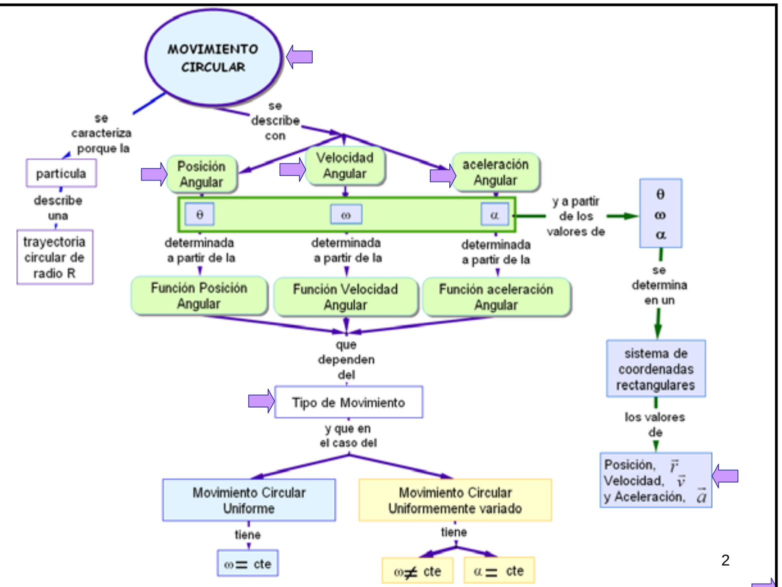
TEMA 3

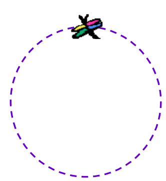
MOVIMIENTO CIRCULAR

Material diseñado y elaborado
por Ing. Neyra Tellez
para el curso de Física I de la UNET.
Marzo, 2009



El movimiento circular es otro tipo de **movimiento bidimensional** y se caracteriza porque la partícula describe una trayectoria circular de radio R.

Ejemplo:

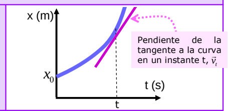
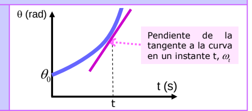
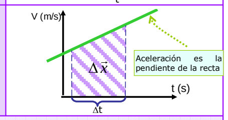
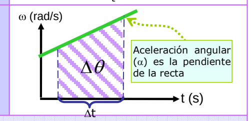
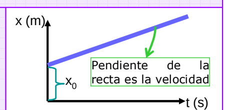
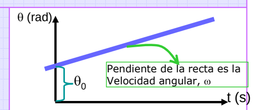
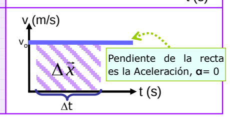
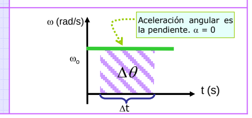


Analogía entre el Movimiento Lineal y Movimiento Circular

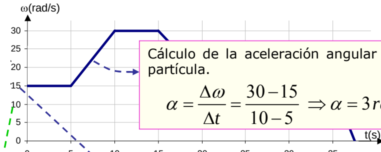
Movimiento rectilíneo uniformemente variado	
Función posición	$\vec{r}_t = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$
Función velocidad	$\vec{v}_t = \vec{v}_o + \vec{a}t$
Función aceleración	$\vec{a}_t = constante$
Movimiento rectilíneo uniforme	
Función posición	$\vec{r}_t = \vec{r}_o + \vec{v}_o t$
Función velocidad	$\vec{v}_t = constante$
Función aceleración	$\vec{a}_t = 0$

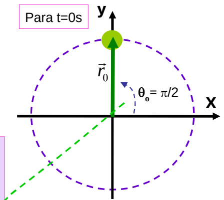
Movimiento circular uniformemente variado	
Función posición angular	$\theta = \theta_o + \vec{\omega}_o t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2$
Función velocidad angular	$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\alpha}t$
Función aceleración angular	$\vec{\alpha} = constante$
Movimiento circular uniforme	
Función posición angular	$\theta = \theta_o + \vec{\omega}_o t$
Función velocidad angular	$\vec{\omega} = constante$
Función aceleración angular	$\vec{\alpha} = 0$

