

*В. А. Павловский, А. Л. Чистов*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАПОЛНЕНИЯ РЕЗЕРВУАРА РЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается широко распространенный в химической, газовой и других отраслях промышленности процесс поэтапного заполнения резервуара реальным сжатым газом высокого давления. Математическая модель задачи, основанная на упрощенной одномерной схеме течения, содержит уравнения сохранения массы, энергии, а также термического уравнения состояния (двухпараметрическая модель Редлиха–Квонга) и предполагает зависимость всех физических характеристик газового потока только от одной, продольной, координаты и времени. Вычисления параметров модели и соответствующих calorific величин выполнено на примере реального природного газа, близкого по составу газовой смеси «Северный поток» с помощью дифференциальных уравнений термодинамики. Особое внимание уделено параметрам уравнения состояния смеси, указаны эквивалентные способы их определения, а также проведен расчет этих параметров для одного из них. Вычисление газодинамических характеристик процесса поэтапного заполнения резервуара реальным газом, согласно построенной модели, выполнены при помощи пакета прикладных программ MATLAB. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что рассматриваемая схема закачки газа с последующими, в несколько этапов, охлаждением и докачкой позволяет существенно повысить эффективность процесса путем более полной загрузки резервуара. Библиогр. 10 назв. Ил. 3. Табл. 2.

*Ключевые слова:* реальный газ, время заполнения резервуара, критический режим истечения.

*V. A. Pavlovsky, A. L. Chistov*

## MODELING OF REAL GAS TANK FILL-UP DYNAMICS

St. Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya embankment, St. Petersburg,  
199034, Russian Federation

Widespread in chemical, natural gas and other industry branches process of stepwise real gas tank fill-up is considered. Problem mathematical model based on simplified one-dimensional flow schema contains mass conservation, energy and also thermal state (Redlich–Kwong two-parameter) equations and assumes all gas flow physical characteristics depend on time and the only one longitudinal coordinate. Model parameters and congruous calorific characteristics computations executed on example of natural gas close on structure to Nord Stream gas mixture using thermodynamics differential equations. The special attention to mixed gas state equation parameters is paid, their determination equivalent paths are specified, and also these parameters calculation for one of them is executed. Stepwise real gas reservoir fill-up process gas-dynamics characteristics calculations according to the constructed model are performed by the instrumentality of MATLAB application package. The received results allow to draw a conclusion that the considered gas injection schema with several stages subsequent cooling-down and broken pumping resume allows to significantly increase process efficiency by tank more full gas charging. Bibliogr. 10. Il. 3. Table. 2.

*Keywords:* real gas, tank fill-up time, criticality outflow.

---

*Павловский Валерий Алексеевич* – доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: v.a.pavlovsky@gmail.com

*Чистов Алексей Леонидович* – кандидат физико-математических наук, ассистент; e-mail: chistovalexey@gmail.com

*Pavlovsky Valery Alekseevich* – doctor of physical and mathematical sciences, professor; e-mail: v.a.pavlovsky@gmail.com

*Chistov Aleksey Leonidovich* – candidate of physical and mathematical sciences, assistant; e-mail: chistovalexey@gmail.com

Процесс наполнения резервуаров сжатым газом высокого давления широко распространен в химической, газовой и других отраслях промышленности. При выполнении приближенных расчетов таких процессов обычно используют упрощенную одномерную схему течения. Модель одномерного потока предполагает, что все физические характеристики газового потока зависят только от одной, продольной, координаты и времени.

Рассмотрим процесс заполнения емкости сжатым природным газом, поступающим из области высокого давления с неизменными параметрами – давлением  $p_\infty$  и температурой  $T_\infty$ , которым соответствуют плотность  $\rho_\infty$  и энтальпия  $h_\infty$  (рис. 1).

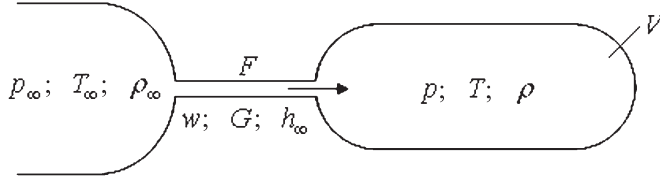


Рис. 1. Схема заполнения резервуара

Газ втекает в сосуд объемом  $V$  с начальными параметрами  $p_0, T_0, \rho_0$  через сопло площадью  $F$ . Параметры газа в заполняемом резервуаре  $p, \rho, T$  меняются с течением времени, скорость втекающего газа  $w$  и массовый расход  $G$  изменяются по мере заполнения емкости. Поскольку обычно размер этого сопла мал по сравнению с размерами сосуда, то процесс течения можно считать квазистационарным, что позволяет скорость  $w$  и массовый расход  $G$  рассчитывать по формулам установившегося движения [1, 2]. Эти величины зависят от параметра давления, который в описываемой задаче имеет вид

