Ejercicios Resueltos Ley de Gauss.

Problema 1

Dos cascarones esféricos concéntricos de radio r_1 y r_2 (r_1, r_2) contienen densidades de carga uniforme σ_1 y σ_2 respectivamente (Véase la figura 9).
Determine el campo eléctrico para:

a) $0 < r < r_1$
b) $r_1 < r < r_2$
c) $r > r_2$
d) ¿En que condiciones será $E = 0$ para $r > r_2$? Ignore el Grosor de los Cascarones

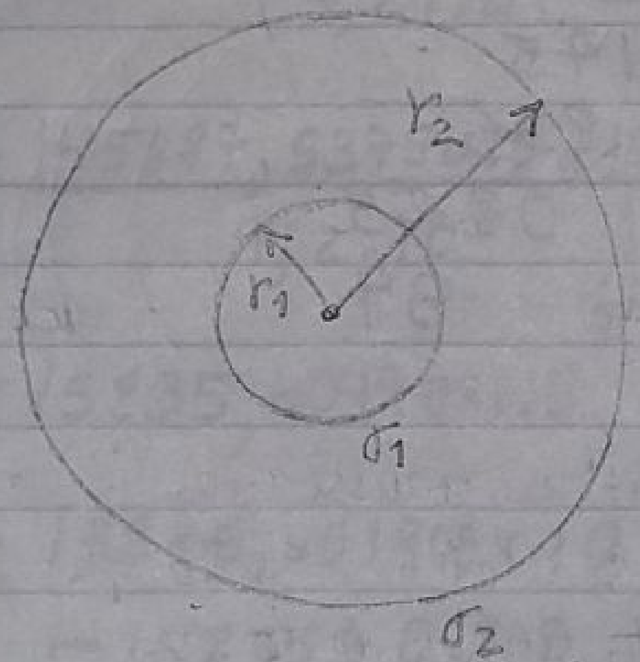
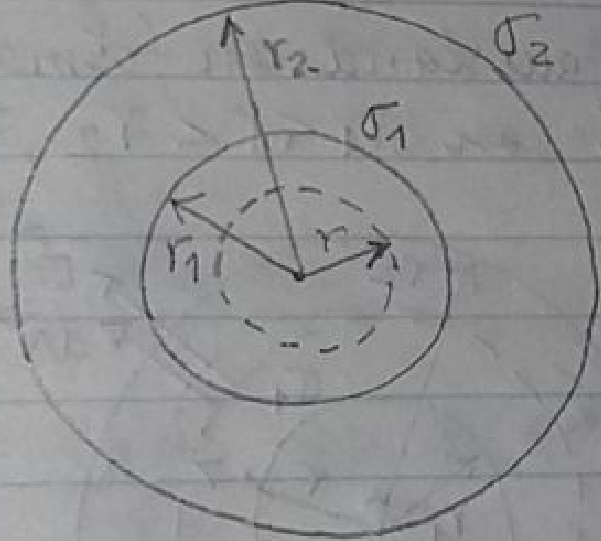


Figura 9: Cascarones esféricos Concéntricos

Solución: Para determinar el Campo Eléctrico $\vec{E}$ en todas las regiones de los 2 Cascarones esféricos concéntricos, es necesario aplicar la Ley de Gauss

Ley de Gauss: $\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$

a) Región $r < r_1$: La superficie gaussiana para ésta región es una esfera de radio r gaussiano concéntrica, aplicando Ley de Gauss:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0} \quad ; \quad q_{ENCERRADA} = 0$$

Ésta superficie gaussiana $r < r_1$ no encierra carga alguna por lo que $q_{ENCERRADA} = 0$ y por lo tanto la Ley de Gauss toma la forma:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\cancel{q_{ENC}}^{\,0}}{\varepsilon_0} = 0$$

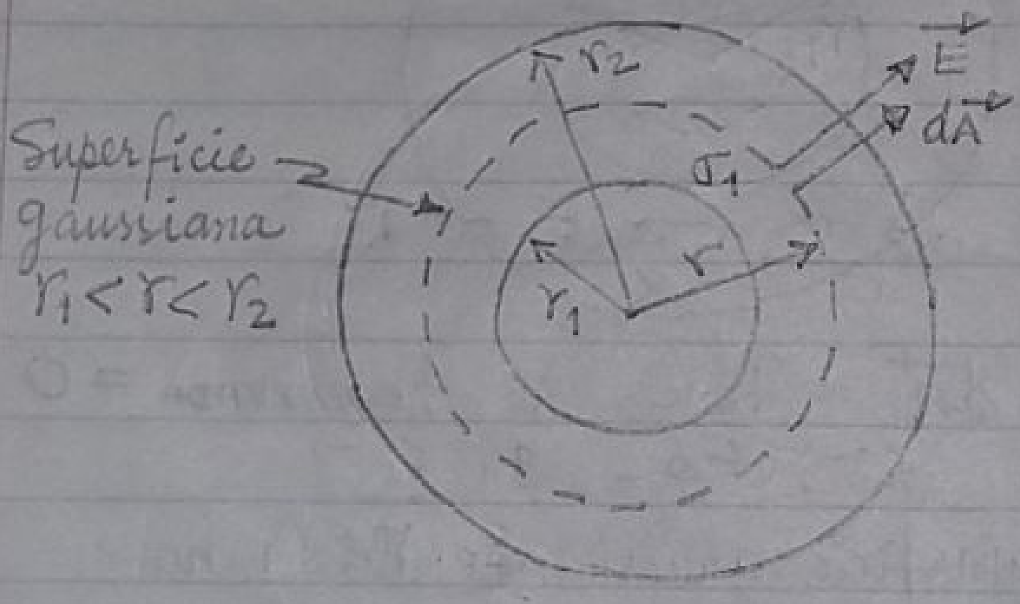
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint E\cdot dA\cdot \cancel{\cos}^{\,1} 0^\circ = 0 \Rightarrow E\oint dA = 0$$