Analogía entre el Movimiento Lineal y Movimiento Circular

Movimiento rectilíneo uniformemente variado		Movimiento circular uniformemente variado	
Gráfica X (t)		Gráfica θ (t)	
Gráfica v (t)		Gráfica ω (t)	
Movimiento rectilíneo uniforme		**Movimiento circular uniforme**	
Gráfica X(t)		Gráfica θ (t)	
Gráfica v(t)		Gráfica ω (t)	

Ejemplo: El gráfico ω(t) describe el movimiento de una partícula, la posición de la partícula en t=0s se muestra en la figura. Determine la posición angular de la partícula en el instante t=10s





Cálculo de la aceleración angular (α) de la partícula.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{30-15}{10-5} \Rightarrow \alpha = 3\,rad/s^2$$

La posición angular de la partícula la podemos determinara partir de:

1. La función posición angular
2. El desplazamiento angular

1. A partir de la función posición angular. Observamos que la partícula está terminando un MCUV, y necesitamos calcular previamente la posición angular con la que comienza este MCUV. Es decir, que estudiaremos el movimiento de la partícula de 0 a 5s y luego de 5 a 10s.

Para 0≤t≤5, MCU

Función Posición angular: $\theta = \theta_0 + \omega\, t$

Para t=0s, θ_0=Π/2 rad y ω=15 rad/s

Por lo tanto: $\theta = \frac{\pi}{2} + 15t$

Para t=5s: $\theta_5 = \frac{\pi}{2} + 15\times5 \Rightarrow \theta_5 = 76{,}571\ rad$

Para 5≤t≤10, MCUV.

Función Posición angular: $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Para t=5s, $\theta_0=\theta_5=76{,}571$ rad y ω_5=15 rad/s

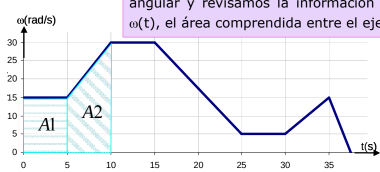
Por lo tanto: $\theta = 76{,}571 + 15t + \frac{1}{2}3t^2$

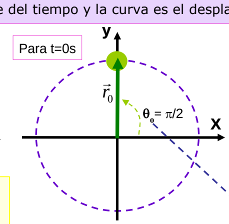
Para t=10s: $\theta_{10} = 76{,}571 + 15\times(10-5) + 1{,}5\times(10-5)^2$

$\theta_{10} = 189{,}071\ rad$

continuación

2. A partir del desplazamiento angular. Recordamos la definición de desplazamiento angular y revisamos la información que disponemos. En este caso a partir de un gráfico ω(t), el área comprendida entre el eje del tiempo y la curva es el desplazamiento angular.





Desplazamiento Angular de 0 a 10s:
$\Delta\theta_{0-10} = \theta_{10} - \theta_0$

Desplazamiento Angular de 0 a 10s, se calcula a partir del gráfico ω(t), como el área:

$$\Delta\theta_{0-10} = A1 + A2 \Rightarrow \Delta\theta_{0-10} = b\times h + \frac{(B+b)}{2}\times h$$

$$\Delta\theta_{0-10} = 15\times5 + \frac{(30+15)}{2}\times5$$

$$\Delta\theta_{0-10} = 187{,}5\ rad$$

Posición Angular en t=10s:

?

Posición Angular en t=0s:
$\theta_0=\pi/2$

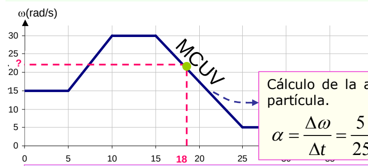
Calculamos la Posición Angular en t=10s:

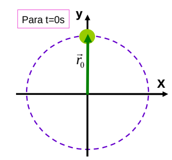
$$\theta_{10} = \Delta\theta_{0-10} + \theta_0$$

$$\theta_{10} = 187{,}5 + \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{10} = 189{,}071\,rad$$

