

ВВЕДЕНИЕ

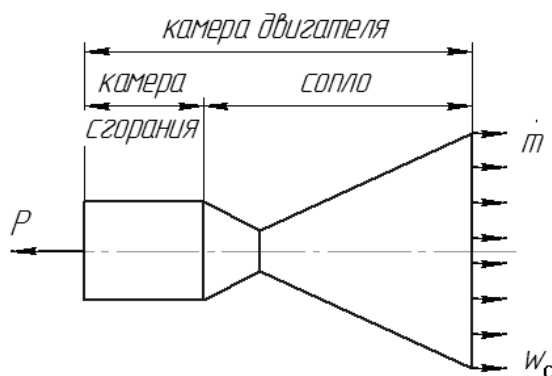
ЛЕКЦИИ № 1, 2

Предметом изучения дисциплины является камера двигателя, так как она является общим агрегатом для всех химических двигателей.

Цель дисциплины – определение параметров и характеристик камеры, проектирование её проточной части.

Понятия, термины, определения, классификации и др.

1. Реактивное движение тела – это движение под действием реактивной силы.
2. Реактивный двигатель – это двигатель, который создает реактивную силу.
3. Реактивная сила (тяга) двигателя – это сила, которая возникает при истечении из камеры двигателя некоторой массы газа с некоторой скоростью (см.рис.).



Тяга двигателя пропорциональна расходу и скорости истечения из сопла: $P \sim \dot{m} \cdot W_a$,

где P , H - тяга камеры,

\dot{m} , $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$ - массовый секундный расход рабочего тела,

W_a , $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ - скорость истечения из сопла.

Направление тяги противоположно направлению истечения газа.

4. Рабочее тело камеры – продукты сгорания, образованные в камере сгорания.
5. Подводимая энергия – это энергия, которая преобразуется в кинетическую энергию рабочего тела. В химических ракетных двигателях – это химическая энергия.
6. Для создания тяги необходимо: рабочее тело, энергия и камера двигателя.

7. Виды подводимой энергии:
- химическая – энергия горения топлива;
 - ядерная – энергия ядерных реакций;
 - электрическая – энергия аккумуляторов, батарей и др.;
 - механическая – энергия сжатого газа.
8. Тип двигателя определяется по виду подводимой энергии (химический, ядерный, электрический).
- С помощью химических и ядерных двигателей можно создать практически любую величину тяги (например двигатель РД170 – $P=8000$ кН).
- Электрические двигатели создают малую тягу ($P = 0,1..10H$).
9. В химических двигателях рабочее тело и источник энергии совмещены в одно понятие – топливо.
- Подводимая химическая энергия преобразуется в камере сгорания в тепловую энергию продуктов сгорания. Тепловая энергия продуктов сгорания преобразуется в сопле в кинетическую энергию.
10. В ядерных и электрических двигателях источник энергии и рабочее тело разделены (источник энергии – ядерный реактор, электронагревательная камера).
11. По принципу расположения источника энергии и рабочего тела реактивные двигатели делятся на две группы:
- ракетные,
 - неракетные.
- Ракетный двигатель – это реактивный двигатель, у которого источник энергии и рабочее тело расположены на борту летательного аппарата.
- Неракетный двигатель – просто реактивный – может получать (частично) рабочее тело из окружающей среды (самолетные реактивные двигатели).
12. Особенности ракетного двигателя:
- а) автономность от окружающей среды – может работать в вакууме, в атмосфере, в воде;
 - б) независимость работы и величины тяги от скорости полета аппарата.
13. По способу преобразования энергии реактивные двигатели делятся на две группы:
- а) двигатели прямой реакции, у которых тепловая энергия превращается в кинетическую энергию внутри самого двигателя. Двигатель и движитель здесь сочетаются в одном и том же агрегате с единым рабочим телом. Ракетный

двигатель – это двигатель прямой реакции, здесь рабочее тело двигателя и движителя (камеры) – одно и тоже топливо;

б) двигатели не прямой реакции, у которых двигатель и движитель разделены и имеют различные рабочие тела (самолетный винтовой реактивный двигатель – здесь рабочее тело двигателя (керосин + воздух) и движителя (винта) различные).

14. Подавляющее большинство ракетных двигателей – химические.

В качестве топлива здесь, как правило, служат два компонента:

- горючее,
- окислитель.

Бывает и однокомпонентное топливо: N_2H_4 (гидразин), H_2O_2 (перекись водорода). Источником энергии здесь является реакция разложения с выделением тепла.

15. В химических ракетных двигателях преобразование химической энергии топлива в тепловую и затем в кинетическую энергию происходит в двух нераздельных узлах (в камере сгорания и в сопле), которые образуют единый агрегат – камера двигателя (камера).

16. По агрегатному состоянию топлива химические ракетные двигатели делятся на четыре основные группы:

- а) ЖРД – жидкостные ракетные двигатели;
- б) РДТТ – ракетные двигатели твердого топлива;
- в) ГРД – гибридные ракетные двигатели.
- г) РДГТ – ракетные двигатели на гидрореагирующем топливе.

Агрегатное состояние компонентов топлива бывает:

- жидкое,
- твердое,
- газообразное,
- пастообразное,
- желеобразное и др.

17. По способу подачи топлива в камеру сгорания (КС) ЖРД разделяются на:

а) ЖРД с вытеснительной системой подачи – высокое давление сжатого газа в баках горючего и окислителя, за счет которого они вытесняются из баков в КС.

б) ЖРД с насосной системой подачи – низкое давление в баках (преимущество – тонкие стенки баков; недостаток – нужны насосы). Привод насосов осуществляется от газовых турбин, при этом конструктивно образуется агрегат ТНА (турбонасосный

агрегат). Рабочим телом турбины служит газ от специального газогенератора. Рабочим телом газогенератора служат как основные компоненты топлива, так и специальные, например H_2O_2 , N_2H_4 (разлагаются).

18. По способу утилизации отработанного на турбине газогенераторного газа ЖРД разделяются на две группы:

а) ЖРД с дожиганием газогенераторного газа в камере сгорания (замкнутая, или закрытая схема ЖРД). Здесь тяга камеры равна тяге двигателя.

б) ЖРД без дожигания генераторного газа (открытая схема). Здесь газ после турбины выбрасывается через специальные патрубки или сопла, которые могут быть либо тяговыми, либо управляющими. Здесь тяга двигателя является суммой тяг камеры и выхлопных сопел.

19. Выбор способа подачи компонентов топлива в ЖРД и выбор способа утилизации генераторного газа зависят от ряда исходных данных в ТЗ (техническом задании):

- назначение двигателя и условия его работы;
- компоненты топлива;
- параметры двигателя;
- параметры летательного аппарата, то есть все факторы, которые влияют на эффективность работы двигателя, на его надежность, на массовые характеристики и т.д.

Одним из основных факторов, влияющих на тот или другой выбор, является давление в камере сгорания (p_k). Опыт показал, что:

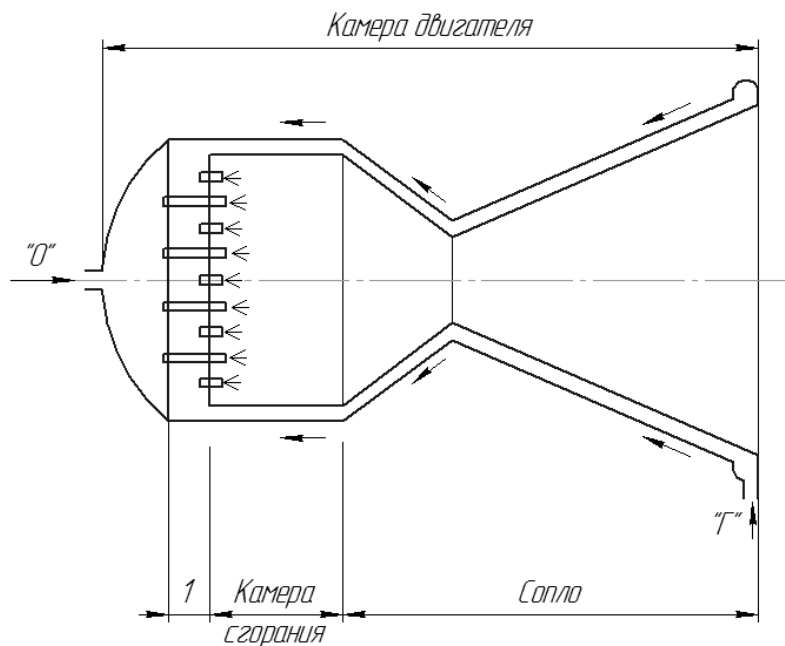
- при $p_k < 2,5..3,0 \text{ МПа}$ - выгоднее применять вытеснительную систему подачи топлива;
- при $p_k > 8,0..9,0 \text{ МПа}$ - выгоднее применять схему ЖРД с дожиганием генераторного газа (замкнутая схема);
- при $3 < p_k < 8,0 \text{ МПа}$ - без дожигания генераторного газа.

На листе раздаточного материала приведены некоторые упрощенные схемы двигателей.

Состав и основные особенности ЖРД и РДТТ.

а) Жидкостный ракетный двигатель (ЖРД).

ЖРД состоит из одной или из нескольких камер, турбонасосных агрегатов (ТНА), газогенераторов для турбин ТНА, агрегатов автоматики и управления, магистралей и др. На рисунке приведена упрощенная схема камеры ЖРД.



1 – смесительная (форсуночная) головка КС,

«Г» - горючее,

«О» - окислитель.

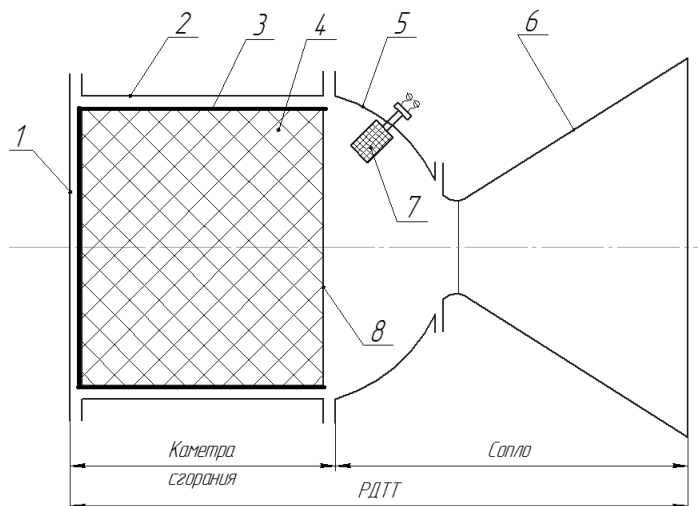
Камера ЖРД состоит, обычно, из двух стенок, между которыми протекает хладагент для теплозащиты внутренней стенки от перегрева. Хладагентом служит один из компонентов топлива. После охлаждения камеры хладагент поступает в смесительную головку к форсункам. Форсунки служат для распыливания компонентов в камере сгорания. Там компоненты испаряются, смешиваются и сгорают. Воспламенение жидкого топлива бывает:

- химическое (специальный пусковой компонент);
- электрическое;
- самопроизвольное (для самовоспламеняющихся компонентов) и др.

Двигательная установка (ЖРДУ) включает в себя двигатель, топливные баки, систему наддува баков, бустерные (предварительные) ТНА, магистрали между баками и двигателем и др.

б) Ракетный двигатель твердого топлива (РДТТ).

На рисунке приведена упрощенная схема РДТТ



- 1 – переднее днище,
- 2 – корпус,
- 3 – бронировка топлива,
- 4 – топливо (заряд),
- 5 – заднее днище,
- 6 – сопловой блок,
- 7 – воспламенитель,
- 8 – поверхность горения (здесь – торцевая).

- 1) Все топливо (заряд) расположено в камере сгорания(в корпусе).
- 2) Топливо – это раствор или смесь горючего и окислителя, а также связующих веществ.

Зарядом может быть одна или несколько пашек. В больших РДТТ топливо, как правило, заливается в корпус в жидком состоянии, после чего затвердевает. Снаряжение пашек, либо заливка заряда производится через одно из днищ (переднее или заднее).

- 3) Воспламенение топлива – только принудительное. Воспламенитель – это порошок, загорающийся от электрического разряда или от пиропатрона. Температура и факел пламени должны быть достаточны для воспламенения заряда.

4) Бронировка – это негорючее покрытие части поверхности топлива. Она служит для создания требуемых формы и площади поверхности горения.

5) Форма и площадь поверхности горения задаются при проектировании. Формы бывают:

- торцевая,
- канальная,
- щелевая,
- комбинированная.

6) Площадь горения зависит от заданного расхода продуктов сгорания (от тяги). Она может быть постоянной, либо изменяться во времени по заданному закону.

