Les Bases Mathématiques

Mathis EUZEN

10 août 2025

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Les nombres **3**
2.1 Types de nombres . . . 3
2.2 Comparaison et ordre . . . 3

3 Inclusion et ensembles **3**
3.1 Définition . . . 3
3.2 Illustration . . . 4

4 Les opérations fondamentales **4**
4.1 Addition et soustraction . . . 4
4.2 Multiplication et division . . . 5
4.3 Notations usuelles . . . 5
4.4 Puissances et racines . . . 5
4.5 Identités remarquables et distributivité . . . 5
4.6 Simplification des fractions . . . 6

5 Les équations et inéquations **6**
5.1 Qu'est-ce qu'une inconnue ? . . . 6
5.2 À quoi servent les équations et inéquations ? . . . 6
5.3 Règles de rédaction . . . 6
5.4 Les équations du premier degré . . . 7
5.5 Les inéquations du premier degré . . . 7
5.6 Valeur absolue et distance . . . 7

6 Les fonctions **8**
6.1 Qu'est-ce qu'une fonction ? . . . 8
6.2 Notation . . . 8
6.3 Exemples de fonctions simples . . . 8
6.4 Domaine . . . 8
6.5 Représentation graphique . . . 8
6.6 Pourquoi les fonctions sont-elles importantes ? . . . 9

7 Analyse des fonctions : tableaux de variations **9**
7.1 But de l'analyse 9
7.2 Étude du signe d'une fonction 9
7.3 Solutions des équations associées 10
7.4 Construction du tableau de signes 10
7.5 Interprétation 10

1 Introduction

Les **mathématiques**[1] sont un langage universel, un outil puissant qui permet de *décrire*, *comprendre* et *prévoir* le monde qui nous entoure.

Elles interviennent partout, des sciences fondamentales à l'ingénierie, de l'économie à la médecine, et même dans l'art ou la musique.

Apprendre les bases est essentiel, car elles constituent les **fondations** sur lesquelles toute la construction mathématique repose. Si ces fondations sont solides, alors on peut **construire haut**, explorer des concepts complexes et résoudre des problèmes toujours plus fascinants.

En maîtrisant ces bases, tu t'armes pour comprendre le monde, prendre des décisions éclairées, et même inventer de nouvelles solutions.

2 Les nombres

Les nombres sont des symboles que nous utilisons pour compter, mesurer et comparer.

2.1 Types de nombres

— **Nombres entiers naturels** $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3, \ldots$
  Utilisés pour compter les objets.
— **Nombres entiers relatifs** $\mathbb{Z}$: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
  Ils incluent les nombres négatifs.
— **Nombres rationnels** $\mathbb{Q}$: nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction[2].
  Exemples : $\frac{1}{2}$, 0.75, -3.
— **Nombres réels** $\mathbb{R}$: tous les nombres rationnels et irrationnels[3].
— **Nombres complexes** $\mathbb{C}$: nombres de la forme $a + bi$, où $i^2 = -1$.

2.2 Comparaison et ordre

On peut comparer deux nombres grâce aux symboles :

$$< \quad \text{plus petit que}, \quad > \quad \text{plus grand que}, \quad = \quad \text{égal à.}$$