Ejemplo: El gráfico ω(t) describe el movimiento de una partícula, la posición de la partícula en t=0s se muestra en la figura. Determine la Velocidad angular de la partícula en el instante t=18s





Cálculo de la aceleración angular (α) de la partícula.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{5-30}{25-15} \Rightarrow \alpha = -2{,}5\,rad/s^2$$

Para determinar la velocidad angular de la partícula en t=18s, revisamos la información que disponemos. En este caso, es un grafico de velocidad angular en función del tiempo, es decir que podemos leer valores de velocidad angular para determinados instantes de tiempo. Si no logramos leer el valor de la velocidad, podemos construir la función velocidad angular del movimiento que está experimentando la partícula y a partir de ésta función determinamos la velocidad angular para el instante de tiempo indicado.

Observamos que para t=18s no se logra leer la velocidad angular por lo tanto **construimos la función velocidad angular**. También observamos que la partícula en t=18s, está experimentando un MCUV

Para 15≤t≤20, MCUV

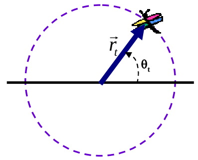
Función Velocidad angular: $\omega = \omega_0 + \alpha t$

Para t=15s, ω_0=30 rad/s. La aceleración angular la determinamos a partir del gráfico ω(t)

Por lo tanto: $\omega = 30 - 5t$

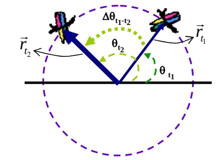
Para t=18s: $\omega_{18} = 30 - 2{,}5\times(18-15) \Rightarrow \omega_{18} = 22{,}5\,rad/s$

Posición Angular (θ): es una forma de describir la posición de la partícula considerando el ángulo que forma el vector posición ($\vec{r}$) con el eje horizontal (x), para un determinado instante de tiempo.
Esta forma de describir la posición de la partícula se expresa en **radianes**.



Sí una partícula se encuentra en movimiento circular entonces su Posición Angular (θ) está cambiando con el tiempo, este cambio se conoce como **desplazamiento angular** ($\Delta\theta$) y se expresa como:

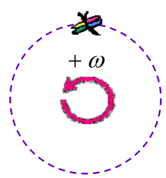
$$\Delta\theta_{t_1-t_2} = \theta_{t_2} - \theta_{t_1}$$

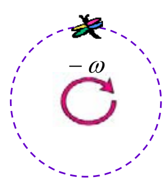


Rapidez Angular (ω): se define como la razón de cambio de la posición angular con respecto al tiempo, es decir:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La interpretación vectorial de la rapidez angular se conoce como **Velocidad Angular** ($\vec{\omega}$). este vector tiene por módulo ω y es perpendicular al plano donde la partícula describe su movimiento circular. Para indicar el sentido de este vector utilizaremos la siguiente convención de signos: el sentido de este vector será positivo si la partícula sigue el movimiento contrario a las agujas del reloj y será negativo si describe el movimiento de las agujas del reloj. La velocidad angular se expresa en rad/s.

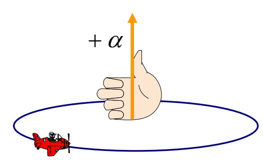




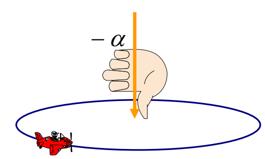
Sí la rapidez angular (ω) de una partícula que se encuentra en movimiento circular está cambiando con el tiempo, decimos que la partícula experimenta una **Aceleración Angular** (α) y ésta se define como la razón de cambio de la velocidad angular con respecto al tiempo, es decir:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