7) Топливо горит эквидистантными слоями (по нормали к поверхности горения).

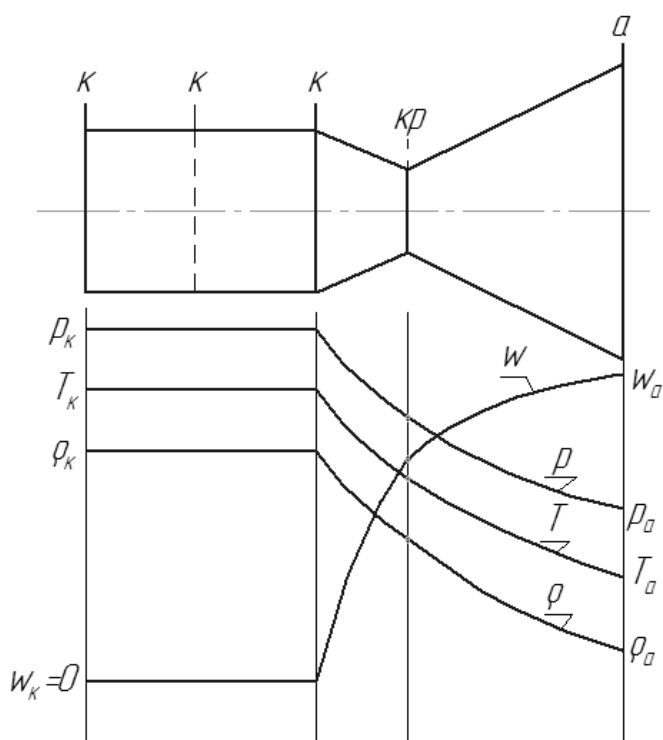
8) Преимущества РДТТ перед ЖРД:

- простота конструкции и меньшая стоимость;
- компактность, то есть при одинаковом запасе топлива его объем значительно меньше из-за более высокой плотности ($\rho_m^{РДТТ} > \rho_m^{ЖРД}$);
- отсутствие многих систем, необходимых ЖРД;
- простота хранения и эксплуатации;
- меньшее время подготовки к запуску;
- более высокая надежность.

Недостатки РДТТ перед ЖРД:

- более низкий удельный импульс $I_y = \frac{P}{\dot{m}}$;
- зависимость от начальной температуры заряда;
- сложность регулирования тяги по величине и направлению (как правило, РДТТ однорежимный);
- сложность многократного запуска (остановка и повторного запуска);
- большой разброс параметров и характеристик двигателя.

Изменение основных параметров по длине сопла ракетного двигателя:



Индексы: «к» - камера сгорания;

«кр» - критическое сечение сопла;

«а» - выходное сечение (срез) сопла.

Диапазоны изменения некоторых параметров ракетного двигателя:

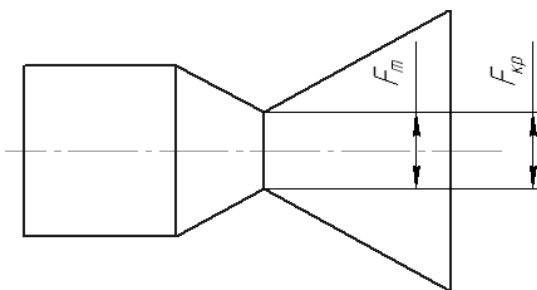
$$P = 1..10^7 \text{ Н}; \quad T_k = 2500..4000 \text{ К}; \quad W_a = 2500..3500 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

ЧАСТЬ I. ИДЕАЛЬНАЯ КАМЕРА РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

ЛЕКЦИИ № 3,4

Введем временно понятие «идеальная камера». Это понятие необходимо для изложения теоретических основ всех процессов в камере. Камера называется идеальной, если выполняются следующие допущения:

1. Рабочее тело идеальной камеры – идеальный газ, свойства которого известны;
2. Камера сгорания является изобарической, т.е. давление по ее длине не изменяется, скорость газа равна нулю, параметры газа в камере сгорания равны параметрам на входе в сопло ($p_k = const, w_k = 0$);
3. Процесс в камере двигателя адиабатический, т.е. теплообмен с окружающей средой отсутствует;
4. Более того, процесс в камере двигателя изэнтропический, т.е. отсутствуют и внутренние потери на трение, тепловое сопротивление и др.; величина энтропии определяется в камере сгорания и остается постоянной по длине сопла ($S_k = S_i = S_a$);
5. Течение газа в каждом сечении сопла, в том числе и на срезе – одномерное, т.е. вектор скорости параллелен оси сопла и все параметры изменяются только вдоль оси сопла, как в цилиндрической трубе ($\vec{w} \parallel \vec{x}$);
6. Критическое сечение сопла совпадает с минимальным по площади, форме и месту расположения ($F_{кр} = F_m$);



7. Химический состав газа, т.е. его молекулярная масса по длине не изменяется. Отсюда следует, что $R = \frac{R_0}{\mu} = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right] = \text{const}$, где $R_0 = 8314 \left[\frac{\text{кДж}}{\text{кмоль}} \right]$ - универсальная газовая постоянная; μ - молекулярная масса; R - газовая постоянная;

8. Теплофизические свойства по длине сопла не изменяются ($C_p, C_v = \text{const}$); показатель процесса расширения газа в сопле n по величине совпадает с отношением $\frac{C_p}{C_v} = k$, т.е. $n = k$.

В реальных условиях принятые допущения не выполняются, однако только лишь их использование позволило создать современную теорию идеального сопла. Использование этой теории на практике приводит к ошибкам, однако она является базой для расчета реальных процессов.

Раздел 1. Основные уравнения течения газа в камере.

Течение газа в идеальной камере можно выразить одним определением при учете перечисленных выше допущений:

В идеальной камере идеальный газ ($R, k = \text{const}$) расширяется в условиях идеального процесса $\left(\frac{p}{\rho^k} = \text{const} \right)$, переходя из сечения в сечение от одного идеального состояния ($p = \rho \cdot R \cdot T$) в другое без изменения расхода ($\dot{m} = \rho \cdot w \cdot F = \text{const}$) и энергии $\left(H + \frac{w^2}{2} = \text{const} \right)$. Уравнения – ниже.

1. Уравнение состояния идеального газа.

Для 1 кмоль газа:

$$p \cdot V = R_0 \cdot T \text{ - уравнение Клапейрона-Менделеева,}$$

где $V \left[\text{м}^3 \right]$ - объем 1 кмоль газа.

Это уравнение неудобно в работе, поэтому разделим обе его части на молекулярную массу газа $\mu \left[\frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \right]$. Получим

$$\boxed{p \times \vartheta = R \times T}, \text{ где } \vartheta = \frac{V}{\mu} \left[\frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \right] \text{ - удельный объем.}$$

Так как $\vartheta = \frac{1}{\rho}$, то $\boxed{p = \rho \cdot R \cdot T}$, где $\rho \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$ - плотность.

Оба выделенные уравнения являются равносильными.

2. Уравнение идеального процесса расширения в сопле.

В сопле идет процесс ускорения газа с его расширением от давления в камере сгорания p_κ до давления на срезе сопла p_a . При этом:

$$p_a < p_\kappa; T_a < T_\kappa; \rho_a < \rho_\kappa; w_a > w_\kappa.$$

Процесс расширения можно выразить в виде неразрывной цепочки бесконечно малых процессов перехода газа из одного состояния (p, T) в другое.

Каждый отдельно взятый бесконечно малый процесс расширения можно выразить в виде закона:

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const}; \text{ , или } p \cdot \vartheta^n = \text{const} ,$$

где n – показатель процесса.

Т.к. весь процесс расширения идеальный, то показатели процесса всех бесконечно малых процессов равны между собой и равны показателю всего процесса расширения. Обозначим этот показатель буквой k , тогда уравнение всего идеального процесса будет:

$$\boxed{p \cdot \vartheta^k = \text{const}} , \text{ или } \boxed{\frac{p}{\rho^k} = \text{const}} .$$

Уравнение процесса расширения включает в себя и уравнение состояния газа по длине, поэтому в любом сечении сопла удовлетворяются и уравнение процесса, и уравнение состояния.

Например:

$$\frac{p_\kappa}{\rho_\kappa^k} = \text{const}, \text{ где } p_\kappa = \rho_\kappa \cdot R \cdot T_\kappa, \text{ или}$$

$$\frac{p_a}{\rho_a^k} = \text{const}, \text{ где } p_a = \rho_a \cdot R \cdot T_a. \text{ И тогда получим:}$$

$$\frac{p_\kappa}{\rho_\kappa^k} = \frac{p_a}{\rho_a^k}, \text{ или } \frac{p_\kappa}{p_a} = \left(\frac{\rho_\kappa}{\rho_a} \right)^k .$$

Отсюда определим величину показателя процесса k .

$$k = \frac{\lg\left(\frac{p_{\kappa}}{p_a}\right)}{\lg\left(\frac{\rho_{\kappa}}{\rho_a}\right)} = \frac{\left\| \rho_{\kappa} = \frac{p_{\kappa}}{R \cdot T_{\kappa}} \right\|}{\left\| \rho_a = \frac{p_a}{R \cdot T_a} \right\|} = \frac{\lg\left(\frac{p_{\kappa}}{p_a}\right)}{\lg\left(\frac{p_{\kappa} \cdot \cancel{R} \cdot T_a}{p_a \cdot \cancel{R} \cdot T_{\kappa}}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{p_{\kappa}}{p_a}\right)}{\lg\left(\frac{p_{\kappa} \cdot T_a}{p_a \cdot T_{\kappa}}\right)}.$$

3. Уравнение расхода.

Расход газа через произвольное поперечное сечение камеры есть величина неизменная, т.е. $\dot{m} = \rho \cdot w \cdot F = const$ (интегральная форма уравнения), где $\dot{m}, \frac{кг}{с}$ -

массовый секундный расход, $F, м^2$ - площадь поперечного сечения. Отсюда:

$$\dot{m} = \dot{m}_{\kappa} = \dot{m}_{кр} = \dot{m}_a, \text{ или}$$

$$\rho_{\kappa} \cdot w_{\kappa} \cdot F_{\kappa} = \rho_{кр} \cdot w_{кр} \cdot F_{кр} = \rho_a \cdot w_a \cdot F_a.$$

Продифференцируем уравнение по ρ, w, F . Т.к. $d\dot{m} = 0$, то получим $\rho \cdot w \cdot dF + \rho \cdot F \cdot dw + w \cdot F \cdot d\rho = 0$.

Разделив на $\rho \cdot w \cdot F = const$, получим $\boxed{\frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0}$ (дифференциальная

форма уравнения).

Обе формы уравнения расхода говорят о том, что при изменении любого из параметров, (т.е. ρ, w, F) должны изменяться и другие, но так чтобы $\dot{m} = const$ или $d\dot{m} = 0$.

4. Уравнение сохранения энергии (в общем виде).

Первый закон термодинамики: в замкнутой термодинамической системе (ТДС) энергия не увеличивается и не уменьшается, а переходит из одного вида в другой. Идеальная камера – это и есть замкнутая ТДС. Превращение энергии газа при его течении по камере связано с изменением четырех параметров p, T, ρ, w . Этим параметрам соответствует три вида абсолютной энергии:

$$U_T = M \cdot C_v \cdot T \text{ - тепловая энергия, [Дж];}$$

$$U_p = M \cdot p \cdot v \text{ - потенциальная энергия сил давления, [Дж];}$$

$$U_w = M \cdot \frac{w^2}{2} \text{ - кинетическая энергия, [Дж];}$$

где M – масса газа, [кг].

В расчетах чаще используется энергия 1 кг газа, или удельная энергия:

$$H = \frac{U}{M} \text{ - энергия 1 кг газа.}$$

Отсюда соответственно:

$$H_T = C_v \cdot T; \quad H_p = p \cdot \vartheta; \quad H_w = \frac{w^2}{2}.$$

При помощи уравнения сохранения энергии составляется баланс энергии для двух любых поперечных сечений камеры. Как правило, этими сечениями служат камера сгорания (вход в сопло) и выход из сопла (срез). И тогда уравнение выглядит как

$$H_p^k + H_T^k + H_w^k = H_p^a + H_T^a + H_w^a.$$

Используем понятие энтальпия газа (или термодинамическая энтальпия) . Это сумма потенциальной и тепловой энергии. Обозначим ее – H .

$$\begin{aligned} H &= H_p + H_T = p \cdot \vartheta + C_v \cdot T = \left| p \cdot \vartheta = R \cdot T \right| = R \cdot T + C_v \cdot T = T \cdot (R + C_v) = \\ &= \left| R + C_v = C_p \right| = C_p \cdot T. \end{aligned}$$

Итак:

$$\boxed{H = C_p \cdot T} \text{ - энтальпия газа, } \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right].$$

$$C_p, C_v \text{ - удельная теплоемкость при } p = \text{const} \text{ и } \vartheta = \text{const}, \text{ соответственно } \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}} \right].$$

Т.о. для камеры сгорания и среза сопла будет:

$$H_p^k + H_T^k = H_k, \quad H_p^a + H_T^a = H_a, \quad H_w^k = \frac{w_k^2}{2}, \quad H_w^a = \frac{w_a^2}{2}.$$

Подставим эти энтальпии в исходное уравнение и получим:

$$\boxed{H_k + \frac{w_k^2}{2} = H_a + \frac{w_a^2}{2}};$$

$$\text{Т.к. } w_k = 0, \quad \text{то } \boxed{H_k = H_a + \frac{w_a^2}{2}}.$$

Поскольку энергия по длине сопла не изменяется, то в общем виде уравнение сохранения энергии можно выразить как $\boxed{H + \frac{w^2}{2} = \text{const}}.$

Закон сохранения энергии является центральным в термодинамических расчетах, т.к. он показывает физическую сущность и последовательность преобразования энергии.