$$\beta = \frac{p}{p_\infty}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Существует критическое значение данного параметра, зависящее от показателя адиабаты  $\gamma = c_p/c_v$ , где  $c_p$  и  $c_v$  – изобарная и изохорная теплоемкости соответственно:

$$\beta_{\text{кр}} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

которое подразделяет течение на два режима – закритический ( $0 \leq \beta \leq \beta_{\text{кр}}$ ) и докритический ( $\beta_{\text{кр}} \leq \beta \leq 1$ ) [2–4]. При закритическом режиме скорость  $w$  и расход  $G$  являются постоянными, поскольку на срезе сопла устанавливается постоянное, критическое значение давления  $p_{\text{кр}} = \beta_{\text{кр}} p_\infty$ . В докритическом режиме, когда  $\beta \geq \beta_{\text{кр}}$ , скорость и расход изменяются в процессе истечения (рис. 2). Поведение этих величин определяется следующими зависимостями [1, 3]:

а) при  $0 \leq \beta \leq \beta_{\text{кр}}$

$$w = \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{2\gamma}{\gamma + 1}}, \quad G = c_d F \sqrt{\gamma \rho_\infty p_\infty \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}},$$

б) при  $\beta_{\text{кр}} \leq \beta \leq 1$

$$w = \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}, \quad G = c_d F \beta^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\rho_\infty p_\infty \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]},$$

здесь  $c_d$  – коэффициент расхода [1].

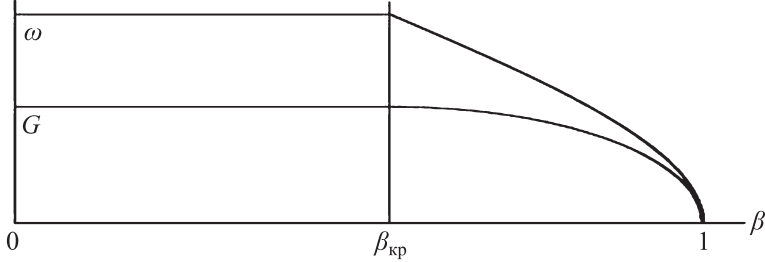


Рис. 2. Типичный график зависимостей величин  $w$  и  $G$  от параметра  $\beta$

Заметим, что хотя формула для критического параметра давления и приведенные выражения для скоростей и расходов получены с использованием модели идеального газа, в настоящее время эти зависимости применяются и для реальных газов [3–5]. Оценка допустимости такого применения выходит за рамки настоящей статьи.

Система уравнений для нахождения трех неизвестных  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  состоит из уравнений массы, энергии и термического уравнения состояния [3, 6]. Уравнение баланса массы имеет вид

$$V \frac{d\rho}{dt} = G. \quad (1)$$

Оно показывает, что увеличение с течением времени  $t$  массы газа в резервуаре равно расходу через сопло. Уравнение энергии дает баланс между возрастанием удельной внутренней энергией  $u$  (в Дж/кг) за счет поступления энтальпии  $h_\infty$  втекающего газа за вычетом оттока тепла через поверхность емкости:

$$V \frac{d(\rho u)}{dt} = G h_\infty - q S, \quad (2)$$

здесь  $S$  – площадь боковой поверхности сосуда,  $q$  – интенсивность теплового потока, которая определяется выражением

$$q = k (T - T_n),$$

где  $T_n$  – температура окружающей среды вне резервуара;  $k$  – коэффициент теплоотдачи от газа внутри емкости к окружающей среде (в Вт/(м<sup>2</sup>·К)).

В качестве уравнения состояния смеси возьмем хорошо зарекомендовавшую себя двухпараметрическую модель Редлиха–Квонга [7]

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v(v+b)T^{0.5}}, \quad (3)$$

в которой  $v = \frac{1}{\rho}$  – удельный объем (в м<sup>3</sup>/кг),  $R$  – газовая постоянная смеси (в Дж/(кг·К)). Параметры  $a$  и  $b$  находятся с помощью величин  $p$ ,  $v$ ,  $T$  смеси в критической точке. Это можно выполнять следующими способами:

1) по условиям на точку перегиба изотермы, проходящей через критическую точку;

2) представляя соотношение (3) в виде кубического уравнения относительно удельного объема  $v$  и принимая во внимание то обстоятельство, что в критической точке все три корня этого кубического уравнения одинаковы.

