UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
TEMA I. MATEMÁTICA II
(0826201)

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

1. **COMO USAR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICO**
2. **CASOS DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA**
3. **EJERCICIOS RESUELTOS**
4. **ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA**

OBJETIVO: CALCULAR INTEGRALES INDEFINIDAS EMPLEANDO EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICO

Sea f una función racional que contiene expresiones o radicales de la forma:

$(a^2 + x^2)^n$ ó $(\sqrt{a^2 + x^2})$

$(x^2 - a^2)^n$ ó $(\sqrt{x^2 - a^2})$

$(a^2 - x^2)^n$ ó $(\sqrt{a^2 - x^2})$ Donde n mayor o igual a 2.

Se puede definir un cambio de variable, utilizando la identidad trigonométrica Pitágoras adecuada,

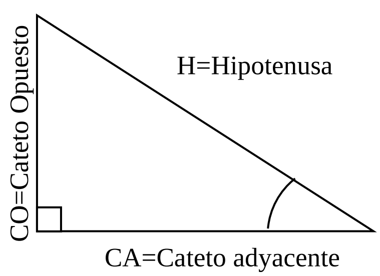
$$1 + tg^2(x) = sec^2(x)$$

$$sec^2(x) - 1 = tg^2(x)$$

$$1 - cos^2(x) = sen^2(x)$$

La integral se reduce a una expresión trigonométrica la cual es más sencilla de integrar.

La sustitución trigonométrica tiene como objetivo eliminar la raíz o la potencia n en el integrando y se recuerda fácilmente utilizando el teorema de Pitágoras aplicado a triángulo rectángulo.



Teorema de Pitágoras

$H^2 = CO^2 + CA^2$

CASOS DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Existen tres casos en los que podemos hacer uso del método de la sustitución trigonométrica, los cuales son:

CASO N º 1

Si en la función integrando $f(x)$ aparece una expresión del tipo $(a^2+x^2)^n$ ó $(\sqrt{a^2+x^2})$, debemos hacer un cambio de variable trigonométrico. Para este caso el cambio de variable a efectuar es:

$$\boxed{x = a\,\mathrm{T}g(t)}$$

Al momento de sustituir en la integral las siguientes expresiones cambian por:

- $(a^2+x^2) = a^2\sec^2(t)$
- $\sqrt{a^2+x^2} = a\sec(t)$

Luego de resolver la integral, la primitiva que se obtiene queda en función de variables trigonométricas por lo que debemos devolver el cambio a la variable original, para ello construiremos el triángulo rectángulo de la siguiente manera:

Tenemos que: $x = a\,Tg(t)$

Despejando

Tg (t) = $\frac{x}{a}$

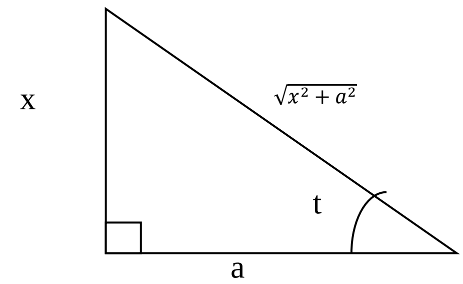
Además, sabemos que el

Tg (t) = $\frac{CO}{CA}$

Igualando, se tiene:

$$\frac{CO}{CA} = \frac{x}{a}$$

Construyendo el triángulo, obtenemos:



CASO N º 2

Si en la función integrando $f(x)$ aparece una expresión del tipo $(x^2 - a^2)$ ó $\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)$, debemos hacer un cambio de variable trigonométrico. Para este caso el cambio de variable a efectuar es:

$$\boxed{x = a\sec(t)}$$

Al momento de sustituir en la integral las siguientes expresiones cambian por:

- $(x^2 - a^2) = a^2 tg^2(t)$
- $\sqrt{x^2 - a^2} = a\ tg(t)$

Luego de resolver la integral, la primitiva que se obtiene queda en función de variables trigonométricas por lo que debemos devolver el cambio a la variable original, para ello construiremos el triángulo rectángulo de la siguiente manera:

