DR. JOSÉ ATILIO GUERRERO

February 23, 2018

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones

(Material en Revisión [1])

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA

DECANATO DE DOCENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

SAN CRISTÓBAL-VENEZUELA, ENERO 2018

[1] Email: jaguerrero4@gmail.com, jguerre@unet.edu.ve

Contenido

1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1er. Orden **3**

1.1 Definiciones Básicas 4

1.2 Problemas de Valor Inicial 7

1.3 Resolución de EDO de Primer Orden 11

1.3.1 Ecuaciones Diferenciales a Variables Separables 12

1.3.2 Ecuaciones Diferenciales Homogéneas 16

1.3.3 EDO No Homogéneas Reducibles a Homogéneas 20

1.3.4 EDO Exactas 24

1.3.5 EDO No Exactas - Factor Integrante 29

1.3.6 EDO Lineales de Primer Orden 35

1.3.7 EDO de Bernoulli 38

1.4 Ejercicios Propuestos 41

2 Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1er. Orden **46**

2.1 Crecimiento/Descomposición 46

2.2 Ley de Enfriamiento de Newton 53

2.3 Mezclas 59

2.3.1 Planteamiento del Modelo 59

2.4 Problemas Propuestos 64

3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Orden Superior **68**

3.1 Ecuación Diferencial Lineal Homogénea con Coeficientes Constantes 74

3.1.1 Ejercicios Propuestos 78

3.2 E.D.O. No Lineales de 2do Orden Reducibles a 1er Orden 78

3.2.1 E.D. de 2do Orden con ausencia de la variable dependiente 79

3.2.2 Ejercicios Propuestos 80

3.2.3 E.D. de 2do Orden con ausencia de la variable independiente 80

3.2.4 Ejercicios Propuestos 82

3.3 E.D.O.L. No Homogéneas de Orden n, con Coeficientes Constantes 82
3.3.1 Método de los Coeficientes Indeterminados 83
3.3.2 Ejercicios Propuestos 88
3.3.3 Método de Variación de Parámetros 88
3.3.4 Ejercicios Propuestos 92
3.4 Transformada de Laplace y Problemas de Valor Inicial 93
3.5 Aplicaciones de la Transformada de Laplace a las Ecuaciones Diferenciales . . 100
3.5.1 Ejercicios Propuestos 103
3.6 Aplicaciones de las E.D.O.L. de Orden Superior 104
3.6.1 Sistema Masa-Resorte 105
3.6.2 Movimiento Libre No Amortiguado 106
3.6.3 Movimiento Libre Amortiguado 111
3.6.4 Movimiento Forzado 118
3.6.5 Movimiento Forzado Amortiguado 118
3.6.6 Problemas Propuestos 121

4 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 126
4.1 Sistema de Ecuaciones Diferenciales 126
4.2 Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales por Eliminación . . 131
4.3 Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales por Operadores Diferenciales Lineales 133
4.4 Ejercicios Propuestos 142

Bibliografía 143

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1er. Orden

Las ecuaciones diferenciales son una de las ramas más importantes de las matemáticas debido a que son los modelos apropiados para muchos experimentos de la vida y fenómenos de la naturaleza, tomemos por ejemplo el estudio de la ciencias y la ingeniería, en ellas se desarrollan modelos matemáticos para ayudar a comprender los fenómenos físicos. Estos modelos a menudo conllevan a una ecuación que contiene ciertas derivadas de una función. Como por ejemplo:

(1) **Caida Libre**. Se suelta un objeto desde cierta altura h sobre el suelo, y se le deja caer bajo la acción de la fuerza de la gravedad (no intervienen más fuerzas).

En este simple ejemplo, surgen una gran variedad de inquietudes:

- ¿Cuál será su posición al cabo de t segundos?;
- ¿Con que velocidad llega al suelo?;
- ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?; etc.

(2) **Crecimiento y Descomposición**. En biología a menudo se observa que la rapidez con que, en cada instante de tiempo, ciertas bacterías se multiplican, es proporcional al número de bacterías presentes en dicho instante.

Nuevamente surgen una gran variedad de interrogantes al respecto:

- ¿Cuántas bacterías hay al cabo de t segundos?;
- ¿Que tiempo debe transcurrir para que la población de bacterías se triplique?; etc.

(3) **Mezclas Químicas**.

(4) **Circuitos Eléctricos**.

Etc, etc, etc.

En todos estos ejemplos, se debe plantear una ecuación para poder realizar un análisis completo del fenómeno en cuestión. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación diferencial*.

Ahora bien, es conocido de estudios previos, que si se tiene una función $y = f(x)$, su derivada $y' = f'(x)$ representa la *variación* o *ritmo de cambio* de la variable dependiente y respecto de la variable independiente x. De esta manera, puede intuirse que muchos fenómenos de la naturaleza se ven relacionadas las diversas variables involucradas en el proceso con sus ritmos de variación, lo cual nos lleva a relacionar las funciones con sus respectivas derivadas. El objetivo primordial de las ecuaciones diferenciales es analizar con detalles un fenómeno en cuestión.

Recordemos que en semestres anteriores, vimos que la derivada de una función es en sí otra función, por ejemplo, si $y = e^{x^2}$ entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xy.$$

En consecuencia, en nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales, nuestro interés, no es "dada una función $y = f(x)$, determinar su derivada", sino todo lo contrario; es decir, "*dada una ecuación diferencial, determinar (si existe) una función $y = f(x)$ que satisfaga dicha ecuación*".

Para tal fin, introduciremos las definiciones y resultados básicos.

1.1 Definiciones Básicas

Definición 1.

Se denomina ecuación diferencial a cualquier ecuación en la que aparezcan relacionadas: una o varias variables independientes, una variable dependiente de ella o ellas, las derivadas de esta última con respecto a una o más variables independientes, o los diferenciales de las variables.

En otras palabras, "*una ecuación diferencial, es una ecuación en donde aparecen relacionadas la función con sus derivadas*".

Ejemplo 2.

$$(a)\quad y' + ytg(x) = 0. \qquad (b)\quad y''' - y'' + y' = x + 1.$$

$$(c)\quad \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z. \qquad (d)\quad xdy = (2x^2 + 1)dx.$$

$$(e)\quad \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (f)\quad \Big[y(1-y)\Big]^{-3/2} \frac{dy}{dt} = \frac{2h}{\sqrt{h}}.$$

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con su: *tipo, orden* y *linealidad*.

(a) Si una ecuación diferencial contiene <u>sólo</u> derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria** (edo).

(b) Una ecuación diferencial que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se denomina **ecuación diferencial parcial** (edp).

(c) Se define el **orden** de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada involucrada en la ecuación.

(d) El **grado** de una ecuación diferencial es el mayor exponente entero positivo de la derivada superior de dicha ecuación. Si esta derivada superior tiene exponente un número no entero **no** es posible definir el grado de la misma.

Veamos algunos ejemplos que ilustren estas nociones:

Ejemplo 3.

$$a)\quad x^2y'' + 2xy + 2x = 0 \quad \longmapsto \quad \text{edo, 2do orden, 1er grado.}$$

$$b)\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 4x\left(1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^6 \quad \longmapsto \quad \text{edo, 2do orden, 2do grado.}$$

$$c)\quad \alpha\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \longmapsto \quad \text{edp, 4to orden, 1er grado.}$$

Observación 4.

Aún cuando las edp son muy importantes, su estudio exige una buena base en la teoría de las edo, en consecuencia, en este primer contacto con las ecuaciones diferenciales, nos concentraremos en las edo.

Una edo general de orden n, es una ecuación diferencial la cual se suele representar mediante

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ó

$$y^{(n)} = G(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^{(n)} = G(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ es **lineal** cuando G es una función lineal de $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Lo cual significa que una edo es lineal si se puede reescribir en la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{1.1}$$

En (1.1), se observa las dos propiedades características de las edo lineales:

- Cada coeficiente a_i sólo depende de la variable independiente x.
- La variable dependiente y junto con sus derivadas son lineales (tienen exponente uno).

Una edo que **no** satisfaga alguna (o las dos) de estas condiciones, se dice que es **no lineal**.

Ejemplo 5.

a) $x^2y'' + 2xy + 2x = 0 \quad \longmapsto \quad$ edo, 2do orden, 1er grado, lineal.

b) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 4x\left(1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^6 \quad \longmapsto \quad$ edo, 2do orden, 2do grado, no lineal.

c) $y''' + y^2 = 0 \quad \longmapsto \quad$ edo, 3er orden, 1er grado, no lineal.

d) $(y+1)y' + 2y = e^x \quad \longmapsto \quad$ edo, 1er orden, 1er grado, no lineal.

Definición 6.

