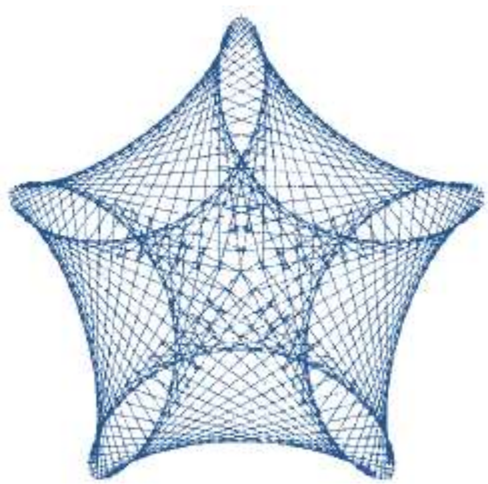
Universidad Nacional Experimental del Táchira
Departamento de Matemática y Física
Asignatura Matemática II (0826201T)

COORDENADAS POLARES



1. Sistema Polar.
2. Relación entre Sistemas Cartesiano y Polar.
3. Ecuaciones en Coordenadas Polares.
4. Gráficas de Ecuaciones en Coordenadas Polares.
5. Tangentes a la Curva en Coordenadas Polares.
6. Áreas en Coordenadas Polares.

Objetivos:

Graficar ecuaciones expresadas en coordenadas polares.

Determinar las coordenadas polares de un punto expresado en coordenadas cartesianas.

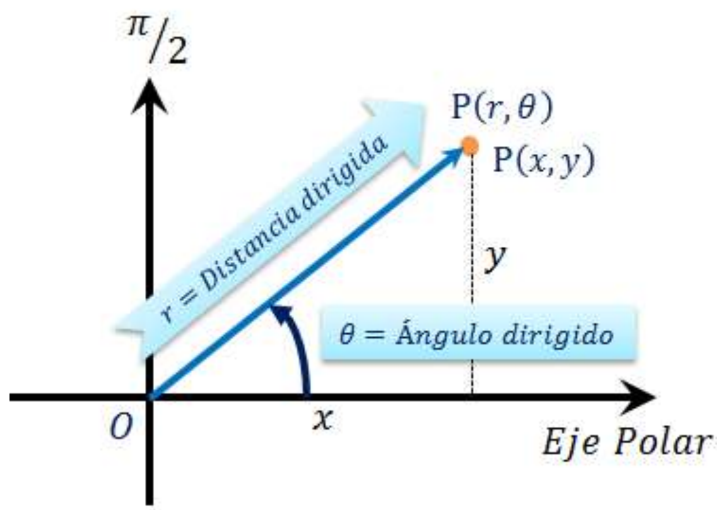
Determinar las coordenadas cartesianas de un punto expresado en coordenadas polares.

Determinar las tangentes a la curva en un punto expresada en forma polar.

Calcular áreas de regiones limitadas por curvas expresadas en coordenadas polares.

1. Sistema Polar.

Las coordenadas polares de un punto P, consisten en una distancia dirigida y la medida de un ángulo respecto a un punto fijo (Polo) y una semirecta fija (Eje Polar). Así, un conjunto de coordenadas polares para P está dado por (r, θ).



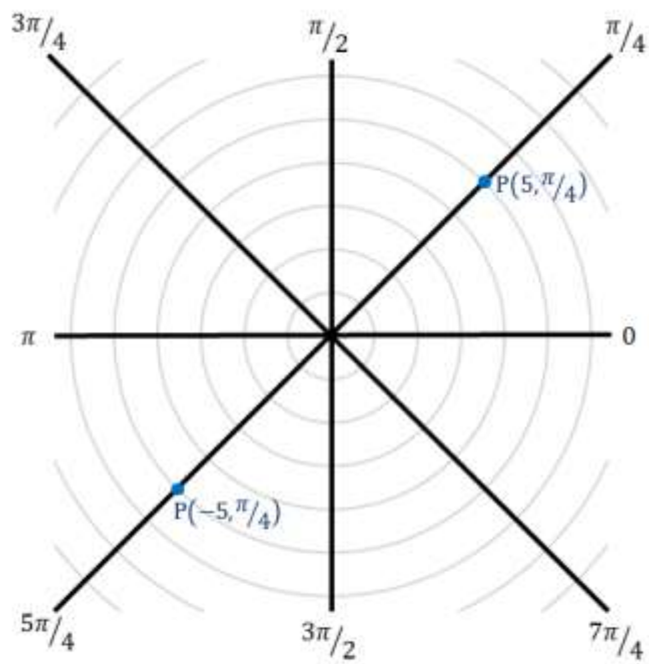
$r = Distancia\ dirigida\ de\ O\ a\ P\ \ \theta =$
$Ángulo\ dirigido, en\ Sentido\ Antihorario, del\ Eje\ Polar\ al\ segmento\ \overline{OP}$

Propiedades:

Un punto P puede ser representado en muchas formas.

a. $(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$
b. $(r, \theta) = [-r, \theta + (2n + 1)\pi]$

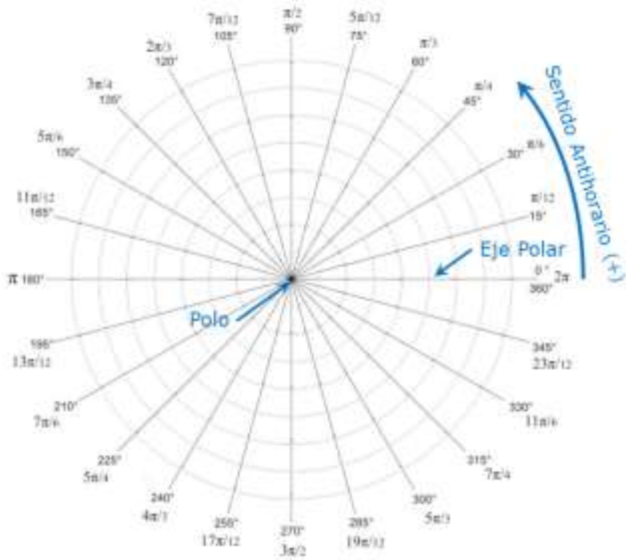
Si $r = d_{OP}$ toma valores negativos, se define $P = (-r, \theta)$ como el simétrico respecto al origen del punto $P = (r, \theta)$.

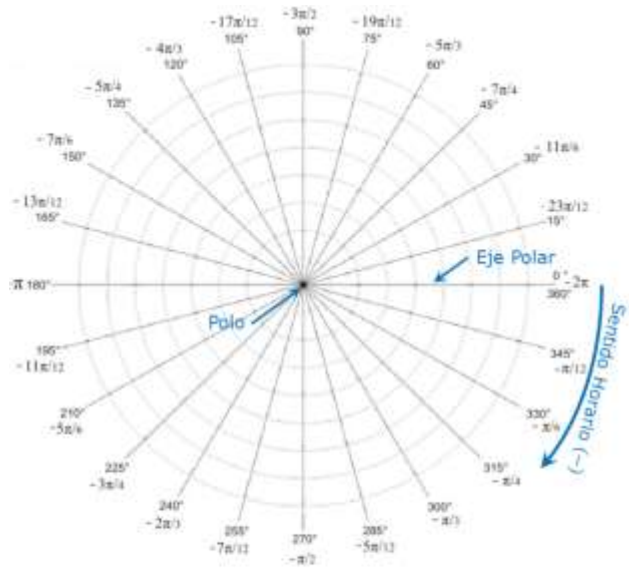


Plano Polar:

Consiste en un plano de circunferencias concéntricas al origen y rectas concurrentes al origen con diferentes ángulos de inclinación.

Al eje horizontal se lo llama Eje Polar, al eje vertical se lo llama Eje ${}^{\pi}/_{2}$. El punto de intersección entre estos dos ejes se llama Polo.





2. Relación entre Sistemas Cartesiano y Polar.

Si el origen del sistema cartesiano y el eje x coinciden con el polo y el eje polar, las coordenadas (x, y) y (r, θ) se relacionan mediante las ecuaciones:

a. De polares a rectangulares: $\begin{cases} x = r \cdot cos(\theta) \\ y = r \cdot sen(\theta) \end{cases}$

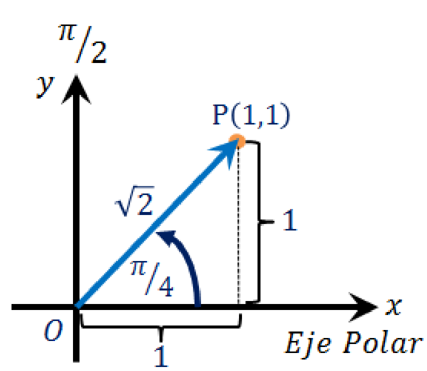
b. De rectangulares a polares: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$

Ejemplo 1:

Encuentre las coordenadas polares del punto $P = (1,1)$.

