TEMA 9

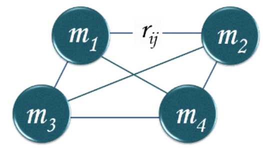
MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO

MOMENTO DE INERCIA

Material diseñado y elaborado por Prof. Amada Padilla
Revisado por: Prof. Olga Moreno
para el curso de Física I de la UNET.
Agosto, 2014

Cuerpo rígido

- Un cuerpo rígido no es deformable, es decir, las distancias de todas las partículas que lo componen permanecen constantes bajo la aplicación de fuerzas externas.
- El movimiento de un objeto extenso se analiza representándolo como un conjunto de partículas, que se simplifica al suponerlo como un objeto rígido, cuya forma y tamaño son perfectamente definidos e inalterables.



Cuerpo rígido

Ejemplos:

- Ejemplos de cuerpos **no** rígidos

- Ejemplos de cuerpos rígidos

Conocimientos y experiencias previas

- **Conocimientos relativos a:**
  - Cinemática rotacional: Movimiento Circular.
  - Cálculo vectorial: definición, módulo, dirección y sentido de un vector; operaciones con vectores: suma, resta, producto cruz y punto.
  - Cinemática y Dinámica de un sistema de partículas
  - Energía Cinética
  - Resolver derivadas e integrales definidas
  - Manejo de mapas conceptuales

Movimiento circular

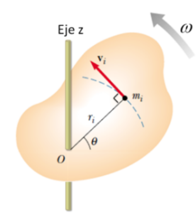
- Considerado en el movimiento rotacional de un cuerpo rígido que gira con aceleración angular constante sobre un eje fijo, el cual permanece en reposo.

Ecuaciones de cinemática rotacional

- Posición angular: $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Velocidad angular: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$
- Aceleración angular: $\alpha =$ constante

Energía cinética rotacional

- Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, por lo que tiene energía cinética expresada en términos de la rapidez angular (ω) y el momento de inercia (I), que depende de la masa del cuerpo y de su forma.

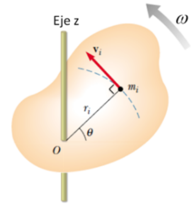


- Consideremos un conjunto de partículas que gira en torno a un eje fijo, en donde una partícula ubicada sobre el objeto a una distancia r_i del eje de rotación, de la *i-ésima* partícula de masa m_i y su rapidez tangencia es v_i, su energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad [J]$$

Energía cinética rotacional

- Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, por lo que tiene energía cinética expresada en términos de la rapidez angular (ω) y el momento de inercia (I), que depende de la masa del cuerpo y de su forma.

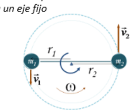


- Recordando que la velocidad tangencial (v) de cada partícula depende de su distancia al eje de rotación (r), pero que todas tienen igual rapidez angular (ω). En donde:

$$v_i = r_i\,\omega$$

Energía cinética rotacional

Rotación de dos partículas en torno a un eje fijo



- Sabiendo que la energía cinética total del cuerpo rígido en rotación es la suma de las energías de cada partícula, se tiene que:

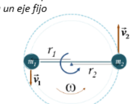
$$\sum_i K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

- En donde la sumatoria del producto de la masa por el cuadrado de su distancia al eje de rotación se conoce como **Momento de Inercia (I)**

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \left[\mathrm{kgm}^2\right]$$

Energía cinética rotacional

Rotación de dos partículas en torno a un eje fijo



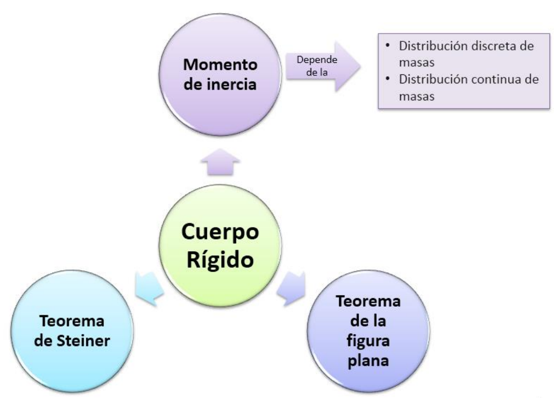
- Sabiendo que la energía cinética total del cuerpo rígido en rotación es la suma de las energías de cada partícula, se tiene que:

