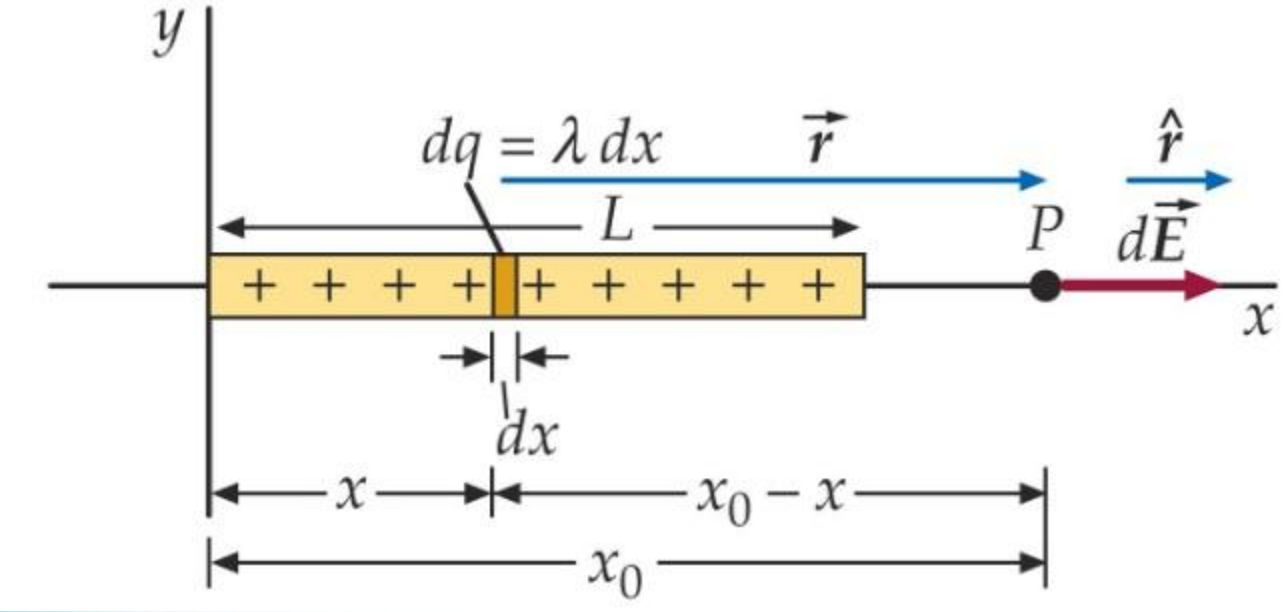
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA.
VICERRECTORADO ACADEMICO.
DECANATO DE DOCENCIA.
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA – NUCLEO DE FISICA.

Cálculo del campo eléctrico E mediante distribuciones continuas de cargas



PROF. PÉREZ RAMÍREZ DIONEL

San Cristóbal, Junio de 2021.

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

El campo eléctrico dE debido a un elemento de carga dq en un punto P del espacio debido a la distribución continua de cargas viene dado por:

$$dE = \frac{kdq}{r^2}\hat{r}$$

En donde:

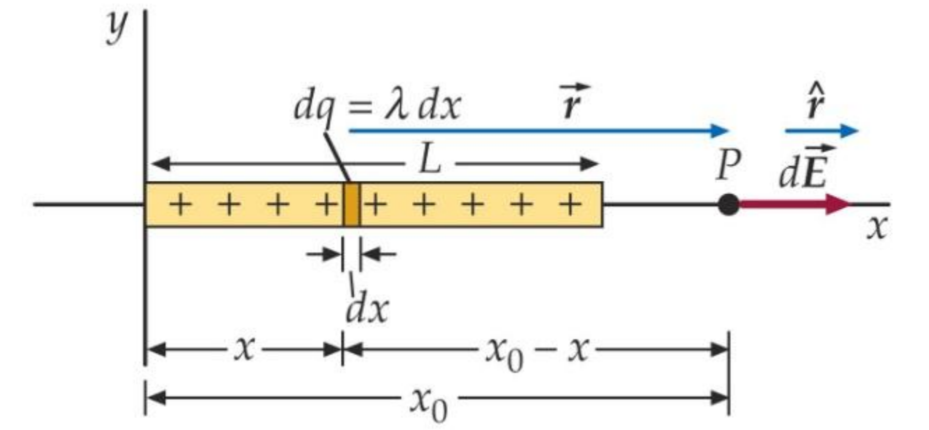
- $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta desde el elemento dq al punto P.
- Un elemento de carga dq produce un campo $dE = (kdq/r^2)\hat{r}$ en el punto P.
- El campo total en P se determina integrando la expresión $dE = (kdq/r^2)\hat{r}$ para la distribución de la carga completa como:

