

## 15.2 Integrales de línea

- Comprender y utilizar el concepto de curva suave a trozos.
- Expresar y evaluar una integral de línea.
- Expresar y evaluar una integral de línea de un campo vectorial.
- Expresar y calcular una integral de línea en forma diferencial.

### Curvas suaves a trozos (o por partes)

Una propiedad clásica de los campos gravitatorios (o gravitacionales) es que, sujeto a ciertas restricciones físicas, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria que siga el objeto. Una de las restricciones es que la **trayectoria** debe ser una curva suave a trozos (o por partes). Recuerdese que una curva plana  $C$  dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}$$

son continuas en  $[a, b]$  y no simultáneamente 0 en  $(a, b)$ . Similarmente, una curva  $C$  en el espacio dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt}$$

son continuas en  $[a, b]$  y no simultáneamente 0 en  $(a, b)$ . Una curva  $C$  es **suave a trozos** (o por partes) si el intervalo  $[a, b]$  puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales  $C$  es suave.

### EJEMPLO 1 Hallar una parametrización suave a trozos

Hallar una parametrización suave a trozos de la gráfica  $C$  que se muestra en la figura 15.7.

**Solución** Como  $C$  consta de tres segmentos de recta  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , se puede construir una parametrización suave de cada segmento y unirlos haciendo que el último valor de  $t$  en  $C_i$  coincida con el primer valor de  $t$  en  $C_{i+1}$ , como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} C_1: & \quad x(t) = 0, & y(t) = 2t, & z(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ C_2: & \quad x(t) = t - 1, & y(t) = 2, & z(t) = 0, & 1 \leq t \leq 2 \\ C_3: & \quad x(t) = 1, & y(t) = 2, & z(t) = t - 2, & 2 \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

Por tanto,  $C$  está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} 2t\mathbf{j}, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, & 1 \leq t \leq 2 \\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Como  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son suaves, se sigue que  $C$  es suave a trozos.

Recuérdese que la parametrización de una curva induce una **orientación** de la curva. Así, en el ejemplo 1, la curva está orientada de manera que la dirección positiva va desde  $(0, 0, 0)$ , siguiendo la curva, hasta  $(1, 2, 1)$ . Trátese de obtener una parametrización que induzca la orientación opuesta.

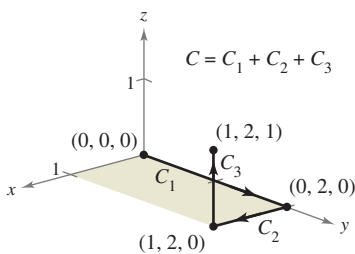


Figura 15.7

## Integrales de línea

Hasta ahora, en el texto, se han estudiado varios tipos de integrales. En una integral simple

$$\int_a^b f(x) dx$$

Se integra sobre el intervalo  $[a, b]$ .

se integró sobre el intervalo  $[a, b]$ . De manera similar, en las integrales dobles

$$\iint_R f(x, y) dA$$

Se integra sobre la región  $R$ .

se integró sobre la región  $R$  del plano. En esta sección se estudia un nuevo tipo de integral llamada **integral de línea**

$$\int_C f(x, y) ds$$

Se integra sobre una curva  $C$ .

en la que se integra sobre una curva  $C$  suave a trozos. (Esta terminología es un poco desafortunada; este tipo de integral quedaría mejor descrita como “integral de curva”.)

Para introducir el concepto de una integral de línea, considérese la masa de un cable de longitud finita, dado por una curva  $C$  en el espacio. La densidad (masa por unidad de longitud) del cable en el punto  $(x, y, z)$  está dada por  $f(x, y, z)$ . Divídase la curva  $C$  mediante los puntos

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

produciendo  $n$  subarcos, como se muestra en la figura 15.8. La longitud del  $i$ -ésimo subarco está dada por  $\Delta s_i$ . A continuación, se elige un punto  $(x_i, y_i, z_i)$  en cada subarco. Si la longitud de cada subarco es pequeña, la masa total del cable puede ser aproximada por la suma

$$\text{Masa de cable} \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$

Si  $\|\Delta\|$  denota la longitud del subarco más largo y se hace que  $\|\Delta\|$  se aproxime a 0, parece razonable que el límite de esta suma se aproxime a la masa del cable. Esto lleva a la definición siguiente.

### DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA

Si  $f$  está definida en una región que contiene una curva suave  $C$  de longitud finita, entonces la **integral de línea de  $f$  a lo largo de  $C$**  está dada por

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

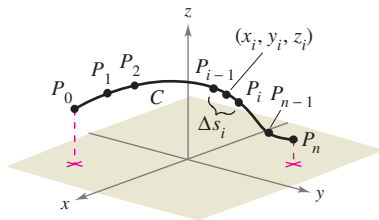
Plano.

o

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

Espacio.

siempre que este límite exista.



Partición de la curva  $C$   
**Figura 15.8**

Como sucede con las integrales vistas en el capítulo 14, para evaluar una integral de línea es útil convertirla en una integral definida. Puede demostrarse que si  $f$  es *continua*, el límite dado arriba existe y es el mismo para todas las parametrizaciones suaves de  $C$ .

Para evaluar una integral de línea sobre una curva plana  $C$  dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , se utiliza el hecho de que

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Para una curva en el espacio hay una fórmula similar, como se indica en el teorema 15.4.

#### TEOREMA 15.4 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA COMO INTEGRAL DEFINIDA

Sea  $f$  continua en una región que contiene una curva suave  $C$ . Si  $C$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , donde  $a \leq t \leq b$ , entonces

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Si  $C$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , donde  $a \leq t \leq b$ , entonces

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Obsérvese que si  $f(x, y, z) = 1$ , la integral de línea proporciona la longitud de arco de la curva  $C$ , como se definió en la sección 12.5. Es decir,

$$\int_C 1 ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \text{longitud de arco de la curva } C.$$

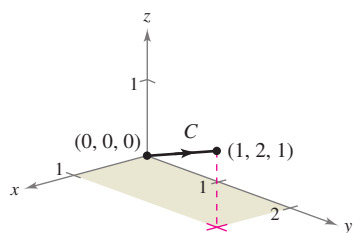


Figura 15.9

#### EJEMPLO 2 Evaluación de una integral de línea

Evaluar

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds$$

donde  $C$  es el segmento de recta mostrado en la figura 15.9.

**Solución** Para empezar se expresa la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces,  $x'(t) = 1$ ,  $y'(t) = 2$  y  $z'(t) = 1$ , lo cual implica que

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Por tanto, la integral de línea toma la forma siguiente.

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 - y + 3z) ds &= \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t) \sqrt{6} dt \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (t^2 + t) dt \\ &= \sqrt{6} \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

**NOTA** En el ejemplo 2, el valor de la integral de línea no depende de la parametrización del segmento de recta  $C$  (con cualquier parametrización suave se obtendrá el mismo valor). Para convencerse de esto, probar con alguna otra parametrización, como por ejemplo  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 2 + 4t$ ,  $z = 1 + 2t$ ,  $-\frac{1}{2} \leq t \leq 0$ , o  $x = -t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = -t$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ . ■

Supóngase que  $C$  es una trayectoria compuesta de las curvas suaves  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Si  $f$  es continua en  $C$ , se puede mostrar que

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds.$$

Esta propiedad se utiliza en el ejemplo 3.

### EJEMPLO 3 Evaluación de una integral de línea sobre una trayectoria

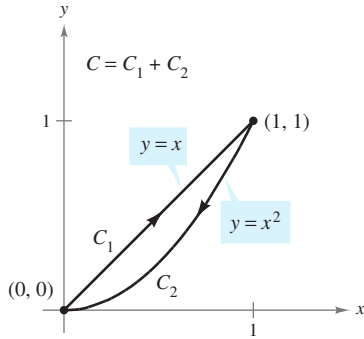


Figura 15.10

Evaluar  $\int_C x ds$ , donde  $C$  es la curva suave a trozos mostrada en la figura 15.10.

**Solución** Para empezar, se integra, en sentido ascendente sobre la recta  $y = x$ , usando la parametrización siguiente.

$$C_1: x = t, y = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

En esta curva,  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ , lo que implica que  $x'(t) = 1$  y  $y'(t) = 1$ . Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{2}$$

y se tiene

$$\int_{C_1} x ds = \int_0^1 t\sqrt{2} dt = \left. \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A continuación, se integra, en sentido descendente, sobre la parábola  $y = x^2$ , usando la parametrización

$$C_2: x = 1 - t, \quad y = (1 - t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

En esta curva,  $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$ , lo cual implica que  $x'(t) = -1$  y  $y'(t) = -2(1 - t)$ . Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4(1 - t)^2}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{C_2} x ds &= \int_0^1 (1 - t)\sqrt{1 + 4(1 - t)^2} dt \\ &= -\frac{1}{8} \left[ \frac{2}{3} [1 + 4(1 - t)^2]^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C x ds = \int_{C_1} x ds + \int_{C_2} x ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) \approx 1.56.$$

En parametrizaciones dadas por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , es útil recordar la forma de  $ds$  como

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Esto se usa en el ejemplo 4.

**EJEMPLO 4** Evaluar una integral de línea

Evaluar  $\int_C (x + 2) ds$ , donde  $C$  es la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

**Solución** Puesto que  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t^{1/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ , y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4t + t^2}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \int_C (x + 2) ds &= \int_0^2 (t + 2) \sqrt{1 + 4t + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 2(t + 2)(1 + 4t + t^2)^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{3} \left[ (1 + 4t + t^2)^{3/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3} (13\sqrt{13} - 1) \\ &\approx 15.29. \end{aligned}$$

El ejemplo siguiente muestra cómo usar una integral de línea para hallar la masa de un resorte (o muelle) cuya densidad varía. En la figura 15.11 obsérvese cómo la densidad de este resorte aumenta a medida que la espiral del resorte asciende por el eje  $z$ .