Solución:

Se representa el punto P en el plano cartesiano:



Se utiliza las ecuaciones para hallar (r, θ):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^1 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

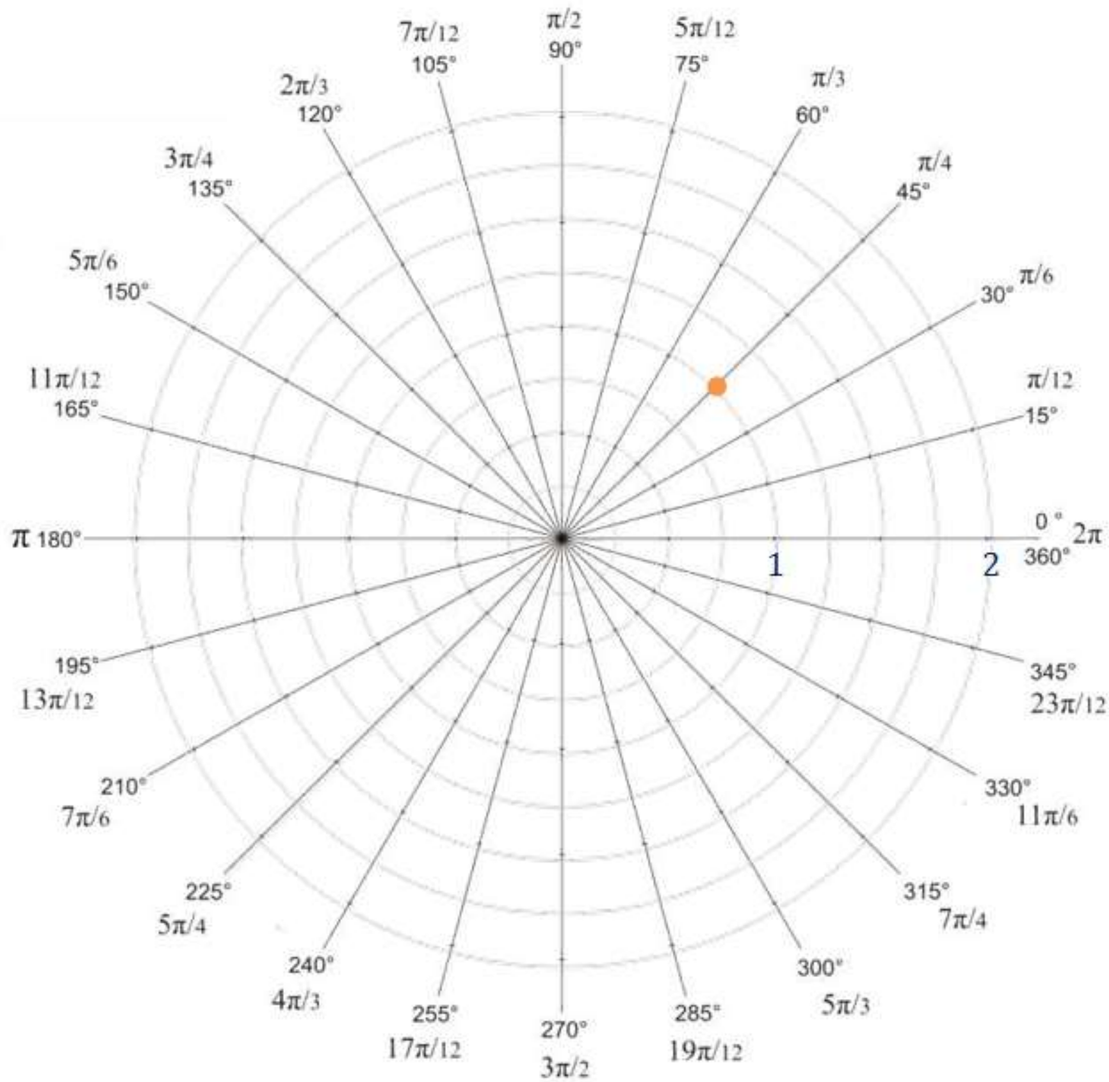
$$\theta = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{1}{1} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$$

$$P = \left(\sqrt{2}, {}^{\pi}/_{4}\right)$$

Además, se puede utilizar otras de las infinitas equivalencias polares que representan al punto P como:

$$P = \left(\sqrt{2}, {}^{\pi}/_{4}\right) = \left(\sqrt{2}, {}^{-7\pi}/_{4}\right) = \left(-\sqrt{2}, {}^{5\pi}/_{4}\right) = \left(-\sqrt{2}, {}^{-3\pi}/_{4}\right)$$

Se representa el punto P en el plano Polar:



IMPORTANTE: Para realizar los cálculos es necesario tener la calculadora en **<u>radianes</u>**.

3. Ecuaciones en Coordenadas Polares.

Una ecuación en coordenadas polares se presenta de la forma $r = f(\theta)$. Por tanto para realizar la gráfica, se puede obtener una tabla de valores para ciertos puntos que luego se representan en el plano polar; después se traza la gráfica siguiendo estos puntos.

Simetrías:

a. Respecto al Eje Polar: Si al sustituir en la ecuación θ por $-\theta$, se obtiene una ecuación equivalente.
b. Respecto al Eje $\pi/2$: Si al sustituir en la ecuación θ por $\pi-\theta$, se obtiene una ecuación equivalente.
c. Respecto al Polo: Respecto al Eje Polar: Si al sustituir en la ecuación θ por $\pi + \theta$, se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo 2:

Verificar las simetrías de la ecuación $r = 8 + 4 \cdot sen(\theta)$.

Solución:

Respecto al Eje Polar: Se cambia θ por $-\theta$ y se aplica la propiedad de la función seno ($sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$).

$$r = 8 + 4 \cdot sen(-\theta)$$
$$r = 8 - 4 \cdot sen(\theta)$$

La ecuación resultante no es equivalente a la original. Por lo tanto, NO existe simetría respecto al eje polar.

Respecto al Eje $\pi/2$: Se cambia θ por $\pi-\theta$ y se aplica la propiedad de la diferencia de ángulos del seno ($sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha) \cdot cos(\beta) \pm cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$).

$$r = 8 + 4 \cdot sen(\pi - \theta)$$
$$r = 8 + 4 \cdot [sen(\pi) \cdot cos(\theta) - cos(\pi) \cdot sen(\theta)]$$
$$r = 8 + 4 \cdot [0 \cdot cos(\theta) - (-1) \cdot sen(\theta)]$$
$$r = 8 + 4 \cdot sen(\theta)$$

La ecuación resultante es equivalente a la original. Por lo tanto, SI existe simetría respecto al eje $\pi/2$.

Respecto al Polo: Se cambia θ por $\pi + \theta$ y se aplica la propiedad de la suma de ángulos del seno.

$$r = 8 + 4 \cdot sen(\pi + \theta)$$
$$r = 8 + 4 \cdot [sen(\pi) \cdot cos(\theta) + cos(\pi) \cdot sen(\theta)]$$
$$r = 8 + 4 \cdot [0 \cdot cos(\theta) + (-1) \cdot sen(\theta)]$$
$$r = 8 - 4 \cdot sen(\theta)$$

La ecuación resultante no es equivalente a la original. Por lo tanto, NO existe simetría respecto al polo.

Ejemplo 3:

Verificar las simetrías de la ecuación $r = 6 \cdot cos(\theta)$.

Solución:

Respecto al Eje Polar: Se cambia θ por $-\theta$ y se aplica la propiedad de la función coseno ($cos(-\alpha) = cos(\alpha)$).

$$r = 6 \cdot cos(-\theta)$$
$$r = 6 \cdot cos(\theta)$$

La ecuación resultante es equivalente a la original. Por lo tanto, SI existe simetría respecto al eje polar.

Respecto al Eje $\pi/_2$: Se cambia θ por $\pi - \theta$ y se aplica la propiedad de la diferencia de ángulos del coseno ($cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \mp sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$).

$$r = 6 \cdot cos(\pi - \theta)$$
$$r = 6 \cdot [cos(\pi) \cdot cos(\theta) + sen(\pi) \cdot sen(\theta)]$$
$$r = 6 \cdot [(-1) \cdot cos(\theta) + 0 \cdot sen(\theta)]$$
$$r = -6 \cdot cos(\theta)$$

La ecuación resultante no es equivalente a la original. Por lo tanto, NO existe simetría respecto al eje $\pi/_2$.