$$E.A. = 0 \Rightarrow E(4\pi r^2) = 0 \Rightarrow \boxed{E=0}$$

región $0<r<r_1$ $\boxed{E=0}$

b) <u>Región $r_1<r<r_2$</u> : Realizando una superficie gaussiana en forma de esfera concentrica con $r_1<r<r_2$, tenemos que:



$$\sigma_1 = \frac{q_1}{A_1}$$

$$q_1 = \sigma_1 . A_1$$

$$A_1 = 4\pi . r_1^2$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0.} \quad ; \quad q_{ENCERRADA} = q_1$$

El campo debe ser constante para cualquier trayectoria circular y debe ser radial, por lo tanto sale de la integral, la carga encerrada ($q_{ENCERRADA}$) en la superficie gaussiana es q_1, que debe ser definida en función de la densidad de carga uniforme σ_1 entonces tenemos que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$; Distribución Uniforme

$$\underbrace{\sigma_{ENC}}_{\frac{q_{ENC}}{A_{ENC}}} = \underbrace{\sigma_{TOTAL}}_{\sigma_1}$$

$$\oint E \cdot dA \cdot \cancelto{1}{\cos 0^\circ} = \frac{\cancelto{q_1}{q_{ENC}}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{ENC} = \sigma_1 \cdot A_{ENC}$$

$$q_1 = \sigma_1 (4\pi r_1^2)$$

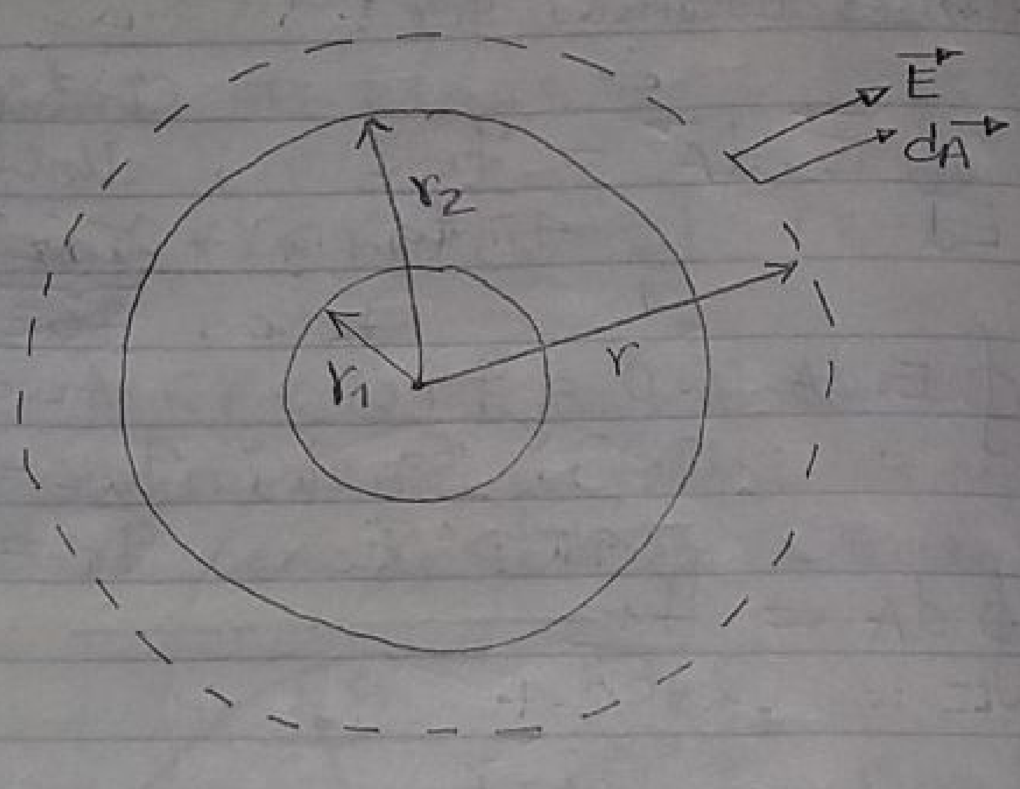
$$E \oint dA = \frac{q_1}{\varepsilon_0}.$$

