1 Проектный и баллистический расчеты

Для атмосферного воздуха примем значения на высоте 0м над уровнем моря, где ускорение свободного падения $g = 9,8066 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а плотность воздуха $\rho_{\text{возд}} = 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

1.1 Схема ракеты

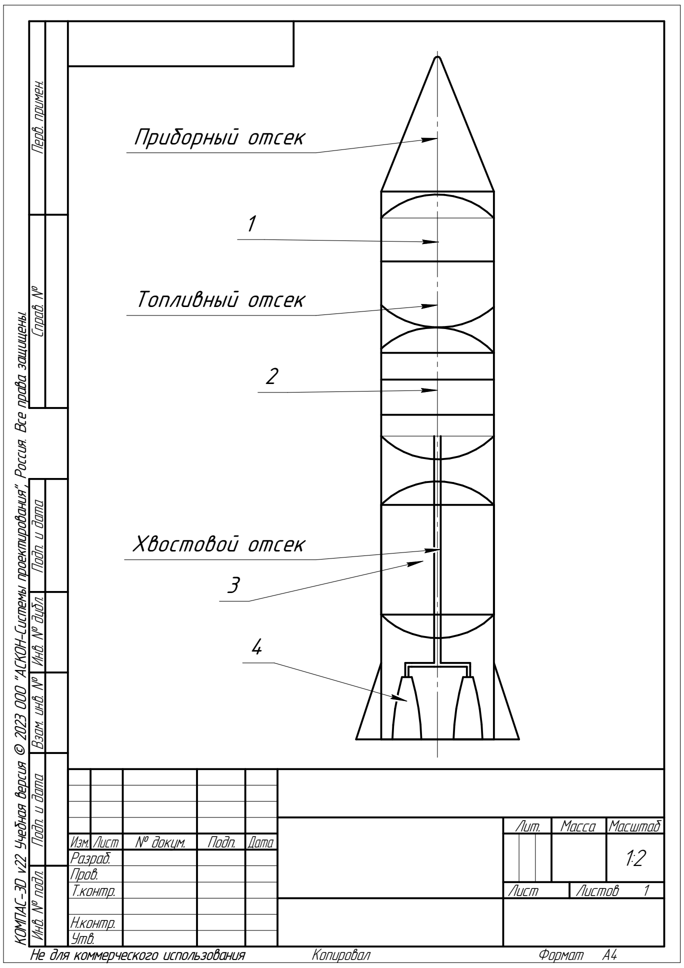

Рис. 1: Схема ракеты(эскиз). 1-бак горючего, 2-бак с окислителем, 3-двигатель, 4-камера

1.2 Определение параметров

Стартовая тяговооруженность вычисляется по формуле:

$$\nu_0 = \frac{P_0}{M_0 g_0}, \tag{1}$$

а первоначальная масса ракеты M_0 будет складываться из массы топлива и массы конструкции:

$$M_0 = m_{\text{сух}} + m_{\text{топ}} = 3,2 + 1 = 4,2\text{кг}, \tag{2}$$

отсюда выразим тягу двигателя:

$$P_0 = M_0 g_0 \nu_0 = M_0 g \nu_0 = 4,2 \cdot 9,8066 \cdot 4 = 164,75\text{Н}.$$

Зная значение тяги двигателя, можно вычислить секундный расход топлива m, выразив через удельный импульс ЖРД:

$$I_{sp} = \frac{P_0}{\dot{m}}, \tag{3}$$

отсюда:

$$\dot{m} = \frac{P_0}{I_{sp}} = \frac{164,75}{300} = 0,55\frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Двигатель будет работать, пока в баке есть топливо, отсюда время работы двигателя $t_{\text{раб}}$ будет равняться отношению массы топлива к секундному расходу:

$$t_{\text{раб}} = \frac{m_{\text{топ}}}{\dot{m}} = \frac{1,0}{0,55} = 1,82\text{с}. \tag{4}$$

Вычислим объем топлива:

$$V_{\text{топ}} = \frac{m_{\text{топ}}}{\rho_{\text{топ}}} = \frac{1,0}{1242} = 8,052 \cdot 10^-4\text{м}^3, \tag{5}$$

