \frac{-1}{14}$

Sustituyendo los valores en la ecuación I

$$\frac{t}{(t+8)(1-t)(1+t)} = \frac{\frac{8}{63}}{(t+8)} + \frac{\frac{1}{18}}{(1-t)} + \frac{\frac{-1}{14}}{(1+t)}$$

Integrando se tiene,

$$\int \frac{t}{(t+8)(1-t)(1+t)}dt = \frac{8}{63}\int \frac{1}{(t+8)}dt - \frac{1}{18}\int \frac{1}{(t-1)}dx - \frac{1}{14}\int \frac{1}{(t+1)}dt$$

Para la solución de las integrales obtenidas se debe aplicar un cambio de variable en todos los denominadores $u = t+8 \rightarrow du = dt,\ z = t-1 \rightarrow dz = dt\ y\ w = t+1 \rightarrow dw = dt$ y luego integramos.

$$\int \frac{t}{(t+8)(1-t)(1+t)}dt = \frac{8}{63}\int \frac{1}{u}du - \frac{1}{18}\int \frac{1}{z}dz - \frac{1}{14}\int \frac{1}{w}dw$$

Integramos,

$$\int \frac{t}{(t+8)(1-t)(1+t)}dt = \frac{8}{63}Ln\,|u| - \frac{1}{18}Ln\,|z| - \frac{1}{14}\,Ln\,|w| + C$$

Devolvemos los cambios de variables

$$\int \frac{t}{(t+8)(1-t)(1+t)}dt = \frac{8}{63}Ln\,|t+8| - \frac{1}{18}Ln\,|t-1| - \frac{1}{14}\,Ln\,|t+1| + C$$

Finalmente, se obtiene:

$$\int \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{(x^3+8)(1-(x^3)^2)}}\boldsymbol{x^2dx} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\left[\frac{8}{63}Ln\,|x^3+8| - \frac{1}{18}Ln\,|x^3-1| - \frac{1}{14}\,Ln\,|x^3+1| + C\right]$$

EJERCICIO 6.4

HALLAR

$$\int \frac{x^4}{(x^4+2x^2+1)}\,dx$$

Este ejercicio se encuentra resuelto en el libro 801 ejercicios resueltos de integrales indefinidas, el cual tienen disponible en el aula virtual. Revisar la solución del ejercicio allí. Es el ejercicio 7.8 de la pagina 206.

EJERCICIO 6.5

HALLAR

$$\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{(x^3-2x^2+3x)}\,dx$$

Este ejercicio se encuentra resuelto en el libro 801 ejercicios resueltos de integrales indefinidas, el cual tienen disponible en el aula virtual. Revisar la solución del ejercicio allí. Es el ejercicio 7.10 de la pagina 210.

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

En los siguientes enlaces encontraras otros ejemplos por medio de videos que te pueden ayudar a entender mejor el tema.

REVISAR LOS SIGUIENTES ENLACE

https://www.youtube.com/watch?v=6pFmUh41jsQ&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&start_radio=1&rv=6pFmUh41jsQ&t=0

https://www.youtube.com/watch?v=uwDKdolLkns

https://www.youtube.com/watch?v=jTxpr8RFQKo

https://www.youtube.com/watch?v=nnDxN90bVUM

ACTIVIDAD

Realizar del Libro 801 ejercicios resueltos los ejercicios propuestos del capitulo 7/ Del 11 al 52.pag 212.