Второй способ нахождения параметров  $a$  и  $b$  приводит к более простым вычислениям. Действительно, представим уравнение (3) как кубическое уравнение относительно  $v$ :

$$v^3 - \frac{RT}{p}v^2 + \left( \frac{a}{pT^{0.5}} - \frac{RT}{p}b - b^2 \right)v - \frac{ab}{pT^{0.5}} = 0.$$

В критической точке коэффициенты такого уравнения будут соответствовать ее параметрам, что позволяет для нее записать

$$v^3 - \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}}v^2 + \left( \frac{a}{p_{\kappa}T_{\kappa}^{0.5}} - \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}}b - b^2 \right)v - \frac{ab}{p_{\kappa}T_{\kappa}^{0.5}} = 0. \quad (4)$$

Поскольку в критической точке все три корня уравнения одинаковы и равны  $v_{\kappa}$ , то это означает, что  $(v - v_{\kappa})^3 = 0$  или в развернутом виде

$$v^3 - 3v_{\kappa}v^2 + 3v_{\kappa}^2v - v_{\kappa}^3 = 0. \quad (5)$$

Сравнение выражений (4) и (5) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}} &= 3v_{\kappa}, \\ \frac{a}{p_{\kappa}T_{\kappa}^{0.5}} - \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}}b - b^2 &= 3v_{\kappa}^2, \\ \frac{ab}{p_{\kappa}T_{\kappa}^{0.5}} &= v_{\kappa}^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Первое уравнение системы (6) дает

$$\frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}v_{\kappa}} = 3, \quad (7)$$

откуда видно, что критический параметр сжимаемости  $z_{\kappa} = p_{\kappa}v_{\kappa}/RT = 1/3$ . Подстановка выражения для  $a$  из третьего уравнения системы (6) во второе приводит к соотношению относительно параметра  $b$ :

$$\frac{v_{\kappa}^3}{b} - \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}}b - b^2 = 3v_{\kappa}^2.$$

Деление его на  $v_{\kappa}^2$  с учетом (7) дает

$$\frac{v_{\kappa}}{b} - 3\frac{b}{v_{\kappa}} - \frac{b^2}{v_{\kappa}^2} - 3 = 0.$$

Положим  $b = \chi v_{\kappa}$ , где  $\chi$  – постоянная, которую требуется определить. Используя данное представление, получаем кубическое уравнение относительно  $\chi$ :

$$\chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi - 1 = 0,$$

действительным решением которого является число

$$\chi = \sqrt[3]{2} - 1. \quad (8)$$

Таким образом, из системы (6) получаем следующие значения параметров:

$$a = \frac{v_{\kappa}^2 T_{\kappa}^{0.5} p_{\kappa}}{\chi}, \quad b = \chi v_{\kappa},$$

или, выражая  $v_{\kappa}$  из соотношения (7),

$$a = \frac{1}{9\chi} \frac{R^2 T_{\kappa}^{2.5}}{p_{\kappa}}, \quad b = \frac{\chi}{3} \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}}. \quad (9)$$

Учитывая значение  $\chi$ , согласно (8), можно записать окончательно:

$$a = 0.42748 \cdot \frac{R^2 T_{\kappa}^{2.5}}{p_{\kappa}}, \quad b = 0.08664 \cdot \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}}. \quad (10)$$

Заметим, что в литературе [7] равенства (9) обычно представляют в виде

$$a = \Omega_a \frac{R^2 T_{\kappa}^{2.5}}{p_{\kappa}}, \quad b = \Omega_b \frac{RT_{\kappa}}{p_{\kappa}},$$

где числа  $\Omega_a$  и  $\Omega_b$  соответствуют значениям коэффициентов в выражениях (10) и могут быть записаны как  $\Omega_a = \frac{1}{9\chi}$ ,  $\Omega_b = \frac{\chi}{3}$ , при этом  $\chi$  определяется уравнением (8).

В современной литературе [6] уравнениям состояния часто сопоставляется их запись через фактор сжимаемости  $z = pv/RT$ . Такая запись позволяет анализировать особенности поведения реальных газов и их отличия от идеальных. Получить ее можно следующим образом. Поскольку большинство вариантов уравнений состояния сводится к кубическому уравнению относительно  $v$ , то соответствующее уравнение состояния записывают именно в таком виде, и затем все слагаемые кубического уравнения умножают на  $p^3/(RT)^3$ , после чего переход к кубическому уравнению относительно  $z$  не представляет затруднений. Действительно, после умножения уравнения (4) на  $p^3/(RT)^3$  получаем кубическое уравнение относительно параметра сжимаемости  $z$

$$z^3 - z^2 + (A - B - B^2)z - AB = 0, \quad (11)$$

в котором

$$A = \frac{pa}{R^2 T^{2.5}}, \quad B = \frac{pb}{RT},$$

или, учитывая (9) и используя обозначения для приведенного давления  $\pi = p/p_{\kappa}$  и приведенной температуры  $\tau = T/T_{\kappa}$ :

$$A = \frac{1}{9\chi} \frac{\pi}{\tau^{2.5}}, \quad B = \frac{\chi}{3} \frac{\pi}{\tau}. \quad (12)$$

