Задача 1.

Согласно ГОСТ 4401-73 «Стандартная атмосфера», на высоте $h = 0$ м примем значение ускорения свободного падения $g_0 = 9.8066\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, плотность воздуха $\rho_0 = 1.225\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Так как расчётная высота полёта ракеты не предполагается слишком большой, то при проведении расчётов изменением g с высотой можно пренебречь, считать его постоянным и равным g_0.

Вычисление параметров* ракеты

1. Стартовая тяговооружённость ν_0 расчитывается как

$$\nu_0 = \frac{P_0}{g(m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}})}$$

Выражая из этой формулы P_0, получаем:

$$\boxed{P_0 = \nu_0 g(m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}})}$$

$$P_0 = 4 \cdot 9.8066\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг}) \approx 164.75\text{ Н}$$

При расчёте дальнейших параметров будем полагать, что тяга ЖРД в течение времени работы остаётся постоянной. В действительности тяга двигателя непременно изменяется главным образом из-за уменьшения окружающего давления с высотой. Но этим фактором так же будем пренебрегать, так как в «худшем» случае разность пустотной тяги двигателя и тяги на высоте старта лежит в пределах 15%.

2. Удельный импульс ракетного двигателя можно рассчитать по формуле:

$$I_{sp} = \frac{P_0}{|\dot{m}|}$$

Отсюда выразим массовый расход топлива и подставим выражение для тяги:

$$\boxed{|\dot{m}| = \frac{\nu_0 g\left(m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}\right)}{I_{sp}}}$$

$$|\dot{m}| = \frac{4 \cdot 9.8066\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг})}{300\frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 0.549\frac{\text{кг}}{\text{с}}$$

Вообще, производная массы по времени для ракеты есть величина отрицательная. Понимая это, для удобства будем брать её модуль.

3. Объём топлива и бака определим, исходя из элементарных понятий:

**Все не описанные в этом тексте величины и их обозначения, не являющиеся вновь вводимыми, совпадают с обозначениями в тексте задания.*

$$\boxed{V_{топ} = \frac{m_{топ}}{\rho_{топ}}} \boxed{V_{бака} = k_{бака}\frac{m_{топ}}{\rho_{топ}}} \quad (1)$$

$$V_{топ} = \frac{1.0\text{ кг}}{1242\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 8.05153 \cdot 10^{-4}\text{м}^3\ ;\ V_{бака} = 2 \cdot \frac{1.0\text{ кг}}{1242\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 1.610306\ \cdot 10^{-3}\text{м}^3$$

4. Объём бака можно вычислить, исходя из его геометрических размеров:

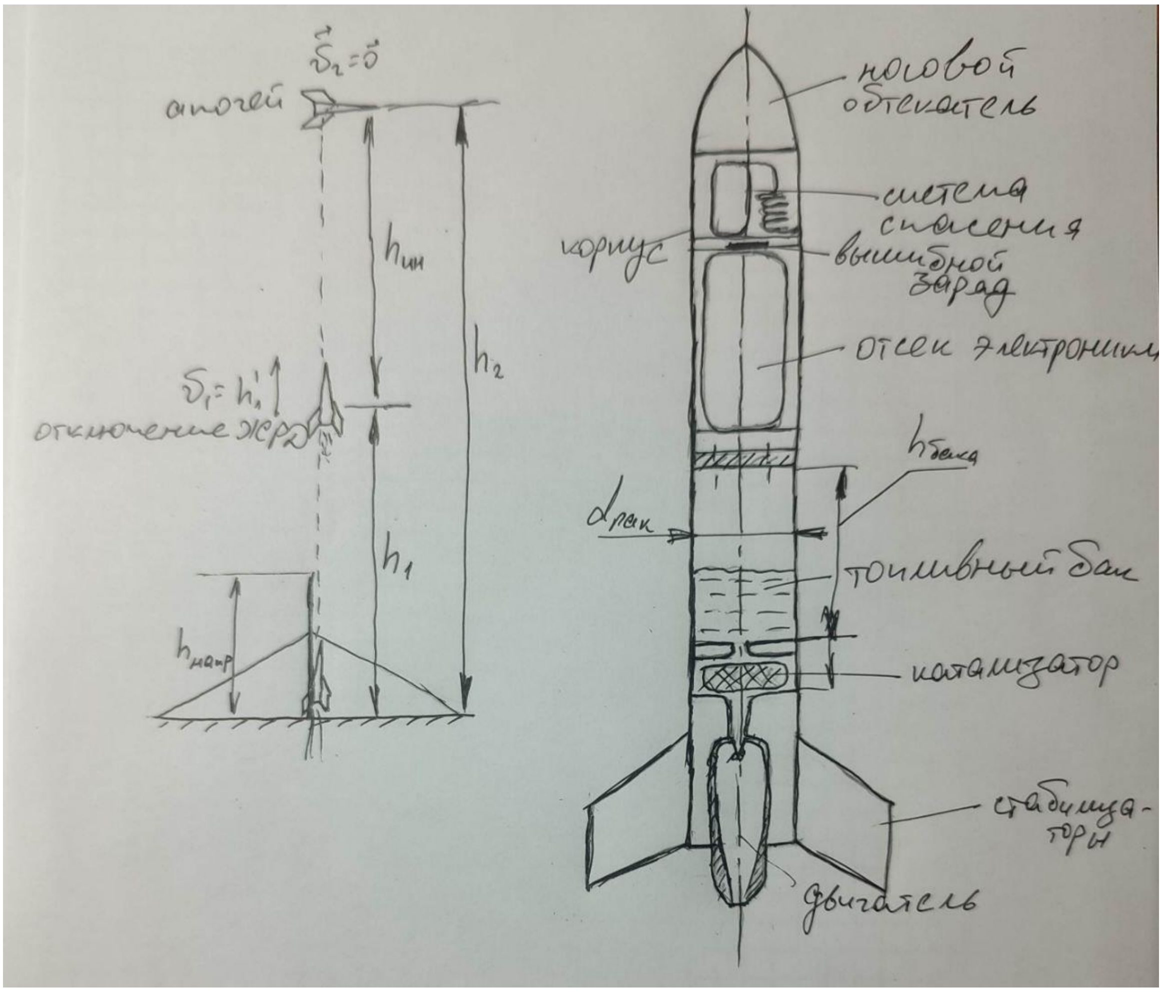
$$V_{бака} = \frac{\pi {d_{бака}}^2}{4} h_{бака}$$

Выразим из этой формулы $h_{бака}$, подставив вместо объёма бака его представление из (1):

$$\boxed{h_{бака} = \frac{4k_{бака}m_{топ}}{\pi\rho_{топ}{d_{бака}}^2}}$$

$$h_{бака} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1.0\text{ кг}}{3.14 \cdot 1242\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot (0.07\text{ м})^2} \approx 419\text{ мм}$$

Здесь я полагаю, что полость бака имеет форму прямого кругового цилиндра, а толщина его стенки мала по сравнению с внешним диаметром ракеты, поэтому при подстановке чисел вместо $d_{бака}$ подставляю значение $d_{рак}$ = 70 мм. В действительности, скорее всего, бак с торцов будет закрыт эллиптическими (или сферическими) крышками, что нужно будет учитывать, как, впрочем, и толщину стенки, при точном расчёте объёма и габаритов бака. Вычисленное же значение $h_{бака}$ является оценочным и позволяет определить порядок искомой величины.



5. Введём величину ω_e – эффективную скорость истечения газов в наибольшем сечении сопла (на срезе). Она не равна в точности скорости истечения газов, так как газ, двигающийся с некоторой скоростью, согласно закону Бернулли, создаёт дополнительное давление вблизи среза сопла, что сказывается на тяге двигателя путём воздействия этого давления на площадь наибольшего сечения. Величина ω_e просто представляет собой скорость вылетающих из сопла двигателя материальных точек, не создающих давления. Сила тяги тогда примет вид:

$$P_0 = \omega_e|\dot{m}| \ (2)$$

Запишем уравнение реактивного движения и выразим приращение скорости:

$$M\frac{dv}{dt} = -\omega_e\frac{dM}{dt} \Rightarrow dv = -\omega_e\frac{dM}{M}$$

$$\int dv = -\omega_e\int\frac{dM}{M} \Rightarrow v = -\omega_e\ln\frac{M}{M_0} \ (3)$$

Здесь M – масса ракеты в данный момент времени ($M(t) = M_0 - |\dot{m}|t$), $M_0 = m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}$

Исходя из того, что скорость расхода топлива постоянна, определим время работы двигателя:

$$m_{\text{топ}} = |\dot{m}|t_{\text{раб}} \Rightarrow \boxed{t_{\text{раб}} = \frac{m_{\text{топ}}}{|\dot{m}|} = \frac{I_{sp}m_{\text{топ}}}{v_0 g\left(m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}\right)}} \ (4)$$

$$t_{\text{раб}} = \frac{300\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 1.0\text{кг}}{4\cdot 9.8066\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot(3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг})} \approx 1.82\text{ с}$$