Respecto al Polo: Se cambia θ por $\pi + \theta$ y se aplica la propiedad de la suma de ángulos del coseno.

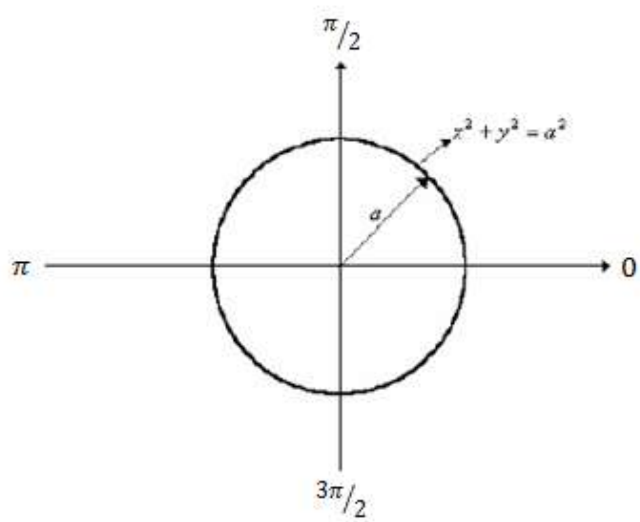
$$r = 6 \cdot cos(\pi + \theta)$$
$$r = 6 \cdot [cos(\pi) \cdot cos(\theta) - sen(\pi) \cdot sen(\theta)]$$
$$r = 6 \cdot [(-1) \cdot cos(\theta) - 0 \cdot sen(\theta)]$$
$$r = -6 \cdot cos(\theta)$$

La ecuación resultante no es equivalente a la original. Por lo tanto, NO existe simetría respecto al polo.

4. Gráficas de Ecuaciones en Coordenadas Polares.

Curvas Cerradas: Se dibujan por completo en un intervalo cerrado.

<u>Círculos con Centro en el Polo</u> $r = a$ $Ciclo\ 2\pi$



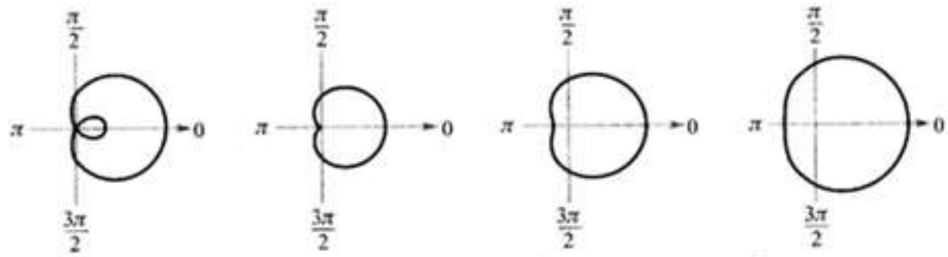
Caracoles

$r = a \pm b \cos \theta$

$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$

$(a > 0, b > 0)$

Ciclo 2π



$\frac{a}{b} < 1$ Caracol con bucle interior | $\frac{a}{b} = 1$ Cardioide (forma de corazón) | $1 < \frac{a}{b} < 2$ Caracol con hoyuelo | $\frac{a}{b} \geq 2$ Caracol convexo

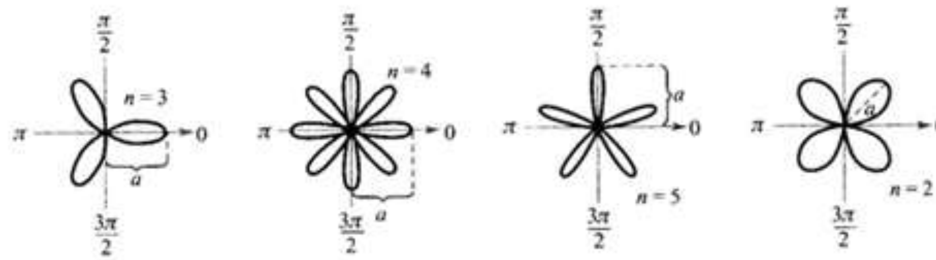
Rosas

n pétalos si n es impar

Ciclo π

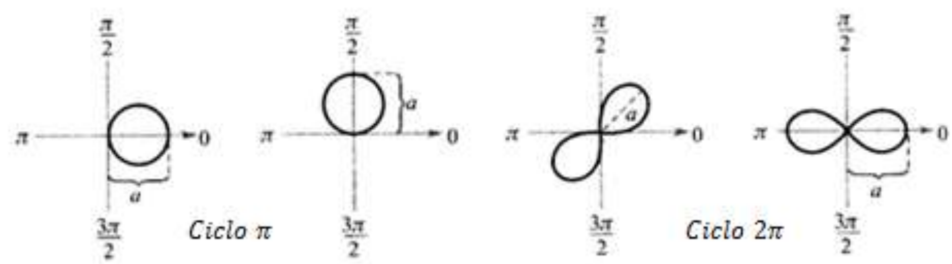
$2n$ pétalos si n es par

$(n \geqslant 2)$ *Ciclo* 2π



$r = a \cos n\theta$ Rosa | $r = a \cos n\theta$ Rosa | $r = a \operatorname{sen} n\theta$ Rosa | $r = a \operatorname{sen} n\theta$ Rosa

Círculos y lemniscatas

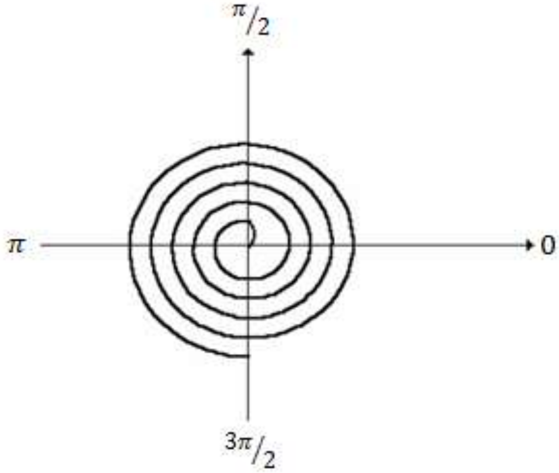


Ciclo π | *Ciclo* 2π

$r = a \cos \theta$ Círculo | $r = a \operatorname{sen} \theta$ Círculo | $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ Lemniscata | $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ Lemniscata

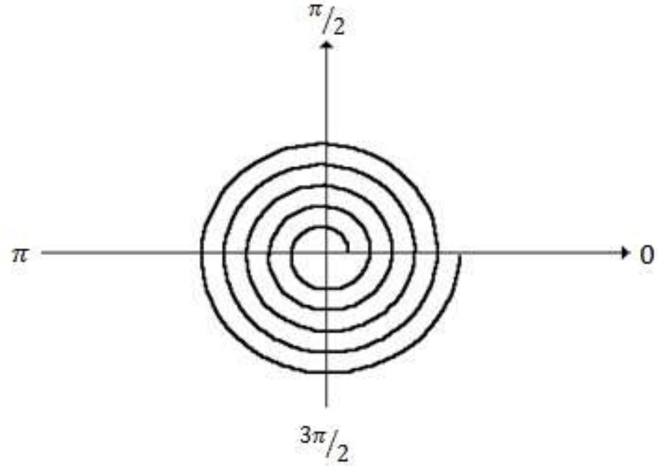
Curvas Abiertas: Se dibujan desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

<u>Espirales</u>



$r = a\theta$

Espiral de Arquímedes



$r = ae^{b\theta}$

Espiral Logarímica

Ejemplo 4:

Graficar $r = 2$.

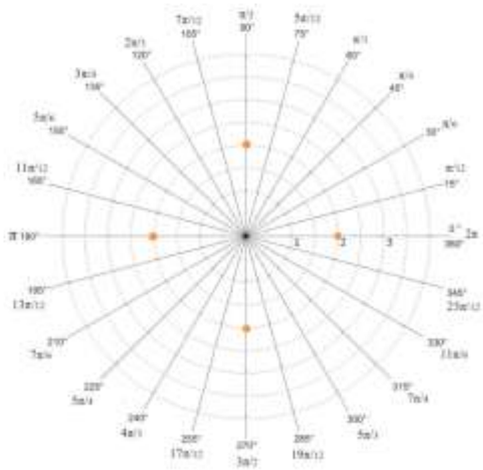
Solución:

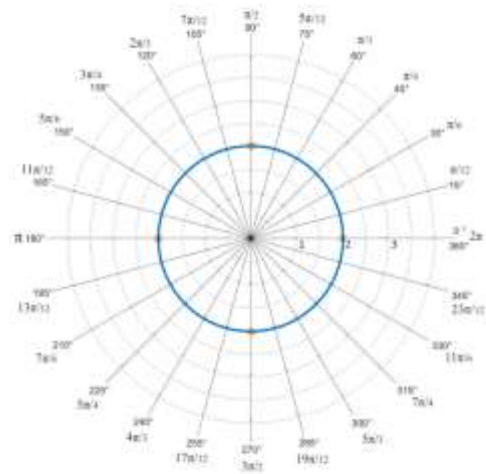
Por inspección de la ecuación dada se concluye que es un círculo con centro en el polo y que tiene radio 2.