В критической точке, где  $\tau = \pi = 1$ , уравнение (11) дает значение критического фактора сжимаемости

$$z_{\kappa} = \frac{\chi(1+\chi)}{1-\chi^3} = \frac{1}{3},$$

что и следовало ожидать. Уравнение (11) позволяет представлять « $z$ -фактор» как функцию  $z(p, T)$ . То что уравнение (11) выполняется в критической точке, видно из выражений для параметров (12), в которых  $\tau = \pi = 1$ , а  $1/\chi = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ .

Вычислим параметры реального газа, близкого по составу газовой смеси «Северный поток» [8], компоненты которой и их параметры приведены в табл. 1.

Таблица 1. Характеристики газовой смеси

Компонента смеси	Молярная доля, $y_i$	Молярная масса, $\mu_i$	$p_{ki}$ , бар	$T_{ki}$ , К	$\rho_{ki}$ , кг/м <sup>3</sup>
Метан CH <sub>4</sub>	0.981848	16.043	42.26	190.66	162
Этан C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	0.006848	30.070	48.71	305.33	203
Пропан C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	0.002057	44.097	42.55	369.90	220
и-Бутан C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	0.000353	58.124	38.01	407.15	228
н-Бутан C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	0.000333	58.124	36.50	425.95	221
н-Пентан C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	0.000046	72.151	33.73	469.50	232
Двуокись углерода CO <sub>2</sub>	0.000339	44.009	73.83	304.26	468
Азот N <sub>2</sub>	0.008176	28.014	33.94	126.25	311

Применяя правила смешения (закон аддитивности), можно вычислить молярную массу смеси, число компонент которой  $n = 8$ :

$$\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu_i = 16.3356 \text{ кг/кмоль.}$$

Далее, используя значение универсальной газовой постоянной  $R_\mu$ , определяем газовую постоянную смеси

$$R = \frac{R_\mu}{\mu} = \frac{8314.472}{16.3356} = 508.9797 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}. \quad (13)$$

Критические параметры смеси также находятся по правилам смешения:

$$p_k = \sum_{i=1}^n y_i p_{ki} = 42.2436 \text{ бар,}$$

$$T_k = \sum_{i=1}^n y_i T_{ki} = 191.4935 \text{ К.}$$

Тогда параметры  $a$  и  $b$  в уравнении Редлиха–Квонга (3) принимают, согласно формулам (10), значения

$$a = 12211.42 \text{ (м}^2 \cdot \text{К}^{0.5})/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), \quad b = 1.83 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}. \quad (14)$$

Введем, следуя [9, 10], калорическое уравнение состояния рассматриваемого реального газа. Из основного уравнения термодинамики, применяя дифференциальное уравнение Максвелла, можно получить следующее соотношение, связывающее калорическую величину – внутреннюю энергию – с термическими величинами:

$$u(v, T) = u(v_0, T) + \int_{v_0}^v \left[ T^2 \left( \frac{\partial}{\partial T} \frac{p}{T} \right)_v \right] dv, \quad (15)$$

где  $u(v_0, T)$  – некоторая функция температуры при фиксированном значении  $v_0$ . Величину в квадратных скобках в (15) можно выразить, используя уравнение Редлиха–Квонга. Тогда, учитывая, что  $\rho = 1/v$ , находим, что

$$u = u(v_0, T) - \frac{3}{2} \frac{a}{b\sqrt{T}} \ln \frac{1 + b\rho}{1 + b\rho_0}.$$

При  $\rho_0 \rightarrow 0$  имеет место совершенный газ  $u(\rho_0, T) = c_v T$ , где изохорная теплоемкость  $c_v$  определяется по молекулярно-кинетической теории газа. Тогда окончательно выражение для внутренней энергии реального газа, учитывая этот предельный переход, записывается следующим образом:

$$u = c_v T - \frac{3}{2} \frac{a}{b\sqrt{T}} \ln(1 + b\rho). \quad (16)$$

Энтальпия газа  $h$  может быть вычислена, согласно определению:  $h = u + pv = u + \frac{p}{\rho}$ . Тогда с учетом (16) получаем

$$h = c_v T - \frac{3}{2} \frac{a}{b\sqrt{T}} \ln(1 + b\rho) + \frac{p}{\rho}. \quad (17)$$