Учтём, что при движении в поле тяжести необходимо учитывать уменьшение скорости за время полёта на $gt_{\text{раб}}$, и найдём скорость ракеты сразу после выключения двигателя:

$$h_1' = -\omega_e\ln\frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}} - gt_{\text{раб}}$$

Используем формулу (2), (4) и вынесем общий множитель:

$$\boxed{h_1' = -I_{sp}\left(\ln\frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}} + \frac{m_{\text{топ}}}{v_0\left(m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}\right)}\right)}$$

$$h_1' = -300\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\left(\ln\frac{3.2\text{ кг}}{3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг}} + \frac{1.0\text{ кг}}{4(3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг})}\right) \approx 63.72\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

При расчёте этой скорости я не учитывал сопротивление воздуха, что является не совсем корректным. Однако, учитывая малое время работы двигателя, я посчитал некритичным отбросить эту составляющую.

Найдём теперь высоту отключения двигателя на основании уравнения (3):

$$h_1 = -\omega_e\int_0^{t_{\text{раб}}}\ln\frac{M}{M_0}dt = -\omega_e\frac{M_0}{|\dot{m}|}\int_1^{\frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}}+m_{\text{топ}}}}\ln\frac{M}{M_0}d\left(\frac{M}{M_0}\right) =$$

$$= \omega_e\frac{M_0}{|\dot{m}|}\left(1 + \frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}}\ln\frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}} - \frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}}\right) \ (5)$$

$$\boxed{h_1 = \frac{{I_{sp}}^2}{v_0 g}\left(1 - \frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}}\left(1 - \ln\frac{m_{\text{сух}}}{m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}}\right)\right) - \frac{1}{2g}\left(\frac{I_{sp}m_{\text{топ}}}{v_0\left(m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}}\right)}\right)^2}$$

Последнее слагаемое является равным $\frac{g{t_{\text{пол}}}^2}{2}$. Оно введено для учёта действия на ракету силы тяжести.

$$h_1 = \frac{(300\,\frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{4\cdot 9.8066\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}\left(1 - \frac{3.2\text{ кг}}{3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг}}\left(1 - \ln\frac{3.2\text{ кг}}{3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг}}\right)\right) - \frac{1}{2\cdot 9.8066\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}\left(\frac{300\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 1.0\text{кг}}{4(3.2\text{ кг} + 1.0\text{ кг})}\right)^2 \approx 54.7\text{ м}$$

С точки зрения здравого смысла и с учётом времени работы ракетного двигателя, ответ кажется вполне реалистичным.

6. Используя вышенаписанные формулы можно рассчитать высоту направляющей. Для этого из уравнения 3 по известной скорости схода найти отношение текущей массы ракеты к стартовой. Затем по формуле (5) найти искомую величину.
   Из уравнения (3):
   $$\frac{M}{M_0} = e^{-\frac{v_{\text{сх}}}{\omega_e}}$$
   Подставляя в (5), получим:
   $$h_{\text{напр}} = \omega_e\frac{M_0}{|\dot{m}|}\left(1 + e^{-\frac{v_{\text{сх}}}{\omega_e}}\ln e^{-\frac{v_{\text{сх}}}{\omega_e}} - e^{-\frac{v_{\text{сх}}}{\omega_e}}\right)$$
   Заметим, что по формуле (2), формуле из пункта 1 для P_0 и из пункта 2 для $|\dot{m}|$, что ω_e и I_{sp} численно равны, и получим окончательную формулу:
   $$\boxed{h_{\text{напр}} = \frac{{I_{sp}}^2}{v_0 g}\left(1 - e^{-\frac{v_{\text{сх}}}{I_{sp}}}\left(1 + \frac{v_{\text{сх}}}{I_{sp}}\right)\right)}$$
   $$h_{\text{напр}} = \frac{(300\,\frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{4\cdot 9.8066\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}\left(1 - e^{-\frac{15\frac{\text{м}}{\text{с}}}{300\frac{\text{м}}{\text{с}}}}\left(1 + \frac{15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{300\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}\right)\right) \approx 2.8\text{ м}$$
   Здесь можно не учитывать силу тяжести, так как за время движения по направляющей поправка будет порядка 10^{-1} м.

