Capítulo 2

Funciones Analíticas

El análisis complejo estudia las funciones complejas que son diferenciables en algún dominio. Por tanto, primero es necesario establecer qué se entiende por función compleja y luego las nociones de límite, continuidad, derivada (estos conceptos son semejantes al que se estudio en cálculo), funciones analíticas y armónicas. El objetivo fundamental en este capítulo es estudiar las funciones analíticas, las cuales juegan un papel central en el análisis complejo.

2.1 Regiones en el Plano Complejo

Para el desarrollo de este capítulo es necesario estudiar algunos conceptos topológicos los cuales definiran regiones o conjuntos en el campo de los números complejos.

Definición 3 (ϵ-Entorno o Vecindad)**.**

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$. Un ϵ-entorno o vecindad de z_0, (o una bola de centro z_0 y radio $\epsilon > 0$) es el conjunto de todos los números complejos z cuya distancia a z_0 es menor que ϵ, el mismo lo denotaremos por $\mathcal{B}(z_0, \epsilon)$; es decir,

$$\boxed{\mathcal{B}(z_0, \epsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < \epsilon \right\}}.$$

En ocasiones, conviene utilizar un entorno sin el centro. Estos entornos se denominan *en-*

tornos perforados de z_0, estos lo denotaremos $\mathcal{B}'(z_0, \epsilon)$; esto es

$$\boxed{\mathcal{B}'(z_0, \epsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_0| < \epsilon\right\}}.$$

Se dice que z_0 es un *punto interior* del conjunto S de $\mathbb{C}$ si existe algún un entorno $\mathcal{B}(z_0, \epsilon)$ de z_0 que está contenido en S. El conjunto de todos los puntos interiores de S, se denota por int$S$ (ó por S°). Diremos que un punto z_0 es un *punto exterior* de S si existe algún entorno de z_0 que no contiene puntos de S.

Si un punto z_0 no es interior ni exterior de S, se dice que es un *punto frontera* de S. Por tanto, todo entorno de un punto frontera contiene puntos que están en S y puntos que no están en S.

¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿DIBUJO???

El conjunto de todos los puntos frontera de S constituye la *frontera* de S.

Un conjunto es *abierto* si todos sus puntos son puntos interiores. En otras palabras, diremos que un conjunto S en $\mathbb{C}$ es abierto si y sólo si int$S = S$. Un conjunto S es *cerrado* si su complemento

$$\boxed{S^c = \mathbb{C}\backslash S := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z \notin S\right\}}$$

es un conjunto abierto, o equivalentemente un conjunto es *cerrado* si contiene todos sus puntos frontera.

De manera natural surgen las siguientes inquietudes:

- ¿Existen conjuntos que no son abiertos ni cerrados a la vez?;
- ¿Existen conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez?.

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es *conexo* si todo par de puntos z_1, z_2 de S se pueden unir por una línea poligonal (unión finita de segmentos rectos) contenida en S.

??????????????????????????????DIBUJO?????????????????????

Denominaremos *dominio* a todo conjunto abierto y conexo. En consecuencia todo entorno es un dominio.

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es *acotado* si está contenido por completo dentro de alguna circunferencia $|z| = R$. En caso contrario, se dice que S es *no acotado*.

Ejemplo 4.

El conjunto A formado por todas las $z \in \mathbb{C}$ tales que $0 < |z-1| \leq 1$, no es abierto ni cerrado. En efecto, haciendo $z = x + i\,y$, obtenemos

$$0 < |z-1| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < |(x-1) + i\,y| \leq 1 \Longleftrightarrow 0 < (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

La circunferencia $|z| = 1$ y el punto 0 son los puntos frontera de A, pero el $0 \notin A$, por consiguiente A no es cerrado. Por otro lado, $z = 1$ pertenece a A, pero no es un punto interior de A y así A no es abierto.
A es conexo (¿por que?) y acotado, pues queda totalmente contenido por ejemplo en la circunferencia $|z| = 5/2$.

Ejemplo 5.

Los conjuntos S_ϵ y R_ϵ definidos por $S_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |Re(z)| + |Im(z)| < \epsilon\}$ y $R_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \max\{|Re(z)|, |Im(z)|\} < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, son conjuntos abiertos, conexos y acotados. ¿Por que?

Ejemplo 6.

El conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| < |z-1|\}$ no es abierto, ni cerrado, ni acotado pero si es conexo. ¿Por que?

2.2 Funciones de Variable Compleja

Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$. Una *función* f definida sobre $\mathcal{D}$ es una regla que asigna a cada $z \in \mathcal{D}$ uno o más complejos $w's$. El número w se llama el *valor* de f en z y se denota por $f(z)$; esto es

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \rightsquigarrow f(z) = w. \end{aligned} \tag{2.1}$$

El conjunto $\mathcal{D}$ se denomina el *dominio*[1] *de definición* de f.

Cuando f asigna *un* sólo valor complejo w a cada $z \in \mathcal{D}$, f se llama función *univaluada* (o *univoca*), de lo contrario se denomina *multivaluada* o (*multivoca*). Cuando se estudian funciones multivaluadas, se suele tomar sólo uno de los valores asignados a cada punto, de modo sistemático, y se construye así una función univaluada a partir de la función multivaluada.

Otra forma de ver estas funciones, es la siguiente, si $z = x + i\,y$ y $w = u + i\,v$, entonces

$$\boxed{f(z) = u + i\,v = u(x, y) + i\,v(x, y)}. \tag{2.2}$$

Es decir, la función f puede ser expresada en términos de un par de funciones u y v con valores reales de las variables reales x e y. En otras palabras,

$$\boxed{f \equiv \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)} \tag{2.3}$$

de donde $\mathrm{Re}(f) = u, \ \ \mathrm{Im}(f) = v.$

Ejemplo 7.

si $f(z) = z^2$, entonces

$$f(x + i\,y) = (x + i\,y)^2 = x^2 + i\,2xy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy.$$

Luego, $u(x, y) = x^2 - y^2$, y $v(x, y) = 2xy.$

[1] El dominio de definición no tiene que ser un dominio como se definió al final de la sección anterior

Ejemplo 8.

Sea $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$. Usando coordenadas polares r, θ en vez de x e y, se tiene que $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ y $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$. Así

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = re^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{r} = r\text{cis}(\theta) + \frac{\text{cis}(-\theta)}{r} \\ &= \left(\frac{r^2+1}{r}\right)\cos(\theta) + i\left(\frac{r^2-1}{r}\right)\text{sen}(\theta). \end{aligned}$$

De donde $u(r,\theta) = \left(\dfrac{r^2+1}{r}\right)\cos(\theta)$ y $v(r,\theta) = \left(\dfrac{r^2-1}{r}\right)\text{sen}(\theta)$.

Si la función $v = 0$, entonces el número $f(z)$ es siempre real, en otras palabras, f es una *función real* de una variable compleja. Por ejemplo si $f(z) = |z|^2$, entonces $f(z) = x^2 + y^2$.

Observación 9.

Las propiedades de una función real de una variable real se suelen reflejar en el gráfico de la función. Pero para $w = f(z)$, donde z y w son complejos, no disponemos de tal gráfica, pues ambos números, z y w están sobre un plano en lugar de sobre una recta; es decir, se requerirían cuatro dimensiones, dos para cada variable. En lugar de esto, la información acerca de la función se expresa dibujando planos complejos separados para las variables z y w, e indicando la correspondencia existente entre puntos, o conjuntos de puntos, en los dos planos. Al pensar en una función f de esta manera nos referimos a ella como una *aplicación* o *transformación*[a].

[a]Ver por ejemplo la sección 12 del Cap. 2 y el Cap. 8 del texto Variable Compleja y Aplicaciones de Churchill/Brown.

2.3 Límites

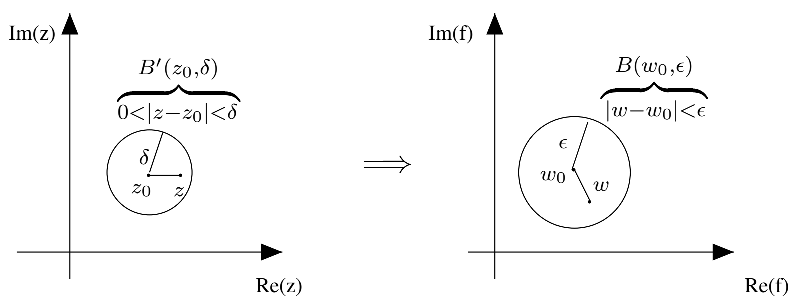
Sea f una función definida en alguna vecindad perforada de $z_0 \in \mathbb{C}$. La afirmación de que el *límite* de $f(z)$, cuando z tiende a z_0, es un número complejo w_0, en notación

$$\boxed{\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = w_0}, \tag{2.4}$$

significa que el punto $w = f(z)$ puede hacerse tán próximo como se quiera a w_0, si escogemos a z suficientemente cercano a z_0, pero $z \neq z_0$. Formalmente

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = w_0 \qquad \text{si y sólo si para cada } \epsilon > 0, \quad \text{existe un } \ \delta = \delta_\epsilon > 0 \ \text{ tal que}$$
$$\Big|f(z) - w_0\Big| < \epsilon \ \text{ siempre que } \ 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{2.5}$$

La idea gráfica es la siguiente



Esta definición de límite dice que, a medida que el entorno perforado de z_0 y radio δ se comprime a z_0, el entorno de w_0 y radio ϵ se concentra hacia w_0 y es importante destacar que la tendencia de z hacia z_0 debe producirse en todas las direcciones.

