14.3 Cambio de variables: coordenadas polares

- Expresar y evaluar integrales dobles en coordenadas polares.

Integrales dobles en coordenadas polares

Algunas integrales dobles son *mucho* más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular. Esto es así especialmente cuando se trata de regiones circulares, cardioides y pétalos de una curva rosa, y de integrandos que contienen $x^2 + y^2$.

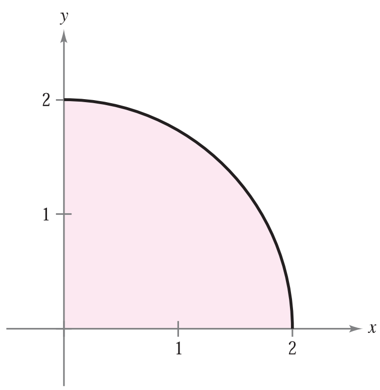
En la sección 10.4 se vio que las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) del punto, de la manera siguiente.

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

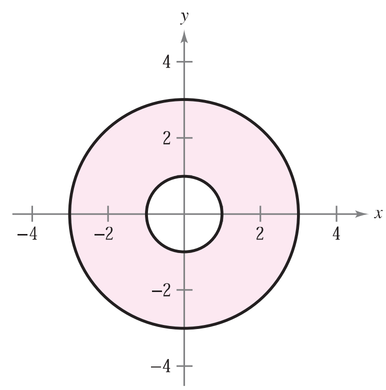
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO 1 Utilizar coordenadas polares para describir una región

Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura 14.24.



a)



b)

Figura 14.24

Solución

a) La región R es un cuarto del círculo de radio 2. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta)\colon 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2\}.$$

b) La región R consta de todos los puntos comprendidos entre los círculos concéntricos de radios 1 y 3. Esta región se describe en coordenadas polares como

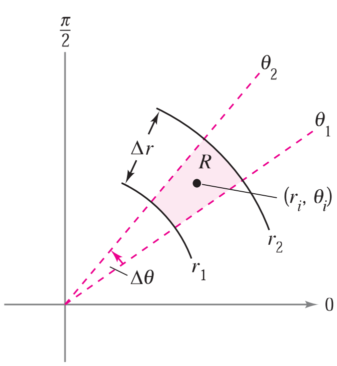
$$R = \{(r, \theta)\colon 1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Las regiones del ejemplo 1 son casos especiales de **sectores polares**

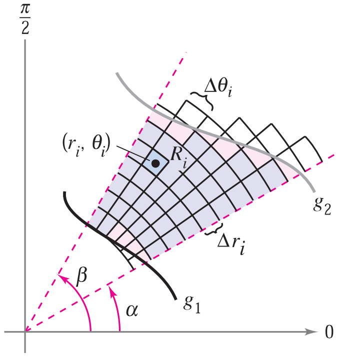
$$R = \{(r, \theta)\colon r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

Sector polar.

como el mostrado en la figura 14.25.



Sector polar
Figura 14.25



La red o cuadrícula polar se sobrepone sobre la región R
Figura 14.26

Para definir una integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares, considerar una región R limitada o acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. En lugar de hacer una partición de R en rectángulos pequeños, se utiliza una partición en sectores polares pequeños. A R se le superpone una red o cuadrícula polar formada por rayos o semirrectas radiales y arcos circulares, como se muestra en la figura 14.26. Los sectores polares R_i que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición polar interna** Δ, cuya **norma** $\|\Delta\|$ es la longitud de la diagonal más larga en los n sectores polares.

