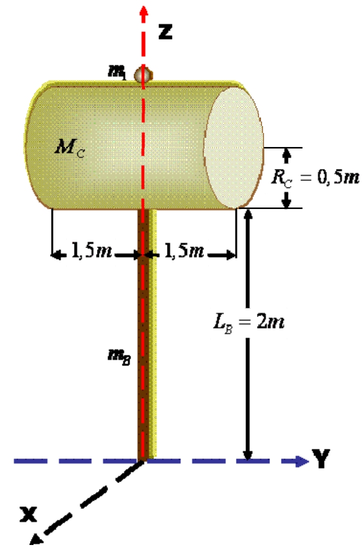
PROBLEMA:

La figura muestra un cuerpo rígido formado por la unión (mediante soldadura) de tres elementos: una barra de masa m_B, un cilindro macizo de masa M_C, y una esferita de acero (masa puntual) de masa m_1. El cuerpo rígido inicialmente se encuentra en reposo.



Datos:

$M_c = 4\ kg;\ m_B = 2\ kg;\ m_1 = 0{,}8\ kg$

$L_C = 3m\ \ ;\ L_B = 2m$

PARA LA SITUACIÓN PLANTEADA DETERMINAR:

1. El momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje y, es:
2. El momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje x, es:
3. El momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje z, es:

a.) La rotación del cuerpo rígido es en torno al eje Y y el sentido de la rotación es antihorario

b.) La rotación del cuerpo rígido es en torno al eje Y y el sentido de la rotación es horario

c.) La rotación del cuerpo rígido es en torno al eje x y el sentido de la rotación es horario

d.) La rotación del cuerpo rígido es en torno al eje x y el sentido de la rotación es antihorario

SOLUCION:

1. El momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje y, es:

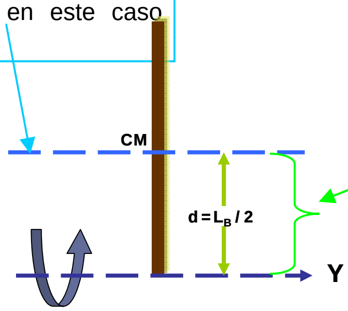
Para determinar el momento de inercia del cuerpo rígido respecto del eje y, calculamos el momento de inercia respecto de éste eje, para cada uno de los elementos que conforman el cuerpo rígido y luego sumamos estos momentos de inercia, es decir:

$$I_{CRy} = I_{barra\ y} + I_{cilindro\ y} + I_{\substack{masa \\ puntual}\ y}$$

Para la barra:

Por el centro de masa de la barra trazamos un eje paralelo al eje de rotación, en este caso eje Y.

Determinamos que distancia separa estos ejes paralelos (d), en este caso es la mitad de la longitud de la barra.



Aplicamos el Teorema de Steiner

$$I_{barra\ y} = \underbrace{I_{CM}}_{\text{lo leemos en tabla}} + M\underbrace{d}_{\substack{\text{separación}\\ \text{de los ejes}}}^{2}$$

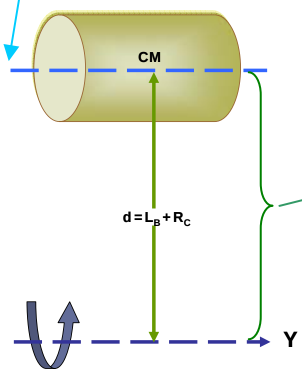
$$I_{barra\ y} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{barra\ y} = \frac{1}{12}\times 2\times(2)^2 + 2\times\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$I_{barra\ y} = 2{,}667\,kg.m^2$$

Para el cilindro:

Como lo hicimos para la barra, ahora trazamos un eje paralelo al eje de rotación, el eje y, que pase por el centro de masa del cilindro.



Determinamos la distancia separa estos ejes paralelos (d), en este caso es la longitud de la barra mas el radio del cilindro.