$$E \cdot A_r = \frac{\sigma_1 A_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\sigma_1 (4\pi r_1^2)}{\varepsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma_1 \cdot \cancel{4\pi} r_1^2}{\cancel{4\pi} r^2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 \cdot r_1^2}{\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma_1 \cdot r_1^2}{\varepsilon_0 \cdot r^2} \left(\frac{N}{C}\right)}$$ región $r_1 < r < r_2$

c) <u>Región $r > r_2$</u>: Hacemos una superficie gaussiana concentrica con $r > r_2$, la integral de la ley de Gauss queda de la misma forma pero la carga encerrada en ésta nueva superficie es $q_{ENC} = q_1 + q_2$, de tal forma que:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0} \quad ; \quad q_{ENC} = q_1 + q_2$$

$$q_{ENC} = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$

$$q_{ENC} = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$
$$q_{ENC} = \sigma_1 (4\pi r_1^2) + \sigma_2 (4\pi r_2^2)$$
$$q_{ENC} = 4\pi (\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0} \; ; \; q_{ENC} = 4\pi\left(\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2\right)$$

$$\oint E \cdot dA \cdot \cancel{\cos} \overset{1}{0°} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint dA = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\left(\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2\right)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\cancel{4\pi}\left(\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2\right)}{\cancel{4\pi} r^2 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2}{\varepsilon_0 \cdot r^2} \left(\frac{N}{C}\right)}$$ región $r > r_2$

d) ¿En que condiciones será $E = 0$ para $r > r_2$?

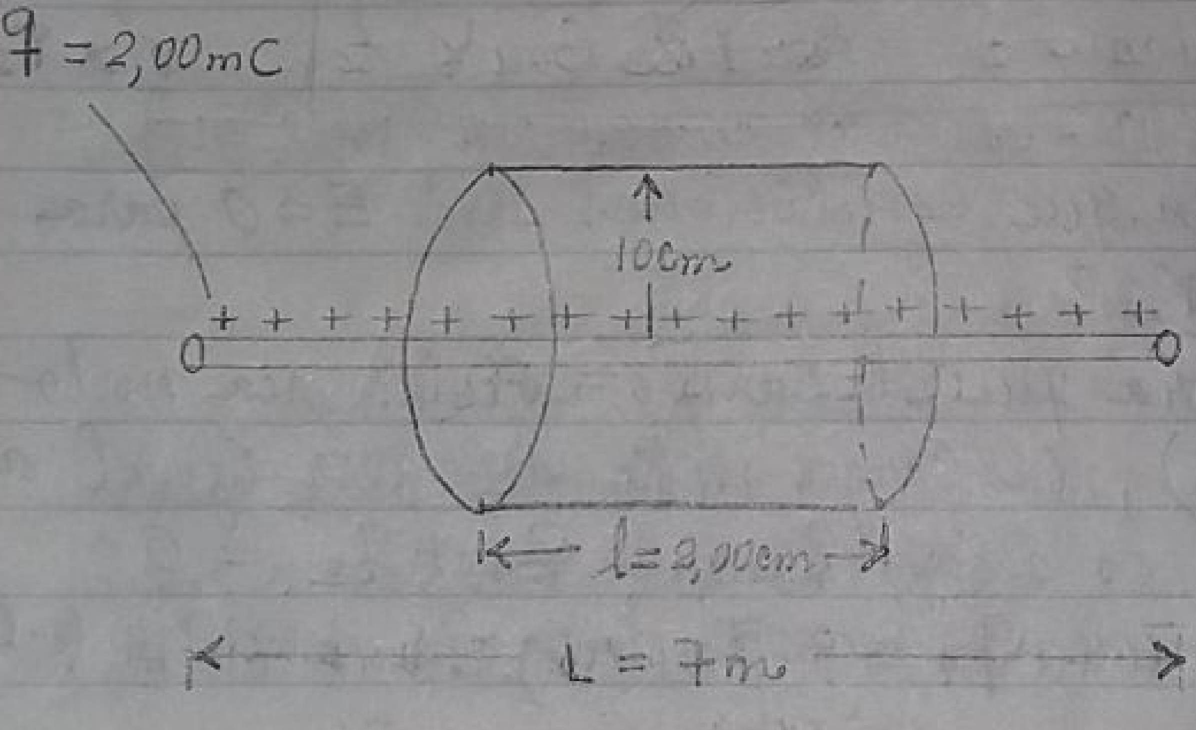
Para que el campo exterior sea nulo ($E=0$), la carga neta debe ser igual a cero, es decir, $q_{NETA} = q_1 + q_2 = 0$ entonces $q_1 = -q_2 \Rightarrow q_{ENC} = q_1 + (-q_2) = 0$