Considerar un sector polar específico R_i, como se muestra en la figura 14.27. Se puede mostrar (ver ejercicio 75) que el área de R_i es

$$\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \qquad \text{Área de } R_i.$$

donde $\Delta r_i = r_2 - r_1$ y $\Delta\theta_i = \theta_2 - \theta_1$. Esto implica que el volumen del sólido de altura $f(r_i \cos \theta_i, r_i \operatorname{sen} \theta_i)$ sobre R_i es aproximadamente

$$f(r_i \cos \theta_i, r_i \operatorname{sen} \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$$

y se tiene

$$\int_R\!\!\int f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{n} f(r_i \cos \theta_i, r_i \operatorname{sen} \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta\theta_i.$$

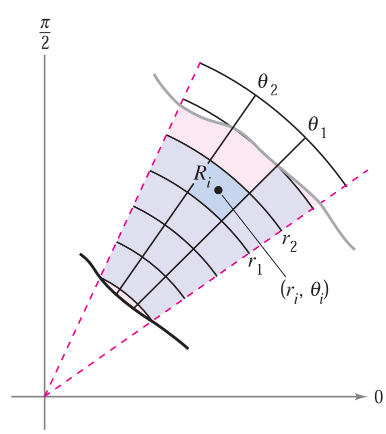
La suma de la derecha se puede interpretar como una suma de Riemann para $f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)r$. La región R corresponde a una región S *horizontalmente simple* en el plano $r\theta$, como se muestra en la figura 14.28. Los sectores polares R_i corresponden a los rectángulos S_i, y el área ΔA_i de S_i es $\Delta r_i \Delta\theta_i$. Por tanto, el lado derecho de la ecuación corresponde a la integral doble

$$\int_S\!\!\int f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dA.$$

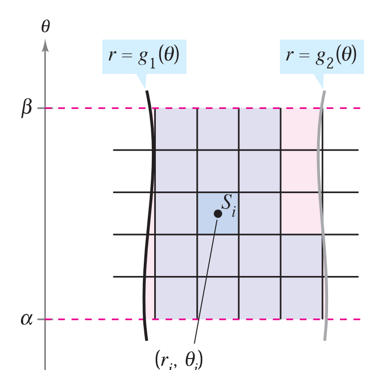
A partir de esto, se puede aplicar el teorema 14.2 para escribir

$$\begin{aligned}\int_R\!\!\int f(x, y)\, dA &= \int_S\!\!\int f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dA \\ &= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta.\end{aligned}$$

Esto sugiere el teorema siguiente, cuya demostración se verá en la sección 14.8.



El sector polar R_i es el conjunto de todos los puntos (r, θ) tal que $r_1 \le r \le r_2$ y $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.
Figura 14.27



Región S horizontalmente simple
Figura 14.28

TEOREMA 14.3 CAMBIO DE VARIABLES A LA FORMA POLAR

Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, donde $0 \le (\beta - \alpha) \le 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R, entonces

$$\int_R\!\!\int f(x, y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta.$$

EXPLORACIÓN

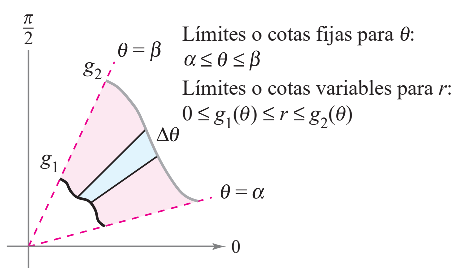
Volumen de un sector paraboloide En la exploración de la página 997 se pidió resumir los diferentes métodos hasta ahora estudiados para calcular el volumen del sólido limitado o acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

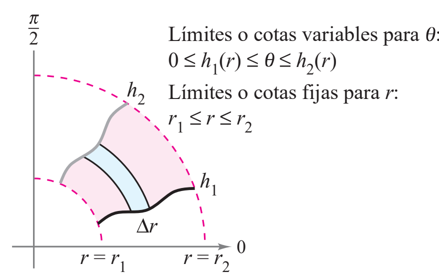
y el plano xy. Ahora se conoce un método más. Utilizarlo para encontrar el volumen del sólido.

NOTA Si $z = f(x, y)$ es no negativa en R, entonces la integral del teorema 14.3 puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R. Cuando se usa la integral en el teorema 14.3, asegurarse de no omitir el factor extra de r en el integrando. ■

La región R puede ser de dos tipos básicos, regiones ***r*-simples** y regiones **θ-simples**, como se muestra en la figura 14.29.



