Ejercicios del Apartado 2.2. (p. 57)

Simmons, George F.
Calculus with Analytic Geometry. 2nd ed.

Febrero de 2025

Problema 1. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$.

1. En el punto $(-2, 4)$.
2. En el punto donde la pendiente es 8.
3. Si la intersección con el eje x de la tangente es 2.

Solución. Sea $f(x) = x^2$ con derivada $f'(x) = 2x$.

Inciso 1: En el punto $(-2, 4)$.
Se tiene $x_0 = -2$ y

$$f'(-2) = 2(-2) = -4$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{aligned} y - 4 &= -4\big(x - (-2)\big) \\ y - 4 &= -4\,(x + 2) \\ y &= -4x - 8 + 4 \\ y &= -4x - 4 \end{aligned}$$

Inciso 2: En el punto donde la pendiente es 8.
Igualamos la derivada a 8:

$$2x_0 = 8 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 4.$$

Luego, $y_0 = f(4) = 4^2 = 16$. La recta tangente es:

$$\begin{aligned} y - 16 &= 8\,(x - 4) \\ y - 16 &= 8x - 32 \\ y &= 8x - 16. \end{aligned}$$

Inciso 3: La tangente pasa por $(2, 0)$.
Sea el punto de tangencia (a, a^2). La recta tangente general es:

$$y = 2a\,(x - a) + a^2.$$

La condición de que pase por $(2,0)$ es:

$$\begin{aligned}0 &= 2a\,(2-a)+a^2\\ 0 &= 4a-2a^2+a^2\\ 0 &= 4a-a^2\\ a^2-4a &= 0\\ a(a-4) &= 0.\end{aligned}$$

Se obtiene $a=0$ o $a=4$. La tangente para $a=0$ es $y=0$ (el eje x); por lo tanto, la otra tangente corresponde a $a=4$:

$$y = 2(4)\,(x-4)+4^2 = 8\,(x-4)+16 = 8x-32+16 = 8x-16.$$

Problema 2. Demuestra que la tangente a la parábola $y=x^2$ en un punto (x_0,y_0), distinto del vértice, siempre tiene una intersección con el eje x en $\frac{1}{2}x_0$.

Solución. La ecuación de la recta tangente en (x_0,x_0^2) es:

$$y-x_0^2 = 2x_0\,(x-x_0).$$

Para hallar la intersección con el eje x, ponemos $y=0$:

$$\begin{aligned}0-x_0^2 &= 2x_0\,(x-x_0)\\ -x_0^2 &= 2x_0\,x-2x_0^2\\ x_0^2 &= 2x_0\,x\\ x &= \frac{x_0^2}{2x_0} = \frac{x_0}{2}.\end{aligned}$$

Problema 3. Una recta de la forma $y=mx+b$ es presumiblemente su propia tangente en cualquier punto. Verifica esto utilizando la fórmula del cociente diferencial para demostrar que si $f(x)=mx+b$ entonces $f'(x_0)=m$.

Solución. Recordemos que:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Con $f(x)=mx+b$ se tiene:

$$f(x_0+\Delta x) = m(x_0+\Delta x)+b = mx_0+m\Delta x+b,$$

y

$$f(x_0) = mx_0+b.$$

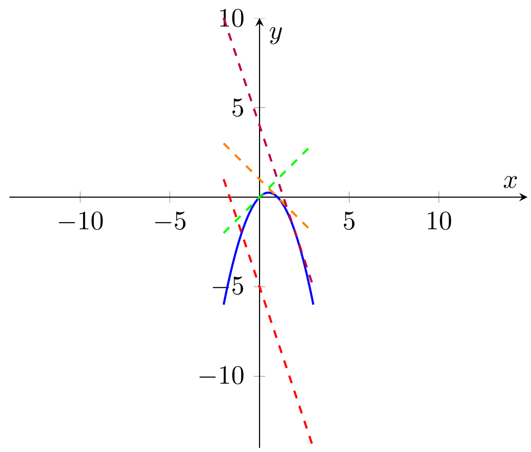
Luego,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{mx_0+m\Delta x+b-(mx_0+b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{m\Delta x}{\Delta x} = m.$$

Problema 4. Dibuja el gráfico de la función $y = x - x^2$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 3$.

1. Usa el método de incrementos para calcular la pendiente de la recta tangente en un punto arbitrario (x_0, y_0) de la curva.
2. ¿Cuáles son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, -2)$? Usa estas pendientes para dibujar las tangentes en estos puntos en tu gráfico.
3. ¿En qué punto de la curva la tangente es horizontal?

