Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v}$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

Problema Modelo Examen: Considere la transformación $T: P_2 \to P_4$ definida por $T\big(P(x)\big) = P(x) + x^2P(x)$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

(I) T es una transformación lineal

(II) Para un escalar α y $P \in P_2$ se cumple que $T(\alpha P) = \alpha T(P)$

Respuesta: Ambas son verdaderas

Solución: Podemos ver lo siguiente:

1. Para $P, Q \in P_2$ tenemos que

$T(P+Q)(x)$	$= (P+Q)(x) + x^2(P(x)+Q(x))$ $= P(x) + Q(x) + x^2P(x) + x^2Q(x)$ $= P(x) + x^2P(x) + Q(x) + x^2Q(x)$ $= T(P(x)) + T(Q(x))$

2. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $P \in P_2$, se cumple que

$T(\alpha P)(x)$	$= (\alpha P)(x) + x^2(\alpha P)(x)$ $= \alpha P(x) + x^2\alpha P(x)$ $= \alpha(P(x) + x^2P(x))$ $= \alpha T(P(x))$

Por lo que concluimos que es una transformación lineal.

Problema Modelo Examen: Considere la transformación $T: C[0,1] \to C[0,1]$ definida por $T(f(x)) = f^2(x)$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

(III) T es una transformación lineal

(IV) Para un escalar α y $f \in C[0,1]$ se cumple que $T(\alpha f) = \alpha T(f)$

Respuesta: Ambas son falsas

Solución: Podemos ver lo siguiente:

1. Para $f, g \in C[0,1]$ tenemos que

$T(f+g)(x)$	$=\big(f(x)+g(x)\big)^2$ $=f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)$
$T\big(f(x)\big)+T(g(x))$	$f^2(x)+g^2(x)\neq T(f+g)(x)$

2. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $P \in P_2$, se cumple que

$T(\alpha f)(x)$	$=\big((\alpha f)(x)\big)^2$ $=\big(\alpha f(x)\big)^2$ $=\alpha^2 f^2(x)$ $=\alpha^2 T\big(f(x)\big)$ $\neq \alpha T(f(x))$

Por lo que concluimos que no es una transformación lineal y nos satisface ninguna de las condiciones de transformación lineal.

Problema Modelo Examen: Considere la transformación $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ definida por

$$T(x,y,z)=\begin{pmatrix} y & z-x \\ z+x & x \end{pmatrix}$$

1. Demuestre que T es una transformación lineal
2. Halle el núcleo y la imagen de T
3. Determine la nulidad y rango de T
4. Indique si T es inyectiva y sobreyectiva

Solución:

1. Para ello debemos chequear las dos condiciones para ser una transformación lineal
   a. Consideremos $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$

$T\big((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big)$	$=T(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$ $=\begin{pmatrix} y_1+y_2 & z_1+z_2-x_1-x_2 \\ z_1+z_2+x_1+x_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} y_1+y_2 & z_1+z_2-x_1-x_2 \\ z_1+z_2+x_1+x_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} y_1+y_2 & z_1-x_1+z_2-x_2 \\ z_1+x_1+z_2+x_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} y_1 & z_1-x_1 \\ z_1+x_1 & x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_2 & z_2-x_2 \\ z_2+x_2 & x_2 \end{pmatrix}$ $=T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2)$

   a. Consideremos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$T(\alpha(x,y,z))$	$=T(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$ $=\begin{pmatrix} \alpha y & \alpha z-\alpha x \\ \alpha z+\alpha x & \alpha x \end{pmatrix}$

	$= \begin{pmatrix} \alpha y & \alpha(z-x) \\ \alpha(z+x) & \alpha x \end{pmatrix}$ $= \alpha \begin{pmatrix} y & z-x \\ z+x & x \end{pmatrix}$ $= \alpha T(x,y,z)$

Por lo anterior vemos que T es una transformación lineal.

2. El núcleo de la transformación T es igual a

$$Nu(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$$

Pero tenemos

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y & z-x \\ z+x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De allí obtenemos el sistema de ecuaciones lineales y lo podemos resolver por el método de eliminación gaussiana:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z - x = 0 \\ z + x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la última matriz vemos que el sistema es compatible determinado y la única solución es (0,0,0). Luego

$$Nu(T) = \{(0,0,0)\}$$

La imagen de la transformación es

$$im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : Existe\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ tal\ que\ T(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

Tenemos que

$T(x,y,z)$	$= \begin{pmatrix} y & z-x \\ z+x & x \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix}$ $= x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La imagen es el conjunto generado por los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

3. La nulidad es la dimensión del núcleo. Como el núcleo es $Nu(T) = \{(0,0,0)\}$ la nulidad es igual a cero. Por la parte anterior, vemos que una base para la imagen de T es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ por lo que su dimensión es 3 y el rango es $\rho = 3$. Vemos que se cumple el teorema de que:

$$Dim\ \mathbb{R}^3 = \nu(T) + \rho(T) = 0 + 3 = 3$$

4. Como $Nu(T) = \{(0,0,0)\ \}$, entonces T es inyectiva. Como $\rho(T) \neq Dim(M_{2\times 2}) = 4$, entonces T no es sobreyectiva.