# Spécialité Mathématiques — Terminale

Programme structuré, démonstrations, méthodes et applications

Euzen Mathis

13 août 2025

## Table des matières

# Introduction

Ce document présente, de façon structurée et rigoureuse, les connaissances et compétences attendues en spécialité mathématiques de Terminale (voie générale). Chaque notion est accompagnée d'explications, de démonstrations lorsque pertinent, d'exemples guidés et d'indications d'usage pratique (en résolution de problèmes, en sciences, en informatique et en économie). Les définitions essentielles sont rappelées en notes de bas de page pour permettre une lecture linéaire. [1]

# 1 Analyse

## 1.1 Suites et raisonnement par récurrence

*Objectif.* Comprendre la dynamique de suites (monotonie, majoration, convergence), maîtriser la récurrence et les méthodes de comparaison.

### Définitions et outils

Une *suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. [2] Elle est *croissante* si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n$. [3] Elle est *bornée* si $\exists M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$. [4]

**Théorème 1.1** (Monotone et bornée ⇒ convergence)**.** *Toute suite monotone et bornée converge.*

*Idée de preuve.* La monotonie assure l'existence de la borne suprême (ou infimum) comme valeur d'adhérence unique ; la complétude de $\mathbb{R}$ garantit que cette borne est atteinte comme limite. □

*Méthode* (Récurrence simple). Pour montrer une propriété $P(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$ : **(i)** Initialisation : prouver $P(n_0)$ ; **(ii)** Hérédité : $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ; conclure par récurrence.

*Exemple* (Suite définie par récurrence linéaire). $u_{n+1} = au_n + b$, $u_0 = u$. Si $a \neq 1$, poser $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$, alors $v_{n+1} = av_n$ d'où $v_n = a^n v_0$ et

$$\boxed{u_n = \left(u - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.}$$

*Utilité :* modèles d'ajustement discret, amortissement, intérêts composés.

1. On appelle *définition* l'énoncé qui fixe le sens d'un concept mathématique (ex. : *suite*, *limite*, *variable aléatoire*).
2. Formellement, $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.
3. De même, *décroissante* si $u_{n+1} \leq u_n$. *Monotone* si l'une des deux conditions est vérifiée.
4. On dit aussi *majorée* s'il existe $M$ tel que $u_n \leq M$, *minorée* s'il existe $m$ tel que $u_n \geq m$.

## 1.2 Limites de fonctions, continuité, dérivabilité

### Limites et continuité

**Définition 1.2.** On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.[5]

**Théorème 1.3** (Théorème des valeurs intermédiaires (TVI))**.** *Si $f$ est continue sur $[a, b]$ et $y$ est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

### Dérivation et convexité

**Définition 1.4.** La dérivée $f'(a)$ est la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (si elle existe).[6]

**Théorème 1.5** (Lien signe de la dérivée / variation)**.** *Si $f'$ est positive sur un intervalle, alors $f$ est croissante sur cet intervalle. Si $f''$ existe et $\geq 0$, $f$ est convexe.*

*Exemple* (Tableau de variations et courbe). Soit $f(x) = x^3 - 3x$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, $f''(x) = 6x$. On en déduit le tableau de variations et les points d'inflexion. La figure 1 illustre la courbe.

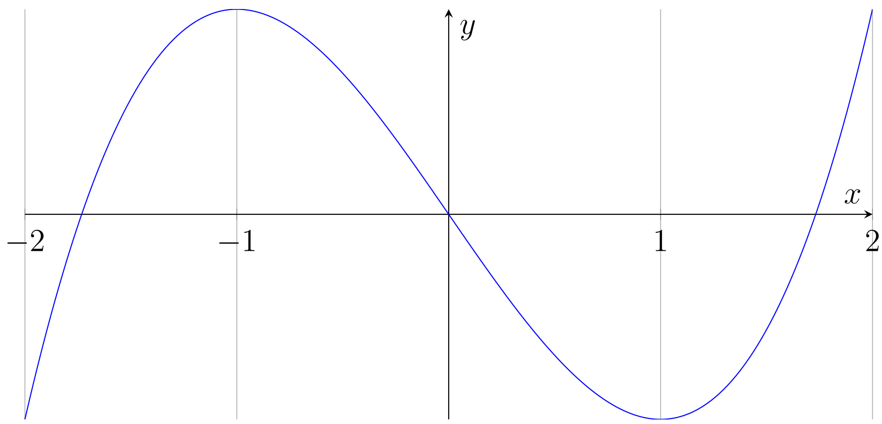


FIGURE 1 – Graphique de $f(x) = x^3 - 3x$ et étude des variations.

