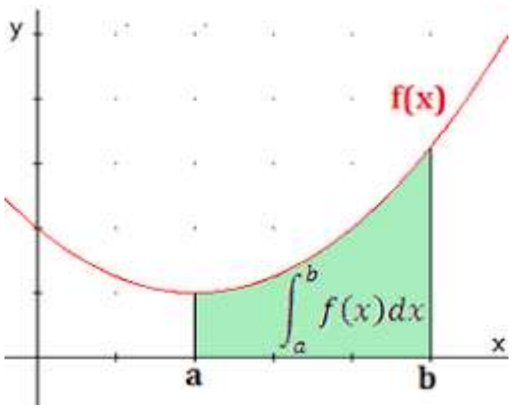
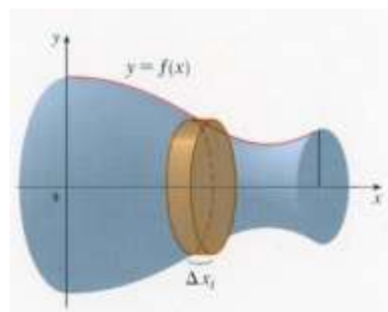
Universidad Nacional Experimental del Táchira
Departamento de Matemática y Física
Asignatura Matemática II (0826201)

Integración Definida y Aplicaciones





1. La Integración Definida, Propiedades
2. Primero y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.
3. Teorema del Valor Medio

Objetivos:

Interpretar Geométricamente la integral Definida

Aplicar las propiedades de la Integral Definida

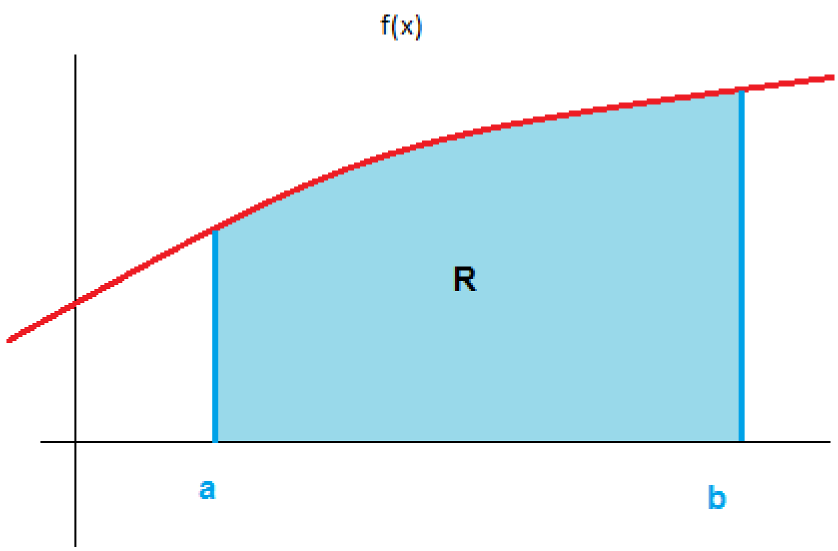
Aplicar el Primero y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Interpretar Geométricamente El Teorema del Valor Medio para Integrales.

Definición formal de la Integral de Riemann.

Suma superior e inferior

Sea $f(x)$ una función no negativa y continua en el intervalo cerrado $[a\,,b\,]$. La gráfica de la función, el eje de abscisas y la rectas verticales $x = a\,, x = b$ determinan un recinto cerrado de área A. Si $f(x)$ es una recta, este recinto cerrado tendrá forma de triángulo o de rectángulo. Y el área será fácil de obtener con las fórmulas elementales del área. Pero si $f(x)$es una curva no rectilínea, la cosa se complica. Área encerrada por la gráfica $f(x)$ con el eje horizontal en el intervalo $[a\,,b\,]$



Podemos aproximar el valor del área de la región de la siguiente forma. Vamos a tomar una partición del intervalo $[a\,,b\,]$. Una partición no es más que un conjunto finitos de valores $P = \{x_{0,} x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado está acotada en dicho intervalo. Recuerda que la menor de las cotas superiores se llama supremo y el mayor de las cotas inferiores se llama ínfimo. Así, todos los intervalos $[x_0\,, x_1\,]$, $[x_{1\,,}\, x_2]$, …, $[x_{n-1}\,,\ x_n]$ tendrán su correspondiente supremo y ínfimo. Fíjate que al ser $f(x)$ continua en todos los intervalos $[x_0\,, x_1\,]$, $[x_{1\,,}\, x_2]$, …, $[x_{n-1}\,,\ x_n]$, el supremo coincide con el máximo y el ínfimo con el mínimo.