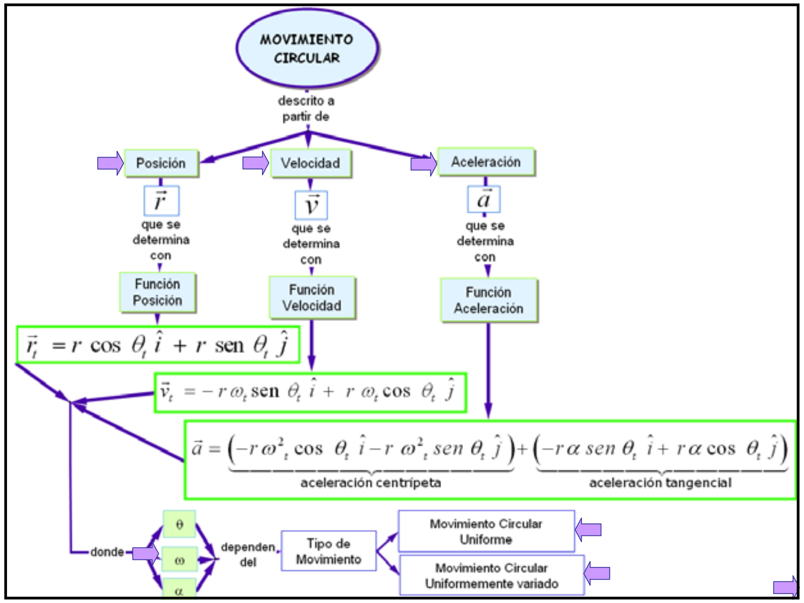
La interpretación vectorial de la aceleración angular se conoce como **Vector Aceleración Angular** ($\vec{\alpha}$). Este vector tiene por módulo α y es perpendicular al plano donde la partícula describe su movimiento circular. Para indicar el sentido de este vector utilizaremos la siguiente convención de signos: el sentido de este vector será positivo sí al aplicar la regla de la mano derecha sale del plano y será negativo sí entra en el plano. La aceleración angular se expresa en rad/s^2.



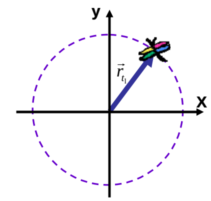
Aceleración angular positiva



Aceleración angular negativa

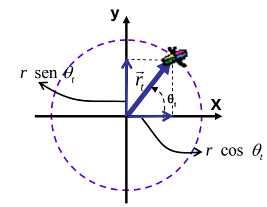


Vector Posición ($\vec{r}$): es la posición que ocupa la partícula en un determinado instante de tiempo con respecto al sistema de coordenadas rectangulares XY.



El vector Posición se ubica desde el origen del sistema de coordenadas hasta el lugar donde se encuentra la partícula, este vector en módulo (r) es constante pero su dirección y sentido esta cambiando con el tiempo y para determinarlo es necesario conocer que posición angular tiene la partícula para un instante de tiempo dado. Se puede determinar la posición de la partícula a partir de:

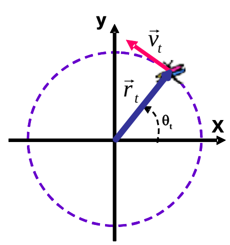
$$\vec{r}_t = r \cos \theta_t \hat{i} + r \text{ sen } \theta_t \hat{j}$$



Velocidad ($\vec{v}$): es la razón de cambio de la posición de la partícula con respecto al tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

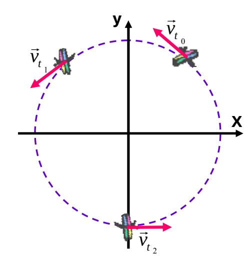
El vector velocidad es tangente a la trayectoria descrita por la partícula durante su movimiento. Para obtener la velocidad de la partícula en un determinado instante de tiempo, es necesario conocer previamente su posición angular y su rapidez angular para ese instante de tiempo. La velocidad se determina a partir de la siguiente expresión:



$$\vec{v}_t = -r\omega_t \text{sen } \theta_t \hat{i} + r \omega_t \cos \theta_t \hat{j}$$

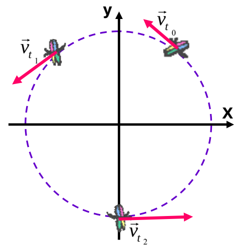
Sí el **Movimiento es circular uniforme** el módulo del vector Velocidad (rapidez, $|\vec{v}|$) es constante en el tiempo pero la dirección y sentido de este vector cambian con respecto al tiempo.

