Solución

Si $v = y'$, se tiene que $\dfrac{dv}{dx} = y''$ y en consecuencia

$$y\frac{dv}{dx} - v^3 = 0,$$

al considerar a y como la variable independiente, se obtiene

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy},$$

por consiguiente

$$yv\frac{dv}{dy} = v^3 \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{v^2} = \frac{dy}{y} \quad \text{ó} \quad v = -\frac{1}{\ln(y) + K_1},$$

ya que $v = y'$, obtenemos

$$y' = -\frac{1}{\ln(y) + K_1} \quad \text{ó} \quad \Big(\ln(y) + K_1\Big)dy = -dx,$$

por tanto la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y\big(\ln(y) + K_1 + 1\big) = -x + K_2.$$

3.2.4 Ejercicios Propuestos

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1)	$y'' + y = 0.$	$y = K_1 sen(x + K_2) = \alpha_1 sen(x) + \alpha_2 cos(x);$
2)	$y'' + y(y')^3 = 0.$	$y^3 - 6K_1 y = 6x + K_2, \quad$ ó $\; y = K;$
3)	$2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1.$	$x + K_2 = \pm\dfrac{2}{3}(y - 2K_1)\sqrt{y + K_1};$
4)	$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$	$e^y = (x + K_2)^2 + K_1;$
5)	$y'y'' = 2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$	$y = \dfrac{4(x+1)^{3/2} - 1}{3};$
6)	$y'' - 3y^2 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$	$y = 2(1 - x)^{-2};$
7)	$y'y'' - x = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1.$	$y = \dfrac{x^2 + 3}{2}.$

3.3 E.D.O.L. No Homogéneas de Orden n, con Coeficientes Constantes

Retomando el Teorema 74, la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \tag{1}$$

viene expresada como

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x),$$

donde $y_c(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada y $y_p(x)$ es una solución particular de (3.1).

Es decir, que para resolver la ecuación diferencial (3.1), debemos realizar dos etapas:

(i) Determinar la función $y_c(x)$.

(ii) Establecer cualquier solución particular, $y_p(x)$, de la ecuación no homogénea.

En la sección anterior, estudiamos como encontrar la solución $y_c(x)$ de la ecuación diferencial homogénea asociada. En la presente sección estudiaremos dos métodos para determinar una solución particular de (3.1).

3.3.1 Método de los Coeficientes Indeterminados

Este método es muy práctico (¡¡ es relativamente sencillo!!) al momento de determinar una solución particular de (3.1). Sólo que la clase de funciones $F(x)$ para las que se aplica este método es restringida; pero esta clase aunque reducida, incluye funciones que se consideran con mucha frecuencia en diversas aplicaciones físicas.

Para hacer el enfoque general del método, comencemos considerando de nuevo la ecuación diferencial

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \tag{3.13}$$

en donde $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ son constantes (números reales) y la función $F(x)$ son funciones especiales, a saber, funciones exponenciales, polinomiales, senos, cosenos o sumas o productos de estas funciones. La particularidad de tales funciones, es que ellas tienen derivadas de una forma similar a la de la misma función. Esta particularidad, da lugar a la idea clave: *escoger para* $y_p(x)$ una forma similar a la de $F(x)$ y que incluya coeficientes desconocidos que se determinarán al sustituir esa elección de $y_p(x)$ en (3.13). El método consta de tres reglas.

Regla Básica

Si la función $F(x)$ en (3.13) es una de las funciones de la columna izquierda de la siguiente tabla, se elige la función correspondiente para $y_p(x)$ de la columna derecha de la misma tabla y se determinan sus coeficientes desconocidos, sustituyendo $y_p(x)$ y sus derivadas en (3.13).

Regla de Modificación

Si un término de la elección de y_p resulta ser una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a (3.13)*, entonces se multiplica dicho término por x (o por x^2 si esta solución corresponde a una raíz repetida de la ecuación característica).*

Regla de la Suma

Si $F(x)$ es una suma de las funciones enlistadas en la columna izquierda de la tabla anterior, entonces se elige para y_p la suma de las funciones de los renglones correspondientes de la columna derecha de la tabla.

$F(x)$	$y_p(x)$
$\alpha e^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$
$\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
$\alpha cos(\beta x)$ ó $\alpha sen(\beta x)$	$A_1 cos(\beta x) + A_2 sen(\beta x)$
$\alpha e^{\beta x} cos(\omega x)$ ó $\alpha e^{\beta x} sen(\omega x)$	$e^{\beta x}\Big(A_1 cos(\omega x) + A_2 sen(\omega x)\Big)$
$\big(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0\big)e^{\beta x}$	$\big(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0\big)e^{\beta x}$
$\big(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0\big)cos(\omega x)$ ó $\big(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0\big)sen(\omega x)$	$\big(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0\big)cos(\omega x) + \big(B_n x^n + \cdots + B_1 x + B_0\big)sen(\omega x)$
$\big(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0\big)e^{\beta x}cos(\omega x)$ ó $\big(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0\big)e^{\beta x}sen(\omega x)$	$\big(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0\big)e^{\beta x}cos(\omega x) + \big(B_n x^n + \cdots + B_1 x + B_0\big)e^{\beta x}sen(\omega x)$

Los siguientes ejemplos ilustran el método.

