Departamento de Matemática y Física
Curso: Matemática III
Código: 0826301

Transformaciones Lineales

Arelis Díaz

Celular: 04269129844
Email: jdiaz@unet.edu.ve

Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

$$\boxed{\begin{array}{c} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \\ \mathbf{y} \\ T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v} \end{array}}$$

Se escriben indistintamente $T\mathbf{v}$ y $T(\mathbf{v})$. Denotan lo mismo; las dos se leen "T de $\mathbf{v}$". Esto es análogo a la notación funcional $f(x)$, que se lee "f de x".

Las transformaciones lineales con frecuencia se denominan **operadores lineales.**

EJEMPLO

Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$. Por ejemplo, $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Entonces

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Así,

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

De manera similar,

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha x-\alpha y\\3\alpha y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x+y\\x-\boldsymbol{y}\\3y\end{pmatrix}=\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Así, T es una transformación lineal.

Por ejemplo la función $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\\x-1\end{pmatrix}$ no es una transformación lineal porque:

- $T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\y_1+y_2\\x_1+x_2-1\end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\y_1\\x_1-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+y_2\\y_2\\x_2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\y_1+y_2\\x_1+x_2-2\end{pmatrix}\neq T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)$
- $T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha y\\\alpha x-1\end{pmatrix}\neq\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x+y\\y\\x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha y\\\alpha x-\alpha\end{pmatrix}$

EJEMPLO La transformación cero

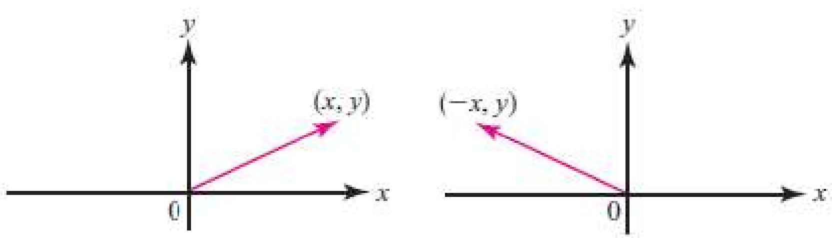
Sean V y W espacios vectoriales y defina T: $V \to W$ por $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Entonces $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2$ y $T(\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} = \alpha T\mathbf{v}$. En este caso, T se denomina la **transformación cero**.

EJEMPLO La transformación identidad

Sea V un espacio vectorial y defina I: $V \to V$ por $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Aquí es obvio que I es una transformación lineal, la cual se denomina **transformación identidad** u **operador identidad**.

EJEMPLO Transformación de reflexión

Sea T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Es fácil verificar que T es lineal. En términos geométricos, T toma un vector en $\mathbb{R}^2$ y lo refleja respecto al eje y



El vector $(-x, y)$ es la reflexión respecto al eje y del vector (x, y).

Ejercicios Propuestos:

Determine si la transformación de V en W dada es lineal.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + z \end{pmatrix}$

4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

5. $T: P_2 \to P_4;\ T(p(x)) = p(x) + x^2 p(x)$

6. $T: C[0, 1] \to C[0, 1];\ Tf(x) = f^2(x)$

7. $T: C[0, 1] \to C[0, 1];\ Tf(x) = f(x) + 1$

8. $T: M_{mn} \to M_{qn};\ T(A) = BA$, donde B es una matriz fija de $q \times m$

9. $T: D_n \to D_n;\ T(D) = D^2$ (D_n es el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$)

10. $T: C[0, 1] \to \mathbb{R};\ Tf = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$, donde g es una función fija en $C[0, 1]$

Propiedades de las transformaciones lineales: imagen y núcleo

Teorema

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces para todos los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en V y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

i) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

ii) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$

iii) $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$

Nota. En el inciso i), el $\mathbf{0}$ de la izquierda es el vector cero en V, mientras que el $\mathbf{0}$ de la derecha es el vector cero en W.

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$. Entonces existe una transformación lineal única $T: V \to W$ tal que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y suponga que $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. Calcule $T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$.