Se elabora la tabla de valores:

	θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	r	2	2	2	2	2

Se traza la gráfica:





Ejemplo 5:

Graficar $r_1 = 2a\cos(\theta)$ y $r_2 = -2a\cos(\theta)$, analizar el resultado.

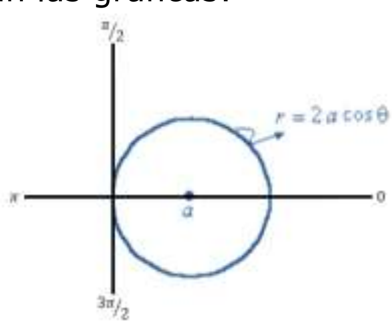
Solución:

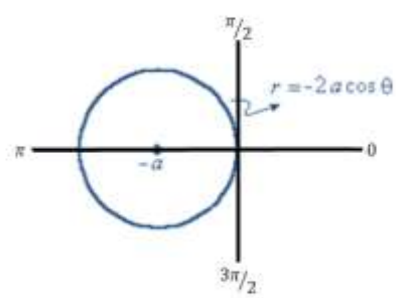
Al analizar las ecuaciones dadas se concluye que son círculos de radio a.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta π:

	θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
	r_1	2a	$\sqrt{2}a$	0	$-\sqrt{2}a$	-2a
	r_2	-2a	$-\sqrt{2}a$	0	$\sqrt{2}a$	2a

Se trazan las gráficas:





Se aprecia en las gráficas que la función coseno tiene simetría respecto al Eje Polar, si a es positiva se ubica a la derecha del Eje $\pi/2$ y si a es negativa se ubica a la izquierda del Eje $\pi/2$.

Ejemplo 6:

Graficar $r_1 = 2a\,\mathrm{sen}(\theta)$ y $r_2 = -2a\,\mathrm{sen}(\theta)$, analizar el resultado.

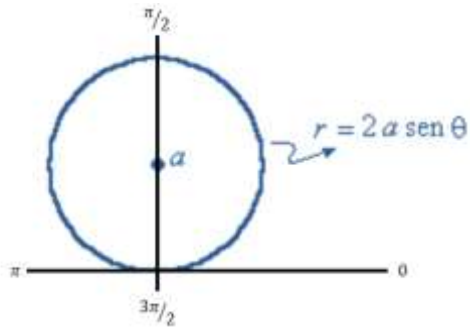
Solución:

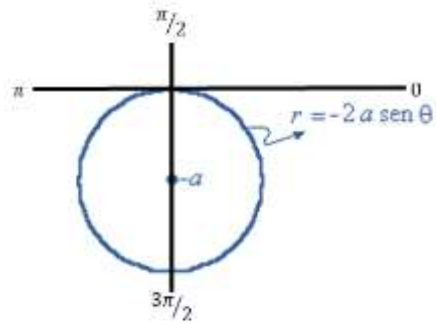
Al estudiar las ecuaciones dadas se concluye que son círculos de radio a.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta π:

	θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
	r_1	0	$\sqrt{2}a$	2a	$\sqrt{2}a$	0
	r_2	0	$-\sqrt{2}a$	-2a	$-\sqrt{2}a$	0

Se trazan las gráficas:





Se aprecia en las gráficas que la función seno tiene simetría respecto al Eje $\pi/2$, si a es positiva se ubica sobre el Eje Polar y si a es negativa se ubica bajo el Eje Polar.

Ejemplo 7:

Graficar $r = 6 + 6 \cdot \cos(\theta)$.

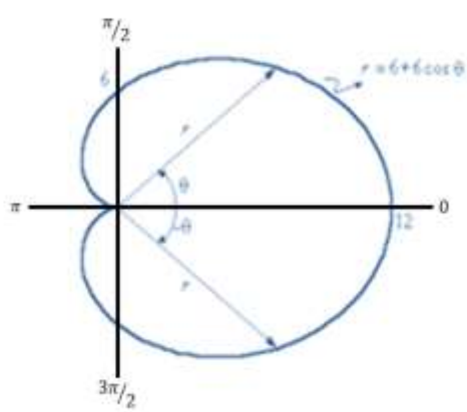
Solución:

Por inspección de la ecuación dada se concluye que es un caracol, como $\frac{a}{b} = \frac{6}{6} = 1$ tiene forma de corazón (cardiode).

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta 2π:

	θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
	r	12	10,24	6	1,76	0	1,76	6	10,24	12

Se traza la gráfica:



Ejemplo 8:

Graficar $r = 4 \cdot \text{sen}(2\theta)$.

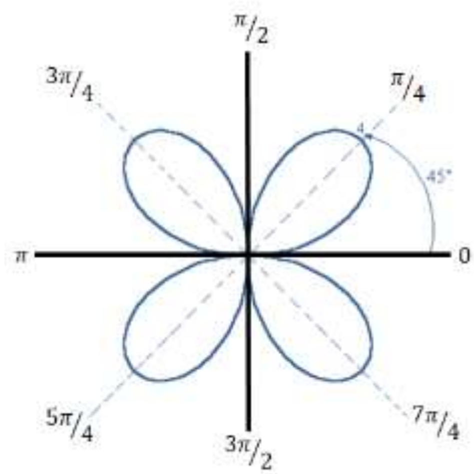
Solución:

Al verificar la ecuación dada se concluye que es una rosa, como $n = 2$ número par tiene $2n = 4$ pétalos.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta 2π:

	θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
	r	0	4	0	4	0	4	0	4	0

Se traza la gráfica:



Ejemplo 9:

Graficar $r = 4 \cdot \cos(3\theta)$.

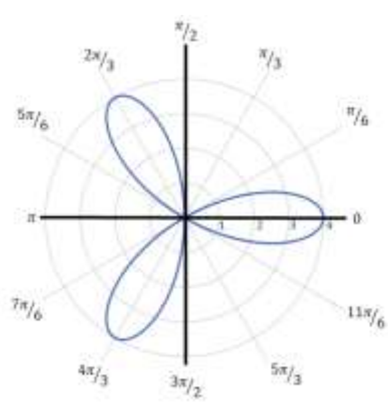
Solución:

Al revisar la ecuación dada se identifica que es una rosa, como $n = 3$ número impar tiene $n = 3$ pétalos.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta π:

	θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
	r	4	0	-4	0	4	0	-4

Se traza la gráfica:



Ejemplo 10:

Graficar $r^2 = 4 \cdot \operatorname{sen}(2\theta)$.

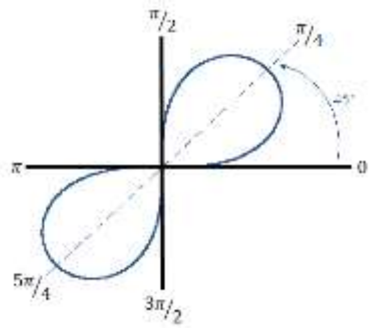
Solución:

Al analizar la ecuación dada se identifica que es una lemniscata.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta 2π:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	2	0	$\nexists$	0	2	0	$\nexists$	0

Se traza la gráfica:



Ejemplo 11:

Graficar $r = \theta$.

Solución:

Al analizar la ecuación dada se identifica que es una Espiral de Arquímedes curva abierta, por lo tanto se trabaja tanto los valores negativos como los positivos, para este ejemplo se elabora por separado cada tabla y gráfica para ayudar en la construcción final de la gráfica solicitada.