Problema 2

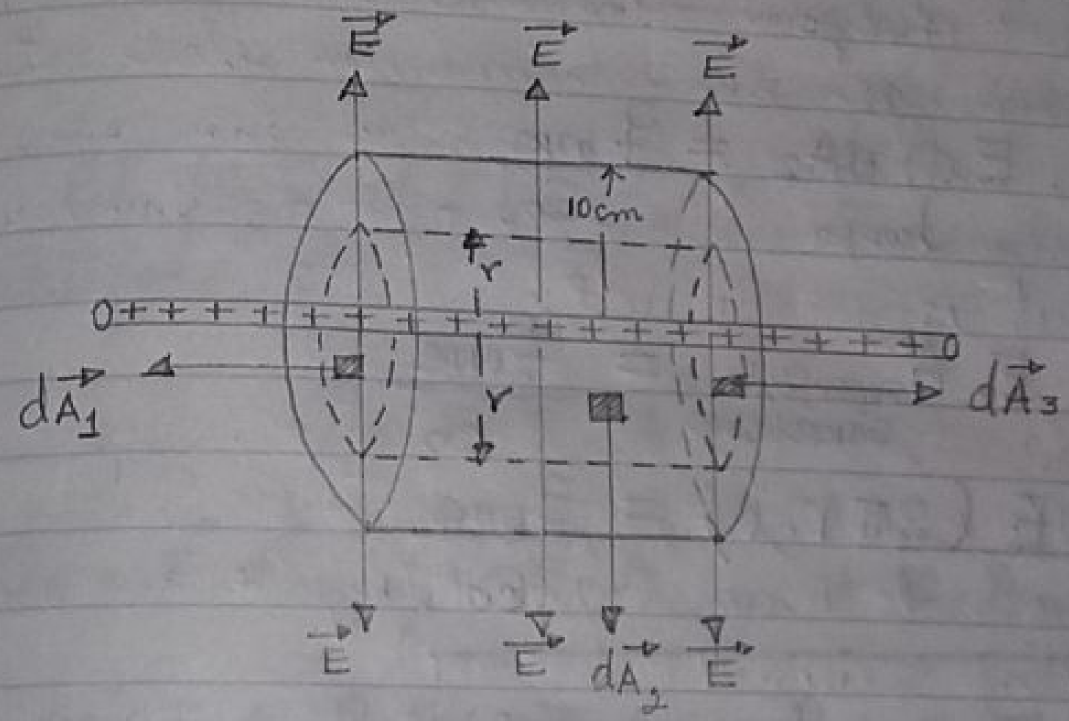
Un filamento recto con carga uniforme de 7,00 m de longitud tiene una carga positiva total de 2,00 mC. Un cilindro de carton sin carga de 2,00 cm de longitud y 10 cm de radio rodea el filamento en su parte central, y lo tiene como el eje del cilindro. A partir de aproximaciones razonables, determine:

a) El campo eléctrico en la superficie del cilindro

b) El flujo eléctrico total a través de dicho cilindro.



Solución : Para determinar el campo Eléctrico $\vec{E}$ y el flujo eléctrico ϕ_E aplicamos la ley de Gauss, creando una superficie gaussiana de radio "r" simétrica al cilindro de cartón, obteniéndose :



Aplicando la ley de Gauss, tanto en las tapas como en el cuerpo cilindro, obtenemos lo siguiente

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{TAPA_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \oint_{cuerpo} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \oint_{TAPA_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\text{TAPA 1}} E \cdot dA_1 \cancel{\cos 90}^{0} + \oint_{\text{cuerpo}} E\, dA_2 \cancel{\cos 0}^{1} + \oint_{\text{TAPA 2}} E \cdot dA_3 \cancel{\cos 90}^{0} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\text{cuerpo}} E \cdot dA_2 \, (1) = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint_{\text{cuerpo}} dA_2 = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot A_{\substack{\text{superficie} \\ \text{Gaussiana}}} = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$E\,(2\pi r \cdot l) = \frac{q_{ENC}}{\varepsilon_0}.$$

$$\boxed{E = \frac{q_{ENC}}{2\pi r\, l\, \varepsilon_0} \left(\frac{N}{C}\right)}$$

$q_{ENC} = 2{,}00\,mC$
$l = 2{,}00\,cm$
$r = 10{,}0\,cm$

El campo Eléctrico E en la superficie del cilindro se obtiene evaluando E para $r = 10{,}0\,cm = 0{,}10\,m$ y $l = 2{,}00\,cm = 0{,}02\,m$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$ (Permitividad del Vacío)

$$E = \frac{2\times10^{-3}\,\cancel{C}}{2\pi\times 8{,}85\times10^{-12}\,\frac{\cancel{C^2}}{N\cdot \cancel{m^2}}\times 0{,}10\,\cancel{m}\times 0{,}02\,\cancel{m}}$$

$$\boxed{E = 1{,}798\times10^{10}\ \frac{N}{C}}$$

Campo eléctrico "E" en la superficie del cilindro

El flujo eléctrico total a través de dicho cilindro es:

$$\phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}$$

$$\phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}_{TAPA_1} + \vec{E}\cdot\vec{A}_{CUERPO} + \vec{E}\cdot\vec{A}_{TAPA_2}.$$

$$\phi_E = \cancelto{0}{E\cdot A\cdot\cos 90^\circ} + E\cdot A\cdot\cos 0^\circ + \cancelto{0}{E\cdot A\cdot\cos 90^\circ}$$

$$\phi_E = E\cdot A\cdot(1) = E(2\pi\cdot r\cdot l)$$

$$\phi_E = 1{,}798\times10^{10}\ \frac{N}{C}\times 2\pi\times(0{,}10m)\times(0{,}02m)$$