Tendremos n intervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

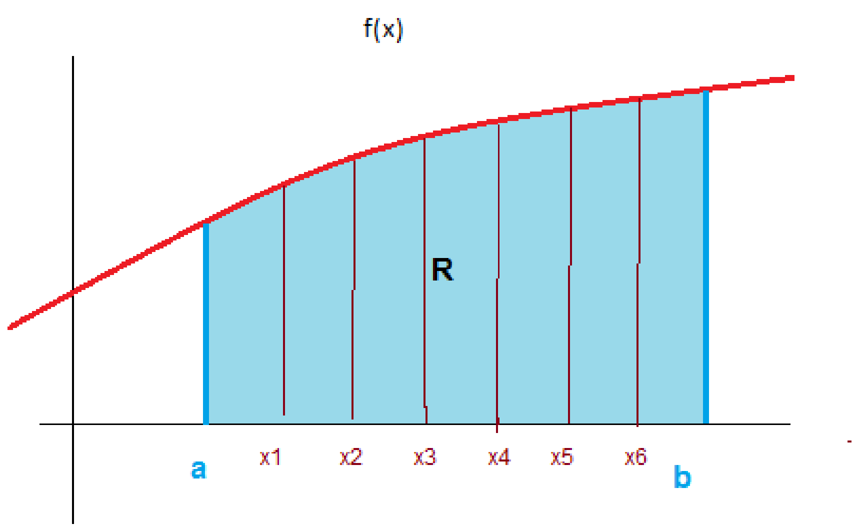
Si el intervalo de partida es $[a, b]$, su anchura es $b - a$. Si tomamos una partición que divide $[a, b]$ en n intervalos de igual anchura, la anchura de cada uno de estos intervalos será:

$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ y los extremos de estos subintervalos serán $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ donde $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, en general $x_i = x_0 + i\Delta x$, $x_n = b$. Para cada subintervalo se construye un rectángulo de altura $f(x_i)$. Entonces las sumas de las áreas de esos **n** rectángulos está dada por Sn unidades cuadradas,

$$Sn = f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \cdots + f(x_i).\Delta x + \cdots f(x_n).\Delta x$$

En notación Sigma se tiene:

$$Sn = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$



Mientras más rectángulos tomemos mayor será su aproximación al área, por lo tanto, tiene sentido que el área real sea el límite de las aproximaciones cuando el número de rectángulos tienda a Infinito $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Ejemplo1 de las Sumas de Riemann

Evalúa $f(x) = x$ en el intervalo $[-3, 1]$ utilizando suma de Riemann y luego comprueba el resultado usando la integral definida correspondiente.

El valor del intervalo que está más a la izquierda es $a = -3$ y el otro es $b = 1$, planteemos las ecuaciones de Δx y x_i:

$$\Delta x = \frac{1-(-3)}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_i = -3 + i\frac{4}{n} = -3 + 4\frac{i}{n}$$

Ahora sí, vamos a plantear la sumatoria a resolver, vamos a sustituir Δx por lo que calculamos y vamos a sustituir todas las x de la función $f(x)$ por lo que hayamos calculado en x_i anteriormente:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(-3 + 4\frac{i}{n}\right)\left(\frac{4}{n}\right)$$

Perfecto, ahora multiplicaremos los dos paréntesis que tenemos en la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-12}{n} + 16\frac{i}{n^2}\right)$$

Por propiedades de sumatorias, nuestra suma de la sumatoria la dividiremos en una suma de sumatorias:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{-12}{n} + \sum_{i=1}^{n} 16\frac{i}{n^2}$$

Todo lo que no sea i puede salir de la sumatoria por propiedades de las sumatorias ya que todo lo que no es i se considera una constante:

$$-\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

Ahora aplicaremos la sumatoria de una constante y la sumatoria de i que puedes encontrar en este artículo y luego procedamos a simplificar:

$$-\frac{12}{n}n + \frac{16}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = -12 + \frac{16}{n}\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

$$= -12 + 8 + \frac{8}{n} = -4 + \frac{8}{n}$$

Finalmente apliquemos el concepto de límite, que sabiendo cómo funciona, todos los valores que tengan un denominador n serán iguales a cero y los valores que no tengan n se conservan:

$$\lim_{n \to \infty} -4 + \frac{8}{n} = -4 + 0 = -4$$

Respuesta final: -4

Nota

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1} = \boldsymbol{n}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{i}^2 = \frac{\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}).(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{6}}$$