5. Уравнение Бернулли (механическая форма уравнения сохранения энергии).

В любом произвольном сечении справедливо равенство $H_k = H + \frac{w^2}{2}.$

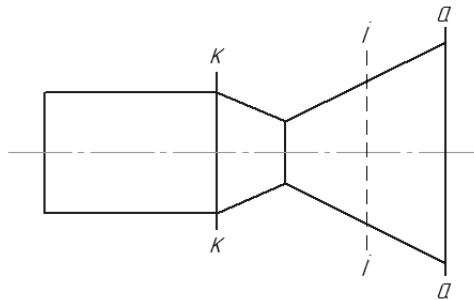
Мы его используем при выводе уравнения скорости течения газа в сопле. Отсюда:

$$\frac{w^2}{2} = H_\kappa - H, \quad w = \sqrt{2 \cdot (H_\kappa - H)} = \sqrt{2C_p \cdot (T_\kappa - T)}. \quad w = f(T).$$

Здесь для определения скорости необходимо знать величину температуры, что неудобно.

В гидрогазодинамике чаще используется механическая форма уравнения энергии, в которую температура не входит, т.е. $w = f(p, \rho)$.

Для камеры в «готовом» виде оно будет как $\frac{w_\kappa^2}{2} = \frac{w^2}{2} + \int_\kappa^i \frac{dp}{\rho}$.



Используя допущение для идеальной камеры $w_\kappa = 0$, получим

$$\frac{w^2}{2} + \int_\kappa^i \frac{dp}{\rho} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{w^2}{2} = - \int_\kappa^i \frac{dp}{\rho}.$$

Продифференцируем последнее выражение:

$$w \cdot dw = - \frac{dp}{\rho}, \quad \text{или} \quad dp + \rho \cdot w \cdot dw = 0.$$

Проинтегрируем полученное уравнение и получим:

а) $p + \frac{\rho \cdot w^2}{2} = \text{const}$ - для несжимаемой жидкости, т.е. $\rho \neq f(p)$;

б) $p + \rho \cdot w^2 = \text{const}$ - для сжимаемого газа, т.е. $\rho = f(p)$.

Итак, получаем два уравнения Бернулли:

$$\boxed{dp + \rho \cdot w \cdot dw = 0} \quad \text{- в дифференциальной форме.}$$

$$\boxed{p + \rho \cdot w^2 = \text{const}} \quad \text{- в интегральной форме.}$$

Раздел 2. Параметры течения газа.

ЛЕКЦИЯ № 5

В этом разделе изучаются:

- 1) условие ускорения газа в канале, образования сверхзвукового сопла;

- 2) изменение параметров по длине сопла;
- 3) определение основных параметров, необходимых при проектировании сопла: $\dot{m}, F_{кр}, F_a$.

1. Уравнение геометрического воздействия канала на газ. Образование сверхзвукового сопла. Режимы работы сопла.

Рассмотрим условия ускорения газа в идеальном геометрическом канале. Исходя из принятых ранее допущений, в нем нет расходного, теплового и механического воздействия на газ, а трение отсутствует, т.е. здесь присутствует только геометрическое воздействие.

а) Используем уравнение Бернулли в дифференциальной форме:

$$dp + \rho \cdot w \cdot dw = 0 \text{ (умножим оба члена на } \frac{1}{\rho \cdot w^2} \text{)};$$

$$\frac{dp}{\rho \cdot w^2} + \frac{dw}{w} = 0 \text{ (умножим первый член на } \frac{d\rho}{d\rho} \text{)};$$

$$\frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho \cdot w^2} + \frac{dw}{w} = 0. \text{ Т.к. } \frac{dp}{d\rho} = a^2, \text{ где } a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{k \cdot R \cdot T}, \text{ получим:}$$

$$\frac{a^2}{w^2} \cdot \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0. \quad (1)$$

б) Используем уравнение расхода в дифференциальной форме:

$$\frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0, \text{ где } F - \text{площадь поперечного сечения.}$$

Отсюда

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \left(\frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} \right). \text{ Подставим в (1):}$$

$$- \frac{a^2}{w^2} \cdot \left(\frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} \right) + \frac{dw}{w} = 0.$$

Выразим $\frac{dF}{F}$ через $\frac{dw}{w}$ и получим:

$$\boxed{\frac{dF}{F} = \left(\frac{w^2}{a^2} - 1 \right) \cdot \frac{dw}{w}}.$$

Это уравнение геометрического воздействия, т.е. изменения площади канала (dF) на изменение скорости (dw) при том или ином значении $\frac{w}{a}$ (или $\frac{w^2}{a^2} \neq 1$). В сопле по всей длине должно быть $dw > 0$, т.к. $P \sim w_a$ и газ должен ускоряться.

Варианты ускорения:

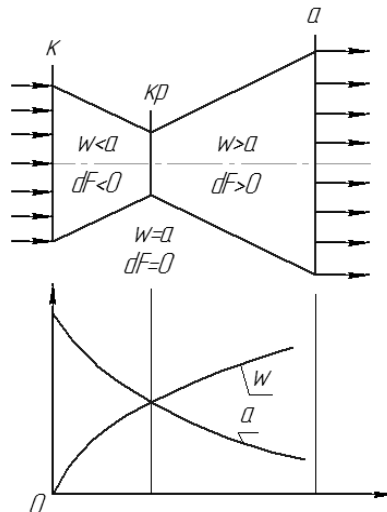
- 1) если $w < a \rightarrow \left(\frac{w^2}{a^2} - 1 \right) < 0 \rightarrow dF < 0 \rightarrow$ требуется сужение канала;
- 2) если $w > a \rightarrow \left(\frac{w^2}{a^2} - 1 \right) > 0 \rightarrow dF > 0 \rightarrow$ требуется расширение канала;
- 3) если $w = a \rightarrow \left(\frac{w^2}{a^2} - 1 \right) = 0 \rightarrow dF = 0 \rightarrow$ требуется $F = const$.

Отсюда следует: для создания сверхзвуковой скорости газа необходимо, чтобы сопло состояло из двух частей:

1 – входная часть – сужающаяся, дозвуковая, докритическая;

2 – выходная часть – расширяющаяся, сверхзвуковая, закритическая.

Минимальное сечение, расположенное между этими частями в идеальном сопле, будет и критическим сечением. Иногда такое сопло называют соплом Лавала (см.рис.).



Изменение всех параметров по длине сопла происходит без скачков, разрывов, т.е. монотонно. Критическое сечение разделяет сопло на две области: дозвуковую и сверхзвуковую. Здесь все параметры испытывают кризис, после которого возврат к докритическому состоянию невозможен.

Идеальное сверхзвуковое сопло является обратимым. Если с его обратной стороны подавать сверхзвуковой поток, то он будет тормозиться, зеркально повторяя процесс ускорения. В реальном сопле это невозможно.

Сверхзвуковое сопло можно укорачивать вплоть до критического сечения, но при этом в критическом сечении сохранится равенство $w = a$.

Режимы течения в сопле:

- 1) Дозвуковой, докритический: $w < a$.

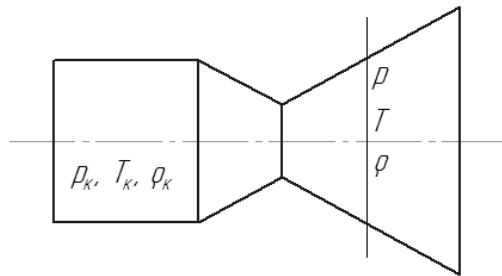
- 2) Звуковой, критический: $w = a$.
- 3) Сверхзвуковой, закритический: $w > a$.

Характеристики этих режимов отличаются принципиально.

Из уравнения геометрического воздействия видно, что изменение скорости газа зависит только от изменения площади поперечного сечения сопла (dF) и не зависит от формы идеального сопла.

ЛЕКЦИИ № 6,7

2. Соотношения между термодинамическими параметрами в произвольном сечении сопла (p, T, ρ) и камере сгорания (p_k, T_k, ρ_k).



Рассмотрим два поперечные сечения камеры. Одно из них с произвольными параметрами p, T, ρ , второе - с заранее известными (заданными) параметрами в камере сгорания p_k, T_k, ρ_k .

Используем уравнение процесса расширения: $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$.

$$\text{Отсюда: } \frac{p_k}{\rho_k^k} = \frac{p}{\rho^k} \rightarrow \left(\frac{\rho}{\rho_k} \right)^k = \frac{p}{p_k} \text{ или } \frac{\rho}{\rho_k} = \left(\frac{p}{p_k} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Используем уравнение состояния газа: $p = \rho \cdot R \cdot T$. Отсюда: $\rho = \frac{p}{R \cdot T}$. Тогда:

$$\frac{p \cdot R \cdot T_k}{p_k \cdot R \cdot T} = \left(\frac{p}{p_k} \right)^{\frac{1}{k}} \rightarrow \left(\frac{p}{p_k} \right)^{1-\frac{1}{k}} = \frac{T}{T_k} \text{ или } \frac{p}{p_k} = \left(\frac{T}{T_k} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Взаимная подстановка полученных трех зависимостей друг в друга позволяет получить еще три соотношения, и тогда получим шесть соотношений:

$$\frac{\rho}{\rho_k} = \left(\frac{p}{p_k} \right)^{\frac{1}{k}} \text{ или } \frac{p}{p_k} = \left(\frac{\rho}{\rho_k} \right)^k;$$

$$\frac{\rho}{\rho_{\kappa}} = \left(\frac{T}{T_{\kappa}} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{или} \quad \frac{T}{T_{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho_{\kappa}} \right)^{k-1};$$

$$\frac{p}{p_{\kappa}} = \left(\frac{T}{T_{\kappa}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{или} \quad \frac{T}{T_{\kappa}} = \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Здесь p, T, ρ являются функциями от известных $p_{\kappa}, T_{\kappa}, \rho_{\kappa}$. По этим зависимостям можно определить p, T, ρ в любом сечении сопла, в том числе в критическом и выходном.

3. Скорость течения газа в сопле w .

Используем уравнение энергии в виде: $H_{\kappa} = H + \frac{w^2}{2}$; отсюда

$$w = \sqrt{2 \cdot (H_{\kappa} - H)} \quad - \text{основной вид уравнения } w.$$

Из уравнения видно, что скорость течения зависит не от абсолютных значений энтальпий (H_{κ} и H), а от их перепада.

$$\text{Известно, что: } H = C_p \cdot T, \quad w = \sqrt{2 \cdot (C_p \cdot T_{\kappa} - C_p \cdot T)} = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot (T_{\kappa} - T)},$$

$$C_p = \frac{k}{k-1} \cdot R, \quad w = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot (T_{\kappa} - T)} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left(1 - \frac{T}{T_{\kappa}} \right)},$$

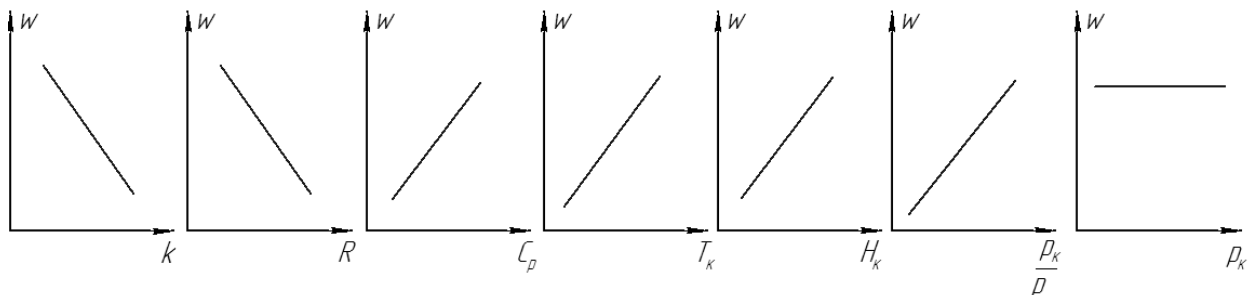
$$\frac{T}{T_{\kappa}} = \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad \text{И тогда} \quad w = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right)}.$$

Для скорости истечения из сопла уравнение будет выглядеть как

$$w_a = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right)}.$$

Анализ влияния параметров на величину w .