Al igual que los límites estudiados a funciones reales, está definición de límite proporciona un medio para comprobar si un punto dado w_0 es un límite, no pone en nuestras manos un método para determinar ese valor. El siguiente resultado establece una relación entre los límites de funciones de variable compleja y los de funciones reales a dos variables reales.

Teorema 10.

(A) Si el límite de una función existe es único.

(B) Supongamos que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y); z_0 = x_0 + i\,y_0$ y $w_0 = u_0 + i\,v_0$. Entonces

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = (u_0, v_0)$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0. \end{cases}$$

(C) Supóngase que $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = w_0$ y $\lim_{z \longrightarrow z_0} g(z) = W_0$. Entonces

(a) $\lim_{z \longrightarrow z_0} \Big[f(z) + g(z)\Big] = w_0 + W_0$.

(b) $\lim_{z \longrightarrow z_0} \Big[f(z)g(z)\Big] = w_0\,W_0$.

(c) $\lim_{z \longrightarrow z_0} \left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{w_0}{W_0}, \quad g(z) \neq 0, \quad W_0 \neq 0.$

(d) $\lim_{z \longrightarrow z_0} \alpha = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}$.

(D) Otra propiedad útil de los límites es

$$\text{si} \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{entonces} \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|.$$

2.4 Límites y el Punto del Infinito

Es conveniente incluir con el plano complejo el *punto del infinito*, denotado por ∞, y usar límites relacionados con él. El plano complejo junto con ese punto se llama *plano complejo ampliado* (ó extendido).

La afirmación

$$\boxed{\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty}, \tag{2.6}$$

significa que: para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z)| > 1/\epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{2.7}$$

Es decir, el punto $w = f(z)$ está en el ϵ-entorno $|z| > 1/\epsilon$ de ∞ siempre que z esté en el entorno $0 < |z - z_0| < \delta$ de z_0.

Como la ecuación (2.7) se puede escribir de la forma

$$\left|\frac{1}{f(z)} - 0\right| < \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

se observa que

$$\boxed{\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0}. \tag{2.8}$$

Si $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} f(z) = w_0$, entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |z| > \frac{1}{\delta}\,. \tag{2.9}$$

De donde se sigue que

$$\boxed{\lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \longrightarrow 0} f(1/z) = w_0}. \tag{2.10}$$

De manera similar se tiene que

$$\boxed{\lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0}. \tag{2.11}$$

2.5 Continuidad

Una función f es *continua* en $z_0 \in \mathbb{C}$ si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(a) $f(z_0)$ existe,

(b) $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z)$ existe,

(c) $f(z_0) = \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z)$.

Una función de una variable compleja es continua en una región $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$ si lo es en todos sus puntos.

Observación 11.

Observemos lo siguiente:

(1) Si falla alguna de las tres condiciones anteriores, se dice que f es discontinua.

(2) Si falla (b) se dice que f tiene una discontinuidad *no evitable* o *esencial* en z_0.

(3) Si (a) y (b) se cumplen pero falla (c), se dice que f posee una discontinuidad *evitable*, ya que redefiniendo el valor de f en z_0 igual al valor del límite, la función se hace continua.

Propiedades

(i) Supongamos que f y g son funciones continuas. Entonces, $f + g, fg, f/g (g \neq 0)$ también son continuas.

(ii) La composición de funciones continuas tambien es continua.

(iii) $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ es continua si y sólo si u y v lo son.

2.6 Problemas Resueltos

(1) **Funciones Complejas Elementales.** Consideraremos varias funciones elementales estudiadas en el cálculo y definiremos funciones correspondientes de una variable compleja.

(a) **Función Exponencial**

Para todo complejo $z = x + i\, y$, se define la *función exponencial* del análisis complejo, como

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\rightsquigarrow f(z) = e^z = e^x \operatorname{cis}(y) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Está función exponencial, conserva las propiedades conocidas del caso real. Esto es, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces

(i) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; (ii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$;

(iii) $\left(e^z\right)^n = e^{nz}, \forall\, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \forall\, z \in \mathbb{C}$.

(iv) Ya que

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \operatorname{cis}(2\pi) = e^z$$

Se tiene que la función exponencial es *periódica* con *período imaginario puro* $2\pi i$.

(v) Si $z = x + i\,y$, resulta que $e^z = e^x e^{i\,y}$. De donde se sigue que

$$\left|e^z\right| = \left|e^x e^{i\,y}\right| = \left|e^x\right|\left|\operatorname{cis}(y)\right| = \left|e^x\right| = e^x, \text{ pues } e^x > 0\;\forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Un argumento de e^z es

$$arg(e^z) = \theta + 2n\pi, \quad \text{donde} \quad \theta = y, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots$$

Por lo que $e^z \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

(b) **Función Logaritmo**

El logaritmo de un número complejo z se define de manera similar al caso real. Por lo tanto

$$z = \lg(w) \quad \text{significa que} \quad w = e^z$$

Ahora para cualquier número no nulo dado $w = \rho e^{i\,\varphi}, -\pi \leq \varphi \leq \pi$, la ecuación $w = e^z$ tiene raíces de la forma

$$z = \ln e^z = \ln\left(\rho e^{i\,\varphi}\right) = \ln\rho + \ln e^{i\,\varphi} = \ln\rho + i(\varphi + 2n\pi),$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Luego

$$\lg(w) = \ln e^{i\,\varphi} = \ln\rho + i(\varphi + 2n\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

de donde se sigue que

$$e^{\lg(w)} = e^{\ln e^{i\,\varphi}} = e^{\ln\rho + i(\varphi + 2n\pi)} = e^z = w.$$

Todo esto, motiva la siguiente definición de la *función logaritmo* (multivaluada) de una variable compleja. Para todo complejo no nulo $z = |z|e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$, se tiene que

$$\boxed{\lg(z) = \ln|z| + i\big(\theta + 2n\pi\big), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}. \tag{2.13}$$

El *valor principal* de $\lg(z)$ es el valor obtenido cuando $n = 0$ y se denota por $Lg(z)$. Así

$$\boxed{Lg(z) = \ln|z| + i\theta} \tag{2.14}$$

ó sea

$$\boxed{Lg(z) = \ln|z| + iArg(z)}. \tag{2.15}$$

De esa forma

$$\boxed{\lg(z) = Lg(z) + 2n\pi\, i, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}. \tag{2.16}$$

El logaritmo complejo tiene las propiedades usuales de un logaritmo.

Definición 12.

(Rama de una Función Multivaluada) Una rama de una función multivaluada f es una función univaluada F analítica en cierto dominio y tal que, en cada punto z de ese dominio, el valor $F(z)$ es uno de los valores de $f(z)$.

Es de observar que al exigir que F sea analítica (en la definición anterior), **no** se puede asignar a F valores de f elegidos al azar. Así por ejemplo si $re^{i\theta}$ es un número complejo no nulo, el argumento θ tiene uno de los valores $\theta = \Theta + 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, donde $\Theta = Arg(z)$. Por tanto, la definición de la función logarítmo multivada, se puede escribir $\lg(z) = \ln(r) + i\,\theta$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, la función

$$\lg(z) = \ln(r) + i\,\theta, \qquad r > 0$$

es una rama de la función logarítmo multivaluada. Mientras que la función

$$Lg(z) = \ln(r) + i\,\Theta, \qquad r > 0, \quad -\pi < \Theta < \pi$$

es la *rama principal*.

Se llama *corte* a un trozo de recta o de curva elegida con el fin de definir una rama F de una función multivaluada f. Los puntos del corte para F son *puntos singulares* de F y cualquier punto que es común a todos los cortes de f se denomina *punto de ramificación*.

El origen y el rayo $\theta = \alpha$ forman el corte para la rama $\lg(z) = \ln(r) + i\,\theta,\ (r > 0)$. El corte para la rama principal del logarítmo lo constituyen el origen y el rayo $\Theta = \pi$. Y claramente el origen es un punto de ramificación para las ramas de la función logarítmo multivaluada.

