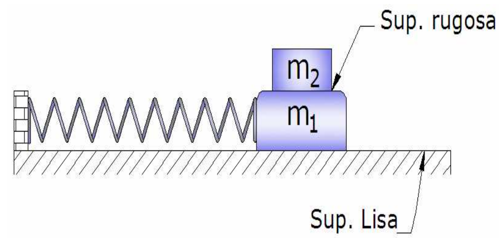
El sistema masas-resorte que se presenta está conformado por dos cajas de masas m_1 y m_2 respectivamente, colocada una sobre la otra. Existe entre ellas un coeficiente de roce estático μ_e y la caja m_1 está ubicada en una superficie lisa. El resorte de constante de elasticidad K_R tiene su extremo derecho soldado a la caja m_1 y el izquierdo está empotrado en una pared, tal y como se observa en la figura.



Datos:

$m_1 = 5\,kg$; $m_2 = 3\,kg$; $k_R = 100\,N/m$; $g = 9{,}8\,m/s^2$

Sí se considera que no hay deslizamiento entre m_1 y m_2 y las condiciones iniciales son: $x_{(0)} = 0{,}2\,m$ **y** $\vec{v}_{(0)} = 0{,}3\,\hat{i}\,m/s$

1. Calcular la amplitud y el ángulo de fase del movimiento.
2. ¿Cuál será la rapidez del oscilador cuando su posición sea $x = 0{,}10\,m$?
3. ¿Cuánto tiempo tarda el oscilador en alcanzar por primera vez una velocidad de $\vec{v} = -0{,}6\,\hat{i}\,m/s$?
4. ¿Cual debe ser el coeficiente de roce estático máximo entre **m_1 y m_2** para que m_2 no deslice?

Sí cuando el sistema está en la posición $x = A$ **se retira** m_2

5. Comparando esta nueva situación con la anterior, se puede afirmar que:

a) Amplitud aumenta y ω aumenta	**b)** Amplitud permanece igual y el periodo aumenta	**c)** Amplitud disminuye y ω aumenta	**d)** Amplitud permanece igual y el periodo disminuye

6. La energía potencial del sistema masa – resorte cuando su $\vec{v} = 0{,}2\,\hat{i}\,m/s$ (en J) es:

SOLUCIÓN

1. Calcular la amplitud y el ángulo de fase del movimiento:

Para determinar la **amplitud (A)** del movimiento, observamos de qué información disponemos.

Tenemos las condiciones de posición y velocidad en el instante t=0, por lo que podemos calcular A por la ecuación de energía mecánica, valor que es constante en cualquier instante de tiempo:

$$E_{sist.en\ \vec{x}=A} = E_{sist.en\ t=0}$$

$$\frac{K_R A^2}{2} = \frac{m V_0^2}{2} + \frac{K_R x_0^2}{2}$$

$$como\ \omega^2 = \frac{K_R}{m}$$

$$A^2 = \frac{V_0^2}{\omega^2} + x_0^2$$

Para hallar ω:

Este caso consiste en un sistema masa – resorte. Las masas de las cajas y constante del resorte son datos del problema. Sabiendo que:

$$\omega^2 = \frac{K_R}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{100}{5+3}$$

$$\omega = 3{,}54\,rad/s$$

Sustituyendo Vo, Xo y ω en la ecuación de A:

$$A^2 = \frac{0{,}3^2}{3{,}54^2} + 0{,}2^2$$

$$A = 0{,}217\,m$$

El **ángulo de fase (δ)** lo determinamos a partir de las condiciones iniciales, para t=0, $x_{(0)} = 0,2m$ **y** $\vec{v}_{(0)} = 0,3\,\hat{i}\,m/s$

Usando la función posición:

$$\vec{x} = A\cos(\omega t + \delta)(m)$$
sustituyendo A *y* ω:
$$\vec{x} = 0,217\cos(3,54t + \delta)(m)$$

Despejando δ:

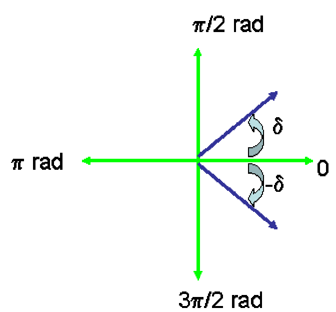
RECUERDA COLOCAR TU CALCULADORA EN RADIANES

$$para: t = 0, x_0 = 0,2m$$
$$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{0,2}{0,217}\right)$$
$$\delta = 0,3985 rad$$

verificamos con la ecuación velocidad:

$$\vec{v}_0 = -(0,217)(3,54)\,\text{sen}(3,54(0) + 0,3985)$$
$$\vec{v}_0 = -0,299 m/s$$

El resultado obtenido nos da el módulo de la velocidad, aprox. Vo= 0,3 pero con **signo negativo.**
IMPORTANTE: debemos usar un ángulo cuyo seno nos de el mismo valor pero con signo negativo y que el coseno permanezca igual.