$$E = \int_V \frac{kdq}{r^2}\hat{r}$$

$$E = \int_V \frac{kdq}{r^2}\hat{r}$$

En donde:

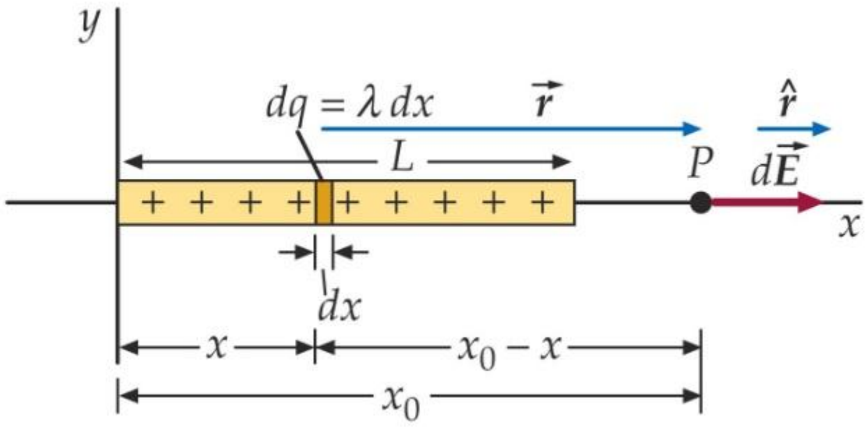
Si la carga esta distribuida sobre una superficie, línea o volumen utilizaremos $dq = \sigma dA$, $dq = \lambda dL$, $dq = \rho dV$ respectivamente e integramos para toda la superficie o línea.



Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 1

Una carga lineal uniforme de densidad $\lambda = 3.5nC/m$ se distribuye desde $x = 0\ a\ x = 5m$. (a) Cual es la carga total. (b)Determinar el campo eléctrico que se genera sobre el eje x en $x = 6m, x = 9m\ y\ x = 250m$. (c) Determinar el campo en $x = 250m$ usando la aproximación de que se trata de una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido exactamente en (b).



Expresamos el campo eléctrico en el eje x de una carga lineal finita como:

$$E_x(x_0) = \frac{kQ}{x_o(x_0 - L)}$$

Utilizamos la definición de una densidad de carga lineal para expresar la carga en terminos de λ, por lo tanto tenemos:

$$Q = \lambda L \Rightarrow Q = (3.5nC/m)(5m) = 17.5nC$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Solución: Parte B)

Expresamos el campo eléctrico en el eje x de una carga lineal finita como:

$$E_x(x_0) = \frac{kQ}{x_o(x_0 - L)}$$

Sustituimos y evaluamos en la ecuación anterior para $x = 6m$:

$$E_x(6m) = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(17.5nC)}{(6m)(6m - 5m)}$$

$$E_x(6m) = 26.2\ N/C$$

Sustituimos y evaluamos en la ecuación anterior para $x = 9m$:

$$E_x(9m) = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(17.5nC)}{(9m)(9m - 5m)}$$

$$E_x(9m) = 4.37\ N/C$$

Substituimos y evaluamos en la ecuación anterior para $x = 250m$:

$$E_x(250m) = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(17.5nC)}{(250m)(250m - 5m)}$$

$$E_x(250m) = 2.57mN/C$$

Solución Parte C)