Ejemplo 85.

$y'' + 4y = 8x^2.$

Solución

Recordemos que la solución general de las ecuaciones diferenciales no homogéneas es de la forma $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, donde $y_c(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada y $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

E.D.H.Asociada: $y'' + 4y = 0$.

E. Característica: $m^2 + 4 = 0$.

Raíces: $m = \pm 2i$, raíces complejas con $a = 0$ y $b = 2$.

Luego

$$y_c(x) = \alpha_1 cos(2x) + \alpha_2 sen(2x).$$

Para determinar $y_p(x)$, usemos el hecho de que $F(x) = 8x^2$ y la regla básica del método de los coeficientes indeterminados nos sugiere que $y_p(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$.

Observese que ningún término de esta elección de y_p es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

Para hallar los valores de los coeficientes A_2, A_1 y A_0, debemos derivar dos veces esta selección de y_p y sustituir, en la ecuación diferencial planteada. Así,

$$y_p' = 2A_2x + A_1 \quad \text{y} \quad y_p'' = 2A_2$$

Sustituyendo en la ecuación difercnial dada, se tiene

$$y_p''(x) + 4y_p(x) = 8x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2A_2 + 4A_2x^2 + 4A_1x + 4A_0 = 8x^2,$$

agrupando apropiadamente, obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} 4A_2 = 8 \\ 4A_1 = 0 \\ 2A_2 + 4A_0 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad A_2 = 2; \;\; A_1 = 0; \;\; A_0 = -1.$$

Por lo que $y_p(x) = 2x^2 - 1$. Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$\boxed{y(x) = y_c(x) + y_p(x) = \alpha_1 cos(2x) + \alpha_2 sen(2x) + 2x^2 - 1}.$$

Ejemplo 86.

$y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Solución

E.D.H.Asociada: $y'' - 3y' + 2y = 0.$

E. Característica: $m^2 - 3m + 2 = 0.$

Raíces: $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$, raíces reales diferentes.

Por lo que

$$y_c(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}.$$

Puesto que $F(x) = e^x$, normalmente la elección sería $y_p(x) = Ae^x$. Pero el término e^x es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada que corresponde a una raíz real simple (a saber a $m_1 = 1$). En consecuencia, la regla de modificación del método, sugiere que la elección correcta es

$$y_p(x) = Axe^x.$$

Para determinar el valor de A, derivamos y_p y sustituimos en la ecuación diferencial dada, es decir,

$$y_p'(x) = Ae^x + Axe^x, \qquad y_p''(x) = 2Ae^x + Axe^x$$

y

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x) = e^x \quad &\Leftrightarrow \quad \big(2Ae^x + Axe^x\big) - 3\big(Ae^x + Axe^x\big) + 2Axe^x = e^x \\ &\Leftrightarrow \quad A = -1. \end{aligned}$$

Por tanto $y_p(x) = -xe^x$ y en consecuencia la solución general es

$$\boxed{y(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} - xe^x}.$$

Ejemplo 87.

$y'' + y' - 6y = 10e^{2x} - 18e^{3x} - 6x - 11.$

Solución

E.D.H.Asociada: $y'' + y' - 6y = 0.$

E. Característica: $m^2 + m - 6 = 0.$

Raíces: $m_1 = -3$ y $m_2 = 2$, raíces reales diferentes.

Por lo que

$$y_c(x) = \alpha_1 e^{-3x} + \alpha_2 e^{2x}.$$

Si elegimos $y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + Cx + D$, resulta que el término e^{2x} es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, que corresponde a la raíz real simple $m_2 = 2$. Por

lo que, la regla de modificación nos dice que la elección correcta para ese factor es xe^{2x} y en consecuencia la elección apropiada para y_p es

$$y_p(x) = Axe^{2x} + Be^{3x} + Cx + D$$

Derivando, sustituyendo y agrupando apropiadamente, resulta

$$\left.\begin{array}{l} 5A = 10 \\ 6B = -18 \\ -6C = -6 \\ C - 6D = -11 \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad A = 2; \;\; B = -3; \;\; C = 1; \;\; D = 11/5.$$

Es decir, $y_p(x) = 2xe^{2x} - 3e^{3x} + x + 2$ y la solución general es

$$\boxed{y(x) = \alpha_1 e^{-3x} + \alpha_2 e^{2x} + 2xe^{2x} - 3e^{3x} + x + \frac{11}{5}}.$$

Ejemplo 88.

$y'' + 2y' + 5y = 16e^x + sen(2x).$

Solución

E.D.H.Asociada: $y'' + 2y' + 5y = 0.$

E. Característica: $m^2 + 2m + 5 = 0.$

Raíces: $m = -1 \pm 2i,$ raíces complejas, con $a = -1$ y $b = 2.$

Por lo que

$$y_c(x) = e^{-x}\Big(\alpha_1 cos(2x) + \alpha_2 sen(2x)\Big).$$

Como $F(x) = 16e^x + sen(2x)$ la regla de la suma del método sugiere que

$$y_p(x) = Ae^x + Bcos(2x) + Csen(2x).$$

Observe que ningún término de y_p es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. Luego derivando, sustituyendo y agrupando apropiadamente, resulta $A = 2,\ B = -4/17$ y $C = 1/17$. En consecuencia

$$y_p(x) = 2e^x - \frac{4}{17}cos(2x) + \frac{1}{17}sen(2x)$$

y la solución general es

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\Big(\alpha_1 cos(2x) + \alpha_2 sen(2x)\Big) + 2e^x - \tfrac{4}{17}cos(2x) + \tfrac{1}{17}sen(2x)}.$$

Ejemplo 89.