Exemple : $3 < 5, \quad 7 > -1, \quad 2 = 2.$

3 Inclusion et ensembles

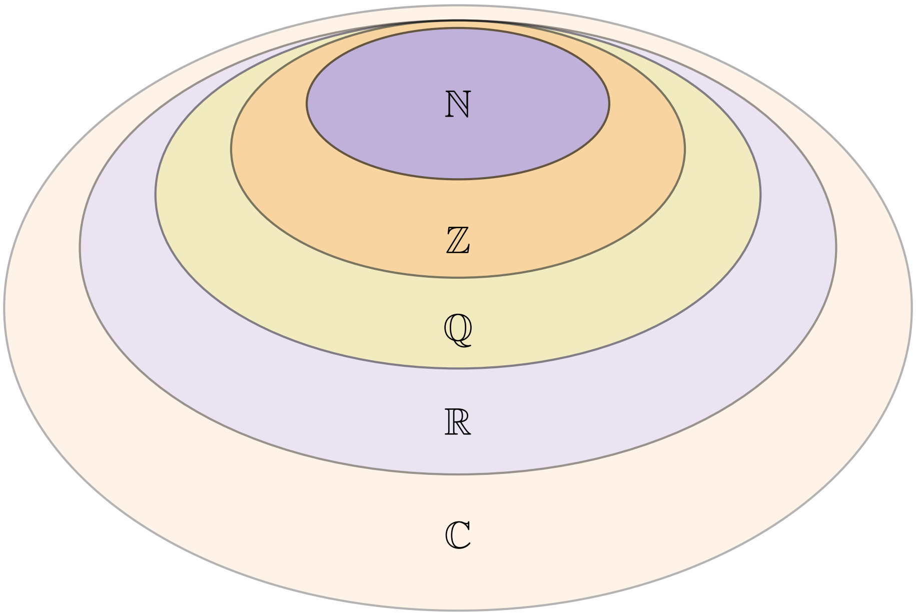
3.1 Définition

Un ensemble[4] est un groupe d'objets ou de nombres. On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont aussi dans B. Cela s'écrit $A \subset B$.

1. Science qui étudie les nombres, les formes, les structures et les relations logiques
2. Fraction = un nombre écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers et $b \neq 0$
3. Nombre irrationnel = nombre qui ne peut pas s'écrire en fraction, comme π ou $\sqrt{2}$
4. Ensemble = collection d'éléments distincts

3.2 Illustration

Voici la relation entre les différents ensembles de nombres :



On a donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

4 Les opérations fondamentales

Les **opérations** sont les outils qui nous permettent de manipuler les nombres. Sans elles, les maths seraient comme un avion sans moteur : beau mais inutile.

4.1 Addition et soustraction

L'**addition** consiste à rassembler des quantités. Par exemple, si tu as 3 missiles et que tu en reçois 5 de plus, tu as en tout $3 + 5 = 8$ missiles (espérons qu'ils ne tombent pas tous au même endroit).

La **soustraction** est liée à l'addition, mais elle consiste à enlever une quantité. Formellement, soustraire un nombre revient à ajouter son *opposé*[5] :

$$a - b = a + (-b)$$

Par exemple, $7 - 4 = 7 + (-4) = 3$. C'est comme dire : si tu as 7 missiles mais que tu en perds 4 (espérons que ce soit virtuel), il t'en reste 3.

5. L'opposé d'un nombre a est $-a$, tel que $a + (-a) = 0$.

4.2 Multiplication et division

La **multiplication** est une addition répétée. Multiplier 4×3 revient à additionner 4 trois fois : $4 + 4 + 4 = 12$. C'est la version mathématique de "pas envie de compter 4 + 4 + 4 à la main".

La **division** est l'opération inverse de la multiplication. Diviser, c'est partager en parts égales ou déterminer combien de fois un nombre entre dans un autre. On écrit souvent la division sous forme de fraction :

$$\frac{a}{b} \quad \text{signifie } a \div b$$

Par exemple, $\frac{12}{4} = 3$, car 4 entre 3 fois dans 12.

4.3 Notations usuelles

Pour la multiplication, plusieurs notations sont utilisées :

— Le point : $a \cdot b$, utile pour éviter la confusion avec la lettre x.

— La juxtaposition : écrire ab signifie aussi $a \times b$, très courant en algèbre.

Pour la division, la notation en fraction est privilégiée, car elle est claire, notamment dans les calculs complexes.

4.4 Puissances et racines

La **puissance** est une multiplication répétée d'un même nombre :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Par exemple, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Les **racines** sont l'opération inverse des puissances :

— La racine carrée $\sqrt{a}$ est le nombre qui multiplié par lui-même donne a. Par exemple, $\sqrt{9} = 3$, car $3 \times 3 = 9$.

— La racine cubique $\sqrt[3]{a}$ est le nombre qui multiplié trois fois par lui-même donne a. Par exemple, $\sqrt[3]{27} = 3$, car $3 \times 3 \times 3 = 27$.

4.5 Identités remarquables et distributivité

Pour simplifier les calculs, quelques formules *magiques* sont très utiles :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \end{aligned}$$

La **distributivité** est une propriété fondamentale qui dit que multiplier une somme revient à multiplier chaque terme puis additionner :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

C'est l'arme secrète pour éviter de se retrouver avec des calculs impossibles à gérer.