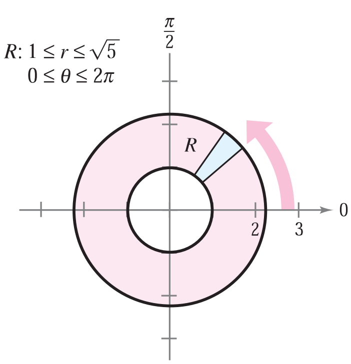
Región r-simple
Figura 14.29



Región θ-simple

EJEMPLO 2 Evaluar una integral usando coordenadas polares doble

Sea R la región anular comprendida entre los dos círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Evaluar la integral $\int_R\!\int (x^2 + y)\,dA$.



Región r-simple
Figura 14.30

Solución Los límites o cotas polares son $1 \le r \le \sqrt{5}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, como se muestra en la figura 14.30. Además, $x^2 = (r\cos\theta)^2$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_R\!\!\int (x^2 + y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\,\text{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\,\text{sen}\,\theta\right)\Bigg]_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta \\
&= \left(3\theta + \frac{3\,\text{sen}\,2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\cos\theta\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$

En el ejemplo 2, notar el factor extra de r en el integrando. Esto proviene de la fórmula para el área de un sector polar. En notación diferencial, se puede escribir

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

lo que indica que el área de un sector polar aumenta al alejarse del origen.

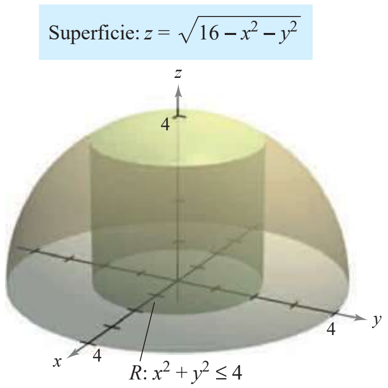


Figura 14.31

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Utilizar las coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \qquad \text{Hemisferio que forma la superficie superior.}$$

e inferiormente por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \leq 4 \qquad \text{Región circular que forma la superficie inferior.}$$

como se muestra en la figura 14.31.

Solución En la figura 14.31 se puede ver que R tiene como límites o cotas

$$-\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2$$

y que $0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. En coordenadas polares, las cotas son

$$0 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con altura $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. Por consiguiente, el volumen V está dado por

$$\begin{aligned} V = \int\!\!\int_R f(x, y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2}\Big]_0^2\,d\theta \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(24\sqrt{3} - 64\right) d\theta \\ &= -\frac{8}{3}\left(3\sqrt{3} - 8\right)\theta\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{16\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right) \approx 46.979. \end{aligned}$$

NOTA Para ver la ventaja de las coordenadas polares en el ejemplo 3, hay que tratar de evaluar la integral iterada rectangular correspondiente

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2}\,dx\,dy.$$

TECNOLOGÍA Todo sistema algebraico por computadora que calcula integrales dobles en coordenadas rectangulares también calcula integrales dobles en coordenadas polares. La razón es que una vez que se ha formado la integral iterada, su valor no cambia al usar variables diferentes. En otras palabras, si se usa un sistema algebraico por computadora para evaluar

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - x^2}\,x\,dx\,dy$$

se deberá obtener el mismo valor que se obtuvo en el ejemplo 3.

Así como ocurre con coordenadas rectangulares, la integral doble

$$\int\!\!\int_R dA$$

puede usarse para calcular el área de una región en el plano.

EJEMPLO 4 Hallar áreas de regiones polares

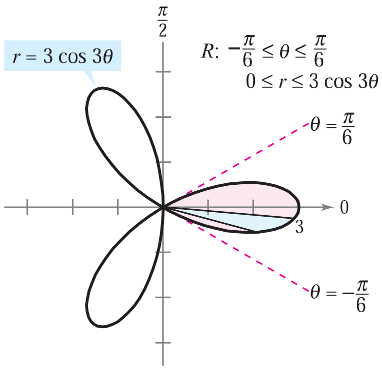


Figura 14.32

Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por la gráfica de $r = 3\cos 3\theta$.

