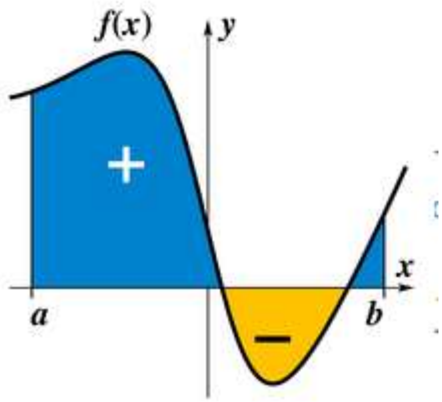
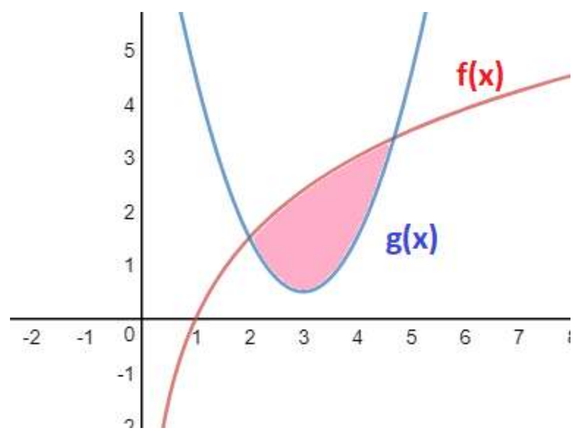
Universidad Nacional Experimental del Táchira
Departamento de Matemática y Física
Asignatura Matemática II (0826201)

Aplicaciones de la Integral Definida. Áreas





1. Cálculo de áreas de una Región Plana.

Objetivos:

Formular y Calcular la Integral Definida que proporciona el área de una región plana.

Aplicaciones de la Integral Definida

Se le considera a la Integral Definida desde varias perspectivas:

- Gráficas (áreas señaladas)
- Numérica (aproximación por sumas de Riemann)
- Simbólica (El teorema fundamental del Cálculo)

El cálculo Integral proporciona a los Ingenieros y Tecnólogos los conocimientos necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variable real en el planteamiento y solución de situaciones prácticas que lleguen a presentarse en el ejercicio profesional.

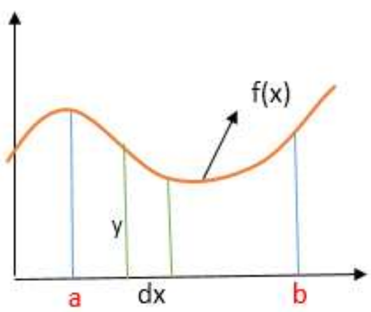
Dentro del estudio del cálculo integral un tema que tiene bastante importancia es el de la integral definida, debido a sus aplicaciones, a la vez que es esencial para el entendimiento de diversos términos matemáticos.

Su campo de acción comprende problemas de áreas, volúmenes y longitudes, además por lo tanto su extensa su aplicación en Física, Estadística, Economía, Matemática.

Cálculo de áreas por Integración

Para calcular el área de la región tomaremos en cuenta 5 tipos de áreas

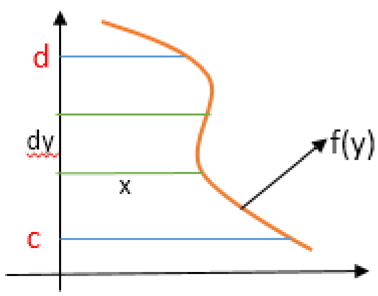
Áreas tipo I: Por medio de franjas verticales



El área viene dada por

$$Si\ y = f(x) \Rightarrow A = \int_a^b f(x)dx$$

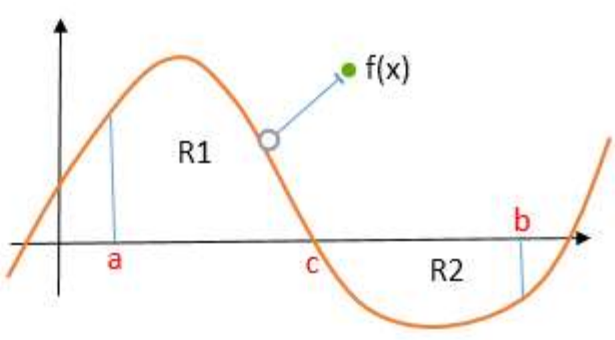
Áreas tipo II: Por medio de franjas horizontales