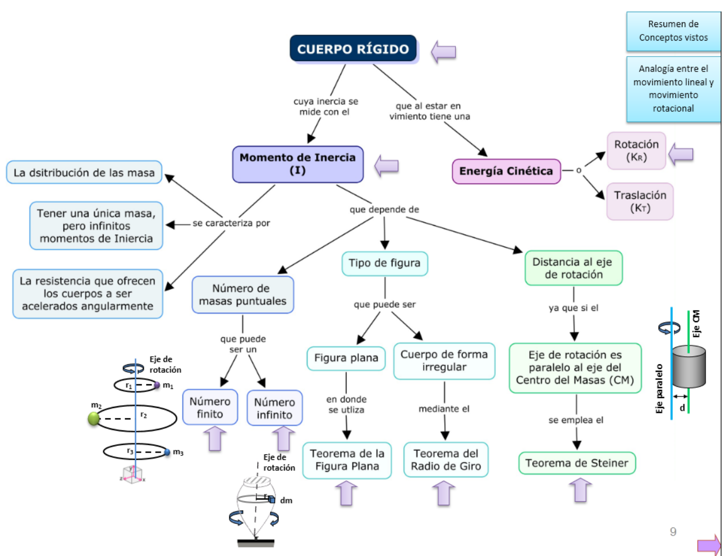
$$\sum_i K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

- De ahí se tiene, que en términos del momento de inercia (I), la energía cinética rotacional K de un cuerpo rígido es:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad [\mathrm{J}]$$

Contenidos conceptuales





Momento de Inercia (I)

Es una medida de la inercia o resistencia que presenta un cuerpo a ser rotado o a salir de una rotación, es decir, a ser acelerado angularmente, se expresa en unidades de masa multiplicado por cuadrados de longitud (Ejemplo: kgm^2)

Características

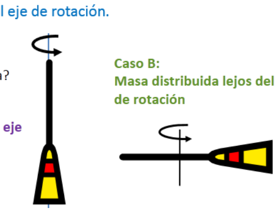
1. Depende de (m_i; r_i). Es decir, depende de la distribución de las masas y de las distancias de las masas al eje de rotación.
2. Es una medida de inercia. Mide la resistencia que ofrece un cuerpo a ser acelerados angularmente
3. Tiene múltiples valores. Un cuerpo rígido tiene una sola masa pero infinitos momentos de inercia. De ahí, es muy importante identificar el eje de rotación.

Ejemplo:

¿En qué caso es mas fácil hacer girar el palo de la escoba?

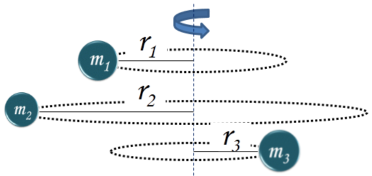
Caso A: Masa concentrada en torno al eje de rotación

Caso B: Masa distribuida lejos del eje de rotación



Momento de Inercia (I)

Para una distribución de masas (masas puntuales)



$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (9.2)$$

Donde

m_i es la masa de cada una de las partículas y

r_i es la distancia perpendicular de las partículas al eje de rotación

Es decir, que el momento de inercia para una distribución discreta de masas puntuales es:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

Ejercicio 9.1

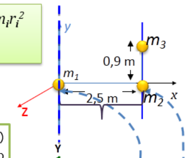
La figura muestra tres MASAS PUNTUALES m_1=5 kg, m_2= 4 kg, m_3= 2 kg, unidas mediante varillas de masas despreciable y longitudes indicadas en la figura. Este cuerpo rígido puede rotar libremente en torno a cualquier de los ejes del sistema de referencia ubicado en el centro de masa de m_1.

1. ¿Cuál es el valor del momento de inercia del cuerpo rígido cuando rota con respecto al eje "Y"?

En esta situación primero consideremos el eje de rotación.

Como las masas son puntuales, el momento de inercia es igual a $I = \Sigma m_i r_i^2$

Por lo tanto: $I_y = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$



Donde m_i es la masa de cada partícula y r_i es la distancia al eje de giro (tip 1)

(tip 1) Para ver la distancia al eje de giro, colocamos ejes paralelos (auxiliares) al eje de rotación que pasen por cada una de las partículas y luego determinamos la distancia entre el eje de rotación y los ejes auxiliares. Veamos:

La distancia del eje de rotación a m_1 es igual a cero, $r_1 = 0$

La distancia del eje de rotación a m_2 y m_3 es igual a $2{,}5\ m$; $r_2 = r_3 = 2{,}5m$

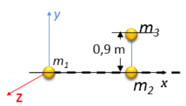
Sustituyendo el valor de las masas, $r_1 = 0$ y $r_2 = r_3 = 2{,}5m$; queda que:

$$I_y = 5(0)^2 + 4(2{,}5)^2 + 2(2{,}5)^2 \Rightarrow I_y = 37{,}5\ kgm^2$$

Ejercicio 9.1

La figura muestra tres MASAS PUNTUALES m_1=5 kg, m_2= 4 kg, m_3= 2 kg, unidas mediante varillas de masas despreciable y longitudes indicadas en la figura. Este cuerpo rígido puede rotar libremente en torno a cualquier de los ejes del sistema de referencia ubicado en el centro de masa de m_1.