(a) Se denomina **solución explícita** de una edo en un intervalo I a toda función $y = f(x)$ que satisface dicha ecuación diferencial en I. Es decir, si $y = f(x)$ es solución de una edo de orden n, entonces

$$F\big(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\big) = 0.$$

(b) Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una edo en un intervalo I, si dicha relación define una o más soluciones explícitas en I, o si dicha relación satisface la ecuación diferencial en I.

Ejemplo 7.

a) La función $f(x) = sen(x)$ es una solución de la edo $y'' + y = 0$. Ya que

$$y'' + y = -sen(x) + sen(x) = 0.$$

b) La función $f(x) = \pi x e^x$ es solución de la edo $y'' - 2y' + y = 0$.

c) La función $y(t) = 2sen(t) - \dfrac{cos(2t)}{3}$ es solución de la edo $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = cos(2t)$.

d) La relación $x + y + e^{xy} = 0$ es una solución implícita de $(1 + xe^{xy})y' + ye^{xy} + 1 = 0$.

1.2 Problemas de Valor Inicial

En muchas situaciones, se esta interesado en resolver una ecuación diferencial sujeta a exigencias prescritas, que son las condiciones que se imponen a la solución o a sus derivadas. A saber, en algún intervalo I que contenga a x_0, el problema de

resolver: $y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$;

sujeta a: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$,

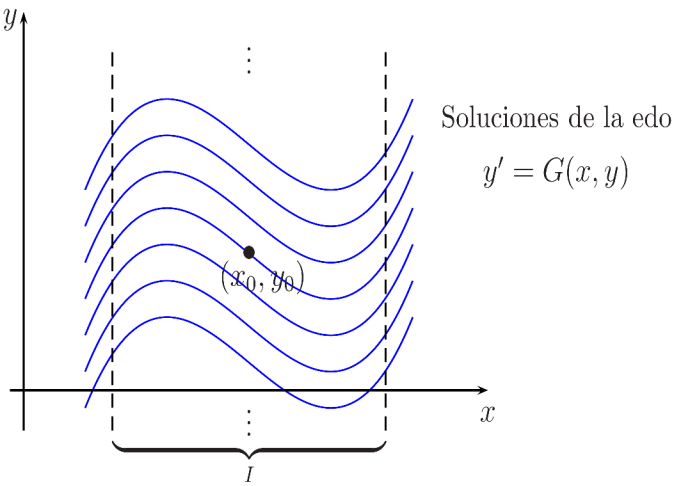
en donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes, se denomina **Problema de Valor Inicial** (pvi) y tales constantes son llamadas **Condiciones Iniciales** (ci).

En el caso de las edo de primer orden, el pvi es:

resolver: $y' = G(x, y)$;

sujeta a: $y(x_0) = y_0$.

Este tipo de pvi, es de fácil interpretación geométrica; es decir, se busca una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0, tal que una curva solución pase por el punto (x_0, y_0).



En general, en estos pvi, se tiene que

$y(x_0) = y_0 \quad \longmapsto$ "*normalmente representa la ubicación de un objeto en un tiempo* x_0";
y
$y'(x_0) = y_1 \quad \longmapsto$ "*proporciona la velocidad inicial del objeto en el mismo instante* x_0".

Al resolver un pvi, surgen dos asuntos fundamentales:

¿*Existe una solución al problema*?, si la hay, ¿**es única**?

Para un pvi de primer orden, lo que se pregunta es:

Existencia ¿La edo $y' = G(x, y)$ tiene soluciones?; ¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0)?.

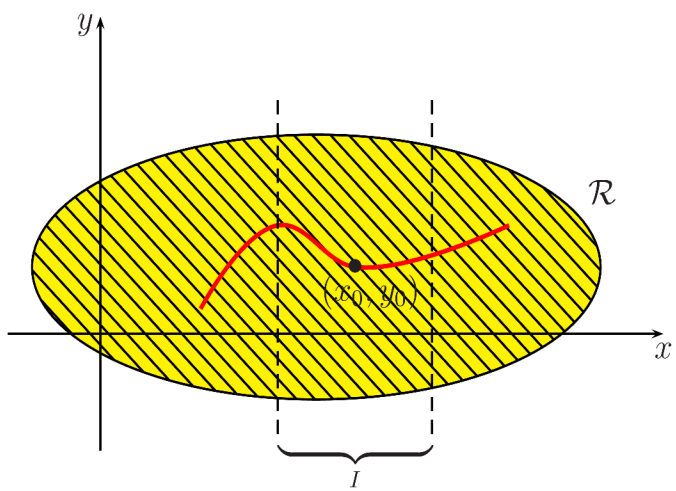
Unicidad ¿Cuándo podemos estar seguros de que hay precisamente **una** curva solución que pasa por (x_0, y_0)?

El siguiente resultado responde afirmativamente ambas inquietudes.

Teorema 8.

(Existencia y Unicidad de Soluciones de PVI de Primer Orden) Sea $\mathcal{R}$ una región del plano xy, que contiene al punto (x_0, y_0). Si $G(x, y)$ y $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ son continuas en dicha región, entonces existe un intervalo I, centrado en x_0 y una función única $y(x)$ definida en I, que satisface el pvi:

$$\begin{cases} y' = G(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

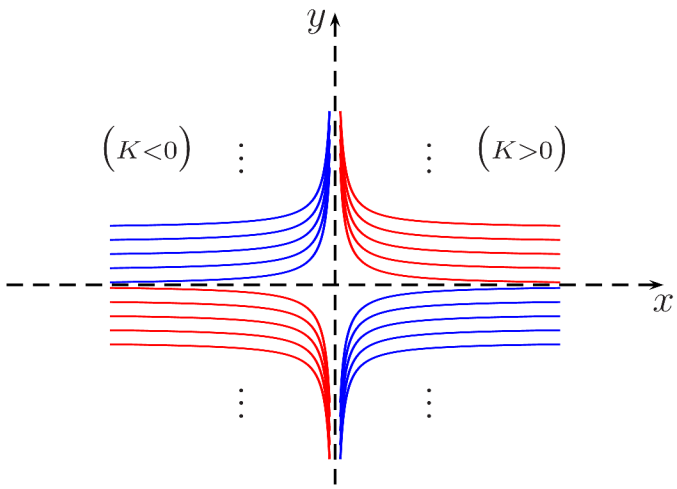


Dado el pvi de primer orden $\begin{cases} y' = G(x, y) & \longmapsto \quad \text{ecuación diferencial} \\ y(x_0) = y_0 & \longmapsto \quad \text{condición inicial.} \end{cases}$

(i) Al resolver la ecuación diferencial, se obtiene una función $\boxed{y = f(x, K)}$, denominada "**solución general**" de la ecuación diferencial.

(ii) Al hacer uso de la condición inicial, se obtiene que $K = K_0$, luego $\boxed{y = f(x, K_0)}$ se denomina "**solución particular**" del pvi dado.

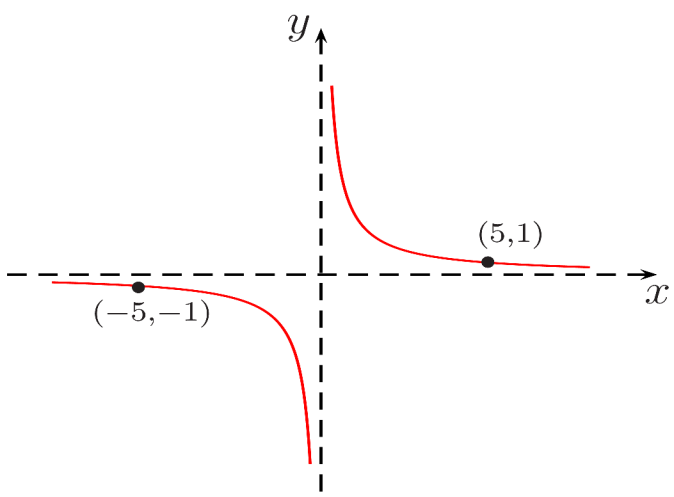
Por ejemplo, la ecuación diferencial $xy' + y = 0$ tiene por solución general $y = K/x$.



Si imponemos la condición inicial $y(5) = 1$, resulta $K = 5$, por lo que la solución particular del pvi

$$\begin{cases} xy' + y = 0 \\ y(5) = 1, \end{cases}$$

es $y = 5/x$.



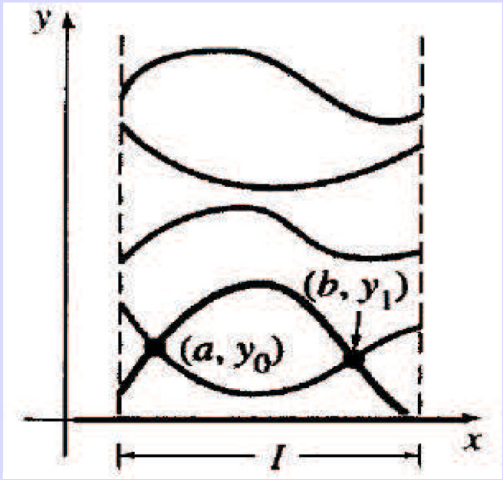
Observación 9.