Tenemos que: $x = a\sec(t)$

Despejando

Sec (t) = $\dfrac{x}{a}$

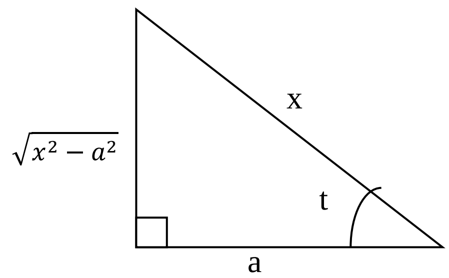
Además, sabemos que el

Sec (t) = $\dfrac{H}{CA}$

Igualando, se tiene:

$$\frac{H}{CA} = \frac{x}{a}$$

Construyendo el triángulo, obtenemos:



CASO N º 3

Si en la función integrando $f(x)$ aparece una expresión del tipo $(a^2 - x^2)$ ó $(\sqrt{a^2 - x^2})$, debemos hacer un cambio de variable trigonométrico. Para este caso el cambio de variable a efectuar es:

$$\boxed{x = a\,sen(t)}$$

Al momento de sustituir en la integral las siguientes expresiones cambian por:

- $(a^2 - x^2) = a^2\cos^2(t)$
- $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos(t)$

Luego de resolver la integral, la primitiva que se obtiene queda en función de variables trigonométricas por lo que debemos devolver el cambio a la variable original, para ello construiremos el triángulo rectángulo de la siguiente manera:

Tenemos que: $x = a\,sen(t)$

Despejando

$$\text{Sen}(t) = \frac{x}{a}$$

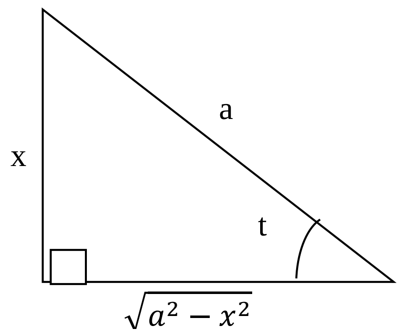
Además, sabemos que el

$$\text{Sen}(t) = \frac{CO}{H}$$

Igualando, se tiene:

$$\frac{CO}{H} = \frac{x}{a}$$

Construyendo el triángulo, obtenemos:



Nota: En todos los casos el triángulo permite establecer las relaciones trigonométricas necesarias para expresar el resultado en función de la variable original.

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO 5.1 CASO N°1

HALLAR

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 8^2)^{3/2}}\,dx$$

Solución:

La expresión de la cantidad subradical de la integral dada, contiene la suma de un binomio por lo que le corresponde el cambio de variable:

$$bx = a.tg(t)$$

$$x = 8.tg\ (t)$$

Hallamos el diferencial: $dx = 8\,Sec^2(t)dt$

La expresión, $(x^2 + 8^2)^{3/2}$ cambia por:

$$(x^2 + 8^2)^{3/2} = \left(\sqrt{x^2 + 8^2}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{x^2 + 8^2}\right)^3 = \left(\sqrt{8.tg\ (t)^2 + 8^2}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{(8.tg\,(t))^2+8^2}\right)^3=\left(\sqrt{8^2.tg\,(t)^2+8^2}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{8^2.tg\,(t)^2+8^2}\right)^3=(8sec(t))^3$$

Entonces, como pueden observar cada expresión subradical tiene su cambio de variable definido, por lo tanto, podemos decir que la expresión

$$(x^2+8^2)^{3/2}=(8sec(t))^3$$

Quedando la integral de la siguiente manera:

$$\int\frac{x^2}{(x^2+8^2)^{3/2}}dx=\int\frac{(8.tg\,(t))^2}{(8sec(t))^3}8\,Sec^2(t)dt$$

Resolviendo las potencias y simplificando la expresión se obtiene:

$$\int\frac{8^2(tg\,(t))^2}{8^3(sec(t))^3}8\,Sec^2(t)dt=\int\frac{(tg\,(t))^2}{(sec(t))^1}dt$$