а также объем бака, умножив объем топлива на коэффициент увеличения объема бака по отношению к топливу $k_{\text{бака}}$:

$$V_{\text{бака}} = V_{\text{топ}} \cdot k_{\text{бака}} = 8,052 \cdot 10^{-4} \times 2 = 1,61 \cdot 10^{-3}\text{м}^3. \tag{6}$$

Принимая диаметр ракеты в области бака за диаметр ракеты минус толщину обшивки ($d = d_{\text{рак}} - 2 = 68\text{мм}$), можно вычислить высоту топливного бака:

$$h_{\text{бака}} = \frac{V_{\text{бака}}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1,61 \cdot 4}{3,14 \cdot (68 \cdot 10^{-3})^2} = 0,44\text{м}. \tag{7}$$

1.3 Рассчетная схема

1.4 Уравнение движения во время работы двигателя

Угол наклона ракеты к горизонту считаем прямым. Согласно закону Ньютона произведение массы ракеты M на тангенциальное ускорение $\frac{dv}{dt} = \dot{v}$ равно сумме проекций сил на тангенциальную к траектории. В итоге получаем:

$$M\dot{v} = (P - X_{\text{упр}})\cos\alpha - X - Mg\sin\upsilon - Y_{\text{упр}}\sin\alpha, \tag{8}$$

спроектировав все силы на нормаль траектории полета, получим:

$$Mv\dot{\theta} = (P - X_{\text{упр}})\sin\alpha + Y - Mg\cos\upsilon + Y_{\text{упр}}\cos\alpha, \tag{9}$$

уравнение вращательного движения в плоскости полета имеет следующий вид:

$$I\ddot{\phi} = -M_{\text{кор}} - M_{\text{а}} - Y_{\text{упр}}c - M_{\text{ш}}. \tag{10}$$

Так как из условия задачи мы не располагаем данными о траектории полета, можем записать уравнение движения в таком виде:

$$M\dot{v} = P_0 - Mg - X, \tag{11}$$

во время полета масса ракеты M будет постепенно уменьшаться по закону $M = M_0 - \dot{m}t$.

1.5 Момент исчерпания топлива

Запишем выражение тяги в пустоте в форме реактивной силы:

$$P_0 = \dot{m} w_e, \tag{12}$$

где w_e - скорость истечения. Несложно заметить, что $w_e = \frac{P_0}{\dot{m}} = I_{sp}$, следовательно можно рассчитать конечную скорость ракеты в идеальных условиях:

$$v_{\text{к}} = -w_e \ln \mu_{\text{к}} = w_e \ln \frac{M_0}{m_{\text{сух}}} = I_{sp} \ln \frac{M_0}{m_{\text{сух}}} = 300 \cdot \ln \frac{4,2}{3,2} = 81,58 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \tag{13}$$

истинная скорость будет отличаться на величину потерь на силу притяжения $\Delta v_{\text{гр}} = \frac{P_{\text{у}0}}{\nu_0} \int_{\mu_{\text{к}}}^{1} (g \sin \upsilon) d\mu$ (в нашем случае будет удобнее принять $\Delta v_{\text{гр}} = g t_{\text{к}}$) и на аэродинамику

$$\Delta v_{\text{х}} = \frac{g_0 P_{\text{у}0}}{p_{\text{м}} \nu_0} \int_{\mu_{\text{к}}}^{1} (\frac{c_x \rho v^2}{2\mu}) d\mu, \tag{14}$$

т. к плотность воздуха считаем постоянной, барометрические потери скорости равны нулю. По усовершенствованному методу Эйлера вычислим потери на аэродинамику и найдем действительную скорость:

$$h' = v = v_{\text{к}} - \Delta v_{\text{гр}} - \Delta v_{\text{х}} = 81,58 - 9,8066 \cdot 1,82 - 0.006586 = 63,73 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \tag{15}$$

Выразим $\dot{v}$ из уравнений движения:

$$\dot{v}_{\text{раб}} = \frac{P_0 - Mg - X}{M},$$

из предыдущих расчетов видно, что влияние сопротивления воздуха в условиях задачи крайне мало, а поэтому перепишем ускорение как:

$$\dot{v}_{\text{раб}} = \frac{P_0}{M_0 - \dot{m}t} - g,$$

тогда высота подъема будет h_1 будет двойным интегралом от ускорения по времени:

$$h_1 = \iint_0^{t_{\text{раб}}} (v_{\text{раб}}) dt = \iint_0^{t_{\text{раб}}} (\frac{P_0}{M_0 - \dot{m}t} - g) dt = 115,94\text{м}. \tag{16}$$

1.6 Уравнение движения по инерции

Когда двигатель перестанет работать, ракета начнет двигаться по инерции, т.е. на нее будет действовать сила тяжести и сопротивления воздуха:

$$M\dot{v} = -X + Mg, \tag{17}$$

где M - постоянная масса конструкции($M = m_{\text{рак}}$).