2. ¿Cuál es el valor del momento de inercia del cuerpo rígido cuando rota con respecto al eje "X"?



Considere el eje de rotación.

Como las masas son puntuales, el momento de inercia es igual a $I = \Sigma m_i r_i^2$

Por lo tanto: $I_x = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$

Si se colocan ejes paralelos (auxiliares) al eje de rotación que pasen por cada una de las partículas y luego se determina la distancia entre el eje de rotación y los ejes auxiliares. Se tiene que $r_1 = 0\ m$, $r_2 = 0\ m$ y $r_3 = 0{,}9\ m$

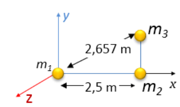
Sustituyendo el valor de las masas, $r_1 = 0$; $r_2 = 0$ y $r_3 = 0{,}9\ m$; queda que:

$$I_x = 5(0)^2 + 4(0)^2 + 2(0{,}9)^2 \Rightarrow I_x = 1{,}62\ kgm^2$$

Ejercicio 9.1

La figura muestra tres MASAS PUNTUALES m_1=5 kg, m_2= 4 kg, m_3= 2 kg, unidas mediante varillas de masas despreciable y longitudes indicadas en la figura. Este cuerpo rígido puede rotar libremente en torno a cualquier de los ejes del sistema de referencia ubicado en el centro de masa de m_1.

3. ¿Cuál es el valor del momento de inercia del cuerpo rígido cuando rota con respecto al eje "Z"?



Considere el eje de rotación.

Como las masas son puntuales, el momento de inercia es igual a $I = \Sigma m_i r_i^2$

Por lo tanto $I_z = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$

Entonces la distancia de las partículas al eje de rotación serían $r_1 = 0\ m$, $r_2 = 2{,}5\ m$ y $r_3 = 2{,}657\ m$

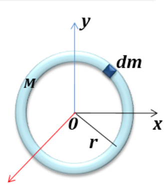
Sustituyendo el valor de las masas, $r_1 = 0$ y $r_2 = 0$ y $r_3 = 2{,}657\ m$; queda que:

$$I_z = 5(0)^2 + 4(2{,}5)^2 + 2(2{,}657)^2 \Rightarrow I_z = 39{,}12\ kgm^2$$

Momento de Inercia (I)

Para una distribución continua de masas (cuerpos uniformes)

$$I = \int r^2 dm \qquad (9.3)$$



Donde r es la distancia desde el elemento de masa dm al eje de rotación

Es mas sencillo generalmente, determinar el momento de inercia a partir del volumen en vez de hacerlo con la masa para ello se utilizará $\rho = m/V$, siendo ρ = densidad, m=masa y V= volumen

Donde, para un objeto:
- En una dimensión se utiliza $\lambda = m/L$; $dm = \lambda dL$.
- En dos dimensiones $\sigma = m/A$; $dm = \sigma dA$.
- En tres dimensiones $\rho = m/V$; $dm = \rho dV$.

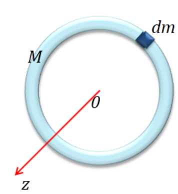
Para ver ejemplos de Momentos de inercia para cuerpos uniformes en la web has click en el icono

Ejercicio 9.2

Determinar el momento de Inercia de un aro uniforme de masa M y radio R con respecto a un eje perpendicular al plano que lo contiene y que pasa por el centro de masa del aro.

En esta situación primero consideremos el eje de rotación "z".