**EJEMPLO 5** Hallar la masa de un resorte (o muelle)

Hallar la masa de un resorte que tiene la forma de una hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}), \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

donde la densidad del resorte es  $\rho(x, y, z) = 1 + z$ , como se muestra en la figura 15.11.

**Solución** Como

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = 1$$

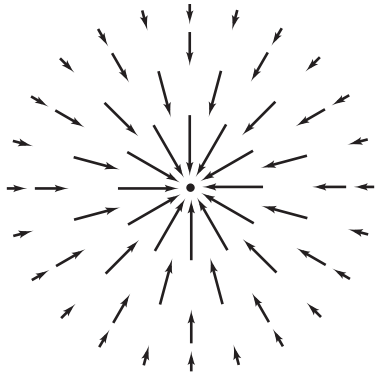
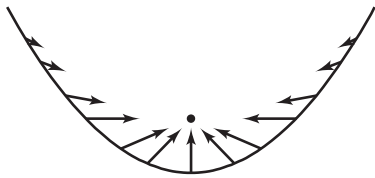
se sigue que la masa del resorte es

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_C (1 + z) ds = \int_0^{6\pi} \left( 1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right) dt \\ &= \left[ t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \right]_0^{6\pi} \\ &= 6\pi \left( 1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \right) \\ &\approx 144.47. \end{aligned}$$

La masa del resorte es aproximadamente 144.47.



Figura 15.11

Campo de fuerzas cuadrático inverso  $F$ Vectores a lo largo de una trayectoria parabólica en el campo de fuerzas  $F$   
**Figura 15.12**

## Integrales de línea de campos vectoriales

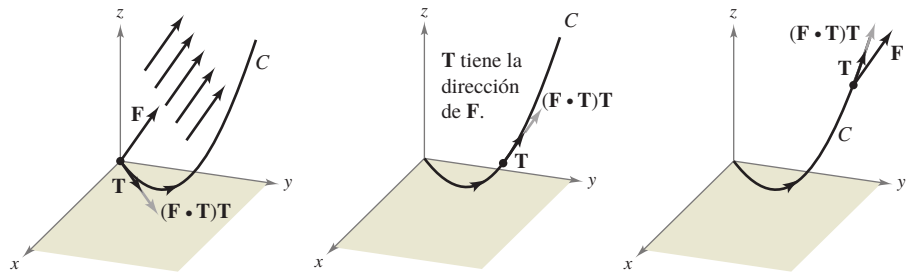
Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea es la de hallar el **trabajo** realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas. Por ejemplo, la figura 15.12 muestra un campo de fuerzas cuadrático inverso similar al campo gravitatorio del Sol. Obsérvese que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria circular en torno al centro es constante, mientras que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria parabólica varía de un punto a otro.

Para ver cómo puede utilizarse una integral de línea para hallar el trabajo realizado en un campo de fuerzas  $F$ , considérese un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria  $C$  en el campo, como se muestra en la figura 15.13. Para determinar el trabajo realizado por la fuerza, sólo se necesita considerar aquella parte de la fuerza que actúa en la dirección en que se mueve el objeto (o en la dirección contraria). Esto significa que en cada punto de  $C$ , se puede considerar la proyección  $F \cdot T$  del vector fuerza  $F$  sobre el vector unitario tangente  $T$ . En un subarco pequeño de longitud  $\Delta s_i$ , el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W_i &= (\text{fuerza})(\text{distancia}) \\ &\approx [F(x_i, y_i, z_i) \cdot T(x_i, y_i, z_i)] \Delta s_i\end{aligned}$$

donde  $(x_i, y_i, z_i)$  es un punto en el subarco  $i$ -ésimo. Por consiguiente, el trabajo total realizado está dado por la integral siguiente.

$$W = \int_C F(x, y, z) \cdot T(x, y, z) ds$$



En cada punto en  $C$ , la fuerza en la dirección del movimiento es  $(F \cdot T)T$

**Figura 15.13**

Esta integral de línea aparece en otros contextos y es la base de la definición siguiente de **integral de línea de un campo vectorial**. En la definición, obsérvese que

$$\begin{aligned}F \cdot T ds &= F \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= F \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= F \cdot d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

### DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea  $F$  un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave  $C$  dada por  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . La **integral de línea** de  $F$  sobre  $C$  está dada por

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \int_C F \cdot T ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

**EJEMPLO 6** Trabajo realizado por una fuerza

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k} \quad \text{Campo de fuerzas } \mathbf{F}.$$

sobre una partícula que se mueve a lo largo de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad \text{Curva } C \text{ en el espacio.}$$

desde el punto  $(1, 0, 0)$  hasta el punto  $(-1, 0, 3\pi)$ , como se muestra en la figura 15.14.

**Solución** Como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \end{aligned}$$

se sigue que  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$  y  $z(t) = t$ . Por tanto, el campo de fuerzas puede expresarse como

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Para hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas al moverse la partícula a lo largo de la curva  $C$ , se utiliza el hecho de que

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y se escribe lo siguiente.

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left( -\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k} \right) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left( \frac{1}{2}\sin t \cos t - \frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{1}{4} \right) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \frac{1}{4} dt \\ &= \frac{1}{4}t \Big|_0^{3\pi} \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

**NOTA** En el ejemplo 6, nótese que las componentes  $x$  y  $y$  del campo de fuerzas acaban no contribuyendo en nada al trabajo total. Esto se debe a que *en este ejemplo particular* la componente  $z$  del campo de fuerzas es la única parte de la fuerza que actúa en la misma dirección (o en dirección opuesta) en la que se mueve la partícula (ver la figura 15.15). ■

**TECNOLOGÍA** La gráfica, generada por computadora, del campo de fuerzas del ejemplo 6 mostrado en la figura 15.15 indica que todo vector en los puntos del campo de fuerzas apunta hacia el eje  $z$ .

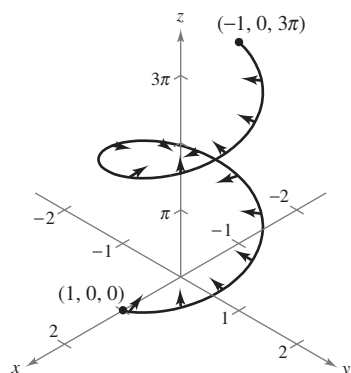
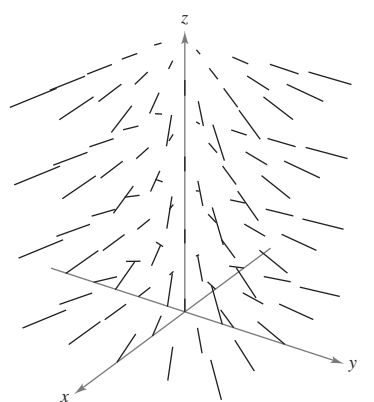


Figura 15.14



Generado con Mathematica

Figura 15.15

En integrales de línea de funciones vectoriales, la orientación de la curva  $C$  es importante. Si la orientación de la curva se invierte, el vector tangente unitario  $\mathbf{T}(t)$  cambia a  $-\mathbf{T}(t)$ , y se obtiene

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

### EJEMPLO 7 Orientación y parametrización de una curva

$$\begin{aligned} C_1: \mathbf{r}_1(t) &= (4-t)\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j} \\ C_2: \mathbf{r}_2(t) &= t\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j} \end{aligned}$$

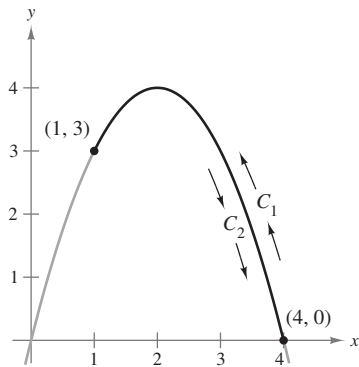


Figura 15.16

**NOTA** Aunque en el ejemplo 7 el valor de la integral de línea depende de la orientación de  $C$ , no depende de la parametrización de  $C$ . Para ver esto, sea  $C_3$  la curva representada por

$$\mathbf{r}_3 = (t+2)\mathbf{i} + (4-t^2)\mathbf{j}$$

donde  $-1 \leq t \leq 2$ . La gráfica de esta curva es el mismo segmento parabólico mostrado en la figura 15.16. ¿Coincide el valor de la integral de línea sobre  $C_3$  con el valor sobre  $C_1$  o  $C_2$ ? ¿Por qué sí o por qué no? ■

Sea  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$  y evaluar la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  a lo largo de cada una de las curvas parabólicas mostradas en la figura 15.16.

a)  $C_1: \mathbf{r}_1(t) = (4-t)\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$

b)  $C_2: \mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + (4t-t^2)\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 4$

#### Solución

a) Como  $\mathbf{r}_1'(t) = -\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}$  y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t-t^2)\mathbf{i} + (4-t)^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^3 [(4t-t^2)\mathbf{i} + (4-t)^2\mathbf{j}] \cdot [-\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}] dt \\ &= \int_0^3 (-4t + t^2 + 64 - 64t + 20t^2 - 2t^3) dt \\ &= \int_0^3 (-2t^3 + 21t^2 - 68t + 64) dt \\ &= \left[ -\frac{t^4}{2} + 7t^3 - 34t^2 + 64t \right]_0^3 \\ &= \frac{69}{2}. \end{aligned}$$

b) Como  $\mathbf{r}_2'(t) = \mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}$  y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t-t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^4 [(4t-t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}] \cdot [\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}] dt \\ &= \int_1^4 (4t - t^2 + 4t^2 - 2t^3) dt \\ &= \int_1^4 (-2t^3 + 3t^2 + 4t) dt \\ &= \left[ -\frac{t^4}{2} + t^3 + 2t^2 \right]_1^4 \\ &= -\frac{69}{2}. \end{aligned}$$

El resultado del inciso b) es el negativo del del inciso a) porque  $C_1$  y  $C_2$  representan orientaciones opuestas del mismo segmento parabólico.