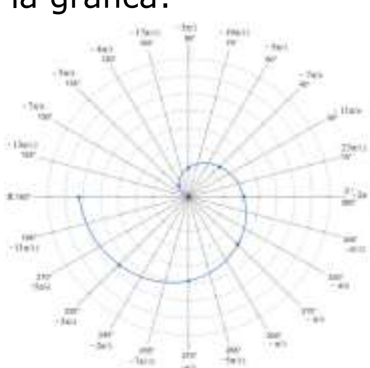
Se elabora la tabla de valores desde -2π hasta 0:

θ	-2π	$-\,^{7\pi}/_4$	$-\,^{3\pi}/_2$	$-\,^{5\pi}/_4$	$-\pi$	$-\,^{3\pi}/_4$	$-\,^{\pi}/_2$	$-\,^{\pi}/_4$	0
r	-6,3	-5,5	-4,7	-3,9	-3,1	-2,4	-1,6	-0,8	0

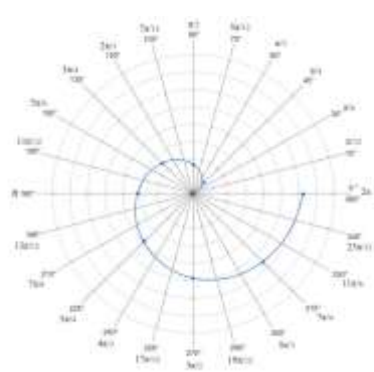
Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta 2π:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	0,8	1,6	2,4	3,1	3,9	4,7	5,5	6,3

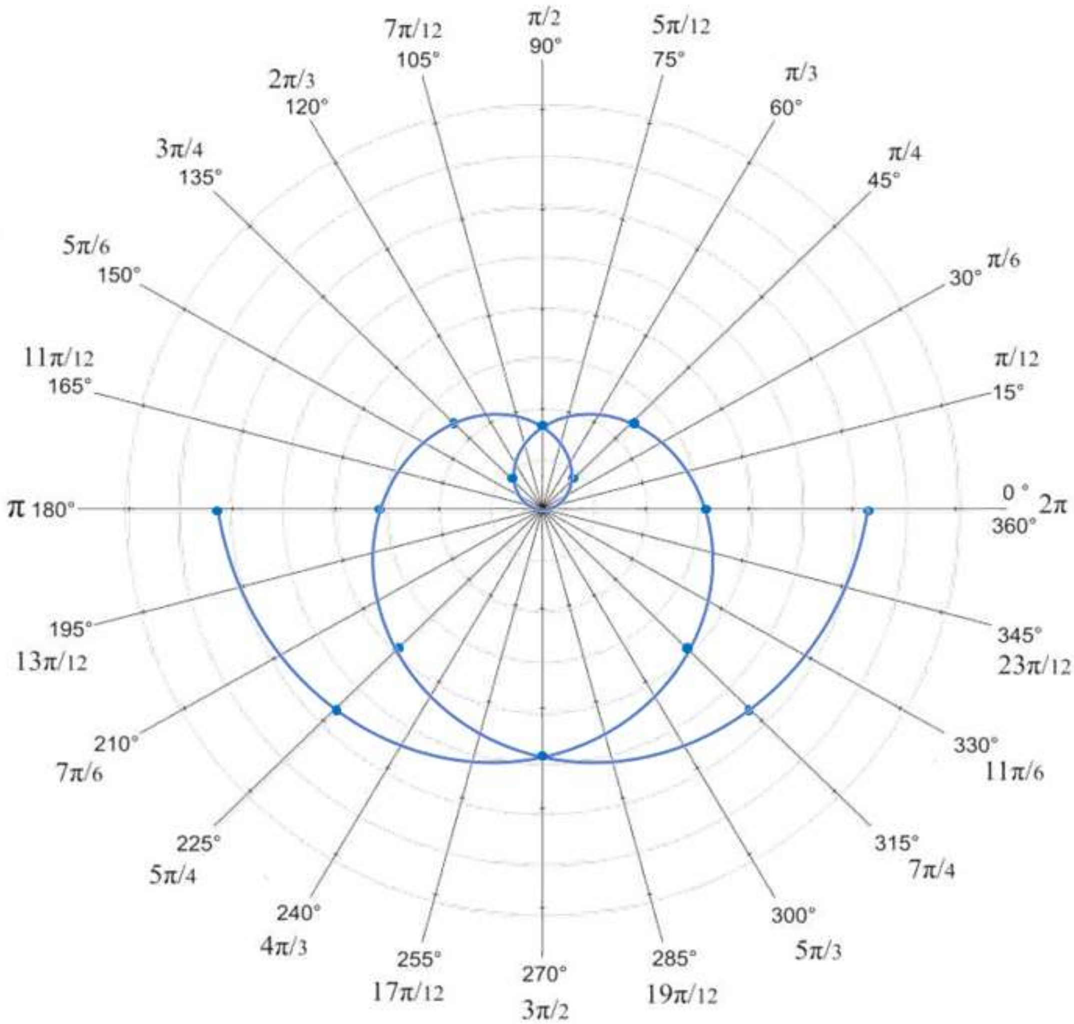
Se traza la gráfica:



$-2\pi \leq \theta \leq 0$



$0 \leq \theta \leq 2\pi$



$-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

5. Tangentes a la Curva en Coordenadas Polares.

Pendiente en Coordenadas Polares: Si f es una función derivable de θ, donde $r = f(\theta)$, $x = r \cdot \cos(\theta) = f(\theta) \cdot \cos(\theta)$ y $y = r \cdot \operatorname{sen}(\theta) = f(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta)$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto (r, θ) es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cdot \cos\theta + f'(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta}{-f(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta + f'(\theta) \cdot \cos\theta}$$

Siempre que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ en (r, θ).

Rectas Tangentes en el Polo: Si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, la recta $\theta = \alpha$ es tangente en el polo a la gráfica de $r = f(\theta)$.

Ejemplo 12:

Hallar los puntos de tangencia horizontal y vertical si los hay, para el caracol $r = 2 - 2 \cdot \cos(\theta)$.

Solución:

Se plantea x: $x = [2 - 2 \cdot \cos(\theta)] \cdot \cos(\theta) = 2 \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot \cos^2(\theta)$

Se halla $\frac{dx}{d\theta}$: $\frac{dx}{d\theta} = -2 \cdot \mathrm{sen}(\theta) + 4 \cdot \cos(\theta) \cdot \mathrm{sen}(\theta)$

Se saca factor común: $\frac{dx}{d\theta} = 2 \cdot \mathrm{sen}(\theta) \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]$

Se iguala $\frac{dx}{d\theta}$ a cero: $\frac{dx}{d\theta} = 2 \cdot \mathrm{sen}(\theta) \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] = 0$

Se obtienen 2 opciones: $2 \cdot \mathrm{sen}(\theta) = 0$ y $2 \cdot \cos(\theta) - 1 = 0$

Se despejan constantes: $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{0}{2}$ y $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

Se hallan las inversas: $\theta = \mathrm{arcsen}(0)$ y $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

Se obtienen los ángulos: $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi$ y $\theta_3 = \frac{\pi}{3},\ \theta_4 = \frac{5\pi}{3}$

Se plantea y: $y = [2 - 2 \cdot \cos(\theta)] \cdot \mathrm{sen}(\theta)$

Se halla $\frac{dy}{d\theta}$: $\frac{dy}{d\theta} = [2 - 2 \cdot \cos(\theta)] \cdot \cos(\theta) + 2 \cdot \mathrm{sen}(\theta) \cdot \mathrm{sen}(\theta)$

Se saca factor común 2 y se multiplica: $\frac{dy}{d\theta} = 2 \cdot [\cos(\theta) - \cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta)]$

Se sustituye $\mathrm{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$: $\frac{dy}{d\theta} = 2 \cdot [\cos(\theta) - \cos^2(\theta) + 1 - \cos^2(\theta)]$

Se suma, se saca el signo y se ordena: $\frac{dy}{d\theta} = -2 \cdot [2 \cdot \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 1]$

Se factoriza la expresión: $\frac{dy}{d\theta} = -2 \cdot (2 \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot (\cos(\theta) - 1)$

Se iguala $\frac{dy}{d\theta}$ a cero: $\frac{dy}{d\theta} = -2 \cdot (2 \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot (\cos(\theta) - 1) = 0$

Se obtienen 2 opciones: $2 \cdot \cos(\theta) + 1 = 0$ y $\cos(\theta) - 1 = 0$

Se despejan constantes: $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ y $\cos(\theta) = 1$

Se hallan las inversas: $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $\theta = \arccos(1)$

Se obtienen los ángulos: $\theta_5 = \frac{2\pi}{3},\ \theta_6 = \frac{4\pi}{3}$ y $\theta_7 = 0 = \theta_1$

Se halla las tangentes verticales donde: $m = \infty,\ \frac{dx}{d\theta} = 0$ y $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$.

Se analiza para $\theta_1 = \theta_7 = 0$: $\frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta} = 0$ No hay tangente horizontal, ni vertical.