Solución. Sea $f(x) = x - x^2$.



Inciso 1: Para un incremento h, tenemos:

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h) - (x_0 + h)^2.$$

Expandiendo:

$$(x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2,$$

se obtiene:

$$f(x_0 + h) = x_0 + h - x_0^2 - 2x_0h - h^2.$$

La variación en y es:

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = h - 2x_0h - h^2.$$

Dividiendo por h:

$$\frac{\Delta y}{h} = 1 - 2x_0 - h.$$

Tomando el límite $h \to 0$, se concluye que:

$$f'(x_0) = 1 - 2x_0.$$

Inciso 2:

- En $(-1,-2)$:
$$f'(-1) = 1 - 2(-1) = 3.$$
- En $(0,0)$:
$$f'(0) = 1 - 2(0) = 1.$$
- En $(1,0)$:
$$f'(1) = 1 - 2(1) = -1.$$
- En $(2,-2)$:
$$f'(2) = 1 - 2(2) = -3.$$

Inciso 3:
La recta tangente es horizontal cuando $f'(x_0) = 0$:

$$1 - 2x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Problema 5. Usa la fórmula del cociente diferencial para calcular $f'(x_0)$ si $f(x)$ es:

1. $x^2 - 4x - 5$.
2. $x^2 - 2x + 1$.
3. $2x^2 + 1$.
4. $x^2 - 4$.

Los resultados serán necesarios en los problemas 6–9.

Solución. Inciso 1
Calculamos $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ para $x^2 - 4x - 5$:

$$\begin{aligned}
f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= [(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) - 5] - [x_0^2 - 4x_0 - 5] \\
&= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 4x_0 - 4\Delta x - 5 + x_0^2 + 4x_0 + 5 \\
&= 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 4\Delta x
\end{aligned}$$

Divididmos el resultado por Δx:

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x} \\
&= 2x_0 + \Delta x - 4
\end{aligned}$$

Calculamos el límite para $\Delta x \to 0$:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x - 4$$
$$= 2x_0 - 4$$

Inciso 2
Calculamos $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ para $x^2 - 2x + 1$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= [(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 1] - [x_0^2 - 2x_0 + 1] \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 + x_0^2 + 2x_0 - 1 \\ &= 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x \end{aligned}$$

Divididmos el resultado por Δx:

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$
$$= 2x_0 + \Delta x - 2$$

Calculamos el límite para $\Delta x \to 0$:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x - 2$$
$$= 2x_0 - 2$$

Inciso 3
Calculamos $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ para $2x^2 + 1$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= [2(x_0 + \Delta x)^2 + 1] - [2x_0^2 + 1] \\ &= 2(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 1 - 2x_0^2 - 1 \\ &= 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 + 1 - 2x_0^2 - 1 \\ &= 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 \end{aligned}$$

Divididmos el resultado por Δx:

$$= \frac{4x_0\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$$
$$= 4x_0 + 2\Delta x$$

Calculamos el límite para $\Delta x \to 0$:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4x_0 + 2\Delta x$$
$$= 4x_0$$

Inciso 4
Calculamos $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ para $x^2 - 4$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= [(x_0 + \Delta x)^2 - 4] - [x_0^2 - 4] \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 4 - x_0^2 + 4 \\ &= 2x_0\Delta x + \Delta x^2 \end{aligned}$$

Divididmos el resultado por Δx:

$$\begin{aligned} &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x \end{aligned}$$

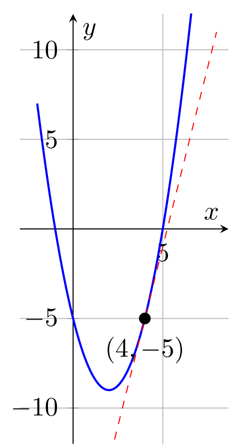
Calculamos el límite para $\Delta x \to 0$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

Problema 6. Dibuja la curva y la recta tangente en el punto indicado, y encuentra la ecuación de esta recta tangente:

1. $y = x^2 - 4x - 5$, en $(4, -5)$.
2. $y = x^2 - 2x + 1$, en $(-1, 4)$.