Utilizamos la ley de Coulomb para hallar el campo eléctrico E_x debido a una carga puntual Q por lo tanto:

$$E_x(x) = \frac{kQ}{x^2}$$

Sustituimos valores y evaluamos $E_x(250m)$

$$E_x(250m) = \frac{\left(8.99 \times 10^9 N \cdot \frac{m^2}{C^2}\right)(17.5nC)}{(250m)^2} = 2.52mN/C$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 2

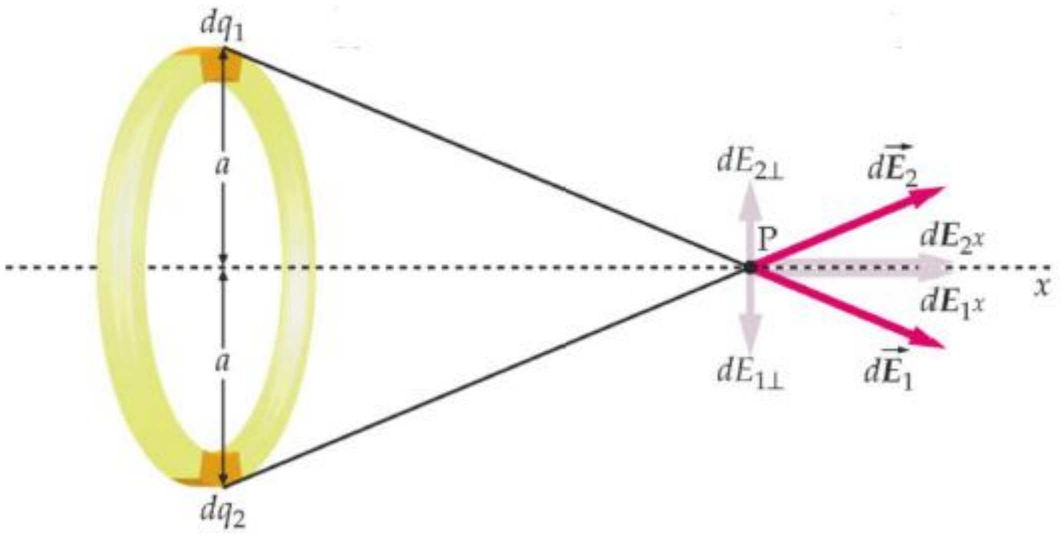
Una carga de $2.75\mu C$ esta uniformemente distribuida sobre un anillo de radio 8.5cm. Determinar el campo eléctrico generado sobre el eje (a) 1.2cm, (b) 3.6cm y (c) 4m del centro del anillo. (d) Determinar el campo a 4m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en el (c).

Solución

La magnitud del campo electrico la cual esta dada por:

$$E_x(x) = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donde Q es la carga del anillo y a es el radio del anillo. Nosotros usamos esta relación para encontrar el campo eléctrico en el eje x dada la distancia al anillo.



Evaluamos para $E_x(x) = 1.2\text{cm}$

$$E_x(1.2cm) = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(2.75\mu C)(1.2cm)}{\left((1.2cm)^2 + (8.5cm)^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x(1.2cm) = 4.69 \times 10^5 N/C$$

Evaluamos para $E_x(x) = 3.6\text{cm}$

$$E_x(1.2cm) = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(2.75\mu C)(3.6cm)}{\left((3.6cm)^2 + (8.5cm)^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x(1.2cm) = 1.13 \times 10^6 N/C$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 2