На рисунке представлено качественное влияние отдельных параметров.



Увеличению скорости способствует увеличение T_κ и R , т.е. уменьшение μ (т.к. $R = \frac{R_0}{\mu}$). Это значит, что водород ($\mu = 2$) – есть лучшее рабочее тело. Влияние k незначительное, поэтому внимание уделяется $C_p = \frac{k}{k-1} R$, однако определяющим параметром при выборе рабочего тела является термодинамическая энтальпия в камере сгорания, равная $H_\kappa = C_p \cdot T_\kappa$. При заданных геометрических размерах камеры (сопла) энтальпия $H_\kappa = C_p \cdot T_\kappa$ является единственным параметром, который определяет все необходимое:

- химический состав, т.е. $R = \frac{R_0}{\mu}$;
- термодинамическое состояние, т.е. T_κ ;
- теплофизические свойства k, C_p ;
- скорость течения w .

$$H_\kappa = C_p \cdot T_\kappa = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_\kappa.$$

Т.к. $p \sim p_\kappa$, то с ростом p_κ одинаково увеличивается p ($p = \pi \cdot p_\kappa$), где π – газодинамическая функция (см. позже). Таким образом, w не зависит от p_κ .

$$\text{Итак: } w = f\left(H_\kappa, \frac{p}{p_\kappa}\right); \quad w \neq f(p_\kappa).$$

$$\text{В сопле } \frac{p}{p_\kappa} = f\left(\frac{F}{F_{кр}}\right) - \text{однозначно, т.е. } w = f\left(H_\kappa, \frac{F}{F_{кр}}\right).$$

В произвольном сечении сопла:

$$\frac{F}{F_{кр}} - \text{геометрическая степень расширения (см. позже);}$$

$$\frac{p}{p_\kappa} - \text{газодинамическая степень расширения (или } \frac{p_\kappa}{p} \text{).}$$

$$\text{Чем больше } \frac{F}{F_{кр}}, \text{ тем меньше } \frac{p}{p_\kappa}, \text{ т.е. скорость выше.}$$

Следует отметить, что полученное уравнение скорости справедливо лишь для идеальной камеры, поскольку оно не учитывает особенностей течения химически активных продуктов сгорания топлива в реальной камере.

4. Максимальная скорость истечения газа из сопла $w_{a \max}$.

Т.к. величина тяги P пропорциональна расходу \dot{m} и скорости истечения w_a ($P \sim \dot{m} \cdot w_a$), то желательно увеличить w_a , чтобы уменьшить \dot{m} .

Известно, что $w_a = \sqrt{2 \cdot (H_\kappa - H_a)}$. Отсюда следует, что при заданной H_κ максимальная скорость истечения достигается при $H_a = 0$ и равна

$$w_{a \max} = \sqrt{2 \cdot H_\kappa} = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot T_\kappa} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} R \cdot T_\kappa}.$$

Если $H_a = 0$, то $C_p \cdot T_a = 0$, $T_a = 0$.

$$\text{Т.к. } \frac{T_a}{T_\kappa} = \left(\frac{p_a}{p_\kappa} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \text{ то } p_a = 0.$$

Это возможно при бесконечном расширении газа, когда его вся тепловая и потенциальная энергия полностью превратятся в кинетическую. Т.к. геометрическая и газодинамическая степени расширения связаны между собой однозначно $\frac{F_a}{F_{\kappa p}} = f\left(\frac{p_a}{p_\kappa}\right)$, то площадь среза сопла F_a должна стать бесконечной, что невозможно. Выгодна какая-то оптимальная скорость при приемлемых габаритах и массе сопла. Тем не менее, для оценки степени превращения в сопле иногда используется понятие термический КПД η_T .

Сравним уравнения для w_a и $w_{a \max}$ между собой.

$$w_a = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} R \cdot T_\kappa \left(1 - \frac{T_a}{T_\kappa}\right)} \quad w_{a \max} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} R \cdot T_\kappa}.$$

Различающую их часть обозначим как

$$\eta_T = 1 - \frac{T_a}{T_\kappa}, \text{ или } \eta_T = 1 - \left(\frac{p_a}{p_\kappa} \right)^{\frac{k-1}{k}} - \text{термический КПД.}$$

И тогда $w_a = w_{a \max} \sqrt{\eta_T}$. Возведем в квадрат и получим

$$\eta_T = \left(\frac{w_a}{w_{a \max}} \right)^2 = \frac{w_a^2}{2} : \frac{w_{a \max}^2}{2}.$$

Вывод: термический КПД является показателем степени расширения газа в конкретном сопле или критерием преобразования всей энергии газа в его кинетическую

энергию (по сравнению с теоретически возможным). Из уравнения $w_{a \max}$ следует, что ее величина не является бесконечной.

5. Скорость газа в критическом сечении сопла $w_{кр}$.

Эта скорость является характерной для сопла, и для определения ее величины можно использовать три разных подхода. При этом полученные уравнения равносильны друг другу.

1) Из уравнения скорости течения w в произвольном сечении

$$w_{кр} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_{кр}}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

Здесь $p_{кр}$ заранее неизвестно, что неудобно.

2) Из равенства $w_{кр} = a_{кр}$ в критическом сечении

$$w_{кр} = a_{кр} = \sqrt{k \cdot R \cdot T_{кр}}.$$

Здесь $T_{кр}$ заранее неизвестно, что неудобно.

3) Из уравнения энергии для критического сечения $H_{\kappa} = H_{кр} + \frac{w_{кр}^2}{2}$, отсюда

$$\frac{w_{кр}^2}{2} = H_{\kappa} - H_{кр} \quad (1).$$

Известно, что $H_{\kappa} = C_p \cdot T_{\kappa} = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa}$, $H_{кр} = C_p \cdot T_{кр} = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{кр}$.

Подставим в (1), получим:

$$\frac{w_{кр}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} - \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{кр} \quad (2).$$

Здесь k, R, T_{κ}, C_p - известны, $w_{кр}, T_{кр}$ - два неизвестных в одном уравнении.

Выразим $T_{кр}$ через $w_{кр}$.

Известно, что $w_{кр} = a_{кр} = \sqrt{k \cdot R \cdot T_{кр}}$. Отсюда

$$w_{кр}^2 = k \cdot R \cdot T_{кр}, \rightarrow R \cdot T_{кр} = \frac{w_{кр}^2}{k} \quad (3)$$

Подставим (3) в (2), получим:

$$\frac{w_{кр}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{w_{кр}^2}{k}; \quad w_{кр}^2 \cdot \left(\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)} \right) = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa}.$$

Отсюда $w_{кр} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}}$ - основной вид уравнения скорости газа в

критическом сечении, здесь k, R, T_{κ} известны заранее.

6. Соотношения между термодинамическими параметрами в критическом сечении $p_{кр}, T_{кр}, \rho_{кр}$ и камере сгорания $p_{\kappa}, T_{\kappa}, \rho_{\kappa}$.

Т.к. критическое сечение является характерным для сопла, то можно найти более простые соотношения, чем в общем виде (см. п. 2).

Используем два вида уравнения $w_{\partial\partial}$ и приравниваем их:

$$w_{кр} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}} = \sqrt{k \cdot R \cdot T_{кр}};$$

$$\frac{2}{k+1} \cdot T_{\kappa} = T_{кр} \rightarrow \frac{T_{кр}}{T_{\kappa}} = \frac{2}{k+1} \quad (1);$$

$$\text{Известно, что } \frac{\rho}{\rho_{\kappa}} = \left(\frac{T}{T_{\kappa}} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{p}{p_{\kappa}} = \left(\frac{T}{T_{\kappa}} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (2)$$

Подставим (1) в (2) для критического сечения. И тогда:

$$\frac{T_{кр}}{T_{\kappa}} = \frac{2}{k+1}; \quad \frac{\rho_{кр}}{\rho_{\kappa}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{p_{кр}}{p_{\kappa}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Т.к. $p_{\kappa}, T_{\kappa}, \rho_{\kappa}$ заданы, то для получения $p_{кр}, T_{кр}, \rho_{кр}$ необходимо знать всего лишь величину k .

7. Число Маха M и приведенная скорость газа в сопле λ .

M, λ - это универсальные безразмерные критерии. Они же являются и газодинамическими функциями (см. позже) и служат для сопоставления течения одного газа в различных геометрических условиях и различных газов в одинаковых условиях.

$$M = \frac{w}{a} \text{ - отношение скорости газа в произвольном сечении к скорости звука в этом}$$

же сечении. Число M - один из основных критериев в теории подобия.

$$\lambda = \frac{w}{w_{кр}} \text{ - отношение скорости газа в произвольном сечении к скорости газа в}$$

критическом сечении. Иногда λ называют коэффициентом скорости.

Различие между M и λ заключается в том, что $a = \text{var}$, а $w_{кр} = \text{const}$.

При бесконечном расширении газа в сопле $F_a = \infty$; $a_a = 0$. При этом:

$$w_a = w_{a\max} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R T_k}, \quad M_a = M_{a\max} = \frac{w_{a\max}}{0} = \infty - \text{бесконечная величина,}$$

$$w_{kp} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_k}, \quad \lambda_a = \lambda_{a\max} = \frac{\sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_k}}{\sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_k}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \text{конечная величина.}$$

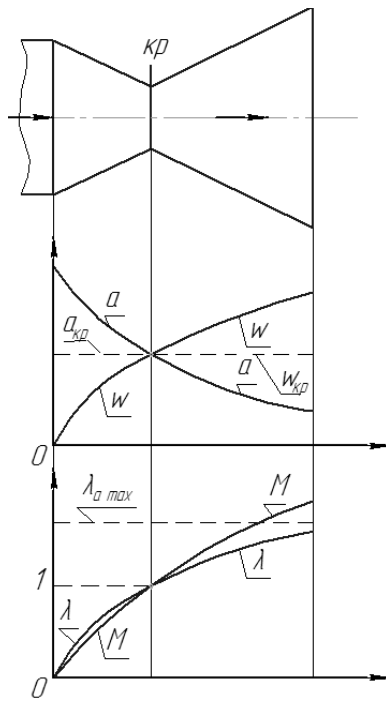
Использование M и λ позволяет более наглядно представить качественную картину течения в сопле, т.е. режимы течения (см.таблицу).

Дозвуковой режим	Критический режим	Сверхзвуковой режим
$w < a$	$w = a$	$w > a$
$M < 1$	$M = 1$	$M > 1$
$w < w_{kp}$	$w = w_{kp}$	$w > w_{kp}$
$\lambda < 1$	$\lambda = 1$	$\lambda > 1$
$w_{kp} < a$	$w_{kp} = a$	$w_{kp} > a$
$M < \lambda$	$M = \lambda$	$M > \lambda$

Между величинами M и λ существует однозначная зависимость.

$$M = \frac{\lambda \cdot \sqrt{\frac{2}{k+1}}}{\sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2}}; \quad \lambda = \frac{M \cdot \sqrt{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}}.$$

Качественный характер изменения W , a , M , λ можно представить на рисунке.



8. Расход \dot{m} , расходный комплекс β , площадь критического сечения сопла $F_{кр}$.

Определение $\dot{m}, F_{кр}, F_a$, является первым действием при проектировании камеры. Рассмотрим лишь тот случай, когда в критическом (минимальном) сечении осуществляется критический режим течения. Для докритического (дозвукового) режима уравнение расхода имеет принципиально другой вид.

Используем уравнение расхода $\dot{m} = \rho \cdot w \cdot F = const$ для критического сечения $\dot{m} = \dot{m}_{кр} = \rho_{кр} \cdot w_{кр} \cdot F_{кр}$. Выразим $\rho_{кр}$ и $w_{кр}$ через заданные исходные параметры.

$$\text{Известно: } \frac{\rho_{кр}}{\rho_{\kappa}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \rho_{\kappa} = \frac{p_{\kappa}}{R \cdot T_{\kappa}}; \quad w_{кр} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}}.$$

Подставим в исходное уравнение расхода:

$$\dot{m} = \frac{p_{\kappa}}{R \cdot T_{\kappa}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot F_{кр} = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{кр}}{\sqrt{R \cdot T_{\kappa}}} \cdot \sqrt{k} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)}}.$$

$$\text{Обозначим } \sqrt{k} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)}} = A_k = f(k). \quad A_k < 1.$$

$$\text{И тогда: } \boxed{\dot{m} = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{кр}}{\sqrt{R \cdot T_{\kappa}}} \cdot A_k}.$$

Отсюда видно, что $\dot{m} \sim p_{\kappa}$, $\dot{m} \sim F_{кр}$.