## 1.3 Fonction logarithme népérien et exponentielle

**Définition 1.6.** La fonction exp est définie comme la solution de $y' = y$, $y(0) = 1$ ; le logarithme ln est sa réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$.[7]

**Théorème 1.7** (Limites usuelles)**.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

*Exemple* (Modélisation). Croissance continue : $N'(t) = rN(t) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{rt}$. *Utilité :* démographie, radioactivité, intérêt continu.

5. La *continuité* en $a$ signifie $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
6. Une fonction est *convexe* sur $I$ si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
7. $\forall x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ; $\ln(x^a) = a \ln x$ ; $\exp(\ln x) = x$.

### 1.4 Primitives, équations différentielles et calcul intégral

#### Primitives et intégrale

**Définition 1.8.** Une *primitive* de $f$ sur $I$ est une fonction $F$ telle que $F' = f$ sur $I$.[8]

**Théorème 1.9** (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive, et pour toute primitive $G$ : $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.*

*Méthode* (Intégration par parties)*.* Si $u, v$ sont de classe $C^1$ : $\displaystyle\int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv'$.

*Exemple* (Aire et moyenne)*.* Aire entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0, 1]$ : $\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$. Valeur moyenne de $f$ sur $[a, b]$ : $\dfrac{1}{b-a} \int_a^b f$.

#### Équations différentielles du premier ordre

*Méthode* (Linéaire $y' + ay = b$)*.* La solution générale est $y(x) = Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$. Avec $y(x_0) = y_0$, on obtient $C = (y_0 - \frac{b}{a})e^{ax_0}$.

*Exemple* (Réponse à une entrée constante)*.* $y' + 2y = 6$, $y(0) = 0 \Rightarrow y(x) = 3\,(1 - e^{-2x})$. *Utilité :* modèles de détente, circuits RC, cinétique chimique.

## 2 Algèbre et géométrie

### 2.1 Géométrie dans l'espace : droites, plans, produit scalaire

**Définition 2.1.** Le *produit scalaire* de $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$.[9]

**Proposition 2.2** (Distance point-plan)**.** *Si $P :\ ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$, alors $d(M_0, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.*

*Exemple* (Intersection droite-plan)*.* Droite $D$ : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$, Plan $P :\ x + y + z = 4$.
Chercher $t$ tel que $1 + t + 2 - 2t + 3 + t = 4 \Rightarrow 6 = 4$, impossible : $D \parallel P$.

8. L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire algébrique sous la courbe de $f$ sur $[a, b]$ lorsque $f$ est continue.
9. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ si $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$.

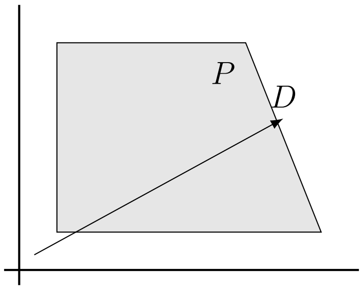


FIGURE 2 – Illustration d'une droite $D$ et d'un plan $P$ parallèles.

### 2.2 Représentations paramétriques et équations cartésiennes

*Méthode.* Pour une droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ : $x = x_A + u_1 t,\ y = y_A + u_2 t,\ z = z_A + u_3 t$.

### 2.3 Combinatoire et dénombrement

**Définition 2.3.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, le nombre de combinaisons est $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.[10]

**Proposition 2.4** (Identité du triangle de Pascal). $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

| Objet | Ordre | Formule |
|---|---|---|
| Arrangements | Oui, sans répétition | $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ |
| Permutations | Oui, tous | $n!$ |
| Combinaisons | Non | $\binom{n}{k}$ |

TABLE 1 – Objets de dénombrement usuels.

*Exemple* (Tableau récapitulatif).

# 3 Probabilités

### 3.1 Épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli et loi binomiale

**Définition 3.1.** Un *schéma de Bernoulli* est une suite d'épreuves identiques et indépendantes à deux issues (succès/échec) avec probabilité de succès $p$.[11]

10. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ avec $0! = 1$.
11. Une *variable aléatoire* $X$ associe à chaque issue un nombre réel ; sa *loi* donne les probabilités.

**Proposition 3.2** (Loi binomiale)**.** *Si* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$*, alors* $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$*,* $\mathbb{E}[X] = np$*,* $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$*.*

*Exemple* (Calcul d'une probabilité). Sur $n = 10$ essais, $p = 0{,}3$, la probabilité d'au plus 2 succès est $\sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} 0{,}3^k 0{,}7^{10-k}$ (valeur numérique à la calculatrice).