Solución Se tiene $\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Entonces

$$T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}=3T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-4T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=5T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}25\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\-22\end{pmatrix}$$

En general;

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=xT\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+yT\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+zT\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y+5z\\3x+4y-3z\end{pmatrix}$$

Núcleo e imagen de una transformación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea T: $V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

i) El **núcleo** de T, denotado por nu T, está dado por

$$\boxed{\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V: T\mathbf{v} = \mathbf{0}\}}$$

ii) La **imagen** de T, denotado por im T, está dado por

$$\boxed{\text{im T} = \{\mathbf{w} \in W: \mathbf{w} = T\mathbf{v} \text{ para alguna } \mathbf{v} \in V\}}$$

Observación 1. Observe que nu T es no vacio porque, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, de manera que $\mathbf{0} \in$ nu T para cualquier transformación lineal T. Se tiene interés en encontrar otros vectores en V que "se transformen en 0". De nuevo, observe que cuando escribimos $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, el $\mathbf{0}$ de la izquierda está en V y el de la derecha en W.

Observación 2. La imagen de T es simplemente el conjunto de "imágenes" de los vectores en V bajo la transformación T. De hecho, si $\mathbf{w} = T\mathbf{v}$, se dice que $\mathbf{w}$ es la **imagen** de $\mathbf{v}$ bajo T.

EJEMPLO Núcleo e imagen de la transformación cero

Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ (T es la transformación cero). Entonces nu $T = V$ e im $T = \{\mathbf{0}\}$.

EJEMPLO Núcleo e imagen de la transformación identidad

Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ (T es la transformación identidad). Entonces nu $T = \{\mathbf{0}\}$ e im $T = V$.

EJEMPLO

Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $x = y = 0$. Así, nu $T = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y = 0, z \in \mathbb{R}\right\}$

im $T = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = 0\right\}$. Observe que dim nu $T = 1$ y dim im $T = 2$.

Nulidad y rango de una transformación lineal

Si T es una transformación lineal de V en W, entonces se define

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Nulidad de } T = \nu(T) \text{ dim nu } T \\[1ex] \textbf{Rango de } T = \rho(T) = \text{dim im } T\end{array}}$$

Teorema

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con dim $V = n$. Sea $T: V \to W$ una transformación Entonces $\nu(A) + \rho(T) = n$

Definición: Decimos que una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ es

- Monomorfismo $\Leftrightarrow T$ es inyectiva $(Nu(T) = \{\vec{0}\})$
- Epimorfismo $\Leftrightarrow T$ es sobreyectiva $(im(T) = W)$
- Isomorfismo $\Leftrightarrow T$ es biyectiva, es decir, inyectiva y sobreyectiva
- Endomorfismo $\Leftrightarrow V = W$
- Automorfismo $\Leftrightarrow T$ es biyectiva y $V = W$

Ejemplo: Encuentre núcleo, imagen, nulidad y rango de la transformación dada. Clasifíquela.

$$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \;\; ; \;\; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$$

Solución:

Tenemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in nu\,T$ si y sólo si $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De lo anterior tenemos que $x + z = 0$ y $y + w = 0$, así $z = -x$ y $w = -y$.

$$nu\,T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : z = -x \;\wedge w = -y \right\}$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in nu\,T$ si y sólo si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vemos que una base para $nu\,T$ es el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ La nulidad de T es $\nu(T) = 2$.

Para la imagen de T consideramos $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in im\, T$ si y sólo si existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Entonces para que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in im\, T$ el siguiente sistema debe ser compatible.

$$x + z = a$$

$$y + w = b$$

La matriz aumentada del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$ que ya está en la forma escalonada reducida por renglones y vemos que el sistema es compatible indeterminado porque los rangos de la matriz aumentada y de coeficientes son iguales pero diferentes al número de incógnitas.

Entonces para todo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se puede ver que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in im\, T$ Luego $im\, T = \mathbb{R}^2$

Asi el rango de T es $\rho(T) = 2$. Verificamos que: $\nu(T) + \rho(T) = 2 + 2 = 4 = Dim\, \mathbb{R}^4$

Como $\mathrm{Nu}(T) \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ entonces T no es inyectiva y como $im(T) = \mathbb{R}^2$ la función es sobreyectiva y por lo tanto es un epimorfismo.

Ejercicios propuestos: Encuentre núcleo, imagen, nulidad y rango de la transformación dada. Clasifíquela.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$

2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

4. $T: M_{22} \to M_{22};\ T(A) = BA$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. $T: \mathbb{R} \to P_3;\ T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

6. $T: \mathbb{R}^2 \to P_3;\ T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3$