4.6 Simplification des fractions

Une fraction peut souvent être simplifiée en divisant le numérateur et le dénominateur par un même nombre appelé *diviseur commun*. Par exemple :

$$\frac{12}{16} = \frac{12 \div 4}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$$

Ici, on remarque que le symbole de division $\div$ est parfois utilisé, mais il est préférable d'écrire les divisions sous forme de fractions, même lorsqu'il s'agit de divisions intermédiaires. Par exemple :

$$\frac{12}{16} = \frac{\frac{12}{4}}{\frac{16}{4}} = \frac{3}{4}$$

5 Les équations et inéquations

5.1 Qu'est-ce qu'une inconnue ?

Une **inconnue** est un nombre que l'on ne connaît pas encore, qu'on cherche à déterminer. En maths, on la note souvent x, y ou z.

5.2 À quoi servent les équations et inéquations ?

Une **équation** est une égalité contenant une ou plusieurs inconnues, que l'on cherche à résoudre, c'est-à-dire trouver les valeurs des inconnues qui rendent l'égalité vraie. Par exemple, dans l'équation :

$$2x + 3 = 7$$

on cherche x tel que cette égalité soit satisfaite.

Une **inéquation** est une inégalité contenant une inconnue. Elle exprime que deux expressions ne sont pas forcément égales, mais qu'une est plus grande ou plus petite que l'autre. Exemple :

$$3x - 4 > 2$$

On cherche les valeurs de x qui vérifient cette condition.

5.3 Règles de rédaction

Quand on écrit une équation, on la pose toujours en alignant bien les égalités, et on résout étape par étape.

Pour résoudre, on isole l'inconnue, souvent en utilisant l'égalité avec zéro : par exemple, transformer

$$2x + 3 = 7$$

en

$$2x + 3 - 7 = 0 \quad \iff \quad 2x - 4 = 0$$

Puis, on utilise la propriété que si un produit est nul, alors au moins un des facteurs est nul :

$$a \times b = 0 \implies a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

5.4 Les équations du premier degré

Une équation du premier degré est une équation où l'inconnue est élevée à la puissance 1 (pas de x^2 ou plus). Exemple simple :

$$3x + 5 = 11$$

On la résout comme suit :

$$3x = 11 - 5 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

5.5 Les inéquations du premier degré

La résolution des inéquations ressemble à celle des équations, avec une précaution importante : - Quand on multiplie ou divise par un nombre négatif, il faut **inverser le sens de l'inégalité**.

Exemple :

$$-2x + 3 > 7$$

On fait :

$$-2x > 7 - 3 = 4$$

Puis, en divisant par -2 (négatif) :

$$x < \frac{4}{-2} = -2$$

Attention, le $>$ devient $<$!

5.6 Valeur absolue et distance

La **valeur absolue** d'un nombre x, notée $|x|$, est sa distance à zéro sur une droite graduée, sans tenir compte du signe. Autrement dit :

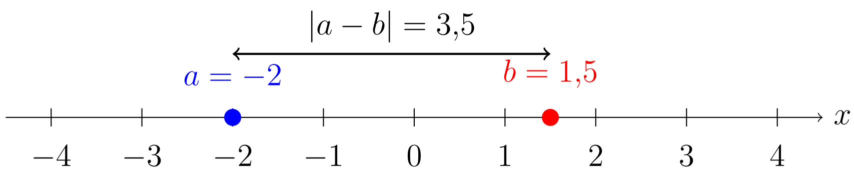
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple : $|3| = 3$ et $|-3| = 3$.

On peut aussi interpréter la valeur absolue comme la distance entre deux nombres a et b :

$$d(a, b) = |a - b|$$

—



6 Les fonctions

6.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Une **fonction** est comme une machine mystérieuse qui, pour chaque *entrée* (un nombre), associe une *sortie* (un autre nombre), et ce de manière **unique**. En d'autres termes, pour chaque valeur que tu donnes à la fonction, elle te donne **une seule** valeur en retour.

Définition : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une règle qui à tout nombre x associe un unique nombre $f(x)$.

6.2 Notation

On note souvent la fonction par une lettre, généralement f, suivie de la variable entre parenthèses :

$$f : x \mapsto f(x)$$

Par exemple, si $f(x) = 2x + 3$, alors à l'entrée $x = 4$, la sortie est $f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11$.

6.3 Exemples de fonctions simples

— **Fonction linéaire** :

$$f(x) = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Exemple : $f(x) = 3x$. On multiplie simplement x par un nombre fixe a.