С ростом температуры T_{κ} и газовой постоянной R расход снижается, поэтому желательно иметь более высокую температуру в камере сгорания и более «легкий» газ.

$$\text{Обозначим: } \boxed{\frac{\sqrt{R \cdot T_{\kappa}}}{A_k} = \beta} \text{ – расходный комплекс камеры.}$$

Расходный комплекс отражает собой химический состав газа $\left(R = \frac{R_0}{\mu} \right)$, состояние газа в камере сгорания (T_{κ}) и свойства газа $\left(k = \frac{C_p}{C_v} \right)$.

Таким образом β – есть показатель качества процессов в камере сгорания, а точнее – в докритической части камеры двигателя.

Итак,
$$\dot{m} = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}}{\beta} \rightarrow F_{\kappa p} = \frac{\dot{m} \cdot \beta}{p_{\kappa}} \rightarrow \beta = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}}{\dot{m}}.$$

Отсюда видно, что искомые значения \dot{m} и $F_{\kappa p}$ связаны между собой неразрывно. Т.к. неизвестных два, а уравнение одно, то для их определения необходимо какое-то дополнительное сведение. В практических расчетах, как правило, вначале определяется расход по заданной величине тяги P и расчетному значению удельного импульса I_y , т.е.

$$\dot{m} = \frac{P}{I_y} \text{ (см. позже). После этого становится возможным определить } F_{\kappa p}.$$

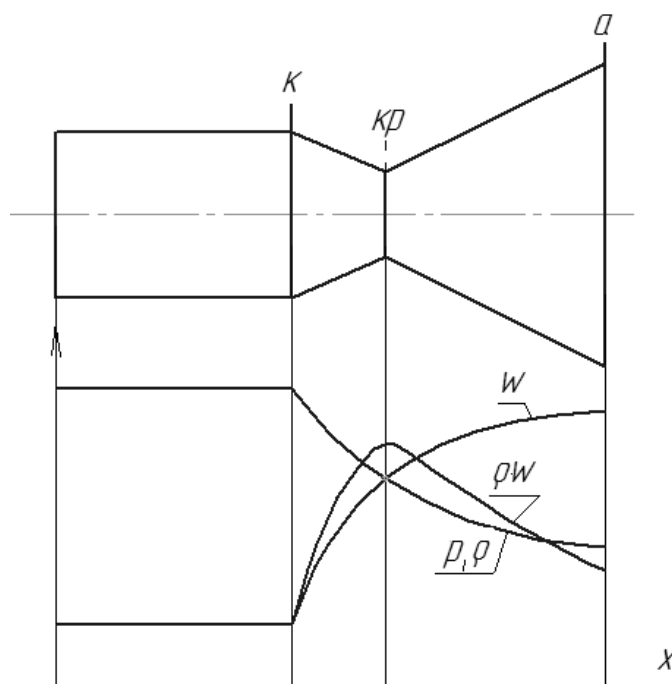
Как для идеальной, так и для реальной камеры двигателя (независимо от потерь энергии в ней) всегда будет справедливо равенство

$$\dot{m} \cdot \beta = p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}.$$

Для удобства пользования сведем всё в таблицу

$\dot{m} = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}}{\sqrt{R \cdot T_{\kappa}}} \cdot A_{\kappa}$	$\beta = \frac{\sqrt{R \cdot T_{\kappa}}}{A_{\kappa}}$	$F_{\kappa p} = \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{R \cdot T_{\kappa}}}{p_{\kappa} \cdot A_{\kappa}}$	Для расчетов.
$\dot{m} = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}}{\beta}$	$\beta = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}}{\dot{m}}$	$F_{\kappa p} = \frac{\dot{m} \cdot \beta}{p_{\kappa}}$	Для экспериментов и расчетов.

Некоторые сведения о расходонапряженности в поперечном сечении.



$\rho \cdot w$ - расходонапряженность, т.е. секундный расход газа через единицу площади произвольного поперечного сечения.

Из уравнения расхода $\dot{m} = \rho \cdot w \cdot F = const$ следует:

$$\rho \cdot w = \frac{\dot{m}}{F} \left[\frac{\kappa \mathcal{E}}{c} / M^2 = \frac{\kappa \mathcal{E}}{c \cdot M^2} \right].$$

В критическом сечении $F_{кр} = F_{\min}$, поэтому здесь достигается максимум $\rho \cdot w$.

$$(\rho \cdot w)_{кр} = \frac{\dot{m}}{F_{\min}} = (\rho \cdot w)_{\max}.$$

9. Площадь произвольного поперечного сечения сопла F .

Используем уравнение расхода $\dot{m} = const$ в виде $\rho_{кр} \cdot w_{кр} \cdot F_{кр} = \rho \cdot w \cdot F$. (1)

$$\text{Известно: } \rho_{кр} = \rho_{\kappa} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}; w_{кр} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}};$$

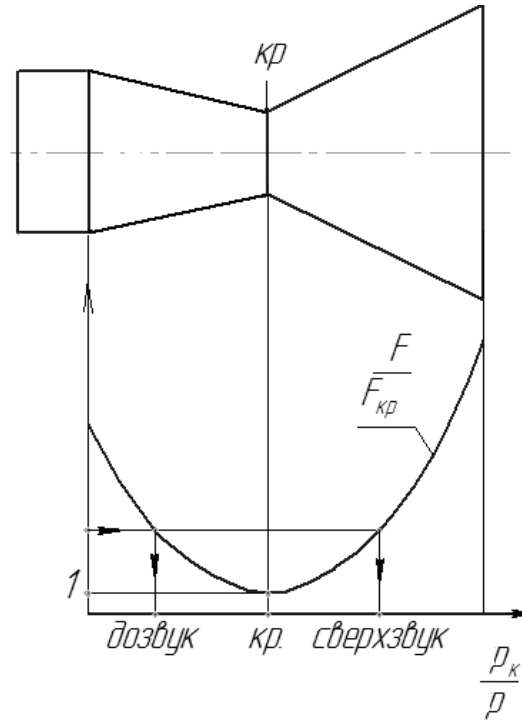
$$w = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}; \rho = \rho_{\kappa} \cdot \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{1}{k}};$$

Подставим в (1) (удобнее искать $\frac{F_{кр}}{F}$ или $\frac{F}{F_{кр}}$):

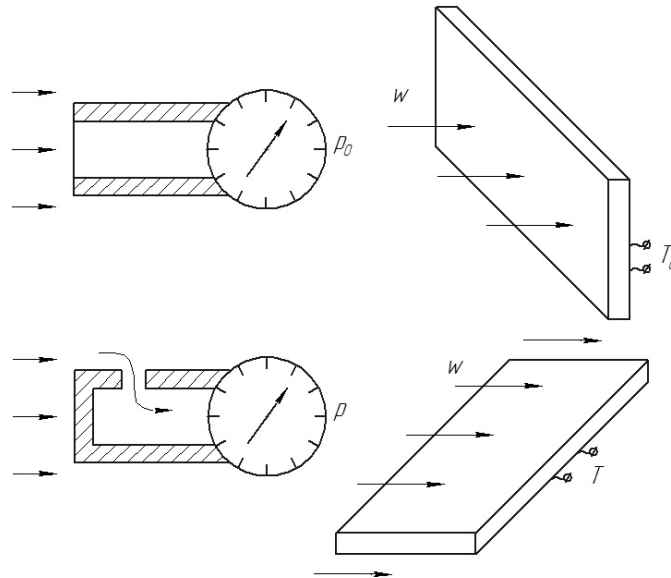
$$\begin{aligned} \frac{F}{F_{кр}} &= \frac{\rho_{кр} \cdot w_{кр}}{\rho \cdot w} = \frac{\rho_{\kappa} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}}}{\rho_{\kappa} \cdot \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{k-1}}{\left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}} = \frac{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{k-1}}{\sqrt{\left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k+1}{k}}}}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак: } \frac{F_{кр}}{F} = \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k+1}{k}}}}{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{k-1}} \text{ или, } \frac{F}{F_{кр}} = \frac{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{k-1}}{\sqrt{\left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k+1}{k}}}}.$$

Анализ полученной зависимости:



1. Т.к. $p \sim p_{\kappa} (p = \pi \cdot p_{\kappa})$, то $\frac{F_{\kappa p}}{F} \neq f(p_{\kappa})$, т.е. $\frac{F_{\kappa p}}{F} = f\left(\frac{p}{p_{\kappa}}\right)$. Чем больше $\frac{p_{\kappa}}{p}$, тем больше $\frac{F}{F_{\kappa p}}$.
2. При $p = p_a \rightarrow F = F_a$ и тогда:
 $\frac{F_a}{F_{\kappa p}}$ – степень расширения сопла;
 $\frac{p_a}{p_{\kappa}}$ – степень расширения газа (или $\frac{p_{\kappa}}{p_a}$).
3. При $F = F_{\kappa p}$ зависимость имеет минимум. Одному значению $\frac{F}{F_{\kappa p}}$ соответствуют два значения $\frac{p_{\kappa}}{p}$: одно из них – в дозвуковой части сопла, другое – в сверхзвуковой (см. рисунок).
4. В полученной зависимости два неизвестных – F и p . Для определения одного из них другим следует задаваться.

10. Параметры заторможенного (остановленного) потока.

В большинстве расчетов используются статические, т.е. термодинамические параметры газа (p, T, ρ) . Они отражают собой действительное термодинамическое состояние движущегося газа в каждый данный момент времени. Только они и представляют основной интерес.

Для более полного представления характеристик движущегося газа используются и полные параметры (или параметры остановленного газа p_0, T_0, ρ_0).

На рисунке видно, что датчики измерения p и T не вносят возмущения в поток. Поток скользит вдоль датчиков, не изменяя скорости; датчики фиксируют лишь оставшуюся часть энергии потока в виде p и T .

При измерении T_0 и p_0 поток полностью останавливается, т.е. кинетическая энергия потока превращается в потенциальную и тепловую.

В соответствии с законом сохранения энергии в сопле $p_0 = \text{const}$ и $T_0 = \text{const}$.

И тогда для p_0 это можно выразить как:

$$p_0 = p + p_w = \text{const}, \text{ где } p_w - \text{динамическое давление; } p - \text{статическое давление.}$$

Чем больше w , тем больше p_w .

При $w = 0 \rightarrow p_w = 0$; $p_0 = p$.

При $w = w_{\max} \rightarrow p_w = p_0$; $p = 0$.

Аналогично можно сказать и о T_0 . Отсюда следует, что можно говорить и об энтальпии заторможенного потока.

Известно, что $H + \frac{w^2}{2} = const$. Обозначим $H + \frac{w^2}{2} = H_0$,

где H_0 - полная энтальпия (энтальпия заторможенного потока).

Если $H + \frac{w^2}{2} = const$, то $H_0 = const$.

Если $H = C_p \cdot T$, то $H_0 = C_p \cdot T_0$.

Если $H_0 = C_p \cdot T_0 = const$, то $T_0 = const$.

Если $p_0, T_0 = const$, то $\rho_0 = \frac{p_0}{R \cdot T_0} = const$.

Если $\frac{p}{\rho^k} = const$, то $\frac{p_0}{\rho_0^k} = const$.

Таким образом, уравнения состояния, процесса и энергии остаются справедливыми и для параметров заторможенного потока p_0, T_0, ρ_0 .

Поскольку в идеальной камере $w_k = 0$, то поток является заторможенным и статические параметры равны полным параметрам: $p_k = p_0$, $T_k = T_0$, $\rho_k = \rho_0$, $H_k = H_0$.

В идеальном процессе вместо индекса «0» будем использовать индекс «к» (p_k, T_k, ρ_k).

11. Газодинамические функции (ГДФ) π , τ , ε .

В идеальной камере течение изэнтропическое и одномерное. Для упрощения расчетов идеального течения часто используются ГДФ, которые заранее определяются практически для всех случаев и заносятся в таблицы, или из их уравнений.

ГДФ – это безразмерные, относительные параметры.

Все ГДФ можно разделить на простые и сложные.

Простые ГДФ – это отношение величины параметра в произвольном сечении к его величине для заторможенного потока.

$$\pi = \frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_k}; \tau = \frac{T}{T_0} = \frac{T}{T_k}; \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_k}.$$

Эти же ГДФ называются основными, т.к. они полностью характеризуют термодинамическое состояние газа в любом заданном сечении.

