Intervalo de confianza con σ conocida

Se registran las siguientes mediciones del tiempo de secado, en horas, de cierta materia prima para elaborar cierto medicamento:

2.8 3.3 5.6 3.7 2.8

4.4 4.0 5.2 3.0 4.8

3.4 2.5 4.8 2.9 3.6

Suponga que las mediciones representan una muestra aleatoria de una población normal y con base en esto calcule el intervalo de confianza del 95% para el tiempo de secado. Dado que este proceso se hace muy a menudo, se sabe que la desviación estándar del tiempo de secado es de 1 hora. Nivel de confianza es 99%.

Solución

Datos.

Se requiere un intervalo de confianza para la media de una población con sigma conocida.

n = 15 tiempos de secado

$1-\alpha = 0.99; \alpha = 0.01; \alpha/2 = \frac{0.01}{2} = 0.005; -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -2.575; Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3.787 - 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} \leq \mu \leq 3.787 + 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$3.12 \leq \mu \leq 4.45$$

Conclusión: Con un 99% de confianza podemos afirmar que el tiempo promedio de sacado de la materia prima se encuentra entre 3.12 y 4.45 horas.

Media =	3.78666667	Li	Ls
Sigma =	1	3.12	4.45
n =	15		
1- alfa =	0.99		
alfa =	0.01		
alfa/2 =	0.005		
Zalfa/2 =	2.575		

Tiempos de Secado				
2.8	3.3	5.6	3.7	2.8
4.4	4	5.2	3	4.8
3.4	2.5	4.8	2.9	3.6

Media Muestral = 3.787

0.0051 0.0049

-2.57 -2.58

-2.575

A una muestra aleatoria de 10 barras energéticas de chocolate de cierta marca se les midió las calorías para comprobar si el valor nominal que aparece en el envase 235 calorías es real. Construya un intervalo de confianza del 99% para el **contenido medio** verdadero de calorías de esta marca de barras energéticas de chocolate. Suponga que la distribución del contenido calórico es aproximadamente normal. ¿El valor que aparece en el envase va acorde a los resultados?

219.38	249.65	218.21	215.53	228.22
219.77	253.60	217.56	227.10	231.23

Solución

n = 10 barras energéticas

$1 - \alpha = 0.99$

$\alpha = 0.01$

$\alpha/2 = 0.005$

Los grados de libertad de la distribución t-student es $n - 1 = 10 - 1 = 9$ grados de libertad.

Se utilizará un intervalo de confianza del 99% para el caso en que no se conoce sigma. La desviación estándar poblacional.

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{n}}$$

$$228.03 - 3.25 \cdot \frac{13.49}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 228.03 + 3.25 \cdot \frac{13.49}{\sqrt{10}}$$

$$214.16 \leq \mu \leq 241.89$$

Conclusión. Con un 99% de confianza podemos afirmar que la cantidad promedio de calorías de las energéticas de chocolate se entra entre 214.16 y 241.89 calorías. Dado que el valor 235 calorías que se muestra en el envase se halla dentro del intervalo, se concluye que es posible que la información mostrada por el fabricante sea cierta.

Media =	228.03	Li	Ls			Calorías			
S =	13.49	214.16	241.89	219.38	249.65	218.21	215.53	228.22	
n =	10			219.77	253.60	217.56	227.10	231.23	
1- alfa =	0.99								
alfa =	0.01								
alfa/2 =	0.005					Media muestral =	228.03		
talfa/2 =	3.25					Desviación estándar muestral S =	13.489681		
g.l. =	9								

Obtención de un Intervalo de Confianza para una Proporción

Obtenga un intervalosde confianza del 95% para la proporción de medicamentos defectuosos que resultan de un proceso de fabricación cuando se encuentra que una muestra de tamaño 60 produce los siguientes resultados

Condición del medicamento									
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	D	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	D	B	B	B	D	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	D	B	B	B	D	B	B

B: Bueno

D. Defectuoso

X= número de medicamentos defectuosos en la muestra

n = tamaño de la muestra

$$\hat{p} = \frac{cantidad\ de\ exitos}{n} = \frac{5}{60} = 0.083$$

$$\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq P \leq \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$0.083 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.083 * 0.917}{60}} \leq P \leq 0.083 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.083 * 0.917}{60}}$$

$$0.0134 \leq P \leq 0.1533$$

Conclusión. Con un nivel de confianza del 95% podemos afirmar que la proporción de medicamentos defectuosos que resultan del proceso de fabricación se encuentra entre 0.0134 y 0.1533; en otras palabras, la proporción de medicamentos defectuosos que resultan del proceso de fabricación se encuentra entre el 1.34% y 15.33%.

Condición del medicamento									
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	D	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	D	B	B	B	D	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	D	B	B	B	D	B	B

B: Bueno

D: Defectuoso

Defectuosos	5	Li	Ls
Buenos	55	0.0134	0.1533
n =	60		
p gorro =	0.083		
q gorro =	0.917		
1 - alfa =	0.95		
alfa =	0.05		
alfa/2 =	0.025		

-Z alfa/2 = -1.96
Z alfa/2 = 1.96

Intervalos de confianza para p de una muestra grande

Si $\hat{p}$ es la proporción de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n, y $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, un intervalo de confianza aproximado del $100(1 - \alpha)\%$ para el parámetro binomial p se obtiene por medio de (método 1)

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

Intervalo de confianza para la diferencia de medias

Caso 1: Varianzas de las poblaciones conocidas

Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ cuando se conocen σ_1^2 y σ_2^2

Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son las medias de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2, de poblaciones que tienen varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ es dado por

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z que deja una área de $\alpha/2$ a la derecha.