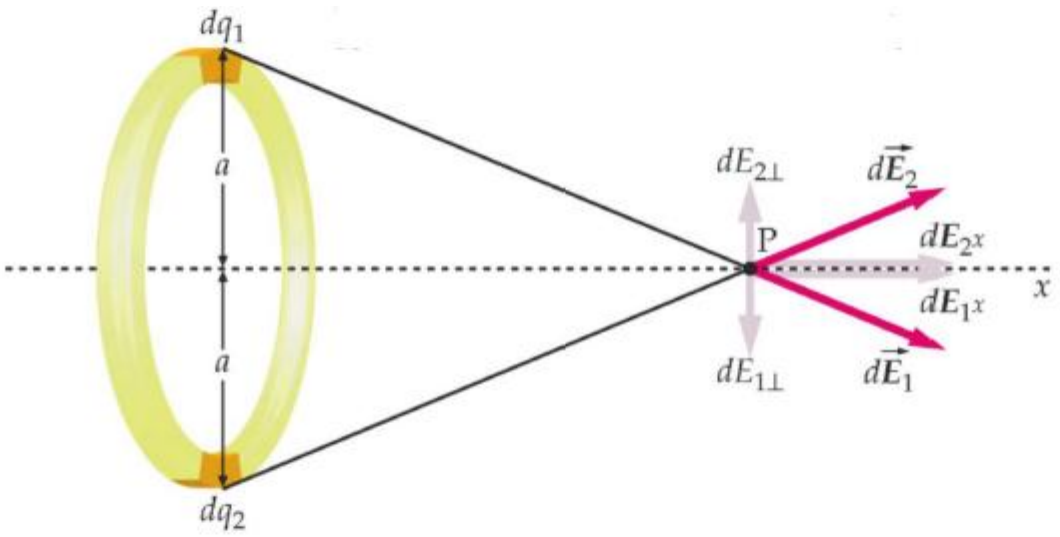
Una carga de $2.75\mu C$ esta uniformemente distribuida sobre un anillo de radio 8.5cm. Determinar el campo eléctrico generado sobre el eje (a) 1.2cm, (b) 3.6cm y (c) 4m del centro del anillo. (d) Determinar el campo a 4m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en el (c).

Solución

La magnitud del campo electrico la cual esta dada por:

$$E_x(x) = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donde Q es la carga del anillo y a es el radio del anillo. Nosotros usamos esta relación para encontrar el campo eléctrico en el eje x dada la distancia al anillo.



Ultimamente evaluamos para $E_x(x) = 4\text{m}$

$$E_x(4m) = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(2.75\mu C)(4m)}{\left((4m)^2 + (0.085m)^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x(4m) = 1.54 \times 10^3 N/C$$

Usando la ley de coulomb para calcular el campo electrico tenemos:

$$E_x = \frac{kQ}{x^2}$$

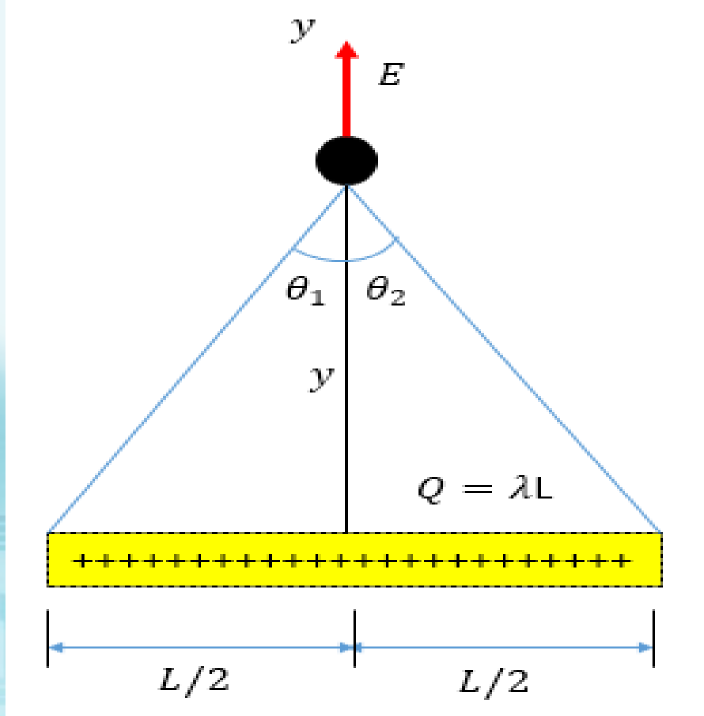
$$E_x(4m) = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(275\mu C)(4m)}{(4m)^2}$$

$$E_x(4m) = 1.55 \times 10^3 N/C$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 3

Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2.5cm \;\; a \;\; x = +2.5cm$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = \frac{6nC}{m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje y en (b) $y = 4cm, \; (c) y = 12cm \; y \; (d) \; y = 4.5m$ (e)Determinar el campo en $y = 4.5m$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido (d).