El área viene dada por

$$Si\ x = f(y) \Rightarrow A = \int_c^d f(y)dy$$

Áreas tipo III: Región por abajo y por arriba del eje x



El área viene dada por

$$A_{R} = R_1 - R_2$$

$$A_{R} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

De igual manera si la región se realiza con respecto al eje y

$$A_{R=}\int_{c}^{e}f(y)dy-\int_{e}^{d}f(y)dy$$

Áreas tipo IV: Región entre curvas por medio de franjas verticales

Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[a\,,b]$ y $f(x)\geq g(x)$ y la región delimitada por dichos gráficos f y g entre $x=a$ $y\,x=b$, como se muestra en las figuras. Si los dos gráficos se encuentran sobre el eje x , podemos interpretar el área que está encerrada entre estos como el área bajo el gráfico g restada del área bajo el gráfico f .

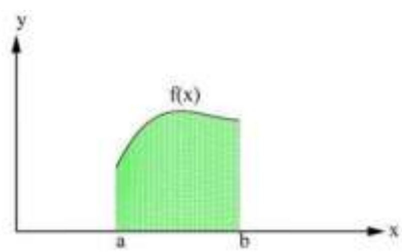


figura 1

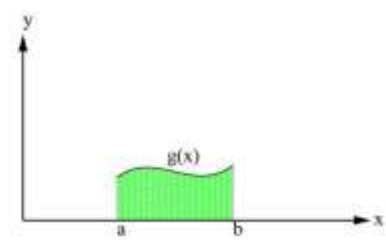


figura 2

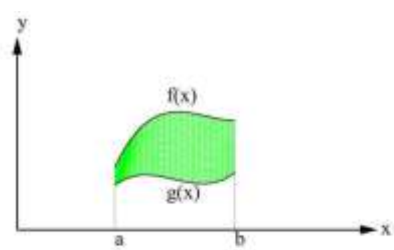


figura 3

Por lo tanto, como lo indican los gráficos, tiene sentido decir que el área de la región viene dada por la resta de la curva superior menos la inferior, en términos de la integral será:

$$A=\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]dx$$

Áreas tipo IV: Región entre curvas por medio de franjas horizontales

Similarmente, si se tienen dos funciones continuas $f \; y \; g$ en el intervalo $[c\,,d]$ y $f(y) \geq g(y)$ la región delimitada por dichos gráficos $f \;\; y \;\; g$ entre $y = c \;\; y \;\; y = b$ viene dada por

$$A = \int_{c}^{d} [f(y) - g(y)]dy$$

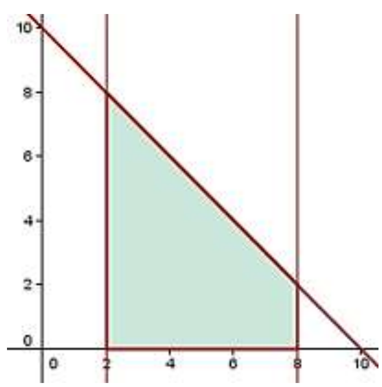
El ***área Entre Dos Curvas*** hace referencia a encontrar el área de la región que está delimitada por las dos funciones (ya sea con respecto al eje x o al eje y).

EJEMPLO A

Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX y las rectas $x = 2 \; y \; x = 8$

Solución:

1° Representamos gráficamente las rectas y el eje indicados; también ubicamos el área solicitada



2° Los extremos del área solicitada están dados por las rectas $x = 2 \; y \; x = 8$ por ello representamos la recta en función de la variable $x \quad \Longrightarrow \qquad y = 10 - x$

3° Planteamos el área de la región por medio de la integral definida aplicando el caso tipo I por franjas verticales, por lo tanto, el área solicitada viene dada por

$$A = \int_{2}^{8} y dx$$

4° Sustituimos y en función de x y resolvemos la integral definida

$$A = \int_{2}^{8} (10 - x) \cdot dx$$

Integramos término a término

$$= \left[10x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{2}^{8}$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$= \left[10(8) - \frac{(8)^2}{2}\right] - \left[10(2) - \frac{(2)^2}{2}\right]$$