Se comparan las resistencias de dos clases de hilo quirúrgico. Se prueban 50 piezas de cada clase de hilo en condiciones similares. La marca A tiene una resistencia a la tensión promedio de 78.3 kilogramos, en tanto que la marca B tiene una resistencia a la tensión promedio de 87.2 kilogramos. Si las desviaciones estándar poblacionales de las marcas A y B se sabe que son 5.6 kilogramos y 6.3 kilogramos respectivamente, construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de las medias de la población.

Solución

$n_A = n_B = 50$ piezas

$\bar{x}_A = 78.3\ kg, \sigma_A = 5.6\ Kg$

$\bar{x}_B = 87.2\ kg, \sigma_B = 6.3\ Kg$

$1 - \alpha = 0.95, \text{entonces}, Z_{\alpha/2} = 1.96$

$$(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

$$(78.3 - 87.2) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(5.6)^2}{50} + \frac{(6.3)^2}{50}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (78.3 - 87.2) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(5.6)^2}{50} + \frac{(6.3)^2}{50}}$$

$$(-8.9) - 1.96 \cdot \sqrt{0.6272 + 0.7938} \leq \mu_A - \mu_B \leq (-8.9) + 1.96 \cdot \sqrt{0.6272 + 0.7938}$$

$$-11.236 \leq \mu_A - \mu_B \leq -6.563$$

Conclusión. Podemos afirmar con un 95% de confianza que la resistencia a la tensión promedio de la marca A menos la resistencia a la tensión promedio de la marca B se encuentra en el intervalo de confianza (-11.236; -6.563).

Por lo tanto, la resistencia a la tensión promedio μ_B es mayor a la resistencia a la tención promedio μ_A de la marca A.

Xbarra A =	78.3	xbarra A - xbarra B =	-8.9	Li	Ls
Xbarra B =	87.2	Sigma ^2A/nA =	0.6272	-11.2364318	-6.56356819
Sigma^2 A =	31.36	Sigma ^2B/nB =	0.7938		
Sigma^2 B =	39.69				
nA =	50				
nB =	50				
Zalfa/2 =	1.96				

En general,

1) si ambos límites del I.C. son negativos significa que promedio μ_2 es mayor; esto es, $\mu_1 < \mu_2$

2) si ambos límites del I.C. son positivos significa que promedio μ_1 es mayor; esto es, $\mu_1 > \mu_2$

3) si el límite inferior es negativo y el límite superior positivo significa que ambos promedios son iguales; esto es, $\mu_1 = \mu_2$

intervalo de confianza para la diferencia de medias cuando las varianzas poblacionales son desconocidas pero iguales

Se comparan las resistencias de dos clases de hilo quirúrgico. Se prueban piezas de hilo similares, pero de diferentes marcas. Una muestra de 70 piezas de la marca A arrojo que tiene una resistencia a la tensión promedio de 78.3 kilogramos, con una desviación estándar de 5.6 kilogramos; en tanto 52 piezas de la marca B tiene una resistencia a la tensión promedio de 87.2 kilogramos con una desviación estándar de 6.3 kilogramos. Construya un intervalo de confianza del 99% para la diferencia de las medias de la población.

Solución

n_A = 70 piezas; n_B = 52 piezas

$\bar{x}_A = 78.3\ kg, \sigma_A = 5.6\ Kg; \bar{x}_B = 87.2\ kg, \sigma_B = 6.3\ Kg$

$1 - \alpha = 0.99 \quad ; \alpha = 0.01; \frac{\alpha}{2} = 0.005$

En el caso del intervalo de confianza para la diferencia de medias cuando las varianzas poblacionales son desconocidas pero iguales está dado por

Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ cuando se desconocen ambas varianzas

Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son las medias de muestras aleatorias independientes con tamaños n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de poblaciones más o menos normales con varianzas iguales pero desconocidas, un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ es dado por

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},$$

donde s_p es la estimación agrupada de la desviación estándar de la población y $t_{\alpha/2}$ es el valor t con $v = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad, que deja una área de $\alpha/2$ a la derecha.

Donde

Estimado agrupado de la varianza

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Observese que en este caso los grados de libertad de la distribución t están dados por

$$v = n_A + n_B - 2 = 70 + 52 - 2 = 120$$

Y al buscar en la tabla t para0.005 y 120 grados de libertad obtenemos que $t_{\alpha/2} = 2.617$. Entonces, lo primero es obtener S_p^2.

$$S_p^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(70 - 1) \cdot 5.6^2 + (52 - 1) \cdot 6.3^2}{70 + 52 - 2} = \frac{4188.03}{120} = 34.9$$

Entonces

$$S_p = 5.9076$$

De esta manera el intervalo de confianza es:

$$(78.3 - 87.2) - 2.617 * 5.9076\sqrt{\frac{1}{70} + \frac{1}{52}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (78.3 - 87.2) + 2.617 * 5.9076\sqrt{\frac{1}{70} + \frac{1}{52}}$$

$$-11.73 \leq \mu_A - \mu_B \leq -6.06$$

Conclusión. Podemos afirmar con un 99% de confianza que la resistencia a la tensión promedio de la marca A menos la resistencia a la tensión promedio de la marca B se encuentra en el intervalo de confianza (-11.73; -6.06).

Por lo tanto, la resistencia a la tensión promedio μ_B es mayor a la resistencia a la tención promedio μ_A de la marca A.