

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Факультет інформатики та обчислювальної техніки  
Кафедра обчислювальної техніки

Лабораторна робота №4  
з дисципліни « Методи оптимізації та планування » на тему  
«Проведення трьохфакторного експерименту  
при використанні рівняння регресії з урахуванням ефекту взаємодії»

Виконала:  
студентка II курсу ФІОТ  
групи ІВ – 92  
Гайдукевич Марія  
Номер залікової книжки: ІВ - 9206

Перевірив:  
ас. Регіда П.Г.

Київ – 2021

**Мета роботи:** провести повний трьохфакторний експеримент. Знайти рівняння регресії адекватне об'єкту.

**Завдання на лабораторну роботу:**

1. Скласти матрицю планування для повного трьохфакторного експерименту.
2. Провести експеримент, повторивши N раз досліди у всіх точках факторного простору і знайти значення відгуку Y. Знайти значення Y шляхом моделювання випадкових чисел у певному діапазоні відповідно варіанту. Варіанти вибираються за номером в списку в журналі викладача.

$$y_{i\max} = 200 + x_{cp\max}$$

$$y_{i\min} = 200 + x_{cp\min}$$

$$\text{де } x_{cp\max} = \frac{x_{1\max} + x_{2\max} + x_{3\max}}{3}, \quad x_{cp\min} = \frac{x_{1\min} + x_{2\min} + x_{3\min}}{3}$$

3. Знайти коефіцієнти рівняння регресії і записати його.
4. Провести 3 статистичні перевірки – за критеріями Кохрена, Стюдента, Фішера.
5. Зробити висновки по адекватності регресії та значимості окремих коефіцієнтів і записати скореговане рівняння регресії.
6. Написати комп'ютерну програму, яка усе це моделює.

**Варіант завдання:**

№ варіанта	$x_1$		$x_2$		$x_3$	
	min	max	min	Max	min	max
204	-20	30	-25	10	-25	-20

## Роздруківка тексту програми:

```
import random
import numpy as np
import sklearn.linear_model as lm
from scipy.stats import f, t
from numpy.linalg import solve

def regression(x, b):
    y = sum([x[i] * b[i] for i in range(len(x))])
    return y

def dispersion(y, y_aver, n, m):
    res = []
    for i in range(n):
        s = sum([(y_aver[i] - y[i][j]) ** 2 for j in range(m)]) / m
        res.append(round(s, 3))
    return res

def planing_matrix_interaction_effect(n, m):
    x_normalized = [[1, -1, -1, -1],
                    [1, -1, 1, 1],
                    [1, 1, -1, 1],
                    [1, 1, 1, -1],
                    [1, -1, -1, 1],
                    [1, -1, 1, -1],
                    [1, 1, -1, -1],
                    [1, 1, 1, 1]]
    y = np.zeros(shape=(n, m), dtype=np.int64)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            y[i][j] = random.randint(y_min, y_max)

    for x in x_normalized:
        x.append(x[1] * x[2])
        x.append(x[1] * x[3])
        x.append(x[2] * x[3])
        x.append(x[1] * x[2] * x[3])

    x_normalized = np.array(x_normalized[:len(y)])
    x = np.ones(shape=(len(x_normalized), len(x_normalized[0])), dtype=np.int64)

    for i in range(len(x_normalized)):
        for j in range(1, 4):
            if x_normalized[i][j] == -1:
                x[i][j] = x_range[j - 1][0]
            else:
                x[i][j] = x_range[j - 1][1]

    for i in range(len(x)):
        x[i][4] = x[i][1] * x[i][2]
        x[i][5] = x[i][1] * x[i][3]
        x[i][6] = x[i][2] * x[i][3]
        x[i][7] = x[i][1] * x[i][3] * x[i][2]

    print(f'\nМатриця планування для n = {n}, m = {m}:')
```

```

print('\n3 кодованими значеннями факторів:')
print('\n      X0      X1      X2      X3  X1X2  X1X3  X2X3  X1X2X3   Y1      Y2      Y3')
print(np.concatenate((x, y), axis=1))
print('\nНормовані значення факторів:\n')
print(x_normalized)

return x, y, x_normalized

def find_coef(X, Y, norm=False):
    skm = lm.LinearRegression(fit_intercept=False)
    skm.fit(X, Y)
    B = skm.coef_

    if norm == 1:
        print('\nКоефіцієнти рівняння регресії з нормованими X:')
    else:
        print('\nКоефіцієнти рівняння регресії:')
    B = [round(i, 3) for i in B]
    print(B)
    return B

def bs(x, y, y_aver, n):
    res = [sum(1 * y for y in y_aver) / n]
    for i in range(7):
        b = sum(j[0] * j[1] for j in zip(x[:, i], y_aver)) / n
        res.append(b)
    return res

def kriteriy_studenta2(x, y, y_aver, n, m):
    S_kv = dispersion(y, y_aver, n, m)
    s_kv_aver = sum(S_kv) / n
    s_Bs = (s_kv_aver / n / m) ** 0.5
    Bs = bs(x, y, y_aver, n)
    ts = [round(abs(B) / s_Bs, 3) for B in Bs]

    return ts

def kriteriy_studenta(x, y_average, n, m, dispersion):
    dispersion_average = sum(dispersion) / n
    s_beta_s = (dispersion_average / n / m) ** 0.5

    beta = [sum(1 * y for y in y_average) / n]
    for i in range(3):
        b = sum(j[0] * j[1] for j in zip(x[:, i], y_average)) / n
        beta.append(b)

    t = [round(abs(b) / s_beta_s, 3) for b in beta]

    return t

def kriteriy_fishera(y, y_average, y_new, n, m, d, dispersion):
    S_ad = m / (n - d) * sum([(y_new[i] - y_average[i])**2 for i in range(len(y))])
    dispersion_average = sum(dispersion) / n

    return S_ad / dispersion_average