$$\sum dE_x = dE_{x_1} - dE_{x_2}$$

$$dE_{x_1} = dE \cdot \sin\theta_1 \qquad dE_{x_2} = dE \cdot \sin\theta_2$$

$$dE_x = dE \cdot \sin\theta_1 \text{-} \, dE \cdot \sin\theta_2$$

$$Ex = \int_0^{\theta_1} dE . \sin\theta_1 \text{-} \int_0^{\theta_2} dE \cdot \sin\theta_2$$

$$Ex = \int_0^{\theta_1} k\frac{dQ}{r^2} . \sin\theta_1 \text{-} \int_0^{\theta_2} k\frac{dQ}{r^2} \cdot \sin\theta_2$$

$$Ex = \int_0^{\theta_1} k\frac{\lambda . dx}{r^2} . \sin\theta_1 \text{-} \int_0^{\theta_2} k\frac{\lambda . dx}{r^2} \cdot \sin\theta_2$$

Si $\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\tan\boldsymbol{\theta} \qquad \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{y}\sec\boldsymbol{\theta}\;\boldsymbol{d\theta}$

Si $\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}} \Rightarrow \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{y}}{\cos\boldsymbol{\theta}} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{y}\sec\boldsymbol{\theta}$

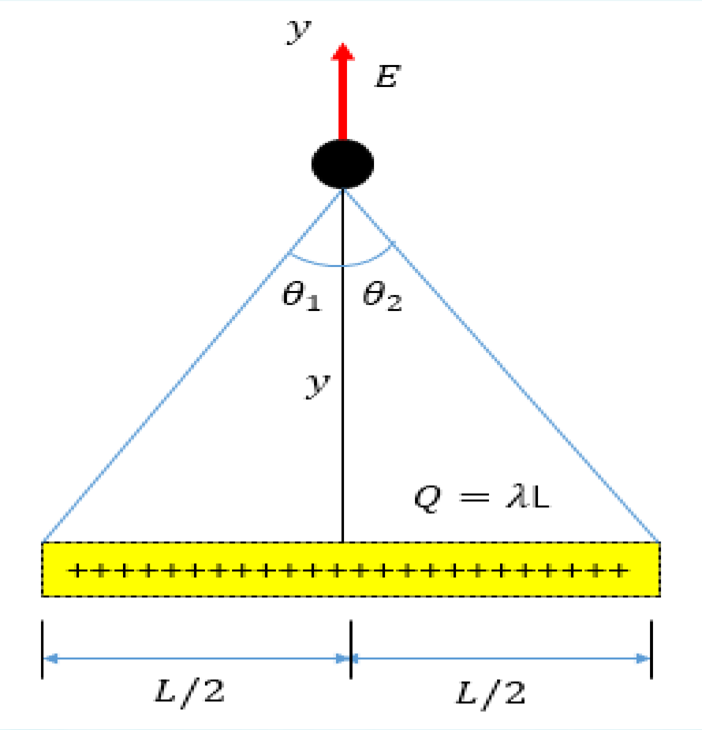
$$Ex = k\lambda\int_0^{\theta_1} \frac{y\sec^2\theta}{(y\sec\theta)^2}\sin\theta_1\, d\theta - k\lambda\int_0^{\theta_2} \frac{y\sec^2\theta}{(y\sec\theta)^2}\sin\theta_2\, d\theta$$

$$E_x = \frac{k\lambda}{y}(cos\theta_2 - cos\theta_1) = 0$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 3

Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2.5cm\ a\ x = +2.5cm$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = \frac{6nC}{m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje y en (b) $y = 4cm,\ (c) y = 12cm\ y\ \ (d)\ y = 4.5m$ (e)Determinar el campo en $y = 4.5m$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido (d).



