Universidad Nacional Experimental del Táchira
Departamento de Matemática y Física
Asignatura Matemática II (0826201)

## Volúmenes de solidos de revolución

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Recibe el nombre de sólido de revolución, el sólido generado al girar alrededor del eje $x$ , la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje $x$ y las gráficas de $x = a$ y $x = b$. El eje $x$ es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje $x$ es un círculo.

Los siguientes gráficos ilustran como se forma el sólido de revolución, considerando al eje $x$ como eje de giro.

*Gráfico de $y = f(x)$*

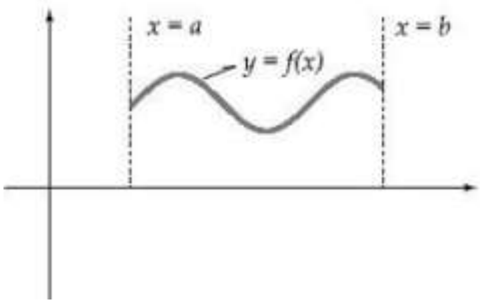
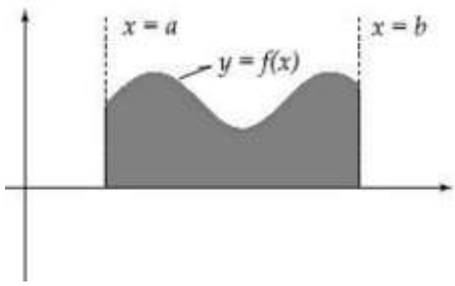
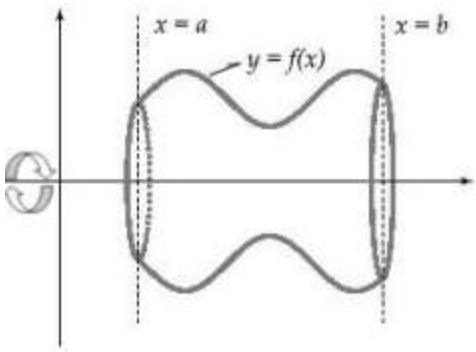


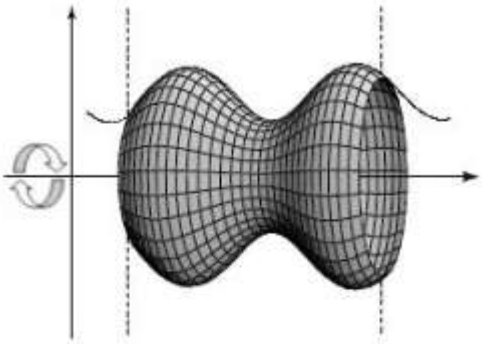

*Gráfico de región R*




*Esbozo del sólido de revolución*



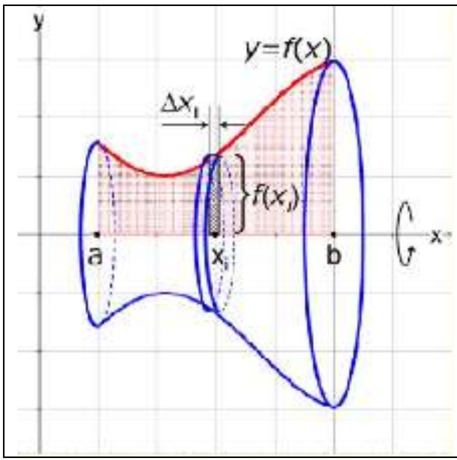

*Sólido de revolución*

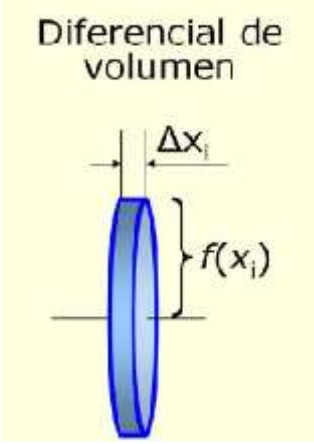


Se presentan tres métodos para calcular el volumen de un sólido de revolución el de Discos, Arandelas y el de capas cilíndricas.

## 1. Método del disco

Es para figuras sólidas, por lo tanto, si dividimos el sólido en rectángulos cuyo eje de revolución sea el eje $x$ , la revolución de dicho rectángulo da lugar a un disco. El diferencial es perpendicular al eje de rotación.




Se puede observar que al tomar un elemento diferencial de volumen se tiene un disco cuyo volumen es igual al producto del área de un círculo de radio $f(x)$ y un espesor (una variación en $x$) $\Delta x$

$$v = Area\ de\ la\ base\ .\ espesor\ del\ disco$$

El espesor no sólo del disco sino también para los otros métodos representa el diferencial.

El área corresponde al área de un círculo $A = \ \pi . r^2$

El radio es la distancia que hay entre el eje de rotación y la figura, es decir, que representa la función.

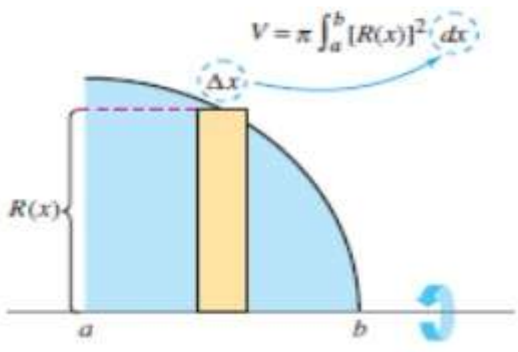
Por lo tanto, las fórmulas de volumen en término de integrales son:

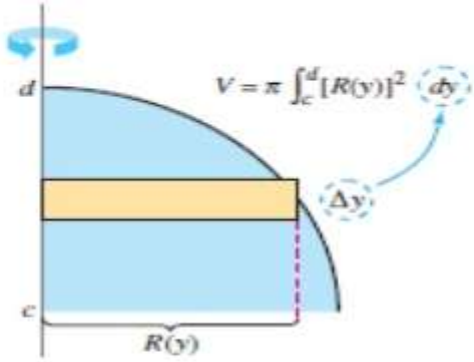
**Eje horizontal de revolución**

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

**Eje vertical de revolución**

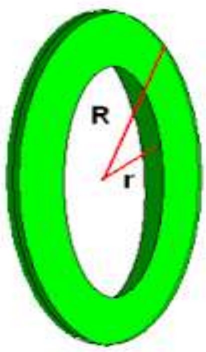
$$V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 dy$$




## 2.- Método de la arandela

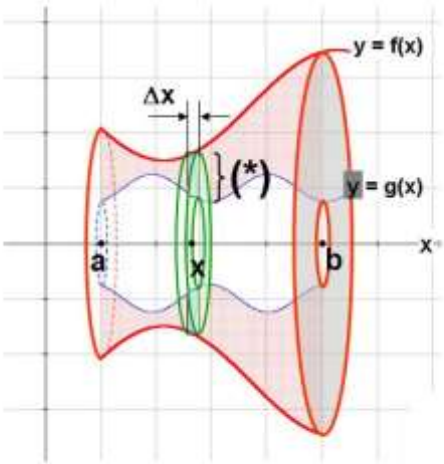
Puede ocurrir que al rebanar el sólido de revolución se obtengan discos con agujeros en medio, llamados arandelas.
Hallando las dimensiones de la arandela radio exterior $\boldsymbol{R}$ y radio interior $\boldsymbol{r}$