Для энтальпии торможения возникает добавка в виде  $\frac{w^2}{2}$ , зависящая от скорости  $w$  газового потока при заполнении емкости. Тогда вместо (17) следует записать

$$h = c_v T - \frac{3}{2} \frac{a}{b\sqrt{T}} \ln(1 + b\rho) + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2}. \quad (18)$$

Расчет заполнения сосуда, показанного на рис. 1, будем проводить для следующих исходных данных:

объем резервуара  $V = 28.872 \text{ м}^3$ ;

площадь отверстия сопла  $F = 0.00785 \text{ м}^2$ ;

площадь боковой поверхности емкости  $S = 240 \text{ м}^2$ .

В сосуд с начальными параметрами  $p_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $T_0 = 253 \text{ К}$  втекает природный газ с параметрами  $p_\infty = 250 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $T_\infty = 293 \text{ К}$ . Требуется вычислить текущие параметры газа  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  в резервуаре в процессе заполнения, а также время заполнения, исходя из того, что в конце процесса давление в емкости станет равным  $p_\infty = 250 \times 10^5 \text{ Па}$ . Примем, что коэффициент расхода  $c_d = 0.9$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.3$ , а это приводит к критическому параметру давления  $\beta_{кр} = 0.5457$ .

Для закритического режима течения на промежутке времени  $t \in [0, t_1]$ , когда  $\beta = \frac{p}{p_\infty} \leq \beta_{кр} = 0.5457$ , скорость газа  $w$ , втекающего в сосуд, и массовый расход  $G$  будут постоянными. Величина  $\rho_\infty$ , необходимая для их определения, вычисляется посредством уравнения состояния Редлиха–Квонга (3).

Система уравнений для расчета параметров  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  будет состоять из двух дифференциальных уравнений первого порядка (1), (2) и одного алгебраического уравнения состояния (3):

$$V \frac{d\rho}{dt} = G,$$

$$V \frac{d(\rho u)}{dt} = Gh_\infty - qS, \quad (19)$$

$$p = R \frac{\rho T}{(1 - b\rho)} - \frac{a\rho^2}{(1 + b\rho)\sqrt{T}}.$$

Входящие в уравнение энергии в системе (19) величины  $u$  и  $h_\infty$  находятся согласно формулам (16) и (18) соответственно. Постоянные параметры Редлиха–Квонга определяются выражениями (13), (14).

Соотношение (18) позволяет преобразовать уравнение энергии (2), в результате система (19) принимает вид

$$\begin{aligned} V \frac{d\rho}{dt} &= G, \\ \frac{dT}{dt} &= \left[ G \left( h_\infty - u + \frac{3a}{2} \frac{\rho}{(1+b\rho)\sqrt{T}} \right) - qS \right] / \left[ V\rho \left( c_v + \frac{3a}{4b} \frac{\ln(1+b\rho)}{T^{\frac{3}{2}}} \right) \right], \\ p &= R \frac{\rho T}{(1-b\rho)} - \frac{a\rho^2}{(1+b\rho)\sqrt{T}}. \end{aligned} \quad (20)$$

При проведении расчетов примем, что в состоянии идеального газа природный газ [7, 9] имеет теплоемкость  $c_v = 1750$  Дж/(кг · К), коэффициент теплопередачи возьмем равным  $k = 6$  Вт/(м<sup>2</sup> · К), а температуру окружающей среды  $T_{\text{ср}} = 253$  К.

Система (20) решается численными методами. Начальные условия ( $t = 0$ ) для этой системы

$$p_1^H = p_0, \quad T_1^H = T_0, \quad \rho_1^H = \rho_0,$$

здесь величина  $\rho_0$  определяется уравнением (3).

Закритический режим истечения газа заканчивается в момент времени  $t = t_1$ , когда давление в резервуаре  $p_{\text{кр}} = \beta_{\text{кр}} p_\infty$ . Обозначим величины  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  в момент времени  $t = t_1$  следующим образом:

$$p_1^K = p_{\text{кр}}, \quad T_1^K = T|_{t=t_1}, \quad \rho_1^K = \rho|_{t=t_1}.$$

Масса газа в емкости в начальный момент времени  $t = 0$  равна  $m_1^H = \rho_0 V$ , а по окончании этого этапа  $m_1^K = \rho_1^K V$ . Заметим, что для закритического режима, когда  $G = \text{const}$ , проверка качества численного решения может быть произведена с помощью выражения, полученного в результате интегрирования уравнения баланса массы – первого соотношения системы (20):

$$\rho = \rho_0 + \frac{G}{V} t. \quad (21)$$

Тем самым оценка достоверности осуществляется посредством сравнения значения плотности  $\rho$ , найденного численными методами, с величиной, вычисленной по формуле (21) в любой момент времени  $t$  из промежутка  $[0, t_1]$ .