Otro tipo de problema es resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden o mayor en la que la variable dependiente y, o sus derivadas, estén especificadas en **puntos distintos**. Un problema como

resolver: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x);$

sujeta a: $y(x_0) = y_0; \quad y'(x_1) = y_1, \quad x_0 \neq x_1$

se denomina **Problema de Valores en la Frontera** (pvf), y los valores y_0 y y_1 son llamados **Condiciones en la Frontera** (cf). Este tipo de problema, aún cuando son muy importantes, requiere un buen conocimiento de los pvi y en consecuencia nos limitaremos a los pvi.



Un pvf puede tener muchas soluciones, una o ninguna.

1.3 Resolución de EDO de Primer Orden

Las edo de primer orden, como se mencionó previamente, son aquellas ecuaciones diferenciales en las que aparecen relacionadas la variable independiente x, la dependiente o función incógnita $y = y(x)$ y su primera derivada y'. Una ecuación diferencial de este tipo puede expresarse de diversas formas, las mas comunes son:

Forma Normal: $y' = G(x, y);$

Forma Implícita: $F(x, y, y') = 0;$

Forma Diferencial: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$

Al resolver una edo de primer orden, a menudo se tendrá que utilizar, por ejemplo, *integración por parte, fracciones parciales*, o posiblemente algún otra técnica de integración. Por tanto, se recomienda revisar las técnicas de integración.

1.3.1 Ecuaciones Diferenciales a Variables Separables

Muchas ecuaciones diferenciales de primer orden, pueden reducirse a la forma

$$g(y)y' = f(x) \tag{1.2}$$

por medio de manipulaciones algebraicas. A este tipo de ecuación diferencial se le denomina **ecuación diferencial a variable separable**, ya que las variables dependiente y e independiente x se pueden separar. Para resolver (1.2) se integran ambos miembros con respecto a x, obteniendose

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + K,$$

como $y' = dy/dx$ y $\big(dy/dx\big)dx = dy$, resulta

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + K. \tag{1.3}$$

Suponiendo que f y g son funciones continuas, las integrales de (1.3) existen y al evaluarlas se obtiene la **solución general** de (1.2).

Ilustremos con algunos ejemplos. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 10.

La ecuación diferencial $y' = -\dfrac{4x}{9y}$, $y \neq 0$, es a variable separable, ya que manipulando algebraicamente, resulta

$$9ydy = -4xdx.$$

Al integrar, obtenemos la solución general

$$\boxed{\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = \frac{K}{18}}.$$

Ejemplo 11.

$y' + 5x^4y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$ Separando las variables se tiene: $\dfrac{dy}{y^2} = -5x^4dx$. De donde

$$\int \frac{dy}{y^2} = -5\int x^4dx \quad \text{por lo que} \quad \boxed{y = \frac{1}{x^5 + K}} \quad \text{es la solución general.}$$

Como $y(0) = 1$, se tiene que $K = 1$ y así la solución particular de este pvi es $\boxed{y = \dfrac{1}{x^5 + 1}}$.

Ejemplo 12.

Al separar variables de la ecuación diferencial $3e^x tg(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$ se obtiene que

$$\frac{sec^2(y)}{tg(y)}dy = \frac{3e^x}{e^x - 2}dx$$

por lo que

$$\int \frac{sec^2(y)}{tg(y)}dy = \int \frac{3e^x}{e^x - 2}dx \quad \text{ó} \quad \ln|tg(y)| = 3\ln|e^x - 2| + K$$

ó

$$\boxed{\frac{tg(y)}{(e^x - 2)^3} = \pm K}.$$

Ejemplo 13.

Para el pvi $\begin{cases} sen(x)y' = yln(y) \\ y(\pi/2) = e, \end{cases}$ despejando las variables, se tiene

$$\frac{dy}{y\ln(y)} = \frac{dx}{sen(x)} \quad \text{por lo que} \quad \int \frac{dy}{y\ln(y)} = \int \frac{dx}{sen(x)},$$

y así

$$\boxed{\ln|\ln(y)| = \ln|csc(x) - ctg(x)| + K}$$ es la solución general.

Puesto que $y(\pi/2) = e$, resulta que $K = 0$ y en consecuencia la solución particular es $\boxed{\ln|\ln(y)| = \ln|csc(x) - ctg(x)|}$ ó $\boxed{y = e^{csc(x)-ctg(x)}}$.

Ejemplo 14.

Despejando las variables en la ecuación diferencial $(1+y^2)dx = (y - \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2}$dy, obtenemos

$$\frac{y - \sqrt{1+y^2}}{1+y^2}\,dy = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y - \sqrt{1+y^2}}{1+y^2}\,dy = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}},$$

luego de integrar y usar propiedades logarítmicas, la solución general es

$$\boxed{\ln\left|\frac{\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}\right| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + K}.$$

Otro tipo de ecuaciones diferenciales, reducibles a variables separables, son ecuaciones de la forma

$$y' = g(ax + by + c), \quad b \neq 0. \tag{1.4}$$

Para la cual, se realiza el cambio de variable

$$u = ax + by + c \quad \text{lo que implica que} \quad \frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \text{ó} \quad y' = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right),$$

que al sustituir en (1.4) resulta

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = g(u) \quad \text{ó} \quad \frac{du}{a + bg(u)} = dx.$$

Finalmente integrando surge la solución general de (1.4), en la cual se deben restituir las variables originales.

Ejemplo 15.

En la ecuación diferencial $y' = e^{x+y-1} - 1$ haciendo el cambio de variable $u = x + y - 1$ se obtiene $\dfrac{du}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx}$ ó $y' = \dfrac{du}{dx} - 1$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, resulta

$$\frac{du}{dx} - 1 = e^u - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{e^u} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{e^u} = x + K$$

$$\text{ó} \quad e^{-u} = -x - K \quad \text{ó} \quad e^{-(x+y-1)} = -x - K$$

ó

$$\boxed{y = -\frac{\ln(-x-K)}{x-1}, \; x \neq 1, x < -K}. \qquad \mapsto \text{ solución general.}$$

Ejemplo 16.

Para el pvi $\begin{cases} y' = sen(x+y), \\ y(0) = 0; \end{cases}$ realizamos el cambio de variable

$$u = x + y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{du}{dx} - 1 \quad \text{lo que implica que} \quad \frac{du}{sen(u)+1} = dx,$$

integrando y restituyendo las variables originales se obtiene la solución general

$$\boxed{sec(x+y) - tg(x+y) = x + K},$$

usando la condición inicial, obtenemos $K = 1$, y así la solución particular es

$$\boxed{sec(x+y) - tg(x+y) = x + 1}.$$

Ejemplo 17.

La ecuación diferencial $y' = y^2 - 8yx + 16x^2$ tiene por solución general

$$\boxed{\frac{y - 4x + 2}{y - 4x - 2} = Ke^{-4x}}.$$

1.3.2 Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Algunos tipos de ecuaciones diferenciales que, aunque no parecen a variables separables, se pueden reducir a ellas mediante un simple cambio de variable, éstas son las edo homogéneas.

Definición 18.

(Función Homogénea) Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado n si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 19.

a) La función $f(x, y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$ es homgénea de grado uno, pues para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x - 3\sqrt{\lambda x \lambda y} + 5\lambda y = \lambda x - 3\lambda\sqrt{xy} + 5\lambda y \\ &= \lambda(x - 3\sqrt{xy} + 5y) = \lambda f(x, y). \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ es homogénea de grado $3/2$.

c) $f(x, y) = \dfrac{x}{2y} + 4$ es homogénea de grado cero.

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ **no** es homogénea.

Definición 20.

(EDO Homogénea)

(a) Una edo de primer orden, expresada en forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, es homogénea si y sólo si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de igual grado.

(b) La edo $y' = f(x,y)$ es homogénea si y sólo si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero.

Un criterio más apropiado para verificar si una edo es homogénea es el siguiente resultado.

Proposición 21.