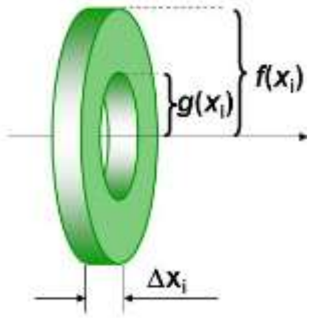

$$Area\ de\ la\ arandela$$
$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$volumen\ de\ la\ arandela$$
$$V = A_{arand.}.h$$
$$V = (\pi R^2 - \pi r^2).h$$
$$V = \pi(R^2 - r^2).h$$

Supongamos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ donde $f(x) \geq g(x)$ continuas en el intervalo $[a, b\,]$, y que generamos el sólido al girar la región entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en torno al eje $x$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ . Entonces la sección transversal en $x$ es un anillo o arandela. En este caso el diferencial es perpendicular al eje de rotación.




Diferencial del volumen




$f(x) \rightarrow radio\ exterior$

$g(x) \rightarrow radio\ interior$

$\Delta x \rightarrow espesor$

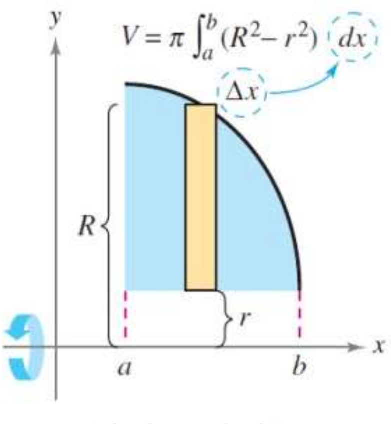
Por lo tanto, las fórmulas a utilizar para calcular el volumen utilizando el método de arandelas son:

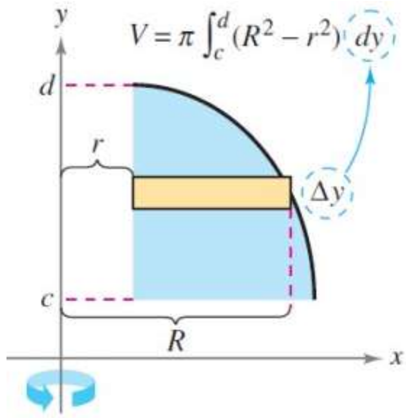
**Eje horizontal de revolución**

$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2].dx$$

**Eje vertical de revolución**

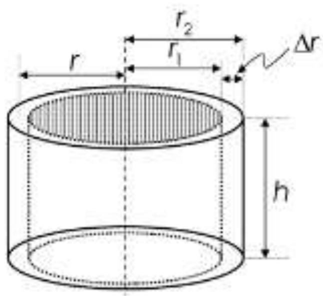
$$V = \pi \int_c^d [f(y)^2 - g(y)^2]dy$$




## Método de capas cilíndricas

Una capa cilíndrica es un sólido acotado por dos cilindros circulares rectos concéntricos.



Volumen de una capa cilíndrica de radio exterior $r_2$ , radio interior $r_1$ y altura $h$

$$V = (volumen\ del\ cilindro\ exterior) - (volumen\ del\ cilindro\ interior)$$

Como la fórmula de volumen viene dada por:

$$V = (\acute{A}rea\ de\ la\ base).(altura)$$

Entonces

$$V = (\pi {r_2}^2 - \pi {r_1}^2).h$$

Factorizando por factor común y diferencia de cuadrados

$$V = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1).h$$

Multiplicando y dividiendo por 2

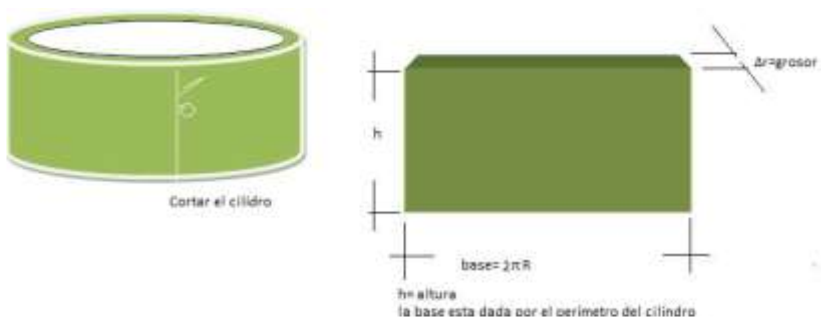
$$V = 2\pi\left(\frac{r_2+r_1}{2}\right).h.(r_2 - r_1)$$

La expresión $\left(\frac{r_2+r_1}{2}\right)$, representa el radio medio o promedio del cilindro y lo denotaremos por $r$ , es decir que:

$$V = 2\pi.(radio\ promedio).(altura).(grosor)$$

$$V = 2\pi.r.h.\Delta r$$

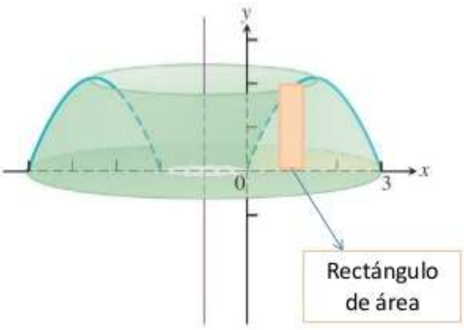
Una forma para recordar esta fórmula es tomar la capa como si fuera muy delgada y flexible, podríamos cortarla por un lado, abrirla para formar una hoja rectangular y después calcular su volumen, suponiendo que esta hoja forma una delgada capa rectangular de largo $2\pi r$ (viene siendo la longitud de la base del cilindro), altura $h$ y grosor $\Delta x$.



Este método establece que el diferencial es paralelo al eje de rotación, lo que indica que este no lo acota, sino la o las curvas. Es factible su uso en figuras huecas o sólidas.

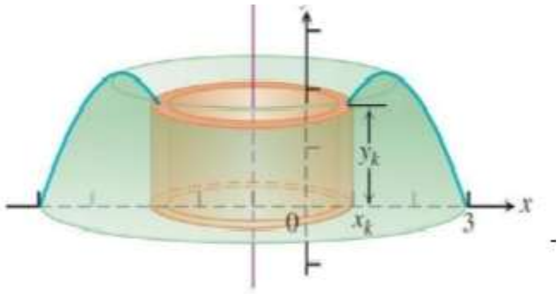
El método implica considerar los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución. Después cuando un elemento de área se gira alrededor del eje de revolución se obtiene una capa cilíndrica.