— **Fonction affine** :

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Exemple : $f(x) = 2x+1$. C'est une translation et une montée dans la pente, comme un avion qui change d'altitude en ligne droite.

— **Fonction carrée** :

$$f(x) = x^2$$

Exemple : $f(3) = 9$. Ici, l'image est toujours positive ou nulle, un peu comme les dégâts collatéraux (toujours présents mais jamais négatifs).

6.4 Domaine

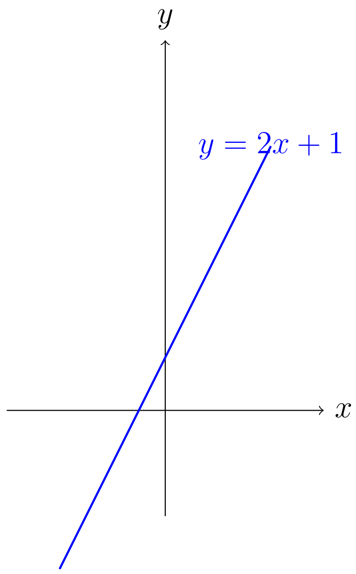
Le **domaine** d'une fonction est l'ensemble des valeurs que l'on peut donner à x (les entrées valides).

Par exemple, pour $f(x) = \frac{1}{x}$, le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car on ne peut pas diviser par zéro).

6.5 Représentation graphique

La fonction peut être représentée par une **courbe** dans un plan muni d'un repère (x, y), où $y = f(x)$.

Par exemple, la fonction affine $f(x) = 2x+1$ est une droite dont la pente est 2, coupant l'axe des ordonnées en 1.



6.6 Pourquoi les fonctions sont-elles importantes ?

Les fonctions modélisent toutes sortes de phénomènes : la trajectoire d'un missile, la température qui varie dans une cabine de pilotage, ou même l'évolution des finances d'une entreprise qui fait faillite. Comprendre les fonctions, c'est comprendre comment les choses changent et interagissent.

7 Analyse des fonctions : tableaux de variations

7.1 But de l'analyse

Étudier une fonction, c'est souvent chercher à savoir où elle **augmente**, **diminue**, ou **reste constante**, et aussi où elle est **positive** ou **négative**.

7.2 Étude du signe d'une fonction

Considérons une fonction simple, par exemple :

$$f(x) = (x - 2)(x + 1)$$

Pour savoir quand $f(x)$ est positive, nulle, ou négative, on regarde le signe de chaque facteur :
$x - 2$ est positif si $x > 2$, négatif sinon
$x + 1$ est positif si $x > -1$, négatif sinon

Ensuite, on étudie le signe du produit en combinant les signes des facteurs :
Si les deux facteurs ont le même signe, le produit est positif
Sinon, il est négatif

7.3 Solutions des équations associées

Les valeurs où $f(x) = 0$ sont les **racines** ou **zéros** de la fonction, ici les solutions de :

$$(x-2)(x+1) = 0$$

Ce qui donne :

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

7.4 Construction du tableau de signes

On construit un tableau en listant ces points critiques (les valeurs importantes) dans l'ordre croissant :

$$-\infty \quad -1 \quad 2 \quad +\infty$$

Puis on étudie le signe de chaque facteur sur chaque intervalle :

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$f(x) = (x-2)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

7.5 Interprétation

Sur $(-\infty, -1)$, les deux facteurs sont négatifs, donc $f(x) > 0$
Sur $(-1, 2)$, un facteur est négatif, l'autre positif, donc $f(x) < 0$
Sur $(2, +\infty)$, les deux facteurs sont positifs, donc $f(x) > 0$

Ainsi, le signe de f change aux points $x = -1$ et $x = 2$.

Conclusion

Les bases mathématiques que nous avons vues ici sont essentielles pour comprendre et progresser dans cette matière. Pour réussir, il est important d'adopter de bonnes habitudes :

- Lire attentivement toutes les définitions et propriétés, sans rien négliger.
- Faire beaucoup d'exercices pour s'entraîner et bien assimiler les notions.
- Revenir régulièrement sur les concepts difficiles pour les maîtriser pleinement.

Les mathématiques demandent de la patience et de la persévérance, mais elles deviennent un vrai terrain de jeu quand on comprend leurs règles. Alors, continuez à travailler sérieusement, soyez curieux, et surtout, n'oubliez pas de vous amuser en découvrant ces GROSSES bases indispensables.