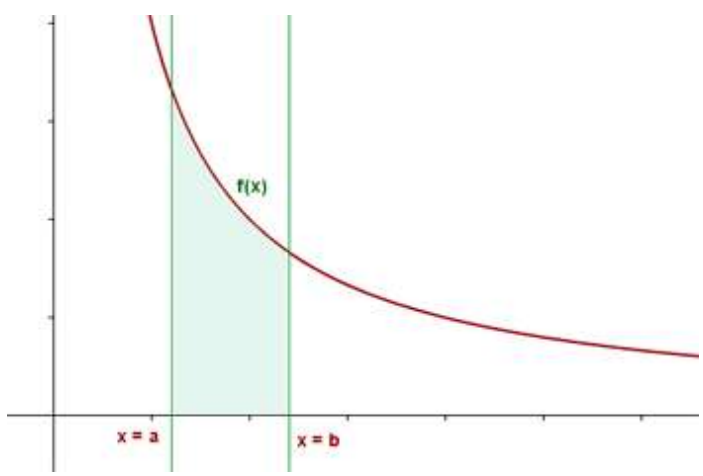
Definición

Supongamos que la función $\boldsymbol{f}$ es continua en el intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,]$ con $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{en}$ $[\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}]$ y que R es la región acotada por la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, el eje $\boldsymbol{x}$ y las rectas $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Entonces el área bajo la curva desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{b}$ es :

$$\boldsymbol{A} = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}).\Delta\boldsymbol{x}$$

Integral definida

Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a, b]$, la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



La **integral definida** se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$.

$\int$ es el signo de integración, **a** es el límite inferior de la integración, **b** es el límite superior de la integración, $f(x)$ es el **integrando** o función a integrar, dx es **diferencial** de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

1. El valor de la i**ntegral definida** cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Si los límites que integración coinciden, la **integral definida** vale **cero**.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. Si c es un punto interior del intervalo$[a,b]$, la i**ntegral definida** se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos$[a,b]$ y $[c,d]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. La **integral definida** de una suma de funciones es igual a la suma de integrales·

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\;dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k\cdot f(x) = k\cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Con la definición formal de integral ocurre lo mismo que con la definición formal de derivada o la definición formal de límite. Cuando las funciones se complican, las definiciones formales son difíciles de operar. Por eso buscamos métodos más prácticos. Para ello vamos a estudiar, en el siguiente apartado, el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow.

Regla de Barrow

La **regla de Barrow** dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $G(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Tomando el ejercicio de sumas de Riemann utilizando la regla de Barrow

Comprobemos, si la integral de la función $f(x)$ con los límites $[-3,1]$ da el mismo resultado, entonces nuestra evaluación de la suma de Riemann es correcta:

$$\int_{-3}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{1}$$

Evaluamos:

$$= \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

¡Excelente, lo que quiere decir que nuestro resultado de -4 es correcto!

Ejemplo A: Resuelva la siguiente integral definida

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

Solución:

1. Observamos que podemos integrar aplicando la regla de la potencia

$$\int_{-2}^{-1} (x-1)^{-3} dx$$

2. Aplicamos la fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ pero primero utilizamos un cambio de variable

$$u = x - 1$$

$$du = dx$$

3. Hallamos la integral indefinida o Primitiva (en este caso no es necesario la constante de integración).
4. Tenemos 2 formas de resolverla: una regresando al cambio de variable y la otra cambiando los límites de integrales

$$\int (x-1)^{-3} dx = \int u^{-3} du$$

$$= \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2u^2}$$

Regresamos al cambio de variable

$$= -\frac{1}{2(x-1)^2}$$

Tenemos entonces

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2}\bigg|_{-2}^{-1}$$

Cambiamos los límites de integración

$$si\ x = -2 \ \rightarrow u = (-2) - 1 = -3$$

$$si\ x = -1 \ \rightarrow u = (-1) - 1 = -2$$

Tenemos entonces

$$\int_{-3}^{-2} u^{-3} du = -\frac{1}{2u^2}\bigg|_{-3}^{-2}$$

5. Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior en las dos formas

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-1-1)^2} - \frac{1}{(-2-1)^2}\right]$$

$$\int_{-3}^{-2} u^{-3} du = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2}\right]$$

6. Resolvemos las operaciones algebraicas en las dos formas y obtenemos la integral definida

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{9-4}{36}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{36}\right) = -\frac{5}{72}$$

$$\int_{-3}^{-2} u^{-3} du = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{36}\right) = -\frac{5}{72}$$

Ejemplo B: Resuelva la siguiente integral definida

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$$

Solución:

1. Esta integral se resuelve por integración por partes. Primero resolvemos la integral definida y después evaluamos en los límites de integración:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$$

Como tenemos un polinomio multiplicando a $\cos x$, tomamos a $u = x^2$ y

$dv = \cos x dx$. De este modo

$$\begin{array}{ccc} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x dx \\ dv = \cos x dx & \Longrightarrow & v = \sin x \end{array}$$

Por lo tanto, la integral nos queda:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \underbrace{\int x \sin x dx}_{*}$$