Sólido de revolución

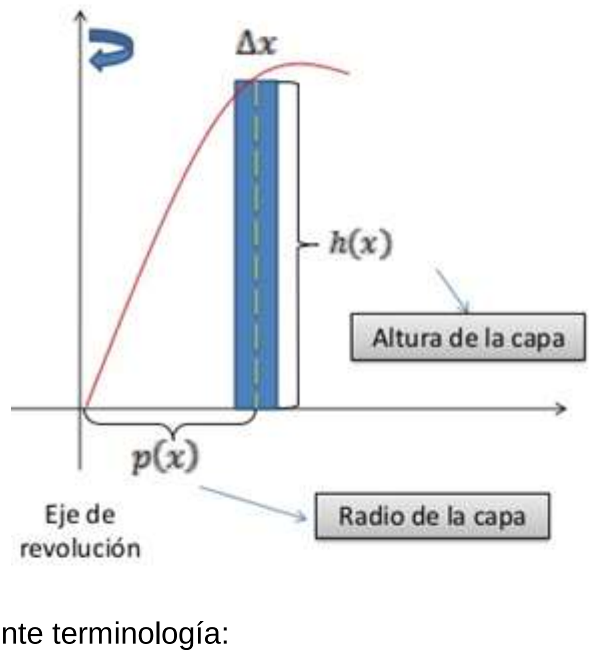



Eje de rotación vertical $x = -1$

Capa cilíndrica formada por el giro del rectángulo




Si visualizamos en el plano, tenemos:




Utilizamos la siguiente terminología:

$\Delta r = ancho\ del\ rectángulo$. El diferencial (rebanada) en la integral $dx\ o\ dy$

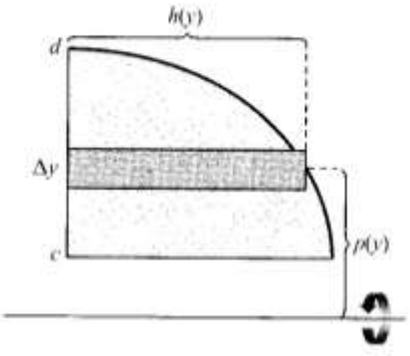
$h = altura\ del\ rectángulo$. Las funciones que estén involucradas en el sólido.

$p = distancia\ del\ centro\ del\ rectángulo\ al\ eje\ de\ giro$. Distancia del eje de giro al diferencial (rebanada).

Se tiene entonces las siguientes fórmulas:

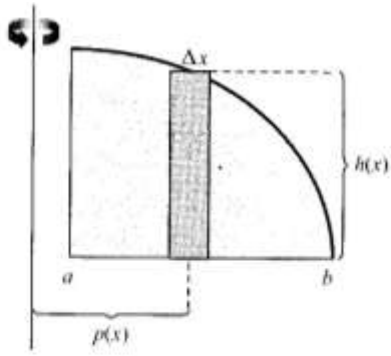
**Eje de giro horizontal**

$$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)dy$$



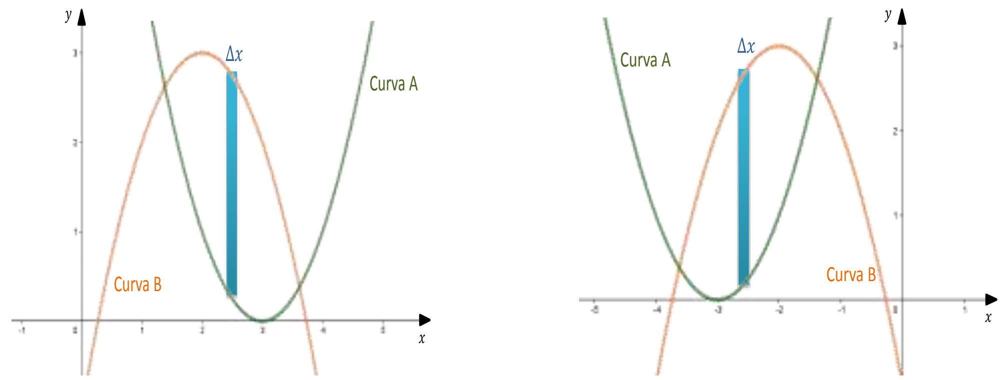

**Eje de giro vertical**

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)dx$$



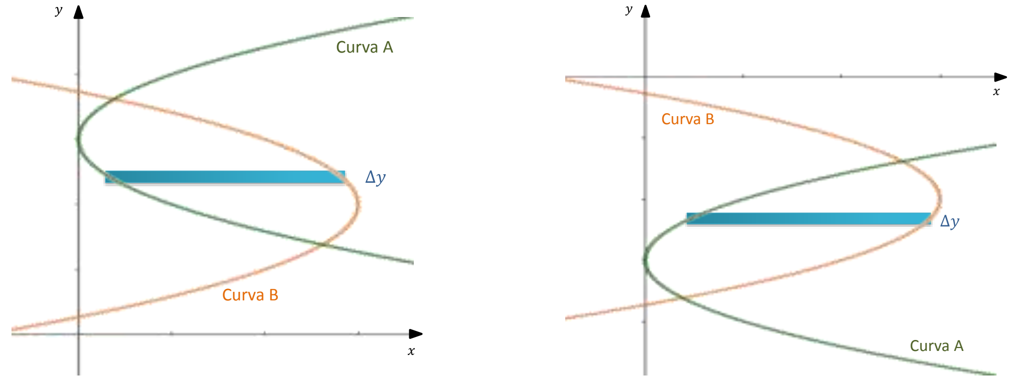

Se define el $\Delta r = Ancho\ del\ Rectángulo$:

## Eje de Giro Vertical




Origina Rebanada Vertical igual a: $\Delta x$

## Eje de Giro Horizontal

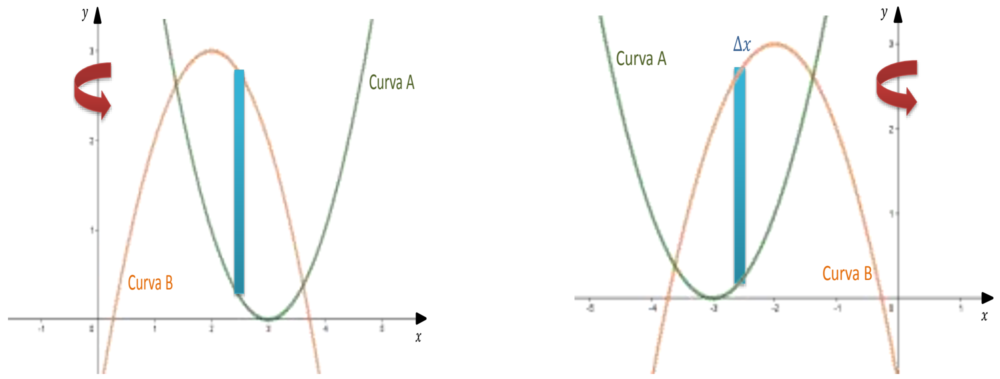



Origina Rebanada Horizontal igual a: $\Delta y$

Se define la $p = Distancia\ del\ Centro\ del\ Rectángulo\ al\ Eje\ de\ Giro$:

## Eje de Giro Vertical

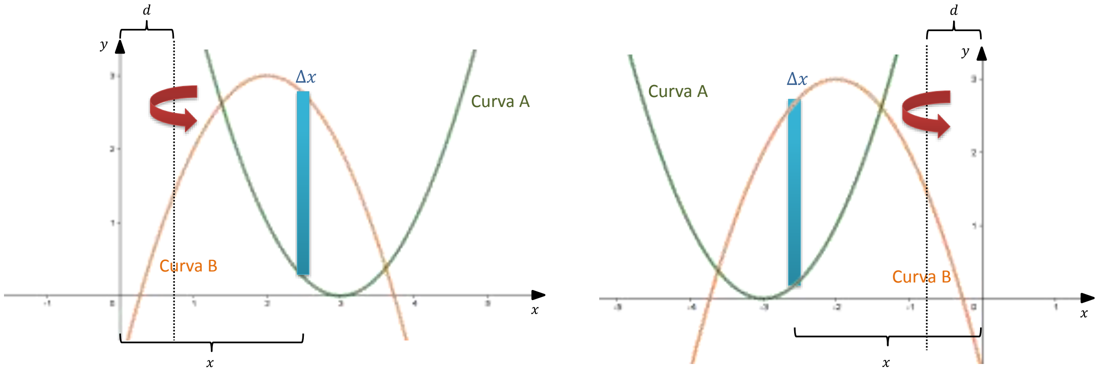
Eje de Giro es el Eje $y$




$$p = x$$

## Eje de Giro Vertical

Eje de Giro entre la Región y el Eje $y$

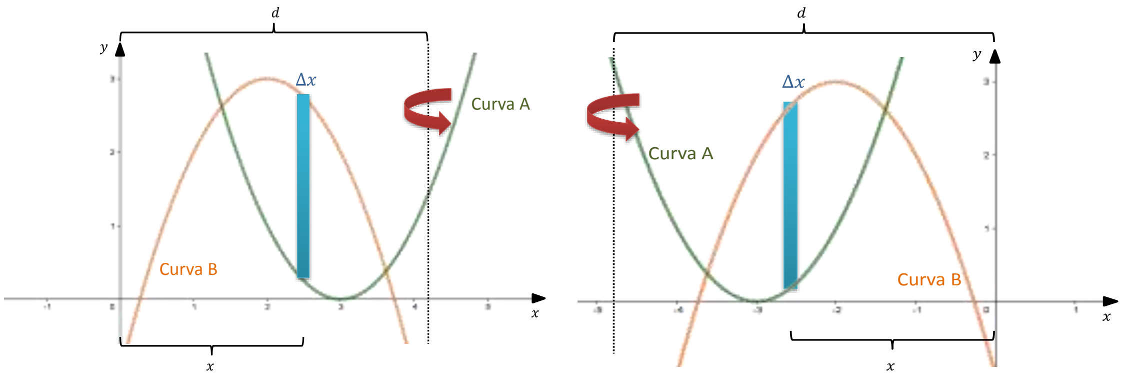



$$p = x - d$$

Donde: $d$ es la distancia (valor absoluto) entre el Eje de Giro y el Eje $y$.

## Eje de Giro Vertical

Eje de Giro después de la Región

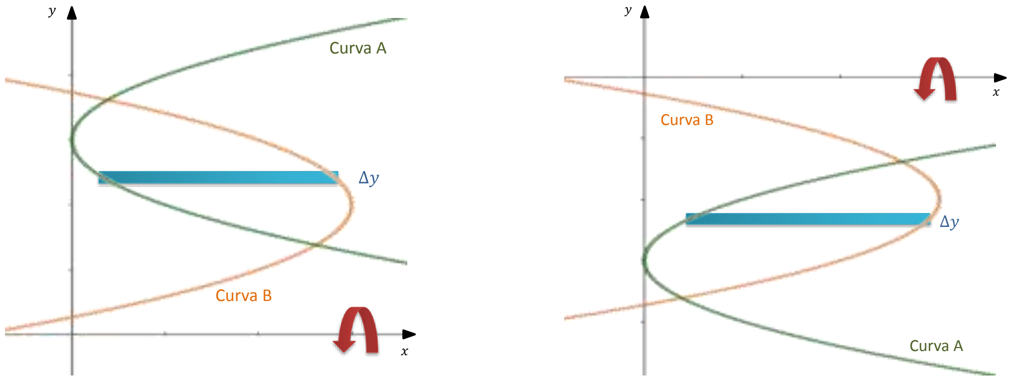



$$p = d - x$$

Donde: d es la distancia (valor absoluto) entre el Eje de Giro y el Eje $y$.

Eje de Giro Horizontal

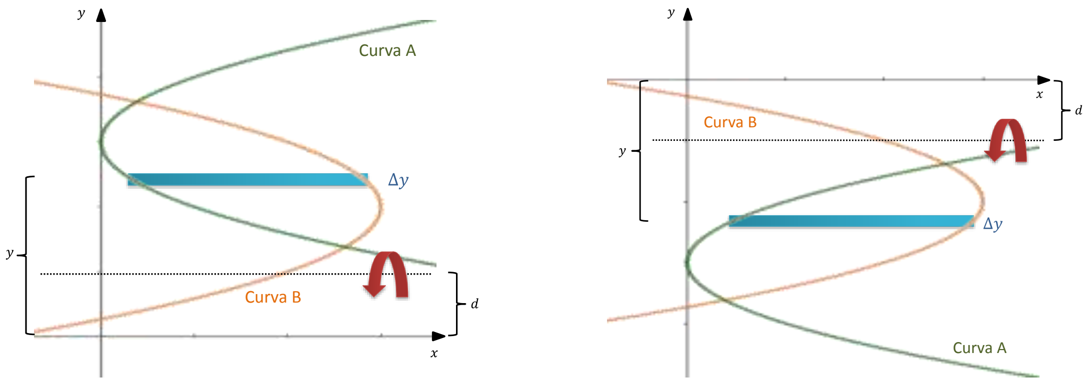
Eje de Giro es el Eje $x$




$$p = y$$

Eje de Giro Horizontal

Eje de Giro entre la Región y el Eje $x$

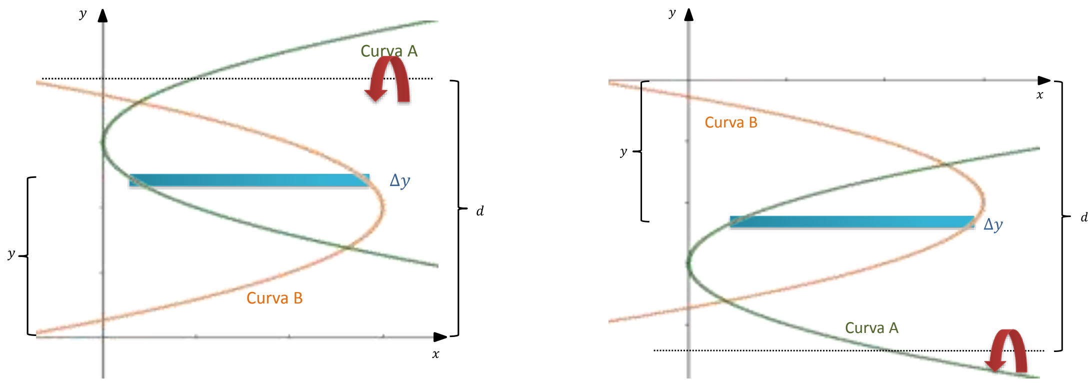



$$p = y - d$$

Donde: d es la distancia (valor absoluto) entre el Eje de Giro y el Eje $x$.