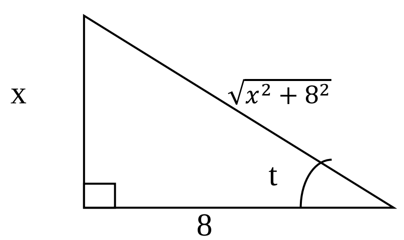
Aplicamos la identidad trigonométrica en el numerador, separamos las integrales y analizamos el resultado:

$$\int\frac{(sec\,(t))^2-1}{(sec(t))^1}dt=\int\frac{(sec\,(t))^2}{(sec(t))^1}dt-\int\frac{1}{(sec(t))^1}dt$$

$$\int\frac{(sec\,(t))^2-1}{(sec(t))^1}dt=\int sec\,(t)dt-\int\cos(t)\,dt$$

$$\int\frac{(sec\,(t))^2-1}{(sec(t))^1}dt=ln|sec\,(t)+tg(t)|-\operatorname{sen}(t)+C$$

Como se aplicó un cambio de variable, debemos devolver a la variable original, para el cual se hace uso del dibujo del triángulo. Para este caso:



Las expresiones de las funciones trigonométricas las obtenemos con el triángulo,

$$\sec(t) = \frac{H}{CA} = \frac{\sqrt{x^2+8^2}}{8}$$

$$\text{sen}(t) = \frac{CO}{H} = \frac{x}{\sqrt{x^2+8^2}}$$

$$\text{tg}(t) = \frac{CO}{CA} = \frac{x}{8}$$

Sustituyendo en la integral,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+8^2)^{3/2}}dx = \ ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8^2}}{8} + \frac{x}{8}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+8^2}} + C$$

EJERCICIO 5.2: CASO N°2

HALLAR

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{4x^2 - 24x + 27})^{3/2}}\boldsymbol{dx}$$

Solución:

La expresión de la cantidad subradical de la integral dada, contiene un trinomio por lo que debemos:

- primero vamos a acomodar la expresión subradical para luego poder completar cuadrados y así ver el cambio de variable que le corresponde:

$$\int \frac{1}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{4\left(x^2-6x+\frac{27}{4}\right)}\right)^3}dx$$

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{4\left(x^2-6x+\frac{27}{4}\right)}\right)^3}dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{4}\right)^3.\left(\sqrt{\left(x^2-6x+\frac{27}{4}\right)}\right)^3}dx$$

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{4}\right)^3.\left(\sqrt{\left(x^2-6x+\frac{27}{4}\right)}\right)^3}dx = \int \frac{1}{8.\left(\sqrt{\left(x^2-6x+\frac{27}{4}\right)}\right)^3}dx$$

Al completar cuadrados, se obtiene:

$$x^2-6x+\frac{27}{4} = (x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Entonces la integral se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int \frac{1}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\left((x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}\right)^3}dx$$

Planteamos el cambio de variable trigonométrico, por la expresión de la raíz, se debe cambiar por:

$$bx = a.sec(t)$$

$$x-3 = \frac{3}{2}.sec(t)$$

Hallamos el diferencial: $dx = \frac{3}{2}tg(t)sec(t)dt$

La expresión, $(x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$ cambia por:

$$(x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}.sec(t)\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$(x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}.tg(t)\right)^2$$

Entonces, como pueden observar cada expresión subradical tiene su cambio de variable definido, por lo tanto, podemos decir que:

La expresión

$$\left(\sqrt{(x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)^3 = \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}.tg(t)\right)^2}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{(x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)^3=\left(\frac{3}{2}.tg(t)\right)^3$$

Quedando la integral de la siguiente manera:

$$\int\frac{1}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\left(\sqrt{\left((x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}\right)^3}dx$$

$$\int\frac{1}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{\frac{3}{2}tg(t)sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}.tg(t)\right)^3}dx$$

Resolviendo las potencias y simplificando la expresión se obtiene:

$$\int\frac{1}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{\frac{3}{2}tg(t)sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^3.(tg(t))^3}dx$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{\frac{3}{2}tg(t)sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^3.(tg(t))^3}dx=\frac{1}{8}\int\frac{sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^2.(tg(t))^2}dx$$

Aplicamos expresiones trigonométricas en el numerador y denominador y analizamos el resultado:

$$\frac{1}{8}\int\frac{sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^2.(tg(t))^2}dx=\frac{1}{8.\frac{9}{4}}\int\frac{\frac{1}{\cos(t)}}{\frac{sen(t)^2}{\cos(t)^2}}dt$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^2.(tg(t))^2}dx=\frac{1}{18}\int\frac{\cos(t)}{sen(t)^2}dt$$