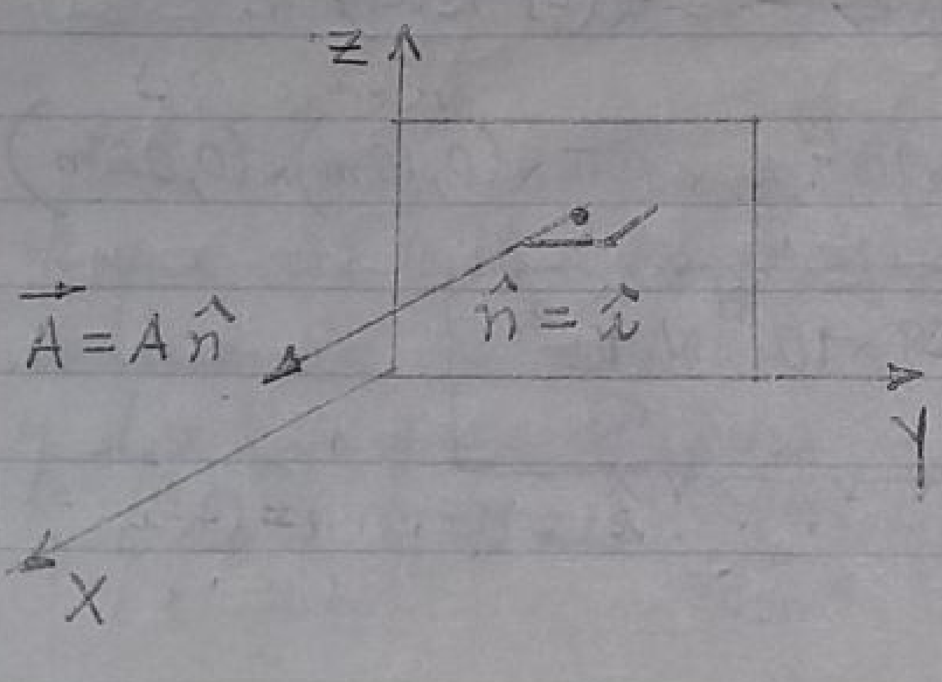
$$\boxed{\phi_E = 2{,}259\times10^{8}\ \frac{N\cdot m^2}{C}}$$

Problema 3

Un campo eléctrico uniforme viene dado por $\vec{E} = (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})\ N/C$. Cuál es el flujo a través de un plano de área $4\ m^2$ que se encuentra en el plano yz? Suponga que esa misma área está en un lugar de manera que la normal es $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ cual es el flujo eléctrico en éste caso?

Solución: El flujo eléctrico ϕ_E a través de una superficie plana se define como:

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad ; \quad \vec{A} = A \cdot \hat{n}$$



En el plano yz

$\vec{A} = A\hat{n}$

$\vec{A} = 4\hat{\imath}$

por lo tanto :

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot A \cdot \hat{n}$$

$$\vec{E} = \left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right)\frac{N}{C}$$

$$\vec{A} = A\hat{n}\ m^2$$
$$\vec{A} = 4\hat{\imath}\ m^2$$
$$\vec{A} = \left(4\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right)m^2$$

Entonces :

$$\phi_E = \left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right) \cdot \left(4\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right)$$

$$\phi_E = \underbrace{(3)(4)}_{12} \cdot \underbrace{\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}}_{(1)} + \underbrace{(2)(0)}_{0}\ \underbrace{\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}}_{(1)} + \underbrace{(-1)(0)}_{0}\ \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_{(1)}$$

$$\phi_E = 12 \times (1) + 0 \times (1) + 0 \times (1)$$

$$\phi_E = 12 + 0 + 0 = 12\ \frac{N}{C} m^2$$

$$\boxed{\phi_E = 12\ \frac{N}{C} m^2}$$

Flujo a través de un plano de $4m^2$ en el plano YZ.

Por otra parte :

Si $\vec{E} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y

$$\vec{A} = A\hat{n} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{\imath} + \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} + \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

Entonces :

$$\vec{E} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} = A\hat{n} = 4.\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

$$\phi_E = \vec{E}.\vec{A}$$

$$\phi_E = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{k}\right)$$

$$\phi_E = 3.\frac{4}{\sqrt{3}}\hat{i}.\hat{i} + 2.\frac{4}{\sqrt{3}}\hat{j}.\hat{j} - 1.\frac{4}{\sqrt{3}}\hat{k}.\hat{k}$$

$$\phi_E = 3.\frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{i}.\hat{i} + 2.\frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{j}.\hat{j} - 1.\frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hat{k}.\hat{k}$$

$$\phi_E = \frac{3.4.\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}(1) + \frac{2.4.\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}(1) - \frac{1.4.\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}(1)$$

$$\phi_E = 4\sqrt{3} + \frac{8}{3}\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