Una edo de primer orden $a_1y' + a_0y = g(x)$ es homogénea si dicha ecuación, se puede escribir en la forma

$$y' = F(y/x), \tag{1.5}$$

ó

$$\frac{dx}{dy} = x' = G(x/y). \tag{1.6}$$

Como se mencionó al inicio de la sección, toda edo homogénea, se puede reducir a variables separables, para hallar la solución general. Para lograr esto, realizamos el cambio de variable

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{si} \quad y' = F(y/x),$$

ó

$$v = \frac{x}{y} \quad \text{si} \quad x' = G(x/y).$$

Sin perder generalidad, asumamos que tenemos la edo homogénea $y' = F(y/x)$. Sea

$$u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = xu \;\Rightarrow\; y' = u + xu', \;\; u' = \frac{du}{dx}$$

por lo que

$$dy = udx + xdu.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ resulta

$$M(x,xu)dx + N(x,xu)(udx + xdu) = 0,$$

puesto que esta ecuación diferencial es homogénea, M y N son funciones homogéneas de igual grado, por lo que

$$0 \;=\; x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)(udx + xdu) = x^n\Big(M(1,u)dx + N(1,u)(udx + xdu)\Big),$$

esta última ecuación es válida para todo $x \in \mathbb{R}$, por consiguiente se obtiene que

$$M(1,u)dx + N(1,u)(udx + xdu) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{N(1,u)}{M(1,u)(udx + xdu)}\,du = -\frac{dx}{x}.$$

Luego la solución general se logra integrando

$$\int \frac{N(1,u)\,du}{M(1,u)(udx + xdu)} = -\int \frac{dx}{x}\,,$$

recordando que se deben restituir la variables originales.

Los siguientes ejemplos ilustran este método. Identificar como edo homogéneas y hallar la solución general.

Ejemplo 22.

La ecuación diferencial $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ es homogénea, pues

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{(y/x)^2 - 1}{2(y/x)} \qquad \Big(= F(y/x)\Big).$$

Para determinar la solución general, primero la reducimos a variables separables, mediante el cambio

$$u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = xu \;\Rightarrow\; y' = u + xu',$$

al sustituir en la ecuación dada, resulta

$$u + xu' = \frac{u^2 - 1}{2u} \quad \text{ó} \quad xu' = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = -\frac{u^2 + 1}{2u}$$

ó simplemente $\dfrac{2u}{u^2+1}\,du = -\dfrac{dx}{x}$ por lo que $\displaystyle\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = -\int \frac{dx}{x}$, es decir, $\ln(u^2+1) = -\ln|x| + K$. Regresando a las variables originales, se tiene que la solución general es

$$\boxed{\ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = -\ln|x| + K} \quad \text{ó} \quad \boxed{\left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{K^2}{4}}.$$

Ejemplo 23.

La ecuación diferencial $(x^2+2y^2)dx - xydy = 0$ es homogénea, ya que

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy} = \frac{1+2(y/x)^2}{y/x} \qquad \Big(= F(y/x)\Big).$$

Para determinar la solución general, primero la reducimos a variables separables, mediante el cambio

$$u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = xu \;\Rightarrow\; y' = u + xu',$$

al sustituir en la ecuación dada, resulta

$$u + xu' = \frac{1+2u^2}{u} \qquad \text{ó} \qquad \frac{u}{u^2+1}du = \frac{dx}{x},$$

integrando se tiene

$$\int \frac{u}{u^2+1}du = \int \frac{dx}{x} \qquad \text{ó} \qquad \ln\sqrt{u^2+1} = \ln\big(Kx\big)^2 \qquad \text{ó} \qquad u^2 = (Kx)^2 - 1,$$

al regresar a las variables originales, obtenemos la solución general

$$\boxed{y = |x|\sqrt{\beta x^2 - 1}}.$$

Ejemplo 24.

La edo $\Big[ycos(y/x) + xsen(y/x)\Big]dx = xcos(y/x)dy$ es homogénea y tiene por solución general

$$\boxed{sen(y/x) = Kx}.$$

Ejemplo 25.

La edo $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$ es homogénea y tiene por solución general

$$\boxed{arcsen(y/x) = \ln|Kx|}.$$

Ejemplo 26.

La edo $\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xydy = 0$ es homogénea y tiene por solución general

$$\boxed{y = |x|\sqrt{1 - Kx}}.$$

1.3.3 EDO No Homogéneas Reducibles a Homogéneas

Son aquellas ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \qquad c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0. \tag{1.7}$$

La ecuación diferencial (1.7) **no** es homogénea, debido a la presencia de las constantes c_1 y c_2. Para reducir (1.7) a una ecuación diferencial homogénea, consideremos las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} \ell_1 \quad &: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ \ell_2 \quad &: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{aligned}$$

y estudiemos los dos casos posibles; es decir, las dos rectas se intersecten en un punto o que sean paralelas.

Caso I Si $\ell_1 \bigcap \ell_2 = (x_0, y_0)$.

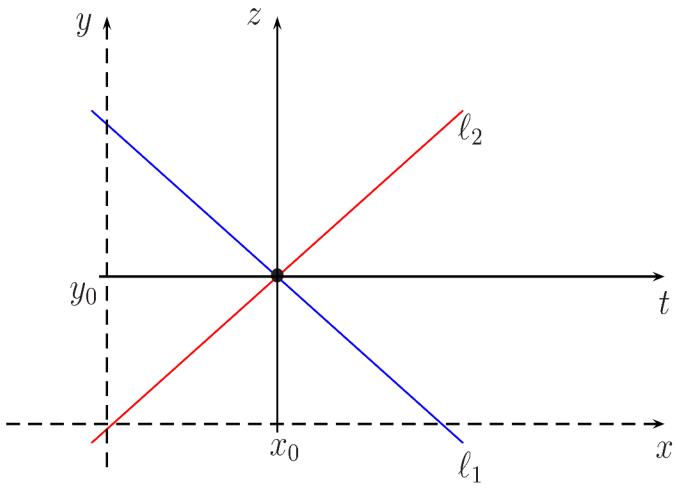
En esta situación, para reducir la ecuación diferencial no homogénea a homogénea, se realiza una traslacción de coordenadas, en donde el nuevo origen estará ubicado en el punto (x_0, y_0), y de ese modo se eliminan los términos independientes de las dos rectas, para lograr esto se hace el cambio de variable

$$\left.\begin{aligned} t &= x - x_0 \\ z &= y - y_0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= dz, \end{aligned}\right.$$

sustituyendo en (1.7) se obtiene que

$$\frac{dz}{dt} = F\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 z}{\alpha_2 t + \beta_2 z}\right) = F(z/t)$$

es una ecuación diferencial homogénea en la variables auxiliares t y z.



Caso II Si $\ell_1 \parallel \ell_2$.

En este caso las rectas son multiplo una de la otra pues tienen igual pendiente (digamos $m_1 = m_2$) o una pendiente es multiplo de la otra (digamos $m_1 = \alpha m_2$), y en consecuencia mediante un cambio apropiado obtenemos

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = G(\beta_1x + \beta_2y)$$

la cual es una ecuación diferencial a variables separables.

Los ejemplos a continuación ilustran esta técnica. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 27.

$(x-y+1)dy-(x+y-1)dx=0 \iff y'=\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ es claro que esta ecuación diferencial **no** es homogénea. Sean

$$\left.\begin{array}{lcl} \ell_1 & : & x+y-1=0 \\ \ell_2 & : & x-y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} m_1 & = & -1 \\ m_2 & = & 1. \end{array}\right.$$

Por tanto $\ell_1 \bigcap \ell_2 = (0,1)$. Luego el cambio de variable para reducirla a homogénea es

$$\left.\begin{array}{lcl} t & = & x-0=x \\ z & = & y-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} dx & = & dt \\ dy & = & dz. \end{array}\right.$$

Sustituyendo en la ecuación dada, obtenemos

$$\frac{dz}{dt}=\frac{t+(z+1)-1}{t-(z+1)+1}=\frac{t+z}{t-z}=\frac{1+z/t}{1-z/t} \qquad \Big(=F(z/t)\Big) \tag{1.8}$$

la cual es una ecuación diferencial homogénea, en la variables auxiliares t y z. Para hallar la solución general, se procede como las ecuaciones diferenciales homogéneas. Es decir, se hace

$$u=\frac{z}{t} \Rightarrow z=ut \Rightarrow \frac{dz}{dt}=u+t\frac{du}{dt}\,.$$

Sustituyendo en (1.8), resulta

$$u+t\frac{du}{dt}=\frac{1+u}{1-u} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dt}{t}\,,$$

integrando

$$arctg(u)-\ln\sqrt{u^2+1}=\ln|t|+K \quad \text{ó} \quad arctg(z/t)-\ln\sqrt{(z/t)^2+1}=\ln|t|+K$$

y al restituir las variables originales, la solución general es

$$\boxed{arctg\Big(\frac{y-1}{x}\Big)-\ln\sqrt{\Big(\frac{y-1}{x}\Big)^2+1}=\ln|x|+K}\,.$$

Ejemplo 28.