7. С учётом силы сопротивления воздуха можно записать II закон Ньютона для движения ракеты по инерции:
   $$m\vec{a} = m\vec{g} + k|\vec{v}|\vec{v}$$
   Спроецируем на вертикальную ось и перепишем в виде дифференциального уравнения второго порядка:
   $$\ddot{h} = g + k_1\dot{h}^2, \text{где } h = h(t)\ (6)$$
   Здесь k это коэффициент аэродинамического сопротивления. Выразим его через заданные параметры. Пусть $F_{\text{сопр}}$ это сила аэродинамического сопротивления. Это уравнение справедливо только тогда, когда ракета движется вверх до апогея, то есть сила сопротивления воздуха сонаправлена с силой тяжести.
   $$\begin{cases} F_{\text{сопр}} = S\frac{\rho_0 v^2}{2}c_x \\ F_{\text{сопр}} = kv^2 \end{cases}$$

S это площадь наибольшего поперечного сечения ракеты. Выразим площадь через диаметр ракеты и получим выражение для k и, поделив на массу, для k_1 :

$$k_1 = \frac{\pi {d_{\text{рак}}}^2 c_x \rho_0}{8m}$$

$$k_1 = \frac{3.14 \cdot (0.07\ \text{м})^2 \cdot 0.25 \cdot 1.225\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{8 \cdot 3.2\ \text{кг}} = 1.84061 \cdot 10^{-4}\text{м}^{-1}$$

Решение уравнения (6) будет иметь вид (вычислено на сайте https://mathdf.com/dif/ru/)

$$h(t) = -\frac{1}{k_1} ln\left(cos\left(\sqrt{gk_1}(t + C_1)\right)\right) + C_2$$

Константы C_1 и C_2 найдём исходя из вычисленных ранее h_1 и h_1'. За нулевой момент времени будем брать время выключения двигателя:

$$h'(t) = \sqrt{\frac{g}{k_1}}\, tg\left(\sqrt{gk_1}(t + C_1)\right), h'(0) = h_1'$$

$$C_1 = \frac{arctg\left(h_1'\sqrt{\frac{k_1}{g}}\right)}{\sqrt{gk_1}}$$

$$C_1 = \frac{arctg\left(63.72\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \sqrt{\frac{1.84061 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^{-1}}{9.8066\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}}\right)}{\sqrt{9.8066\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1.84061 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^{-1}}} \approx 6.33977\ \text{с}$$

$$C_2 = h_1 + \frac{1}{k_1} ln\left(cos\left(\sqrt{gk_1}C_1\right)\right)$$

$$C_2 = 54.7\ \text{м} + \frac{1}{1.84061 \cdot 10^{-4}\text{м}^{-1}} ln\left(cos\left(\sqrt{9.8066\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1.84061 \cdot 10^{-4}\text{м}^{-1}} \cdot 6.33977\ \text{с}\right)\right)$$
$$\approx -144.8\ \text{м}$$

Таким образом, уравнение движения ракеты по инерции примет вид:

$$\boxed{h(t) = -\frac{1}{1.84061 \cdot 10^{-4}\text{м}^{-1}} ln\left(cos\left(\sqrt{g \cdot 1.84061 \cdot 10^{-4}\text{м}^{-1}}(t + 6.33977\ \text{с})\right)\right) - 144.8\ \text{м}}$$

В апогее скорость ракеты равна нулю. Пусть время движения ракеты по инерции от выключения двигателя до апогея $t_{\text{ин}}$.

$$h'(t_{\text{ин}}) = 0$$
$$tg\left(\sqrt{gk_1}(t_{\text{ин}} + C_1)\right) = 0$$
$$t_{\text{ин}} = -C_1 = -6.33977\ \text{с}$$

Вычислим теперь расстояние $h_{\text{ин}}$, пройденное ракетой по инерции.

$$h_{\text{ин}} = -\frac{1}{1.84061 \cdot 10^{-4}\text{м}^{-1}} ln\left(cos\left(\sqrt{9.8066\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1.84061 \cdot 10^{-4}\text{м}^{-1}}(0\,)\right)\right) - 144.8\ \text{м}$$

$$= -144.8\ \text{м}$$

Возьмём полученные величины по модулю по причине того, что их абсолютные значения кажутся вполне разумными и соответствующими действительности.

Таким образом, полное время полёта до апогея и его высота составят:

$$t_{\text{ап}} = t_{\text{пол}} + |t_{\text{ин}}| = 1.82000\ \text{с} + 6.33977\ \text{с} \approx 8.16\ \text{с}$$

$$h_2 = h_1 + |h_{\text{ин}}| = 54.7\ \text{м} + 144.8\ \text{м} = 199.5\ \text{м}$$