## Integrales de línea en forma diferencial

Otra forma normalmente utilizada de las integrales de línea se deduce de la notación de campo vectorial usada en la sección anterior. Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial de la forma  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ , y  $C$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , entonces  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  se escribe a menudo como  $M dx + N dy$ .

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_a^b \left( M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_C (M dx + N dy)\end{aligned}$$

Esta **forma diferencial** puede extenderse a tres variables. Los paréntesis se omiten a menudo, y se escribe:

$$\int_C M dx + N dy \quad \text{y} \quad \int_C M dx + N dy + P dz$$

Obsérvese cómo se usa esta notación diferencial en el ejemplo 8.

### EJEMPLO 8 Evaluación de una integral de línea en forma diferencial

Sea  $C$  el círculo de radio 3 dado por

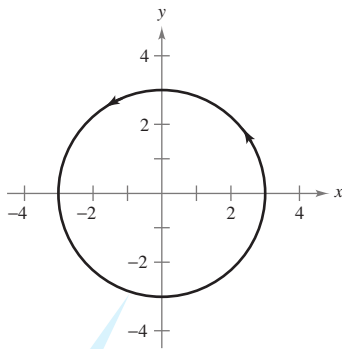
$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

como se muestra en la figura 15.17. Evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy.$$

**Solución** Como  $x = 3 \cos t$  y  $y = 3 \sin t$ , se tiene  $dx = -3 \sin t dt$  y  $dy = 3 \cos t dt$ . Por tanto, la integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_C M dx + N dy &= \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(27 \sin^3 t)(-3 \sin t) + (27 \cos^3 t + 81 \cos t \sin^2 t)(3 \cos t)] dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t - \sin^4 t + 3 \cos^2 t \sin^2 t) dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} \left( \cos^2 t - \sin^2 t + \frac{3}{4} \sin^2 2t \right) dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} \left[ \cos 2t + \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \cos 4t}{2} \right) \right] dt \\ &= 81 \left[ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{3}{8} t - \frac{3 \sin 4t}{32} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{243\pi}{4}.\end{aligned}$$



$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$$

Figura 15.17

**NOTA** La orientación de  $C$  afecta el valor de la forma diferencial de una integral de línea. Específicamente, si  $-C$  tiene orientación opuesta a  $C$ , entonces

$$\begin{aligned}\int_{-C} M dx + N dy &= \\ &= - \int_C M dx + N dy.\end{aligned}$$

Por tanto, de las tres formas de la integral de línea presentadas en esta sección, la orientación de  $C$  no afecta a la forma  $\int_C f(x, y) ds$ , pero sí afecta a la forma vectorial y la forma diferencial. ■

En curvas representadas por  $y = g(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , se puede hacer  $x = t$  y obtener la forma paramétrica

$$x = t \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Como en esta forma es  $dx = dt$ , se tiene la opción de evaluar la integral de línea en la variable  $x$  o en la variable  $t$ . Esto se muestra en el ejemplo 9.

### EJEMPLO 9 Evaluación de una integral de línea en forma diferencial

Evaluar

$$\int_C y \, dx + x^2 \, dy$$

donde  $C$  es el arco parabólico dado por  $y = 4x - x^2$  desde  $(4, 0)$  a  $(1, 3)$ , como se muestra en la figura 15.18.

**Solución** En lugar de pasar al parámetro  $t$ , se puede simplemente conservar la variable  $x$  y escribir

$$y = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = (4 - 2x) \, dx.$$

Entonces, en la dirección de  $(4, 0)$  a  $(1, 3)$ , la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_C y \, dx + x^2 \, dy &= \int_4^1 [(4x - x^2) \, dx + x^2(4 - 2x) \, dx] \\ &= \int_4^1 (4x + 3x^2 - 2x^3) \, dx \\ &= \left[ 2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} \right]_4^1 = \frac{69}{2}. \end{aligned}$$

Ver el ejemplo 7.

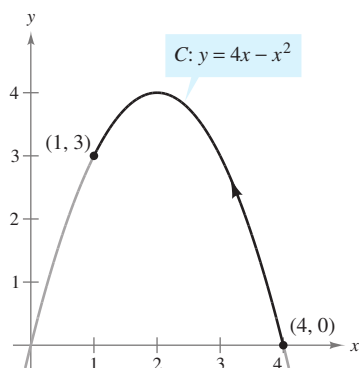


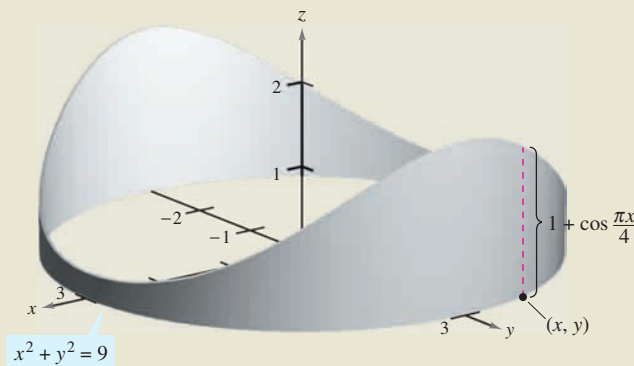
Figura 15.18

### EXPLORACIÓN

**Hallar el área de una superficie lateral** La figura muestra un pedazo de hojalata cortado de un cilindro circular. La base del cilindro circular se representa por  $x^2 + y^2 = 9$ . Para todo punto  $(x, y)$  de la base, la altura del objeto está dada por

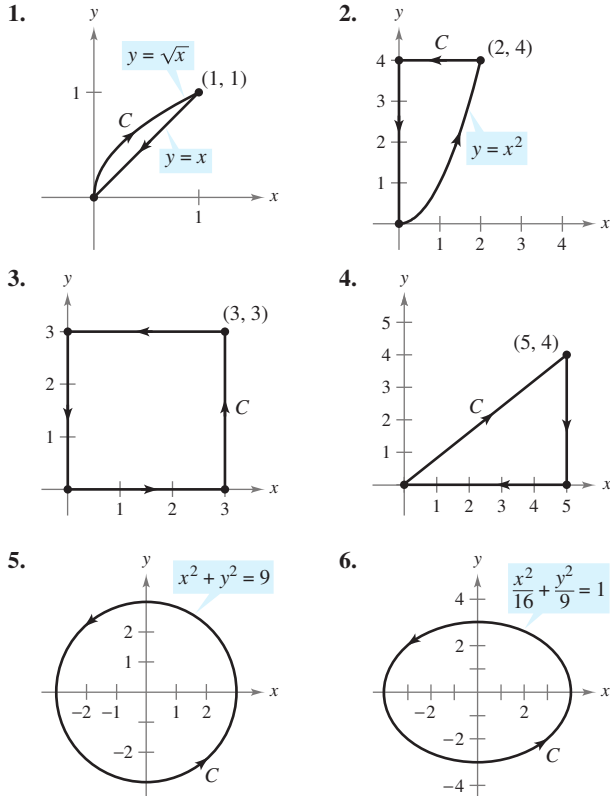
$$f(x, y) = 1 + \cos \frac{\pi x}{4}.$$

Explicar cómo utilizar una integral de línea para hallar el área de la superficie del pedazo de hojalata.



## 15.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria  $C$ . (Nótese que existe más de una respuesta correcta.)



En los ejercicios 7 a 10, evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada.

7.  $\int_C xy \, ds$   
 $C: \mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$   
 $0 \leq t \leq 1$
8.  $\int_C 3(x - y) \, ds$   
 $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$   
 $0 \leq t \leq 2$
9.  $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) \, ds$   
 $C: \mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$   
 $0 \leq t \leq \pi/2$
10.  $\int_C 2xyz \, ds$   
 $C: \mathbf{r}(t) = 12t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 84t\mathbf{k}$   
 $0 \leq t \leq 1$

En los ejercicios 11 a 14, a) hallar una parametrización de la trayectoria  $C$ , y b) evaluar

$$\int_C (x^2 + y^2) \, ds$$

a lo largo de  $C$ .

11.  $C$ : segmento de recta de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$
12.  $C$ : segmento de recta de  $(0, 0)$  a  $(2, 4)$
13.  $C$ : círculo  $x^2 + y^2 = 1$  recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$

14.  $C$ : círculo  $x^2 + y^2 = 4$  recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde  $(2, 0)$  a  $(0, 2)$

En los ejercicios 15 a 18, a) hallar una parametrización de la trayectoria  $C$ , y b) evaluar

$$\int_C (x + 4\sqrt{y}) \, ds$$

a lo largo de  $C$ .

15.  $C$ : eje  $x$  de  $x = 0$  a  $x = 1$
16.  $C$ : eje  $y$  de  $y = 1$  a  $y = 9$
17.  $C$ : triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ , recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj
18.  $C$ : cuadrado cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(0, 2)$ , recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

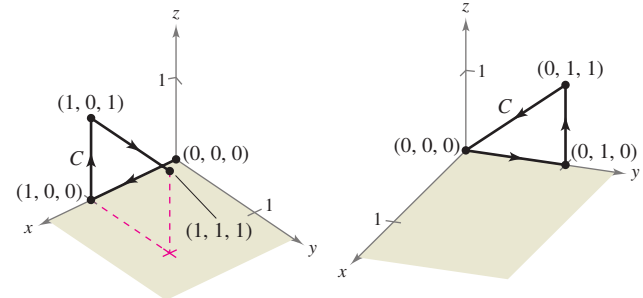
En los ejercicios 19 y 20, a) encontrar una parametrización continua por secciones de la trayectoria  $C$  que se muestra en la figura y b) evaluar

$$\int_C (2x + y^2 - z) \, ds$$

a lo largo de  $C$ .