$(2x-y+2)dx+(4x-2y-1)dy=0 \iff y'=-\dfrac{2x-y+2}{4x-2y-1}\neq F(y/x)$ esta ecuación diferencial **no** es homogénea. Sean

$$\left.\begin{array}{lcl} \ell_1 & : & 2x-y+2=0 \\ \ell_2 & : & 4x-2y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} m_1 & = & 2 \\ m_2 & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_2.$$

En esta situación, es obvio que las dos rectas no se cortan en ningún punto, más aún una es multiplo de la otra; es decir

$$y'=-\frac{(2x-y)+2}{2(2x-y)-1},$$

para reducirla a variables separables, el cambio adecuado es

$$u=2x-y \quad \Rightarrow \quad y'=2-\frac{du}{dx},$$

sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene

$$2-\frac{du}{dx}=-\frac{u+2}{2u-1} \quad \text{por lo que} \quad \frac{2u-1}{5u}du=dx,$$

al integrar resulta $\dfrac{2u}{5}-\dfrac{\ln|u|}{5}=x+K$, regresando a las variables x e y, la solución general es

$$\boxed{4x-2y-\ln|2x-y|=5(x+K)}.$$

Ejemplo 29.

La ecuación diferencial $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$ no es homogénea, con el cambio apropiado se reduce a homogénea con solución general

$$\boxed{\ln\left|\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2-\frac{2(y-3)}{x+1}-1\right|=-2\ln|x+1|+K}.$$

Ejemplo 30.

La ecuación diferencial $(x+y-1)dx+(2x+2y-1)dy=0$ no es homogénea, con el cambio apropiado se reduce a variables separables con solución general

$$\boxed{2x+2y-\ln|x+y|=x+K}.$$

1.3.4 EDO Exactas

En estudios previos, estudiamos que si una función $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas (en una región del plano xy), su **diferencial total** o **diferencial exacta** es

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy. \tag{1.9}$$

Y así si $U(x,y)=K$ entonces $dU=0$.

Por ejemplo si $U(x,y)=x+(xy)^2=K$, entonces

$$dU=(1+2xy^2)dx+2x^2ydy=0 \quad \text{por lo que} \quad y'=-\frac{1+2xy^2}{2x^2y}.$$

Por consiguiente una edo de primer orden en la forma diferencial

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.10}$$

se denomina *exacta* si **existe** una función $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que su diferencial total dU coincida con ella; es decir

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=dU=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

ó

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y).$$

Luego de (1.10), se tiene que $dU=0$ y en consecuencia $U(x,y)=K$. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y^2dx+2xydy=0$$

es exacta, pues si consideramos la función $U(x,y)=xy^2$, se tiene que

$$dU=y^2dx+2xydy.$$

El incoveniente que se presenta con la definición, es determinar la función U. Un criterio más práctico, para verificar si una ecuación diferencial es exacta, es el siguiente.

Teorema 31.

(Ecuación Diferencial Ordinaria Exacta) La ecuación diferencial en su forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es **exacta** si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

(En el teorema anterior, estamos asumiendo que las funciones M y N poseen derivadas parciales de primer orden continuas en alguna región del plano).

Técnica para determinar la solución general de una edo exacta

Si la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta, entonces por la definición de ecuación diferencial exacta **existe** una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$dU = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

De esta forma, determinada la función U, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$\boxed{U(x,y) = K}.$$

La técnica para hallar la función U es la siguiente:

Paso 1 Ya que la ecuación diferencial es exacta, por la definición de ecuación diferencial exacta existe una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$$

Paso 2 Seleccione una de las dos igualdades anteriores. Sin perder generalidad asumamos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y),$$

luego integremos respecto de x

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx = \int M(x,y)dx,$$

y así

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + K(y) \tag{1.11}$$

Paso 3 Derive (1.11) respecto de y para obtener

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + K'(y) \tag{1.12}$$

Paso 4 De la otra igualdad inicial $\dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$ y de (1.12), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + K'(y) = N(x,y)$$

Paso 5 Despejando en la igualdad anterior,

$$\frac{dK}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]$$

al integrar respecto de y, resulta que

$$K(y) = \int \frac{dK}{dy} = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right] dy \tag{1.13}$$

Paso 6 Sustituyendo (1.13) en (1.11), se tiene que

$$\boxed{U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right] dy}.$$

Observación 32.

Se llega a la misma solución si al inicio se trabaja con la otra igualdad, es decir si asumimos que $\dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$.

Los siguientes ejemplos ilustran esta situación. Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y determinar la solución general.

Ejemplo 33.

Para la ecuación $(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$, se tiene que $M(x, y) = x^3 + 3xy^2$ y $N(x, y) = 3x^2y + y^3$. Luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Esto nos dice que la ecuación diferencial dada es exacta. De la definición de ecuación diferencial exacta existe una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial M}{\partial x} = M(x, y) = x^3 + 3xy^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = N(x, y) = 3x^2y + y^3.$$

Sin perder generalidad, consideremos $\dfrac{\partial U}{\partial x} = x^3 + 3xy^2$. Al integrar respecto de x, se tiene

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int \Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big) dx = \int \big(x^3 + 3xy^2\big) dx \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2y^2}{2} + K(y), \end{aligned} \tag{1.14}$$

derivando (1.14) respecto de y, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y + K'(y)$. Ya que $\dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$. Obtenemos que

$$3x^2y + K'(y) = 3x^2y + y^3 \quad \text{ó} \quad K'(y) = y^3,$$

integrando respecto de y, $K(y) = \displaystyle\int K'(y)dy = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$. Al sustituir en (1.3), resulta que

$$U(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$$

y así la solución general es $\boxed{\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3x^2y^2}{2} + \dfrac{y^4}{4} = \alpha}$.

Ejemplo 34.

En la ecuación $(e^{2y} - ycos(xy))dx + (2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y)dy = 0$, se tiene que $M(x,y) = e^{2y} - ycos(xy)$ y $N(x,y) = 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y$. Luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - cos(xy) + xysen(xy) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Esto nos dice que la ecuación diferencial dada es exacta. De la definición de ecuación diferencial exacta existe una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial M}{\partial x} = M(x,y) = e^{2y} - ycos(xy) \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = N(x,y) = 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y.$$

Sin perder generalidad, consideremos $\dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) = 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y$. Al integrar respecto de y, se tiene

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int \Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big) dy = \int \big(2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y\big) dy \\ &= xe^{2y} - sen(xy) + y^2 + K(x), \end{aligned} \tag{1.15}$$

derivando (1.15) respecto de x, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = e^{2y} - ycos(xy) + K'(x)$. Ya que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$. Obtenemos que

$$e^{2y} - ycos(xy) + K'(x) = e^{2y} - ycos(xy) \quad \text{ó} \quad K'(x) = 0,$$

integrando respecto de x, $K(x) = \displaystyle\int K'(x)dx = \int 0dx = 0$. Al sustituir en (1.15), resulta que

$$U(x,y) = xe^{2y} - sen(xy) + y^2$$

y así la solución general es $\boxed{xe^{2y} - sen(xy) + y^2 = \alpha}$.

Ejemplo 35.

La ecuación diferencial $(2x + y)dx + (x + 6y)dy = 0$ es exacta, cuya solución general es $\boxed{x^2 + xy + 3y^2 = \alpha}$.

1.3.5 EDO No Exactas - Factor Integrante

Iniciemos la sección, analizando el siguiente ejemplo:

$$\underbrace{ye^x}_{M(x,y)}\,dx + \big(\underbrace{y^2 - e^x}_{N(x,y)}\big)dy = 0.$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -e^x,$$

entonces la ed dada **no** es exacta; pero si la multiplicamos por el factor y^{-2}, resulta que

$$\underbrace{\frac{e^x}{y}}_{\widetilde{M}}\,dx + \underbrace{\left(1 - \frac{e^x}{y^2}\right)}_{\widetilde{N}}dy = 0$$

es una ed exacta, ya que

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = -\frac{e^x}{y^2} = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x}\,.$$

Este ejemplo muestra que hay ed que **no** son exactas, pero al multiplicarlas por una función adecuada se transforma en una ed exacta.

La idea de esta técnica es muy simple, reducir a exacta una ecuación diferencial que no es exacta.

En ocasiones se tienen ecuaciones diferenciales

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.16}$$

que **no** son exactas, pues $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, pero si multiplicamos dicha ecuación por una función apropiada $\mu(x,y)$, la nueva ecuación diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es exacta, ya que

$$\frac{\partial\,(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu N)}{\partial x}\,, \tag{1.17}$$

de modo que puede resolverse como una ecuación diferencial exacta. La función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se denomina **Factor Integrante** de la ed (1.16).

De manera natural surge la siguiente interrogante

¿Cómo se determinan estos factores integrantes?.

No es ésta una tarea fácil, ya que el caso general implica resolver una ecuación diferencial parcial, por lo que estudiaremos los casos más sencillos, aquellos donde la función μ dependa de una sola variable, bien sea x ó y. En el siguiente resultado se presentan las opciones posibles que analizaremos para estos factores integrantes.

Teorema 36 (Factores Integrantes).

Asumiendo que las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ poseen primeras parciales.