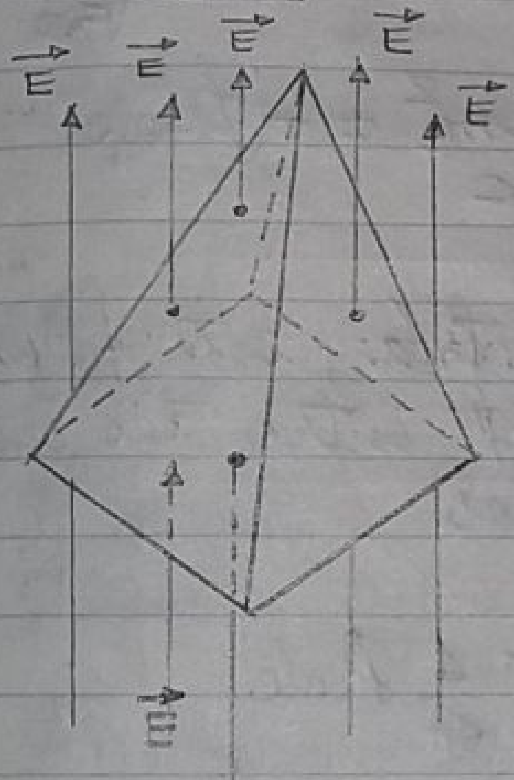
$$\phi_E = \left(4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{16}{3}\sqrt{3}\ \frac{N.m^2}{C}$$

$$\boxed{\phi_E = \frac{16\sqrt{3}}{3}\ \frac{N.m^2}{C}}$$

Problema 4

Una piramide de base horizontal cuadrada de 6,00 m de lado y con una altura de 4,00 m está colocada en un campo eléctrico vertical de 52,0 N/C. Calcule el flujo eléctrico total que pasa a traves de las cuatro superficies inclinadas de la piramide

Solución:

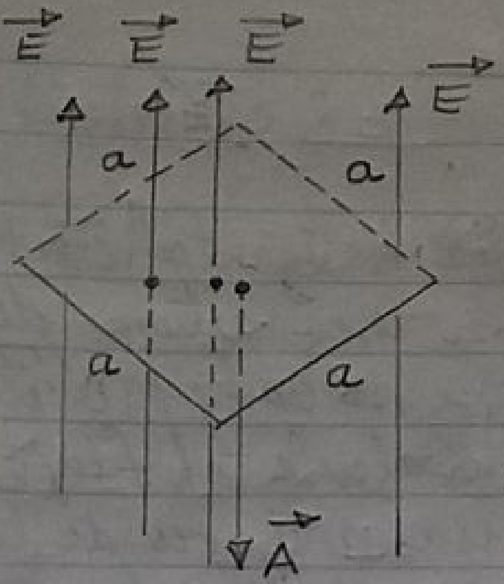


Como no hay carga dentro de la piramide, el flujo total en su superficie es cero, es decir:

$$\phi_{Neto} = \phi_{entra} + \phi_{sale} = 0$$

El mismo flujo que entra por la base horizontal cuadrada sale por las cuatro superficies inclinadas y es igual a:

$$\phi_{Entra} = \vec{E} \cdot \vec{A} = E . A . \cos(180°)$$



$$\phi_{Entra} = \vec{E}\cdot\vec{A} = E.A.\overbrace{\cos(180°)}^{-1}$$

$$\phi_{Entra} = -E.A$$

$$\phi_{Entra} = -E.a^2$$

$$\phi_{Entra} = -52{,}0\,\frac{N}{C} \times (6{,}00m)^2$$

$$\phi_{Entra} = -52{,}0\,\frac{N}{C} \times 36{,}0\,m^2$$

$$\phi_{Entra} = -1872\,\frac{N.m^2}{C}$$

$$\phi_{Entra} = -1872\,\frac{N.m^2}{C} = -\phi_{sale}$$

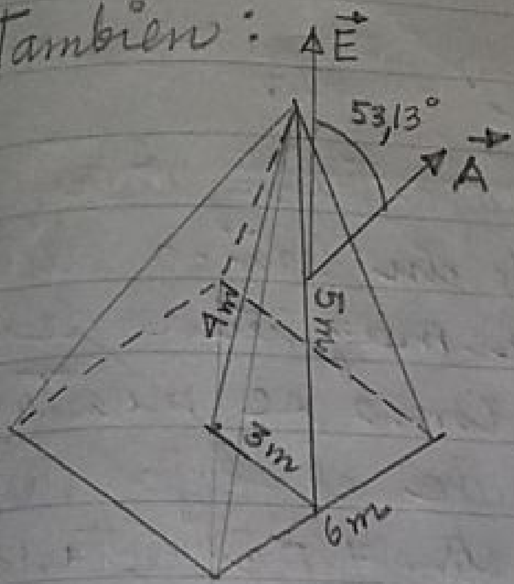
Debido a la simetría, este flujo se reparte por igual entre las cuatro superficies inclinadas