1.7 Апогей

После отключения двигателя ракета еще какое-то время по инерции продолжит двигаться вверх, т.е. высота апогея будет складываться из высоты, на которую ракета поднялась с рабочим двигателем и из высоты, которую ракета пролетела по инерции:

$$h_2 = h_{\text{раб}} + h_{\text{ин}}, t_{\text{ап}} = t_{\text{раб}} + t_{\text{ин}}. \tag{18}$$

Из курса школьной физики известно, что:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2\dot{v}}, t = \frac{v - v_0}{\dot{v}}. \tag{19}$$

Выразим $\dot{v}$ из уравнений движения:

$$\dot{v}_{\text{раб}} = \frac{P_0 - Mg - X}{M},$$

$$\dot{v}_{\text{ин}} = \frac{-Mg - X}{M},$$

из предыдущих расчетов видно, что влияние сопротивления воздуха в условиях задачи крайне мало, а поэтому перепишем ускорение как:

$$\dot{v}_{\text{раб}} = \frac{P_0}{M_0 - \dot{m}t} - g,$$

$$\dot{v}_{\text{ин}} = -g.$$

Тогда высота подъема по инерции будет:

$$h_{\text{ин}} = \frac{0 - v^2}{-2g} = \frac{63.73^2}{2 \cdot 9.8066} = 207,08\text{м},$$

время подъема по инерции:

$$t_{\text{ин}} = \frac{v}{g} = \frac{63,73}{9,8066} = 6,5\text{с}.$$

Вычислим высоту апогея:

$$h2 = h1 + h_{\text{ин}} = 207,08 + 115,94 = 323,02\text{м}$$

и время:

$$t2 = t_{\text{раб}} + t_{\text{ин}} = 1,82 + 6,5 = 8,32\text{с}.$$

1.8 Высота направляющей

Построим график зависимости скорости ракеты от времени:

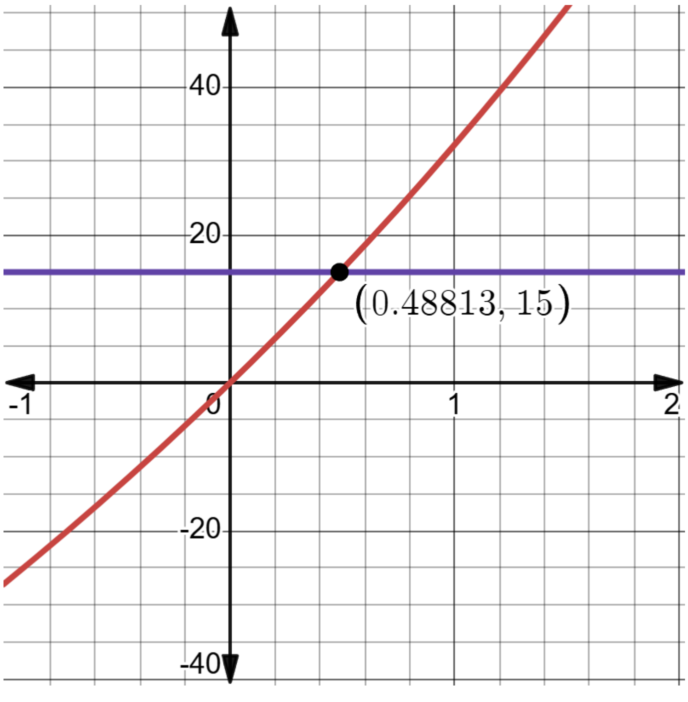

Рис. 2: График v(t)

Т.к. нам известна скорость схода с направляющей, по графику найдем время схода с нее $t_{\text{сх}} = 0,49$с. Отсюда аналогично выражению (16) $h_{\text{напр}} = 7,07$м.

2 Прочностной расчет

2.1 Топливный бак

2.2 Крепление крышки