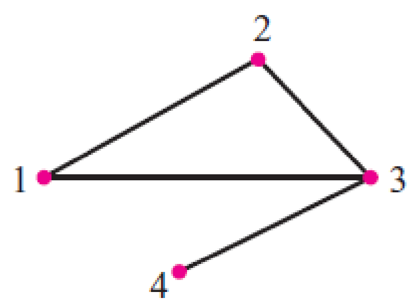
Ejercicios Clases 1 a 5 IAL

1. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & -6 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -9 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.
   a. Encuentre la matriz E tal que $3C - 2B + 8A - 4E$ es la matriz cero o nula 3×3
   b. Determine la matriz G tal que $2A + B - 3C + G$ es la matriz 3×3 con todos sus elementos iguales a 1.
   c. Halle una matriz F tal que $3A - 2B + 4F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Si α y β son escalares y A y B son matrices de $m \times n$, calcule $\alpha(A + B)$ y $\alpha A + \alpha B$ y muestre que son iguales. Calcule también $(\alpha + \beta)A$ y $\alpha A + \beta A$ y demuestre que son iguales.

3. Considere el grafo que une los cuatro puntos que se muestra en la siguiente figura. Construya una matriz de 4×4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si el punto i no está conectado (unido por línea) con el punto j y $a_{ij} = 1$ si el punto i está conectado con el punto j.



4. Encuentre B tal que $AB = C$. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

5. Una matriz A de $n \times n$ tal que $A^2 = I_n$ se llama involutiva. Pruebe que la siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo dado, encontrando primero una solución (si es posible) y después todas las soluciones al sistema homogéneo asociado. Utilice para ello los métodos de eliminación Gaussiana y de Gauss-Jordan.
   a. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x_1 - x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x - y + 2z = 2 \\ -5x + y + z = 1 \end{cases}$

7. Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión, radio y revista, se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de anuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un coste de $\$250.000$, en radio $\$5.000$ y en revista $\$30.000$. En el segundo presupuesto $\$310.000, \$4.000$ y $\$15.000$ y en el último presupuesto $\$560.000, \$10.000$ y $\$35.000$. Los totales por presupuesto son los siguientes $\$21.795.000, \$31.767.000$ y $\$61.225.000$. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

8. Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del alimento B y 5 del alimento C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 15.000 unidades del alimento A, 10.000 unidades del alimento B y 44.000 unidades del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?, ¿Existe una solución única?

9. Determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. De no ser así proporciones una lista de los axiomas que no se cumplen. En cada caso indique si existe elemento neutro e inverso, en caso de existir indique cual es.
   a. El conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones
   $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$

   para $\alpha \in \mathbb{R}$

   $\alpha(x, y) = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y + \alpha - 1)$
   b. El conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales, bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por un escalar definida sólo para escalares racionales.