Сложные ГДФ – это отношение комплекса параметров в произвольном сечении к его значению в критическом сечении или в камере сгорания. Например:

$$q = \frac{\rho \cdot w}{\rho_{кр} \cdot w_{кр}}; \quad z = \frac{\dot{m} \cdot w + p \cdot F}{\dot{m} \cdot w_{кр} + p_{кр} \cdot F_{кр}},$$

где q - приведенная расходонапряженность,

z - приведенный импульс потока газа (см. позже) .

К числу сложных ГДФ относятся и такие, которые образуются из других ГДФ путем их комбинаций. В качестве аргументов для ГДФ обычно служат λ и M , которые и сами являются ГДФ. И тогда ГДФ обозначаются так: $\pi(\lambda)$, $\tau(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ или $\pi(M)$, $\tau(M)$, $\varepsilon(M)$.

Для определения величины ГДФ необходимо знать величину аргумента. В качестве аргумента может служить и любая другая ГДФ. Например: $\pi(q) \leftrightarrow q(\pi)$.

Существуют таблицы ГДФ, они охватывают весь реальный диапазон изменения их величин. Для нахождения всех ГДФ необходимо знать $k = \frac{C_p}{C_v}$ и одну любую ГДФ.

Для нахождения $\pi, \tau, \varepsilon = f(\lambda, M)$ используем уравнение энергии $H_\kappa = H + \frac{w^2}{2}$.

$$H = C_p \cdot T; \quad H_\kappa = C_p \cdot T_\kappa;$$

$$C_p \cdot T_\kappa = C_p \cdot T + \frac{w^2}{2}; \quad \cancel{C_p} \cdot T_\kappa = \cancel{C_p} \cdot \left(T + \frac{w^2}{2 \cdot C_p} \right);$$

$$T_\kappa = T + \frac{w^2}{2 \cdot C_p} \quad (1);$$

$$w = \lambda \cdot w_{кр}; \quad w_{кр} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_\kappa}; \quad C_p = \frac{k}{k-1} \cdot R.$$

Подставим в (1):

$$T_\kappa = T + \frac{\lambda^2 \cdot \cancel{C_p} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \cancel{R} \cdot T_\kappa}{\cancel{C_p} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \cancel{R}}; \quad T_\kappa = T + \lambda^2 \cdot \frac{k-1}{k+1} \cdot T_\kappa.$$

$$\text{Отсюда: } \frac{T}{T_\kappa} = \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{k-1}{k+1} \right) = \tau(\lambda) \quad (2).$$

Аналогично можно получить $\tau = f(M)$.

Известно, что

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_\kappa} = \left(\frac{T}{T_\kappa} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \pi = \frac{p}{p_\kappa} = \left(\frac{T}{T_\kappa} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3)$$

Подставим (2) в (3) и получим:

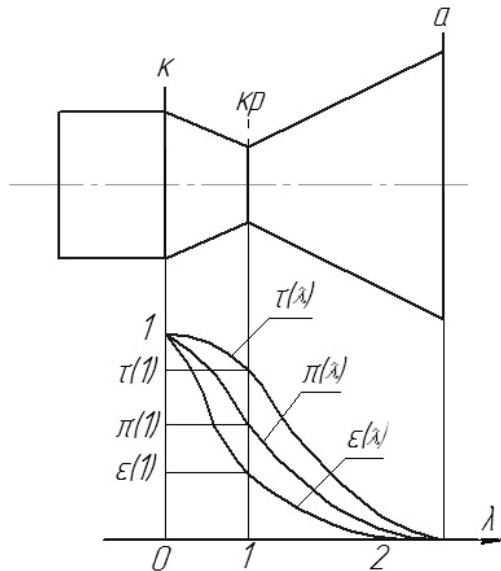
$\tau(\lambda) = \frac{T}{T_\kappa} = \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{k-1}{k+1}\right)$ $\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_\kappa} = \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ $\pi(\lambda) = \frac{p}{p_\kappa} = \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$	$\tau(M) = \frac{T}{T_\kappa} = \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}\right)$ $\varepsilon(M) = \frac{\rho}{\rho_\kappa} = \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ $\pi(M) = \frac{p}{p_\kappa} = \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$
$\pi, \tau, \varepsilon = f(k, \lambda)$	$\pi, \tau, \varepsilon = f(k, M)$

Анализ:

При $k = const \rightarrow \pi, \tau, \varepsilon = f(\lambda, M)$ и только. Т.к. $\lambda, M \neq f(p_\kappa, T_\kappa, \rho_\kappa)$, то $\pi, \tau, \varepsilon \neq f(p_\kappa, T_\kappa, \rho_\kappa)$, т.е. при $k, \lambda, M = const \rightarrow \pi, \tau, \varepsilon = const$. Это значит, что при изменении $p_\kappa, T_\kappa, \rho_\kappa$ величины $\pi = \frac{p}{p_\kappa}, \tau = \frac{T}{T_\kappa}, \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_\kappa}$ в заданном сечении не изменяются.

В любом сечении:

$$\left. \begin{array}{l} p = \pi \cdot p_\kappa \\ T = \tau \cdot T_\kappa \\ \rho = \varepsilon \cdot \rho_\kappa \end{array} \right\} \rightarrow p \sim p_\kappa; T \sim T_\kappa; \rho \sim \rho_\kappa.$$



Диапазон изменения π, τ, ε :

$$1 \geq \pi, \tau, \varepsilon \geq 0$$

$$F_k = \infty \quad F_z = \infty$$

$$p = p_k \quad p = 0$$

$$T = T_k \quad T = 0$$

$$\rho = \rho_k \quad \rho = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \lambda = \lambda_{\max}$$

$$M = 0 \quad M = \infty$$

В критическом сечении:

$$w = w_{kp} = a_{kp}; \quad \lambda_{kp} = 1;$$

$$\pi(1) = \frac{p_{kp}}{p_k} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}};$$

$$\varepsilon(1) = \frac{\rho_{kp}}{\rho_k} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$\tau(1) = \frac{T_{kp}}{T_k} = \left(\frac{2}{k+1} \right).$$

Связь между π, τ, ε :

$$\text{Если } \varepsilon = \tau^{\frac{1}{k-1}}; \quad \tau = (\tau)^1 = \tau^{\frac{k-1}{k-1}}, \text{ то } \tau \cdot \varepsilon = \tau^{\frac{k-1}{k-1}} \cdot \tau^{\frac{1}{k-1}} = \tau^{\frac{k}{k-1}} = \pi.$$

Таким образом $\pi = \tau \cdot \varepsilon$.

12. Газодинамические функции q, z .

ГДФ q – это приведенная (относительная) расходонапряженность газа в произвольном сечении:

$$q = \frac{\rho \cdot w}{\rho_{kp} \cdot w_{kp}}. \quad (1)$$

В критическом сечении расходонапряженность является максимальной и, значит, характерной для сопла.

$$\text{Умножим (1) на } \frac{\rho_k}{\rho_k}.$$

$$q = \frac{\rho \cdot w}{\rho_{кр} \cdot w_{кр}} \cdot \frac{\rho_{\kappa}}{\rho_{\kappa}}; \quad q = \frac{\rho}{\rho_{\kappa}} \cdot \frac{\rho_{\kappa}}{\rho_{кр}} \cdot \frac{w}{w_{кр}} \quad (2)$$

Известно, что:

$$\frac{\rho}{\rho_{\kappa}} = \varepsilon(\lambda) = \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{\rho_{\kappa}}{\rho_{кр}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{w}{w_{кр}} = \lambda.$$

Подставим в (2) и получим:

$$q(\lambda) = \left(1 - \lambda^2 \cdot \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda.$$

Аналогично можно получить зависимости $q(M), q(\pi)$. И тогда:

$$q(\lambda) = q\left(\frac{w}{w_{кр}}\right) = \lambda \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$q(M) = q\left(\frac{w}{a}\right) = \frac{M}{\left[\frac{2}{k+1} \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right)\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}};$$

$$q(\pi) = q\left(\frac{p}{p_{\kappa}}\right) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left(\pi^{\frac{2}{k}} - \pi^{\frac{k+1}{k}}\right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

С другой стороны:

$$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot F = \rho_{кр} \cdot w_{кр} \cdot F_{кр}.$$

$$\text{Отсюда: } \frac{\rho \cdot w}{\rho_{кр} \cdot w_{кр}} = \frac{F_{кр}}{F} \quad (3).$$

$$\text{Сопоставляя (3) с (1), получим } \rightarrow q = \frac{F_{кр}}{F} \text{ или } \frac{F}{F_{кр}} = \frac{1}{q}.$$

Это выражение q позволяет легко определить любой из трех параметров по известным двум другим. Например:

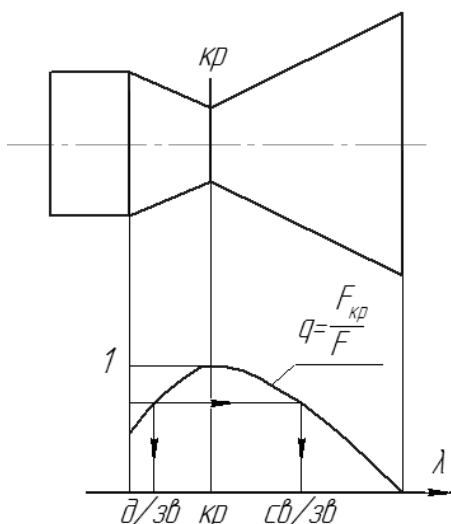
$$F_a = \frac{F_{кр}}{q_a}, \text{ где } q_a = f(\pi_a), \pi_a = \frac{p_a}{p_{\kappa}}; \quad p_a, p_{\kappa} - \text{заданы.}$$

Анализ:

$$1) \quad q = \frac{\rho \cdot w}{\rho_{кр} \cdot w_{кр}} - \text{носит газодинамический смысл, применимый и к идеальному, и}$$

реальному соплу.

$$2) \quad q = \frac{F_{кр}}{F} - \text{носит геометрический смысл, применимый только к идеальному соплу.}$$



Диапазон изменения q :

$$0 \leq q \leq 1 \geq q \geq 0$$

$$F_k = \infty; \quad F = F_{kp}; \quad F_a = \infty;$$

$$\lambda = 0; \quad \lambda = 1; \quad \lambda = \lambda_{\max};$$

$$M = 0; \quad M = 1; \quad M = \infty;$$

$$\pi = 1; \quad \pi = \pi_{kp}; \quad \pi = 0;$$

- 3) Одному значению q соответствуют два значения всех параметров. Одно в дозвуковой части сопла, второе – в сверхзвуковой (см. рисунок).
- 4) Величина q не зависит от абсолютных значений параметров газа, т.к. $\lambda, M, \pi \neq f$ (абсолютных значений).

ГДФ z - это приведенный (относительный) импульс газа в произвольном сечении.

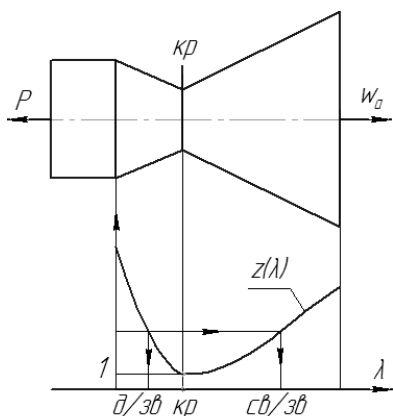
$$z = \frac{\dot{m} \cdot w + p \cdot F}{\dot{m} \cdot w_{kp} + p_{kp} \cdot F_{kp}}.$$

$$\text{Можно доказать, что } z = \frac{1}{2} \cdot \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) (1).$$

Отсюда видно, что z является универсальной ГДФ, т.к. не зависит от k , т.е. от природы газа. Иногда в литературе употребляется выражение $z = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)$, которое

использовать нельзя, т.к. в критическом сечении было бы: $z(1) = \left(1 + \frac{1}{1} \right) = 2$, но

$$z(1) = \frac{\dot{m} \cdot w_{kp} + p_{kp} \cdot F_{kp}}{\dot{m} \cdot w_{kp} + p_{kp} \cdot F_{kp}} = 1.$$



Диапазон изменения Z :

$$\infty \geq z \geq 1 \leq z \leq z_{\max}.$$

$$F_k = \infty; \quad F = F_{kp}; \quad F_a = \infty;$$

$$\lambda = 0; \quad \lambda = 1; \quad \lambda = \lambda_{\max};$$

Здесь $z_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \left(\lambda_{\max} + \frac{1}{\lambda_{\max}} \right)$.

Уравнение (1) можно выразить как $\lambda^2 - 2 \cdot z \cdot \lambda + 1 = 0$.

Решение с точки зрения λ :

$$\lambda_1 = z - \sqrt{z^2 - 1} \quad (\partial / 36); \quad \lambda_2 = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (св / 36).$$

Значения этих λ взаимно обратны друг другу, поэтому: $\lambda_{\partial / 36} \cdot \lambda_{св / 36} = 1$.