Se analiza para $\theta_2 = \pi$: $r = 2 - 2 \cdot \cos(\pi) = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$, Punto $(4, \pi)$

Se analiza para $\theta_3 = \frac{\pi}{3}$: $r = 2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1$, Punto $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$

Se analiza para $\theta_4 = \frac{5\pi}{3}$: $r = 2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1$, Punto $\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$

Se halla las tangentes horizontales donde: $m = 0,\ \frac{dx}{d\theta} \neq 0$ y $\frac{dy}{d\theta} = 0$.

Se analiza para $\theta_5 = \frac{2\pi}{3}$: $r = 2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$, Punto $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$

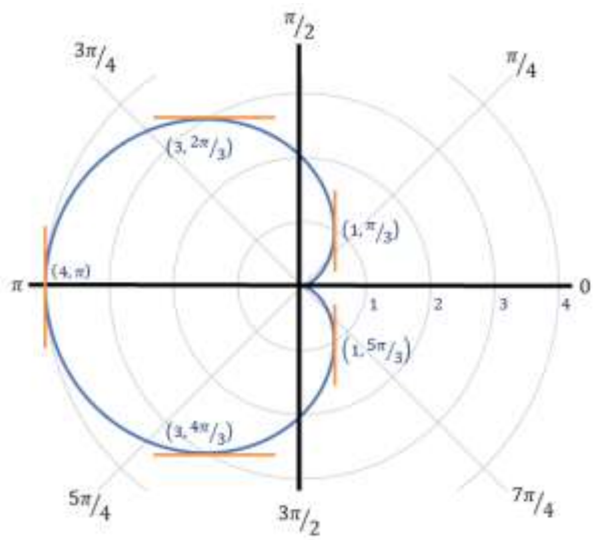
Se analiza para $\theta_6 = \frac{4\pi}{3}$: $r = 2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$, Punto $\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

Se realiza la gráfica como en la sección anterior, es un cardiode ya que $\frac{a}{b} = 1$.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta 2π:

	θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
	r	0	0,6	2	3,4	4	3,4	2	0,6	0

Se traza la gráfica:



Ejemplo 13:

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el polo si las hay, para la rosa $r = 2 \cdot \cos(3\theta)$.

Solución:

Se halla r': $\quad r' = -2 \cdot 3 \cdot \text{sen}(3\theta) = -6 \cdot \text{sen}(3\theta)$

Se iguala r a cero: $\quad r = 2 \cdot \cos(3\theta) = 0$

Se despeja la constante: $\quad \cos(3\theta) = \frac{0}{2}$

Se halla la inversa: $\quad 3\theta = \arccos(0)$

Se obtienen 3 opciones: $\quad 3\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad 3\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ y $3\theta_3 = \frac{5\pi}{2}$

Se despeja la constante: $\quad \theta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_3 = \frac{5\pi}{6}$

Se analiza para $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$: $\quad r' = -6 \cdot \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -6 \neq 0$, Tangente en el Polo.

Se analiza para $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$: $\quad r' = -6 \cdot \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 6 \neq 0$, Tangente en el Polo.

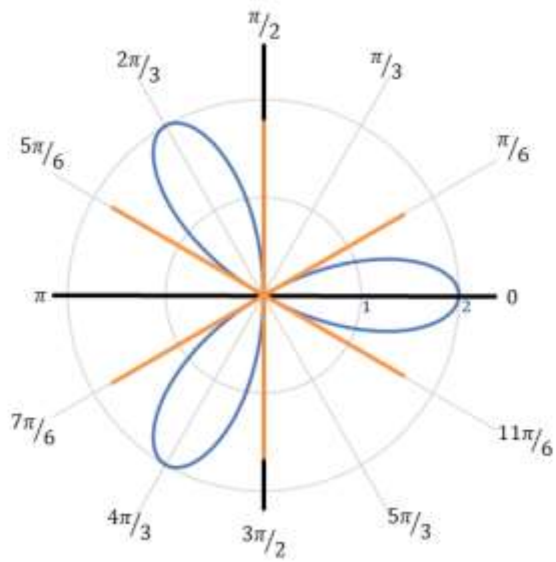
Se analiza para $\theta_3 = \frac{5\pi}{6}$: $\quad r' = -6 \cdot \text{sen}\left(3 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) = -6 \neq 0$, Tangente en el Polo.

Se grafica como en la sección anterior, rosa impar $n = 3$ pétalos.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta π:

	θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
	r	2	0	-2	0	2	0	-2

Se traza la gráfica:



6. Cálculo de Áreas en Coordenadas Polares.

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, el área de la región limitada por la gráfica de $r = f(\theta)$ entre las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ viene dada por:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$$

Ejemplo 14:

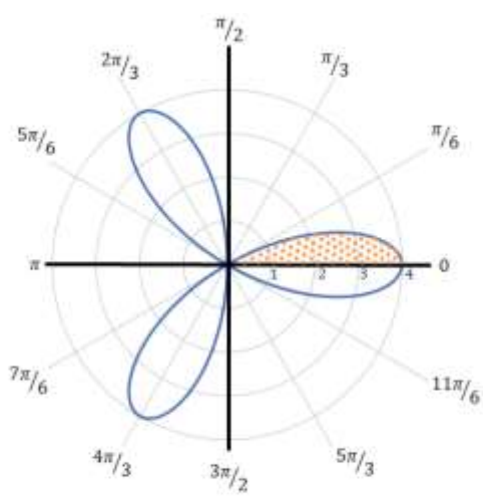
Hallar el área de un pétalo de la rosa $r = 4 \cdot \cos(3\theta)$.

Solución:

Primero se grafica la curva como se realiza en la sección anterior (ver ejemplo 9).

	θ	0	$\pi/_6$	$\pi/_3$	$\pi/_2$	$2\pi/_3$	$5\pi/_6$	π
	r	4	0	-4	0	4	0	-4

Se traza la gráfica:



Se analizan las características de la rosa y se puede decir que cada pétalo es simétrico (como se observa en la figura), por ende se halla el área de medio pétalo (región sombreada) y se multiplica por dos para obtener el resultado deseado.

Se identifica entonces, en los valores de la tabla para el primer pétalo el ángulo inicial $\alpha = 0$ y el ángulo final $\beta = {}^{\pi}/_{6}$.

Otra forma de hallar β, es obtener el valor del ángulo donde el pétalo pasa por el polo, para ello:

Se iguala a cero el radio. $r = 4 \cdot \cos(3\theta) = 0$

Se despeja a dividir la constante: $\cos(3\theta) = \frac{0}{4}$

Se despeja el coseno: $3\theta = \arccos(0)$

Se halla el valor del arco coseno: $3\theta = {}^{\pi}/_{2}$

Se despeja a dividir la constante: $\theta = \frac{\pi}{2 \cdot 3} = \frac{\pi}{6}$

Los otros cortes con el polo son: $\theta = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

Luego, se usa la ecuación del cálculo de un área en coordenadas polares:

Se plantea el área de un pétalo: $A_{Pétalo} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_{Pétalo} = \int_{0}^{\pi/6} [4 \cdot \cos(3\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se eleva al cuadrado: $A_{Pétalo} = \int_{0}^{\pi/6} 4^2 \cdot \cos^2(3\theta) \cdot d\theta$

Se utiliza $\cos^2(\alpha) = \frac{1+cos[2\alpha]}{2}$: $A_{Pétalo} = \int_{0}^{\pi/6} 16 \cdot \frac{1+\cos(6\theta)}{2} \cdot d\theta$

Se sacan las constantes: $A_{Pétalo} = \frac{16}{2} \cdot \int_{0}^{\pi/6} [1 + \cos(6\theta)] \cdot d\theta$

Se separan las integrales: $A_{Pétalo} = 8 \cdot \left[\int_{0}^{\pi/6} d\theta + \int_{0}^{\pi/6} \cos(6\theta) \cdot d\theta\right]$

Se resuelven las integrales: $A_{Pétalo} = 8 \cdot \left[\theta\Big|_{0}^{\pi/6} + \frac{1}{6} \operatorname{sen}(6\theta)\Big|_{0}^{\pi/6}\right]$

Se sustituyen los extremos: $A_{Pétalo} = 8 \cdot \left[\frac{\pi}{6} - 0\right] + \frac{8}{6} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}(6 \cdot 0)\right]$

Se resuelven las fracciones: $A_{Pétalo} = \frac{8\pi}{6} + \frac{4}{3} \cdot [\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0)]$

Se hallan los valores del seno: $A_{Pétalo} = \frac{4\pi}{3} + \frac{4}{3} \cdot [0 - 0]$

Se obtiene el resultado: $A_{Pétalo} = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19 \ Unidades\ de\ Área$

Ejemplo 15:

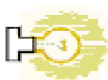
Hallar el área de la región comprendida entre los lazos interior y exterior del caracol $r = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}(\theta)$.