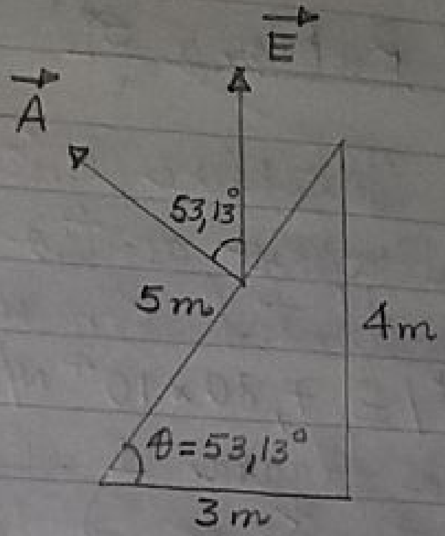
$$\phi_{cara} = \phi_{superficie} = \frac{1}{4}\,\phi_{sale}$$

$$\phi_{superficie} = \frac{1}{4} \times 1872\,\frac{N.m^2}{C} = 468\,\frac{N.m^2}{C}$$

$$\phi_{superficie} = 468\,\frac{N.m^2}{C}$$

Tambien:





$$\tan\theta = \frac{4m}{3m}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13°$$

$$C^2 = A^2 + B^2$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$C = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$C = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$C = 5m.$$

$$\phi_{superficie} = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

$$\phi_{superficie} = E . A . \cos\theta$$

$$\phi_{superficie} = E . \left(\frac{1}{2} b . h\right) . \cos\theta$$

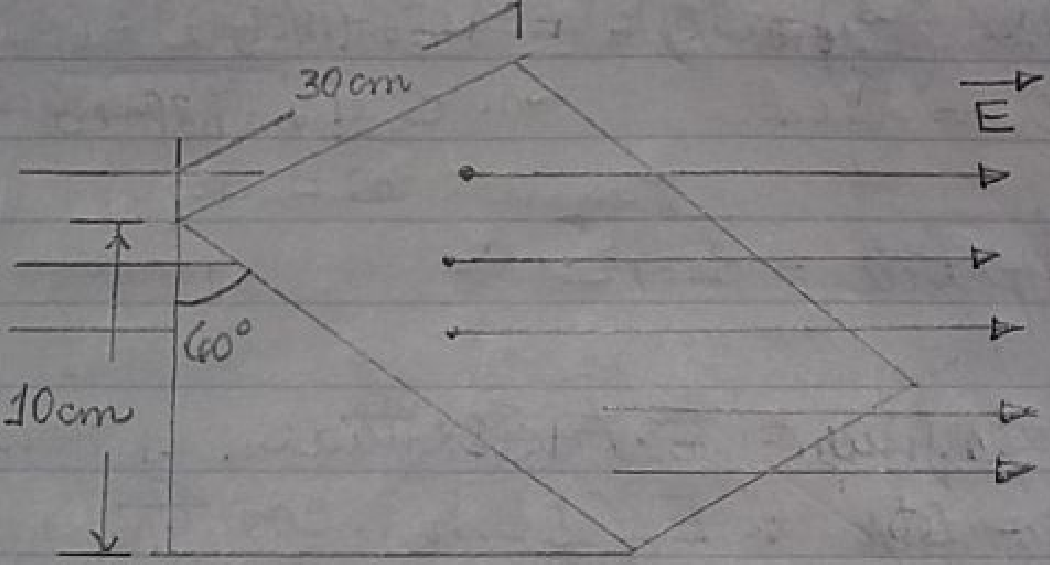
$$\phi_{superficie} = 52{,}0 \frac{N}{C} \times \left(\frac{1}{2} \times 6m \times 5m\right) \times \cos(53{,}13°)$$

$$\phi_{superficie} = 468 \frac{N.m^2}{C}$$ (En cada Cara de la piramide)

$$\phi_{TOTAL} = 1872 \frac{N.m^2}{C}$$ (Es el flujo total)

Problema 5

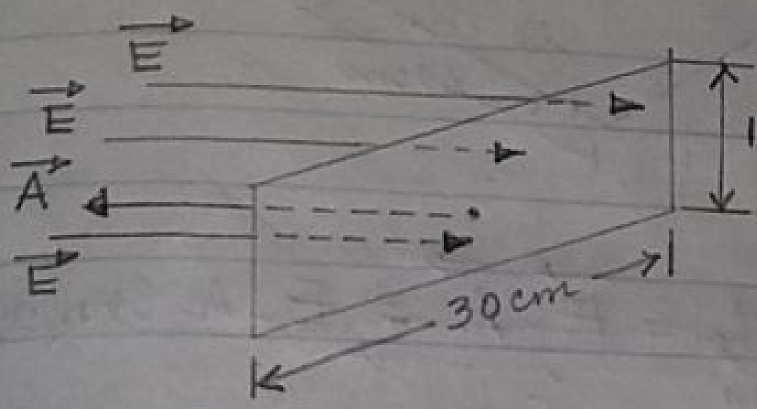
Considere una caja triangular cerrada en reposo dentro de un campo eléctrico horizontal con una magnitud de $|\vec{E}| = 7{,}80 \times 10^4 \, N/C$ como se muestra en la figura 1. Calcule el flujo eléctrico a través de a) la superficie rectangular vertical b) la superficie inclinada y c) la superficie total de la caja.