Resolvemos las operaciones algebraicas y obtenemos el área

$$= (80 - 32) - (20 - 2)$$

$$= 48 - 18$$

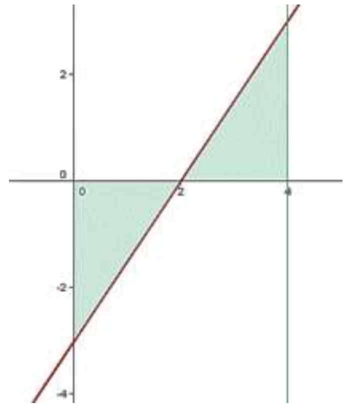
$$= 30\, u^2$$

EJEMPLO B

Hallar el área limitada por las rectas $y = {(3x-6)}/{2}$, $x = 0$, $x = 4$ y el eje de las abscisas.

Solución:

1° Representamos gráficamente las rectas dadas e identificamos el área solicitada



2° El área solicitada viene dada por la integral de la región bajo el eje OX y la región por encima de dicho eje, por lo tanto, el cálculo del área de la región utilizaríamos el caso tipo III por franjas verticales, el área solicitada viene dada por

$$A = \int_{2}^{4} \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx - \int_{0}^{2} \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx$$

3° Resolvemos la integral indefinida

$$A = \int_{2}^{4} \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx - \int_{0}^{2} \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx$$

Separamos las fracciones e integramos término a término

$$A = \left[\frac{3x^2}{4} - 3x\right]\Bigg|_2^4 - \left[\frac{3x^2}{4} - 3x\right]\Bigg|_0^2$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluando en el límite superior menos el límite inferior

$$A = \left[\left(\frac{3(16)}{4} - 3(4)\right) - \left(\frac{3(4)}{4} - 3(2)\right)\right] - \left[\left(\frac{3(4)}{4} - 3(2)\right) - \left(\frac{3(0)}{4} - 3(0)\right)\right]$$

Resolvemos las operaciones algebraicas

$$A = [(0) - (-3)] - [(-3) - (0)]$$

Obtenemos el valor del área

$$A = 3 + 3$$

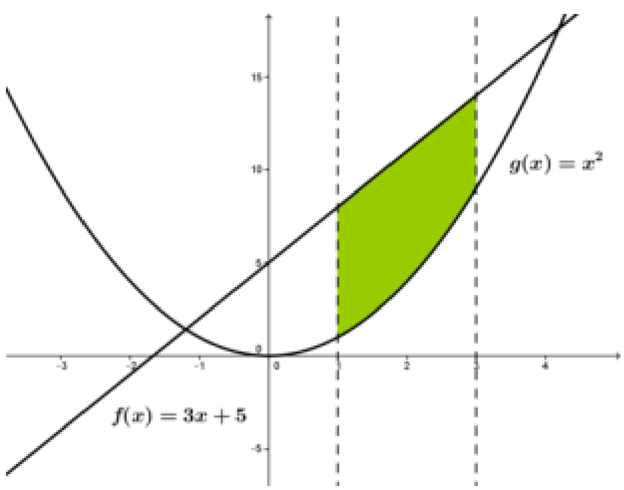
$$A = 6\,u^2 \qquad (u^2 \;\rightarrow unidades\ cuadradas)$$

Ejemplo C

Encuentra el área de la región que se encuentra entre $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo [1, 3].

Solución:

1° Realizamos las gráficas tomando en cuenta los principios de graficación con respecto al tipo de función que representa, como puedes ver la función $f(x)$ representa una recta creciente que intersecta a los ejes coordenados en los valores $x = \frac{-5}{3}$ y $y = 5$ y la función $g(x)$ representa una parábola de vértice en el origen $(0\,,0)$ abriendo hacia arriba, a partir del gráfico, $f(x) > g(x)$ en el intervalo $[1, 3]$.