Для докритического режима течения, когда  $\beta \geq \beta_{\text{кр}}$ , на промежутке времени  $t \in [t_1, t_2]$  система уравнений для определения величин  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  будет той же, что и для закритического режима, однако значения скорости течения газа  $w$  и массового расхода  $G$  уже не являются постоянными и изменяются с течением времени. Величины внутренней энергии  $u$  и энтальпии  $h_\infty$  здесь также определяются соотношениями (16) и (18). Начальными условиями при  $t = t_1$  для системы уравнений (20) будут следующие:

$$p_2^H = p_1^K, \quad T_2^H = T_1^K, \quad \rho_2^H = \rho_1^K.$$

Наполнение сосуда заканчивается в момент времени  $t = t_2$ , когда давление в резервуаре будет равно  $p_2^K = p_\infty$ . Итогом расчетов будут значения

$$p_2^K = p_\infty, \quad T_2^K = T|_{t=t_2}, \quad \rho_2^K = \rho|_{t=t_2}.$$



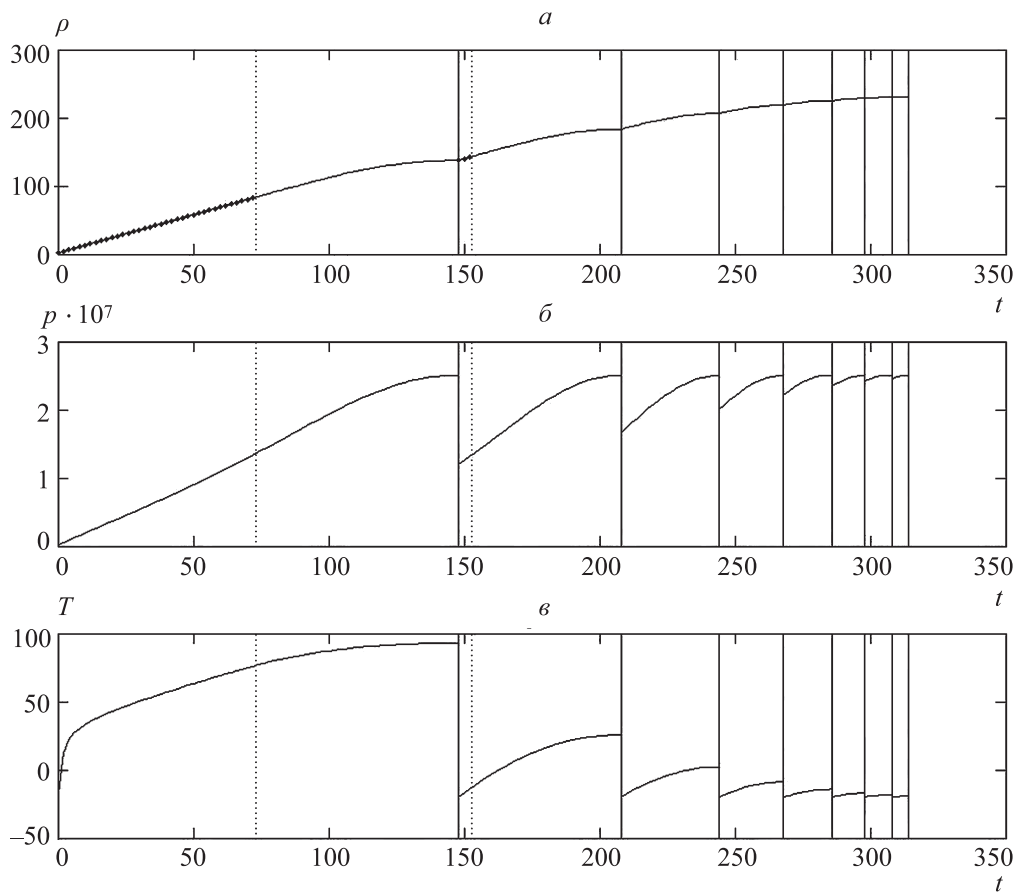


Рис. 3. Параметры газа в заполняемом сосуде: динамика изменения плотности (а), давления (б), температуры (в) в процессе закачки

Масса газа в емкости будет равна  $m_2^k = \rho_2^k V$ . Очевидно, что в силу ряда факторов, например, такого как выделение теплоты, вследствие сжатия газа, температура газа в сосуде будет больше, чем окружающей среды:  $T_2^k > T_{\text{ср}}$ . Это означает, что плотность газа в резервуаре  $\rho_2^k < \rho_\infty$ , и если его охладить до температуры окружающей среды  $T_{\text{ср}}$ , то давление в емкости снизится и будет составлять  $p_2^{\text{охл}} < p_\infty$ . В результате в сосуд можно будет еще подкачать газ.