(c) **Funciones Trigonométricas**

Como $\quad e^{z} = e^{x+i\,y} = e^{x}\Big[\cos(y) + i\,\text{sen}(y)\Big].$

Si hacemos $\quad x = 0,\quad$ resulta que $\quad e^{i\,y} = \cos(y) + i\,\text{sen}(y)\quad$ y haciendo $\quad y = -y,$ se tiene que $\quad e^{-i\,y} = \cos(y) - i\,\text{sen}(y),\quad$ al sumar estas expresiones obtenemos

$$\cos(y) = \frac{e^{i\,y} + e^{-i\,y}}{2}; \qquad \text{sen}(y) = \frac{e^{i\,y} - e^{-i\,y}}{2i}$$

Gracias a estas ecuaciones, es natural, definir las *funciones trigonométricas*, de la siguiente manera: para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\cos(z) = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}} \qquad \boxed{\text{sen}(z) = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}}$$

$$\boxed{tg(z) = \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)}} \qquad \boxed{ctg(z) = \frac{\cos(z)}{\text{sen}(z)},\quad z \neq 0}$$

$$\boxed{sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}} \qquad \boxed{csc(z) = \frac{1}{\text{sen}(z)},\quad z \neq 0}.$$

Todas las identidades conocidas para funciones trigonométricas reales, también son válidas para el caso complejo.

(d) **Funciones Hiperbólicas**

El seno y el coseno hiperbólico de una variable compleja se definen como en una variable real; esto es,

$$\boxed{\text{senh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}} \qquad \boxed{\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}} \qquad \boxed{tgh(z) = \frac{\text{senh}(z)}{\cosh(z)}}$$

(e) **Exponentes Complejos**

Cuando $z \neq 0$ y el exponente α es cualquier número complejo, la función z^{α} se define mediante

$$\boxed{z^{\alpha} = e^{\alpha\,\lg(z)}}$$

donde $\lg(z)$ denota la función logaritmo multivaluada de z.

(2) Hallar todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que: $\quad (a)\ e^{z} = -1; \quad (b)\ e^{4z} = i.$

Solución

(a) Como $-1 = |-1|e^{i\,\pi} = e^{i\,\pi}$, se tiene que

$$e^z = -1 \iff e^x e^{iy} = e^{i\pi} \iff \begin{cases} e^x = 1 \\ e^{iy} = e^{i\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{cis}(y) = \text{cis}(\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \cos(y) + i\,\text{sen}(y) = \cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi + 2n\pi, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

Es decir;

$$e^z = -1 \iff z = (1 + 2n)\pi\, i, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

(b) Como $i = |i|e^{i\,\pi/2} = e^{i\,\pi/2}$, se tiene que

$$e^{4z} = i \iff e^{4x}e^{i4y} = e^{i\pi/2} \iff x = 0 \text{ y } 4y = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\iff x = 0 \text{ y } y = (1 + 4n)\frac{\pi}{8}, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Por lo que

$$e^{4z} = i \iff z = \big(1 + 4n\big)\frac{\pi}{8}\, i, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

(3) Hallar: $(a)\; e^{\frac{2+\pi\, i}{4}}$; $(b)\; e^{(2\pm 3\pi\, i)}$.

Solución

$$\begin{aligned} (a)\;\; e^{\frac{2+\pi\, i}{4}} &= e^{1/2}e^{i\,\pi/4} = e^{1/2}\,\text{cis}(\pi/4) \\ &= e^{1/2}\Big[\cos(\pi/4) + i\,\text{sen}(\pi/4)\Big] \\ &= e^{1/2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1 + i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b)\;\; e^{2\pm 3\pi\, i} &= e^2 e^{\pm e\pi\, i} = e^2\,\text{cis}(\pm 3\pi) = e^2\Big[\cos(\pm 3\pi) + i\,\text{sen}(\pm 3\pi)\Big] \\ &= -e^2. \end{aligned}$$

(4) Hallar los valores y el valor principal de:

$$(a)\;\ln(1); \qquad (b)\;\ln(-e\, i); \qquad (c)\;\ln(-1 + \sqrt{3}\, i).$$

Solución

Recuerde que $\ln(z) = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$ donde $z = |z|e^{i\theta}$.

(a) $1 = |1|e^{i0} = e^{i0}$, luego $\ln(1) = \ln|1| + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi\, i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ y el valor principal es $Ln(1) = 2(0)\pi\, i = 0$.

(b) $-e\,i = |-e\,i|e^{-i\pi/2} = e\,e^{-i\pi/2}$, luego

$$\ln(-e\,i) = \ln\, e + i(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 + i\Big(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\Big),$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, y el valor principal es $Ln(-e\,i) = 1 - i\,\pi/2$.

(c) $-1 + \sqrt{3}\,i = |-1 + \sqrt{3}\,i|\,e^{i\,2\pi/3} = 2\,e^{i\,2\pi/3}$, luego

$$\ln(-1 + \sqrt{3}\,i) = \ln 2 + i\Big(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\Big) = \ln 2 + i\Big(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\Big),$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, y el valor principal es

$$Ln(-1 + \sqrt{3}\,i) = \ln 2 + i\,2\pi/3.$$

(5) Pruebe que:

$$(a)\ 2\text{sen}(z_1)\cos(z_2) = \text{sen}(z_1 + z_2) + \text{sen}(z_1 - z_2);$$

$$(b)\ \text{sen}(z + \pi/2) = \cos(z).$$

Prueba.

(a) Usando las respectivas definiciones, se tiene que

$$\begin{aligned}
2\text{sen}(z_1)\cos(z_2) &= 2\Big(\frac{e^{i\,z_1} - e^{-i\,z_1}}{2i}\Big)\Big(\frac{e^{i\,z_2} - e^{-i\,z_2}}{2i}\Big) \\
&= \frac{e^{i\,(z_1+z_2)} - e^{-i\,(z_1+z_2)}}{2i} + \frac{e^{i\,(z_1-z_2)} + e^{-i\,(z_1-z_2)}}{2i} \\
&= \text{sen}(z_1 + z_2) + \text{sen}(z_1 - z_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b)\ \ \text{sen}(z + \pi/2) &= \Big(\frac{e^{i\,(z+\pi/2)} - e^{-i\,(z+\pi/2)}}{2i}\Big) \\
&= \frac{e^{i\,z}\,\text{cis}(\pi/2) - e^{-i\,z}\,\text{cis}(-\pi/2)}{2i} \\
&= \frac{i\,e^{i\,z} + i\,e^{-i\,z}}{2i} = \cos(z).
\end{aligned}$$

(6) Si $\cos(z) = 2$. Encuentre: $(a)\ \cos(2z)$; $(b)\ \cos(3z)$.

Solución

$(a)\ \cos(2z) = \cos^2(z) - \text{sen}^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$. De donde

$$\cos(2z) = 2 \cdot 4 - 1 = 7.$$

$$\begin{aligned}(b)\ \cos(3z) &= \cos(z + 2z) = \cos(z)\cos(2z) - \text{sen}(z)\text{sen}(2z) \\ &= 14 - \frac{\text{sen}^2(2z)}{2\cos(z)} = 14 - \frac{1 - \cos^2(z)}{2\cos(z)} \\ &= 14 + 12 = 26.\end{aligned}$$

(7) Pruebe que $\overline{\text{sen}(z)} = \text{sen}(\overline{z})$.

Prueba.

Como $\overline{e^{i\,z}} = e^{-i\,\overline{z}}$ y $\overline{e^{-i\,z}} = e^{i\,\overline{z}}$ y $\text{sen}(z) = \dfrac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\overline{\text{sen}(z)} &= \overline{\left(\frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}\right)} = \frac{\overline{\left(e^{i\,z} - e^{-i\,z}\right)}}{\overline{2i}} = \frac{\overline{e^{i\,z}} - \overline{e^{-i\,z}}}{-2i} \\ &= \frac{e^{-i\,\overline{z}} - e^{i\,\overline{z}}}{-2i} = \frac{e^{i\,\overline{z}} - e^{-i\,\overline{z}}}{2i} = \text{sen}(\overline{z}).\end{aligned}$$

(8) Encuentre los valores de $(a)\ 4\text{senh}(i\,\pi/3)$; $(b)\ 1^{\sqrt{2}}$; $(c)\ Re\Big\{(1 - i)^{1+i}\Big\}$; $Im\Big\{(1 - i)^{1+i}\Big\}$.