Solución. Inciso 1: Graficamos $y = x^2 - 4x - 5$:



La derivada es:

$$f'(x) = 2x - 4.$$

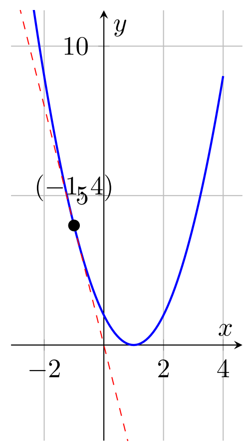
En $x = 4$:

$$f'(4) = 2(4) - 4 = 4.$$

La ecuación de la tangente es:

$$\begin{aligned} y - (-5) &= 4(x - 4) \\ y + 5 &= 4x - 16 \\ y &= 4x - 21. \end{aligned}$$

Inciso 2: Graficamos $y = x^2 - 2x + 1$:



La derivada es:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

En $x = -1$:

$$f'(-1) = 2(-1) - 2 = -4.$$

La ecuación de la tangente es:

$$\begin{aligned} y - 4 &= -4\big(x - (-1)\big) \\ y - 4 &= -4(x + 1) \\ y &= -4x - 4 + 4 \\ y &= -4x. \end{aligned}$$

Problema 7. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 1$ que sea paralela a la recta $8x + y - 2 = 0$.

Solución. Calcular la pendiente para $8x + y - 2 = 0$:

$$y = -8x + 2$$

La pendiente, entonces, es -8 .

Igualamos la derivada de la curva a la pendiente para encontrar el punto de tangencia:

$$\begin{aligned} 4x &= -8 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de tangencia es en $x = -2$, obteniendo que:

$$\begin{aligned} &y = 2 * (-2)^2 + 1 \\ &y = 9 \end{aligned}$$

El punto de tangencia se da en $x_0 = -2, y_0 = 9$, por lo que ahora buscamos la ecuación con la pendiente obtenieda previamente y en el punto de tangencia:

$$\begin{aligned} y - 9 &= -8(x - (-2)) \\ y - 9 &= -8(x + 2) \\ y - 9 &= -8x - 16 \\ y &= -8x - 16 + 9 \\ y &= -8x - 7 \end{aligned}$$

Problema 8. Encuentra las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(3, 1)$ y que son tangentes a la curva $y = x^2 - 4$.

Solución. Calcular la derivada de $x^2 - 4$ asumiendo que $x = a$:

$$f'(a) = 2a$$

Para calcular los puntos de tangencia, en principio, consideramos la ecuación de la pendiente y calculamos los puntos para la parábola $x^2 - 4$ y el punto $(3, 1)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{a^2 - 4 - 1}{a - 3} \\ &= \frac{a^2 - 5}{a - 3} \end{aligned}$$

Siendo $m = 2a$:

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{a^2-5}{a-3} \\ 2a(a-3) &= a^2-5 \\ 2a^2-6a-a^2+5 &= 0 \\ a^2-6a+5 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos dos valores para a: $a = 5, a = 1$. Con ellos, podemos estabelcer las coordenadas de los puntos de tangencia respecto a la párbola:

$$\begin{aligned} 5^2-4 &= 21 \\ 1^2-4 &= -3 \end{aligned}$$

Nuestros puntos de tangencia son: $(5, 21), (1, -3)$. Ahora podemos calcular las pendientes para cada punto:

$$\begin{aligned} m &= \frac{21-1}{5-3} \\ &= \frac{20}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{-3-1}{1-3} \\ &= \frac{-4}{-2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos en la ecuación para dar con las dos rectas.

$$\begin{aligned} y-1 &= 10(x-3) \\ y-1 &= 10x-30 \\ y &= 10x-30+1 \\ y &= 10x-29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y-1 &= 2(x-3) \\ y-1 &= 2x-6 \\ y &= 2x-6+1 \\ y &= 2x-5 \end{aligned}$$

Problema 9. Demuestra analíticamente que no existe ninguna recta que pase por el punto $(1, -2)$ y sea tangente a la curva $y = x^2 - 4$.

Solución. Para que una recta sea tangente a $y = x^2 - 4$ debe tocar la parábola en un único punto $(a, a^2 - 4)$ y tener la misma pendiente que la derivada en $x = a$.

Nuestra ecuación quedaría del siguiente modo:

$$y - (a^2 - 4) = 2a(x - a)$$

Ponemos $2a$ en tanto resulta la derivada de la parábola y es la pendiente de la recta tangente en cualquier punto.

Ahora, debemos reemplazar el punto dado en la ecuación.

$$\begin{aligned} -2 - (a^2 - 4) &= 2a(1 - a) \\ -2 - a^2 + 4 &= 2a - 2a^2 \\ -2 - a^2 + 4 - 2a - 2a^2 &= 0 \\ a^2 - 2a + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Dado que las soluciones $a' = 1 + i$ y $a'' = 1 - i$ son números complejos, no existen valores reales de a.