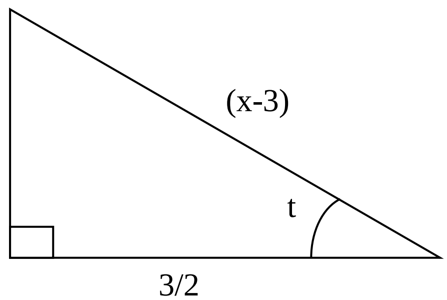
$$\frac{1}{8}\int\frac{sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^2.(tg(t))^2}dx=\frac{1}{18}\int\frac{\cos(t)}{sen(t)}.\frac{1}{sen(t)}dt$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^2.(tg(t))^2}dx = \frac{1}{18}\int ctg(t).\csc(t)dt$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{sec(t)dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^2.(tg(t))^2}dx = -\frac{1}{18}\csc(t) + C$$

Como se aplicó un cambio de variable, debemos devolver a la variable original, para el cual se hace uso del dibujo del triángulo. Para este caso:

$$\sqrt{(x-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$



Las expresiones de las funciones trigonométricas las obtenemos con el triángulo,

$$\csc(\mathrm{t}) = \frac{H}{CO} = \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

Sustituyendo en la integral,

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}}dx = -\frac{1}{8}\frac{x-3}{\sqrt{\left((x-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}} + \mathrm{C}$$

EJERCICIO 5.3 CASO N°3

HALLAR

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}dx$$

Solución:

La expresión de la cantidad subradical de la integral dada, contiene la resta de un binomio por lo que le corresponde el cambio de variable:

$$bx = a.sen(t)$$

$$x = 5.sen\ (t)$$

Hallamos el diferencial: $dx = 5cos\ (t)dt$

La expresión, $\sqrt{25 - x^2}$ cambia por:

$$\sqrt{25 - x^2} = \left(\sqrt{5^2 - (5sen(t))^2}\right)$$

Aplicamos la identidad trigonométrica,

$$\sqrt{25 - x^2} = (5cos(t))$$

Entonces, como pueden observar cada expresión subradical tiene su cambio de variable definido, por lo tanto podemos decir que La expresión:

$$\sqrt{25 - x^2} = (5cos(t))$$

Quedando la integral de la siguiente manera:

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = \int \frac{5cos(t)}{5.sen\ (t)} 5cos\ (t)dt$$

Resolviendo las potencias y simplificando la expresión se obtiene:

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = 5.\int \frac{cos(t)^2}{sen\ (t)} dt$$

Aplicamos la identidad trigonométrica en el numerador, separamos las integrales y analizamos el resultado:

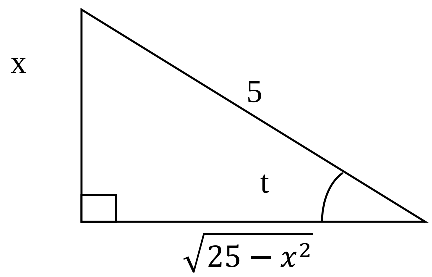
$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = 5.\int \frac{1 - sen(t)^2}{sen\ (t)} dt$$

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = 5\,.\int \frac{1}{sen(t)} dt - 5.\int sen(t)dt$$

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = 5\,.\int \csc(t)\, dt - 5.\int sen(t)dt$$

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = 5\,.Ln\ |\csc(t) - ctg(t)| + 5.\cos(t) + C$$

Como se aplicó un cambio de variable, debemos devolver a la variable original, para el cual se hace uso del dibujo del triángulo. Para este caso:



Las expresiones de las funciones trigonométricas las obtenemos con el triángulo,

$$\cos(t) = \frac{CA}{H} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

$$\operatorname{ctg}(t) = \frac{CA}{CO} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}$$

$$\csc(t) = \frac{H}{CO} = \frac{5}{x}$$

Sustituyendo en la integral,

$$\int \frac{\sqrt{\mathbf{25-x^2}}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = 5\,.Ln\left|\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + 5.\frac{\sqrt{25-x^2}}{5} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{\mathbf{25-x^2}}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = 5\,.Ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C$$

ACTIVIDAD

Realizar del Libro 801 ejercicios resueltos los ejercicios propuestos en el capítulo 6, del 17 al 70. pág. 181.

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

https://www.youtube.com/watch?v=r5qTs2RG7bI&t=299s

https://www.youtube.com/watch?v=aIba4D7p638