Este ángulo δ está en el primer cuadrante, donde tanto los senos como los cosenos de los ángulos son positivos Necesitamos que el coseno siga siendo positivo pero el seno sea negativo. Esto sucede en el cuarto cuadrante. **ENTONCES PODEMOS USAR ESTE MISMO ÁNGULO EN EL CUARTO CUADRANTE.** Al ver la figura observamos que podemos usar el mismo δ pero con signo negativo.

De esta forma las ecuaciones quedarían:

$$\vec{x} = 0,217\cos(3,54t - 0,3985)(m)$$
$$\vec{V} = -0,768 sen(3,54t - 0,3985)(m/s)$$

Y verificando para t=0

$$\vec{x}_0 = 0,217\cos(3,54(0) - 0,3985)$$
$$\vec{x}_0 = 0,2m$$
$$\vec{V}_0 = -0,768 sen(3,54(0) - 0,3985)(m/s)$$
$$\vec{V}_0 = 0,299 m/s$$

es decir:

$$\delta = -0,3985 rad$$

2. ¿Cuál será la rapidez del oscilador cuando su posición sea $x = 0,10m$ **?**

Esta rapidez la podemos obtener directamente a partir de la ecuación de energía utilizada en la Pregunta 1, una vez despejada la Amplitud:

$$A^2 = \frac{V^2}{\omega^2} + x^2$$
$$V = \sqrt{\omega^2 (A^2 - x^2)}$$
$$V = 0,682 m/s$$

3. **¿Cuánto tiempo tarda el oscilador en alcanzar por primera vez la velocidad de** $\vec{v} = -0,6\,\hat{i}\,m/s$ **?**

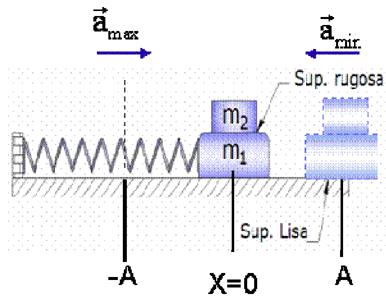
Usando directamente la función velocidad V(t), despejamos el tiempo:

RECUERDA TU CALCULADORA debe estar EN RADIANES

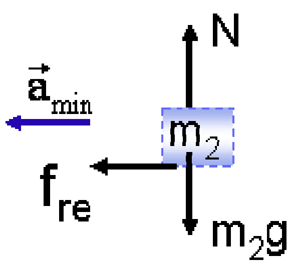
$$\vec{V} = -0,768 sen(3,54t - 0,3985)(m/s)$$
$$-0,6 = -0,768 sen(3,54t - 0,3985)$$
$$sen^{-1}\left(\frac{-0,6}{-0,768}\right) = 3,54t - 0,3985$$
$$0,89667 + 0,3985 = 3,54t$$
$$t = \frac{1,2952}{3,54}$$
$$t = 0,366 s$$

4. ¿**Cuál debe ser el coeficiente de roce estático máximo entre m1 y m2 para que m2 no deslice?**

Con el fin de determinar los puntos en los cuales existen en el sistema fuerzas de roce estáticas máximas debemos identificar donde las cajas experimentan módulos máximos de aceleraciones:



Tomaremos el punto x=A y dibujaremos el diagrama de cuerpo libre de m_2 cuando pasa por este punto:



$$\sum \vec{F}_y = 0$$
$$N - m_2 g = 0$$
$$N = m_2 g$$

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}$$
$$-f_{re} = -m_2 \cdot a_{min}$$
$$\mu_e N = m_2 \left(\omega^2 A\right)$$
$$\mu_e m_2 g = m_2 \left(\omega^2 A\right)$$
$$\mu_e = \frac{\omega^2 A}{g}$$

$$\mu_e = \frac{3{,}54^2 0{,}217}{9{,}8}$$
$$\mu_e = 0{,}277$$

Sí cuando el sistema está en la posición $x = A$ **se retira** m_2

5. Comparando esta nueva situación con la anterior, se puede afirmar que:

a) Amplitud aumenta y ω aumenta

b) Amplitud permanece igual y el periodo aumenta

c) Amplitud disminuye y ω aumenta

d) Amplitud permanece igual y el periodo disminuye

Al analizar el sistema masa – resorte, observamos que parámetros cambian al quitar m_2 cambia ω puesto que depende las masas de las cajas: $\omega^2 = \frac{K_R}{m}$

Al observar la ecuación nos damos cuenta que sí **m disminuye** → ω **aumenta**

Y el período es: $T = \frac{2\pi}{\omega}(s)$

Analizando esta ecuación, sí ω **aumenta** → **T disminuye**

y **la Amplitud** no depende la masa del sistema por lo que la opción correcta es la **d)**

6. La energía potencial del sistema masa – resorte cuando su $\vec{v} = 0,2\,\hat{i}$ m/s (en J) es:

usando la ecuación de energía mecánica total se puede determinar directamente LA ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA en el momento en que tiene una rapidez de 0,2 m/s:

$$E_{total} = U_e + E_c$$

$$\frac{K_R A^2}{2} = U_e + \frac{mV^2}{2}$$

$$\frac{100\left(0,217\right)^2}{2} - \frac{5\left(0,2\right)^2}{2} = U_e$$

$$U_e = 2,25\,\mathrm{J}$$