$$\sum dE_y = dE_{y_1} + dE_{y_2}$$

$$dE_{y_1} = dE \cdot \cos\theta_1 \qquad dE_{y_2} = dE \cdot \cos\theta_2$$

$$dE_y = dE \cdot \cos\theta_1 + dE \cdot \cos\theta_2$$

$$E_y = \int_0^{\theta_1} dE.\cos\theta_1 + \int_0^{\theta_2} dE \cdot \cos\theta_2$$

$$E_y = \int_0^{\theta_1} k\frac{dQ}{r^2}.\cos\theta_1 + \int_0^{\theta_2} k\frac{dQ}{r^2} \cdot \cos\theta_2$$

$$Ey = \int_0^{\theta_1} k\frac{\lambda.dx}{r^2}\cos\theta_1 + \int_0^{\theta_2} k\frac{\lambda.dx}{r^2} \cdot \cos\theta_2$$

$$Ey = \frac{k\lambda}{y}\int_0^{\theta_1}\cos\theta_1\, d\theta + \frac{k\lambda}{y}\int_0^{\theta_2}\cos\theta_2\, d\theta$$

$$Ey = \frac{k\lambda}{y}\sin\theta_1|_0^{\ \theta_1} + \frac{k\lambda}{y}\sin\theta_2\,|_0^{\ \theta_2}$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{y}\big(sen\theta - sen(-\theta)\big) \Longrightarrow E_y = \frac{2k\lambda}{y}sen\theta$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 3

Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2.5cm\ a\ x = +2.5cm$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = \frac{6nC}{m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje y en (b) $y = 4cm$, $(c) y = 12cm\ y\ \ (d)\ y = 4.5m$ (e)Determinar el campo en $y = 4.5m$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido (d).

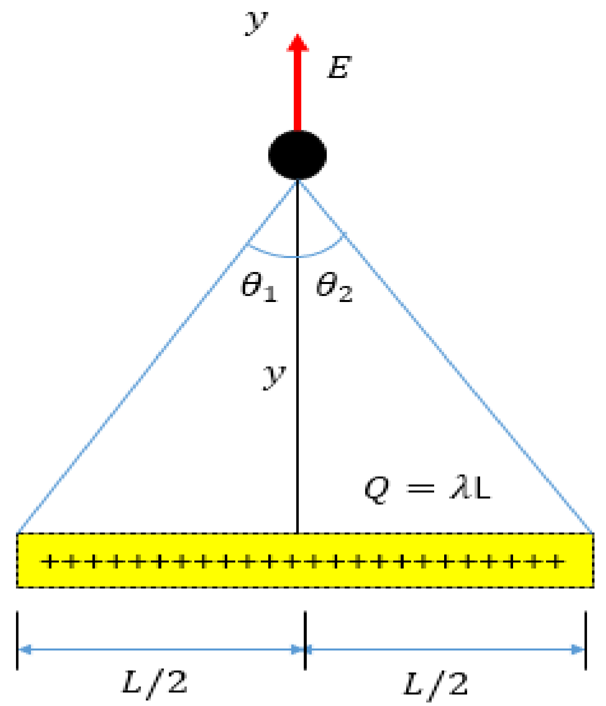
Solución

Si usamos la ecuación que nos describe la component E_x debida a un segmento de carga lineal uniforme.

$$E_x = \frac{k\lambda}{y}(cos\theta_2 - cos\theta_1)$$

Por lo tanto tenemos:

$$E_x = \frac{k\lambda}{y}(cos\theta - cos(-\theta)) \Rightarrow E_x = (cos\theta - cos\theta) = 0$$



Si usamos la ecuación que nos describe la componente E_y debida a un segmento de carga lineal uniforme.