Solución:

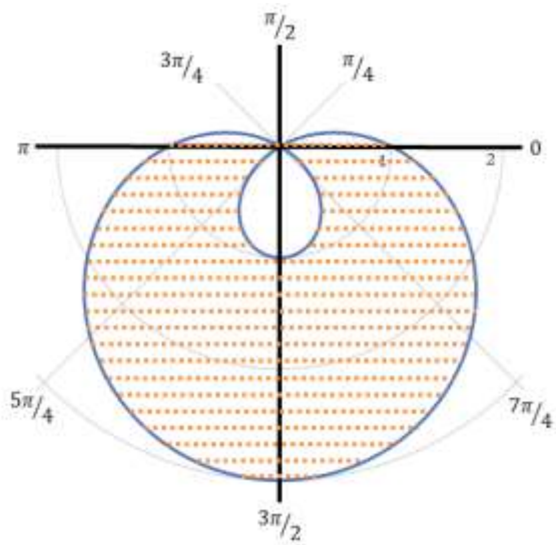
Primero se grafica la curva como se realiza en la sección anterior.

Al verificar la ecuación dada se concluye que es un caracol con lazo interno, dado que $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} = 0{,}5 < 1$.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta 2π:

	θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
	r	1	-0,4	-1	-0,4	1	2,4	3	2,4	1

Se traza la gráfica:



Se analizan las características del caracol y se puede decir que es simétrico respecto al eje $\pi/2$ (como se observa en la figura), por ende si se desea usar esta información se debe demostrar la simetría como se indica en la parte 3 (Ejemplo 2) y se multiplica por dos el área para obtener el resultado deseado.

Se obtiene el valor del ángulo donde la curva pasa por el polo, para ello:

Se iguala a cero el radio: $r = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}(\theta) = 0$

Se despeja la resta: $1 = 0 + 2 \cdot \operatorname{sen}(\theta)$

Se despeja a dividir la constante: $\frac{1}{2} = \operatorname{sen}(\theta)$

Se invierten los términos: $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$

Se despeja el seno: $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$

Se halla el valor del arco seno: $\theta = \pi/6$

Se despeja a dividir la constante: $\theta = \frac{\pi}{2\cdot 3} = \frac{\pi}{6}$

Los dos cortes con el polo son: $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ y $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$

Luego, se usa la ecuación del cálculo de un área en coordenadas polares:

Se identifica entonces que para el lazo interno el ángulo de inicio es $\alpha = \pi/6$ y el ángulo final es $\beta = 5\pi/6$.

Se plantea el área del lazo interno: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [1 - 2 \cdot \text{sen}(\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se eleva al cuadrado: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \text{sen}(\theta) + 2^2 \cdot \text{sen}^2(\theta)] \cdot d\theta$

Se utiliza $\text{sen}^2(\alpha) = \frac{1-cos[2\alpha]}{2}$: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[1 - 4 \cdot \text{sen}(\theta) + 4 \cdot \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right] \cdot d\theta$

Se separan las integrales: $A_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} 4 \cdot \text{sen}(\theta) \cdot d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} 4 \cdot \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \cdot d\theta$

Se sacan las constantes: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta - \frac{4}{2} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \text{sen}(\theta) \cdot d\theta + \frac{4}{4} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 1 - \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se separa: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta - 2 \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \text{sen}(\theta) \cdot d\theta + 1 \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta - 1 \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se suman las iguales: $A_1 = \frac{3}{2} \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta - 2 \cdot \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \text{sen}(\theta) \cdot d\theta - \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se resuelven las integrales: $A_1 = \frac{3}{2} \cdot \theta\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} + 2 \cdot \cos(\theta)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2\theta)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}$

Sustituye extremos: $A_1 = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right] + 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] - \frac{1}{2} \cdot \left[\text{sen}\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right]$

Se resuelven los cálculos: $A_1 = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{2\pi}{3}\right] + 2 \cdot \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Se hallan las sumas y productos: $A_1 = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Se identifica entonces que para el lazo externo el ángulo de inicio es $\alpha = {}^{5\pi}/_{6}$ y el ángulo final es $\beta = 2\pi + \frac{\pi}{6} = {}^{13\pi}/_{6}$.

Se plantea el área del lazo externo: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} [1 - 2 \cdot \text{sen}(\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se eleva al cuadrado: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} [1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \text{sen}(\theta) + 2^2 \cdot \text{sen}^2(\theta)] \cdot d\theta$

Se utiliza $\text{sen}^2(\alpha) = \frac{1-cos[2\alpha]}{2}$: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} \left[1 - 4 \cdot \text{sen}(\theta) + 4 \cdot \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right] \cdot d\theta$

Se separan: $A_2 = \frac{1}{2}\int_{5\pi/6}^{13\pi/6} d\theta - \frac{1}{2}\int_{5\pi/6}^{13\pi/6} 4 \cdot \text{sen}(\theta) \cdot d\theta + \frac{1}{2}\int_{5\pi/6}^{13\pi/6} 4 \cdot \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \cdot d\theta$

Se sacan las constantes: $A_2 = \frac{1}{2}\int_{5\pi/6}^{13\pi/6} d\theta - \frac{4}{2} \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} \text{sen}(\theta) \cdot d\theta + \frac{4}{4} \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} 1 - \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se separan: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} d\theta - 2 \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} \text{sen}(\theta) \cdot d\theta + 1 \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} d\theta - 1 \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se suman las iguales: $A_2 = \frac{3}{2} \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} d\theta - 2 \cdot \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} \text{sen}(\theta) \cdot d\theta - \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se resuelven las integrales: $A_2 = \frac{3}{2} \cdot \theta\Big|_{5\pi/6}^{13\pi/6} + 2 \cdot \cos(\theta)\Big|_{5\pi/6}^{13\pi/6} - \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2\theta)\Big|_{5\pi/6}^{13\pi/6}$

Se sustituye: $A_2 = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{13\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right] + 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] - \frac{1}{2} \cdot \left[\text{sen}\left(2 \cdot \frac{13\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right)\right]$

Se resuelven los cálculos: $A_2 = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{4\pi}{3}\right] + 2 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Se hallan las sumas y productos: $A_2 = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

El área de la región comprendida entre los dos lazos (región sombreada) es la diferencia entre A_2 y A_1.

Se plantea la diferencia de áreas: $A = A_2 - A_1$

Se sustituyen las áreas: $A = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Se obtiene el resultado: $A = \pi + 3\sqrt{3} \approx 8{,}34 \ Unidades\ de\ Área$

Ejemplo 16:

Hallar el área de la región dentro de la ecuación $r_1 = -6 \cdot \cos(\theta)$ y fuera de la ecuación $r_2 = 2 - 2 \cdot \cos(\theta)$.

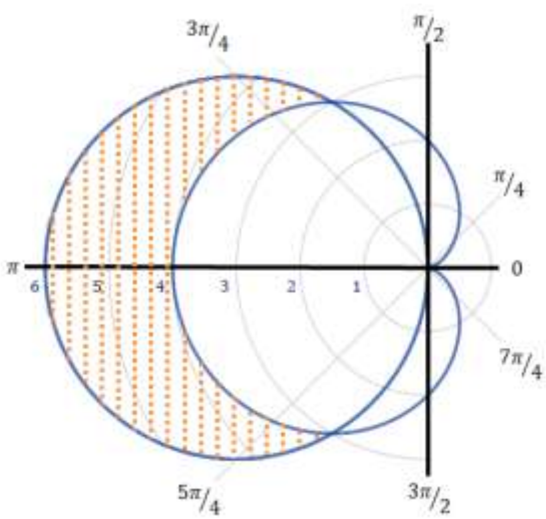
Solución:

Primero se grafican las curvas como en la sección anterior. Al verificar r_1 se observa que es un círculo a la izquierda del Eje $^{\pi}/_{2}$ el cual se traza en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y r_2 se concluye que es un caracol cardiode, dado que $\frac{a}{b} = \frac{2}{2} = 1$.