Eje de Giro Horizontal

Eje de Giro después de la Región




$$p = d - y$$

Donde: $d$ es la distancia (valor absoluto) entre el Eje de Giro y el Eje $x$.

## Cuadro Comparativo de los Métodos

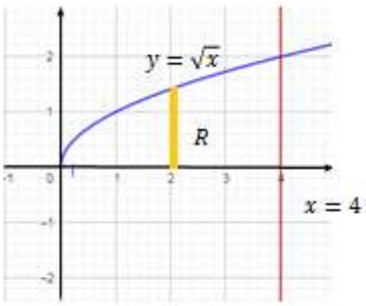
| ***Método*** / *Características* | ***Disco*** | ***Arandela*** | ***Capa Cilíndrica*** |
|---|---|---|---|
| ***Figura*** | Sólida | Hueca | Sólida o Hueca |
| ***Diferencial con respecto al eje de rotación*** | Perpendicular | Perpendicular | Paralelo |
| ***El diferencial está acotado por*** | Una curva y el eje de rotación | Por dos curvas | Por dos curvas incluso el eje de coordenadas |

## EJEMPLO A

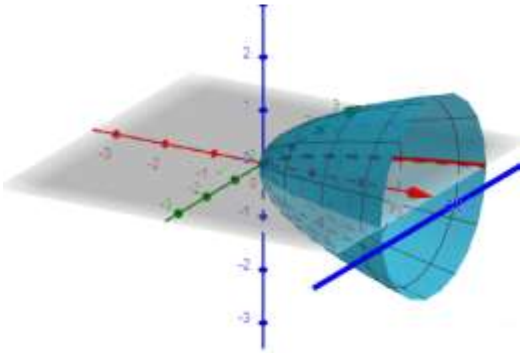
Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje $x$ la región plana $R$, acotada por $y = \sqrt{x}$, el eje $x$ y la recta $x = 4$

**Solución**:

1º Representamos gráficamente la curva e identificamos la región




Identificando la región R



Región R girando en torno al eje x , generando el sólido de revolución

2º tomamos un corte de la región (franja amarilla de la gráfica) y observamos que está perpendicular al eje de revolución y toda la región $R$ se encuentra sobre el eje de revolución, por tanto, el método a utilizar es el de discos

3º La región viene dada por la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 4]$

4º Utilizamos la fórmula del método de Discos

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

5º Sustituimos en la integral la función

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x dx$$

Resolvemos la integral indefinida o Primitiva

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior.

$$= \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0}{2}\right) = 8\pi\, u^3$$

$u^3 \;\; \rightarrow unidades\ cúbicas$

**EJEMPLO B**

Calcular el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje $x$ la región limitada por la gráficas $y = 6x - x^2$ y $y = x$.

**Solución**:

1º Debemos encontrar los puntos de intersección de la recta y la parábola.

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x \end{cases}$$

Igualamos $\quad x = 6x - x^2$

Agrupamos términos $\quad x^2 - 5x = 0$

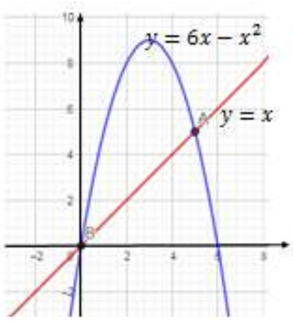
factorizamos $\quad x.(x - 5) = 0$

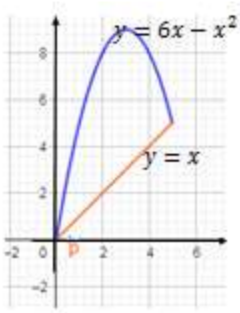
obtenemos los valores $\quad x = 0$ y $x = 5$

sustituimos en una ecuación tenemos los puntos de intersección $(x\,,y)$

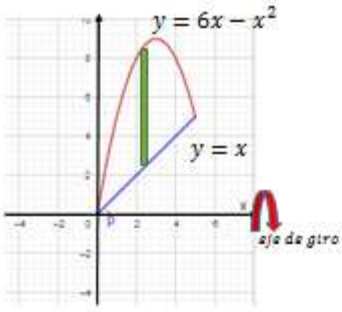
$(0\,,0)\ y\ (5\,,5)$

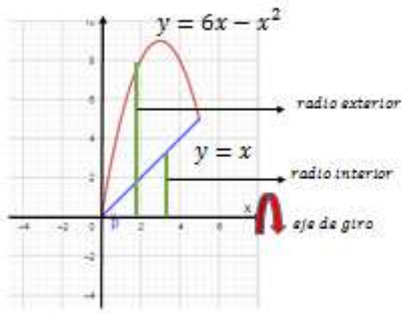
2º Representamos gráficamente las curvas, identificamos la región y verificamos si la región es mejor trabajarla por franjas verticales u horizontales.



3º tomamos entonces una rebanada vertical, ya que, abarca las dos curvas en el intervalo de $[0, 5]$ y verificamos que el método a utilizar es el de arandelas, porque ésta presenta hueco al hacerla girar sobre el eje $x$ y la rebanada es perpendicular al eje de giro. Identificamos los radios exterior e interior de la arandela.




4º Utilizamos  la fórmula de arandelas

$$V = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2].dx$$

$$radio\ exterior\ f(x) \to y = 6x - x^2$$

$$radio\ interior\ g(x) \to y = x$$

5º Sustituimos en la integral las funciones y resolvemos la integral definida

$$V = \pi \int_0^5 [(6x - x^2)^2 - (x)^2].dx$$

Resolvemos la parte algebraica

$$V = \pi \int_0^5 [(36x^2 - 12x^3 + x^4) - (x^2)]\,.dx$$

Agrupamos términos y ordenamos

$$V = \pi \int_0^5 (x^4 - 12x^3 + 35x^2).dx$$

Hallamos la integral indefinida o Primitiva

$$V = \pi \left( \frac{x^5}{5} - 12.\frac{x^4}{4} + 35.\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^5$$

$$= \pi \left( \frac{x^5}{5} - 3x^4 + \frac{35x^3}{3} \right)\Bigg|_0^5$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior.

$$V = \pi\left[\left(\frac{(5)^5}{5} - 3(5)^4 + \frac{35(5)^3}{3}\right) - \left(\frac{(0)^5}{5} - 3(0)^4 + \frac{35(0)^3}{3}\right)\right]$$

Y resolvemos las operaciones algebraicas

$$V = \pi\left[\left(625 - 1875 + \frac{4375}{3}\right) - 0\right]$$

6º Obtenemos el volumen

$$V = \frac{625}{3}\pi\, u^3$$

## EJEMPLO C

Hallar el volumen del sólido de revolución generado por la región encerrada por las curvas $x = y^2$ , $y^2 = 2(x-3)$ alrededor del eje $y$

**Solución**:

1º Debemos encontrar los puntos de intersección de las dos parábolas.

