

Rpta Tutorial 2

1) Hallar las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-2, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x - y + 5z = 12$

Solución: Consideramos $P(-2, 2, 4)$ y para el vector de dirección tomamos la normal del plano:
 $\vec{n} = \langle 2, -1, 5 \rangle = \vec{v}$

luego usamos las formas:
 Simétricas:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - (-2)}{2} = \frac{y - (2)}{-1} = \frac{z - 4}{5}$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{5}$$

Paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$$

2) Encuentre la ecuación del plano que pasa por la recta de la intersección de los planos $X - Y = 1$, $Y + 2Z = 3$ y es perpendicular al plano $X + Y - 2Z = 1$.

Solución:

Recta intersección de los planos se puede encontrar asignando un parámetro a Y y resolviendo en función de t :

$$\begin{cases} X - t = 1 \\ t + 2Z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 1 + t \\ Z = \frac{3 - t}{2} \end{cases}$$

Así unas ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} X = 1 + t \\ Y = t \\ Z = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$$

Identificamos que el punto $P(1, 0, 3/2)$ está sobre la recta y el vector $\vec{v} = \langle 1, 1, -1/2 \rangle$ es un vector de dirección de

la recta intersección de los planos. Como el plano buscado contiene a la recta y es perpendicular al plano $x+y-2z=1$, entonces su vector normal es perpendicular al vector \vec{v} y al vector normal del plano dado.

El vector normal de $x+y-2z=1$ es $\vec{n}_1 = \langle 1, 1, -2 \rangle$. Luego un vector normal al plano buscado puede ser:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{v}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (-1/2 + 2)\hat{i} - (1/2 + 2)\hat{j} + (1 - 1)\hat{k} \\ &= \frac{3}{2}\hat{i} - \frac{5}{2}\hat{j} + 0\hat{k} = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0 \right\rangle \end{aligned}$$

Ecuación de plano:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Tomamos $(x_0, y_0, z_0) = P = (1, 0, 3/2)$

$$\frac{3}{2}(x-1) - \frac{3}{2}(y-0) + 0(z-\frac{3}{2}) = 0$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}y = 0$$

Multiplicando por $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} \right) = \frac{2}{3}(0)$$

$$\boxed{x - y - 1 = 0}$$

3) Identifique y bosqueje la gráfica de cada superficie. Determine las trazas con los planos coordenados

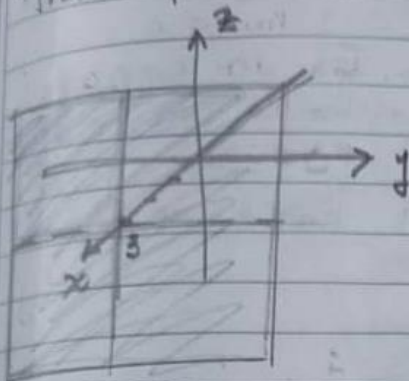
a) $x=3$

Es un plano paralelo al plano yz que pasa por $x=3$

Traza plano XY : $x=3$ recta paralela al eje y

Traza plano XZ : $x=3$ recta paralela al eje z ④

Taza plano YZ : No hay



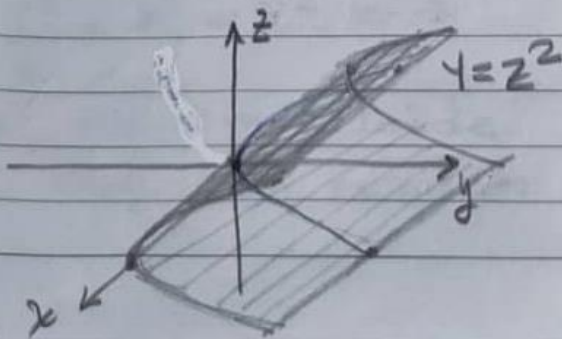
b) $y = z^2$

Superficie cilíndrica generada por la curva $y = z^2$ en el plano YZ y por rectas paralelas al eje X

Taza Plano XY : $y = 0$ (Eje X)

Taza Plano YZ : $y = z^2$

Taza Plano XZ : $z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$
(Eje X)



c) $x^2 = y^2 + 4z^2$

$x^2 - y^2 - 4z^2 = 0$ Es un cono
centrado con respecto
al eje X

Taza plano XY: hacemos $z=0$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$y = \pm x$$