В камере сгорания реальных размеров $F_k \neq \infty$ поэтому $\lambda \neq 0$, $z \neq \infty$.

Раздел 3. Характеристики идеальной камеры двигателя.

ЛЕКЦИЯ № 11.

1. Полный импульс потока газа – сила газа.

1) Используем уравнение Бернулли в интегральной форме:

$$p + \rho \cdot w^2 = const.$$

Это уравнение справедливо для любого сечения, но количественное значение константы для каждого сечения будет свое. Умножим обе части уравнения на площадь произвольного сечения F :

$$p \cdot F + \rho \cdot w^2 \cdot F = const \cdot F, \text{ или } p \cdot F + \rho \cdot w \cdot F \cdot w = const \cdot F.$$

Отсюда $p \cdot F + \dot{m} \cdot w = const \cdot F$.

Обозначим $p \cdot F + \dot{m} \cdot w = I$ (1).

I - полный импульс потока газа (сокращенно – импульс газа). $[I] = [H]$.

Разделим его на две составляющие.

$I_{ст} = p \cdot F$ - статический импульс.

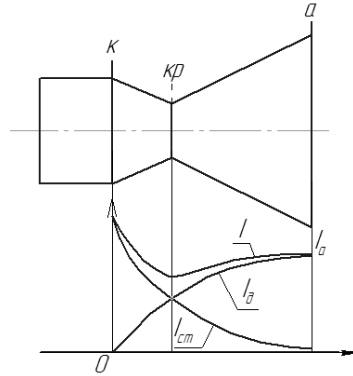
$I_{\partial} = \dot{m} \cdot w$ - динамический импульс.

Итак $I = I_{ст} + I_{\partial}$.

Уравнение (1) иногда называют уравнением полного количества движения. Для камеры двигателя это уравнение силы газа.

Импульс газа – это механическая, активная сила, которую создает газ в каждом поперечном сечении камеры при своем движении. Она приложена к поперечному сечению

потока и направлена вдоль оси. Импульс газа является полной, или результирующей силой, т.к. включает в себя и статическую, и динамическую составляющую. Если определить I, I_o, I_{cm} по длине любой конкретной камеры, то можно получить качественно одинаковую картину для всех камер (см.рис.):



При $F = const$ $I = \dot{m} \cdot w + p \cdot F = const$ - как в цилиндрической трубе по её длине. Величина I здесь не изменится даже при изменении одного из переменных – p или w . Например, при местном подогреве газа извне скорость возрастет, но на столько же упадет давление, так что сумма (I) останется постоянной.

В сверхзвуковом сопле I_{cm} монотонно снижается от ∞ в камере сгорания ($F_k = \infty$) до нуля на срезе ($F_a = \infty$). Динамическая составляющая I_o монотонно возрастает от нуля в камере сгорания до предельного максимума на срезе сопла ($w_k = 0, w_a = w_{a \max}$).

Противоположное поведение двух составляющих (I_o, I_{cm}) приводит к появлению минимума их суммы (см.рис.). Можно доказать, что минимум находится в критическом сечении.

Уравнение (1) является основной формой выражения импульса газа, т.к. раскрывает его физическое происхождение и содержание. Однако на практике часто используются и другие формы уравнения.

2) Используем уравнение (1):

$$\begin{aligned} I &= \dot{m} \cdot w + p \cdot F = p \cdot F \cdot \left(\frac{\dot{m} \cdot w}{p \cdot F} + 1 \right) = p \cdot F \cdot \left(\frac{\rho \cdot w \cdot F}{p \cdot F} \cdot w + 1 \right) = p \cdot F \cdot \left(\frac{w^2}{p/\rho} + 1 \right) = \\ &= p \cdot F \cdot \left(\frac{w^2}{R \cdot T} + 1 \right) = p \cdot F \cdot \left(\frac{w^2}{R \cdot T} \cdot \frac{k}{k} + 1 \right) = p \cdot F \cdot \left(\frac{w^2}{a^2} \cdot k + 1 \right) = p \cdot F \cdot (k \cdot M^2 + 1); \end{aligned}$$

$$\text{Итак: } I = p \cdot F \cdot (k \cdot M^2 + 1) \quad (2).$$

Наиболее необходимо определить импульс газа для среза сопла:

$$I_a = p_a \cdot F_a \cdot (k \cdot M_a^2 + 1).$$

3) Используем уравнение (1):

$$I = p \cdot F + \dot{m} \cdot w = p \cdot \frac{\dot{m}}{\rho \cdot w} + \dot{m} \cdot w = \dot{m} \cdot \left(\frac{p}{\rho} \cdot \frac{1}{w} + w \right).$$

Известно что $\frac{p}{\rho} = R \cdot T = R \cdot T_{\kappa} \cdot \tau$, где $\tau = \frac{T}{T_{\kappa}}$ - ГДФ; $w = w_{\kappa p} \cdot \lambda$ (где λ - ГДФ);

$$w_{\kappa p} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}}. \text{ Отсюда } \rightarrow R \cdot T_{\kappa} = \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot w_{\kappa p}^2. \text{ Подставим и получим}$$

$$I = \dot{m} \cdot \left[\frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot w_{\kappa p}^2 \cdot \frac{1}{w_{\kappa p} \cdot \lambda} \cdot \tau + w_{\kappa p} \cdot \lambda \right], \text{ но } \tau = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2 \right). \text{ Подставим:}$$

$$I = \dot{m} \cdot \left[\frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot w_{\kappa p} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2 \right) + w_{\kappa p} \cdot \lambda \right] = m \cdot W_{\kappa p} \left[\frac{k+1}{2k} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \frac{1}{\lambda} + \lambda \right]$$

После преобразования получим:

$$I = \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot \dot{m} \cdot w_{\kappa p} \cdot \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right).$$

Известно, что $\frac{1}{2} \cdot \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) = z$ - ГДФ, и тогда

$$I = \frac{k+1}{k} \cdot \dot{m} \cdot w_{\kappa p} \cdot z \quad (3).$$

4) Используем уравнение (3):

$$I = \frac{k+1}{k} \cdot \dot{m} \cdot w_{\kappa p} \cdot z.$$

$$\text{Известно, что } \dot{m} = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}}{\sqrt{R \cdot T_{\kappa}}} \cdot A_k; \quad A_k = \sqrt{k} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}; \quad w_{\kappa p} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot R \cdot T_{\kappa}}.$$

После подстановки получим

$$I = 2 \cdot p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p} \cdot \varepsilon(1) \cdot z \quad (4), \text{ где } \varepsilon - \text{ГДФ}.$$

Итак, мы получили 4 уравнения для I :

$I = p \cdot F + \dot{m} \cdot w$	$I = \frac{k+1}{k} \cdot \dot{m} \cdot w_{\kappa p} \cdot z.$
$I = p \cdot F \cdot (k \cdot M^2 + 1)$	$I = 2 \cdot p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p} \cdot \varepsilon(1) \cdot z$

Эти уравнения являются основными для определения импульса газа и равносильными друг другу. Использование того или иного уравнения зависит от наличия сведений о тех или иных параметрах.

2. Тяга камеры как реактивная сила.

Камера двигателя предназначена для создания тяги, т.е. силы, с помощью которой ракета может перемещаться. Возникновение тяги вызвано единственной причиной – течением газа из камеры сгорания к срезу сопла. К определению величины тяги можно подойти двумя принципиально разными путями. С одной стороны, тяга – равнодействующая сил давления на стенки камеры изнутри и снаружи. С другой стороны, тяга – реактивная сила, действующая на камеру со стороны истекающего газа и окружающей среды. Проведем предварительный анализ.

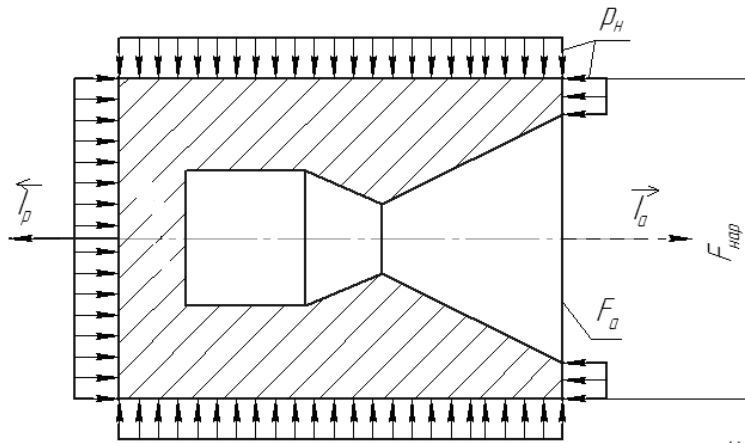
1) Камера ракетного двигателя представляет собой геометрический канал, открытый лишь с одной стороны. С учетом нулевой скорости газа в камере сгорания эту камеру можно условно считать бесконечно большим сосудом, из которого истекает газ через сопло конечных размеров. Это означает, что любое силовое воздействие газа на камеру может оказываться только через сопло.

2) В свою очередь, мерой сил внутреннего воздействия на камеру может служить только импульс газа (I), как единственная и полная сила, создаваемая газом в сопле.

3) Поскольку импульс газа действует в каждом поперечном сечении потока и при этом изменяется непрерывно, то его интегральное проявление как силы может обнаружиться лишь в последнем, выходном сечении, где он равен I_a :

$$I_a = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a.$$

4) Величина I_a выражает собой полную силу, создаваемую газом внутри сопла. Эта сила не может не воздействовать через газ на стенку сопла и камеру в целом. В соответствии с III законом Ньютона активная сила I_a вызывает равную ей по величине и противоположную по направлению реактивную силу I_p , которая приложена к стенке камеры, т.е. $\vec{I}_p = -\vec{I}_a$ (см.рис.).



Изготовим камеру так, чтобы наружная поверхность ее представляла собой поверхность прямого кругового цилиндра, один из торцов которого проходит по плоскости среза сопла. Диаметр цилиндра превосходит наибольший диаметр проточной части камеры. Размеры камеры сгорания здесь конечны, но допускаем, что $w_{\varepsilon} = 0$. В соответствии с выбранной схемой радиальные силы давления окружающей среды на боковую поверхность цилиндра взаимно уравновешены и не создают тягу.

Влияние неподвижной окружающей среды на тягу удобнее рассматривать через прямое воздействие давления p_n на наружную поверхность камеры (на торцы). Это влияние выразим через $\vec{I}_{нар}$ – наружный импульс (сила) окружающей среды.

Таким образом, тягу можно определить как разницу осевых сил, действующих на камеру.

За положительное направление тяги на рисунке принимаем направление «влево». И тогда тяга будет равна:

$$\vec{P} = \vec{I}_p + \vec{I}_{нар}$$

$$I_p = I_a = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a.$$

$$I_{нар} = p_n \cdot (F_{нар} - F_a) - F_{нар} \cdot p_n = -p_n \cdot F_a. \text{ Итак:}$$

$$P = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a - p_n \cdot F_a, \text{ или } P = \dot{m} \cdot w_a + (p_a - p_n) F_a$$

3. Тяга камеры как равнодействующая сил давления.

Если $p_n \neq 0$, то при работе камеры на ее внутреннюю поверхность действует переменное давление p движущегося газа, на наружную поверхность – постоянное

давление окружающей среды p_H . Результатом этого давления станет появление соответствующих усилий, приложенных к стенке камеры изнутри и снаружи.

Тяга камеры представляет собой равнодействующую векторов этих усилий. В общем случае внутренняя и наружная поверхность камеры могут иметь разные и сложные формы. Для простоты вывода уравнения тяги идеальной камеры, воспользуемся допущениями, которые не повлияют на результаты вывода(и для реальной камеры тоже):

1) Толщина стенки камеры равна нулю. Это означает, что формы внутренней и наружной поверхности идентичны, их площади равны, а направление сил давления изнутри и снаружи противоположны.

2) Форма камеры симметрична относительно своей оси. Это означает, что равнодействующая всех сил давления, т.е. тяга, обязательно представляет собой осевую силу.

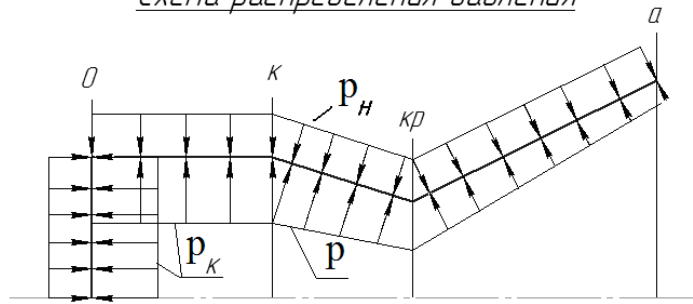
3) Геометрические размеры камеры сгорания конечны, но $w_k = 0$, $p_k = const$ по ее длине. Это означает, что камера сгорания не может быть сужающейся, т.е. F_k остается либо не изменяющейся, либо возрастает. При этом сила давления p_k будет определяться наибольшим значением F_k и не зависит от формы камеры сгорания.