19.

20.



**Masa** En los ejercicios 21 y 22, hallar la masa total de dos vueltas completas de un resorte de densidad  $\rho$  y que tiene forma de hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

$$21. \rho(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$22. \rho(x, y, z) = z$$

**Masa** En los ejercicios 23 a 26, hallar la masa total del cable de densidad  $\rho$ .

$$23. \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, \quad \rho(x, y) = x + y, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$24. \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad \rho(x, y) = \frac{3}{4}y, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$25. \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \rho(x, y, z) = kz \quad (k > 0), \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$26. \mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad \rho(x, y, z) = k + z \quad (k > 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

En los ejercicios 27 a 32, evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde  $C$  está representada por  $\mathbf{r}(t)$ .

27.  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

28.  $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

29.  $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

30.  $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{j}, \quad -2 \leq t \leq 2$

31.  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

32.  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

**CAS** En los ejercicios 33 y 34, utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde  $C$  está representada por  $\mathbf{r}(t)$ .

33.  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + 6yz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 3$

34.  $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$

**Trabajo** En los ejercicios 35 a 40, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\mathbf{F}$  sobre una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria dada.

35.  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

$C: x = t, y = t^3$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(2, 8)$

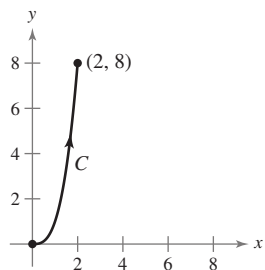


Figura para 35

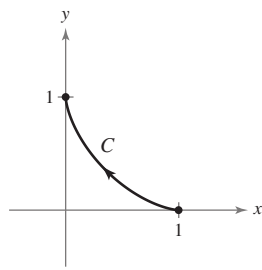


Figura para 36

36.  $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$

$C: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$

37.  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$C$ : triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ , recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj. (Sugerencia: Ver ejercicio 17a.)

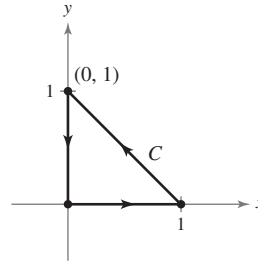


Figura para 37

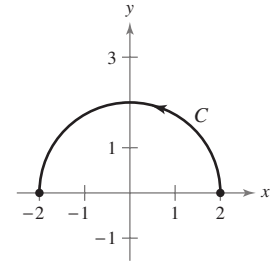


Figura para 38

38.  $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

$C$ : contorno del semicírculo  $y = \sqrt{4 - x^2}$  desde  $(2, 0)$  hasta  $(-2, 0)$  recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

39.  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

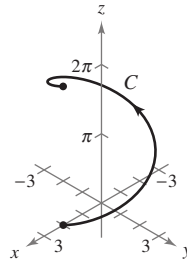


Figura para 39

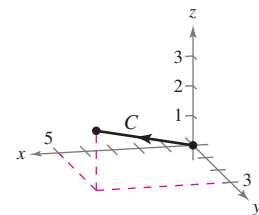


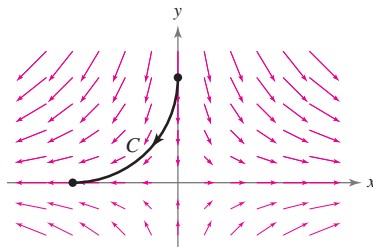
Figura para 40

40.  $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

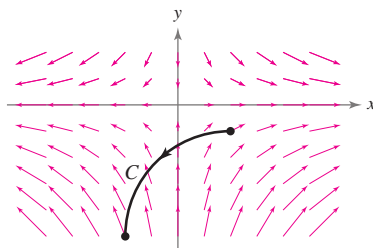
$C$ : recta de  $(0, 0, 0)$  a  $(5, 3, 2)$

En los ejercicios 41 a 44, determinar si el trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria  $C$  es positivo, negativo o cero. Explicar.

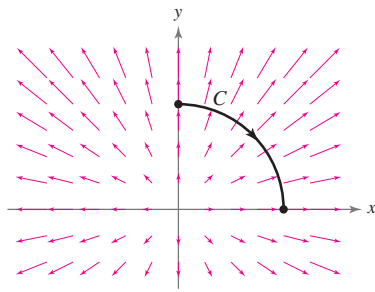
41.



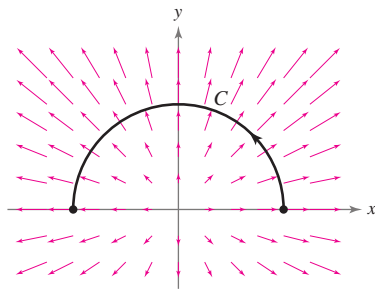
42.



43.



44.



En los ejercicios 45 y 46, para cada curva hallar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Analizar la orientación de la curva y su efecto sobre el valor de la integral.

45.  $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = 2t\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$ ,  $1 \leq t \leq 3$

b)  $\mathbf{r}_2(t) = 2(3-t)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2$

46.  $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy^{3/2}\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = (t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2$

b)  $\mathbf{r}_2(t) = (1+2\cos t)\mathbf{i} + (4\cos^2 t)\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$

En los ejercicios 47 a 50, demostrar la propiedad

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

independientemente de cuáles sean los puntos inicial y final de  $C$ , si el vector tangente  $\mathbf{r}'(t)$  es ortogonal al campo de fuerzas  $\mathbf{F}$ .

47.  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

48.  $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}$

49.  $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - 2x^2)\mathbf{i} + \left(x - \frac{y}{2}\right)\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

50.  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = 3\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j}$

En los ejercicios 51 a 54, evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria  $C$  dada por  $x = 2t$ ,  $y = 10t$  donde  $0 \leq t \leq 1$ .

51.  $\int_C (x + 3y^2) dy$

52.  $\int_C (x + 3y^2) dx$

53.  $\int_C xy dx + y dy$

54.  $\int_C (3y - x) dx + y^2 dy$

En los ejercicios 55 a 62, evaluar la integral

$$\int_C (2x - y) dx + (x + 3y) dy$$

a lo largo de la trayectoria  $C$ .

55.  $C$ : eje  $x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 5$

56.  $C$ : eje  $y$  desde  $y = 0$  hasta  $y = 2$

57.  $C$ : los segmentos de recta de  $(0, 0)$  a  $(3, 0)$  y de  $(3, 0)$  a  $(3, 3)$

58.  $C$ : los segmentos de recta de  $(0, 0)$  a  $(0, -3)$  y de  $(0, -3)$  a  $(2, -3)$

59.  $C$ : arco sobre  $y = 1 - x^2$  desde  $(0, 1)$  hasta  $(1, 0)$

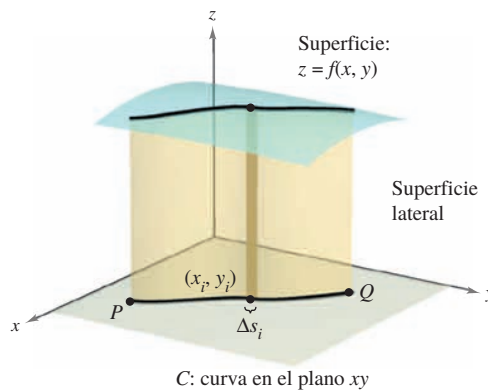
60.  $C$ : arco sobre  $y = x^{3/2}$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(4, 8)$

61.  $C$ : trayectoria parabólica  $x = t$ ,  $y = 2t^2$ , desde  $(0, 0)$  hasta  $(2, 8)$

62.  $C$ : trayectoria elíptica  $x = 4\sin t$ ,  $y = 3\cos t$ , desde  $(0, 3)$  hasta  $(4, 0)$

**Área de una superficie lateral** En los ejercicios 63 a 70, hallar el área de la superficie lateral (ver la figura) sobre la curva  $C$  en el plano  $xy$  y bajo la superficie  $z = f(x, y)$ , donde

$$\text{Área de la superficie lateral} = \int_C f(x, y) ds$$



63.  $f(x, y) = h$ ,  $C$ : recta desde  $(0, 0)$  hasta  $(3, 4)$

64.  $f(x, y) = y$ ,  $C$ : recta desde  $(0, 0)$  hasta  $(4, 4)$

65.  $f(x, y) = xy$ ,  $C: x^2 + y^2 = 1$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$

66.  $f(x, y) = x + y$ ,  $C: x^2 + y^2 = 1$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$

67.  $f(x, y) = h$ ,  $C: y = 1 - x^2$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$

68.  $f(x, y) = y + 1$ ,  $C: y = 1 - x^2$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$

69.  $f(x, y) = xy$ ,  $C: y = 1 - x^2$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$

70.  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$ ,  $C: x^2 + y^2 = 4$

**71. Diseño de motores** Un motor de tractor tiene una pieza de acero con una base circular representada por la función vectorial  $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$ . Su altura está dada por  $z = 1 + y^2$ . (Todas las medidas en centímetros.)

a) Hallar el área de la superficie lateral de la pieza.

b) La pieza tiene forma de capa de 0.2 centímetros de espesor. Utilizar el resultado del inciso a) para aproximar la cantidad de acero empleada para su fabricación.

c) Hacer un dibujo de la pieza.