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y &= -6sen(2x) - 18cos(2x) \\ y(0) = 2; & y'(0) = 2. \end{cases}$$

Solución

$$\boxed{y(x) = -e^{-2x} + 3cos(2x)}.$$

3.3.2 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de los coeficientes indeterminados

(22) $y'' + y = 3x^2;$

(23) $y'' - 4y = e^{2x};$

(24) $y'' + 6y' + 9y = 18cos(3x);$

(25) $y'' - y' - 2y = e^x + x;$

(26) $y'' - 4y' + 3y = 2sen(x) - 4cos(x);$

(27) $3y'' + 10y' + 3y = x^2 + sen(x);$

(28) $2y'' - 4y' + 4y = 4e^x cos(x).$

(29) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = -2. \end{cases}$

(30) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 14 + 2x - 2x^2 \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = 0. \end{cases}$

(31) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 10sen(x) \\ y(\pi/2) = -3; \;\; y'(\pi/2) = -1. \end{cases}$

3.3.3 Método de Variación de Parámetros

Mientras que el proceso de llevar a cabo el método de los coeficientes indeterminados es en realidad muy directo (contiene sólo técnicas de álgebra elemental y derivación), dicho método se aplica a una clase reducida de problemas. Por ejemplo, no podría aplicarse al caso de la ecuación

$$y'' + y = tg(x).$$

Entonces, convendrá buscar un método para determinar una solución particular que se aplique en todos los casos (incluyendo los coeficientes variables) en los que la función $y_c(x)$ es conocida. Este nuevo método es el de *variación de parámetros*[2], el cual estudiaremos a continuación.

[2]Este método es atribuido al gran matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813), quien nació en Turin, de ascendencia francesa. Fue director de la sección de matemáticas de la Academia de Berlin en 1766. Su importante obra principal fue en cálculo de variaciones, mecánica celeste, mecánica general (*mécanique analytique, Paris, 1788*), ecuaciones diferenciales, teoría de aproximaciones, álgebra y teoría de números.

Para adaptar el método de variación de parámetros a la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x), \tag{3}$$

la reescribimos en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x) \tag{3.14}$$

con $P(x), Q(x)$ y $F(x)$ funciones continuas en un intervalo I. En primer lugar, determinamos el conjunto fundamental de soluciones $\left\{y_1(x), y_2(x)\right\}$ de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3.15}$$

en segundo lugar, hallamos el wronskiano de estas funciones, es decir, $W(y_1, y_2)$. Finalmente el método de variación de parámetros da una solución particular de (3.14) en el intervalo I en la forma

$$\boxed{y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)F(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)F(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx}. \tag{3.16}$$

En la práctica, este método es mucho más complicado que el método de los coeficientes indeterminados, debido a las integraciones involucradas en (3.16).

El método de variación de parámetros tiene una clara ventaja sobre el de los coeficientes indeterminados, porque siempre llega a una solución particular, $y_p(x)$, cuando se puede resolver la ecuación diferencial homogénea asociada. En las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables también se puede aplicar el método de la variación de parámetros, así como el de los coeficientes indeterminados.

Ilustramos el método con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 90.

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{2e^{2x}}{sen(x)}.$$

<u>Solución</u>

E.D.H.Asociada: $y'' - 4y' + 5y = 0.$

E. Característica: $m^2 - 4m + 5 = 0.$

Raíces: $m = 2 \pm i$, raíces complejas, con $a = 2$ y $b = 1$.

Por lo que

$$y_c(x) = e^{2x}\Big(\alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x)\Big),$$

es decir, $y_1(x) = e^{2x}cos(x)$ y $y_2(x) = e^{2x}sen(x)$. Como $F(x)$ no es una función similar a las que aparecen en la columna izquierda de la tabla anterior, no se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Ahora

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{2x}cos(x) & e^{2x}sen(x) \\ 2e^{2x}sen(x) - e^{2x}sen(x) & 2e^{2x}sen(x) + e^{2x}cos(x) \end{vmatrix} = e^{4x}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x)\int \frac{y_2(x)F(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)F(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx \\ &= -e^{2x}cos(x)\int \frac{e^{2x}sen(x)\,\frac{2e^{2x}}{sen(x)}}{e^{4x}}\,dx + e^{2x}sen(x)\int \frac{e^{2x}cos(x)\,\frac{2e^{2x}}{sen(x)}}{e^{4x}}\,dx \\ &= -e^{2x}cos(x)\int 2\,dx + e^{2x}sen(x)\int \frac{2cos(x)}{sen(x)}\,dx \\ &= -2xe^{2x}cos(x) + 2e^{2x}sen(x)ln\big|sen(x)\big|. \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$y(x) = e^{2x}\Big(\alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x)\Big) - 2xe^{2x}cos(x) + 2e^{2x}sen(x)ln\big|sen(x)\big|$$

ó

$$\boxed{y = e^{2x}\Big[\alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x) - 2xcos(x) + 2sen(x)ln\big|sen(x)\big|\Big].}$$

Ejemplo 91.