(a) Si $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = f(x)$ (una función que sólo depende de x o es una constante), entonces un factor integrante de la ecuación diferencial no exacta (1.5) es

$$\boxed{\mu(x) = exp\left(\int f(x)dx\right)}.$$

(b) Si $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} = g(y)$ (una función que sólo depende de y o es una constante), entonces un factor integrante de la ecuación diferencial no exacta (1.16) es

$$\boxed{\mu(y) = exp\left(\int g(y)dy\right)}.$$

(c) Hay casos en los cuales el factor integrante está dado por el producto de dos funciones $G(x)$ y $H(x)$ [a], es decir:

$$\boxed{\mu(x,y) = G(x)H(x)}.$$

(d) Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación diferencial no exacta, pero si es homogénea, la cual no se puede reducir a variables separables, entonces un factor integrante de la ecuación diferencial no exacta (1.16) es

$$\boxed{\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}}.$$

[a] Al sustituir $\mu(x,y) = G(x)H(x)$ en la ed (1.17), se tiene que $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{G'(x)}{G(x)}N - \dfrac{H'(y)}{H(y)}M$. Como M y N son funciones conocidas, el lado izquierdo de la ecuación anterior es facilmente deducible. En algunos casos es fácil hallar las funciones $G(x)$ y $H(y)$. El ejemplo 39 ilustra el método.

Los siguientes ejemplos nos ilustran este método. Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas, si no lo son, hallar un factor integrante que las haga exactas y luego determinar la solución general.

Ejemplo 37.

$\underbrace{2sen(y^2)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{xycos(y^2)}_{N(x,y)}\,dy = 0.$ Ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4ycos(y^2) \neq ycos(y^2) = \frac{\partial N}{\partial x}\,,$$

la ecuacion diferencial dada no es exacta. Determinemos un factor integrante que la haga exacta. Para lo cual procedemos como lo indica el Teorema anterior; es decir,

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{4ycos(y^2) - ycos(y^2)}{xycos(y^2)} = \frac{3}{x} = f(x),$$

luego el factor integrante es

$$\mu(x) = exp\left(\int f(x)dx\right) = exp\left(\int \frac{3\,dx}{x}\right) = exp\left(3\ln|x|\right) = x^3.$$

Al multiplicar este factor integrante en la ecuación diferencial dada, se tiene

$$x^3\Big[2sen(y^2)dx + xycos(y^2)dy\Big] = 0 \quad \text{ó} \quad 2x^3sen(y^2)dx + x^4ycos(y^2)dy = 0,$$

la cual es exacta. ¡¡Verificarlo!!.

Para la solución general, se procede como las ecuaciones diferenciales exactas. Sea

$$\widetilde{M}(x,y) = 2x^3sen(y^2) \quad \text{y} \quad \widetilde{N}(x,y) = x^4ycos(y^2).$$

Por ser exacta, existe una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \widetilde{M}(x,y) = 2x^3sen(y^2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y) = x^4ycos(y^2).$$

Integrando la primera igualdad respecto de x, se tiene

$$U(x,y) = \int 2x^3sen(y^2)dx = \frac{x^4}{2}sen(y^2) + K(y), \tag{1.18}$$

derivando respecto de y esta ecuación, resulta $\dfrac{\partial U}{\partial y} = yx^4cos(y^2) + K'(y)$, como $\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^4ycos(y^2)$ y la derivada anterior, nos llevan a

$$yx^4cos(y^2) + K'(y) = x^4ycos(y^2) \quad \text{ó} \quad K'(y) = 0 \quad \text{por lo que} \quad K(y) = 0$$

y así, $U(x,y) = \dfrac{x^4}{2}sen(y^2)$. Finalmente la solución general es $\boxed{\dfrac{x^4}{2}sen(y^2) = \alpha}$.

Ejemplo 38.

$$\underbrace{(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)}_{N(x,y)}\,dy = 0.$$

Claramente

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1,\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3\end{aligned}$$

lo que implica que $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ y así la ecuación diferencial dada no es exacta. Determinemos un factor integrante que la haga exacta. Para lo cual procedemos como lo indica el Teorema anterior; es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} &\neq f(x);\\ \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} &= \frac{\left(2xy^4e^y - 2xy^2 - 3\right) - \left(8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1\right)}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}\\ &= -\frac{4}{y} = g(y),\end{aligned}$$

luego el factor integrante es

$$\mu(y) = exp\left(\int g(y)dy\right) = exp\left(-\int \frac{4\,dy}{y}\right) = e^{-4\ln|y|} = y^{-4}.$$

Al multiplicar este factor integrante en la ecuación diferencial dada, se tiene

$$y^{-4}\Big[(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy\Big] = 0$$

ó

$$\underbrace{\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)}_{\widetilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{\left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)}_{\widetilde{N}(x,y)}dy = 0$$

la cual es exacta. ¡¡Verificarlo!!.

Para la solución general, se procede como las ecuaciones diferenciales exactas. Por ser exacta, existe una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \widetilde{M}(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Finalmente la solución general es $\boxed{U(x,y) = x^2e^y + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x}{y^3} = \alpha}$.

Ejemplo 39.

La ed $\underbrace{(xy^2 - y)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^2y + x)}_{N(x,y)}\,dy = 0$ no es exacta, pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy + 1.$$

Por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (2xy - 1) - (2xy + 1) = -2,$$

luego por el Teorema 36(c), resulta que

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{G'(x)}{G(x)}(x^2y + x) - \frac{H'(y)}{H(y)}(xy^2 - y) \\ &= \frac{G'(x)}{G(x)}x(xy + 1) - \frac{H'(y)}{H(y)}y(xy - 1). \end{aligned}$$

Observemos que esta ecuación se satisface si consideramos

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = -\frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{H'(y)}{H(y)} = -\frac{1}{y}.$$

Integrando

$$\ln G(x) = \int \frac{G'(x)}{G(x)}dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x = \ln x^{-1},$$

de donde, $G(x) = 1/x$. Procediendo de manera similar, se obtiene que $H(y) = 1/y$. Por lo tanto un factor integrante para la ed dada es

$$\mu(x, y) = G(x)H(y) = \frac{1}{xy}.$$

Al multiplicar este factor integrante en la ecuación diferencial dada, se tiene que la nueva ed

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

es exacta. ¡¡Verificarlo!!. La solución general es

$$\boxed{xy + \ln\left(y/x\right) = \alpha}.$$

Observación 40.

Cuando el factor integrante para una ecuación diferencial no exacta existe, *no es único*.

El siguiente ejemplo ilustra tal situación.

Ejemplo 41.

La ed $\underbrace{(xy+y)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(xy+x)}_{N(x,y)}\,dy = 0$ no es exacta, pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x+1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y+1.$$

Por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x-y, \tag{1.19}$$

luego por el Teorema 36(c), resulta que

$$x-y \;=\; \frac{G'(x)}{G(x)}\,x(y+1) - \frac{H'(y)}{H(y)}\,y(x+1).$$

Esta ecuación se satisface si consideramos

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{H'(y)}{H(y)} = 1, \tag{1.20}$$

pero

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = -\frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{H'(y)}{H(y)} = -\frac{1}{y} \tag{1.21}$$

también satisfacen la ecuación (1.19).

De (1.20) y (1.21) resultan los factores integrantes

$$\boxed{\mu(x,y) = e^{x+y}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\mu(x,y) = \frac{1}{xy}}.$$

Ejemplo 42.

La ecuación diferencial $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ no es exacta, su solución general es

$$\boxed{U(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \alpha}.$$

Ejemplo 43.

La ecuación diferencial $(2x + tg(y))\,dx + (x - x^2tg(y))\,dy = 0$ no es exacta, su solución general es

$$\boxed{U(x,y) = x^2cos(y) + xsen(y) = \alpha}.$$

1.3.6 EDO Lineales de Primer Orden

Recordemos que estas ecuaciones diferenciales son de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \tag{1.22}$$

Suponiendo que $a_1(x) \neq 0$ para todo x en algún intervalo I, (1.22) se puede reescribir como

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1.23}$$

La ecuación diferencial (1.23) es la forma estándar de las edo lineales de primer orden. A continuación, estudiaremos como obtener la solución general de estas ecuaciones diferenciales. En primer lugar, notese que si en la ecuación (1.23), $Q(x) = 0$, resulta que

$$y' + P(x)y = 0$$

es una ecuación diferencial a variables separables; es decir,

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad \text{cuya solución general es} \quad \boxed{y = K\,exp\left(-\int P(x)dx\right)}.$$