Aplicamos el Teorema de Steiner

$$I_{\text{cilindro y}} = \underbrace{I_{CM}}_{\text{lo leemos en tabla}} + M\,\underbrace{d}_{\text{separación de los ejes}}{}^{2}$$

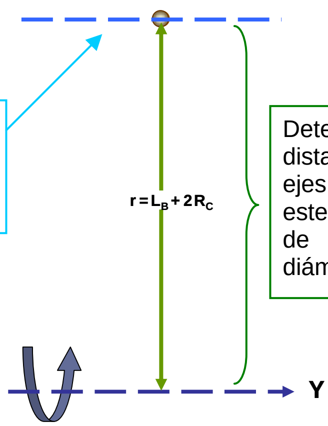
$$I_{\text{cilindro CM y}} = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I_{\text{cilindro y}} = \frac{1}{2} \times 4 \times (0,5)^2 + 4(2,5)^2$$

$$I_{\text{cilindro y}} = 25,5\,\text{kg.m}^2$$

Para la masa puntual:

Por la masa puntual trazamos un eje paralelo al eje de rotación.



Determinamos la distancia separa estos ejes paralelos (d), en este caso es la longitud de la barra mas el diámetro del cilindro

Como es una masa puntual, aplicamos la ecuación:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I_{\substack{\text{masa}\\\text{puntual}}\ y} = m_1 (r_1)^2$$

$$I_{\substack{\text{masa}\\\text{puntual}}\ y} = 0,8(3)^2$$

$$I_{\substack{\text{masa}\\\text{puntual}}\ y} = 7,2\text{Kgm}^2$$

$$I_{CRy} = 2,667 + 25,5 + 7,2$$

$$I_{CRy} = 35,387\text{Kgm}^2$$

2. El momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje x, es:

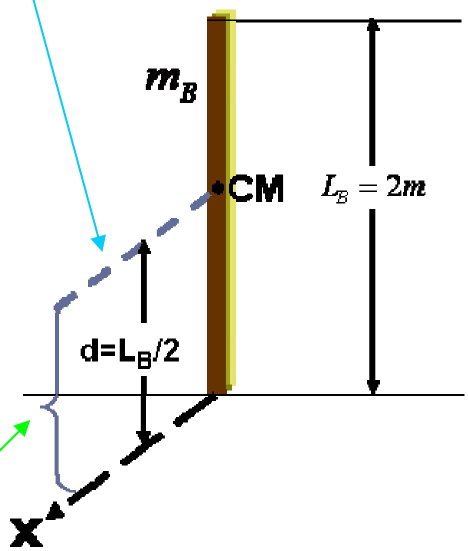
Igual que para el eje y, para determinar el momento de inercia del cuerpo rígido respecto del eje x, calculamos el momento de inercia respecto de éste eje, para cada uno de los elementos que conforman el cuerpo rígido y luego sumamos estos momentos de inercia, es decir:

$$I_{CRx} = I_{\text{barra x}} + I_{\text{cilindro x}} + I_{\substack{\text{masa}\\\text{puntual}}\ x}$$

Para la barra:

Por el centro de masa de la barra trazamos un eje paralelo al eje de rotación, en este caso eje X.

Al igual que para el eje Y, aplicamos el Teorema de Steiner y observamos que para el eje X la barra tiene el mismo momento de inercia que con respecto al eje Y:



$$I_{barra\ x} = \underbrace{I_{CM}}_{\text{lo leemos en tabla}} + M\,\underbrace{d}_{\substack{\text{separación}\\ \text{de los ejes}}}{}^2$$

$$I_{barra\ x} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{barra\ x} = \frac{1}{12}\times 2\times(2)^2 + 2\times\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

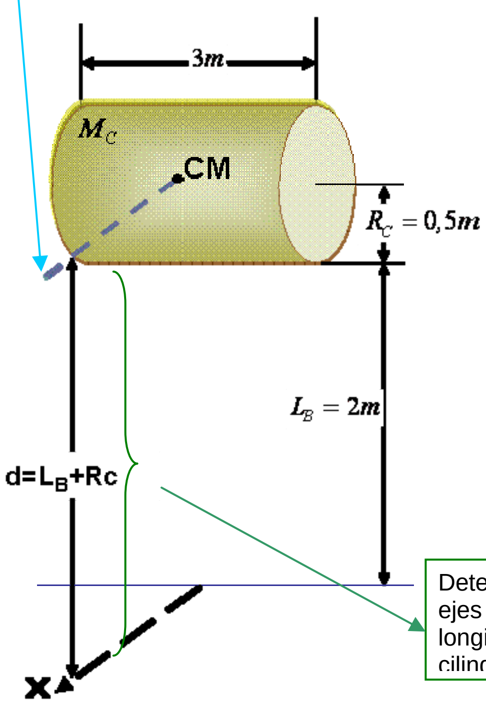
$$I_{barra\ x} = 2{,}667\,kg.m^2$$

Determinamos que distancia separa estos ejes paralelos (d), en este caso es la mitad de la longitud de la barra.