$y'' + y = tg(x)$.

Solución

E.D.H.Asociada: $y'' + y = 0$.

E. Característica: $m^2 + 1 = 0$.

Raíces: $m = \pm i$, raíces complejas, con $a = 0$ y $b = 1$.

Por lo que

$$y_c(x) = \alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x),$$

es decir, $y_1(x) = cos(x)$ y $y_2(x) = sen(x)$. Como $F(x)$ no es una función similar a las que aparecen en la columna izquierda de la tabla anterior, no se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Ahora

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x)\int \frac{y_2(x)F(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)F(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx \\ &= -cos(x)\int sen(x)tg(x)dx + sen(x)\int cos(x)tg(x)dx \\ &= -cos(x)\int \frac{sen^2(x)}{cos(x)}\,dx + sen(x)\int sen(x)dx \\ &= -cos(x)\Big[ln\big|csc(x) - ctg(x)\big| - sen(x)\Big] - sen(x)cos(x) \\ &= -cos(x)ln\big|csc(x) - ctg(x)\big|. \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$\boxed{y(x) = \alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x) - cos(x)ln\big|csc(x) - ctg(x)\big|}.$$

Ejemplo 92.

$y'' - 2y' + y = 35x^{3/2}e^x + x^2.$

<u>Solución</u>

E.D.H.Asociada: $y'' - 2y' + y = 0.$

E. Característica: $m^2 - 2m + 1 = 0.$

Raíces: $m_1 = m_2 = 1,$ raíz real repetida.

Por lo que

$$y_c(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 x e^x,$$

es decir, $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = xe^x$. Ahora

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x)\int \frac{y_2(x)F(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)F(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx \\ &= -e^x\int \frac{xe^x\big(35x^{3/2}e^x+x^2\big)}{e^{2x}}\,dx + +xe^x\int \frac{e^x\big(35x^{3/2}e^x+x^2\big)}{e^{2x}}\,dx \\ &= 4x^{7/2}e^x + x^2 + 4x + 6. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$\boxed{y(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 x e^x + 4x^{7/2}e^x + x^2 + 4x + 6}.$$

Ejemplo 93.

$y'' - 4y' + 4y = \big(12x^2 - 6x\big)e^{2x}$.

Solución

$$\boxed{y(x) = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 x e^{2x} + \big(x^4 - x^3\big)e^{2x}}.$$

Ejemplo 94.

$y'' + 2y' + y = \dfrac{ln(x)}{e^x}, \quad x > 0.$

Solución

$$\boxed{y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 x e^{-x} - \frac{x^2e^{-x}}{4}\big(2ln(x) - 1\big) + xe^{-x}\big(ln(x) - 1\big)}.$$

3.3.4 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de Variación de Parámetros.

(32) $y'' - 2y' + y = x^{3/2}e^x$;

(33) $y'' + 4y = 2sec(x)$;

(34) $y'' + y = csc(x)$;

(35) $y'' - y = e^{-x}sen\big(e^{-x}\big) + cos\big(e^{-x}\big)$;

(36) $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$;

(37) $y'' - y = \dfrac{1}{\big(1+e^{-x}\big)^2}$;

(38) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{cos^3(x)}$;

(39) $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{8e^{-3x}}{x^2+1}$

(40) $y'' - 4y = senh(x)$;

(41) $y'' - 4y = cosh(x)$.

3.4 Transformada de Laplace y Problemas de Valor Inicial

Con el método de la transformada de Laplace[3] se resuelven ecuaciones diferenciales, en particular, problemas con valores inicial y en la frontera correspondientes. Este método reduce el problema de resolver una ecuación diferencial a un problema algebraico.

A este cambio de operaciones de cálculo a operaciones *algebraicas* con las transformadas se le llama *cálculo operacional*, un área muy importante de las matemáticas aplicadas, y el método de la transformada de Laplace es prácticamente el más importante a este fin. De hecho, la transformada de Laplace tiene numerosas aplicaciones en la ingeniería. Resulta particularmente útil en problemas en que la fuerza impulsora (mecánica o eléctrica) presenta discontinuidades, es impulsiva o es periódica pero no una simple función seno o coseno. Otra de sus ventajas es que con este método los problemas se resuelven de manera directa. De hecho, los problemas con valor inicial se resuelven sin necesidad de determinar primero una solución general. Asimismo, las ecuaciones diferenciales no homogéneas se resuelven sin necesidad de resolver primero la ecuación diferencial homogénea asociada.

En el presente estudio, consideraremos la transformada de Laplace desde un punto de vista práctico y su uso se ilustra por medio de importantes problemas de ingeniería, muchos de ellos relacionados con ecuaciones diferenciales *ordinarias*.