Son dos rectas

Taza plano XZ: hacemos $y=0$

$$x^2 - 4z^2 = 0$$

$$z = \pm \frac{1}{2} x$$

Son dos rectas

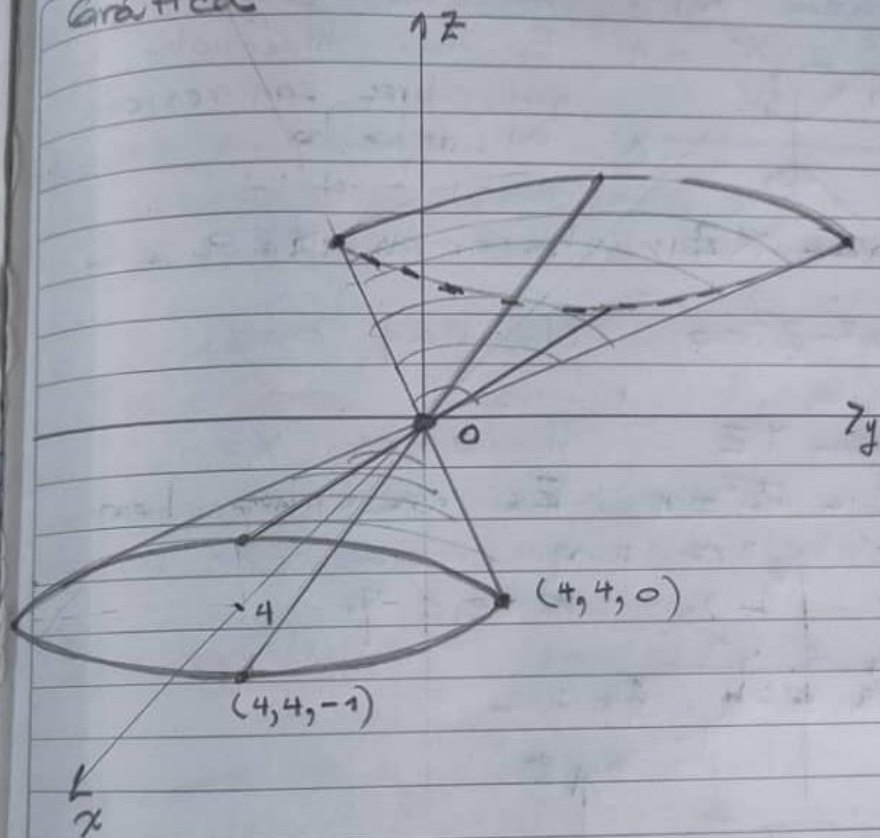
Taza plano YZ: Hacemos $x=0$

$$-y^2 - 4z^2 = 0$$

$$y^2 + 4z^2 = 0$$

representa al punto $(0,0,0)$

Gráfica



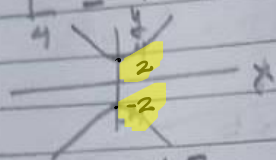
$$d) -4x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$$

Dividiendo por 4 :

$$\frac{y^2}{4} - x^2 - z^2 = 1$$

Es una hiperloide de dos ramas
que abre con respecto al eje Y

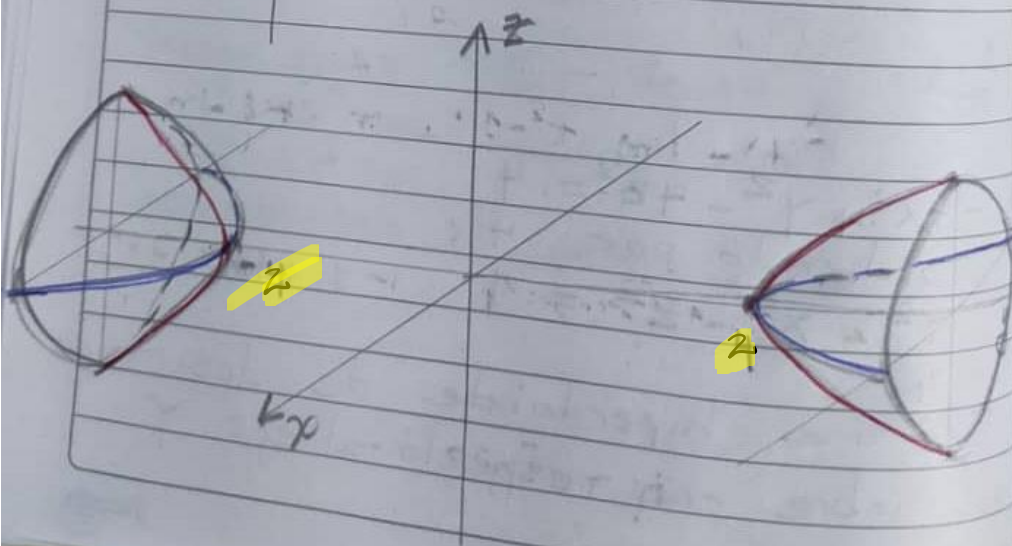
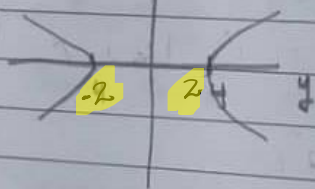
Taza XY: Hacemos $z=0$
 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ Es una hipérbola
 que abre con respecto
 al eje y