* Volvemos a repetir el proceso de integración por partes

Donde tomamos a $u = x$ y $dv = \sin x\, dx$, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Longrightarrow \quad du = dx \\ dv = \sin x dx \quad &\Longrightarrow \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta segunda integral se vuelve:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Sustituyendo en la original tenemos:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \\ &= x^2 \sin x - 2\left[-x \cos x + \sin x\right] + C \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C \end{aligned}$$

2. Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = \left[(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x\right]_0^\pi$$

$$= \left[\left((\pi^2 - 2) \sin \pi + 2\pi \cos \pi\right) - \left((0 - 2) \sin 0 + 2(0) \cos 0\right)\right]$$

3. Resolvemos las operaciones algebraicas

$$= ((\pi^2 - 2)(0) + 2\pi(-1)) - (0 + 0)$$

4. Obtenemos la integral definida

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx = -2\pi$$

Ejemplo C: Resuelva la siguiente integral definida

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Solución:

1. Resolvemos la integral indefinida o Primitiva por medio de un cambio de variable de irracionales para deshacernos del radical. Tomamos $t = \sqrt{x}$, donde $t \geq 0$ de este modo

$$x = t^2 \quad \rightarrow \quad dx = 2tdt$$

Hacemos cambio a los límites de integración

$$x = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{0} = 0$$
$$x = 4 \Longrightarrow t = \sqrt{4} = 2$$

Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2\int_0^2 \frac{t}{1+t} dt$$

Como la integral nos queda con la variable del mismo grado en el numerador que en el denominador, debemos dividir polinomios

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

Entonces tenemos

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_0^2 \frac{t}{1+t}dt$$
$$= 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

2. Aplicamos el teorema del cálculo, evaluamos en el límite superior menos el límite inferior

$$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_0^2$$

3. Resolvemos las operaciones algebraicas y obtenemos la integral definida

$$= 2\left[(2 - \ln 3) - (0 - \ln 1)\right]$$
$$= 2\,(2 - \ln 3)$$
$$= 4 - 2\ln 3$$
$$= 4 - \ln 3^2 = 4 - \ln 9$$

Teorema fundamental del cálculo

$$\int F'(x)\,dx = f\,(x)$$

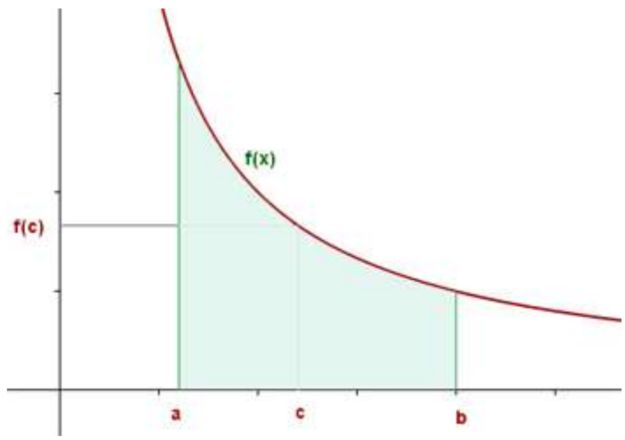
El t**eorema fundamental del cálculo** nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas.

Al integrar una función continua y luego derivarla se recupera la función original.

Teorema de la media o del valor medio para integrales

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe un punto c en el interior del intervalo tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$$



Función integral

Sea $f(t)$ una **función continua** en el intervalo $[a, b]$.

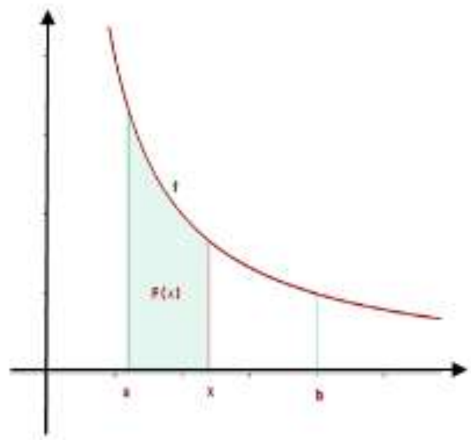
A partir de esta función se define la **función integral**:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

que depende del límite superior de integración.

Para evitar confusiones cuando se hace referencia a la variable de f, se la llama t, pero si la referencia es a la variable de F, se la llama x.

Geométricamente la **función integral**, $F(x)$, representa el **área** del recinto limitado por la curva $y = ft)$, el eje de abscisas y las rectas $t = a$ y $t = x$.



A la **función integral**, $F(x)$, también se le llama **función de áreas** de f en el intervalo $[a, b]$

Importante

Para ampliar la información, consultar el libro Cálculo de Larson, Capitulo Nº 4, Integración, 6ta Edición.