UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
TEMA I. MATEMÁTICA II
(0826201)

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES DE SENOS Y COSENOS

1. DEFINICION DEL METODO POR SUSTITUCIÓN UNIVERSAL
2. CASOS PARTICULARES DE LA SUSTITUCIÓN UNIVERSAL
3. EJERCICIOS RESUELTOS
4. ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

OBJETIVO: **CALCULAR INTEGRALES INDEFINIDAS DE FUNCIONES RACIONALES DE SENO Y COSENO.**

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCION UNIVERSAL

DEFINICION:

Para resolver este tipo de integrales se aplica el método por sustitución universal. El cual consiste en cambiar la variable trigonométrica por una algebraica de esta manera las integrales de este tipo se reducen a integrales de funciones racionales. El método define el cambio de la siguiente manera:

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t,$$

Como resultado de esta sustitución, se tiene:

$$x = 2\,arctg(t) \longrightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$sen(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

DEMOSTRACION:

Para ver la demostración revisar el siguiente enlace: https://www.youtube.com/watch?v=qlT16sgcs74

Observación: El cambio general $tg\left(\frac{x}{2}\right) = t$, siempre resuelve la integral, pero en ciertos casos conduce a cálculos complicados.

CASOS PARTICULARES

Existen tres casos **particulares** en los que la integral se puede resolver de una manera más sencilla. A saber:

1.- Si se verifica la identidad

$$R(-sen(x), -cos(x)) = R(sen(x), cos(x)),$$

Se usa el cambio de variable $tg(x) = t$.

Ver ejemplo: https://www.youtube.com/watch?v=PEhgn3DwS54

2.- Si se verifica la identidad

$$R\left(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)\right) = -R\left(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\right),$$

Se usa el cambio de variable $\cos(x) = t$.

3.- Si se verifica la identidad

$$R\left(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)\right) = -R\left(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\right),$$

Se usa el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$.

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO 7.1

HALLAR

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3} + \mathbf{2}\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{2}\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{dx}$$

Solución

La función integrando es una función racional pero en este caso la variable son las funciones trigonométricas seno y coseno. Antes de aplicar la técnica por descomposición de fracciones parciales, debemos emplear el **cambio de variable universal.**

Entonces, planteamos el cambio de variable

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3} + \mathbf{2}\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{2}\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{dx} = \int \frac{\mathbf{1}}{\left[\mathbf{3} + \mathbf{2}\frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}})}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}})} + \mathbf{2}\frac{(\mathbf{2}\boldsymbol{t})}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}})}\right]}\,\frac{\mathbf{2}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}})}\boldsymbol{dt}$$

Resolvemos la suma que está presente en el denominador, recuerden que por ser fracciones se debe hallar el m.c.m. Luego aplicar la doble C y por último efectuar la simplificación de términos si es posible.

$$\int \frac{1}{3+2Cos(x)+2sen(x)}dx = \int \frac{1}{\left[\frac{3+3t^2+2-2t^2+4t}{(1+t^2)}\right]}\frac{2}{(1+t^2)}dt$$

$$\int \frac{1}{3+2Cos(x)+2sen(x)}dx = \int \frac{(1+t^2)}{[3+3t^2+2-2t^2+4t]}\frac{2}{(1+t^2)}dt$$

$$\int \frac{1}{3+2Cos(x)+2sen(x)}dx = 2\int \frac{1}{[3+3t^2+2-2t^2+4t]}\,dt$$

$$\int \frac{1}{3+2Cos(x)+2sen(x)}dx = 2\int \frac{1}{[t^2+4t+5]}\,dt \qquad (1)$$

Nota (1) : la integral obtenida solo tiene un factor cuadrático irreducible, en este caso basta con realizar la completación de cuadrados para encontrar una integral más sencilla.

En el caso de **obtener** allí una **función racional** bien sea de tipo impropia o propia se debe **aplicar** la técnica por descomposición de **fracciones parciales** vista en el tema anterior.

Completamos cuadrados,

$$\int \frac{1}{3+2Cos(x)+2sen(x)}dx = 2\int \frac{1}{[(t+2)^2+1]}\,dt$$

Planteamos el cambio de variable, $u = t+2 \quad \rightarrow \quad du = dt$

$$\int \frac{1}{3+2Cos(x)+2sen(x)}dx = 2\int \frac{1}{[(u)^2+1]}\,du$$

Integramos,

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3 + 2Cos(x) + 2sen(x)}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{2arctg(u) + C}$$

Devolvemos el cambio,

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3 + 2Cos(x) + 2sen(x)}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{2arctg(t+2) + C}$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3 + 2Cos(x) + 2sen(x)}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{2arctg\left(tg\left(\frac{x}{2}\right) + 2\right) + C}$$

EJERCICIO 7.2

HALLAR

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4Sec(x) - 1}} \boldsymbol{dx}$$

Solución

La función integrando es una función racional, pero en este caso no se expresa directamente en función de seno y coseno. Entonces, debemos primero hallar la expresión de la función secante utilizando las expresiones equivalentes que relacionan las reciprocas con las funciones elementales.

Sabemos que,

$$Sec(x) = \frac{1}{Cos(x)}$$

Empleando el **cambio de variable universal,**

$$\boldsymbol{Sec(x)} = \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

Entonces, planteamos el cambio de variable universal

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t,$$

$$\boldsymbol{Sec(x)} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral

$$\int \frac{1}{4Sec(x)-1}dx = \int \frac{1}{\left[4\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)-1\right]}\frac{2}{(1+t^2)}dt$$

Resolvemos la resta que está presente en el denominador, recuerden que por ser fracciones se debe hallar el m.c.m. Luego aplicar la doble C y por último efectuar la simplificación de términos si es posible.

$$\int \frac{1}{4Sec(x)-1}dx = \int \frac{1}{\left[\frac{4+4t^2-1+t^2}{(1-t^2)}\right]}\frac{2}{(1+t^2)}dt$$

$$\int \frac{1}{4Sec(x)-1}dx = \int \frac{(1-t^2)}{[5t^2+3]}\frac{2}{(1+t^2)}dt$$

$$\int \frac{1}{4Sec(x)-1}dx = \int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}\, dt \qquad (1)$$

Nota (1) : la integral obtenida tiene el producto de dos factor cuadrático irreducible, en este caso se debe **aplicar** la técnica por descomposición de **fracciones parciales** vista en el tema anterior.