```

```

def check(X, Y, B, n, m, norm=False):

    f1 = m - 1
    f2 = n
    f3 = f1 * f2
    q = 0.05

    y_aver = [round(sum(i) / len(i), 3) for i in Y]
    print('\nСереднє значення y:', y_aver)

    dispersion_arr = dispersion(Y, y_aver, n, m)

    qq = (1 + 0.95) / 2
    student_cr_table = t.ppf(df=f3, q=qq)

    ts = kriteriy_studenta2(X[:, 1:], Y, y_aver, n, m)

    temp_cohren = f.ppf(q=(1 - q / f1), dfn=f2, dfd=(f1 - 1) * f2)
    cohren_cr_table = temp_cohren / (temp_cohren + f1 - 1)
    Gp = max(dispersion_arr) / sum(dispersion_arr)

    print('Дисперсія y:', dispersion_arr)

    print(f'Gp = {Gp}')
    if Gp < cohren_cr_table:
        print(f'З ймовірністю {1-q} дисперсії однорідні.')
    else:
        print("Необхідно збільшити кількість дослідів")
        m += 1
        with_interaction_effect(n, m)

    print('\nКритерій Стюдента:\n', ts)
    res = [t for t in ts if t > student_cr_table]
    final_k = [B[i] for i in range(len(ts)) if ts[i] in res]
    print('\nКоефіцієнти {} статистично незначущі, тому ми виключаємо їх з
рівняння.'.format(
        [round(i, 3) for i in B if i not in final_k]))

    y_new = []
    for j in range(n):
        y_new.append(regression([X[j][i] for i in range(len(ts)) if ts[i] in res],
final_k))

    print(f'\nЗначення "y" з коефіцієнтами {final_k}')
    print(y_new)

    d = len(res)
    if d >= n:
        print('\nF4 <= 0')
        print('')
        return
    f4 = n - d

    Fp = kriteriy_fishera(Y, y_aver, y_new, n, m, d, dispersion_arr)

    Ft = f.ppf(dfn=f4, dfd=f3, q=1 - 0.05)

    print('\nПеревірка адекватності за критерієм Фішера')
    print('Fp =', Fp)
    print('Ft =', Ft)
    if Fp < Ft:
        print('Математична модель адекватна експериментальним даним')