Taza XZ: hacemos $y=0$

$-x^2 - z^2 = 0$ No hay traza

Taza YZ: Hacemos $x=0$
 $\frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ Es una hipérbola
 que abre con respecto
 al eje y



$$\vec{r}(t) = \frac{t^2-t}{t-1} \vec{i} + \sqrt{t+8} \vec{j} + \frac{\sin \pi t}{\ln t} \vec{k}$$

Dominio:

Funciones componentes

$$f(t) = \frac{t^2-t}{t-1} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(t) = \sqrt{t+8} \quad \text{Dom } g = [-8, +\infty)$$

$$h(t) = \frac{\sin \pi t}{\ln t} \quad \text{Dom } h = t > 0 \text{ y } t \neq 1 \\ (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Dom } r = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } h$$

$$= (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$b) \lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2-1}{t-1} \vec{i} + \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t+8} \vec{j} + \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin \pi t}{\ln t} \vec{k}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} \vec{i} + \sqrt{1+8} \vec{j} + \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin \pi t}{\frac{1}{t}} \vec{k}$$

$$= (1+1) \vec{i} + 3 \vec{j} + \frac{\pi \cos \pi t}{\frac{1}{t}} \vec{k}$$

$$= 2 \vec{i} + 3 \vec{j} - \pi \vec{k}$$

Norma

c) Es continua en su dominio.

5) Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \sin^2 t$ es la intersección de las superficies $z = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$. A partir de este hecho grafique la curva.

Solución Tenemos que demostrar que las ecuaciones paramétricas satisfacen las ecuaciones de las superficies:

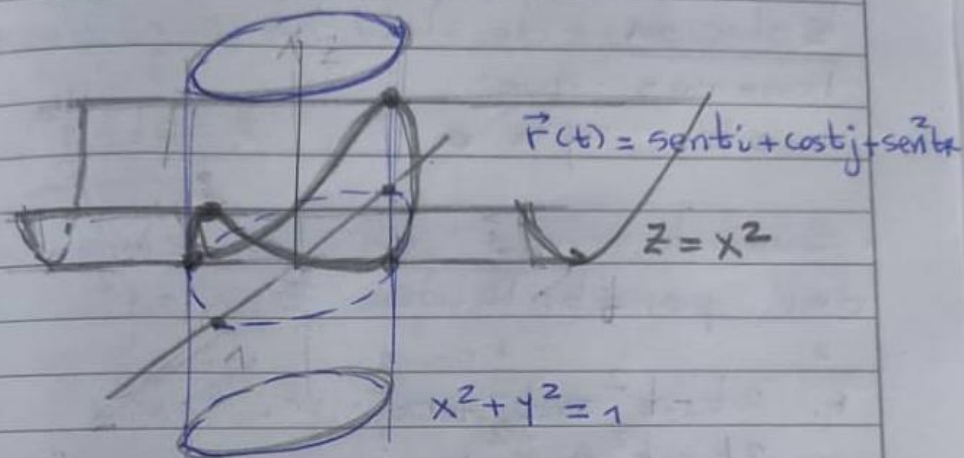
En $z = x^2$, como $x = \sin t$ y $z = \sin^2 t$ vemos que la ecuación se satisface