El caso general, si $Q(x) \neq 0$. De (1.23), se sigue que

$$dy + \big[P(x)y - Q(x)\big]dx = 0, \tag{1.24}$$

con $M(x,y) = P(x)y - Q(x)$ y $N(x,y) = 1$, lo cual implica que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

y así la ecuación diferencial (1.24) no es exacta. Pero como es una ecuación lineal, existe un factor integrante $\mu(x)$ dependiendo sólo de la variable x, que al multiplicarla por este factor integrante la reduce a exacta; esto es

$$\underbrace{\mu(x)}_{\widetilde{M}}\, dy + \underbrace{\mu(x)\big[P(x)y - Q(x)\big]}_{\widetilde{N}}\, dx = 0 \tag{1.25}$$

es una ecuación diferencial exacta; es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \mu(x)\big[P(x)y - Q(x)\big]}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|\mu| = \int P(x)dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{\mu(x) = exp\left(\int P(x)dx\right)} \qquad \mapsto \text{factor integrante}
\end{aligned}$$

Este es el factor integrante, mencionado previamente, que al sustituirlo en (1.25), obtenemos

$$exp\left(\int P(x)dx\right) dy + exp\left(\int P(x)dx\right)\big[P(x)y - Q(x)\big]dx = 0$$

ó

$$exp\left(\int P(x)dx\right) dy + exp\left(\int P(x)dx\right) P(x)ydx = Q(x)exp\left(\int P(x)dx\right) dx,$$

con el apoyo del Teorema Fundamental del Cálculo[1] esta última ecuación se reescribe en la forma

$$\frac{d}{dx}\left(exp\left(\int P(x)dx\right) y\right) = Q(x)exp\left(\int P(x)dx\right),$$

integrando con respecto de x, se tiene

$$\int \frac{d}{dx}\left(exp\left(\int P(x)dx\right) y\right) dx = \int Q(x)\, exp\left(\int P(x)dx\right) dx$$

[1]Teorema Fundamental del Cálculo: $\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{g(x)} f(t)dt\right] = f(g(x))g'(x)$

por lo que

$$exp\left(\int P(x)dx\right)y = \int Q(x)\,exp\left(\int P(x)dx\right)dx,$$

por consiguiente, la solución general de la ecuación diferencial (1.23) es

$$\boxed{y = exp\left(\int P(x)dx\right)\left[\int Q(x)exp\left(\int P(x)dx\right)dx + K\right]}.$$

Observación 44.

Si en lugar de la ecuación diferencial (1.23), se tiene la ecuación diferencial

$$x' + P(y)x = Q(y), \qquad \text{en donde} \quad x = x(y),\ \ x' = \frac{dx}{dy}$$

entonces procediendo de manera similar a lo anterior, la solución general de esta ecuación diferencial es

$$\boxed{x = x(y) = exp\left(\int P(y)dy\right)\left[\int Q(y)exp\left(\int P(y)dy\right)dy + K\right]}.$$

Veamos algunos ejemplos, para ilustrar el método. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 45.

Dado el pvi $\begin{cases} y' + ctg(x)y &= 5e^{cos(x)}; \\ y(\pi/2) &= -4. \end{cases}$

Es claro que es una edo lineal de primer orden, en donde $P(x) = ctg(x)$ y $Q(x) = 5e^{cos(x)}$. Por lo que la solución general es

$$\begin{aligned} y &= exp\left(-\int ctg(x)dx\right)\left[\int 5e^{cos(x)}exp\left(-\int ctg(x)dx\right)dx + K\right] \\ &= sen^{-1}(x)\Big(-5e^{cos(x)} + K\Big). \end{aligned}$$

Como $y(\pi/2) = -4$ se sigue que $K = 1$ y en consecuencia la solución particular del pvi es

$$\boxed{y_p = sen^{-1}(x)\Big(-5e^{cos(x)} + 1\Big)}.$$

Ejemplo 46.

En la ecuación diferencial $y\ln(y)dx - (x - \ln(y))dy = 0$ es más conveniente, expresar a x en términos de la variable y, es decir $x = x(y)$. Al despejar se tiene que

$$x' - \frac{x}{y\ln(y)} = \frac{1}{y}$$

la cual es una edo lineal de primer orden, en donde $P(y) = \dfrac{1}{y\ln(y)}$ y $Q(y) = \dfrac{1}{y}$. Por lo que la solución general es

$$x = exp\left(\int \frac{dy}{y\ln(y)}\right)\left[\int \frac{exp\left(-\int \frac{dy}{y\ln(y)}\right)}{y}dy + K\right]$$

ó

$$\boxed{x = \ln(y)\Big(\ln\big(\ln(y)\big) + K\Big)}.$$

Ejemplo 47.

El pvi $\begin{cases} y' &= 2y + x\big(e^{3x} - e^{2x}\big); \\ y(0) &= 2, \end{cases}$ tiene por solución

$$\boxed{y_p = e^{2x}\left(xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)}.$$

1.3.7 EDO de Bernoulli

Son ecuaciones diferenciales **no** lineales de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{1.26}$$

en donde n es un número real, $n \neq 0$ y $n \neq 1$.

¿Qué pasa en los casos cuando $n = 0$ y $n = 1$?.

Para resolver este tipo de ecuación diferencial, realizamos el siguiente cambio de variable que la reduce a lineal

$$z = y^{1-n}, \qquad \text{tener presente que} \quad y = y(x), \;\; z = z(x)$$

derivando respecto de x

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}y' \quad \text{ó} \quad y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

sustituyendo en (1.26), obtenemos la ecuación diferencial lineal

$$z' + (1-n)P(x)z = Q(x), \qquad z' = \frac{dz}{dx}$$

la cual se resuelve como tal. Recordemos que al final se deben restituir las variables originales.

A continuación se presentan algunos ejemplos, en donde se ilustra la técnica.

Ejemplo 48.

La ecuación diferencial $y' = \dfrac{2y}{x} + 2xy^{3/2}$ es una edo de Bernoulli, en donde $n = 3/2$. El cambio de variable es

$$z = y^{1-n} = y^{1-3/2} = y^{-1/2} \quad \text{luego} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{y^{-3/2}}{2}\frac{dy}{dx}$$

ó

$$y^{-3/2}y' = -2z'.$$

De la ecuación dada se tiene que

$$y^{-3/2}y' - \frac{2}{x}y^{-1/2} = 2x$$

ó

$$-2z' - \frac{2}{x}z = 2x, \quad \text{es decir} \quad \boxed{z' + \frac{z}{x} = -x} \quad \mapsto \text{ edo lineal,}$$

con $P(x) = \dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = -x$. Por tanto la solución general es

$$\begin{aligned} z &= exp\left(-\int\frac{dx}{x}\right)\left(-\int x\, exp\left(-\int\frac{dx}{x}\right)dx + K\right) \\ &= e^{-\ln(x)}\left(-\int xe^{\ln(x)}dx + K\right), \quad \text{para} \quad x \in (0,\infty) \\ &= x^{-1}\left(-\int x^2dx + K\right) = -\frac{x^2}{3} + \frac{K}{x} \end{aligned}$$

restituyendo las variables originales, obtenemos

$$\boxed{y^{-1/2} = -\frac{x^2}{3} + \frac{K}{x}} \quad \text{ó} \quad \boxed{y = \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{K}{x}\right)^{-2}}, \quad x \in (0,\infty).$$

Ejemplo 49.

En el pvi $\begin{cases} x^2y' - 2xy = 3y^4; \\ y(1) = 1/2, \end{cases}$ se observa que la ecuación diferencial es del tipo Bernoulli, con $n = 4$ y para visualizar mejor dicha ecuación la reescrbimos en la forma

$$y' - \frac{2}{x}\,y = \frac{3}{x^2}\,y^4 \quad \text{ó} \quad y^{-4}y' - \frac{2}{x}\,y^{-3} = \frac{3}{x^2}.$$

Haciendo

$$z = y^{-3} \quad \text{se sigue que} \quad z' = -3y^{-4}y' \;\; \text{ó} \;\; y^{-4}y' = \frac{-z'}{3},$$

sustituyendo en la ecuación anterior, resulta la edo lineal

$$z' + \frac{6}{x}z = -\frac{9}{x^2}$$

con $P(x) = 6/x$ y $Q(x) = -9/x^2$. Por lo que su solución general es

$$\begin{aligned} z &= exp\left(-6\int\frac{dx}{x}\right)\left(-\int\frac{9}{x^2}\,exp\left(-6\int\frac{dx}{x}\right)dx + K\right) = x^{-6}\left(-9\int x^4dx + K\right) \\ &= x^{-6}\Big(-\frac{9x^5}{5} + K\Big) = -\frac{9}{5}x^{-1} + Kx^{-6}, \end{aligned}$$

como $z = y^{-3}$, obtenemos

$$\boxed{y = \left(Kx^{-6} - \frac{9}{5}x^{-1}\right)^{-1/3}},$$

usando la condición inicial, resulta que $K = 9/8$ y así la solución particular del pvi dado es

$$\boxed{y_p = \left(\frac{49}{5}x^{-6} - \frac{9}{5}x^{-1}\right)^{-1/3}}.$$

1.4 Ejercicios Propuestos

1. Verificar que las funciones (explícitas o implícitas) son soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales.