## 3.2 Variables aléatoires réelles : espérance et variance

**Définition 3.3.** Pour une variable discrète $X$ de loi $(x_i, p_i)$ : $\mathbb{E}[X] = \sum x_i p_i$ ; $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.[12]

**Théorème 3.4** (Linéarité de l'espérance)**.** *Pour* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b$*.*

## 3.3 Lois usuelles et approximation

**Proposition 3.5** (Approximation normale, idée)**.** *Si* $n$ *grand et* $p$ *ni trop proche de* 0 *ni de* 1*,* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *est approximée par* $\mathcal{N}(np, np(1-p))$*.*[13]

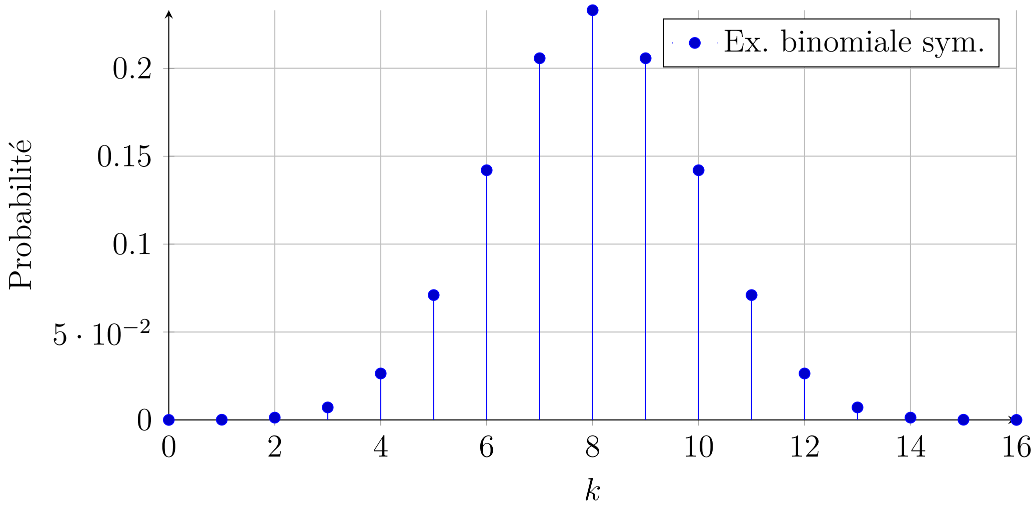


FIGURE 3 – Exemple de forme d'une loi binomiale symétrique (valeurs illustratives).

# 4 Algorithmique et programmation

## 4.1 Principes et structures de données minimales

**Définition 4.1.** Un *algorithme* est une suite finie d'instructions non ambiguës.[14]

12. L'écart-type est $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

13. La correction de continuité améliore l'approximation : $P(X \le k) \approx P\left(Z \le \frac{k+0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

14. Une *liste* est une collection ordonnée d'éléments ; une *complexité* mesure le coût en temps/mémoire.

*Méthode* (Parcours, recherche, simulation). — Parcours séquentiel, recherche d'un maximum/minimum

— Simulation d'une loi discrète (ex. : binomiale)

— Dichotomie pour une équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ si $f(a)f(b) < 0$

*Exemple* (Pseudo-code & Python). **Dichotomie** : `while (b-a)>eps: m=(a+b)/2; if f(a)*f(m)<=0: b=m else: a=m`.

**Python** :

```
def dichotomie(f, a, b, eps=1e-6):
    fa, fb = f(a), f(b)
    assert fa*fb <= 0, "Changer [a,b] : f(a) et f(b) de signes
       opposes."
    while (b - a) > eps:
        m = 0.5 * (a + b)
        fm = f(m)
        if fa * fm <= 0:
            b, fb = m, fm
        else:
            a, fa = m, fm
    return 0.5 * (a + b)
```

*Utilité :* résolution numérique quand la forme exacte n'est pas accessible.

# 5 Méthodes transversales et entraînement

## 5.1 Lecture de courbes et interprétation

*Méthode.* Traduire un énoncé en objets mathématiques identifiés : type de variable, loi, équation, intervalle d'étude ; isoler les inconnues ; choisir l'outil (récurrence, dérivation, intégration, dénombrement).

### 5.2 Tableaux et synthèses

| Notion | Outil | Application typique |
|---|---|---|
| Monotonie | Étude du signe de $f'$ | Optimisation, extremums locaux |
| Convexité | Signe de $f''$ | Points d'inflexion, inégalités |
| Intégrale | Aires, moyennes | Probabilités continues, physiques |
| Binomiale | Dénombrement | Tests, fiabilité |
| Paramétrique | Vecteur directeur | Intersection, parallélisme |

TABLE 2 – Repères rapides : notions $\rightarrow$ outils $\rightarrow$ usages.

## Conclusion

Les chapitres ci-dessus couvrent les axes majeurs de la spécialité mathématiques en Terminale. Chaque section a été pensée pour articuler *concepts*, *méthodes*, *preuves essentielles* et *usages*. Pour approfondir : compléter par des séries d'exercices progressifs et une banque d'exemples concrets (sciences physiques, économie, informatique).