**72. Diseño de edificios** La altura del techo de un edificio está dada por  $z = 20 + \frac{1}{4}x$ , y una de las paredes sigue una trayectoria representada por  $y = x^{3/2}$ . Calcular el área de la superficie de la pared si  $0 \leq x \leq 40$ . (Todas las medidas se dan en pies.)

**Momentos de inercia** Considerar un cable de densidad  $\rho(x, y)$  dado por la curva en el espacio

$$\mathbf{C}: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  están dados por

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) \, ds$$

$$I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) \, ds$$

En los ejercicios 73 y 74, hallar los momentos de inercia del cable dado con densidad  $\rho$ .

**73.** El cable se encuentra a lo largo de  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  y  $a > 0$ , su densidad es  $\rho(x, y) = 1$ .

**74.** El cable se encuentra a lo largo de  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  y  $a > 0$ , su densidad es  $\rho(x, y) = y$ .

**CAS 75. Investigación** El borde exterior de un sólido con lados verticales y que descansa en el plano  $xy$ , se representa por  $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + (1 + \sin^2 2t)\mathbf{k}$ , donde todas las medidas se dan en centímetros. La intersección del plano  $y = b$  ( $-3 < b < 3$ ) con la parte superior del sólido es una recta horizontal.

- Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente el sólido.
- Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el área de la superficie lateral del sólido.
- Hallar (si es posible) el volumen del sólido.

**76. Trabajo** Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria  $y = x^2$  desde el punto  $(0, 0)$  hasta el punto  $(1, 1)$ . El campo de fuerzas  $\mathbf{F}$  se mide en cinco puntos a lo largo de la trayectoria y los resultados se muestran en la tabla. Usar la regla de Simpson o una herramienta de graficación para aproximar el trabajo efectuado por el campo de fuerza.

$(x, y)$	$(0, 0)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$	$(1, 1)$
$\mathbf{F}(x, y)$	$\langle 5, 0 \rangle$	$\langle 3.5, 1 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 1.5, 3 \rangle$	$\langle 1, 5 \rangle$

**77. Trabajo** Determinar el trabajo hecho por una persona que pesa 175 libras y que camina exactamente una revolución hacia arriba en una escalera de forma helicoidal circular de 3 pies de radio si la persona sube 10 pies.

**78. Investigación** Determinar el valor  $c$  tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = 15[(4 - x^2)\mathbf{i} - xy\mathbf{j}]$$

sobre un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria parabólica  $y = c(1 - x^2)$  entre los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  sea mínimo. Comparar el resultado con el trabajo requerido para mover el objeto a lo largo de la trayectoria recta que une esos dos puntos.

## Desarrollo de conceptos

**79.** Definir la integral de línea de una función  $f$  a lo largo de una curva suave  $C$  en el plano y en el espacio. ¿Cómo se evalúa la integral de línea como integral definida?

**80.** Definir una integral de línea de un campo vectorial continuo  $\mathbf{F}$  sobre una curva suave  $C$ . ¿Cómo se evalúa la integral de línea como integral definida?

**81.** Ordenar las superficies en forma ascendente del área de la superficie lateral bajo la superficie y sobre la curva  $y = \sqrt{x}$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(4, 2)$  en el plano  $xy$ . Explicar el orden elegido sin hacer cálculo alguno.

a)  $z_1 = 2 + x$

b)  $z_2 = 5 + x$

c)  $z_3 = 2$

d)  $z_4 = 10 + x + 2y$

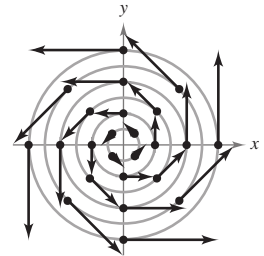
## Para discusión

**82.** En cada uno de los incisos siguientes, determinar si el trabajo realizado para mover un objeto del primero hasta el segundo punto a través del campo de fuerzas mostrado en la figura es positivo, negativo o cero. Explicar la respuesta.

a) Desde  $(-3, -3)$  hasta  $(3, 3)$

b) Desde  $(-3, 0)$  hasta  $(0, 3)$

c) Desde  $(5, 0)$  hasta  $(0, 3)$



**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 83 a 86, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

**83.** Si  $C$  está dada por  $x(t) = t$ ,  $y(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , entonces

$$\int_C xy \, ds = \int_0^1 t^2 \, dt.$$

**84.** Si  $C_2 = -C_1$ , entonces  $\int_{C_1} f(x, y) \, ds + \int_{C_2} f(x, y) \, ds = 0$ .

**85.** Las funciones vectoriales  $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , y  $\mathbf{r}_2 = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , definen la misma curva.

**86.** Si  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = 0$ , entonces  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{T}$  son ortogonales.

**87. Trabajo** Considerar una partícula que se mueve a través del campo de fuerzas  $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$  del punto  $(0, 0)$  al punto  $(0, 1)$  a lo largo de la curva  $x = kt(1 - t)$ ,  $y = t$ . Hallar el valor de  $k$ , tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas sea 1.

## 15.3 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria

- Comprender y utilizar el teorema fundamental de las integrales de línea.
- Comprender el concepto de independencia de la trayectoria.
- Comprender el concepto de conservación de energía.

### Teorema fundamental de las integrales de línea

El estudio realizado en la sección anterior indica que en un campo gravitatorio el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria seguida por el objeto. En esta sección se estudia una generalización importante de este resultado, a la que se le conoce como **teorema fundamental de las integrales de línea**.

Para empezar, se presenta un ejemplo en el que se evalúa la integral de línea de un campo vectorial conservativo por tres trayectorias diferentes.

#### EJEMPLO 1 Integral de línea de un campo vectorial conservativo

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$$

sobre una partícula que se mueve de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  a lo largo de cada una de las trayectorias, como se muestra en la figura 15.19.

- a)**  $C_1: y = x$       **b)**  $C_2: x = y^2$       **c)**  $C_3: y = x^3$

#### Solución

- a)** Sea  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$  para  $0 \leq t \leq 1$ , por lo que

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{3}{4}t^2 dt = \left[ \frac{1}{4}t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

- b)** Sea  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$  para  $0 \leq t \leq 1$ , por lo que

$$d\mathbf{r} = \left( \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{j} \right) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^{3/2}\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{5}{8}t^{3/2} dt = \left[ \frac{1}{4}t^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

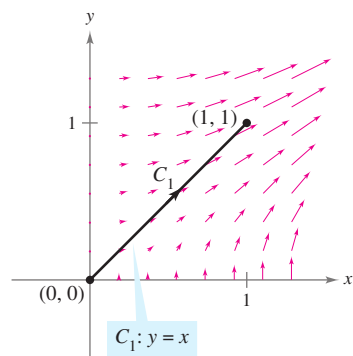
- c)** Sea  $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{j}$  para  $0 \leq t \leq 2$ , por lo que

$$d\mathbf{r} = \left( \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{8}t^2\mathbf{j} \right) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{32}t^4\mathbf{i} + \frac{1}{16}t^2\mathbf{j}.$$

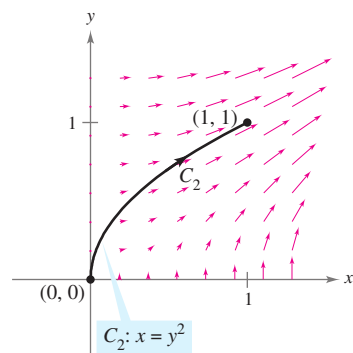
Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \frac{5}{128}t^4 dt = \left[ \frac{1}{128}t^5 \right]_0^2 = \frac{1}{4}.$$

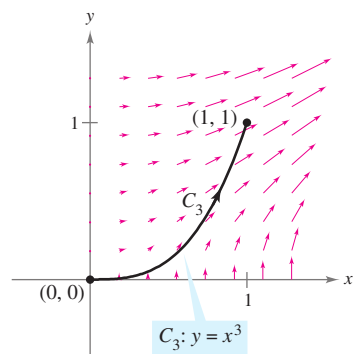
Por tanto, el trabajo realizado por un campo vectorial conservativo es el mismo para todas las trayectorias.



**a)**



**b)**



**c)**

Figura 15.19

En el ejemplo 1, obsérvese que el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$  es conservativo porque  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ , donde  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2y$ . En tales casos, el teorema siguiente establece que el valor de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  está dado por

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) \\ &= \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

**NOTA** El teorema fundamental de las integrales de línea es similar al teorema fundamental de cálculo (sección 4.4) que establece que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde  $F'(x) = f(x)$ . ■

#### TEOREMA 15.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sea  $C$  una curva suave a trozos contenida en una región abierta  $R$  y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  es conservativo en  $R$ , y  $M$  y  $N$  son continuas en  $R$ , entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde  $f$  es una función potencial de  $\mathbf{F}$ . Es decir,  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ .

**DEMOSTRACIÓN** Esta demostración es sólo para una curva suave. Para curvas suaves a trozos (o por partes), el procedimiento se lleva a cabo por separado para cada trozo suave. Como  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$ , se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \left[ f_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f_y(x, y) \frac{dy}{dt} \right] dt\end{aligned}$$

y, por la regla de la cadena (teorema 13.6), se tiene

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t))] dt \\ &= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)).\end{aligned}$$

El último paso es una aplicación del teorema fundamental del cálculo. ▬

En el espacio, el teorema fundamental de las integrales de línea adopta la forma siguiente. Sea  $C$  una curva suave a trozos contenida en una región abierta  $Q$  y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

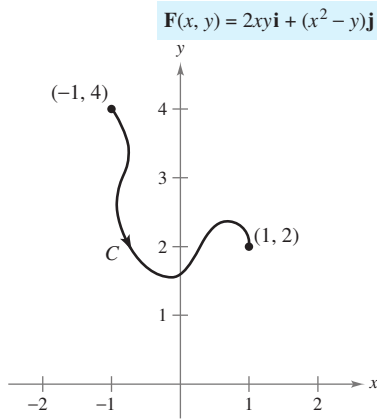
Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  es conservativo y  $M$ ,  $N$  y  $P$  son continuas, entonces

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ .

El teorema fundamental de las integrales de línea establece que si el campo vectorial  $\mathbf{F}$  es conservativo, entonces la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función *potencial*  $f$  en estos puntos.



**EJEMPLO 2** Aplicación del teorema fundamental de las integrales de líneaAplicación del teorema fundamental de las integrales de línea,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ **Figura 15.20**

Evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde  $C$  es una curva suave a trozos desde  $(-1, 4)$  hasta  $(1, 2)$  y

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 15.20.

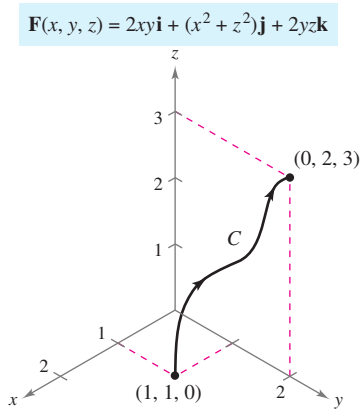
**Solución** Por el ejemplo 6 de la sección 15.1, se sabe que  $\mathbf{F}$  es el gradiente de  $f$ , donde

$$f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + K.$$

Por consiguiente,  $\mathbf{F}$  es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(1, 2) - f(-1, 4) \\ &= \left[ 1^2(2) - \frac{2^2}{2} \right] - \left[ (-1)^2(4) - \frac{4^2}{2} \right] \\ &= 4. \end{aligned}$$

Nótese que no es necesario incluir una constante  $K$  como parte de  $f$ , ya que se cancela por sustracción.

**EJEMPLO 3** Aplicación del teorema fundamental de las integrales de líneaAplicación del teorema fundamental de las integrales de línea,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ **Figura 15.21**

Evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde  $C$  es una curva suave a trozos desde  $(1, 1, 0)$  hasta  $(0, 2, 3)$  y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 15.21.

**Solución** Por el ejemplo 8 en la sección 15.1, se sabe que  $\mathbf{F}$  es el gradiente de  $f$ , donde  $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K$ . Por consiguiente,  $\mathbf{F}$  es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(0, 2, 3) - f(1, 1, 0) \\ &= [(0)^2(2) + (2)(3)^2] - [(1)^2(1) + (1)(0)^2] \\ &= 17. \end{aligned}$$

En los ejemplos 2 y 3, es importante notar que el valor de la integral de línea es el mismo para cualquier curva suave  $C$  que tenga los puntos inicial y final dados. Así, en el ejemplo 3, trátase de evaluar la integral de línea de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}.$$

Se obtendrá

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (30t^2 + 16t - 1) dt \\ &= 17. \end{aligned}$$

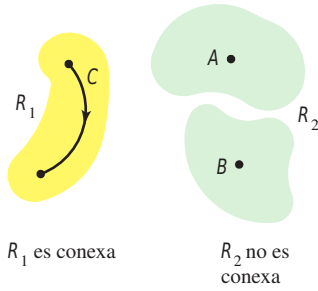


Figura 15.22

## Independencia de la trayectoria

Por el teorema fundamental de las integrales de línea es evidente que si  $\mathbf{F}$  es continuo y conservativo en una región abierta  $R$ , el valor de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es el mismo para toda curva suave a trozos  $C$  que vaya de un punto fijo de  $R$  a otro punto fijo de  $R$ . Esto se describe diciendo que la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es **independiente de la trayectoria** en la región  $R$ .

Una región en el plano (o en el espacio) es **conexa** si cada dos puntos en la región pueden ser unidos por una curva suave a trozos que se encuentre completamente dentro de la región, como se muestra en la figura 15.22. En regiones abiertas y **conexas**, la independencia de la trayectoria de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es equivalente a la condición de que  $\mathbf{F}$  sea conservativo.

### TEOREMA 15.6 INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA Y CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Si  $\mathbf{F}$  es continuo en una región abierta y conexa, entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente de la trayectoria si y sólo si  $\mathbf{F}$  es conservativo.

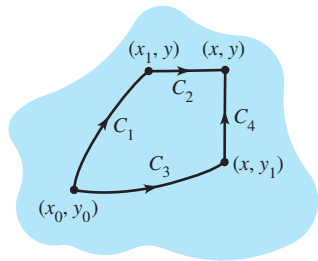


Figura 15.23

**DEMOSTRACIÓN** Si  $\mathbf{F}$  es conservativo, entonces, por el teorema fundamental de las integrales de línea, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Ahora se demuestra el recíproco para una región plana conexa  $R$ . Sea  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ , y sea  $(x_0, y_0)$  un punto fijo en  $R$ . Si  $(x, y)$  es cualquier punto en  $R$ , elíjase una curva suave a trozos  $C$  que vaya de  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ , y defínase  $f$  como

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M dx + N dy.$$

La existencia de  $C$  en  $R$  está garantizada por el hecho de que  $R$  es conexa. Se puede mostrar que  $f$  es una función potencial de  $\mathbf{F}$  considerando dos trayectorias diferentes entre  $(x_0, y_0)$  y  $(x, y)$ . Para la *primera* trayectoria, elíjase  $(x_1, y_1)$  en  $R$  tal que  $x \neq x_1$ . Esto es posible ya que  $R$  es abierta. Después elíjanse  $C_1$  y  $C_2$ , como se muestra en la figura 15.23. Utilizando la independencia de la trayectoria, se sigue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_C M dx + N dy \\ &= \int_{C_1} M dx + N dy + \int_{C_2} M dx + N dy. \end{aligned}$$

Como la primera integral no depende de  $x$ , y como  $dy = 0$  en la segunda integral, se tiene

$$f(x, y) = g(y) + \int_{C_2} M dx$$

y entonces, la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  es  $f_x(x, y) = M$ . Para la *segunda* trayectoria, se elige un punto  $(x, y_1)$ . Utilizando un razonamiento similar al empleado para la primera trayectoria, se concluye que  $f_y(x, y) = N$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \\ &= \mathbf{F}(x, y) \end{aligned}$$

y se sigue que  $\mathbf{F}$  es conservativo.

**EJEMPLO 4 Trabajo en un campo de fuerzas conservativo**

Para el campo de fuerzas dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \sin y \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

mostrar que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria, y calcular el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  sobre un objeto que se mueve a lo largo de una curva  $C$  desde  $(0, \pi/2, 1)$  hasta  $(1, \pi, 3)$ .

**Solución** Al expresar el campo de fuerzas en la forma  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ , se tiene  $M = e^x \cos y$ ,  $N = -e^x \sin y$  y  $P = 2$ , y se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= 0 = \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 = \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}.\end{aligned}$$

Por tanto,  $\mathbf{F}$  es conservativo. Si  $f$  es una función potencial de  $\mathbf{F}$ , entonces

$$\begin{aligned}f_x(x, y, z) &= e^x \cos y \\ f_y(x, y, z) &= -e^x \sin y \\ f_z(x, y, z) &= 2.\end{aligned}$$

Integrando con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  por separado, se obtiene

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \int f_x(x, y, z) dx = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + g(y, z) \\ f(x, y, z) &= \int f_y(x, y, z) dy = \int -e^x \sin y dy = e^x \cos y + h(x, z) \\ f(x, y, z) &= \int f_z(x, y, z) dz = \int 2 dz = 2z + k(x, y).\end{aligned}$$

Comparando estas tres versiones de  $f(x, y, z)$ , se concluye que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K.$$

Así, el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  a lo largo de *cualquier* curva  $C$  desde  $(0, \pi/2, 1)$  hasta  $(1, \pi, 3)$  es

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left[ e^x \cos y + 2z \right]_{(0, \pi/2, 1)}^{(1, \pi, 3)} \\ &= (-e + 6) - (0 + 2) \\ &= 4 - e.\end{aligned}$$

¿Cuánto trabajo se realizaría si el objeto del ejemplo 4 se moviera del punto  $(0, \pi/2, 1)$  al punto  $(1, \pi, 3)$  y después volviera al punto de partida  $(0, \pi/2, 1)$ ? El teorema fundamental de las integrales de línea establece que el trabajo realizado sería cero. Recuerdese que, por definición, el trabajo puede ser negativo. Así, en el momento en el que el objeto vuelve a su punto de partida, la cantidad de trabajo que se registra positivamente se cancela por la cantidad de trabajo que se registra negativamente.

Una curva  $C$  dada por  $\mathbf{r}(t)$  para  $a \leq t \leq b$  es **cerrada** si  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ . Por el teorema fundamental de las integrales de línea, se puede concluir que si  $\mathbf{F}$  es continuo y conservativo en una región abierta  $R$ , entonces la integral de línea sobre toda curva cerrada  $C$  es 0.

**NOTA** El teorema 15.7 proporciona varias opciones para calcular una integral de línea de un campo vectorial conservativo. Se puede usar una función potencial, o puede ser más conveniente elegir una trayectoria particularmente simple, como un segmento de recta.

### TEOREMA 15.7 CONDICIONES EQUIVALENTES

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta conexa  $R$ , y sea  $C$  una curva suave a trozos en  $R$ . Las condiciones siguientes son equivalentes.

