Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Espacios Vectoriales

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

Introducción (Tomado del libro de Algebra Lineal de Grossman, Stanley)

Como se observó en el capítulo anterior, los conjuntos $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio) cuentan con diversas propiedades peculiares. Se puede sumar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ y obtener otro vector en $\mathbb{R}^2$. En la suma, los vectores en $\mathbb{R}^2$ obedecen las leyes conmutativa y asociativa. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Se puede multiplicar vectores en $\mathbb{R}^2$ por escalares y obtener las leyes distributivas. En $\mathbb{R}^3$ se cumplen las mismas propiedades.

Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ junto con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar se denominan **espacios vectoriales**. Se puede decir, de forma intuitiva, que un espacio vectorial es un conjunto de objetos con dos operaciones que obedecen las reglas que acaban de escribirse.

En el presente capítulo habrá un cambio, en apariencia grande, del mundo concreto de la solución de ecuaciones y del manejo sencillo de los vectores que se visualizan, al mundo abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios. Existe una ventaja en este cambio. Una vez que, en términos generales, se establecen los hechos sobre los espacios vectoriales, se pueden aplicar estos hechos a *todos* los espacios de esta naturaleza. De otro modo, tendría que probarse cada hecho una y otra vez para cada nuevo espacio vectorial que nos encontráramos (y existe un sinfín de ellos). Pero como se verá más adelante, muchos de los teoremas abstractos que se demostrarán, en términos reales no son más difíciles que los que ya se han estudiado.

Definición y Propiedades

Espacio vectorial real

Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, junto con dos operaciones binarias llamadas **suma** y **multiplicación por un escalar**, y que satisfacen los diez axiomas enumerados en el siguiente recuadro.

Axiomas de un espacio vectorial

Nota. Los primeros cinco axiomas se utilizan para definir a un grupo abeliano, y los axiomas vi) al x) describen la interacción de los escalares y los vectores mediante la operación binaria de un escalar y un vector.

i) Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma).**

ii) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

(ley asociativa de la suma de vectores).

iii) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$

(el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero o idéntico aditivo**).

iv) Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo de x**).

v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

(ley conmutativa de la suma de vectores).

vi) Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$

(cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

(primera ley distributiva).

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

(segunda ley distributiva).

ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$

(ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Los escalares tienen una estructura denominada campo, la cual consiste en un conjunto de elementos y dos operaciones binarias (por ejemplo, los número reales y las operaciones de adición y multiplicación). Los números reales con la operación de suma cumplen con los axiomas del grupo abeliano. Además, la multiplicación es asociativa y distributiva por la derecha e izquierda. Existe un elemento neutro llamado unidad, y todo número real diferente de cero tiene un elemento inverso.

Ejemplo 1: El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$, para m y n específicos, con la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz es un espacio vectorial. Al sumar dos matrices de tamaño $m \times n$ o al multiplicar un escalar por una matriz del tamaño $m \times n$ se obtiene otra matriz del mismo tamaño. Además como vimos en la primera clase cumple con todos los otros axiomas de espacios vectoriales.

Ejemplo 2: Sea V el conjunto de los números reales positivos, $\mathrm{V}=\mathbb{R}^{+}$, con las siguientes operaciones

$$x+y=x.y$$
$$\alpha x=x^{\alpha}$$

para $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces V con las dos operaciones anteriores es un espacio vectorial.

Vamos a explicar a continuación por qué para este ejemplo se cumplen los diez axiomas de espacios vectoriales.

i. **Cerradura bajo la suma:** Si tomamos dos números positivos x y y, entonces $x+y=x.y \in V$ porque el producto de dos números positivos resulta un número positivo.

ii. **Ley Asociativa:** Si consideramos tres números en V: x, y, z entonces tenemos que: $(x+y)+z=(x.y).z=x.(y.z)=x+(y+z)$ porque el producto de número reales es asociativo.

iii. **Existencia de elemento Neutro:** El elemento neutro en este caso es 1, porque para todo $x \in V$ se cumple que $x+1=x.1=x$.

iv. **Existencia de elemento inverso:** Para cada $x \in V$ tenemos que su inverso es $1/x$, porque $x+\frac{1}{x}=x.\frac{1}{x}=1$

v. **Ley Conmutativa:** Para todo x, y en V tenemos que $x + y = x.y = y.x = x + y$, porque el producto de números reales es conmutativo.

vi. **Cerradura bajo producto por un escalar:** Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in V$ se tiene que $\alpha x = x^{\alpha} \in V$ porque todo número positivo elevado a cualquier número real es positivo.

vii. **Primera ley Distributiva:** Para $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $\alpha(x + y) = (x + y)^{\alpha} = (x.y)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha} = \alpha x.\alpha y = \alpha x + \alpha y$

viii. **Segunda ley Distributiva:** Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in V$ se cumple que $(\alpha + \beta)x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha} + x^{\beta} = \alpha x + \beta x$

ix. **Ley asociativa de la multiplicación:** Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in V$ se tiene que $\alpha(\beta x) = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)x$

x. Para cada $x \in V$ se cumple que $1.x = x^{1} = x$

Ejemplo 3: Sea V el conjunto de todos los vectores $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z): x,y,z \in \mathbb{R}\}$ con las siguientes operaciones, donde $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2+1, y_1+y_2+1, z_1+z_2+1)$$
$$\alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

No es un espacio vectorial.