El cambio en dirección y sentido del vector Velocidad se debe a que la partícula esta experimentando una aceleración hacia el centro de la circunferencia denominada **Aceleración centrípeta** .



Sí el **Movimiento es circular uniformemente variado** el vector Velocidad esta cambiando en magnitud, dirección y sentido.

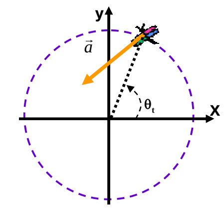
El cambio en dirección y sentido del vector Velocidad se debe a que la partícula esta experimentando una aceleración hacia el centro de la circunferencia denominada **Aceleración centrípeta** .
Y el cambio en la magnitud del vector velocidad se debe a que la partícula esta experimentando una aceleración que es tangente a la trayectoria conocida como **Aceleración tangencial.**



17

Aceleración ($\vec{a}$): es la razón de cambio de la velocidad de la partícula con respecto al tiempo. $\vec{a} = \dfrac{d\,\vec{v}}{dt}$

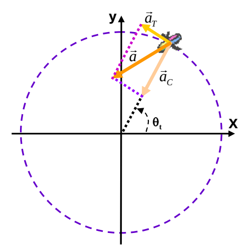
Al determinar la aceleración de la partícula para un instante de tiempo, es necesario conocer previamente la posición angular, velocidad angular y aceleración angular de la partícula en ese instante de tiempo. El valor de la aceleración se determina a partir de la expresión:



$$\vec{a} = \underbrace{\left(-r\,\omega_t^2\cos\,\theta_t\;\hat{i}\;-\;r\,\omega_t^2\,\mathrm{sen}\,\theta_t\;\;\hat{j}\right)}_{\text{Aceleración Centrípeta}} + \underbrace{\left(-r\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_t\,\hat{i}\;+\;r\,\alpha\cos\,\theta_t\;\hat{j}\right)}_{\text{Aceleración Tangencial}}$$

18

El vector Aceleración de la partícula resulta de la suma de dos vectores uno cuya dirección es hacia el centro de la circunferencia denominado **Aceleración centrípeta** ($\vec{a}_C$) y otro vector que es tangente a la trayectoria denominado **Aceleración tangencial** ($\vec{a}_T$).



$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T$$

Aceleración Centrípeta:
$$\vec{a}_C = -r\,\omega_t^2\cos\,\theta_t\;\hat{i}\;-\;r\,\omega_t^2\,\mathrm{sen}\,\theta_t\;\;\hat{j}$$

La aceleración centrípeta es la responsable del cambio de dirección del vector velocidad.

Aceleración Tangencial:
$$\vec{a}_T = -r\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_t\;\hat{i}\;+\;r\,\alpha\cos\,\theta_t\;\hat{j}$$

La aceleración tangencial es la responsable del cambio de magnitud del vector velocidad.

Donde para un instante de tiempo dado:

θ es la posición angular de la partícula.

ω es la rapidez angular de la partícula.

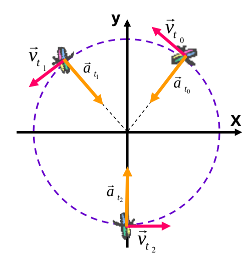
α es la aceleración angular experimentada por la partícula.

19

Movimiento Circular Uniforme (velocidad angular constante)

En este movimiento se puede afirmar que:

- ✓ La rapidez angular (ω) de la partícula es constante
- ✓ La rapidez ($|\vec{v}\,|$) de la partícula es constante.
- ✓ El módulo del vector aceleración es constante.



Módulo de la velocidad (Rapidez) de la partícula:
$$|\vec{v}\,| = \omega \quad r$$

Módulo de la aceleración de la partícula:
$$|\vec{a}_C\,| = \omega^2 \quad r$$

20

Movimiento Circular Uniforme (velocidad angular constante)

La rapidez angular (ω) es constante y por ello la aceleración angular (α) no existe, por lo que la aceleración experimentada por la partícula es igual a la aceleración centrípeta.