Antes de presentar el método de la transformada de Laplace en la resolución de problemas con valores inicial, presentamos la teoría básica (mínima) de la transformada de Laplace requerida para tal fin. Comencemos haciendo notar que la operación de derivación transforma una función $f(x)$ en otra función, su derivada $f'(x)$. Si utilizamos la letra D para denotar

[3]La transformada de Laplace tiene una historia interesante. La integral en la definición de la transformada de Laplace probablemente apareció por primera vez en el trabajo de Euler. Es una costumbre en matemáticas nombrar una técnica o teorema con el nombre de las personas que sucedieron a Euler en su descubrimiento. En este caso, el matemático que siguió a Euler fue el francés *Pierre Simon de Laplace* (1749-1827), quien empleó estas integrales en sus trabajos de la teoría de probabilidad. Los métodos de cálculo comunes para la resolución de ecuaciones diferenciales basadas en las transformadas de Laplace no fueron explotados por él. En cambio, estos métodos fueron descubiertos y popularizados por los ingenieros -de manera notable por el ingeniero eléctrico inglés *Oliver Heaviside* (1850-1925)-. Antes de ser rigurosamente justificadas, estas técnicas fueron aplicadas con amplitud y éxito, y a principios del siglo XX su validez fue objeto de intensas controversias. Una razón es que Heaviside ingenuamente supuso la existencia de funciones cuyas transformadas de Laplace contradicen la condición $F(s) \longrightarrow 0$ cuando $s \longrightarrow 0$, lo que generó preguntas sobre el significado y naturaleza de las funciones en matemáticas.

derivación, esa transformación se puede escribir

$$D\big[f(x)\big] = f'(x).$$

Otra importante transformación de funciones es la integración (I)

$$I\big[f(x)\big] = \int_0^x f(t)dt.$$

Una transformación más simple es la multiplicación de toda función por una función específica $g(x)$:

$$M_g\big[f(x)\big] = g(x)f(x).$$

El rasgo básico que estos ejemplos comparten entre sí es que cada una de esas transformaciones *opera sobre funciones y produce otras funciones*. Es claro que en la mayoría de los casos han de imponerse restricciones a las funciones $f(x)$ a las que la transformación es aplicable. Así en el primer caso $f(x)$ tiene que ser derivable y en el segundo debe ser integrable. En tales ejemplos, la función de la derecha se llama la *transformada* de $f(x)$ bajo la transformación correspondiente.

Una clase de transformaciones lineales de especial relevancia es la de las transformaciones integrales. Para comprender en qué consisten, consideremos funciones $f(x)$ definidas en algún intervalo acotado o no acotado $a \leq x \leq b$ y tomemos una función fija $K(p, x)$ de la variable x y del parámetro p. Entonces la transformación integral general viene dada por

$$T\big[f(x)\big] = \int_a^b K(p, x)f(x)dx = F(p). \tag{3.17}$$

La función $K(p, x)$ se denomina el *núcleo* de la transformación T, y evidentemente T es lineal con independencia de la naturaleza de K. El concepto de transformación integral lineal, en forma generalizada, ha sido fuente de algunas de las más fructíferas ideas del análisis moderno. Asimismo, en el análisis clásico se estudiaron varios casos concretos de (3.17) que condujeron a transformaciones específicas útiles en ciertos tipos de problemas.

Cuando $a = 0,\ b = \infty$ y $K(t, s) = e^{-ts}$ obtenemos el caso especial de (3.17) que nos concierne, conocido como *transformación de Laplace*.

Definición 95 (Transformada de Laplace)**.**

Sea $f(t)$ una función definida para toda $t \geq 0$. La transformada de Laplace de f es la función F definida por

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{3.18}$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.

Observación 96.

Recuerdese que una *integral impropia* en un intervalo infinito está definida como el límite de la integral en el intervalo acotado; es decir,

$$\int_a^\infty h(t)dt = \lim_{b\longrightarrow\infty}\int_a^b h(t)dt. \tag{3.19}$$

Si el límite en (3.19) existe, entonces se dice que la integral impropia *converge*; de otra manera *diverge* o no existe. Nóte que el integrando de la integral impropia en (3.18) contiene el parámetro s, además de la variable de integración t. Por tanto, cuando la integral en (3.18) converge, lo hace no precisamente hacia un número, sino a la función $F(s)$.

La función original $f(t)$ de (3.18) también se denomina la *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$ y se denotará por $\mathscr{L}^{-1}(F)$; es decir

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Ejemplo 97.

Sea $f(t) \equiv 1$ para todo $t \geq 0$.

<u>Solución</u>

De la definición de la transformada de Laplace, se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_{t=0}^{t=b}\\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(-\frac{e^{-sb}}{s}+\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \quad \text{para} \quad s>0.\end{aligned}$$

Obervese que el anterior límite **no existiría** si $s < 0$, porque el término e^{-bs}/s estaría **no acotado** conforme $b \longrightarrow \infty$. Así, $\mathscr{L}\{1\}$ está definida sólo para $s > 0$. Esto es algo normal de las transformadas de Laplace; el dominio de la transformación es normalmente de la forma $s > a$ para algún valor a.

Ejemplo 98.

Para $f(t) = e^{at}, \;\; t \geq 0,$

se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \lim_{b\longrightarrow\infty}\Big(-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big)\Big|_{t=0}^{t=b}\\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty}\Big(-\frac{e^{-(s-a)b}+1}{s-a}\Big).\end{aligned}$$

Si $s-a>0$, entonces $e^{-(s-a)b}\longrightarrow 0$ conforme $b\longrightarrow\infty$; por lo que

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para} \quad s>a.$$

No es necesario realizar a fondo los cálculos de la transformada de Laplace directamente de la definición. Una vez que se conocen las transformadas de Laplace de varias funciones, éstas pueden combinarse para obtener las transformadas de otras funciones. La razón es que la transformación de Laplace es una operación lineal.