Solución Sea R un pétalo de la curva mostrada en la figura 14.32. Esta región es r-simple y los límites son los siguientes.

$$-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6} \qquad \text{Límites o cotas fijas para } \theta.$$

$$0 \le r \le 3\cos 3\theta \qquad \text{Límites o cotas variables para } r.$$

Por tanto, el área de un pétalo es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}A = \iint_R dA &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{3\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{r^2}{2}\Big]_0^{3\cos 3\theta} d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta\,d\theta \\
&= \frac{9}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)\,d\theta = \frac{9}{4}\Big[\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6\theta\Big]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Así, el área total es $A = 9\pi/4$.

Como se ilustra en el ejemplo 4, el área de una región en el plano puede representarse mediante

$$A = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta.$$

Si $g_1(\theta) = 0$, se obtiene

$$A = \int_\alpha^\beta \int_0^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{r^2}{2}\Big]_0^{g_2(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(g_2(\theta))^2\,d\theta$$

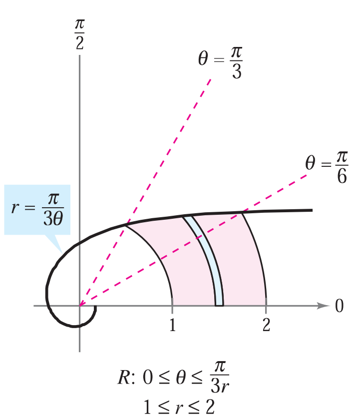
lo cual concuerda con el teorema 10.13.

Hasta ahora en esta sección, todos los ejemplos de integrales iteradas en forma polar han sido de la forma

$$\int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta$$

en donde el orden de integración es primero con respecto a r. Algunas veces se puede simplificar el problema de integración cambiando el orden de integración, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración



Región θ-simple
Figura 14.33

Hallar el área de la región acotada superiormente por la espiral $r = \pi/(3\theta)$ e inferiormente por el eje polar, entre $r = 1$ y $r = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 14.33. Las cotas o límites polares de la región son

$$1 \le r \le 2 \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3r}.$$

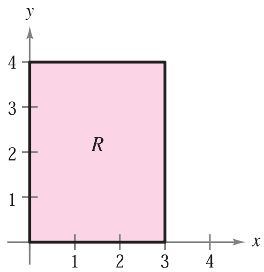
Por tanto, el área de la región puede evaluarse como sigue.

$$A = \int_1^2 \int_0^{\pi/(3r)} r\,d\theta\,dr = \int_1^2 r\theta\Big]_0^{\pi/(3r)} dr = \int_1^2 \frac{\pi}{3}\,dr = \frac{\pi r}{3}\Big]_1^2 = \frac{\pi}{3}$$

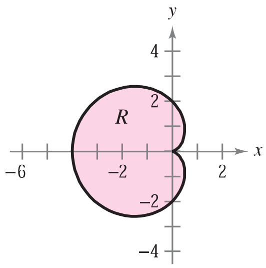
14.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 se muestra la región R para la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$. Decir si serían más convenientes coordenadas rectangulares o polares para evaluar la integral.

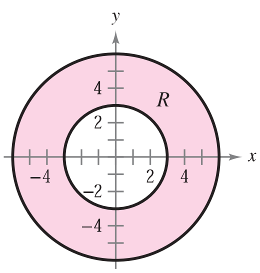
1.



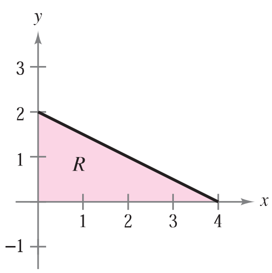
2.



3.

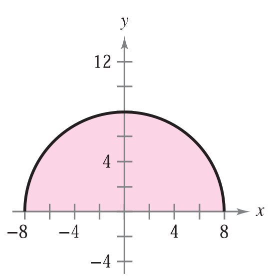


4.