```

```

        return True
    else:
        print('Математична модель не адекватна експериментальним даним')
        return False

def with_interaction_effect(n, m):
    X, Y, X_norm = planing_matrix_interaction_effect(n, m)

    y_aver = [round(sum(i) / len(i), 3) for i in Y]

    B_norm = find_coef(X_norm, y_aver, norm=True)

    return check(X_norm, Y, B_norm, n, m, norm=True)

def planning_matrix_linear(n, m, x_range):
    x_normalized = np.array([[1, -1, -1, -1],
                             [1, -1, 1, 1],
                             [1, 1, -1, 1],
                             [1, 1, 1, -1],
                             [1, -1, -1, 1],
                             [1, -1, 1, -1],
                             [1, 1, -1, -1],
                             [1, 1, 1, 1]])

    y = np.zeros(shape=(n,m))
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            y[i][j] = random.randint(y_min,y_max)

    x_normalized = x_normalized[:len(y)]

    x = np.ones(shape=(len(x_normalized), len(x_normalized[0])))
    for i in range(len(x_normalized)):
        for j in range(1, len(x_normalized[i])):
            if x_normalized[i][j] == -1:
                x[i][j] = x_range[j-1][0]
            else:
                x[i][j] = x_range[j-1][1]

    print('\nМатриця планування:')
    print('\n      X0  X1  X2  X3  Y1  Y2  Y3 ')
    print(np.concatenate((x, y), axis=1))

    return x, y, x_normalized

def regression_equation(x, y, n):
    y_average = [round(sum(i) / len(i), 2) for i in y]

    mx1 = sum(x[:, 1]) / n
    mx2 = sum(x[:, 2]) / n
    mx3 = sum(x[:, 3]) / n

    my = sum(y_average) / n

    a1 = sum([y_average[i] * x[i][1] for i in range(len(x))]) / n
    a2 = sum([y_average[i] * x[i][2] for i in range(len(x))]) / n
    a3 = sum([y_average[i] * x[i][3] for i in range(len(x))]) / n

    a12 = sum([x[i][1] * x[i][2] for i in range(len(x))]) / n
    a13 = sum([x[i][1] * x[i][3] for i in range(len(x))]) / n

```

```

a23 = sum([x[i][2] * x[i][3] for i in range(len(x))]) / n

a11 = sum([i ** 2 for i in x[:, 1]]) / n
a22 = sum([i ** 2 for i in x[:, 2]]) / n
a33 = sum([i ** 2 for i in x[:, 3]]) / n

X = [[1, mx1, mx2, mx3], [mx1, a11, a12, a13], [mx2, a12, a22, a23], [mx3, a13,
a23, a33]]
Y = [my, a1, a2, a3]
B = [round(i, 2) for i in solve(X, Y)]

print('\nРівняння регресії:')
print(f'y = {B[0]} + {B[1]}*x1 + {B[2]}*x2 + {B[3]}*x3')

return y_average, B

def linear(n, m):
    f1 = m - 1
    f2 = n
    f3 = f1 * f2
    q = 0.05

    x, y, x_norm = planning_matrix_linear(n, m, x_range)

    y_average, B = regression_equation(x, y, n)

    dispersion_arr = dispersion(y, y_average, n, m)

    temp_cohren = f.ppf(q=(1 - q / f1), dfn=f2, dfd=(f1 - 1) * f2)
    cohren_cr_table = temp_cohren / (temp_cohren + f1 - 1)
    Gp = max(dispersion_arr) / sum(dispersion_arr)

    print('\nПеревірка за критерієм Кохрена:\n')
    print(f'Розрахункове значення: Gp = {Gp}')
    print(f'\nТабличне значення: Gt = {cohren_cr_table}')
    if Gp < cohren_cr_table:
        print(f'З ймовірністю {1-q} дисперсії однорідні.')
    else:
        print("Необхідно збільшити ксть дослідів")
        m += 1
        linear(n, m)

    qq = (1 + 0.95) / 2
    student_cr_table = t.ppf(df=f3, q=qq)
    student_t = kriteriy_students(x_norm[:,1:], y_average, n, m, dispersion_arr)

    print('\nТабличне значення критерій Стюдента:\n', student_cr_table)
    print('Розрахункове значення критерій Стюдента:\n', student_t)
    res_student_t = [temp for temp in student_t if temp > student_cr_table]
    final_coefficients = [B[student_t.index(i)] for i in student_t if i in
res_student_t]
    print('Коефіцієнти {} статистично незначущі.'.
format([i for i in B if i not in final_coefficients]))

    y_new = []
    for j in range(n):
        y_new.append(regression([x[j][student_t.index(i)] for i in student_t if i in
res_student_t], final_coefficients))

    print(f'\nОтримаємо значення рівня регресії для {m} дослідів: ')
    print(y_new)