$$E_y = \frac{k\lambda}{y}(sen\theta_2 - sen\theta_1)$$

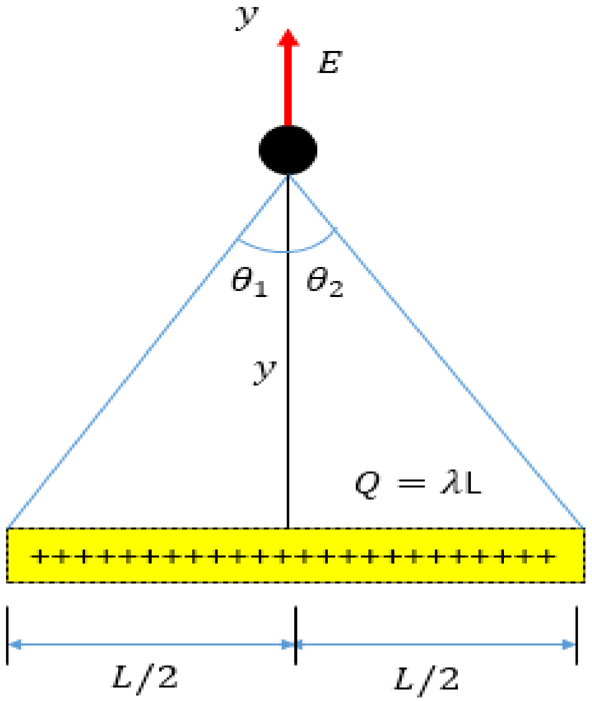
Por lo tanto tenemos:

$$E_y = \frac{k\lambda}{y}(sen\theta - sen(-\theta)) \Rightarrow E_y = \frac{2k\lambda}{y}sen\theta$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 3

Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2.5cm\ a\ x = +2.5cm$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = \frac{6nC}{m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje y en (b) $y = 4cm$, $(c) y = 12cm$ y $(d)\ y = 4.5m$ (e)Determinar el campo en $y = 4.5m$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido (d).

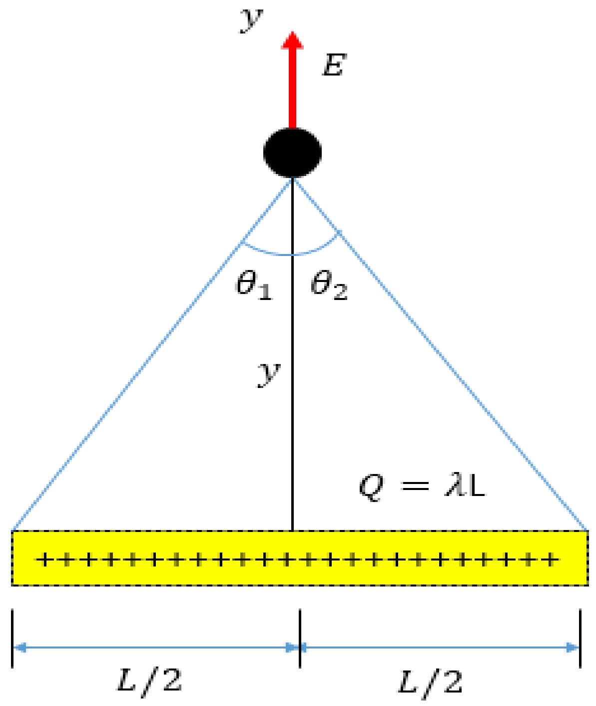


$$E_x = 0 \qquad E_y = \frac{2k\lambda}{y} sen\theta \qquad sen\theta = \frac{C.O}{H} = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + y^2}} \qquad E_y = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + y^2}}$$

$$E = E_x i + E_y j = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + y^2}} j$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 3
Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2.5cm \; a \; x = +2.5cm$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = \frac{6nC}{m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje y en (b) $y = 4cm$, $(c) y = 12cm \; y \; (d) \; y = 4.5m$ (e)Determinar el campo en $y = 4.5m$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido (d).



$$E = E_x i + E_y j = \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + y^2}} j$$