Давление в резервуаре после охлаждения газа до  $T_{\text{ср}}$  может быть определено с помощью уравнения состояния Редлиха–Квонга

$$p_2^{\text{охл}} = R \frac{\rho_2^k T_{\text{ср}}}{(1 - b\rho_2^k)} - \frac{a(\rho_2^k)^2}{(1 + b\rho_2^k)\sqrt{T_{\text{ср}}}}.$$

После этого снова решаем систему уравнений (20) с начальными условиями  $t = t_2^{\text{охл}}$

$$p_3^{\text{н}} = p_2^{\text{охл}}, \quad T_3^{\text{н}} = T_{\text{ср}}, \quad \rho_3^{\text{н}} = \rho_2^k,$$

Таблица 2. Результаты расчета

Шаг	Этап	Режим	$t$ , с	$\beta$	$\rho$ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$m$ , кг	$T$ , °C	$p \cdot 10^5$ , Па	$G$ , $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$	$W$ , $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$u \cdot 10^5$
1	Начало	Закр.	0	0.008	1.6	45.2	-20	2	32.34	387.47	4.4079
		Крит.	73	0.5422	83.3	2405.9	76.6	135.6	32.33	386.11	5.2946
	Конец	Докр.	148	1	137.6	3972.4	92.7	250	0	0	5.1319
Охлаждение											
2	Начало	Закр.	0	0.481	137.6	3972.4	-20	120.2	32.34	387.47	2.9027
		Крит.	5	0.5375	143.2	4134.1	-12.7	134.4	32.33	386.55	2.9979
	Конец	Докр.	60	1	183.2	5288.8	25.5	250	0	0	3.4217
Охлаждение											
3	Начало	Докр.	0	0.667	183.2	5288.8	-20	166.7	31.21	320.46	2.4694
	Конец	Докр.	36	1	206.4	5958.7	2.1	250	0	0	2.7349
Охлаждение											
4	Начало	Докр.	0	0.801	206.4	5958.7	-20	200.2	26.88	239.76	2.2599
	Конец	Докр.	24	1	218.6	6311.5	-8.7	250	0	0	2.3978
Охлаждение											
5	Начало	Докр.	0	0.887	218.6	6311.5	-20	221.9	21.46	176.87	2.1523
	Конец	Докр.	18	1	225.1	6498	-14.2	250	0	0	2.2244
Охлаждение											
6	Начало	Докр.	0	0.939	225.1	6498	-20	234.7	16.37	129.20	2.0961
	Конец	Докр.	12	1	228.5	6596	-16.9	250	0	0	2.1338
Охлаждение											
7	Начало	Докр.	0	0.967	228.5	6596	-20	241.8	12.17	93.87	2.0668
	Конец	Докр.	10	1	230.2	6647.5	-18.4	250	0	0	2.0865
Охлаждение											
8	Начало	Докр.	0	0.983	230.2	6647.5	-20	245.7	8.91	67.91	2.0515
	Конец	Докр.	6	1	231.2	6674.1	-19.2	250	0	0	2.0617
Охлаждение											
Завершение зачки			314	0.991	231.2	6674.1	-20	247.73	6.49	49.18	2.0436

при этом параметр давления будет равным  $\beta = p_2^{\text{окл}}/p_\infty$ . Этап подкачки заканчивается, когда давление газа в емкости снова достигнет значения  $p_\infty$ , затем снова газ охлаждается до температуры окружающей среды. Процесс закачки продолжается до тех пор, пока после охлаждения газа на  $i$ -м этапе давление в сосуде не станет равным  $p_i^{\text{окл}} = 0.99p_\infty$ .

Динамика параметров газа  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  в процессе закачки представлена на рис. 3. Сплошными вертикальными линиями показаны границы этапов закачки газа, пунктирными – моменты достижения параметром давления критического значения (смена режимов истечения). Жирными точками на рис. 3, а отображены значения плотности, полученные согласно формуле (21), для закритического режима течения.

Характеристики процесса поэтапной закачки газовой смеси в резервуар приведены в табл. 2.