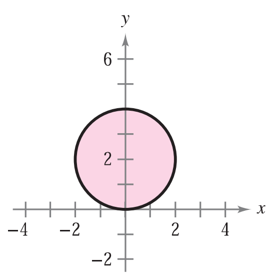


En los ejercicios 5 a 8, utilizar las coordenadas polares para describir la región mostrada.

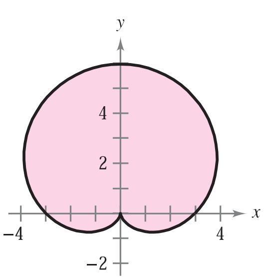
5.



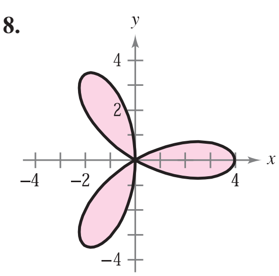
6.



7.



8.



En los ejercicios 9 a 16, evaluar la integral doble $\int_R\int f(r, \theta)\, dA$, y dibujar la región R.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^2\, dr\, d\theta$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{6} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{4} r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dr\, d\theta$

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^{3} \sqrt{9 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{3} re^{-r^2}\, dr\, d\theta$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} \theta r\, dr\, d\theta$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-\cos\theta} (\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta$

En los ejercicios 17 a 26, evaluar la integral iterada pasando a coordenadas polares.

17. $\displaystyle\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\, dx\, dy$

18. $\displaystyle\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy\, dx$

19. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

20. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{2}\int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$

23. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\, dy\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^{4}\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2\, dx\, dy$

25. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2)\, dy\, dx$

26. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

En los ejercicios 27 y 28, combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada pasando a coordenadas polares. Evaluar la integral iterada resultante.

27. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{x} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

28. $\displaystyle\int_0^{5\sqrt{2}/2}\int_0^{x} xy\, dy\, dx + \int_{5\sqrt{2}/2}^{5}\int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy\, dy\, dx$

En los ejercicios 29 a 32, utilizar coordenadas polares para escribir y evaluar la integral doble $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

29. $f(x, y) = x + y$, R: $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

30. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$, R: $x^2 + y^2 \le 25$, $x \ge 0$

31. $f(x, y) = \arctan\dfrac{y}{x}$, R: $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le y \le x$

32. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, R: $x^2 + y^2 \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

Volumen **En los ejercicios 33 a 38, utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

33. $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, primer octante

34. $z = x^2 + y^2 + 3$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 25$

36. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 4$

37. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$

38. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$

39. ***Volumen*** Hallar a tal que el volumen en el interior del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y en el exterior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio.

40. ***Volumen*** Utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen de una esfera de radio a.

41. ***Volumen*** Determinar el diámetro de un orificio cavado verticalmente a través del centro del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = 25e^{-(x^2+y^2)/4}$, $z = 0$, y $x^2 + y^2 = 16$ si se elimina la décima parte del volumen del sólido.

CAS **42.** ***Diseño industrial*** Las superficies de una leva de doble lóbulo se representan por las desigualdades $\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$ y

$$\frac{-9}{4(x^2 + y^2 + 9)} \leq z \leq \frac{9}{4(x^2 + y^2 + 9)}$$

donde todas las medidas se dan en pulgadas.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la leva.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el perímetro de la curva polar

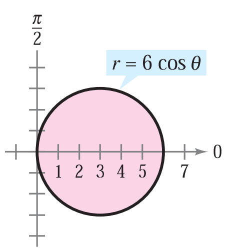
$$r = \tfrac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta).$$

Ésta es la distancia que recorre una pieza en contacto con la leva durante un giro completo de ésta.

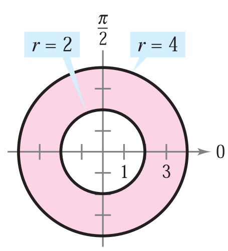
c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del acero en la leva.