1.  $\mathbf{F}$  es conservativo. Es decir,  $\mathbf{F} = \nabla f$  para alguna función  $f$ .
2.  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria.
3.  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para toda curva cerrada  $C$  en  $R$ .

### EJEMPLO 5 Evaluación de una integral de línea

Evaluar  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j}$$

y  $C_1$  es la trayectoria semicircular de  $(0, 0)$  a  $(2, 0)$ , que se muestra en la figura 15.24.

**Solución** Se tienen las tres opciones siguientes.

- a)** Se puede utilizar el método presentado en la sección anterior para evaluar la integral de línea a lo largo de la *curva dada*. Para esto, se puede usar la parametrización  $\mathbf{r}(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ , donde  $0 \leq t \leq \pi$ . Con esta parametrización, se sigue que  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = (\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) dt$ , y

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi (\sin t + \sin^4 t + \cos t + 3\sin^2 t \cos t - 3\sin^2 t \cos^2 t) dt.$$

Esta integral desanimará a cualquiera que haya elegido esta opción.

- b)** Se puede intentar hallar una *función potencial* y evaluar la integral de línea mediante el teorema fundamental de las integrales de línea. Empleando la técnica demostrada en el ejemplo 4, se encuentra que la función potencial es  $f(x, y) = xy^3 + x + y + K$ , y, por el teorema fundamental,

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 0) - f(0, 0) = 2.$$

- c)** Sabiendo que  $\mathbf{F}$  es conservativo, se tiene una tercera opción. Como el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, se puede reemplazar la trayectoria semicircular con una *trayectoria más simple*. Supóngase que se elige la trayectoria rectilínea  $C_2$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(2, 0)$ . Entonces,  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$ , donde  $0 \leq t \leq 2$ . Así,  $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dt$  y  $\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ , de manera que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 1 dt = t \Big|_0^2 = 2.$$

Obviamente, de las tres opciones, la tercera es la más sencilla.

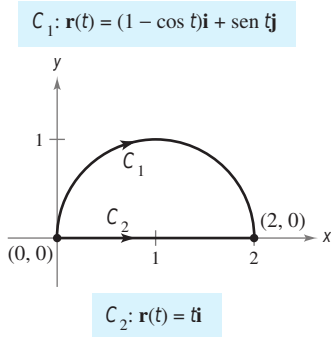
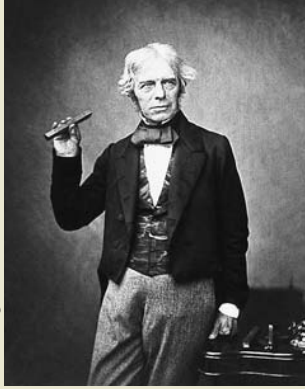


Figura 15.24

## Conservación de la energía



The Granger Collection

MICHAEL FARADAY (1791-1867)

Varios filósofos de la ciencia han considerado que la ley de Faraday de la conservación de la energía es la mayor generalización concebida por el pensamiento humano. Muchos físicos han contribuido a nuestro conocimiento de esta ley; dos de los primeros y más importantes fueron James Prescott Joule (1818-1889) y Hermann Ludwig Helmholtz (1821-1894).

En 1840, el físico inglés Michael Faraday escribió: “En ninguna parte hay una creación o producción pura de energía sin un consumo correspondiente de algo que la proporcione.” Esta declaración representa la primera formulación de una de las leyes más importantes de la física: la **ley de conservación de la energía**. En la terminología moderna, la ley dice lo siguiente: *En un campo de fuerzas conservativo, la suma de energías potencial y cinética de un objeto se mantiene constante de punto a punto.*

Se puede usar el teorema fundamental de las integrales de línea para deducir esta ley. De la física se sabe que la **energía cinética** de una partícula de masa  $m$  y velocidad  $v$  es  $k = \frac{1}{2}mv^2$ . La **energía potencial**  $p$  de una partícula en el punto  $(x, y, z)$  en un campo vectorial conservativo  $\mathbf{F}$  se define como  $p(x, y, z) = -f(x, y, z)$ , donde  $f$  es la función potencial de  $\mathbf{F}$ . Consecuentemente, el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  a lo largo de una curva suave  $C$  desde  $A$  hasta  $B$  es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x, y, z) \Big|_A^B \\ &= -p(x, y, z) \Big|_A^B \\ &= p(A) - p(B) \end{aligned}$$

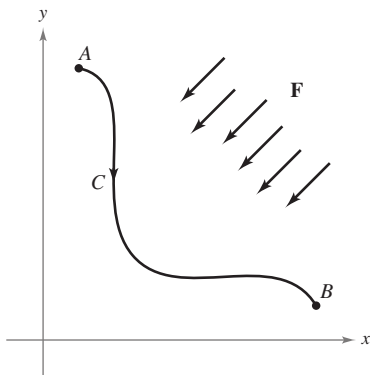
como se muestra en la figura 15.25. En otras palabras, el trabajo  $W$  es igual a la diferencia entre las energías potenciales en  $A$  y  $B$ . Ahora, supóngase que  $\mathbf{r}(t)$  es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de  $C$  desde  $A = \mathbf{r}(a)$  hasta  $B = \mathbf{r}(b)$ . En cualquier instante  $t$ , la velocidad, aceleración y rapidez de la partícula son  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ ,  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$  y  $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ , respectivamente. Así, por la segunda ley del movimiento de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t) = m(\mathbf{v}'(t))$ , y el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_a^b [m\mathbf{v}'(t)] \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_a^b m[\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}(t)\|^2] dt \\ &= \frac{m}{2} \left[ \|\mathbf{v}(t)\|^2 \right]_a^b \\ &= \frac{m}{2} \left[ v(t)^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} m[v(b)]^2 - \frac{1}{2} m[v(a)]^2 \\ &= k(B) - k(A). \end{aligned}$$

Igualando estos dos resultados obtenidos para  $W$  se tiene

$$\begin{aligned} p(A) - p(B) &= k(B) - k(A) \\ p(A) + k(A) &= p(B) + k(B) \end{aligned}$$

lo cual implica que la suma de energías potencial y cinética permanece constante de punto a punto.



El trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = p(A) - p(B)$$

Figura 15.25

## 15.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, mostrar que el valor de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es el mismo para cada representación paramétrica de  $C$ .

1.  $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

b)  $\mathbf{r}_2(\theta) = \sin \theta \mathbf{i} + \sin^2 \theta \mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

2.  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 4$

b)  $\mathbf{r}_2(w) = w^2\mathbf{i} + w\mathbf{j}, \quad 0 \leq w \leq 2$

3.  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(\theta) = \sec \theta \mathbf{i} + \tan \theta \mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

b)  $\mathbf{r}_2(t) = \sqrt{t+1}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$

4.  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = (2+t)\mathbf{i} + (3-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$

b)  $\mathbf{r}_2(w) = (2 + \ln w)\mathbf{i} + (3 - \ln w)\mathbf{j}, \quad 1 \leq w \leq e^3$

En los ejercicios 5 a 10, determinar si el campo vectorial es o no conservativo.

5.  $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\sin y \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j})$

6.  $\mathbf{F}(x, y) = 15x^2y^2\mathbf{i} + 10x^3y\mathbf{j}$

7.  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

8.  $\mathbf{F}(x, y, z) = y \ln z \mathbf{i} - x \ln z \mathbf{j} + \frac{xy}{z} \mathbf{k}$

9.  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$

10.  $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin yz \mathbf{i} + xz \cos yz \mathbf{j} + xy \sin yz \mathbf{k}$

En los ejercicios 11 a 24, hallar el valor de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Sugerencia: Si  $\mathbf{F}$  es conservativo, la integración puede ser más sencilla a través de una trayectoria alternativa.)

11.  $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

b)  $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

12.  $\mathbf{F}(x, y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} - (t-3)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$

b) La trayectoria cerrada que consiste en segmentos de recta desde  $(0, 3)$  hasta  $(0, 0)$ , después desde  $(0, 0)$  hasta  $(3, 0)$  y desde  $(3, 0)$  hasta  $(0, 3)$

13.  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

a)  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

b)  $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

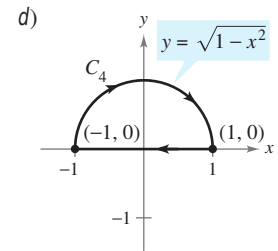
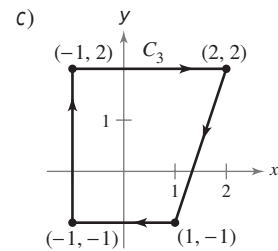
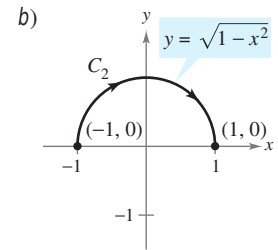
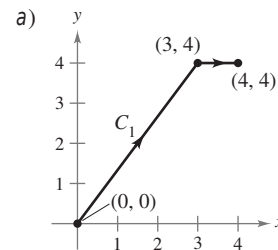
c)  $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

14.  $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$

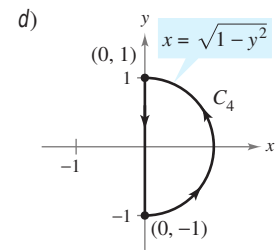
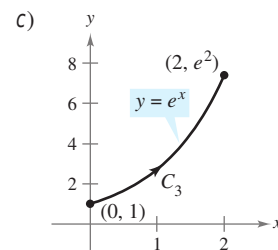
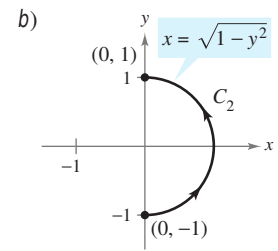
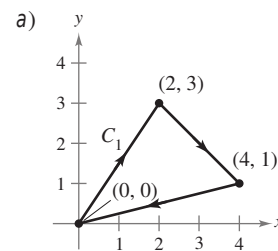
a)  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 3$

b)  $\mathbf{r}_2(t) = (t+1)\mathbf{i} - \frac{1}{3}(t-3)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