$$z = \sin^2 t = x^2 = (\sin t)^2$$

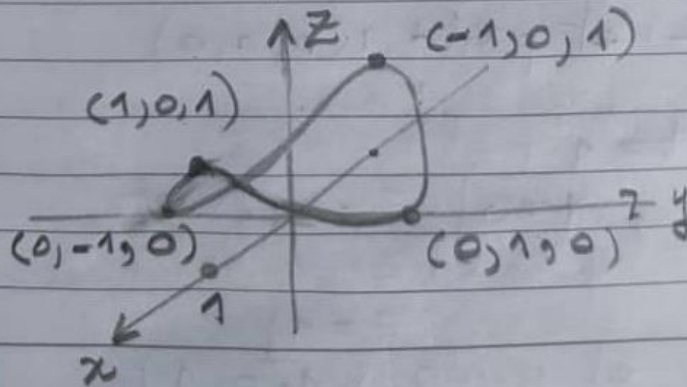
Para $x^2 + y^2 = 1$, al sustituir $x = \sin t$ y $y = \cos t$, nos

$$x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Tenemos que las gráficas de $z=x^2$ y $x^2+y^2=1$ son las superficies cilíndricas



t	$x = \text{sen} t$	$y = \text{cost}$	$z = \text{sen}^2 t$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1
2π	0	1	0



6) En qué puntos corta la curva $\vec{r}(t) = ti + (2t - t^2)k$ a) paraboloides $z = x^2 + y^2$?

Solución: de la función vectorial tenemos que:

$$x = t \quad y = 0 \quad z = 2t - t^2$$

Sustituyendo en la ecuación del paraboloides $z = x^2 + y^2$

$$2t - t^2 = t^2 + 0^2$$

$$2t - t^2 = t^2$$

$$2t^2 - 2t = 0$$

$$2t(t - 1) = 0$$

$$t = 0 \quad t = 1$$

Sustituimos en la función vectorial:

Para $t = 0$

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 2(0) - 0^2 = 0$$

Resulta el punto $(0, 0, 0)$

Para $t = 1$

$$x = 1 \quad y = 0 \quad z = 2(1) - 1^2$$

$$z = 2 - 1$$

$$z = 1$$

Resulta el punto $(1, 0, 1)$

Verificar usando geogebra.
emplea los comandos:

Curva $(t, 0, 2t - t^2, t, -3, 3)$

$$z = x^2 + y^2$$

$$A = (0, 0, 0)$$

$$B = (1, 0, 1)$$

7) Considere las superficies de las ecuaciones

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad z = x + 1$$

- Identifique las superficies y haga un bosquejo de ambas
- Encuentre una función vectorial \vec{r} que describa la curva C de intersección de ambas superficies para $y \geq 0$

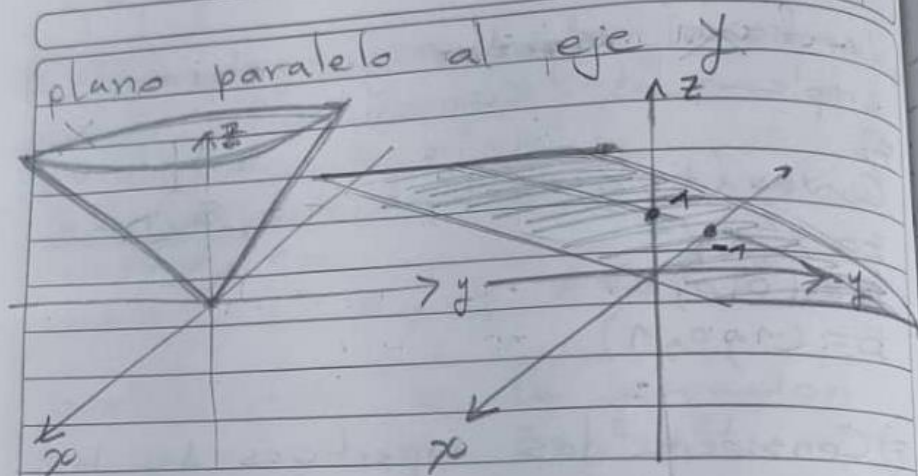
c) Dibuje la curva C y verifique que el punto $(1, \sqrt{3}, 2)$ está en la curva.