4) Течение газа в сопле одномерное. Это означает, что параметры потока, в том числе давление и скорость изменяются только лишь за счет изменения площади поперечного сечения и не зависят от формы сопла.

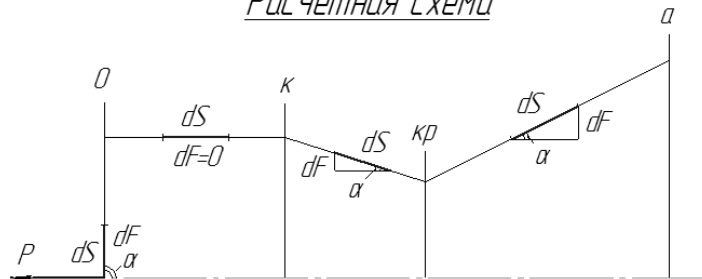
Перечисленные факторы позволяют сделать важный вывод: форма идеальной камеры не влияет на величину её тяги.

Определим величину тяги на простом примере камеры двигателя с цилиндрической камерой сгорания и плоским днищем, не теряя при этом качества вывода:

Схема распределения давления



Расчетная схема



Поскольку тяга является осевой силой, то ее величину можно найти в виде проекции на ось камеры интеграла всех сил давления на стенку камеры, т.е. как

$$P = \int_0^a p \cdot dS \cdot \sin \alpha = \int_0^a p dF,$$

где dS - элемент площади поверхности камеры,

α - острый угол наклона элемента площади к оси камеры,

$dF = dS \cdot \sin \alpha$ - проекция dS на плоскость, перпендикулярную оси камеры.

Характер распределения давления по внутренней ($p = \text{var}$) и наружной ($p_n = \text{const}$) поверхностям принципиально различный, поэтому вектор тяги \vec{P} выгоднее представить в виде суммы двух составляющих – внутренней $\vec{P}_{\text{вн}} = f(p)$ и наружной $\vec{P}_{\text{нар}} = f(p_n)$: $\vec{P} = \vec{P}_{\text{вн}} + \vec{P}_{\text{нар}}$.

С другой стороны, каждую из этих составляющих удобнее выразить суммой сил, приложенных к тем или иным частям камеры, например:

$$\vec{P}_{\text{вн}} = \vec{P}_{\text{вн}}^{\text{КС}} + \vec{P}_{\text{вн}}^{\text{Д/З}} + \vec{P}_{\text{вн}}^{\text{С/З}}, \quad \vec{P}_{\text{нар}} = \vec{P}_{\text{нар}}^{\text{КС}} + \vec{P}_{\text{нар}}^{\text{Д/З}} + \vec{P}_{\text{нар}}^{\text{С/З}},$$

где $\vec{P}^{\text{КС}}$, $\vec{P}^{\text{Д/З}}$, $\vec{P}^{\text{С/З}}$ - силы, приложенные соответственно изнутри или снаружи к камере сгорания (КС), дозвуковой (Д/З) или сверхзвуковой (С/З) частям сопла.

Боковая стенка цилиндрической КС не создает осевой силы, поэтому величина $P^{\text{КС}}$ определяется как сила, приложенная к днищу, и тогда

$$P_{\text{вн}}^{\text{КС}} = p_{\text{к}} \cdot F_{\text{к}}, \quad P_{\text{нар}}^{\text{КС}} = p_{\text{н}} \cdot F_{\text{к}}.$$

В общем виде $P_{вн}$ и $P_{нар}$ можно выразить как (см. рис.):

$$P_{вн} = \int_0^{\kappa} p dF + \int_{\kappa}^{\kappa p} p dF + \int_{\kappa p}^a p dF, \quad P_{нар} = \int_0^{\kappa} p_n dF + \int_{\kappa}^{\kappa p} p_n dF + \int_{\kappa p}^a p_n dF.$$

Если считать направление тяги (влево) положительным, а $p_n = const$, то

$$P_{нар} = -p_n \cdot F_{\kappa} + p_n \cdot (F_{\kappa} - F_{\kappa p}) - p_n \cdot (F_a - F_{\kappa p}) = -p_n \cdot F_a.$$

Внутренняя составляющая тяги $P_{вн}$ будет равна

$$P_{вн} = p_{\kappa} \cdot F_{\kappa} + \int_{\kappa}^{\kappa p} p dF + \int_{\kappa p}^a p dF, \quad (1)$$

Так как p и F являются переменными параметрами, то интегралы $\int p dF$ надо брать «по частям» $\rightarrow \int u dv = uv - \int v du$: И тогда

$$\int_{\kappa}^{\kappa p} p dF = (p_{\kappa p} \cdot F_{\kappa p} - p_{\kappa} \cdot F_{\kappa}) - \int_{\kappa}^{\kappa p} F dp; \quad (2)$$

$$\int_{\kappa p}^a p dF = (p_a \cdot F_a - p_{\kappa p} \cdot F_{\kappa p}) - \int_{\kappa p}^a F dp. \quad (3)$$

При взятии интеграла $\int F dp$ воспользуемся заменой переменных.

Из уравнения расхода ($\dot{m} = \rho \cdot w \cdot F$) и уравнения Бернулли ($dp + \rho \cdot w \cdot dw = 0$):

$$F = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot w}, \quad dp = -\rho \cdot w \cdot dw.$$

Сделав замену в $\int F dp$, и, учитывая, что $\dot{m} = const$, получим

$$\int F dp = - \int \frac{\dot{m}}{\rho \cdot w} \cdot \rho \cdot w dw = - \int \dot{m} dw = -\dot{m} \int dw.$$

Это выражение позволяет найти конкретные интегралы:

$$\int_{\kappa}^{\kappa p} F dp = -\dot{m} \int_{\kappa}^{\kappa p} dw = -\dot{m} \cdot (w_{\kappa p} - w_{\kappa}) = -\dot{m} \cdot w_{\kappa p} + 0 = -\dot{m} \cdot w_{\kappa p}, \quad (4)$$

$$\int_{\kappa p}^a F dp = -\dot{m} \int_{\kappa p}^a dw = -\dot{m} \cdot (w_a - w_{\kappa p}) = -\dot{m} \cdot w_a + \dot{m} \cdot w_{\kappa p}. \quad (5)$$

Последовательно подставим (4), (5) в (2), (3) и в (1) и получим:

$$P_{вн} = p_{\kappa} \cdot F_{\kappa} + (p_{\kappa p} \cdot F_{\kappa p} - p_{\kappa} \cdot F_{\kappa}) + \dot{m} \cdot w_{\kappa p} + (p_a \cdot F_a - p_{\kappa p} \cdot F_{\kappa p}) + \dot{m} \cdot w_a - \dot{m} \cdot w_{\kappa p} = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a.$$

Итак:

$$P_{нар} = -p_n \cdot F_a;$$

$$P_{\text{вн}} = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a;$$

$$P = P_{\text{вн}} + P_{\text{нар}} = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a - p_n \cdot F_a;$$

$$\text{или } P = \dot{m} \cdot w_a + (p_a - p_n) \cdot F_a.$$

Анализ:

Получено уравнение тяги камеры двигателя при использовании двух независимых и принципиально различных подходов к происхождению тяги: как реактивной силы и как равнодействующей сил давления на стенку камеры. Итак:

$$P = P_{\text{вн}} + P_{\text{нар}} = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a - p_n \cdot F_a.$$

Видно, что величина внутренней тяги $P_{\text{вн}}$ совпадает с величиной импульса газа I_a на срезе сопла, т.е. $P_{\text{вн}} = I_a = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a$.

Отсюда следует, что для определения величины $P_{\text{вн}}$ можно использовать любое из уравнений импульса газа, полученных ранее. И тогда уравнениями тяги могут быть следующие:

$$P = \dot{m} \cdot w_a + p_a \cdot F_a - p_n \cdot F_a;$$

$$P = p_a \cdot F_a \cdot (1 + k \cdot M_a^2) - p_n \cdot F_a;$$

$$P = \frac{k+1}{k} \cdot \dot{m} \cdot w_{\text{кр}} \cdot z_a - p_n \cdot F_a;$$

$$P = 2 \cdot p_{\kappa} \cdot F_{\text{кр}} \cdot \varepsilon(1) \cdot z_a - p_n \cdot F_a;$$

$$\text{где } \varepsilon(1) = \varepsilon_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} - \text{ГДФ}; \quad z_a = \frac{1}{2} \cdot \left(\lambda_a + \frac{1}{\lambda_a} \right) - \text{ГДФ}.$$

При использовании других ГДФ могут быть получены и другие уравнения для I_a , $P_{\text{вн}}$ и P . Все соответствующие уравнения равносильны.

4. Режимы работы сопла при постоянном давлении в камере сгорания и окружающей среде.

Дано: $k, R, T_{\kappa} = \text{const}$ (газ); $p_{\kappa}, F_{\text{кр}}, p_n = \text{const}$.

Изменяются p_a или F_a , что одно и то же. Величина тяги равна

$$P = \dot{m} \cdot w_a + (p_a - p_n) \cdot F_a.$$

Расход газа $\dot{m} = \frac{p_{\kappa} \cdot F_{\kappa p}}{\beta} = const$, т.к. $p_{\kappa}, F_{\kappa p} = const$.

Расходный комплекс $\beta = \frac{\sqrt{R \cdot T_{\kappa}}}{A_{\kappa}} = f(k, R, T_{\kappa}) = const$.

$$w_a = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = const,$$

т.к. $k, R, T_{\kappa}, p_{\kappa} = const$, а $p_a \sim p_{\kappa}$ ($p_a = \pi_a p_{\kappa}$).

Анализ:

1. Чем меньше p_a , тем больше w_a , тем больше P .
2. Чем меньше p_a , тем меньше $(p_a - p_n)$, тем меньше P .

$\frac{p_a}{p_{\kappa}} = f\left(\frac{F_a}{F_{\kappa p}}\right)$ - однозначно (см. ранее).

3. Чем меньше p_a , тем больше F_a . При этом чем больше F_a , тем:

- а) больше P , если $p_a > p_n$;
- б) меньше P , если $p_a < p_n$.

Отсюда следует, что при стационарном режиме работы камеры сгорания и $p_n = const$ должна существовать какая-то оптимальная геометрическая степень расширения сопла $\left(\frac{F_a}{F_{\kappa p}}\right)$ или газодинамическая степень расширения $\frac{p_a}{p_{\kappa}}$, при которой тяга камеры будет максимальной.

а) Расчетный режим работы сопла, как режим наибольшей тяги.

$$P = \dot{m} \cdot w_a + (p_a - p_n) \cdot F_a.$$

Для определения экстремума функции надо взять ее первую производную и приравнять к нулю. За переменную возьмем p_a . Т.к. $\dot{m} = const$, то $d\dot{m} = 0$. Т.к. $p_n = const$ то $dp_n = 0$. Итак:

$$dP = \dot{m} \cdot w_a + (p_a - p_n) \cdot dF_a + F_a dp_a = 0; \quad \dot{m} = \rho_a \cdot w_a \cdot F_a.$$

$$dP = \rho_a \cdot w_a \cdot F_a \cdot dw_a + (p_a - p_n) \cdot dF_a + F_a dp_a = 0;$$

$$dP = F_a (\rho_a \cdot w_a \cdot dw_a + dp_a) + (p_a - p_n) dF_a = 0.$$

Известно, что $\rho w dw + d\rho = 0$ – уравнение Бернулли. И тогда

$$dP = (p_a - p_n) dF_a = 0;$$

$$dF_a = f(p_a) \neq 0; \text{ значит } (p_a - p_n) = 0$$

Таким образом, максимальная тяга реализуется при $p_a = p_n$.

Для определения характера экстремума необходимо найти вторую производную.

Однако, если бы это был минимум, то при $p_a > p_n$ и при $p_a < p_n$ тяга увеличивалась бы, причем до неопределенной величины, что невозможно. Значит это максимум тяги.

Режим работы сопла, при котором $p_a = p_n$ называется расчетным. При этом:

$$p_a = p_{a \text{ расч}} = p_n; F_a = F_{a \text{ расч}}; P = P_{\text{расч}} = P_{\text{max}};$$

$$w_a = w_{a \text{ расч}} = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_{\kappa} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_n}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

Эффект максимальной тяги на расчетном режиме реализуется только при условии неизменности параметров в камере сгорания и давления окружающей среды. Сравнение величины тяги разных камер будет правомерным, если эти камеры отличаются между собой только двумя параметрами: p_a и F_a .