Solución: El flujo eléctrico está definido como:

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot A \cdot \hat{n}$$

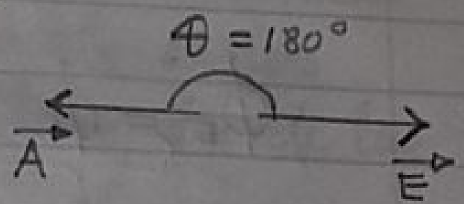
a) Para la superficie rectangular, el flujo electrico ϕ_E:



Area A:

$A = b \times h$

$A = 0{,}30m \times 0{,}10m$



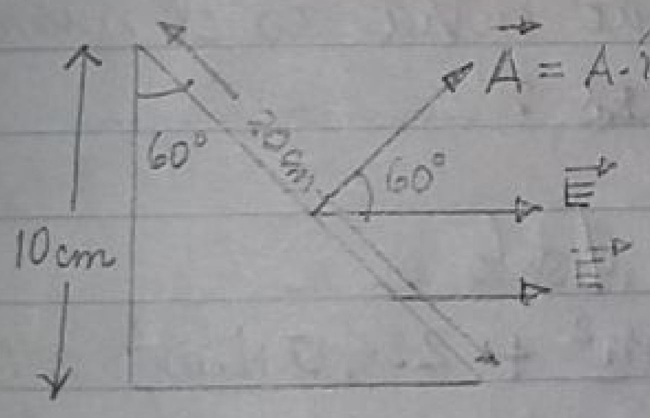
$$\phi_E = \phi_{Entra} = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cdot \cos\theta$$

$$\phi_E = \phi_{Entra} = E \cdot A \cdot \cos(180°)$$

$$\phi_E = \phi_{Entra} = 7{,}80 \times 10^4 \frac{N}{C} \times (0{,}30m \times 0{,}10m) \times \cos(180)$$

$$\phi_E = \phi_{Entra} = -2340 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

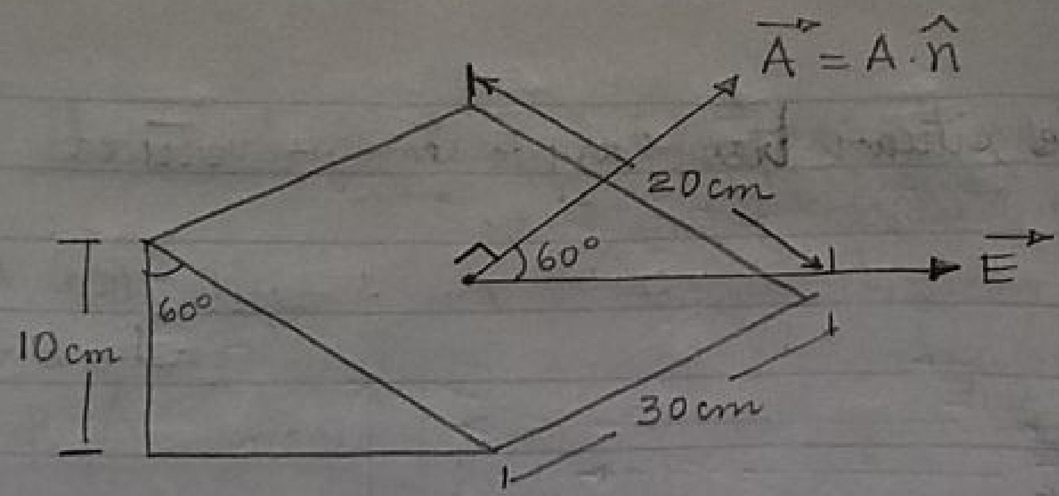
b) Para la superficie inclinada, el flujo electrico ϕ_E es:



$$\phi_E = \phi_{sale} = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

$$\cos 60° = \frac{10\,cm}{h}$$

$$h = \frac{10\,cm}{\cos 60°} = 20\,cm$$



$$\phi_E = \phi_{sale} = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cdot \cos(60°)$$

$$\phi_{sale} = 7{,}80 \times 10^4 \frac{N}{C} \times (0{,}30m \times 0{,}20m) \times \cos(60°)$$

$$\phi_{sale} = 7{,}80 \times 10^4 \frac{N}{C} \times 0{,}06m^2 \times 0{,}5$$

$$\phi_{sale} = 2340 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

c) En la superficie total de la caja el flujo eléctrico es nulo ($\phi_E = 0$) ya que el flujo que entra es el mismo que sale, entonces:

$$\phi_{NETO} = \phi_{entra} + \phi_{sale}$$

$$\phi_{NETO} = -2340 \frac{N \cdot m^2}{C} + 2340 \frac{N \cdot m^2}{C} = 0$$

$$\boxed{\phi_{NETO} = 0}$$