Para el cilindro:

Trazamos un eje paralelo al eje de rotación, el eje x que pase por el centro de masa del cilindro.

Al igual que para el eje Y, aplicamos el Teorema de Steiner, y en este caso el eje paralelo le pasa al cilindro atravesando su diámetro:



$$I_{cilindro\ \ X} = \underbrace{I_{CM}}_{\text{lo leemos en tabla}} + M\,\underbrace{d}_{\substack{\text{separación}\\ \text{de los ejes}}}{}^2$$

$$I_{cilindro\ CM\ X} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML_{cilindro}{}^2$$

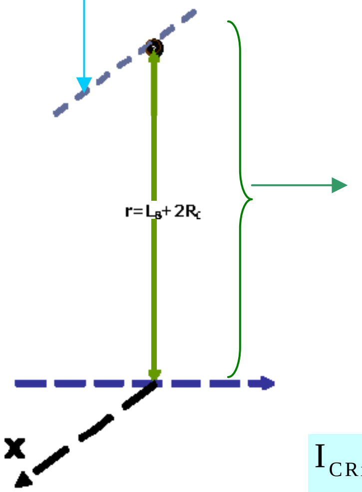
$$I_{cilindro\ \ X} = \frac{1}{4}(4)(0{,}5)^2 + \frac{1}{12}(4)(3)^2 + 4(2{,}5)^2$$

$$I_{cilindro\ \ X} = 28{,}25\ kg\ m^2$$

Determinamos la distancia separa estos ejes paralelos (d), en este caso es la longitud de la barra mas el radio del cilindro.

Para la masa puntual:

Por la masa puntual trazamos un eje paralelo al eje de rotación, en este caso el eje x.



Determinamos la distancia separa estos ejes paralelos (d), en este caso es la longitud de la barra mas el diámetro del cilindro

Como es una masa puntual, aplicamos la ecuación y observamos que el momento de inercia respecto al eje x es igual que el momento de inercia para el eje y:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I_{\substack{masa\ x\\ puntual}} = m_1 (r_1)^2$$

$$I_{\substack{masa\ x\\ puntual}} = 0{,}8(3)^2$$

$$I_{\substack{masa\ x\\ puntual}} = 7{,}2 Kgm^2$$

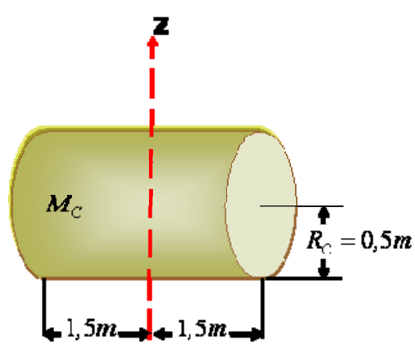
$$I_{CRx} = 2{,}667 + 28{,}25 + 7{,}2$$

$$I_{CRx} = 38{,}117 Kgm^2$$

3. El momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje z, es:

Igual que para los eje X y Y, para determinar el momento de inercia del cuerpo rígido, calculamos el momento de inercia para cada uno de los elementos que conforman el cuerpo rígido y luego sumamos estos momentos de inercia. Al observar la figura nos damos cuenta que el eje Z pasa por el eje de la barra y sobre la masa puntual por lo que no tienen momento de inercia con respecto a este eje.

$$I_{CR\ z} = \underbrace{\cancel{I_{barra\ z}}}_{0} + I_{cilindro\ z} + \underbrace{\cancel{I_{\substack{masa\ z\\ puntual}}}}_{0}$$



No debemos aplicar el teorema de Steiner porque el eje Z pasa directamente por el Centro de Masa del cilindro:

$$I_{cilindro\ z} = \underbrace{I_{CM}}_{\text{lo leemos en tabla}}$$

$$I_{cilindro\ CM\ z} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML_{cilindro}^{\ 2}$$

$$I_{cilindro\ z} = \frac{1}{4}(4)(0{,}5)^2 + \frac{1}{12}(4)(3)^2$$

$$I_{cilindro\ z} = 3{,}25\ kg\ m^2$$

$$I_{CRz} = 3{,}25 Kgm^2$$