Teorema 99 (Linealidad de la Transformada de Laplace)**.**

La transformada de Laplace es una operación lineal; es decir, para cualesquiera funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace existan y cualesquiera constantes α y β,

$$\mathscr{L}\big\{\alpha f(t)+\beta g(t)\big\} = \alpha\mathscr{L}\big\{f(t)\big\}+\beta\mathscr{L}\big\{g(t)\big\}.$$

Ejemplo 100.

Aplicando la linealidad de la transformada de Laplace y recordando que

$$sen^2(A) = \frac{1-cos(2A)}{2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{3e^{2t}+2sen^2(3t)\} &= \mathscr{L}\{3e^{2t}+1-cos(6t)\}\\ &= 3\mathscr{L}\{e^{2t}\}+\mathscr{L}\{1\}-\mathscr{L}\{cos(6t)\}\\ &= \frac{3}{s-2}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36}\\ &= \frac{3s^3+144s-72}{s(s-2)(s^2+36)} \quad \text{para} \quad s>0.\end{aligned}$$

Antes de continuar con otras propiedades importantes de la transformada de Laplace, es de mencionar que de manera similar a las tablas de derivadas e integrales de funciones básicas, existe una *tabla de transformadas de Laplace* para algunas funciones elementales importantes y la misma es de gran utilidad.

Una vez que se conocen las transformadas de la tabla de las transformadas de Laplace, prácticamente todas las transformadas que se necesitarán pueden obtenerse mediante el uso de algunos teoremas generales simples que consideramos a continuación.

Teorema 101 (Existencia de la Transformada de Laplace)**.**

Sea $f(t)$ una función continua a trozos para $t \geq 0$ y que satisface $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ para todo $t \geq 0$ y para la constantes γ y M. Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ existe para toda $s > \gamma$.

Una consecuencia inmediata que se obtiene del teorema anterior es el siguiente resultado

Corolario 102.

Si la función $f(t)$ satisface las hipótesis del Teorema 101, entonces

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Otro hecho de mencionar de la transformada de Laplace es su *unicidad*. Esto es, si la transformada de Laplace de una función dada existe, se encuentra determinada de manera única. Recíprocamente, puede demostrarse que si dos funciones (ambas definidas en el eje real positivo) tienen la misma transformada, estas funciones no pueden diferir en un intervalo de longitud positiva, aun cuando pueden hacerlo en varios puntos aislados. Puesto que esto no es de importancia en las aplicaciones, puede decirse que la inversa de una transformada dada es fundamentalmente única. En particular, si dos funciones continuas tienen la misma transformada, son por completo idénticas, lo cual es de importancia práctica.

Otra propiedad general de las transformadas de Laplace que amplían enormemente la flexibilidad del cálculo de transformadas de Laplace es el siguiente:

Teorema 103 (Fórmula de Desplazamiento)**.**

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a$ y α es una constante, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(s-\alpha), \qquad s > a + \alpha;$$

y recíprocamente.

La siguiente tabla contiene una breve lista de pares de transformadas útiles.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$		$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$
1	$\frac{1}{s} \quad (s > 0)$		$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$
t	$\frac{1}{s^2} \quad (s > 0)$		$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$
$t^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$		$sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} \quad (s > 0)$		$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0)$
$2\sqrt{t/\pi}$	$\frac{1}{s^{3/2}} \quad (s > 0)$		$senh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \quad (s > \lvert\omega\rvert)$
$t^a, \quad (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \quad (s > 0)$		$cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2} \quad (s > \lvert\omega\rvert)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad (s > 0)$		$e^{at} sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (s > 0)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (s > 0)$		$e^{at} cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (s > 0)$
$e^{at} senh(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 - \omega^2} \quad (s > 0)$		$e^{at} cosh(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - \omega^2} \quad (s > 0)$

La técnica de la transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial esta basada en la transformada de Laplace de derivadas. En términos generales, la derivación de funciones corresponde a la multiplicación de transformadas por s y que la integración de funciones corresponde a la división de transformadas entre s. Por tanto, **la transformada de Laplace reemplaza las operaciones del cálculo con operaciones de álgebra con transformadas**. Ésta, en resumidas cuentas, es la idea básica de Laplace, por la cual merece admiración.