Como el denominador ya esta factorizado, verificamos que el factor cuadrático sea irreducible. Esto se hace aplicando la fórmula

$b^2-4ac\ <0$ Si se cumple esta desigualdad el factor es irreducible

Luego, asignamos las fracciones simples en este caso corresponden a factores cuadráticos, como tenemos dos factores entonces vamos a tener un total de 2 fracciones simples, las cuales se asignan de la siguiente manera:

$$\frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)} = \frac{(At+B)}{[5t^2+3]} + \frac{(Ct+D)}{(1+t^2)}$$

Las letras ***A, B, C, D*** representan las constantes que debemos calcular.

Se realiza la suma de fracciones, aplicando el mínimo común múltiplo *(recuerde repasarlo)* y simplificando la expresión para obtener una ecuación

$$\frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)} = \frac{(At+B)(1+t^2)+(Ct+D)[5t^2+3]}{[5t^2+3](1+t^2)}$$

Simplificando,

$$(\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{t^2}) = (\boldsymbol{At}+\boldsymbol{B})(\mathbf{1}+\boldsymbol{t^2}) + (\boldsymbol{Ct}+\boldsymbol{D})[\mathbf{5}\boldsymbol{t^2}+\mathbf{3}]$$

Aplicamos la distributiva y agrupamos:

$$(\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{t^2}) = (\boldsymbol{A}+\mathbf{5}\boldsymbol{C}).\boldsymbol{t^3} + (\boldsymbol{B}+\mathbf{5}\boldsymbol{D}).\boldsymbol{t^2} + (\boldsymbol{A}+\mathbf{3}\boldsymbol{C}).\boldsymbol{t} + (\boldsymbol{B}+\mathbf{3}\boldsymbol{D})$$

Por igualdad de polinomios se tiene:

$$(\boldsymbol{A}+\mathbf{5}\boldsymbol{C}) = 0$$

$$(\boldsymbol{B}+\mathbf{5}\boldsymbol{D}) = -2$$

$$(\boldsymbol{A}+\mathbf{3}\boldsymbol{C}) = 0$$

$$(\boldsymbol{B}+\mathbf{3}\boldsymbol{D}) = 2$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, **se deja al estudiante como práctica la solución del sistema**. Se obtienen los siguientes valores: $A=0,\ \ B=\ 8,\ \ C=0\ \ y\ \ D=\ -2$

Sustituimos los valores,

$$\frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)} = \frac{(0t+8)}{[5t^2+3]} + \frac{(0t-2)}{(1+t^2)}$$

Integramos

$$\int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}dt = \int \frac{(0t+8)}{[5t^2+3]}\,dt + \int \frac{(0t-2)}{(1+t^2)}dt$$

$$\int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}dt = 8\int \frac{(1)}{[5t^2+3]}\,dt - 2\int \frac{1}{(1+t^2)}dt$$

$$\int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}dt = \frac{8}{5}\int \frac{(1)}{\left[t^2+\frac{3}{5}\right]}\,dt - 2\int \frac{1}{(1+t^2)}dt$$

$$\int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}dt = \frac{8}{5}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5}}}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{5}}}\right)\right] - 2\left[arctg\left(\frac{t}{1}\right)\right] + C$$

$$\int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}dt = \frac{8}{5}\left[\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{\sqrt{5}t}{\sqrt{3}}\right)\right] - 2[arctg(t)] + C$$

$$\int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}dt = \frac{8}{5}\left[\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{\sqrt{5}t}{\sqrt{3}}\right)\right] - 2[arctg(t)] + C$$

$$\int \frac{(2-2t^2)}{[5t^2+3](1+t^2)}dt = \frac{8}{5}\left[\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{\sqrt{5}tg\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\right] - 2\left[arctg\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right] + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{1}{4Sec(x)-1}dx = \frac{8}{5}\left[\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{\sqrt{5}tg\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\right] - [x] + C$$

EJERCICIO 7.3

HALLAR

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{Cos(x)}+\boldsymbol{sen(x)}}\boldsymbol{dx}$$

Solución:

La solución la pueden observar en el siguiente video

https://www.youtube.com/watch?v=22wCIIt7juU

Como práctica lo pueden ir haciendo, justificando muy bien cada paso que realicen, recuerden que todos los cambios de variables deben estar planteados para que la integral tenga validez, y luego lo comparan.

EJERCICIO 7.4

HALLAR

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{Cos}^{2}(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{dx}$$

Solución:

La solución la pueden observar en el siguiente video

https://www.youtube.com/watch?v=PCMrF1v6E4o

Recuerden que todos los cambios de variables deben estar planteados para que la integral tenga validez.

EJERCICIO 7.5

HALLAR

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{Sen}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{3}\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{2}} \boldsymbol{dx}$$

Solución:

La solución la pueden observar en el siguiente video

https://www.youtube.com/watch?v=Z-fIBiGvBg4

Recuerden que todos los cambios de variables deben estar planteados para que la integral tenga validez.

ACTIVIDAD

Realizar los ejercicios del Libro 801 ejercicios resueltos/ capitulo 8/ Del al 25.pag 249.