Por lo tanto, **no hay ninguna recta real que sea tangente a la parábola y pase por el punto** $(1, -2)$.

Problema 10. Una de las rectas que pasa por el punto $(2, 0)$ y es tangente a la parábola $y = x^2$ es el eje x. Encuentra la ecuación de la otra recta.

Solución. Calculamos el restante punto de tangencia considerando:

- $f'(x) = 2x$
- $y_0 = a^2, x_0 = a$
- el punto de interés $(2, 0)$

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{a^2 - 0}{a - 2} \\ 2a(a - 2) &= a^2 \\ 2a^2 - 4a - a^2 &= 0 \\ a^2 - 4a &= 0 \end{aligned}$$

Esto nos arroja dos valores: $a' = 0$ y $a'' = 4$.

De modo que el punto de tangencia que nos faltaba considerar es $(4, 16)$ ya que $4^2 = 16$.

Calculamos la pendiente para ese punto de tangencia respecto del punto de interés:

$$\begin{aligned} m &= \frac{16-0}{4-2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Calculamos la recta que pasa por el punto de interés con la pendiente correspondiente:

$$\begin{aligned} y - 0 &= 8(x-2) \\ y &= 8x - 16 \end{aligned}$$

Problema 11. Encuentra las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(3, 13)$ y que son tangentes a la parábola $y = 6x - x^2$.

Solución. Derivamos la función:

$$f'(x) = -2x + 6$$

Igualamos la derivada como pendiente de la recta dada por la función y el punto de interés:

$$\begin{aligned} -2a + 6 &= \frac{-a^2 + 6a - 13}{a-3} \\ (-2a+6)(a-3) &= -a^2 + 6a - 13 \\ -2a^2 + 6a + 6a - 18 + a^2 - 6a + 13 &= 0 \\ -a^2 + 6a - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos de tangencia, para $a' = 5$ y $a'' = 1$ son $(5, 5)$ y $(1, 5)$, ya que:

$$\begin{aligned} -(5^2) + 6 * 5 &= 5 \\ -(1^2) + 6 * 1 &= 5 \end{aligned}$$

Calculamos la pendiente para cada punto obtenido y el punto de interés:

$$\begin{aligned} m &= \frac{13-5}{3-5} \\ m &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{13-5}{3-1} \\ m &= 4 \end{aligned}$$

Obtenemos las dos rectas:

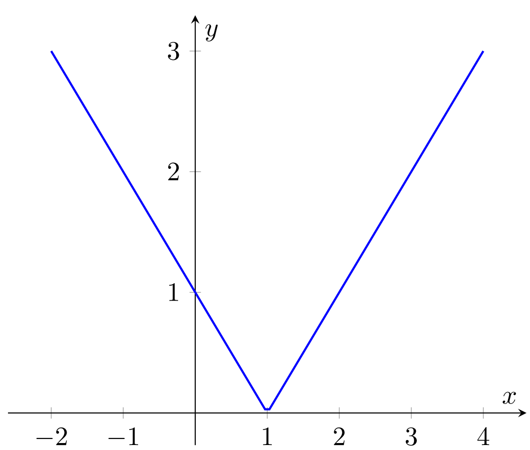
$$\begin{aligned} y - 13 &= -4(x-3) \\ y &= -4x + 12 + 13 \\ y &= -4x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 13 &= 4(x-3) \\ y &= 4x - 12 + 13 \\ y &= 4x + 1 \end{aligned}$$

Problema 12. Dibuja el gráfico de $y = f(x) = |x-1|$.

1. ¿Hay algún punto en el gráfico en el que no exista recta tangente?
2. Encuentra $f'(x_0)$ si $x_0 > 1$. Si $x_0 < 1$, ¿qué se puede decir sobre $f'(x_0)$ y sobre $x_0 = 1$?

Solución. Graficamos:



La función $f(x) = |x-1|$ se define a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1, \\ -(x-1), & x < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto:

- Para $x > 1$, $f(x) = x - 1$ y $f'(x) = 1$.
- Para $x < 1$, $f(x) = -(x - 1) = -x + 1$ y $f'(x) = -1$.

En $x = 1$ se tiene:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1,$$

por lo que la derivada no existe en $x = 1$. Este es un punto de no diferenciabilidad (cúspide).