El vector aceleración es $\vec a = \vec a_C + \vec a_T$ y como α=0, no hay aceleración tangencial.

$$\vec a = \underbrace{\left(-r\,\omega_t^2 \cos\ \theta_t\ \hat i\ -\ r\ \omega_t^2 \operatorname{sen}\ \theta_t\ \hat j\right)}_{\text{aceleración centrípeta}} + \underbrace{\left(-r\ \underbrace{\alpha}_{\alpha=0} \operatorname{sen}\ \theta_t\ \hat i\ +\ r\ \underbrace{\alpha}_{\alpha=0} \cos\ \theta_t\ \hat j\right)}_{\text{aceleración tangencial}}$$

$$\vec a = \underbrace{\left(-r\,\omega_t^2 \cos\ \theta_t\ \hat i\ -\ r\ \omega_t^2 \operatorname{sen}\ \theta_t\ \hat j\right)}_{\text{aceleración centrípeta}}$$

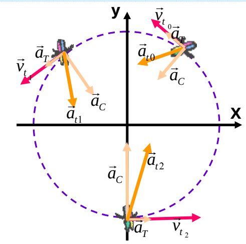
Esto significa que un movimiento circular siempre tiene aceleración. En el MCU, esta aceleración es sólo centrípeta lo que quiere decir que el vector velocidad mantiene constante su módulo pero la partícula acelera porque cambia de dirección el vector velocidad.

21

Movimiento Circular Uniformemente Variado (aceleración angular constante)

En este movimiento se puede afirmar que:

- ✓ La aceleración angular (α) de la partícula es constante
- ✓ El módulo de la aceleración tangencial es constante.



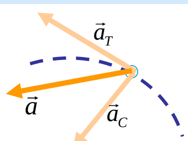
La rapidez angular (ω) esta cambiando debido a la existencia de la aceleración angular (α), por lo que la aceleración experimentada por la partícula es:

$$\vec a = \vec a_C + \vec a_T$$

22

Movimiento Circular Uniformemente Variado (aceleración angular constante)

La aceleración de la partícula es: $\vec a = \vec a_C + \vec a_T$



$$\vec a = \underbrace{\left(-r\,\omega_t^2 \cos\ \theta_t\ \hat i\ -\ r\ \omega_t^2 \operatorname{sen}\ \theta_t\ \hat j\right)}_{\text{Aceleración Centrípeta}} + \underbrace{\left(-r\,\alpha \operatorname{sen}\ \theta_t\ \hat i\ +\ r\ \alpha \cos\ \theta_t\ \hat j\right)}_{\text{Aceleración Tangencial}}$$

Módulo de la aceleración centrípeta:

$$\left|\vec a_C\right| = \omega^2\ r$$

En este movimiento el módulo de la aceleración centrípeta cambia a medida que ω cambia en el tiempo.

El vector aceleración centrípeta también cambia a medida que θ y ω cambian.

Módulo de la aceleración tangencial:

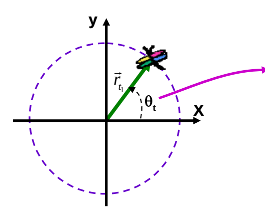
$$\left|\vec a_T\right| = \alpha\ \ r$$

En este movimiento el módulo de la aceleración tangencial es constante porque α es constante en el tiempo.

Sin embargo, el vector aceleración tangencial si cambia a medida que θ cambia.

En resumen, A partir de los valores de θ, ω y α se pueden determinar los vectores posición, velocidad y aceleración de una partícula en un determinado instante de tiempo.

1. Vector posición: $\vec r_t\ = r\cos\ \theta_t \hat i\ +\ r\ \operatorname{sen}\ \theta_t\ \ \hat j$



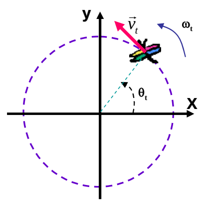
La posición angular (θ_t) depende del tipo de movimiento que este experimentando la partícula en el instante de tiempo en el que estamos calculando la posición.