Teorema 104 (Transformadas de Laplace de Derivadas)**.**

Si la función $f(t)$ es continua y suave a trozos para $t \geq 0$ con $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ para $t \geq 0$. Entonces, la $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > \gamma$, y

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \tag{3.20}$$

La igualdad (3.20), se puede extender a derivadas de orden superior. Es decir, si la función $g(t) = f'(t)$ satisface la hipótesis del Teorema 104, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''(t)\} &= \mathscr{L}\{g'(t)\} = s\mathscr{L}\{g(t)\} - g(0) \\
&= s\mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s\Big(s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0)\Big) - f'(0) \\
&= s^2\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

De manera general se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 105 (Transformada de Laplace de Derivadas de Orden Superior)**.**

Sean $f(t)$ y sus derivadas $f'(t), f''(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ funciones continuas y suaves para $t \geq 0$, las cuales satisfacen las hipótesis del Teorema 104, para alguna γ y M. Entonces la transformada de Laplace de $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > \gamma$, y

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{3.21}$$

3.5 Aplicaciones de la Transformada de Laplace a las Ecuaciones Diferenciales

Supongamos que queremos resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t), \\ y(0) = y_0; \;\; y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{3.22}$$

Para ver cómo funciona el método, apliquemos la transformación de Laplace $\mathscr{L}$ a ambos miembros de (3.22),

$$\mathscr{L}\{y'' + ay' + by\} = \mathscr{L}\{f(t)\},$$

por la linealidad de $\mathscr{L}$, resulta

$$\mathscr{L}\{y''\} + a\mathscr{L}\{y'\} + b\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{f(t)\}, \tag{3.23}$$

aplicando (3.21), obtenemos

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + as\mathscr{L}\{y\} - ay(0) + b\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{f(t)\},$$

agrupando y despejando

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{\mathscr{L}\{f(t)\} + (s+a)y_0 + y_1}{s^2 + as + b}\,. \tag{3.24}$$

La función $f(t)$ es conocida, así que su transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$ es una función específica de s; y como a, b, y_0 y y_1 son constantes conocidas, $\mathscr{L}\{y\}$ es una función completamente conocida de s. Si somos capaces ahora de encontrar qué función $y(t)$ tiene al miembro de la derecha de (3.23) como su transformada de Laplace, esa función será la solución a nuestro problema de valores inicial. Este procedimiento es particularmente adecuado para resolver problemas de valores iniciales en las que la función $f(t)$ es discontinua, ya que los métodos anteriores pueden ser difíciles de aplicar.

Sólo hay una duda en esa técnica: para que (3.23) tenga sentido, las funciones $f(t), y, y'$ e y'' han de tener transformadas de Laplace. La inquietud queda superada en cuanto supongamos que $f(t)$ es continua (o continua a trozos) y de orden exponencial $\Big(|f(t)| \leq Me^{\gamma t}\Big)$. Bajo tal hipótesis, se demuestra que y, y' e y'' tienen necesariamente las mismas propiedades y, en consecuencia, admiten transformadas de Laplace. Otra dificultad que se presenta y hemos dado por valederas es que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} ye^{-st} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\longrightarrow\infty} y'e^{-st} = 0.$$

No obstante, como y e y' son automáticamente de orden exponencial, esas proposiciones son válidas para grandes valores de t.

Veamos los siguientes ejemplos, para ilustrar dicha técnica.

Ejemplo 106.

Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 4y = 4t, \\ y(0) = 1; \;\; y'(0) = 5. \end{cases}$

Solución

En primer lugar se aplica la transformada de Laplace a toda la ecuación diferencial, luego se usan las respectivas propiedades y se despeja; esto es

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' + 4y\} &= \mathscr{L}\{4t\}, \\
\mathscr{L}\{y''\} + 4\mathscr{L}\{y\} &= 4\mathscr{L}\{t\}, \qquad \text{(linealidad)} \\
s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathscr{L}\{y\} &= \frac{4}{s^2}, \quad \big(por\ (3.21) \quad \text{y la tabla de las T.L.}\big) \\
(s^2+4)\mathscr{L}\{y\} &= s + 5 + \frac{4}{s^2} \\
\mathscr{L}\{y\} &= \frac{s}{s^2+4} + \frac{5}{s^2+4} + \frac{4}{s^2(s^2+4)} \\
&= \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2+4} - \frac{1}{s^2} \\
&= \mathscr{L}\{cos(2t)\} + \mathscr{L}\{2sen(2t)\} + \mathscr{L}\{t\} \\
&= \mathscr{L}\{cos(2t) + 2sen(2t) + t\}, \ \text{(linealidad)}
\end{aligned}$$

Por tanto, al considerar la transformada de Laplace inversa, se tiene que

$$y(t) = cos(2t) + 2sen(2t) + t$$

es la solución buscada. Es fácil comprobar el resultado, ya que por inspección se ve que la solución general es

$$y(t) = \alpha_1 cos(2t) + \alpha_2 sen(2t) + t,$$

y las condiciones iniciales implican que $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$.

Ejemplo 107.

Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0, \\ y(0) = 2; \;\; y'(0) = -1 \end{cases}$.

Solución

$$\mathscr{L}\{y'' - y' - 6y\} = \mathscr{L}\{0\} = 0,$$

$$\mathscr{L}\{y''\} - \mathscr{L}\{y'\} - 6\mathscr{L}\{y\} = 0, \qquad (\text{ linealidad})$$

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - s\mathscr{L}\{y\} + y(0) - 6\mathscr{L}\{y\} = 0, \quad (por\ (3.21))$$

$$(s^2 - s - 6)\mathscr{L}\{y\} = 2s - 3$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{2s-3}{s^2-s-6}\,.$$

Usamos fracciones parciales para descomponer la fracción del lado derecho en dos fracciones simples; esto es,

$$\frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2}\,,$$

de donde se sigue que $A = 3/5$ y $B = 7/5$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\} &= \frac{3/5}{s-3} + \frac{7/5}{s+2}\\ &= \frac{3}{5}\mathscr{L}\{e^{3t}\} + \frac{7}{5}\mathscr{L}\{e^{-2t}\}\\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{3}{5}\,e^{3t} + \frac{7}{5}\,e^{-2t}\Big\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución del problema de valores iniciales es

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{5}\,e^{3t} + \frac{7}{5}\,e^{-2t}}\,.$$

Ejemplo 108.

Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 3e^{-t}sen(t), \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = 3 \end{cases}$.

<u>Solución</u>

$$\mathscr{L}\{y'' + 2y' + 5y\} = \mathscr{L}\{3e^{-t}sen(t)\}$$

$$\mathscr{L}\{y''\} + 2\mathscr{L}\{y'\} + 5\mathscr{L}\{y\} = 3\mathscr{L}\{e^{-t}sen(t)\}$$

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 2s\mathscr{L}\{y\} - 2y(0) + 5\mathscr{L}\{y\} = \frac{3}{(s+1)^2+1}$$

$$(s^2 + 2s + 5)\mathscr{L}\{y\} = \frac{3}{(s+1)^2+1} + 3$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\} &= \frac{3}{((s+1)^2+1)(s^2+2s+5)} + \frac{3}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{3s^2+6s+9}{(s^2+2s+5)(s^2+2s+2)}.\end{aligned}$$

Apoyandonos en fracciones parciales, se tiene

$$\frac{3s^2+6s+9}{(s^2+2s+5)(s^2+2s+2)} = \frac{A(2s+2)+B}{s^2+2s+5} + \frac{C(2s+2)+D}{s^2+2s+2}.$$

De donde resulta $A = C = 0, B = 2$ y $D = 1$. Por lo que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\} &= \frac{2}{s^2+2s+5} + \frac{1}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{2}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{2}{(s-(-1))^2+4} + \frac{1}{(s-(-1))^2+1} \\ &= \mathscr{L}\{e^{-t}sen(2t)\} + \mathscr{L}\{e^{-t}sen(t)\} \\ &= \mathscr{L}\{e^{-t}sen(2t) + e^{-t}sen(t)\}.\end{aligned}$$

Por consiguiente la solución del problema de valor inicial es

$$\boxed{y(t) = e^{-t}sen(2t) + e^{-t}sen(t)}.$$

3.5.1 Ejercicios Propuestos

Hallar las transformadas de Laplace de las siguientes funciones

(41) $f(t) = t^5e^{-2t}$; (42) $f(t) = 2e^{3t} - sen(5t)$;

(43) $f(t) = 10$; (44) $f(t) = 4sen(t)cos(t) + 2e^{-t}$;

(45) $f(t) = (1-t^2)e^{-t}$.

Hallar las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones

(46) $F(s) = \dfrac{30}{s^4}$; (47) $F(s) = \dfrac{4}{s^3} + \dfrac{6}{s^2+4}$;

(48) $F(s) = \dfrac{12}{(s+3)^4}$; (49) $F(s) = \dfrac{6}{(s+2)^2+9}$;

(50) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$.

Resolver los siguientes problemas de valores inicial con el apoyo de la transformada de Laplace

(51) $\begin{cases} y' + y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$

(52) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = 3. \end{cases}$

(53) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2 \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = 1. \end{cases}$

(54) $\begin{cases} y'' + 6y' + 18y = cos(2t) \\ y(0) = 1; \;\; y'(0) = -1. \end{cases}$

(55) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t} \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = 0. \end{cases}$

(56) $\begin{cases} y'' - 2y' = e^t senh(t) \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = 0. \end{cases}$

(57) $\begin{cases} y''' + 2y'' - y' - 2y = sen(t) \\ y(0) = 0; \;\; y'(0) = 0; \;\; y''(0) = 1. \end{cases}$

(58) $\begin{cases} y^{(4)} - y = 0; \quad y(0) = 1; \\ y'(0) = 0; \;\; y''(0) = -1; \;\; y'''(0) = 0. \end{cases}$

3.6 Aplicaciones de las E.D.O.L. de Orden Superior

Las leyes del universo están escritas en el lenguaje de las matemáticas. El álgebra es suficiente para resolver muchos problemas estáticos, pero la mayoría de los fenómenos naturales más interesantes involucra cambios descritos por ecuaciones que relacionan cantidades que cambian.

Anteriormente vimos que una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático de distintos fenómenos. Por este motivo, examinaremos con mayor detalle una aplicación, el movimiento de una masa unida a un resorte. Aparte de la terminología y las interpretaciones físicas de los cuatro términos de la ecuación lineal $ay'' + by' + cy = f(t)$, veremos que los procedimientos matemáticos para manejar, por ejemplo, un circuito eléctrico en serie son idénticos a los que se emplean en un sistema vibratorio de resorte y masa. Las formas de esta ecuación diferencial de segundo orden surgen en el análisis de problemas en muchas y diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Una de las principales razones para considerar estas ecuaciones diferenciales de segundo orden es que tienen importantes aplicaciones en mecánica y en la teoría de los circuitos eléctricos, lo que hace que sean de mayor importancia que las ecuaciones diferenciales lineales de órdenes superiores.

En esta sección revisaremos varios sistemas dinámicos lineales en donde cada modelo matemático es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t).$$