Solución

(a) Como $\text{senh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned}4\text{senh}(i\,\pi/3) &= 2\Big(e^{i\,\pi/3} - e^{-i\,\pi/3}\Big) = 2\text{cis}(\pi/3) - 2\text{cis}(-\pi/3) \\ &= 2\cos(\pi/3) + i\,2\text{sen}(\pi/3) - 2\cos(\pi/3) - i\,2\text{sen}(-\pi/3) \\ &= 4\text{sen}(\pi/3)\,i = 2\sqrt{3}\,i\,.\end{aligned}$$

(b) Por definición $z^\alpha = e^{\alpha\,\lg(z)}$. Por lo que

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\,\lg(1)} = e^{\sqrt{2}\,2n\pi\,i} = e^{2\sqrt{2}\,n\pi\,i}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ &= \text{cis}\big(2\sqrt{2}\,n\pi\big), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ &= \cos\big(2\sqrt{2}\,n\pi\big) + i\,\text{sen}\big(2\sqrt{2}\,n\pi\big), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \end{aligned}$$

(c) Primeros hallemos $(1-i)^{1+i}$.

$$\lg(1-i) = \ln|1-i| + \Big(\frac{7\pi}{4} + 2n\pi\Big)i = \ln\sqrt{2} + \Big(\frac{7\pi}{4} + 2n\pi\Big)i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} (1-i)^{1+i} &= e^{(1+i)\,\lg(1-i)} = e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2} + \left(\frac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)i\right]}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ &= e^{\left(\ln\sqrt{2} - \frac{7\pi}{4} - 2n\pi\right) + i\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ &= e^{(\ln\sqrt{2} - \frac{7\pi}{4} - 2n\pi)}\cos\Big(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\Big) \\ &\quad + i\,e^{(\ln\sqrt{2} - \frac{7\pi}{4} - 2n\pi)}\,\text{sen}\Big(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\Big), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Re\Big\{(1-i)^{1+i}\Big\} = e^{(\ln\sqrt{2} - \frac{7\pi}{4} - 2n\pi)}\cos\Big(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\Big)$$

$$Im\Big\{(1-i)^{1+i}\Big\} = e^{(\ln\sqrt{2} - \frac{7\pi}{4} - 2n\pi)}\,\text{sen}\Big(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\Big)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(9) Sea $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$. Halle: (a) $f(i)$; (b) $f(1-i)$.

Solución

$$(a)\;\; f(i) = \frac{i+1}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\,i}{2} = i.$$

$$(b)\;\; f(1-i) = \frac{(1-i)+1}{1-(1-i)} = \frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)(-i)}{-i^2} = -1 - 2i.$$

(10) Evalúe los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{z\longrightarrow 2i}\left(i\,z^4+3z^2-10\,i\right);\qquad (b)\ \lim_{z\longrightarrow 1+i}\left(\frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right)^2$$

$$(c)\ \lim_{z\longrightarrow e^{i\,\pi/4}}\frac{z^2}{z^4+z+1};\qquad (d)\ \lim_{z\longrightarrow -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$$

$$(e)\ \lim_{z\longrightarrow i\,\pi/2} z^2\cosh(4z/3);\quad (f)\ \lim_{z\longrightarrow -1}\frac{iz+3}{z+1};\quad (g)\ \lim_{z\longrightarrow\infty}\frac{2z+i}{z+1}$$

Solución

$$\begin{aligned}(a)\ \lim_{z\longrightarrow 2i}\left(i\,z^4+3z^2-10\,i\right) &= i(2i)^4+3(2i)^2-10i=16i^5+12i^2-10i\\ &= -12+6i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\ \lim_{z\longrightarrow 1+i}\left(\frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right)^2 &= \lim_{z\longrightarrow 1+i}\left[\frac{z-(1+i)}{(z+(i+1))(z-(1-i))}\right]^2\\ &= \lim_{z\longrightarrow 1+i}\left[\frac{1}{(z+(1-i))}\right]^2\\ &= \left[\frac{1}{(1+i)+(1-i)}\right]^2=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c)\ \lim_{z\longrightarrow e^{i\,\pi/4}}\frac{z^2}{z^4+z+1} &= \frac{e^{i\,\pi/2}}{e^{i\,\pi}+e^{i\,\pi/4}+1}=\frac{\text{cis}(\pi/2)}{\text{cis}(\pi)+\text{cis}(\pi/4)+1}\\ &= \frac{i}{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{1+i}\,i\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i).\end{aligned}$$

$$(d)\ \lim_{z\longrightarrow -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{(-4i+3)(-2i-1)}{(-2i)^2+4i+4}=\frac{-11-2i}{4i}=-\frac{1}{2}+\frac{11}{4}\,i.$$

$$\begin{aligned}(e)\ \lim_{z\longrightarrow i\,\pi/2} z^2\cosh(4z/3) &= \left(\frac{i\,\pi}{2}\right)^2\cosh\left(\frac{i\,2\pi}{3}\right)=-\frac{\pi^2}{4}\,\frac{(e^{i\,2\pi/3}+e^{-i\,2\pi/3})}{2}\\ &= -\frac{\pi^2}{8}\Big(\text{cis}(2\pi/3)+\text{cis}(-2\pi/3)\Big)=\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

(f) Recordemos que $\displaystyle\lim_{z\longrightarrow z_o} f(z)=\infty \iff \lim_{z\longrightarrow z_o}\frac{1}{f(z)}=0.$

Como $\lim_{z\longrightarrow -1} \dfrac{z+1}{3+iz} = 0$, resulta que $\lim_{z\longrightarrow -1} \dfrac{iz+3}{z+1} = \infty$.

(g) Recordemos que $\lim_{z\longrightarrow\infty} f(z) = w_o \iff \lim_{z\longrightarrow 0} f(1/z) = w_o$.

Ya que $\lim_{z\longrightarrow 0} \dfrac{\frac{2}{z}+i}{\frac{1}{z}+1} = \lim_{z\longrightarrow 0} \dfrac{2+iz}{z+1} = 2$, se tiene que $\lim_{z\longrightarrow\infty} \dfrac{2z+i}{z+1} = 2$.

(11) Pruebe que $\lim_{z\longrightarrow 3} \dfrac{z-1}{z-2} = 2$.

Solución

$$\lim_{z\longrightarrow 3} \frac{z-1}{z-2} = 2 \iff \text{ para cada } \epsilon > 0, \text{ existe un } \delta = \delta_\epsilon > 0 \text{ tal que}$$

$$\left|\frac{z-1}{z-2} - 2\right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |z-3| < \delta$$

$$\iff \text{ para cada } \epsilon > 0, \text{ existe un } \delta = \delta_\epsilon > 0 \text{ tal que } \left|\frac{3-z}{z-2}\right| < \epsilon$$

siempre que $0 < |z-3| < \delta$.

Como $|z-3| < \delta$ resulta que $\left|\dfrac{3-z}{z-2}\right| = \dfrac{|3-z|}{z-2} < \dfrac{\delta}{|z-2|}$.

Si $\delta < 1/2$, entonces

$$|z-2| = |1-(3-z)| \geq 1 - |3-z| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo que $\dfrac{1}{|z-2|} < 2$. Y en consecuencia $\left|\dfrac{3-z}{z-2}\right| < 2\delta$.

Por tanto dado cualquier $\epsilon > 0$, y eligiendo $\delta \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$, se tiene que

$$\left|\frac{z-1}{z-2} - 2\right| < \epsilon.$$

(12) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$(a)\ f(z) = \frac{z^2+1}{z-1}, \quad \text{en } z_o = i; \quad (b)\ f(z) = \begin{cases} z^2+2z & \text{si } z \neq 1+i \\ 3+2i & \text{si } z = 1+i. \end{cases}$$

$$(c)\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{z^2+1} & \text{si } z \neq \pm i \\ i & \text{si } z = i \\ -i & \text{si } z = -i. \end{cases}$$

Solución

(a) $f(i) = \dfrac{i^2+1}{i-1} = \dfrac{0}{i-1} = 0;$ $\displaystyle\lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2+1}{z-1} = \frac{i^2+1}{i-1} = 0$ y $f(i) = \displaystyle\lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2+1}{z-1}$.

Esto nos dice que la función es continua en $z_o = i$.

(b) $f(1+i) = 3+2i;$ $\displaystyle\lim_{z\longrightarrow 1+i}(z^2+2z) = (1+i)^2+2(1+i) = 2+4i$ y $f(1+i) \neq \displaystyle\lim_{z\longrightarrow 1+i}(z^2+2z)$.

Esto nos dice que la función es discontinua en $z_o = 1+i$. Más aún $f(z)$ tiene una discontinuidad evitable (removible) en dicho punto; es decir, podemos (y así lo haremos) redefinir la función para hacerla continua en $z_o = 1+i$. Sea

$$g(z) = \begin{cases} z^2+2z & \text{si } z \neq 1+i \\ 2+4i & \text{si } z = 1+i. \end{cases}$$

Claramente $g(z)$ es continua en ese punto. Además $g(z)$ también es continua en $z_o \neq 1+i$.

(c) Si $z_o \neq \pm i$, se tiene

$$f(z_o) = \frac{z_o}{z_o^2+1} = \lim_{z\longrightarrow z_o}\frac{z}{z^2+1} = \lim_{z\longrightarrow z_o} f(z)$$

y así $f(z)$ es continua en $z_o \neq \pm i$.

Si $z_o = \pm i$, resulta

$$f(\pm i) = \pm i; \quad \lim_{z\longrightarrow \pm i}\frac{z}{z^2+1} = \pm\infty$$

Ya que el límite en cada caso no existe, concluimos que dicha función es discontinua en $z_o = \pm i$. Es más podemos afirmar que $f(z)$ presenta una discontinuidad esencial (no evitable) en esos puntos.