Sí es M.C.U: $\theta_t = \theta_o + \vec\omega_o t$

Sí es M.C.U.V: $\theta_t = \theta_o + \vec\omega_o t + \frac{1}{2}\vec\alpha t^2$

24

2. Vector velocidad: $\vec{v}_t = -r\omega_t \,\text{sen}\, \theta_t \hat{i} + r\,\omega_t \cos \theta_t \; \hat{j}$



La posición angular (θ_t) y velocidad angular (ω_t) dependen del tipo de movimiento que este experimentando la partícula en el instante de tiempo que estamos calculando la velocidad.

M.C.U:

$$\theta = \theta_o + \vec{\omega}\, t$$

$$\vec{\omega} = constante$$

M.C.U.V:

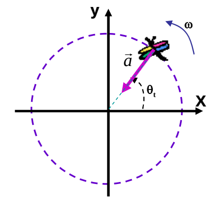
$$\theta = \theta_o + \vec{\omega}_o t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\alpha} t$$

25

3. Vector Aceleración

a. Sí M.C.U.: $\vec{a} = \vec{a}_c \;\Rightarrow\; \vec{a} = -r\,\omega^2 \cos\,\theta_t\, \hat{i} - r\,\omega^2 \,\text{sen}\, \theta_t \; \hat{j}$



En el caso del **Movimiento Circular Uniforme** la posición angular (θ_t) y velocidad angular (ω) de la partícula se determinan a partir de:

$$\theta = \theta_o + \vec{\omega}\, t$$

$$\vec{\omega} = constante$$

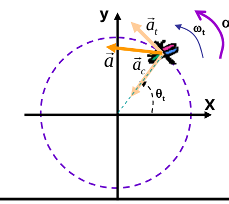
b. Sí M.C.U.V: $\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T$

$$\vec{a} = \left(-r\,\omega_t^2 \cos\,\theta_t\,\hat{i} - r\,\omega_t^2 \,\text{sen}\, \theta_t \;\hat{j}\right) + \left(-r\,\alpha\,\text{sen}\,\theta_t\,\hat{i} + r\,\alpha \cos\,\theta_t\;\hat{j}\right)$$

En el caso de **M.C.U.V,** la aceleración angular (α) es constante, mientras que la posición angular (θ_t) y velocidad angular (ω_t) de la partícula se determinan a partir de:

$$\theta = \theta_o + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2$$

$$\vec{\omega}_t = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha} t$$



26

Ejemplo: una partícula hace un movimiento circular con r=0,5m y una rapidez angular constante de $\pi/6$ rad/s durante 10s. Inicialmente la partícula se encuentra en $\theta_0 = \pi/8$ rad.
Calcular la posición en t=6s.

La posición de la partícula se determina a partir de:

$$\vec{r}_t = r\cos\,\theta_t\,\hat{i} + r\,\text{sen}\,\theta_t \;\; \hat{j}$$

Es decir que para determinar la posición a los 6s, primero debemos determinar la posición angular (θ) de la partícula.

para t=6s:

$$\vec{r}_6 = r\cos\,\theta_6\,\hat{i} + r\,\text{sen}\,\theta_6 \;\; \hat{j}$$

La posición angular (θ_t) depende del tipo de movimiento que este experimentando la partícula. En este caso es un MCU:

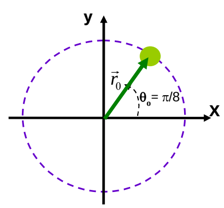
$$\theta = \theta_o + \vec{\omega}_o\, t$$

$$\theta_6 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}\times 6 \quad \Rightarrow \theta_6 = \frac{9\pi}{8}\, rad$$

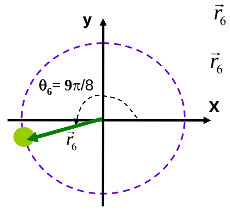
Luego la posición es:

$$\vec{r}_6 = 0{,}5\cos\,\frac{9\pi}{8}\hat{i} + 0{,}5\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{8}\;\hat{j}$$

$$\vec{r}_6 = -0{,}4619\hat{i} - 0{,}1913\hat{j}\;\; m$$



Para t=0s



Para t=6s

27

Ahora revisemos el problema resuelto y resolvamos los problemas propuestos usando los procedimientos sugeridos en el material *Acerca de las Habilidades Cognitivas*

28