$$Q = \lambda L = (6nC/m)(5cm) = 0.300nC$$

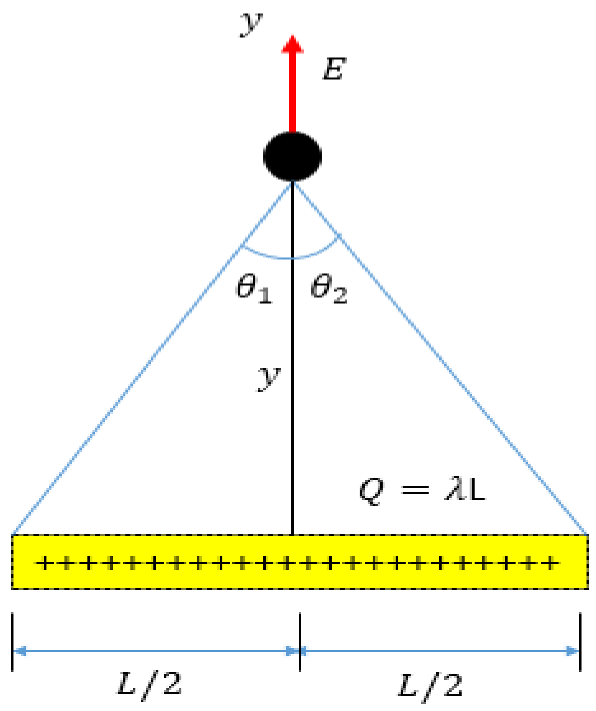
$$E_y(4cm) = \frac{2(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)}{0.04m} \frac{\frac{1}{2}(6nC/m)(0.05m)}{\sqrt{(0.025m)^2 + (0.04m)^2}}$$

$$E_y(4cm) = 1.43kN/C$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 3

Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2.5cm\ a\ x = +2.5cm$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = \frac{6nC}{m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje y en (b) $y = 4cm$, $(c) y = 12cm\ y\ (d)\ y = 4.5m$ (e)Determinar el campo en $y = 4.5m$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido (d).



$$E = E_x i + E_y j = \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + y^2}} j$$

$$Q = \lambda L = (6nC/m)(5cm) = 0.300nC$$

$$E_y(12cm) = \frac{2(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)}{0.12m} \frac{\frac{1}{2}(6nC/m)(0.05m)}{\sqrt{(0.025m)^2 + (0.12m)^2}}$$

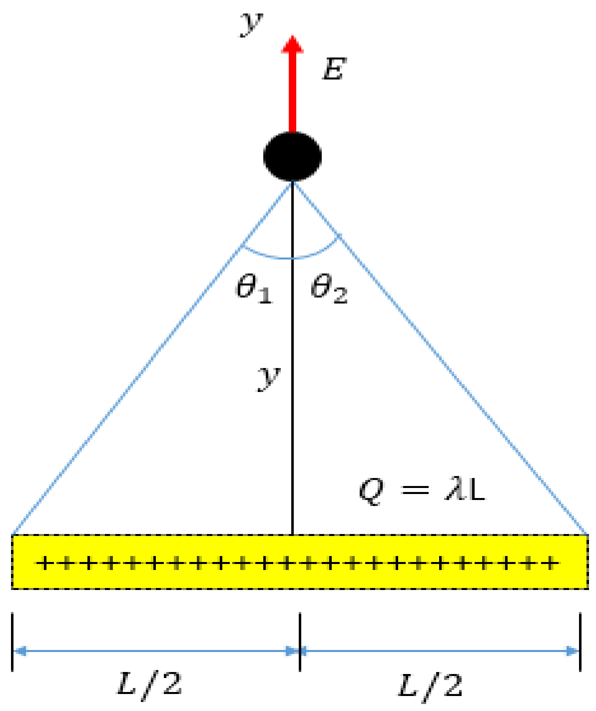
$$E_y(12cm) = 183kN/C$$

$$E_y(4.5m) = \frac{2(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)}{4.5m} \frac{\frac{1}{2}(6nC/m)(0.05m)}{\sqrt{(0.025m)^2 + (4.5m)^2}}$$

$$E_y(4.5m) = 0.133N/C$$

Cálculo del campo eléctrico E distribuciones continuas de cargas

Problema 3
Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2.5cm\ a\ x = +2.5cm$ y posee una densidad de carga lineal $\lambda = \frac{6nC}{m}$. (a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje y en (b) $y = 4cm$, $(c) y = 12cm\ y\ (d)\ y = 4.5m$ (e)Determinar el campo en $y = 4.5m$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido (d).



Usamos la ley de Coulomb para encontrar el campo eléctrico E_y, tenemos que:

$$E_y(y) = \frac{kQ}{y^2}$$

Sustituyendo y evaluando tenemos para $E_y\ en\ y = 4.5m$:

$$E_y(4.5m) = \frac{kQ}{y^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(0.3nC)}{(4.5m)^2}$$

$$E_y(4.5m) = 0.133\text{N/C}$$