Solución:

$$a) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

representa la parte superior de un cono y $z = x + 1$ un

Nota



b) Podemos parametrizar C
tomando $x = t$;
 $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{t^2 + y^2}$

$$z = x + 1 \Rightarrow z = t + 1$$

Iguando:

$$t + 1 = \sqrt{t^2 + y^2}$$

$$(t + 1)^2 = t^2 + y^2$$

$$y^2 = \cancel{t^2} + 2t + 1 - \cancel{t^2}$$

$$y = \sqrt{2t + 1} \quad \text{para } y \geq 0$$

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + \sqrt{2t+1}\hat{j} + (t+1)\hat{k}$$

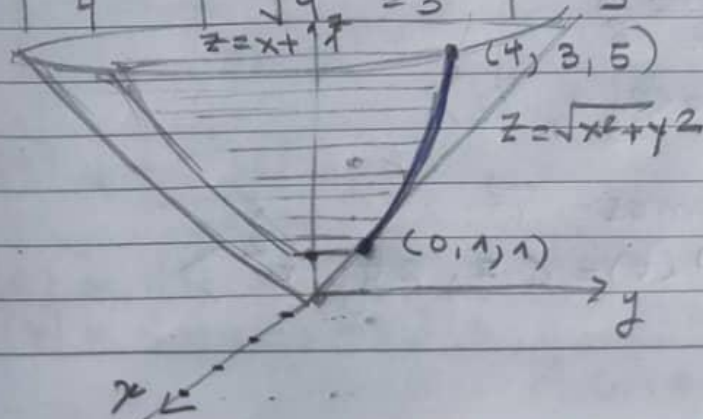
o) Dibuje la curva C y verifique que el punto $(1, \sqrt{3}, 2)$ está en C .

Para saber si $(1, \sqrt{3}, 2) \in C$ buscamos t tal que:

$$\begin{cases} t = 1 \\ \sqrt{2t+1} = \sqrt{3} \\ t+1 = 2 \end{cases}$$

Vemos que para $t=1$, $\vec{r}(1) = \langle 1, \sqrt{3}, 2 \rangle$

t	$x=t$	$y=\sqrt{2t+1}$	$z=t+1$
0	0	1	1
1	1	$\sqrt{3} = 1.73$	2
2	2	$\sqrt{5} =$	3
3	3	$\sqrt{7} =$	4
4	4	$\sqrt{9} = 3$	5



8) Considere $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$

con $P(0,0,0)$ y $Q(2,1,1/3)$. Hallar

a) Longitud de arco de P a Q

Veamos para que valores de t

$$b) \vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle = \mathbf{0}$$

$$2t = 0$$

$$t^2 = 0$$

$$\frac{1}{3}t^3 = 0$$

$$\rightarrow t = 0$$

Es decir $\vec{r}(0) = (0,0,0)$

$$ii) \vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle = \langle 2, 1, 1/3 \rangle$$

$$2t = 2$$

$$t^2 = 1$$

$$\frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow t = 1$$

$$\rightarrow \vec{r}(1) = \langle 2, 1, 1/3 \rangle$$

Derivamos \vec{r} :

$$\vec{r}'(t) = \langle 2, 2t, t^2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} \\
 &= \sqrt{(2+t^2)^2} \\
 &= 2+t^2
 \end{aligned}$$

luego la longitud de arco es:

$$L = \int_0^1 \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$= \int_0^1 (2+t^2) dt$$

$$= 2t + \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

b) Curvatura en el punto Q
Es decir $t=1$.

$$K(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 2, 2t, t^2 \rangle \Rightarrow \vec{r}'(1) = \langle 2, 2, 1 \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle 0, 2, 2t \rangle \Rightarrow \vec{r}''(1) = \langle 0, 2, 2 \rangle$$

$$\vec{r}(1) = \langle 2, 1, 1/3 \rangle$$

(17)

$$\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4-2)\hat{i} - (4-0)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\|\vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1)\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 16}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

$$\|\vec{r}'(1)\| = \sqrt{4 + 1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{46}{9}} = \frac{\sqrt{46}}{3}$$

$$K = \frac{6}{\left(\frac{\sqrt{46}}{3}\right)^3} = \frac{6}{\frac{46\sqrt{46}}{27}} = \frac{162}{46\sqrt{46}}$$

$$= 0.52$$

c) Plano normal a la gráfica
en el punto $Q(1, 1, 1)$

El plano normal está definido
 $\vec{n} = \vec{r}'(t)$ y pasa por $Q(1, 1, 1)$

$$\vec{n} = \langle 2, 2, 1 \rangle \text{ y } Q(1, 1, 1)$$

$$2(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$2x - 2 + 2y - 2 + z - 1 = 0$$

$$2x + 2y + z - 5 = 0$$