Resolvemos el sistema

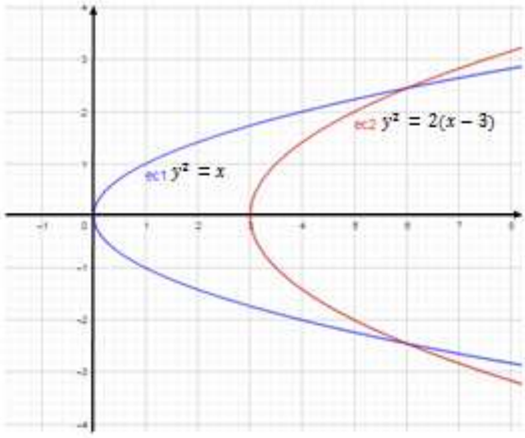
$$\begin{cases} y^2 = x \\ y^2 = 2(x-3) \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| Igualamos las $y^2$ | $x = 2(x-3)$ |
| Resolvemos la ecuación | $x = 2x - 6$ |
| | $0 = 2x - x - 6$ |
| | $0 = x - 6$ |
| Obtenemos el valor | $x = 6$ |

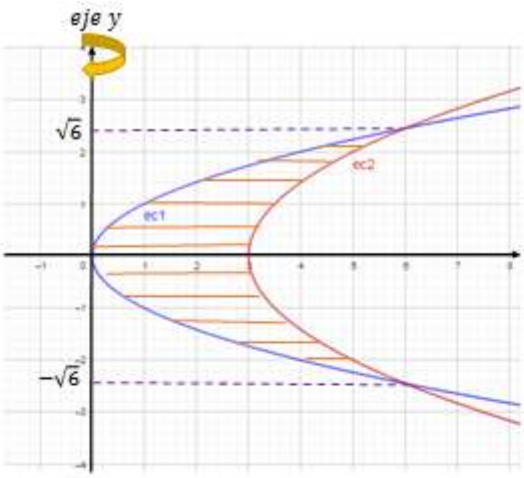
Sustituimos en una ecuación tenemos los puntos de intersección $(x\,,y)$

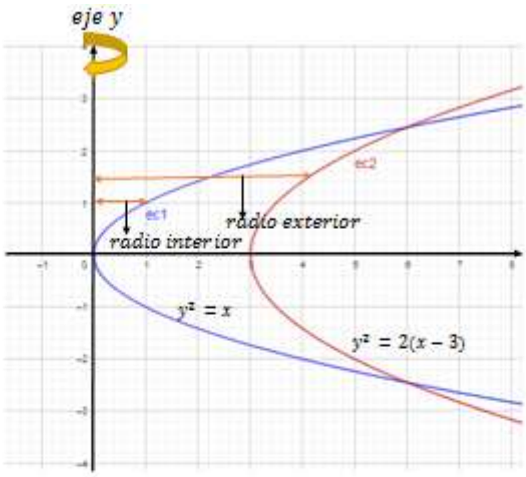
$(6,\sqrt{6})$ y $(6,-\sqrt{6})$

2º Representamos gráficamente las curvas, identificamos la región y verificamos si la región es mejor trabajarla por franjas verticales u horizontales.




3º tomamos entonces una rebanada horizontal, ya que, abarca las dos curvas en el intervalo de $\left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$ y verificamos que el método a utilizar es el de arandelas, porque ésta presenta hueco al hacerla girar sobre el eje $y$ y la rebanada es perpendicular al eje de giro. Identificamos los radios exterior e interior de la arandela.




4º Utilizamos la fórmula de arandelas

$$V = \pi \int_c^d [f(y)^2 - g(y)^2] dy$$

Debemos despejar la variable $x$ de las ecuaciones para plantear las funciones $f(y)$ y $g(y)$

$$radio\ exterior\ f(y) \rightarrow x = \frac{y^2}{2} + 3$$

$$radio\ interior\ g(x) \rightarrow x = y^2$$

5º Sustituimos en la integral las funciones y resolvemos la integral definida

$$V = \pi \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[ \left( \frac{y^2}{2} + 3 \right)^2 - (y^2)^2 \right] . dy$$

Como la gráfica presenta simetría se puede calcular el volumen en el intervalo de $[0, \sqrt{6}]$ y multiplicarlo por 2 (por ser el doble)

$$V = 2\pi \int_{0}^{\sqrt{6}} \left[ \left( \frac{y^2}{2} + 3 \right)^2 - (y^2)^2 \right] . dy$$

Resolvemos la parte algebraica

$$V = 2\pi \int_{0}^{\sqrt{6}} \left[ \left( \frac{y^4}{4} + 3y^2 + 9 \right) - (y^4) \right] . dy$$

Agrupamos términos y ordenamos

$$V = 2\pi \int_{0}^{\sqrt{6}} \left( 9 + 3y^2 - \frac{3y^4}{4} \right) . dy$$

Hallamos la integral indefinida o Primitiva

$$V = 2\pi \left[ \left( 9y + \frac{3y^3}{3} - \frac{3}{4}\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} \right] = 2\pi \left[ \left( 9y + y^3 - \frac{3x^5}{20} \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} \right]$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior.

$$V = 2\pi \left[ \left( 9(\sqrt{6}) + (\sqrt{6})^3 - \frac{3(\sqrt{6})^5}{20} \right) - \left( 9(0) + (0)^3 - \frac{3(0)^5}{20} \right) \right]$$

Y resolvemos las operaciones algebraicas

$$V = 2\pi \left( 9\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - \frac{3(36\sqrt{6})}{20} \right)$$

$$V = 2\pi \left( \frac{48\sqrt{6}}{5} \right) = \frac{96\sqrt{6}}{5} \pi \ u^3 \rightarrow (unidades\ cúbicas)$$

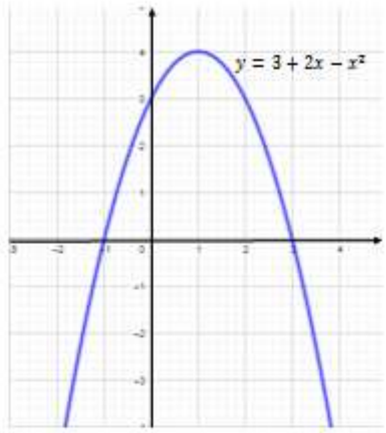
## EJEMPLO D

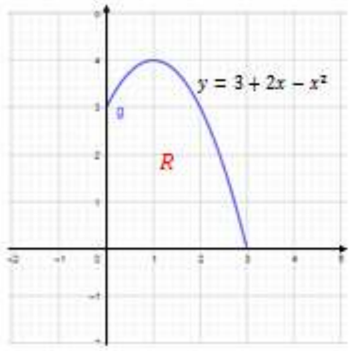
Calcular el volumen del sólido que resulta cuando la región plana acotada por la curva $y = 3 + 2x - x^2$ en el $I\ cuadrante$, se hace girar en torno a:

a) El eje $x$ b) El eje $y$ c) La recta $y = -1$ d) la recta $x = 4$

**Solución general**:

1º Representamos gráficamente la curva e identificamos la región en el $I\ cuadrante$