15.  $\int_C y^2 dx + 2xy dy$



16.  $\int_C (2x - 3y + 1) dx - (3x + y - 5) dy$



17.  $\int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$

a)  $C$ : elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  desde  $(5, 0)$  hasta  $(0, 4)$

b)  $C$ : parábola  $y = 4 - x^2$  desde  $(2, 0)$  hasta  $(0, 4)$

$$18. \int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$$

$$a) \mathbf{r}_1(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$b) \mathbf{r}_2(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$19. \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

$$a) \mathbf{r}_1(t) = t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$b) \mathbf{r}_2(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$20. \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + z \mathbf{j} + y \mathbf{k}$$

$$a) \mathbf{r}_1(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$b) \mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t) \mathbf{i} + \pi^2 t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$21. \mathbf{F}(x, y, z) = (2y + x) \mathbf{i} + (x^2 - z) \mathbf{j} + (2y - 4z) \mathbf{k}$$

$$a) \mathbf{r}_1(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$b) \mathbf{r}_2(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + (2t - 1)^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$22. \mathbf{F}(x, y, z) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + 3xz^2 \mathbf{k}$$

$$a) \mathbf{r}_1(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$b) \mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t) \mathbf{i} + \pi t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$23. \mathbf{F}(x, y, z) = e^z(y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + xy \mathbf{k})$$

$$a) \mathbf{r}_1(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$b) \mathbf{r}_2(t) = (4 - 8t) \mathbf{i} + 3 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$24. \mathbf{F}(x, y, z) = y \sin z \mathbf{i} + x \sin z \mathbf{j} + xy \cos x \mathbf{k}$$

$$a) \mathbf{r}_1(t) = t^2 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$b) \mathbf{r}_2(t) = 4t \mathbf{i} + 4t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

En los ejercicios 25 a 34, evaluar la integral de línea utilizando el teorema fundamental de las integrales de línea. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

$$25. \int_C (3y \mathbf{i} + 3x \mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$$

C: curva suave desde (0, 0) hasta (3, 8)

$$26. \int_C [2(x + y) \mathbf{i} + 2(x + y) \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{r}$$

C: curva suave desde (-1, 1) hasta (3, 2)

$$27. \int_C \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy$$

C: curva suave desde (0, -\pi) hasta \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)

$$28. \int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

C: curva suave desde (1, 1) hasta (2\sqrt{3}, 2)

$$29. \int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$$

C: cicloide  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$  desde (0, 0) hasta (2\pi, 0)

$$30. \int_C \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

C: círculo  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$  en sentido de las manecillas del reloj desde (7, 5) hasta (1, 5)

$$31. \int_C (z + 2y) dx + (2x - z) dy + (x - y) dz$$

a) C: segmento de recta desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1)

b) C: segmento de recta de (0, 0, 0) a (0, 0, 1) a (1, 1, 1)

c) C: segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 0, 0) a (1, 1, 0) y a (1, 1, 1)

32. Repetir el ejercicio 31 utilizando la integral

$$\int_C zy dx + xz dy + xy dz.$$

$$33. \int_C -\sin x dx + z dy + y dz$$

C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta \left(\frac{\pi}{2}, 3, 4\right)

$$34. \int_C 6x dx - 4z dy - (4y - 20z) dz$$

C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta (3, 4, 0)

**Trabajo** En los ejercicios 35 y 36, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\mathbf{F}$  al mover un objeto desde  $P$  hasta  $Q$ .

$$35. \mathbf{F}(x, y) = 9x^2y^2 \mathbf{i} + (6x^3y - 1) \mathbf{j}; P(0, 0), Q(5, 9)$$

$$36. \mathbf{F}(x, y) = \frac{2x}{y} \mathbf{i} - \frac{x^2}{y^2} \mathbf{j}; P(-1, 1), Q(3, 2)$$

37. **Trabajo** Una piedra de 1 libra atada al extremo de una cuerda de dos pies se hace girar horizontalmente con un extremo fijo. Realiza una revolución por segundo. Hallar el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  que mantiene a la piedra en una trayectoria circular. [Sugerencia: Usar fuerza = (masa)(aceleración centrípeta).]

38. **Trabajo** Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$  es un campo vectorial de fuerza constante, mostrar que el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria desde  $P$  hasta  $Q$  es  $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$ .

39. **Trabajo** Para tener un medio de escape para los trabajadores en una arriesgada tarea a 50 metros sobre el nivel del suelo, se instala un tobogán de cable. Corre desde su posición hasta un punto a 50 metros de la base de la instalación donde se localizan los trabajadores. Mostrar que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio para que un hombre de 175 libras recorra la longitud del cable es el mismo en cada una de las trayectorias.

$$a) \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + (50 - t) \mathbf{j}$$

$$b) \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{1}{50}(50 - t)^2 \mathbf{j}$$

40. **Trabajo** ¿Se puede encontrar una trayectoria para el cable del tobogán del ejercicio 39 tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio sea distinto de las cantidades de trabajo realizadas para las dos trayectorias dadas? Explicar por qué sí o por qué no.

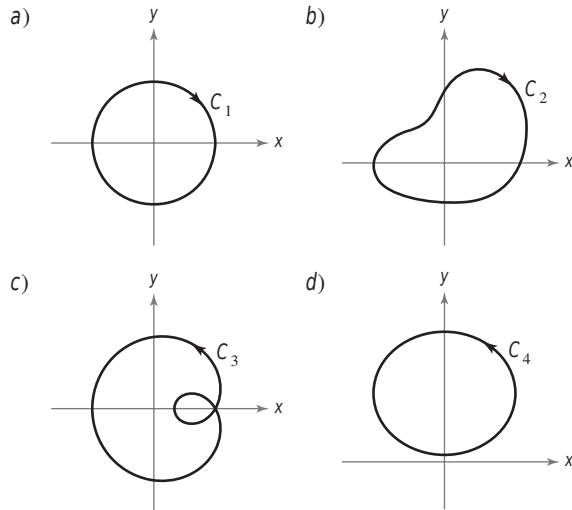
### Desarrollo de conceptos

41. Enunciar el teorema fundamental de las integrales de línea.

42. ¿Qué significa que una integral de línea sea independiente de la trayectoria? Enunciar el método para determinar si una integral de línea es independiente de la trayectoria.

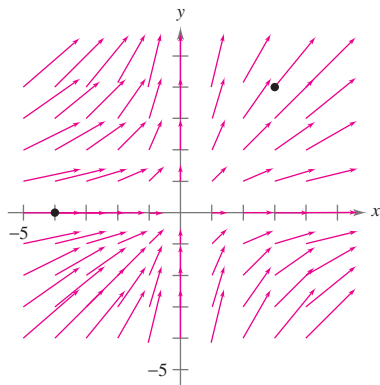
43. **Para pensar** Sea  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ . Encontrar el valor de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



### Para discusión

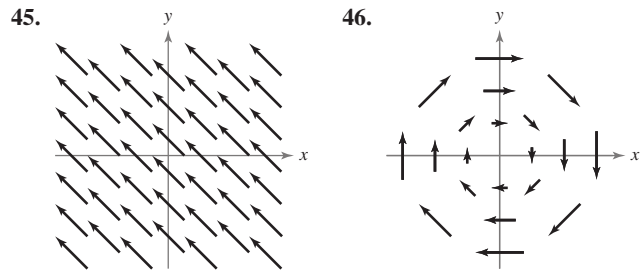
44. Considerar el campo de fuerzas mostrado en la figura.



- a) Argumentar verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se pueden encontrar dos trayectorias que requieren cantidades diferentes de trabajo para mover un objeto desde  $(-4, 0)$  hasta  $(3, 4)$ . Identificar dos trayectorias y decir cuál requiere mayor cantidad de trabajo.
- b) Argumentar verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se puede encontrar una curva cerrada  $C$  tal que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0.$$

En los ejercicios 45 y 46, considerar el campo de fuerzas mostrado en la figura. ¿Es el campo de fuerzas conservativo? Explicar por qué sí o por qué no.



**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 47 a 50, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

47. Si  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  tienen los mismos puntos inicial y final y  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$ , entonces  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3$ .
48. Si  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  y  $C$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = (4 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , entonces  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .
49. Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en una región  $R$  limitada o acotada por una trayectoria cerrada simple y  $C$  está contenida en  $R$ , entonces  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria.
50. Si  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  y  $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo.
51. Una función  $f$  es armónica si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . Demostrar que si  $f$  es armónica, entonces
- $$\int_C \left( \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) = 0$$
- donde  $C$  es una curva suave cerrada en el plano.
52. **Energía potencial y cinética** La energía cinética de un objeto que se mueve a través de un campo de fuerzas conservativo disminuye a una velocidad o ritmo de 15 unidades por minuto. ¿A qué ritmo cambia su energía potencial?
53. Sea  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ .

- a) Mostrar que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

donde

$$M = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ y } N = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

- b) Si  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$  para  $0 \leq t \leq \pi$ , hallar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .
- c) Si  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$  para  $0 \leq t \leq \pi$ , hallar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .
- d) Si  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$ , hallar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . ¿Por qué esto no contradice el teorema 15.7?
- e) Mostrar que  $\nabla \left( \arctan \frac{x}{y} \right) = \mathbf{F}$ .