(13) Verificar si la función $f(z) = \dfrac{z-i}{z^2-1}$ es continua en la región $\mathcal{A}$ la cual es generada por todos aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z+i| < 2$.

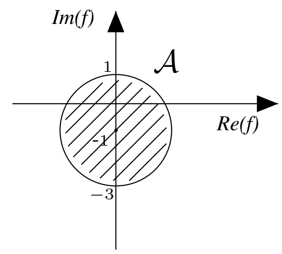
Solución

Observemos que en este caso se va a estudiar la continuidad en una región, y que una función es continua en una región si ella es continua en todo punto de dicha región.

Determinenos primero que nada quien es $\mathcal{A}$; para ello pongamos $z = x + i\,y$, luego

$$|z+i| < 2 \iff |x + i\,(y+1)| < 2 \iff x^2 + (y+1)^2 < 4$$

Es decir, $\mathcal{A}$ es la parte interna (sin el borde) de la circunferencia centrada en $(0,-1)$ y radio 2.



Ahora

$$f(z) = \frac{z-i}{z^2-1} \text{ no existe } \iff z^2 - 1 = 0 \iff z = \pm 1$$

Pero es claro que $z_o = -1 \in \mathcal{A}$, por consiguiente la función dada no es continua en $\mathcal{A}$.

2.7 Problemas Propuestos

(1) (a) Si $f(z) = \dfrac{2z+1}{2z-1}$, encuentre: $f(0)$, $f(i)$ y $f(1+i)$.

(b) Halle todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que: $f(z) = i$; $f(z) = 2 - 3i$.

(2) Hallar la parte real y la imaginaria de las siguientes funciones

$$(a)\ f(z) = 2z^2 - 3z\,i;\ \ (b)\ f(z) = z + \frac{1}{z};\ \ (c)\ f(z) = \sqrt{z};\ \ (d)\ f(z) = z^z.$$

(3) Encuentre los valores de: (a) 1^i; (b) $(1+i)^i$; (c) i^{-i}; (d) $\lg(e^i)$; (e) $ctgh(i\,3\pi/4)$; (f) $|(-i)^{-i}|$; (g) $\operatorname{senh}(z + i\,\pi)$; (h) $\cosh(z + i\,\pi)$; (i) $\lg(i)$; (j) e^{1+i}; (k) $\operatorname{sen}(2i)$.

(4) Pruebe que: (a) $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$; (b) $\overline{tg(z)} = tg(\overline{z})$.

(5) Evalúe los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2+1}{z^6+1};\quad (b)\ \lim_{z \longrightarrow e^{i\,\pi/3}} (z - e^{i\,\pi/3})\left(\frac{z}{z^3+1}\right);\quad (c)\ \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\overline{z}^{\,2}}{z};$$

$$(d)\ \lim_{z\longrightarrow i}\frac{i\,z^3-1}{z+i};\quad (e)\ \lim_{z\longrightarrow 2\,i}\frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i};$$

$$(f)\ \lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2-2z\,i-1}{z^4+2z^2+1};\quad (g)\ \lim_{z\longrightarrow 0}\frac{z-sen(z)}{z^3};\ (h)\ \lim_{z\longrightarrow 0}\left(\frac{\text{sen}(z)}{z}\right)^{1/z^2}$$

(6) Use la definición de límite para verificar los siguientes planteamientos:

$$(a)\ \lim_{z\longrightarrow 1}2z=2;\ (b)\ \lim_{z\longrightarrow i}iz=-1;\ (c)\ \lim_{z\longrightarrow -i}\Big(z+i\Big)=0;$$

$$(d)\ \lim_{z\longrightarrow i}\Big(z^2+1\Big)=0;\ (e)\ \lim_{z\longrightarrow 1+i}\Big(2z-3\Big)=-1+2i;$$

$$(f)\ \lim_{z\longrightarrow 1+i}z^2=2i;\ (g)\ \lim_{z\longrightarrow 2}\frac{z^2-4}{z-2}=4$$

(7) Encuentre todos los puntos de discontinuidad para las siguientes funciones

$$(a)\ f(z)=\frac{2z-3}{z^2+2z+2};\quad (b)\ f(z)=\frac{3z^2+4}{z^4-16}$$

$$(c)\ f(z)=\frac{1}{z}-sec(z);\quad (d)\ f(z)=\frac{tgh(z)}{z^2+1}.$$

(8) Determinar si la función $f(z)$ es continua en z_0, cuando

$$(a)\ f(z)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad z=0\\ \dfrac{Re(z)}{z} & \text{si}\quad z\neq 0;\end{cases};\qquad z_0=0.$$

$$(b)\ f(z)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad z=0\\ \dfrac{Im(z)}{1+|z|} & \text{si}\quad z\neq 0;\end{cases};\qquad z_0=0.$$

(9) Pruebe que las funciones dadas son continuas en la región indicada

(a) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^3+9};\quad \mathcal{A}=\Big\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 2\Big\}.$

(b) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-3z+2};\quad \mathcal{B}=\Big\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\Big\}.$

(c) $f(z)=\dfrac{z}{z^4+1};\quad \mathcal{C}=\Big\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\Big\}.$

(10) Pruebe que las funciones dadas, son continuas en todo $\mathbb{C}$.

$$(a)\ f(z)=Re(z);\ (b)\ f(z)=Im(z);\ (d)\ f(z)=\overline{z};\ (d)\ f(z)=|z|.$$

(11) Suponga que la función $f(z)$ es continua en alguna región de $\mathbb{C}$. Pruebe que las funciones dadas son continuas en la misma región.

$$(a)\ g(z) = Re(f(z)); \quad (b)\ g(z) = Im(f(z)); \quad (c)\ g(z) = |f(z)|;$$

$$(d)\ g(z) = f(\overline{z}).$$

(12) Demuestre que las funciones dadas son continuas para $z \neq 0$. ¿Puede definirse dicha función como para hacerla continua en $z = 0$?

$$(a)\ f(z) = \frac{zRe(z)}{|z|^2}; \qquad (b)\ f(z) = \frac{|z|^2}{z};$$

$$(c)\ f(z) = \frac{Re(z)Im(z)}{|z|^2}; \qquad (d)\ f(z) = \frac{Re^2(z) - Im^2(z)}{|z|^2}.$$

(13) Usar la definición, para hallar $f'(z)$ en el punto indicado.

$$(a)\ f(z) = 3z^2 + 4z\,i - 5 + i, \ \ z_0 = 2; \quad (b)\ f(z) = \frac{2z - i}{z + 2i}, \ \ z_0 = -i$$

$$(c)\ f(z) = 3z^{-2}, \ \ z_0 = 1 + i; \quad (d)\ f(z) = z + \frac{1}{z}, \ \ z_0 = e^{i\,\pi/4}.$$

2.8 Derivadas

Sea f una función de una variable compleja definida en alguna región de $\mathbb{C}$ que contiene un entorno de z_0. La *derivada* de f en z_0, escrita $f'(z_0)$, se define por

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}}, \tag{2.17}$$

siempre que dicho límite existe. Cuando existe la derivada de f en z_0 se dice que f es *derivable* en z_0.

La función f se dice que es *diferenciable* en z_0 cuando su derivada existe en z_0. Si hacemos el cambio $\Delta z = z - z_0$, la expresión anterior se puede reescribir en la forma

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}}. \tag{2.18}$$

En general, si ponemos $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ y hacemos $\dfrac{dw}{dz} = f'(z)$, resulta que

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}}. \tag{2.19}$$

La interpretación geométrica de la derivada en variable compleja no es tan directa como en variable real. La dejamos pendiente para el Capítulo 3.

2.8.1 Fórmulas de Derivación

La definición de la derivada de una función compleja, es idéntica en su forma a la de la derivada de una función real de una variable real y por lo mismo también las propiedades y las fórmulas de derivación; es decir,

(1) Si $f(z) = \alpha$, entonces $f'(z) = 0$.

(2) Si $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$.

(3) $[\alpha f(z)]' = \alpha f'(z)$.

(4) $[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z)$.

(5) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(6) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0$.

(7) La Regla de la Cadena. Si $f'(z_0)$ y $g'(f(z_0))$ existen, entonces la función compuesta $g \circ f$ tiene derivada en z_0, y es

$$\boxed{\Big(g \circ f\Big)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big)f'(z_0)}. \tag{2.20}$$

Si hacemos $w = f(z)$, $W = g(w)$ de modo que $W = g\big(f(z)\big)$, la regla de la cadena se convierte en

$$\boxed{\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}}. \tag{2.21}$$

2.9 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

En la presente sección, estudiaremos dos ecuaciones que deben satisfacer las derivadas parciales de las funciones componentes u y v de la función

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

en un punto $z_0 = x_0 + i\, y_0 = (x_0, y_0)$ para que la derivada de f en z_0 **exista**. Además obtendremos una ecuación para expresar $f'(z_0)$ en términos de dichas derivadas parciales.