Área **En los ejercicios 43 a 48, utilizar una integral doble para calcular el área de la región sombreada.**

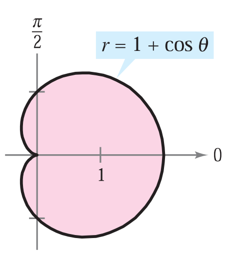
43.



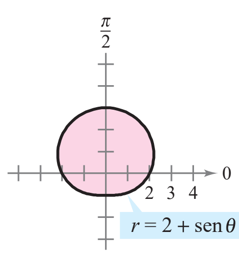
44.



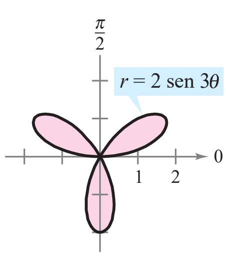
45.



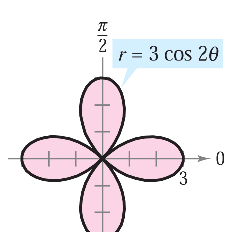
46.



47.



48.



Área **En los ejercicios 49 a 54, trazar una gráfica de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones. Después, usar una integral doble para encontrar el área de la región.**

49. Dentro del círculo $r = 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

50. Dentro de la cardioide $r = 2 + 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

51. Dentro del círculo $r = 3 \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

52. Dentro de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$.

53. Dentro de la curva rosa $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ y fuera del círculo $r = 2$.

54. Dentro del círculo $r = 2$ y fuera de la cardioide $r = 2 - 2 \cos \theta$.

Desarrollo de conceptos

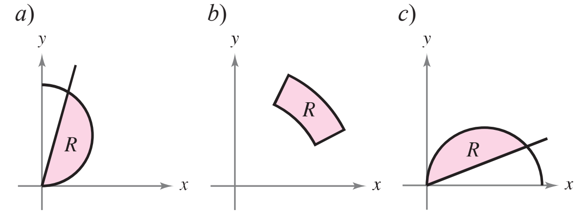
55. Describir la partición de la región de integración R en el plano xy cuando se utilizan coordenadas polares para evaluar una integral doble.

56. Explicar cómo pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble.

57. Con sus propias palabras, describir regiones r-simples y regiones θ-simples.

58. Cada figura muestra una región de integración para la integral doble $\int_R\int f(x, y)\, dA$. Para cada región, decir si es más fácil obtener los límites de integración con elementos representativos horizontales, elementos representativos verticales o con sectores polares. Explicar el razonamiento.

a) *b*) *c*)



59. Sea R la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

a) Establecer la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

b) Convertir la integral en el inciso *a*) a coordenadas polares.

c) ¿Qué integral debería elegirse para evaluar? ¿Por qué?

Para discusión

60. ***Para pensar*** Sin desarrollar cálculos, identificar la integral doble que represente la integral de $f(x) = x^2 + y^2$ sobre un círculo de radio 4. Explicar el razonamiento.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\, dr\, d\theta$ *b*) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\theta$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^3\, dr\, d\theta$ *d*) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{-4}^4 r^3\, dr\, d\theta$

61. ***Para pensar*** Considerar el programa escrito en el ejercicio 78 de la sección 14.2 para aproximar integrales dobles en coordenadas rectangulares. Si el programa se usa para aproximar la integral doble

$$\int_R\int f(r, \theta)\, dA$$

en coordenadas polares, ¿cómo hay que modificar f para introducirla al programa? Como los límites de integración son constantes, describir la región plana de integración.

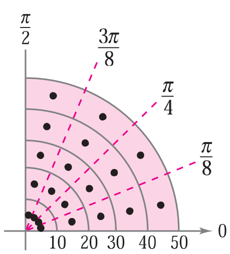
62. ***Aproximación*** Las secciones transversales horizontales de un bloque de hielo desprendido de un glaciar tienen forma de un cuarto de un círculo con radio aproximado de 50 pies. La base se divide en 20 subregiones como se muestra en la figura. En el centro de cada subregión, se mide la altura del hielo, dando los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas.