(a)	y	$=$	$x^2 + K$	$y' = 2x;$
(b)	y	$=$	Kx^2	$xy' = 2y;$
(c)	y^2	$=$	$e^{2x} + K$	$yy' = e^{2x};$
(d)	y	$=$	$Ke^{\alpha x}$	$y' = \alpha y;$
(e)	y	$=$	$K_1 sen(2x) + K_2 cos(2x)$	$y'' + 4y = 0;$
(f)	y	$=$	$K_1 e^{2x} + K_2 e^{-2x}$	$y'' - 4y = 0;$
(g)	y	$=$	$K_1 senh(2x) + K_2 cosh(2x)$	$y'' - 4y = 0;$
(h)	y	$=$	$sen^{-1}(xy)$	$xy' + y = y'\sqrt{1-(xy)^2};$
(i)	y	$=$	$xtg(x)$	$xy' = y + x^2 + y^2;$
(j)	x^2	$=$	$2y^2 \ln(y)$	$y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2};$
(k)	y^2	$=$	$x^2 - Kx$	$2xyy' = x^2 + y^2;$
(l)	y	$=$	$K^2 + K/x$	$y + xy' = x^4(y')^2;$
(m)	y	$=$	$Ke^{y/x}$	$y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2};$
(n)	y	$=$	$x - sen(y)$	$y' = \dfrac{y}{ycos(y) - sen(y) + x};$
(o)	x	$=$	$tg^{-1}(y) - y$	$y' = -\dfrac{1+y^2}{y^2}.$

2. Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a)	$y' = e^{3x} - x;$	(j)	$x^5 y' + y^5 = 0;$
(b)	$xy' = 1;$	(k)	$xy' = (1 - 2x^2)tg(y);$
(c)	$y' = xe^{x^2};$	(l)	$y' = 2xy;$
(d)	$y' = sen^{-1}(x);$	(m)	$y' sen(y) = x^2;$
(e)	$(1+x)y' = x;$	(n)	$y' sen(y) = 1;$
(f)	$(1+x^2)y' = x;$	(o)	$y' + ytg(x) = 0;$
(g)	$(1+x^3)y' = x;$	(p)	$y' - ytg(x) = 0;$
(h)	$(1+x^2)y' = tg^{-1}(x);$	(q)	$(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0;$
(i)	$xyy' = y - 1;$	(r)	$y\ln(y)dx + xdy = 0.$

3. Para cada uno de los pvi, hallar la solución particular.

(a) $y' = xe^x, \quad y(1) = 3;$

(b) $y' = 2sen(x)cos(x), \quad y(0) = 1;$

(c) $y' = \ln(x), \quad y(e) = 0;$

(d) $(x^2 - 1)y' = 1, \quad y(2) = 0;$

(e) $x(x^2 - 4)y' = 1, \quad y(1) = 0;$

(f) $(x + 1)(x^2 + 1)y' = 2x^2 + x, \quad y(0) = 1.$

4. Verificar si $y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ es una solución de la ecuación $y' = 2xy + 1$.

5. ¿Para que valores de la constante m será $y = e^{mx}$ solución de la ecuación diferencial $2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0$?

6. Comprobar que las siguientes ecuaciones son homogéneas y resolverlas.

(a) $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0;$

(b) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0;$

(c) $x^2y' = 3(x^2 + y^2)tg^{-1}(y/x) + xy;$

(d) $xsen(y/x)y' = ysen(y/x) + x;$

(e) $xy' = y + 2xe^{-y/x};$

(f) $(x - y)dx - (x + y)dy = 0;$

(g) $xy' = 2x + 3y;$

(h) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2};$

(i) $x^2y' = y^2 + 2xy;$

(j) $(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0.$

7. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6};$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x + y - 6};$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 1}{x + 4y + 2}.$

(d) $(2x - 2y)dx + (y - 1)dy = 0;$

(e) $(2x + 3y - 1)dx - 4(x + 1)dy = 0;$

8. Determinar cuáles de estas ecuaciones son exactas y resolver aquellas que lo sean.

(a) $\left(x + \dfrac{2}{y}\right)dx + ydx = 0;$

(b) $(sen(x)tg(y) + 1)\,dx + cos(x)sec^2(y)dy = 0;$

(c) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0;$

(d) $(2y^2 - 4x + 5)dx = (4 - 2y + 4xy)dy;$

(e) $(y + ycos(xy))dx + (x + xcos(xy))dy = 0;$

(f) $cos(x)cos^2(y)dx + 2sen(x)sen(y)cos(y)dy = 0;$

(g) $(sen(x)sen(y) - xe^y)dy = (e^y + cos(x)cos(y))dx;$

(h) $-\dfrac{1}{y}\,sen\left(\dfrac{x}{y}\right)dx + \dfrac{x}{y^2}\,sen\left(\dfrac{x}{y}\right)dy = 0;$

(i) $(1+y)dx+(1-x)dy=0;$

(j) $(2xy^3+ycos(x))dx+(3x^2y^2+sen(x))dy=0;$

(k) $dx=\dfrac{ydx}{1-x^2y^2}+\dfrac{xdy}{1-x^2y^2}\,;$

(l) $(2xy^4+sen(y))dx+(4x^2y^3+xcos(y))dy=0;$

(m) $\dfrac{ydx+xdy}{1-x^2y^2}+xdx=0;$

(n) $2x\Big(1+\sqrt{x^2-y}\Big)dx=\sqrt{x^2-y}\,dy;$

(o) $(x\ln(y)+xy)dx+(y\ln(x)+xy)dy=0;$

(p) $(e^{y^2}-csc(y)csc^2(x))dx+(2xye^{y^2}-csc(y)ctg(y)ctg(x))dy=0;$

(q) $(1+y^2sen(2x))dx-2ycos^2(x)dy=0;$

(r) $\dfrac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\dfrac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0;$

(s) $3x^2(1+\ln(y))dx+\left(\dfrac{x^3}{y}-2y\right)dy=0;$

(t) $\dfrac{ydx-xdy}{(x+y)^2}+dy=dx;$

(u) $\dfrac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3}\,dx+\dfrac{8y^2-x^2}{4y^3-x^2y}\,dy=0.$

9. Hallar el valor de α para el cual cada una de las ecuaciones siguientes es exacta y resolverlas para ese valor de α.

(a) $(xy^2+\alpha x^2y)dx+(x^3+x^2y)dy=0;$ (b) $(x+ye^{2xy})dx+\alpha xe^{2xy}dy=0.$

10. Probar que si $\dfrac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{yN-xM}$ es una función $g(z)$ del producto $z=xy$, entonces

$$\mu=e^{\int g(z)dz}$$

es un factor integrante para la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$

11. Resolver cada una de estas ecuaciones, hallando un factor integrante.

(a) $(3x^2-y^2)dy-2xydx=0;$ (b) $(xy-1)dx+(x^2-xy)dy=0;$

(c) $xdy+ydx+3x^3y^4dy=0;$ (d) $e^xdx+(e^xctg(y)+2ycsc(y))dy=0;$

(e) $ydx+(x-2x^2y^3)dy=0;$ (f) $(x+2)sen(y)dx+xcos(y)dy=0;$

(g) $(x+3y^2)dx+2xydy=0;$ (h) $ydx+(2x-ye^y)dy=0;$

(i) $(x^3+xy^3)dx+3y^2dy=0;$ (j) $(y\ln(y)-2xy)dx+(x+y)dy=0;$

(k) $xdy+ydx=-x^2ydy;$ (l) $\big(1/x\big)dx-\big(1+xy^2\big)dy=0;$

(m) $\big(x^2+2x+y\big)dx=\big(x^2+y-1\big)dy;$

(n) $\Big(cos(x)-sen(x)+sen(y)\Big)dx+\Big(cos(x)+sen(y)+cos(y)\Big)dy=0.$

12. Resolver la siguientes ecuaciones lineales.

(a) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^4;$

(b) $y' + y = (1 + e^{2x})^{-1};$

(c) $(1 + x^2)dy + 2xydx = ctg(x)dx;$

(d) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2;$

(e) $y' + yctg(x) = 2xcsc(x);$

(f) $(2y - x^3)dx = xdy;$

(g) $y - x + xyctg(x) + xy' = 0;$

(h) $y' - 2xy = 6xe^{x^2};$

(i) $(x\ln(x))y' + y = 3x^3;$

(j) $(y - 2xy - x^2)dx + x^2dy = 0.$

13. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $xy' + y = x^4y^3;$

(b) $xy^2y' + y^3 = xcos(x).$

(c) $xdy + ydx = xy^2dx;$

14. Probar que $y' + P(x)y = Q(x)y\ln(y)$ puede resolverse mediante el cambio de variable $z = \ln(y)$ y aplicar este método para resolver $xy' = 2x^2y + y\ln(y)$.