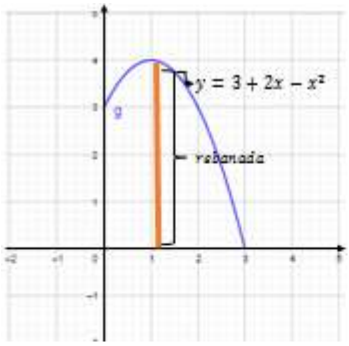




2º La región está determinada por la curva $y = 3 + 2x - x^2$ en el intervalo $[0, 3]$

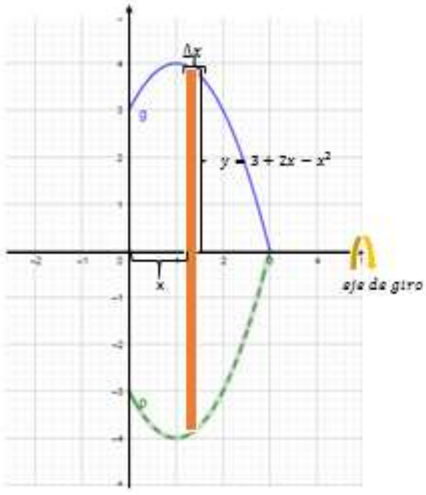
3º Al visualizar la región nos planteamos por cual caso trabajaríamos más rápido el área (franjas verticales o franjas horizontales), ya que de esta manera aplicaremos el método adecuado para calcular su volumen.

3º Si hacemos un barrido con franjas verticales en el intervalo de $[0, 3]$ abarcamos toda la Región en cambio por franjas horizontales obtenemos dos regiones que van de $0 \leq y \leq 3$ y de $3 \leq y \leq 4$,

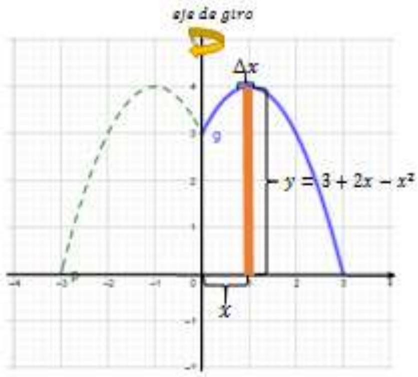
4º Trabajando por franjas verticales observamos que queda perpendicular el eje $\boldsymbol{x}$, por lo tanto para la soluciones tenemos :



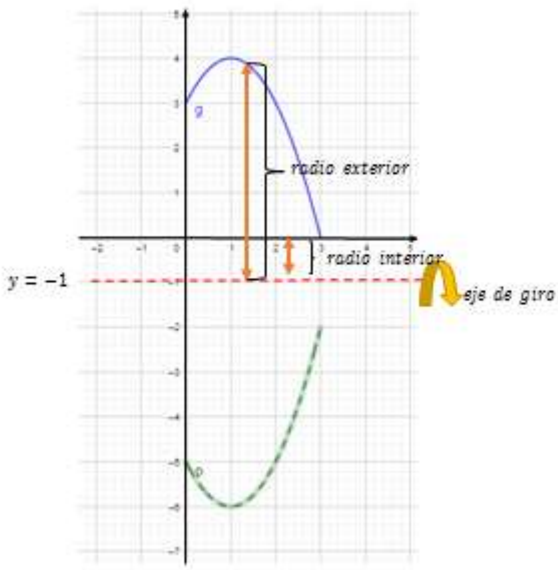

a) El método a usar es el de disco, ya que es perpendicular al eje de revolución y toda la región (R) está sobre el eje de giro (o revolución)



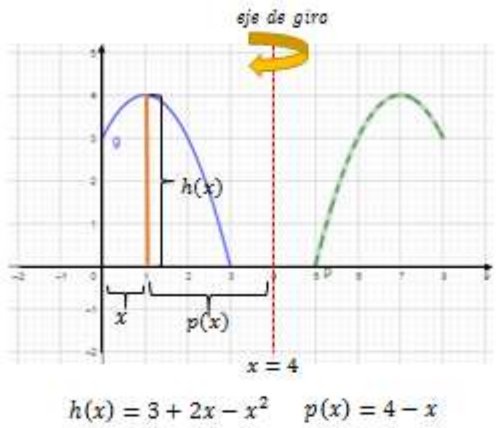

b) El método a usar es el de capas cilíndricas, ya que la rebanada es paralela al eje de giro.




c) El método a usar es el de arandelas, la rebanada es perpendicular al eje de giro, además existe un espacio hueco.



d) El método a usar también es el de capas cilíndricas, la rebanada es paralela al eje de giro.




**Solución a)**

1º Planteamos el volumen del sólido por medio de la integral definida aplicando el método de disco

2º La región viene dada por la función $y = 3 + 2x - x^2$en el intervalo $[0, 3]$ (ver gráfico a)

3º Utilizamos la fórmula del método de Discos

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

4º Sustituimos en la integral la función

$$V = \pi \int_0^3 (3 + 2x - x^2)^2 dx$$

Resolvemos la parte algebraica

$$V = \pi \int_0^3 (9 + 4x^2 + x^4 + 12x - 6x^2 - 4x^3) dx$$

Agrupamos términos y ordenamos

$$V = \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9) dx$$

Hallamos la integral indefinida o Primitiva

$$V = \pi \left( \frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} + 9x \right) \Bigg|_0^3$$

$$= \pi \left( \frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{2x^3}{3} + 6x^2 + 9x \right) \Bigg|_0^3$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$V = \pi\left[\left(\frac{(3)^5}{5} - (3)^4 - \frac{2(3)^3}{3} + 6(3)^2 + 9(3)\right) - \left(\left(\frac{(0)^5}{5} - (0)^4 - \frac{2(0)^3}{3} + 6(0)^2 + 9(0)\right)\right)\right]$$

Y resolvemos las operaciones algebraicas

$$V = \pi\left[\left(\frac{243}{5} - 81 - \frac{2(27)}{3} + 6(9) + 9(3)\right) - (0)\right]$$

$$= \pi\left(\frac{243}{5} - 81 - 18 + 54 + 27\right)$$

6º Obtenemos el volumen

$$V = \frac{153}{5}\pi\ u^3$$

**Solución b)**

1º Planteamos el volumen del sólido por medio de la integral definida aplicando el método de capas cilíndricas.