No es un espacio vectorial porque no se satisfacen las dos leyes distributivas.

Si consideramos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ podemos ver que

$\alpha[(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)]$	$= \alpha(x_1+x_2+1, y_1+y_2+1, z_1+z_2+1)$ $= (\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha, \alpha y_1+\alpha y_2+\alpha, \alpha z_1+\alpha z_2+\alpha)$

$\alpha(x_1,y_1,z_1) + \alpha(x_2,y_2,z_2)$	$= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$ $= (\alpha x_1+\alpha x_2+1, \alpha y_1+\alpha y_2+1, \alpha z_1+\alpha z_2+1)$

$$\alpha[(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)] \neq \alpha(x_1,y_1,z_1) + \alpha(x_2,y_2,z_2)$$

No se cumple la primera ley distributiva

Ejercicio: verifica que no se cumple la segunda ley distributiva

Ejemplos de Espacios Vectoriales : a continuación se presenta una lista de espacios vectoriales que se estarán mencionando en las siguientes clases, por lo que es importante familiarizarse con ellos.

1. $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

El elemento neutro es $(0,0, \dots, 0)$ y para cada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ el inverso aditivo es $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

2. $\mathrm{V} = \{0\}$ con las operaciones usuales de suma y multiplicación de los números reales.

3. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\}$ con las operaciones usuales de $\mathbb{R}^2$.

4. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$ con las operaciones usuales de $\mathbb{R}^3$

5. $V = P_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n con las operaciones de suma de polinomios y el producto de un escalar por un polinomio. Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$, recordemos que la suma de polinomios y el producto por un escalar es

$$(P+Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0)$$
$$(\alpha P)(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha a_0$$

El elemento neutro es el polinomio nulo y el inverso aditivo de cada polinomio $P(x)$ es $-\ P(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0$

6. $V = C[0,1]$ es el conjunto de todas las funciones $f\colon [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

El elemento neutro es la función constante $f(x) = 0$ y para cada función f el inverso aditivo es la función $-f(x)$

7. $V = M_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con las operaciones usuales de suma de matrices y de un escalar por una matriz.

Propiedades de los Espacios Vectoriales

Teorema 5.1.1

Sea V un espacio vectorial. Entonces

i) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar α.

ii) $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

iii) Si $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o ambos).

iv) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

Demostración

i) Por el axioma iii), $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; y del axioma vii),

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0} \qquad (5.1.1)$$

Sumando $-\alpha\mathbf{0}$ en los dos lados de (5.1.1) y usando la ley asociativa (axioma ii), se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0}) &= [\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}] + (-\alpha\mathbf{0})\\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + [\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0})]\\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0}\\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0}\end{aligned}$$

ii) Se usa, esencialmente, la misma prueba que en la parte i). Se comienza con $0 + 0 = 0$ y se usa el axioma vii) para ver que $0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ o $0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} + [0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x})]$ o $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$.

iii) Sea $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\alpha \neq 0$, se multiplican ambos lados de la ecuación por $1/\alpha$ para obtener $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = (1/\alpha)\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [por la parte i)]. Pero $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (por el axioma ix), de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

iv) Primero se usa el hecho de que $1 + (-1) = 0$. Después, usando la parte ii), se obtiene

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = [1 + (-1)]\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} \tag{5.1.2}$$

Se suma $-\mathbf{x}$ en ambos lados de (5.1.2) para obtener

$$\begin{aligned}-\mathbf{x} = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) + (-1)\mathbf{x}\\ &= \mathbf{0} + (-1)\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}\end{aligned}$$

Actividades

- Leer del libro de Algebra Lineal de Grossman los ejemplos de espacios vectoriales de las páginas 297-300
- Determine si los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas es un espacio vectorial, si no lo es, indique cuales de los axiomas no se cumplen:

1. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ como vectores, el conjunto de números naturales $\mathbb{Z}$ como escalares, la operación de suma para números enteros y la multiplicación entre números enteros para la operación de multiplicación de escalar y vector.

2. El conjunto de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde a, b, c, d son números reales diferentes de cero con la operación de multiplicación definida por $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1b_2 \\ c_1c_2 & d_1d_2 \end{pmatrix}$, el conjunto de escalares los reales positivos y la multiplicación de escalar y matriz la usual.

3. $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$ y la multiplicación por un escalar $\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$.

4. El conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales, bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por un escalar definida sólo para escalares racionales.

AUTOEVALUACIÓN 5.1

De las siguientes afirmaciones, indique si son falsas o verdaderas:

I) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x$ es un espacio vectorial real.

II) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x + 1$ es un espacio vectorial real.

III) El conjunto de matrices invertibles de 5×5 forma un espacio vectorial (con "+" definido como en la suma matrices ordinaria).

IV) El conjunto de múltiplos constantes de la matriz idéntica de 2×2 es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

V) El conjunto de matrices idénticas de $n \times n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

VI) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 0$ es un espacio vectorial real.

VII) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 1$ es un espacio vectorial real.

VIII) El conjunto de polinomios de grado 3 es un espacio vectorial real (con "+" definido como la suma de polinomios ordinaria).

Respuestas a la autoevaluación

I) V **II)** F **III)** F **IV)** V **V)** F **VI)** V **VII)** F **VIII)** F