$\left(5, \frac{\pi}{16}, 7\right), \left(15, \frac{\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{\pi}{16}, 10\right), \left(35, \frac{\pi}{16}, 12\right), \left(45, \frac{\pi}{16}, 9\right),$
$\left(5, \frac{3\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{3\pi}{16}, 10\right), \left(25, \frac{3\pi}{16}, 14\right), \left(35, \frac{3\pi}{16}, 15\right), \left(45, \frac{3\pi}{16}, 10\right),$
$\left(5, \frac{5\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{5\pi}{16}, 11\right), \left(25, \frac{5\pi}{16}, 15\right), \left(35, \frac{5\pi}{16}, 18\right), \left(45, \frac{5\pi}{16}, 14\right),$
$\left(5, \frac{7\pi}{16}, 5\right), \left(15, \frac{7\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{7\pi}{16}, 11\right), \left(35, \frac{7\pi}{16}, 16\right), \left(45, \frac{7\pi}{16}, 12\right)$

a) Aproximar el volumen del sólido.

b) El hielo pesa aproximadamente 57 libras por pie cúbico. Aproximar el peso del sólido.

c) Aproximar el número de galones de agua en el sólido si hay 7.48 galones de agua por pie cúbico.



CAS ***Aproximación*** **En los ejercicios 63 y 64, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.**

63. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^5 r\sqrt{1+r^3}\,\text{sen}\sqrt{\theta}\,dr\,d\theta$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^4 5re^{\sqrt{r\theta}}\,dr\,d\theta$

Aproximación **En los ejercicios 65 y 66, determinar qué valor se aproxima más al volumen del sólido entre el plano *xy* y la función sobre la región. (Realizar la elección a la vista de un dibujo del sólido y *no* efectuando cálculo alguno.)**

65. $f(x, y) = 15 - 2y$; R: semicírculo: $x^2 + y^2 = 16, y \geq 0$

a) 100 *b*) 200 *c*) 300 *d*) -200 *e*) 800

66. $f(x, y) = xy + 2$; R: cuarto de círculo: $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0$

a) 25 *b*) 8 *c*) 100 *d*) 50 *e*) -30

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 67 y 68, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

67. Si $\int_R\int f(r, \theta)\, dA > 0$, entonces $f(r, \theta) > 0$ para todo (r, θ) en R.

68. Si $f(r, \theta)$ es una función constante y el área de la región S es el doble del área de la región R, entonces $2\int_R\int f(r, \theta)\, dA = \int_S\int f(r, \theta)\, dA$.

69. ***Probabilidad*** El valor de la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ se requiere en el desarrollo de la función de densidad de probabilidad normal.

a) Utilizar coordenadas polares para evaluar la integral impropia.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dA$$

b) Utilizar el resultado del inciso *a*) para calcular I.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "Integrating e^{-x^2} Without Polar Coordinates" de William Dunham en *Mathematics Teacher*.

70. Utilizar el resultado del ejercicio 69 y un cambio de variables para evaluar cada una de las integrales siguientes. No se requiere hacer ninguna integración.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2}\,dx$

71. ***Población*** La densidad de población en una ciudad se aproxima mediante el modelo $f(x, y) = 4\,000e^{-0.01(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 \leq 49$, donde x y y se miden en millas. Integrar la función de densidad sobre la región circular indicada para aproximar la población de la ciudad.

72. ***Probabilidad*** Hallar k tal que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

sea una función de densidad de probabilidad.

73. ***Para pensar*** Considerar la región limitada o acotada por las gráficas de $y = 2$, $y = 4$, $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$ y la integral doble $\int_R\int f\, dA$. Determinar los límites de integración si la región R está dividida en *a*) elementos representativos horizontales, *b*) elementos representativos verticales y *c*) sectores polares.

74. Repetir el ejercicio 73 con una región R limitada o acotada por la gráfica de la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

75. Mostrar que el área A del sector polar R (ver la figura) es $A = r\Delta r\Delta\theta$, donde $r = (r_1 + r_2)/2$ es el radio promedio de R.