2º La región viene dada por la función $y = 3 + 2x - x^2$en el intervalo $[0, 3]$ (ver gráfico b)

3º Utilizamos la fórmula del método de capas cilíndricas

$$V = 2\pi\int_a^b p(x)h(x)dx$$

4º Identificamos las funciones $h(x)$ y $p(x)$

$$h(x) = 3 + 2x - x^2 \qquad p(x) = x$$

5º Sustituimos en la integral

$$V = 2\pi\int_0^3 (x).(3 + 2x - x^2)dx$$

Resolvemos la parte algebraica

$$V = 2\pi\int_0^3 (3x + 2x^2 - x^3)dx$$

Hallamos la integral indefinida o Primitiva

$$V = 2\pi\left(3\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = 2\pi\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$V = 2\pi\left[\left(\frac{3}{2}(3)^2 + \frac{2}{3}(3)^3 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left(\frac{3}{2}(0)^2 + \frac{2}{3}(0)^3 - \frac{(0)^4}{4}\right)\right]$$

Y resolvemos las operaciones algebraicas

$$V = 2\pi\left[\left(\frac{27}{2} + 18 - \frac{81}{4}\right) - 0\right]$$

$$V = 2\pi\left(\frac{45}{4}\right) = \frac{45}{2}\pi\ \ u^3$$

**Solución c)**

1º Planteamos el volumen del sólido por medio de la integral definida aplicando el método de arandelas.

2º La región viene dada por la función $y = 3 + 2x - x^2$en el intervalo $[0, 3]$ (ver gráfico c)

3º Utilizamos la fórmula del método arandelas

$$V = \pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2].dx = \pi\int_a^b (R^2 - r^2).dx$$

4º Identificamos a $f(x) = R^2 \rightarrow radio\ exterior \quad g(x) = r^2 \rightarrow radio\ interior$

| | |
|---|---|
| $R^2$ va de la curva al eje de giro | $r^2$ va desde el eje $x$ al eje de giro |
| $R^2 = (3 + 2x - x^2) - (-1)$ | $r^2 = 0 - (-1)$ |
| $R^2 = 4 + 2x - x^2$ | $r^2 = 1$ |

5º Sustituimos en la integral

$$V = \pi\int_0^3 [(4 + 2x - x^2)^2 - (1)^2].dx$$

Resolvemos la parte algebraica y ordenamos

$$V = \pi\int_0^3 [(16 + 4x^2 + x^4 + 16x - 8x^2 - 4x^3) - 1].dx$$

$$V = \pi\int_0^3 (x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 15)dx$$

Hallamos la integral indefinida o Primitiva

$$V = \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{16x^2}{2} + 15x\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left(\frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{4x^3}{3} + 8x^2 + 15x\right)\Bigg|_0^3$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$V = \pi\left[\left(\frac{(3)^5}{5} - (3)^4 - \frac{4(3)^3}{3} + 8(3)^2 + 15(3)\right) - \left(\frac{(0)^5}{5} - (0)^4 - \frac{4(0)^3}{3} + 8(0)^2 + 15(0)\right)\right]$$

$$V = \pi\left(\frac{243}{5} - 81 - 36 + 72 + 45\right) - 0$$

$$V = \frac{243}{5}\pi \ u^3$$

**Solución d)**

1º Planteamos el volumen del sólido por medio de la integral definida aplicando el método de capas cilíndricas.

2º La región viene dada por la función $y = 3 + 2x - x^2$ en el intervalo $[0, 3]$ (ver gráfico d)

3º Utilizamos la fórmula del método de capas cilíndricas

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)dx$$

4º Identificamos las funciones $h(x)$ y $p(x)$

$$h(x) = 3 + 2x - x^2 \qquad p(x) = 4 - x$$

5º Sustituimos en la integral

$$V = 2\pi \int_0^3 (4 - x).(3 + 2x - x^2)dx$$

Resolvemos la parte algebraica

$$V = 2\pi \int_0^3 (12 + 8x - 4x^2 - 3x - 2x^2 + x^3).dx$$

Agrupamos términos y ordenamos

$$V = 2\pi \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 5x + 12).dx$$

Hallamos la integral indefinida o Primitiva

$$V = 2\pi\left(\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 12x\right)\Bigg|_0^3 = 2\pi\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{5x^2}{2} + 12x\right)\Bigg|_0^3$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$V = 2\pi\left[\left(\frac{(3)^4}{4} - 2(3)^3 + \frac{5(3)^2}{2} + 12(3)\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - 2(0)^3 + \frac{5(0)^2}{2} + 12(0)\right)\right]$$

$$V = 2\pi\left[\left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{45}{2} + 36\right) - 0\right]$$

$$V = 2\pi\left(\frac{99}{4}\right) = \frac{99}{2}\pi \ u^3$$

## Ejercicios Propuestos

1. Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las curvas $y = -x^2 - 2x + 6$ y $y = x + 6$ entorno a:

   a) la recta $x = -4$ , b) la recta $y = 2$
2. Hallar el volumen del sólido de revolución generado por la región encerrada por las curvas $x = y^2$ , $y^2 = 2(x - 3)$ alrededor de la recta $x = 6$
3. Calcular el volumen de la región encerrada por las curvas $y^2 = 16 - x$ , $(y + 2)^2 = x + 4$ al girar en torno a la recta $y = 3$.
4. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la región encerrada por las curvas $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ , $y = 2x - x^2$ alrededor de la recta $y = 8$
5. Determinar el volumen del sólido generado al girar en torno a la recta $x = -4$ la región determinada por la curva $y = 2 - x^3$ y la recta que pasa por los puntos $(-2, 10)$ y $(0, 2)$.*Sugerencia*: hallar la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.

6. Determinar el volumen del sólido generado al girar en torno al eje “x” la región limitada por las gráficas $y = -x^2 - x - 1$ , $y = x^2 - 7$
7. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la región encerrada por las curvas $y = 3 - x^2$ , $y = x + 1$ en torno a:
   a) la recta $x = 3$ y b) la recta $y = -1$
8. Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar la región acotada por las curvas $y = x^2 - 4x + 3$ , $y = 3 - x^2$ alrededor de:
   a) el eje “y” b) la recta $y = 4$
9. Determinar el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = -4$ la región limitada por las gráficas $y = x^3$ , $2y + x = 0$ , $y - x = 6$
10. Hallar el volumen del sólido de revolución generado por la región encerrada por las curvas $y^2 + 2y = x$ , $y = \frac{x}{2} - 2$ al girar alrededor de la recta: a) $y = 3$ b) $x = -2$

**Algunas respuestas**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $a)\ V = \frac{45\pi}{2}\ u^3$ | 1. $b)\ V = \frac{153\pi}{5}\ u^3$ | 2. $V = \frac{144\sqrt{6}\pi}{5}\ u^3$ | 3. $V = 576\ u^3$ |
| 4. $V = 448\,\pi\ u^3$ | 5. $V = 32\,\pi\ u^3$ | 8. a) $V = \frac{16\pi}{3}\ u^3$ | 8. $b)\ V = 16\pi\, u^3$ |

## Importante

Para ampliar la información, consultar el libro:

- Cálculo de Larson, Capitulo Nº 6, Integración, 6ta Edición.

Y las páginas:

- https://www.youtube.com/watch?v=co3hzuRQ_uU&ab_channel=RonnyOnline