2° El área solicitada viene dada por la región delimitada por las dos curvas, aplicamos la fórmula del área del caso tipo IV por franjas verticales

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

Sustituimos las funciones en la integral

$$A = \int_{1}^{3} [(3x + 5) - (x^2)]dx$$

Resolvemos la integral indefinida, integramos término a término

$$A = \left[\left(\frac{3x^2}{2} + 5x\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]\Bigg|_{1}^{3}$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$A = \left[\left(\frac{3(9)}{2} + 5(3)\right) - \left(\frac{27}{3}\right)\right] - \left[\left(3\frac{1}{2} + 5(1)\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

Resolvemos las operaciones algebraicas y obtenemos el área

$$A = \left(\frac{117}{6}\right) - \left(\frac{37}{6}\right)$$

$$= \frac{80}{3} = \frac{40}{3}\ u^2$$

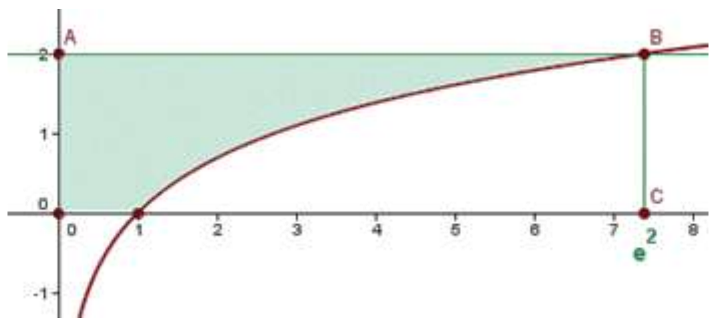
En ocasiones, el intervalo de integración de dos curvas *f*(*x*) y *g*(*x*) se puede determinar por puntos de la intersección entre las dos curvas. Además, los puntos de la intersección pueden estar donde las dos curvas cambian su relación con respecto a cuál es más larga. Es posible que se necesite cambiar la expresión de diferencia en el integrando.

Ejemplo D

Hallar el área de la región del plano limitada por las curvas$y = lnx$, $y = 2$ y los ejes coordenados.

Solución:

1° Representamos gráficamente las curvas dadas, identificamos sus puntos de intersección $A(0, 2)$, $B(e^2, 2)$ y sombreamos el área solicitada



2° Observamos que el área solicitada se puede calcular de dos maneras, por medio de franjas verticales o por franjas horizontales

3° Si trabajamos por medio de franjas horizontales el área se divide en dos regiones una entre el intervalo $[0\,,1]$ donde delimita la curva $x = 2$ y el eje x , y la otra región en el intervalo $[1\,, e^2]$ con las curvas $x = 2$ y $y = \ln x$. Por lo tanto, el área viene dada por la suma de las dos integrales

$$A = \int_0^1 2dx + \int_1^{e^2} (2 - \ln x)dx$$

4° En cambio si trabajamos por medio de franjas horizontales integramos respecto a la variable $\boldsymbol{y}$, el área estará representada por una sola región en el intervalo $[0\,, 2]$ por lo que el cálculo se simplifica, para ello debemos expresar la curva en función de $\boldsymbol{y}$, esto es,

$$y = \ln x \quad \Longrightarrow \quad x = e^y$$

El área solicitada se expresa como $A = \int_0^2 e^y dy$

5° Resolvemos la integral definida

$$A = \int_0^2 e^y dy$$

Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior quedando el área

$$A = [e^y]|_0^2$$

$$= (e^2 - 1)\, u^2$$

Ejemplo D

Encuentra el área entre las curvas $y = x + 1$ y $y = x^3 + x^2 - x + 1$ entre los puntos de intersección.

Solución:

1° Realizamos las gráficas tomando en cuenta los principios de graficación con respecto al tipo de función que representa, la primera curva es una recta y la segunda una función polinómica,