Considerando el aro como un cuerpo rígido uniforme, entonces el momento de inercia es igual a: $I = \int r^2 dm$ (9.3)



Por lo tanto al aplicar la ecuación (9.3) se tiene que: $I_z = \int r^2 dm$

Se observa que todos los elementos de masa dm están a la misma distancia $r = R$ del eje de rotación Z que pasa por 0

Bajo las condiciones anteriores se tiene que: $I_z = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$

En conclusión el momento de inercia para una aro uniforme en torno a su eje que pasa por el centro de masa es igual a:

$$I = MR^2$$

Momento de Inercia de Cuerpos Uniformes de diferentes formas

Aro (capa cilíndrica respecto a su eje)				$I_{CM} = MR^2$
Capa cilíndrica respecto a un diámetro que pasa por su centro				$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Cilindro sólido o disco respecto a su eje				$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$
Cilindro Macizo respecto a un diámetro que pasa por su centro				$I_{CM} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

Momento de Inercia de Cuerpos Uniformes de diferentes formas

Varilla delgada con respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro			$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$
Varilla delgada con respecto a un eje perpendicular que pasa por su extremo			$I = \frac{1}{3}ML^2$

Momento de Inercia de Cuerpos Uniformes de diferentes formas

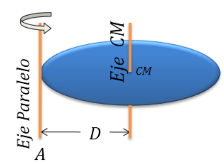
Cascaron o corteza esférica delgada respecto a un diámetro (esfera hueca)			$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$
Esfera Maciza respecto a un diámetro			$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

En el siguiente enlace se muestran algunas simulaciones de cuerpos uniformes rotando, una vez abras el enlace has click sobre cada figura

Teorema de Steiner o de los Ejes Paralelos

El teorema de Steiner o de los ejes paralelos, relaciona el momento de inercia de un eje que pasa por el centro de masa, con otro eje que es paralelo al mismo, y que se encuentra a una distancia D del centro de masa. Como se muestra en la figura.

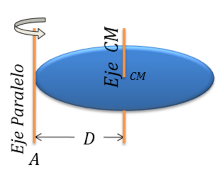
Si se tiene el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje que pasa por el centro de masa (I_{CM}) y se conoce la distancia D a un eje paralelo (A) al eje que pasa por el CM, el momento de Inercia I_A con respecto a este eje es igual a:



$$I_A = I_{CM} + MD^2$$

Teorema de Steiner o de los Ejes Paralelos

El momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje paralelo I_A al eje que pasa por el centro de masa es igual al momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa I_{CM} mas el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia que separa a los dos ejes.



$$I_A = I_{CM} + MD^2$$

(tip 2) Para Calcular el momento de inercia de cuerpos uniformes se aplica el teorema de Steiner donde el I_{CM} se calcula de acuerdo a la expresión que aparece en la tabla 1.

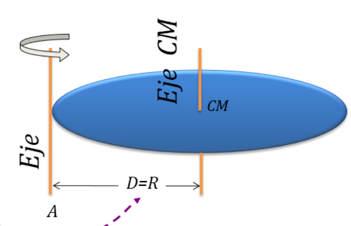
Ejemplo:
Cuál es el momento de inercia de un disco con respecto a un eje perpendicular al disco y que pasa por el borde del mismo?

Para resolver este problema se aplica el teorema de Steiner $I = I_{CM} + MD^2$

En este caso llamase A el eje de rotación

Seguidamente ubíquese un eje paralelo al eje A y que pase por el CM

Al determinar la distancia D entre los dos ejes se observa que: D=Radio



Por la tabla de momentos de inercia para cuerpos uniformes se tiene que el momento de inercia para un disco con respecto a un eje que pasa por su eje es:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

Al aplicar el teorema de Steiner queda que: $I_A = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

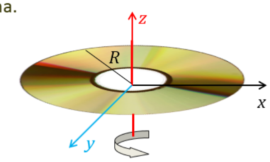
Teorema de la figura plana

El teorema de la figura plana se puede aplicar solo en los casos donde el cuerpo rígido sea una figura plana, es decir este contenido en un plano.

Este teorema relaciona los momentos de inercia alrededor de dos ejes perpendiculares contenidos en una figura plana, con el momento de inercia alrededor de un tercer eje perpendicular a la misma.

Veamos, si se tiene un cuerpo rígido que se encuentra en el plano *X,Y*

En este caso el eje *Z* es perpendicular a los ejes que contienen al cuerpo



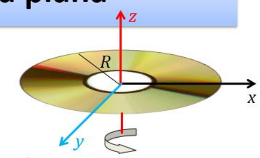
$$I_z = I_x + I_y$$

El momento de inercia con respecto al eje perpendicular al plano que contiene la figura será igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a los ejes que constituyen el plano.