Para tal fin, comencemos haciendo: $z_0 = x_0 + i\, y_0$, $\Delta z = \Delta x + i\, \Delta y$ y

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \\ &= \big[u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\, v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\big] - \big[u(x_0, y_0) + i\, v(x_0, y_0)\big] \\ &= \big[u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\big] + i\, \big[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\big]. \end{aligned}$$

Asumiendo que existe la derivada $f'(z_0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \Big[Re\Big(\frac{\Delta w}{\Delta z}\Big) + i\, Im\Big(\frac{\Delta w}{\Delta z}\Big)\Big] \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)} Re\Big(\frac{\Delta w}{\Delta z}\Big) + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)} Im\Big(\frac{\Delta w}{\Delta z}\Big). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Teniendo en cuenta que (2.22) es válida cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$ de cualquier manera. En particular si hacemos $\Delta y \equiv 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ahora por el camino $\Delta x \equiv 0$, resulta

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i\, u_y(x_0, y_0) \\ &= -i\big[u_y(x_0, y_0) + i\, v_y(x_0, y_0)\big]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.24) **no** sólo dan la derivada $f'(z_0)$ en términos de las parciales de u y v, sino que *proporcionan condiciones necesarias* para la existencia de dicha derivada. Es decir

$$u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0) = f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i\, u_y(x_0, y_0)$$

si y sólo si

$$\boxed{u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)} \quad \text{y} \quad \boxed{u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)}. \tag{2.25}$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Cauchy-Riemann* [2]. En el siguiente resultado, se resume lo anterior.

Teorema 13.

Sean $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ una función y $z_0 = x_0 + i\, y_0$. Si $f'(z_0)$ existe, entonces las derivadas parciales de u y v existen en z_0 y satisfacen en z_0 las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además $f'(z_0)$ viene dada por

$$\boxed{f'(z_0) = u_x(z_0) + i\, v_x(z_0) = v_y(z_0) - i\, u_y(z_0)}. \tag{2.26}$$

Observación 14.

Del Teorema anterior, se deduce que si las funciones componentes u y v **no** satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces $f'(z)$ **no existe**.

Ejemplo 15.

Si $z = x + i\, y$, se tiene que $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i\, 2xy$. Luego $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Por consiguiente $u_x = 2x = v_y$ y $u_y = -2y = -v_x$. Es decir, las componentes u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto

$$f'(z) = u_x(z) + i\, v_x(z) = 2x + i\, 2y = 2z.$$

[2]Llamadas así en su honor al matemático francés A. L. Cauchy (1789-1857) quien las descubrió y utilizo, y del matemático aleman G.F.B. Riemann (1826-1866) quien hizo de ellas un instrumento esencial de la teoría de funciones de una variable compleja.

Ejemplo 16.

Para $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$, $u_x = 2x \neq v_y = 0$ y $u_y = 2y \neq -v_x$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Así, $f'(z)$ no existe en ningún punto distinto del origen.

Ejemplo 17.

Si $\quad f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^{\,2}}{z}, & \text{si } z \neq 0; \\ 0, & \text{si } z = 0, \end{cases}$

resulta que

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

y

$$v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - 3x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Luego

$$u_x(0,0) = v_y(0,0) \qquad \text{y} \qquad u_y(0,0) = -v_x(0,0).$$

Es decir, las funciones componentes u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z_0 = 0 + i0$. Ahora, determinemos $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\overline{z}^2}{z^2} = \left(\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\overline{z}}{z} \right)^2 \\ &= \begin{cases} 1, & \text{por el camino } \quad y \equiv 0; \\ -1, & \text{por el camino } \quad y \equiv x. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego por la unicidad del límite concluimos que el límite $\left(\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\overline{z}}{z} \right)^2$ **no existe**, por consiguiente $f'(0)$ **no existe**. En otras palabras, f no es derivable en $z = 0$.

Observación 18.

Como las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condición necesaria para la existencia de la derivada de una función en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, se utilizan a menudo para detectar los puntos en los que f **no** tiene derivada.

Como vimos en el ejemplo 17, saber que una función $f(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ **no es suficiente** para asegurar que existe la derivada de $f(z)$ en él. Sin embargo, bajo ciertas condiciones de continuidad adicionales, se establece el siguiente resultado, de gran utilidad.

Teorema 19.

Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función definida en algún entorno de z_0. Si las derivadas parciales de primer orden de u y v respecto de x e y existen en dicho entorno, son continuas en z_0 y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0, entonces $f'(z_0)$ existe.

Ejemplo 20.

Dada la función $f(z) = ze^{2z}$, resulta que

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+i\,y) = (x+i\,y)e^{2x+2y\,i} \\ &= e^{2x}(x+i\,y)\Big[\cos(2y)+i\,\mathrm{sen}(2y)\Big] \\ &= e^{2x}\Big[x\,\cos(2y)-y\,\mathrm{sen}(2y)\Big]+i\,e^{2x}\Big[x\,\mathrm{sen}(2y)+y\,\cos(2y)\Big]. \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x,y) = x\,e^{2x}\,\cos(2y) - y\,e^{2x}\,\mathrm{sen}(2y) \\ Im(z) &= v(x,y) = x\,e^{2x}\,\mathrm{sen}(2y) + y\,e^{2x}\,\cos(2y). \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} u_x &= e^{2x}\,\cos(2y) + 2x\,e^{2x}\cos(2y) - 2y\,e^{2x}\,\mathrm{sen}(2y) \\ u_y &= -2x\,e^{2x}\,\mathrm{sen}(2y) - e^{2x}\mathrm{sen}(2y) - 2y\,e^{2x}\,\cos(2y) \\ v_x &= e^{2x}\mathrm{sen}(2y) + 2x\,e^{2x}\mathrm{sen}(2y) + 2y\,e^{2x}\cos(2y) \\ v_y &= 2x\,e^{2x}\cos(2y) + e^{2x}\,\cos(2y) - 2y\,e^{2x}\,\mathrm{sen}(2y) \end{aligned}$$

ya que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ y estas derivadas parciales son continuas en todas partes, las condiciones del teorema anterior se satisfacen en todo $\mathbb{C}$. Por tanto $f'(z)$ existe en todo $\mathbb{C}$ y viene dada por

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + i\,v_x \\ &= e^{2x}\Big[(1+2x)\cos(2y) - 2y\,\mathrm{sen}(2y) + i\,\big((1+2x)\mathrm{sen}(2y) + 2y\cos(2y)\big)\Big]. \end{aligned}$$

2.10 Funciones Analíticas

Se trata de funciones que son diferenciables en algún dominio, de modo que es posible hacer "cálculo en los complejos". Constituyen el tema fundamental del análisis complejo, y su introducción es el objetivo principal de esta sección.

Definición 21.

Una función f de una variable compleja es analítica[a] en un conjunto abierto si es derivable en todos los puntos de dicho conjunto.

[a]Los adjetivos *regular* y *holomorfa* son sinónimos de analítica.

Se dice que una función es *analítica* en un conjunto no abierto A si f es analítica en algún conjunto abierto que contiene a A. En particular, f es *analítica en un punto* $z_0 \in \mathbb{C}$ si es analítica en algún conjunto abierto que contiene a z_0.

Ya que las derivadas de la suma, del producto y del cociente de dos funciones existen siempre que ambas funciones tengan derivadas, resulta que si f y g son analíticas, entonces, $f+g, fg, f/g$ $(g \neq 0)$ y $g \circ f$ son también analíticas.

El siguiente teorema establece un criterio fundamental para determinar si una función es analítica.

Teorema 22.

Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Una condición necesaria y suficiente para que $f(z)$ sea analítica en un dominio $\mathcal{D}$ es que las derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y existan, sean continuas y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathcal{D}$.

Definición 23.

Una función f es entera si ella es analítica en todo el plano complejo.

El ejemplo típico de función entera son los polinomios, pues ellos son derivables en todo $\mathbb{C}$. Mientras que la función $f(z) = 1/z$, no es entera pues f no es analítica en $z = 0$.

Definición 24.

Se dice que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto singular o una singularidad de una función f si f no es analítica en z_0 pero si es analítica en algún punto de cualquier entorno de z_0.

El punto $z = 0$ es una singularidad de la función $f(z) = 1/z$.

2.11 Funciones Armónicas

Una de las razones principales de la gran importancia práctica del análisis complejo en las matemáticas aplicadas a la ingeniería resulta del hecho de que tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica satisfacen la ecuación diferencial más importante en física, la *ecuación de Laplace*, que aparece en la teoría de la gravitación, electrostática, dinámica de fluidos, conducción del calor, etc.

Definición 25.

Una función real F de dos variables reales x e y se dice que es armónica en un dominio del plano xy si en todos los puntos de ese dominio tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas y satisface además la ecuación de Laplace

$$\boxed{F_{xx} + F_{yy} = 0}.$$

El siguiente resultado, proporciona una fuente de funciones armónicas.