2° Encontramos los puntos de intersección igualando las curvas

$$x + 1 = x^3 + x^2 - x + 1$$

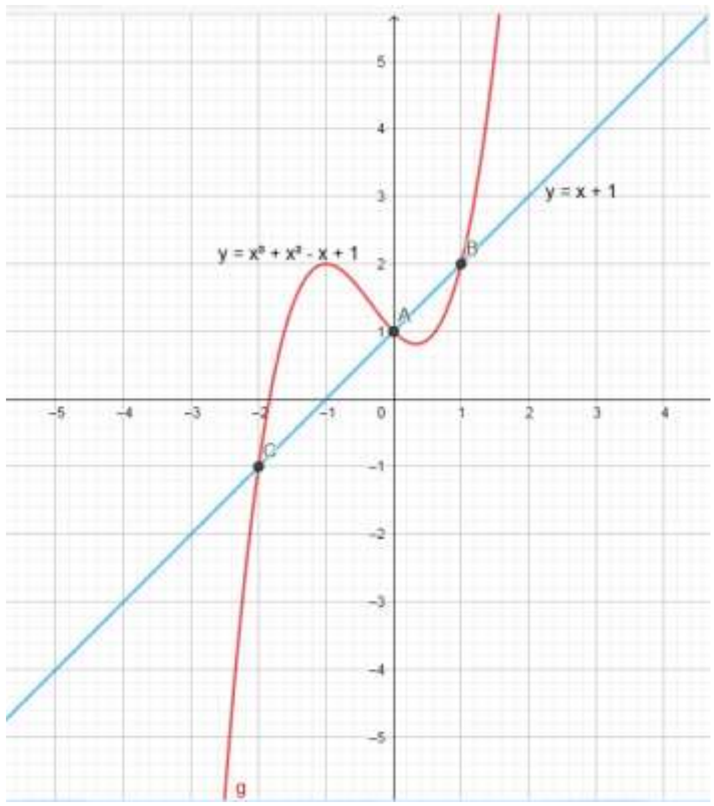
$$0 = x^3 + x^2 - 2x$$ factorizando por factor común

$$0 = x(x^2 + x - 2)$$ factorizando nuevamente

$$0 = x(x+2)(x-1) \quad \text{igualando a cero}$$

Tenemos los valores $x = 0\ , x = -2\ \ y\, x = 1$

Donde sustituyendo en la ecuación $y = x + 1$ obtenemos los puntos $A(0,1)\ , B(1,2)\ \ y\, C(-2\,,-1)$



3° Observamos que el área a calcular se debe trabajar por medio de franjas verticales aplicando la fórmula del área del caso tipo IV, además se verifican dos regiones:

una en el intervalo de $[-2\,,0]$ donde $(x^3 + x^2 - x + 1) \geq (x + 1)$

y la otra en el intervalo $[0\,,1]$ donde $(x + 1) \geq (x^3 + x^2 - x + 1)$

4° El área viene dada por la suma de las dos integrales

$$A=\int_{-2}^{0}[(x^3+x^2-x+1)-(x+1)]dx+\int_{0}^{1}[(x+1)-(x^3+x^2-x+1)]\,dx$$

5° Si resolvemos la integral definida resulta

$$A=\frac{37}{12}\;u^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encontrar el área comprendida por las curvas $y=2-x^2$, $y=x$ (Resolver por ambos métodos)
2. Encontrar el área de la región acotada por las gráficas $y=x^2+2$, $x+y=0$, $x=0\ y\ x=1$
3. Encontrar el área de la región acotada por las gráficas $x=3-y^2$ y la recta que pasa por los puntos $(\,3\,,2\,)\ y\ (-1\,,-2\,)$
4. Encontrar el área de la región acotada por las curvas $y=x^2-4x+3$ y $y=-x^2+2x+3$
5. Calcular el área de la región limitada por las gráficas $2y^2=x+4$, $y^2=x$
6. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y=x^3-2$, $4x-y=2$
7. Hallar el área de la región encerrada por las curvas $y=x^3-x^2-2x$, $4y=7x$
8. Encontrar el área de la región encerrada por las curvas $y=3x^3-x^2-10x$, $y=2x-x^2$
9. Calcular el área de la región encerrada por las curvas $y^2=16-x$, $(y+2)^2=x+4$
10. Calcular el área de la región limitada por las gráficas $y=-x^2-x-1$, $y=x^2-7$
11. Hallar el área limitada por la parábola $y=4x-x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.
12. Hallar el área comprendida entre las curvas $xy=1$, $y=3x$, $y=\frac{x}{3}$

13. Calcular el área de la región del plano limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$

Respuestas

1. $A = {}^{9}/_{2}\ u^2$	2. $A = {}^{17}/_{6}\ u^2$	3. $A = {}^{9}/_{2}\ u^2$	4. $A = 9\ u^2$	5. $A = {}^{32}/_{3}\ u^2$	6. $A = 8\ u^2$
7. $A = {}^{1079}/_{96}\ u^2$	8. $A = 24\ u^2$	9. $A = 72\ u^2$	10. $A = {}^{343}/_{24}\ u^2$	11. $A = {}^{16}/_{3}\ u^2$	12. $A = 2ln3\ u^2$

Importante

Para ampliar la información, consultar el libro:

- Cálculo de Larson, Capitulo Nº 6, Integración, 6ta Edición.