Teorema de la figura plana

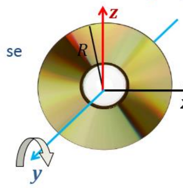
Si el cuerpo rígido es una figura plana que se encuentra en el plano XY.

$$I_z = I_x + I_y$$



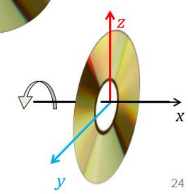
Si el cuerpo rígido es una figura plana que se encuentra en el plano XZ.

$$I_y = I_x + I_z$$



Si el cuerpo rígido es una figura plana que se encuentra en el plano YZ.

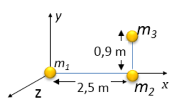
$$I_x = I_y + I_z$$



Ejercicio 9.3

En el ejercicio 9.1 el cuerpo rígido esta constituido por tres MASAS PUNTUALES en la figura se observa que este cuerpo es una figura plana

En este caso el eje *Z* es perpendicular a los ejes que contienen al cuerpo



Por lo tanto: $I_z = I_x + I_y$

Los resultados obtenidos fueron

$$I_y = 5(0)^2 + 4(2{,}5)^2 + 2(2{,}5)^2 \Rightarrow I_y = 37{,}5\ kgm^2$$

$$I_x = 5(0)^2 + 4(0)^2 + 2(0{,}9)^2 \Rightarrow I_x = 1{,}62\ kgm^2$$

Para obtener I_z se puede aplicar el teorema de la figura plana, resultando:

$$I_z = I_x + I_y \Rightarrow I_z = 37{,}5 + 1{,}62 = 39{,}2\ kgm^2$$

Que es el mismo valor obtenido anteriormente

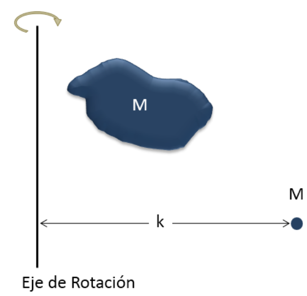
Radio de Giro

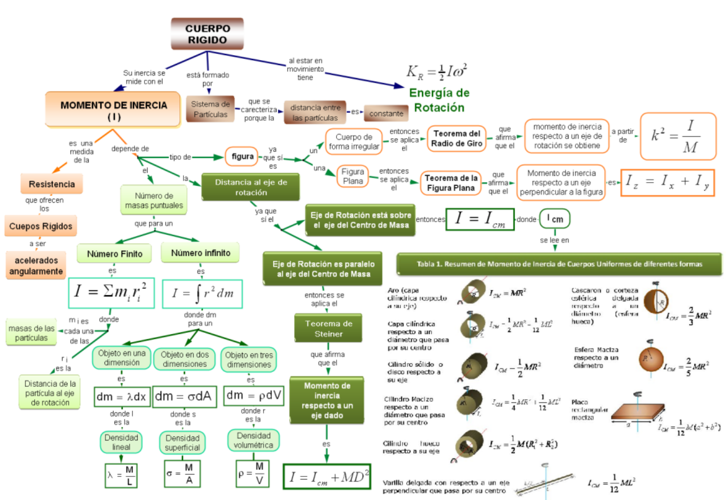
El radio de giro se utiliza también para determinar el momento de inercia, por lo general en aquellos casos donde el cuerpo rígido no es un cuerpo uniforme.

El radio de giro viene definido por:

$$k^2 = \frac{I}{M}$$

Siendo M la masa total del cuerpo y el radio de giro (k) es, pues, la distancia al eje de giro a la cual habría que colocar una masa puntual M de tal forma que tenga el mismo momento de inercia respecto a dicho eje.





Analogía entre el movimiento de traslación y rotacional

		Cuerpo rígido		
		Sistema de partículas		
	Partícula	Solo traslación	Solo rotación	
Posición	$\vec{r}$	$\vec{r}_{CM}$	θ	Posición angular
Velocidad	$\vec{v}$	$\vec{v}_{CM}$	ω	Velocidad angular
Aceleración	$\vec{a}$	$\vec{a}_{CM}$	α	Aceleración angular
Ecuaciones de cinemática de traslación	$\vec{r}_t = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ $\vec{r}_t = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$		$\theta_t = \theta_0 + \omega t$ $\theta_t = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega = \omega_0 + \alpha t$	Ecuaciones de cinemática rotacional
Masa (inercial)	m	M	I	Momento de inercia
Energía Cinética	$K = \frac{1}{2} m v^2$	$K_{Tras} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$	$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$	Energía Cinética rotacional