Teorema 26.

Si $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es una función analítica en un dominio $\mathcal{D}$, entonces las funciones componentes u y v son armónicas en $\mathcal{D}$.

Demostracion.

Ya que f es analítica en $\mathcal{D}$, las componentes u y v de f satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (Teorema 22) en todo punto de $\mathcal{D}$; es decir,

$$u_x = v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = -v_x.$$

Derivando estas ecuaciones respecto de x, se tiene

$$u_{xx} = v_{yx} \qquad \text{y} \qquad u_{yx} = -v_{xx}. \tag{2.27}$$

Asimismo, derivando esas ecuaciones respecto de y, obtenemos

$$u_{xy} = v_{yy} \qquad \text{y} \qquad u_{yy} = -v_{xy}. \tag{2.28}$$

La continuidad de las primeras parciales de u y v (Teorema 22) implica que las derivadas parciales mixtas son iguales; esto es

$$u_{yx} = u_{xy} \qquad \text{y} \qquad v_{yx} = v_{xy}.$$

Por consiguiente, de (2.27) y (2.28), se deduce que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{y} \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Por tanto, las partes real e imaginaria de una función analítica son funciones armónicas en $\mathcal{D}$. ✠

La parte real e imaginaria $u = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ y $v = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ de la función $f(z) = i/z^2$ son armónicas.

Si dos funciones dadas u y v son armónicas en un dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathcal{D}$, se dice que v es *armónica conjugada*[3] de u.

Claramente si $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es analítica en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$, entonces v es una armónica conjugada de u. Recíprocamente, si v es una armónica conjugada de u en $\mathcal{D}$, entonces la función $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es analítica en $\mathcal{D}$. Este hecho se resume en el siguiente

Teorema 27.

Una función $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es analítica en $\mathcal{D}$ si y sólo si v es armónica conjugada de u.

[3]Por supuesto, este uso de la palabra “conjugada” es diferente del empleado para definir el “conjugado” $\overline{z}$.

Observación 28.

Del Teorema 27, surge de manera natural la siguiente inquietud: *¿Si v es armónica conjugada de u, entonces u es conjugada armónica de v?*.

Consideremos la función $f(z) = z^2$. La parte real e imaginaria son las funciones $u(x,y) = x^2 - y^2$ y $v(x,y) = 2xy$. Como $f(z)$ es una función entera, ella es analítica en todo $\mathbb{C}$ y luego por el Teorema 27, v es armónica conjugada de u.

Ahora si consideramos la función $f(z) = 2xy + i\,(x^2 - y^2)$, resulta que $u(x,y) = 2xy$ y $v(x,y) = x^2 - y^2$. De donde se obtiene que

$$u_x(x,y) = 2y, \quad u_y(x,y) = 2x, \quad v_x(x,y) = 2x \quad \text{y} \quad v_y(x,y) = -2y.$$

Es decir las funciones u y v no satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{C}$ salvo en el $(0,0)$ y por lo tanto f no es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$ (Teorema 22) y por el Teorema 27 v no es armónica conjugada de u.

Ejemplo 29.

Usando la definición, encuentre la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$(a)\;\; f(z) = \frac{2z-i}{z+2i}, \quad z_o = -i; \qquad\qquad (b)\;\; f(z) = z^3, \quad z_o = 1+i.$$

<u>Solución</u>

Recuerde que

$$f'(z_o) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{z\longrightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \\ \acute{o} \\ \displaystyle\lim_{\Delta z\longrightarrow 0} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z}. \end{cases}$$

$$(a)\;\; f'(-i) \;=\; \lim_{z\longrightarrow -i} \frac{\frac{2z-i}{z+2i} - \frac{2(-i)-i}{-i+2i}}{z-(-i)} = \lim_{z\longrightarrow -i} \frac{\frac{2z-i}{z+2i} + 3}{z+i} = 5 \lim_{z\longrightarrow -i} \frac{1}{z+2i} = -5i.$$

$$
\begin{aligned}
(b)\ \ f'(1+i) &= \lim_{z\longrightarrow 1+i}\frac{z^3-(1+i)^3}{z-(1+i)} = \lim_{z\longrightarrow 1+i}\frac{z^3+2-2i}{z-(1+i)}\\
&= \lim_{z\longrightarrow 1+i}\frac{(z-(1+i))(z^2+(1+i)z+2i)}{z-(1+i)}\\
&= \lim_{z\longrightarrow 1+i}(z^2+(1+i)z+2i) = \big(1+i\big)^2+(1+i)(1+i)+2i\\
&= 6i.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 30.

Por medio de las reglas y las fórmulas de derivación, encuentre $f'(z)$.

$$(a)\ f(z) = \Big(1-4z^2\Big)^3; \qquad (b)\ f(z) = \frac{z-1}{2z+1},\ z \neq -1/2.$$

Solución

$(a)\ \ f'(z) = 3\Big(1-4z^2\Big)^2\Big(1-4z^2\Big)' = -24z\Big(1-4z^2\Big)^2$

$(b)\ \ f'(z) = \dfrac{2z+1-2z+2}{(2z+1)^2} = \dfrac{3}{(2z+1)^2},\ \ z \neq -1/2.$

Ejemplo 31.

Pruebe que $f'(z)$ **no** existe en ningún punto $z \in \mathbb{C}$ si

$$(a)\ \ f(z) = \overline{z}\,; \qquad\qquad (b)\ \ f(z) = Im(z)$$

Prueba.

En este tipo de problemas se debe usar la definición de la derivada y determinar que dicho límite no existe.

$$\begin{aligned}(a)\ \ f'(z) &= \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \overline{z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\end{aligned}$$

Ya que $z = x + i\,y$, entonces $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ y $\overline{\Delta z} = \Delta x - i\,\Delta y$. Como $\Delta z \longrightarrow 0 \implies \Delta x + i\,\Delta y \longrightarrow 0$. De donde se sigue que $\big(\Delta x, \Delta y\big) \longrightarrow (0,0)$. Por lo que

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Si $\Delta y \equiv 0$ entonces $f'(z) = \lim\limits_{\Delta x \longrightarrow 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Si $\Delta x \equiv 0$ entonces $f'(z) = \lim\limits_{\Delta y \longrightarrow 0} \dfrac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$.

Estos dos últimos límites nos dice que

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad \text{no existe.}$$

Por tanto la función $f(z) = \overline{z}$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(b)\ f'(z) &= \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{Im(z+\Delta z) - Im(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{(z+\Delta z) - \overline{z+\Delta z}}{2i} - \dfrac{z - \overline{z}}{2i}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\frac{\Delta z}{i} - \frac{z-\overline{z}}{2i}}{\Delta z} = \frac{1}{i} - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta z}\end{aligned}$$

Pero este último límite **no** existe, por consiguiente la función $f(z) = Im(z)$ no es derivable en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 32.

Determinar donde la función $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$ es analítica y donde no.

Solución

f es analítica si es derivable. Así $f'(z) = \dfrac{2}{(1-z)^2}$ no existe si $z = 1$. Por lo tanto, $f(z)$ es analítica en todo $\mathbb{C} - \{1\}$.

Los puntos en donde una función no es analítica se denominan *puntos singulares* de la función, por lo que $z = 1$ es un punto singular de $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$.

Ejemplo 33.

Verificar si la función $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ es analítica en la región

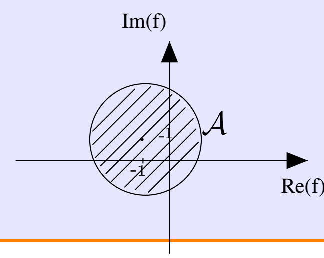
$$\mathcal{A} = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z + 1 - i| \leq 3 \Big\}$$

Solución

Una función es analítica en una región si lo es en todos sus puntos.

Ahora $f'(z) = \dfrac{2z(z^2+1) - 2z^3}{(z^2+1)^2} = \dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$ **no** existe si y sólo si $z = \pm i$; es decir $f(z)$ no es analítica en dichos puntos.

Por otro lado, $\mathcal{A}$ representa el borde y la parte interna de la circunferencia centrada en $(-1, 1)$ y radio 3. Es obvio que $z = \pm i \in \mathcal{A}$, por lo que concluimos que $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ no es analítica en $\mathcal{A}$.



Ejemplo 34.

Dada $f(z) = ze^{2z}$. Verificar si $Re(f)$ y $Im(f)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y luego deducir si f es analítica.