Таким образом, поэтапное заполнение емкости с последующим охлаждением позволяет увеличить ее загрузку. Для заданных условий протекания процесса масса докаченного газа составляет величину порядка 40% от общей массы.

## Литература

1. Вулис Л. А. Теория газовых потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1950. 304 с.
2. Бошнякович Ф. Техническая термодинамика: в 2 ч. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1955. Ч. 1. 327 с.
3. Павловский В. А. Введение в термодинамику реальных газов: монография. СПб.: ФГУП «Крыловский государственный научный центр», 2013. 230 с.
4. Farzaneh-Gord M., Hashemi Sh., Farzaneh-Kord A. Thermodynamics Analysis of Cascade Reservoirs Filling Process of Natural Gas Vehicle Cylinders // World Applied Science Journal. 2008. Vol. 5, N 2. P. 143–149.
5. Dicken C. J. B., Merida W. Modeling the Transient Temperature Distribution Within a Hydrogen Cylinder During Refueling // Numerical Heat Transfer. 2008. Pt A, vol. 53. P. 1–24.
6. Васильев О. Ф., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1978. 127 с.
7. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей: справ. пособие / пер. с англ.; под ред. Б. И. Соколова. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Химия, 1982. 592 с. (Reid R. C., Prausnitz J. M., Sherwood T. K. The properties of gases and liquids.)
8. Лисицын Н. В., Федоров В. И. Фазовый состав и физические свойства многокомпонентных смесей в компьютерной системе HYSYS: учеб. пособие. СПб.: С.-Петербург. гос. техн. ин-т (Техн. ун-т), 2005. 38 с.
9. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В., Филиппов В. Б., Филиппов К. Б. Модели морских газопроводов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 156 с.
10. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Анализ подходов к моделированию термодинамических процессов в газах при высоких давлениях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013. Вып. 2. С. 36–45.

## References

1. Vulis L. A. *Teorija gazovyh potokov* (Theory of gas streams). Moscow; Leningrad: Gosjenergoizdat, 1950, 304 p.
2. Boshnjakovich F. *Tehnicheskaja termodinamika: v 2 ch.* (Technical thermodynamics: in 2 pt.). Moscow; Leningrad: Gosjenergoizdat, 1955, pt. 1, 327 p.
3. Pavlovskij V. A. *Vvedenie v termodinamiku real'nyh gazov* (Introduction to Thermodynamics of real gases): monografiya. St. Petersburg: FGUP "Krylovskij gosudarstvennyj nauchnyj center", 2013, 230 p.
4. Farzaneh-Gord M., Hashemi Sh., Farzaneh-Kord A. Thermodynamics Analysis of Cascade Reservoirs Filling Process of Natural Gas Vehicle Cylinders. *World Applied Science Journal*, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 143–149.
5. Dicken C. J. B., Merida W. Modeling the Transient Temperature Distribution Within a Hydrogen Cylinder During Refueling. *Numerical Heat Transfer*, 2008, pt A, vol. 53, pp. 1–24.
6. Vasil'ev O. F., Bondarev Je. A., Voevodin A. F., Kanibolotskij M. A. *Neizotermicheskoe techenie gaza v trubah* (Nonisothermic gas flow in pipes). Novosibirsk: Nauka, Sib. otd., 1978, 127 p.

7. Reid R. C., Prausnitz J. M., Sherwood T. K. *Svojstva gazov i zhidkостей: cprav. posobie* (The properties of gases and liquids). Per. s angl.; pod red. B. I. Sokolova. 3-e izd., pererab. i dop. Leningrad: Himija, 1982, 592 p.

8. Lisicyn N. V., Fedorov V. I. *Fazovyy sostav i fizicheskie svojstva mnogokomponentnykh smesey v komp'yuternoj sisteme HYSYS: ucheb. posobie* (Phase composition and physical properties of multicomponent mixtures in a computer system HYSY). St. Petersburg: S.-Peterb. gos. tehn. in-t (Tehn. un-t), 2005, 38 p.

9. Kurbatova G. I., Popova E. A., Filippov B. V., Filippov V. B., Filippov K. B. *Modeli morskikh gazoprovodov* (Models of sea gas pipelines). St. Petersburg: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2005, 156 p.

10. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I. *Analiz podhodov k modelirovaniyu termodinamicheskikh processov v gazah pri vysokikh davleniyah* (Analysis of approaches to modeling of thermodynamic processes in gases at high pressures). *Vestnik St. Petersburg University*, ser. 10: Applied mathematics, computer science, control processes, 2013, issue 2, pp. 36–45.

Статья рекомендована к печати проф. Ю. М. Далем.

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2013 г.