Se elabora la tabla de valores desde 0 hasta 2π:

	θ	0	$^{\pi}/_{4}$	$^{\pi}/_{2}$	$^{3\pi}/_{4}$	π	$^{5\pi}/_{4}$	$^{3\pi}/_{2}$	$^{7\pi}/_{4}$	2π
	r_1	-6	-4,2	0	4,2	6	4,2	0	-4,2	-6
	r_2	0	0,6	2	3,4	4	3,4	2	0,6	0

Se traza la gráfica:



Se obtiene el valor de las intersecciones de las dos ecuaciones, para ello:

Se igualan las ecuaciones: $r_1 = r_2$

Se sustituyen las funciones: $-6 \cdot \cos(\theta) = 2 - 2 \cdot \cos(\theta)$

Se despeja la resta: $2 \cdot \cos(\theta) - 6 \cdot \cos(\theta) = 2$

Se restan los cosenos: $-4 \cdot \cos(\theta) = 2$

Se despeja a dividir la constante: $\cos(\theta) = \frac{2}{-4}$

Se simplifica la fracción: $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$

Se despeja el coseno: $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

Se halla el valor del arco coseno: $\theta = {}^{2\pi}/_{3}$

Las dos intersecciones son: $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ y $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$

Se identifica entonces que el área inicia en el ángulo $\alpha = {}^{2\pi}/_{3}$ y termina en el ángulo $\beta = {}^{4\pi}/_{3}$.

Luego, se usa la ecuación del cálculo de un área en coordenadas polares:

Se plantea el área mayor (círculo): $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} [-6 \cdot \cos(\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se eleva al cuadrado: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (-6)^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot d\theta$

Se utiliza $\cos^2(\alpha) = \frac{1+cos[2\alpha]}{2}$: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 36 \cdot \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \cdot d\theta$

Se sacan las constantes: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} [1 + \cos(2\theta)] \cdot d\theta$

Se separan las integrales: $A_1 = 9 \cdot \left[\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\theta + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos(2\theta) \cdot d\theta\right]$

Se resuelven las integrales: $A_1 = 9 \cdot \left[\theta\Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3}\right]$

Se sustituyen los extremos: $A_1 = 9 \cdot \left[\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right] + \frac{9}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

Se resuelven las fracciones: $A_1 = 9 \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{9}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left({}^{8\pi}/_{3}\right) - \operatorname{sen}\left({}^{4\pi}/_{3}\right)\right]$

Se hallan los valores del seno: $A_1 = 6\pi + \frac{9}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

Se suman las raíces: $A_1 = 6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Se plantea el área menor (cardiode): $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} [2 - 2 \cdot \cos(\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se eleva al cuadrado: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} [2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos(\theta) + 2^2 \cdot \cos^2(\theta)] \cdot d\theta$

Se utiliza $\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-cos[2\alpha]}{2}$: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \left[4 - 8 \cdot \cos(\theta) + 4 \cdot \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right] \cdot d\theta$

Se separan: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 4 \cdot d\theta - \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 8 \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta + \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 4 \cdot \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \cdot d\theta$

Se sacan constantes: $A_2 = \frac{4}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\theta - \frac{8}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos(\theta) \cdot d\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 1 + \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se separan: $A_2 = 2 \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\theta - 4 \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos(\theta) \cdot d\theta + 1 \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 1 \cdot d\theta + 1 \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se suman las iguales: $A_2 = 3 \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\theta - 4 \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos(\theta) \cdot d\theta + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos(2\theta) \cdot d\theta$

Se resuelven las integrales: $A_2 = 3 \cdot \theta\Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} - 4 \cdot \operatorname{sen}(\theta)\Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\theta)\Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3}$

Se sustituye: $A_2 = 3 \cdot \left[\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right] - 4 \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

Se resuelven los cálculos: $A_2 = 3 \cdot \left[\frac{2\pi}{3}\right] - 4 \cdot \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

Se hallan las sumas y productos: $A_2 = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$

El área de la región es la diferencia entre A_1 y A_2.

Se plantea la diferencia de áreas: $A = A_1 - A_2$

Se sustituyen las áreas: $A = 6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} - \left(2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

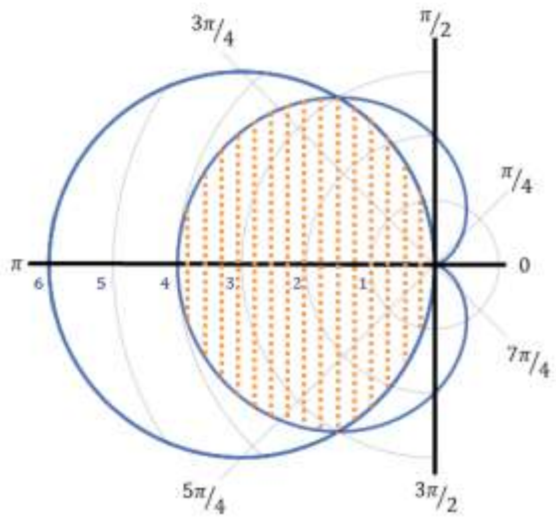
Se obtiene el resultado: $A = 4\pi \approx 12{,}57\ \mathit{Unidades\ de\ Área}$

Ejemplo 17:

Hallar el área de la región común a $r_1 = -6 \cdot \cos(\theta)$ y $r_2 = 2 - 2 \cdot \cos(\theta)$.

Solución:

Se traza la gráfica como en el ejemplo 16:



Se puede observar tanto en la tabla de valores (ejemplo 16) como en la gráfica, que el círculo se traza por completo en el intervalo $\left(\pi/2, 3\pi/2\right)$.

Se obtiene el valor de las intersecciones de las dos ecuaciones, para ello al igual que en el ejemplo 16 se siguen los pasos:

Se igualan las ecuaciones: $r_1 = r_2$

Se sustituyen las funciones: $-6 \cdot \cos(\theta) = 2 - 2 \cdot \cos(\theta)$

Las dos intersecciones son: $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ y $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$

Se identifica entonces que el área superior del círculo inicia en el ángulo $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$ y termina en el ángulo $\beta = \theta_1 = {}^{2\pi}/_{3}$ (primer punto de intersección).
Luego, se usa la ecuación del cálculo de un área en coordenadas polares:
Se plantea la mitad superior del área círculo: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi/2}^{2\pi/3} [-6 \cdot \cos(\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se resuelven las integrales: $A_1 = 9 \cdot \left[\theta \Big|_{\pi/2}^{2\pi/3} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \Big|_{\pi/2}^{2\pi/3} \right]$

Se sustituyen los extremos: $A_1 = 9 \cdot \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{9}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]$

Se resuelven las fracciones: $A_1 = 9 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{9}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left({}^{4\pi}/_{3}\right) - \operatorname{sen}(\pi)\right]$

Se hallan los valores del seno: $A_1 = \frac{3\pi}{2} + \frac{9}{2} \cdot \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - (0)\right]$

Se obtiene el valor: $A_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}$

Se identifica que el área inferior del círculo inicia en el ángulo $\alpha = \theta_2 = {}^{4\pi}/_{3}$ (segundo punto de intersección) y termina en el ángulo $\beta = {}^{3\pi}/_{2}$, por lo que es igual al área superior del círculo.
Se plantea la mitad inferior del área círculo: $A_3 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_3 = \frac{1}{2} \cdot \int_{4\pi/3}^{3\pi/2} [-6 \cdot \cos(\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se obtiene el valor: $A_3 = A_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}$

Se identifica entonces que el área del cardiode inicia en el ángulo $\alpha = {}^{2\pi}/_{3}$ y termina en el ángulo $\beta = {}^{4\pi}/_{3}$, se resuelve como el ejemplo 16.
Se plantea el área del cardiode: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$

Se sustituyen los valores: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} [2 - 2 \cdot \cos(\theta)]^2 \cdot d\theta$

Se resuelven las integrales: $A_2 = 3 \cdot \theta \Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} - 4 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\theta) \Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3}$

Se sustituye: $A_2 = 3 \cdot \left[\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right] - 4 \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

Se hallan las sumas y productos: $A_2 = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$

El área de la región común que es la suma entre A_1, A_2 y A_3.
Se plantea la suma de áreas: $A = A_1 + A_2 + A_3$

Se sustituyen las áreas: $A = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}$

Se obtiene el resultado: $A = 5\pi \approx 15{,}71 \ \textit{Unidades de Área}$

Para Ampliar la Información Consulte:

El libro:

Larson, R; Hostetler, R y Edwards, B. Cálculo y Geometría Analítica Volumen 2. Sexta Edición, Mc Graw Hill.

Y los enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=h_VFWLnZxno
https://www.youtube.com/watch?v=ejDaDvpJm6g
https://www.youtube.com/watch?v=fah7D4nmvxA
https://www.youtube.com/watch?v=2S4QOSnIpmg
https://www.youtube.com/watch?v=AuX0ylfErpI
https://www.youtube.com/watch?v=2_BDL2WfUN0