Solución

Sea $z = x + i\,y$. Luego

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+i\,y) = (x+i\,y)e^{2x+2y\,i} \\ &= e^{2x}(x+i\,y)\Big[\cos(2y) + i\,\text{sen}(2y)\Big] \\ &= e^{2x}\Big[x\,\cos(2y) - y\,\text{sen}(2y)\Big] + i\,e^{2x}\Big[x\,\text{sen}(2y) + y\,\cos(2y)\Big] \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x,y) = x\,e^{2x}\,\cos(2y) - y\,e^{2x}\,\text{sen}(2y) \\ Im(z) &= v(x,y) = x\,e^{2x}\,\text{sen}(2y) + y\,e^{2x}\,\cos(2y) \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u_x = e^{2x}\,\cos(2y) + 2x\,e^{2x}\cos(2y) - 2y\,e^{2x}\,\text{sen}(2y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= u_y = -2x\,e^{2x}\,\text{sen}(2y) - e^{2x}\text{sen}(2y) - 2y\,e^{2x}\,\cos(2y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= v_x = e^{2x}\text{sen}(2y) + 2x\,e^{2x}\text{sen}(2y) + 2y\,e^{2x}\cos(2y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= v_y = 2x\,e^{2x}\cos(2y) + e^{2x}\cos(2y) - 2y\,e^{2x}\,\text{sen}(2y) \end{aligned}$$

Por lo que

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x$$

Esto nos dice que las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, más aún como u_x, u_y, v_x y v_y son continuas en todo $\mathbb{C}$, concluimos que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Ejemplo 35.

Pruebe que la función $u(x,y) = 2x(1-y)$ es armónica, luego deduzca que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica.

Solución

La función u es armónica si $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ahora

$$\left.\begin{array}{lclclcl} u_x &=& 2-2y & \text{y} & u_{xx} &=& 0 \\ u_y &=& -2x & \text{y} & u_{yy} &=& 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Por lo que se concluye que la función $u(x,y)$ es armónica. Por otro lado $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica si y sólo si $v(x,y)$ es una armónica conjugada de $u(x,y)$. En otras palabras debemos hallar una armónica conjugada v de u. Aca aunque no esta dicho explicitamente, hay que tener presente que u y v deben satisfacer las ecuaciones de cauchy-Riemann.
A tal efecto, sea v una conjugada armónica de u tal que

$$u_x = v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = -v_x$$

Como $u_x = 2 - 2y$, resulta que

$$v_y = 2 - 2y \qquad \text{y luego} \quad v(x,y) = \int (2-2y)dy \;=\; 2y - y^2 + h(x)$$

Derivando respecto de x se tiene que $v_x = h'(x)$ y ya que $u_y = -v_x$, entonces $h'(x) = 2x$, por lo que $h(x) = x^2 + \alpha$.
Por lo tanto, la función $v(x,y) = x^2 + 2y - y^2 + \alpha$ es una armónica conjugada de $u(x,y)$.
La función analítica correspondiente es

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = \big(2x - 2xy\big) + i\,\big(x^2 + 2y - y^2 + \alpha\big).$$

Esta función se puede reescribir en términos de la variable z, para ello hay que agrupar los términos. En efecto

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+i\,y) = 2x - 2xy + i\,x^2 + i\,2y - i\,y^2 + i\,\alpha \\ &= 2(x+i\,y) + i\,x^2 + i^2 2xy + i^3 y^2 + i\,\alpha \\ &= 2(x+i\,y) + i\,(x+i\,y)^2 + i\,\alpha \\ &= 2z + i(z^2 + \alpha). \end{aligned}$$

Observación 36.

Un método mucho más práctico para obtener la función f en términos de la variable z, es el siguiente:

(a) Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$;

(b) Haga $y = 0$, para obtener $f(x) = u(x,0) + i\,v(x,0)$;

(c) Finalmente haga $x = z$, para lograr que la función quede expresada en términos de la variable z.

Volviendo al ejemplo anterior, tenemos que

$$f(x+i\,y) = (2x-2xy) + i(x^2+2y-y^2+\alpha),$$

luego, haciendo $y=0$, resulta que

$$f(x) = 2x + i(x^2+\alpha),$$

por último tomando $x=z$, se obtiene que $f(z) = 2z + i(z^2+\alpha)$.

Ejemplo 37.

Pruebe que la función $u(x,y) = xe^{-x}\text{sen}(y) - ye^{-x}\cos(y)$ es armónica, luego deduzca que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica.

<u>Solución</u>

$$\begin{aligned}
u_x &= e^{-x}\text{sen}(y) - xe^{-x}\text{sen}(y) + ye^{-x}\cos(y)\\
u_{xx} &= -2e^{-x}\text{sen}(y) + xe^{-x}\text{sen}(y) - ye^{-x}\cos(y)\\
u_y &= x\,e^{-x}\cos(y) - e^{-x}\cos(y) + ye^{-x}\text{sen}(y)\\
u_{yy} &= 2e^{-x}\text{sen}(y) - x\,e^{-x}\text{sen}(y) + ye^{-x}\cos(y)
\end{aligned}$$

De donde $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y así la función u es armónica.
Sea v una armónica conjugada de u tal que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$.
Ya que

$$u_x = e^{-x}\text{sen}(y) - xe^{-x}\text{sen}(y) + ye^{-x}\cos(y)$$

se sigue que

$$v_y = e^{-x}\text{sen}(y) - xe^{-x}\text{sen}(y) + ye^{-x}\cos(y)$$

de donde

$$v(x,y) = ye^{-x}\text{sen}(y) + xe^{-x}\cos(y) + h(x)$$

luego

$$v_x = -ye^{-x}\text{sen}(y) + e^{-x}\cos(y) - x\,e^{-x}\cos(y) + h'(x) \quad \text{y} \quad v_x = -u_y$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
ye^{-x}\text{sen}(y) + e^{-x}\cos(y) - x\,e^{-x}\cos(y) + h'(x) = -x\,e^{-x}\cos(y)\\
+e^{-x}\cos(y) - ye^{-x}\text{sen}(y)
\end{aligned}$$

y así $h'(x) = 0$, es decir $h(x) = \alpha$.
Por consiguiente, la función

$$v(x, y) = ye^{-x}\text{sen}(y) + xe^{-x}\cos(y) + \alpha$$

es una armónica conjugada de $u(x, y)$. La función analítica correspondiente es

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i\, v(x, y) = \Big(xe^{-x}\text{sen}(y) - ye^{-x}\cos(y)\Big) \\ &\quad + i\Big(ye^{-x}\text{sen}(y) + xe^{-x}\cos(y) + \alpha\Big) = i\big(ze^{-z} + \alpha\big). \end{aligned}$$

2.12 Problemas Propuestos

(13) Usar la definición, para hallar $f'(z)$ en el punto indicado.

$$(a)\ f(z) = 3z^2 + 4z\, i - 5 + i,\ \ z_0 = 2; \quad (b)\ f(z) = \frac{2z - i}{z + 2i},\ \ z_0 = -i$$

$$(c)\ f(z) = 3z^{-2},\ \ z_0 = 1 + i; \quad (d)\ f(z) = z + \frac{1}{z},\ \ z_0 = e^{i\,\pi/4}.$$

(14) Pruebe que $f'(z)$ no existe en ningún punto si

$$(a)\ f(z) = |z|^2; \ \ (b)\ f(z) = Re(z); \ \ (c)\ f(z) = ze^{\overline{z}}; \ \ (d)\ f(z) = z|z|;$$

$$(e)\ f(z) = z^2\overline{z}.$$

(15) Demuestre que $f'(z)$ y su derivada $f''(z)$ existen en todas partes y calcule $f''(z)$, para

$$(a)\ f(z) = i\, z + 2; \quad (b)\ f(z) = e^{-z};$$

$$(c)\ f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\,\text{sen}(x)\text{senh}(y).$$

(16) Verifique que la parte real y la imaginaria de las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y deduzca que cada una de ellas es analítica

$$(a)\ f(z) = z^2 + 5z\, i + 3 - i; \quad (b)\ f(z) = ze^{-z}; \quad (c)\ f(z) = \text{sen}(2z)$$

$$(d)\ f(z) = e^{z^2}; \quad (e)\ f(z) = \text{senh}(4z).$$

(17) Verificar si las siguientes funciones son analíticas o no.

$$(a)\ f(z) = xy + i\,y; \qquad (b)\ g(z) = e^{y+i\,x}.$$

(18) Determinar las singularidades de la función y explique por qué la función es analítica en todos los demás puntos del plano.

$$(a)\ f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}; \quad (b)\ g(z) = \frac{z^3+i}{z^2-3z+2}; \quad (c)\ h(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$$

(19) Determine cual de las siguientes funciones son armónicas. Para cada función armónica encuentre una conjugada armónica y finalmente exprese la función $f = u + i\,v$ en términos de z

$$(a)\ u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2; \;\; (b)\ u(x,y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3;$$

$$(c)\ u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}; \;\; (d)\ u(x,y) = xe^x\cos(y) - ye^x\text{sen}(y);$$

$$(e)\ u(x,y) = e^{-2xy}\text{sen}(x^2-y^2); \;\; (f)\ u(x,y) = \text{senh}(x)\text{sen}(y).$$

(20) Determine las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar si $z = re^{i\,\theta}$ y $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$.