```

```

d = len(res_student_t)
f4 = n - d
Fp = kriteriy_fishera(y, y_average, y_new, n, m, d, dispersion_arr)
Ft = f.ppf(dfn=f4, dfd=f3, q=1 - 0.05)

print('\nПеревірка адекватності за критерієм Фішера:\n')
print('Розрахункове значення критерія Фішера: Fp =', Fp)
print('Табличне значення критерія Фішера: Ft =', Ft)
if Fp < Ft:
    print('Математична модель адекватна експериментальним даним')
    return True
else:
    print('Математична модель не адекватна експериментальним даним')
    return False

def main(n, m):
    main_1 = linear(n, m)
    if not main_1:
        interaction_effect = with_interaction_effect(n, m)
        if not interaction_effect:
            main(n, m)

if __name__ == '__main__':
    x_range = ((-20, 30), (-25, 10), (-25, -20))

    y_max = 200 + int(sum([x[1] for x in x_range]) / 3)
    y_min = 200 + int(sum([x[0] for x in x_range]) / 3)

    main(8, 3)

```



## Результати роботи програми:

Матриця планування:

	X0	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
[	1.	-20.	-25.	-25.	188.	184.	186.]
[	1.	-20.	10.	-20.	199.	186.	205.]
[	1.	30.	-25.	-20.	201.	181.	193.]
[	1.	30.	10.	-25.	196.	189.	182.]
[	1.	-20.	-25.	-20.	181.	184.	192.]
[	1.	-20.	10.	-25.	178.	195.	206.]
[	1.	30.	-25.	-25.	205.	201.	202.]
[	1.	30.	10.	-20.	182.	204.	190.]]

Рівняння регресії:

$$y = 186.74 + 0.07*x1 + 0.03*x2 + -0.23*x3$$

Перевірка за критерієм Кохрена:

Розрахункове значення:  $G_p = 0.3271221378939634$

Табличне значення:  $G_t = 0.815948432359917$

З ймовірністю 0.95 дисперсії однорідні.

Табличне значення критерій Стюдента:

2.119905299221011

Розрахункове значення критерій Стюдента:

[132.165, 1.204, 0.401, 0.401]

Коефіцієнти [0.07, 0.03, -0.23] статистично незначущі.

Отримаємо значення рівня регресії для 3 дослідів:

[186.74, 186.74, 186.74, 186.74, 186.74, 186.74, 186.74, 186.74]

[illegible]

Нормовані значення факторів:

```
[[ 1 -1 -1 -1 1 1 1 -1]
 [ 1 -1 1 1 -1 -1 1 -1]
 [ 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1]
 [ 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1]
 [ 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1]
 [ 1 -1 1 -1 -1 1 -1 1]
 [ 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1]
 [ 1 1 1 1 1 1 1 1]]
```

Коефіцієнти рівняння регресії з нормованими X:

[193.375, 4.459, -2.375, 0.292, 2.708, -0.125, 0.708, -1.375]

Середнє значення у: [195.667, 186.333, 198.333, 198.667, 192.333, 181.333, 196.667, 197.667]

Дисперсія у: [22.889, 29.556, 32.889, 43.556, 54.222, 11.556, 38.222, 69.556]

Gp = 0.22997824405017753

З ймовірністю 0.95 дисперсії однорідні.

Критерій Стюдента:

[154.073, 3.552, 1.892, 0.232, 2.158, 0.1, 0.565, 1.096]

Коефіцієнти [-2.375, 0.292, -0.125, 0.708, -1.375] статистично незначущі, тому ми виключаємо їх з рівняння.

Значення "у" з коефіцієнтами [193.375, 4.459, 2.708]

[191.624, 186.208, 195.126, 200.542, 191.624, 186.208, 195.126, 200.542]

Перевірка адекватності за критерієм Фішера

Fp = 1.0327089397776792

Ft = 2.852409165081986

Математична модель адекватна експериментальним даним

## Висновки:

Під час виконання лабораторної роботи було змодельовано трьохфакторний експеримент при використанні лінійного рівняння регресії та рівняння регресії з ефектом взаємодії, складено матрицю планування експерименту, було визначено коефіцієнти рівняння регресії (натуралізовані та нормовані), виконано перевірку правильності розрахунку коефіцієнтів рівняння регресії. Також було проведено 3 статистичні перевірки (використання критеріїв Кохрена, Стюдента та Фішера). При виявленні неадекватності лінійного рівняння регресії оригіналу було застосовано ефект взаємодії факторів. Довірча ймовірність в даній роботі дорівнює 0.95, відповідно рівень значимості  $q = 0.05$ .