Prélude Mathématique pour la Première

Consolidation des bases et ouverture sur les notions clés de l'année de première

Mathis EUZEN

9 août 2025

Table des matières

Introduction

L'année de **Première** en France marque une étape clé dans l'apprentissage des mathématiques au lycée. Le programme aborde à la fois des notions déjà vues au collège et en Seconde, mais avec une approche plus **rigoureuse** et **approfondie**, ainsi que des chapitres entièrement nouveaux qui ouvriront la voie aux mathématiques de Terminale. Parmi les thèmes principaux du programme de Première, on retrouve :

- L'**analyse** : étude des fonctions, dérivation, variations, optimisation.
- Les **fonctions polynômes**, notamment le *second degré*, qui servent de base à de nombreuses applications.
- Les **fonctions exponentielles** et leurs propriétés.
- Les **statistiques et probabilités**, avec une introduction aux lois discrètes et continues.
- Les premiers éléments de **géométrie analytique** dans le plan.

L'objectif de ce document n'est pas de proposer un *cours exhaustif et parfait*, mais plutôt de :

- Consolider les **bases essentielles** vues en Seconde.
- Introduire progressivement les nouvelles notions que vous rencontrerez en Première.
- Donner des explications claires, des exemples, et des méthodes que vous pourrez réutiliser tout au long de l'année.

Il s'agit donc d'un **outil de préparation** pour aborder sereinement l'année de Première, et non d'un manuel complet. Certaines notions seront volontairement simplifiées pour favoriser la compréhension, quitte à être précisées ou corrigées plus formellement plus tard.

Définitions

1. Polynôme

Un **polynôme** est une expression mathématique formée par la somme de **monômes**, c'est-à-dire des produits d'un **coefficient** et d'une **puissance entière positive ou nulle** d'une variable. Sous forme générale :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec :

- $n \in \mathbb{N}$: le **degré** du polynôme (l'exposant le plus grand avec coefficient non nul),
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) : les **coefficients**,
- $a_n \neq 0$: condition pour que le degré soit bien n.

Exemple : Un **polynôme du second degré** est bien la somme de plusieurs **monômes** :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

On observe :

- le monôme ax^2 de **puissance entière** égale à 2,
- le monôme bx de **puissance entière** égale à 1,
- le monôme constant c de **puissance entière** égale à 0.

Ce polynôme est de **degré 2** car le plus grand exposant est 2 (et $a \neq 0$).

1 Les équations et fonctions du second degré

Une **équation du second degré** s'écrit :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{où} \quad a \neq 0$$

Le **polynôme**[(1)] **associé** est :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sa courbe représentative est une **parabole** dans le plan cartésien.

Résolution avec le discriminant

On définit le **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Cas possibles

— $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— $\Delta = 0$: une racine réelle double

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

— $\Delta < 0$:

— $\Delta < 0$: aucune racine réelle $\mathbb{R}$, mais deux racines complexes conjuguées appartenant à $\mathbb{C}$ (plus de détails en Terminale)

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Forme canonique

Tout polynôme du second degré peut s'écrire :

$$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$$

où :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

Comment l'obtenir ?

Partons de :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On met a en facteur dans les termes en x :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

On complète le carré à l'intérieur :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

On obtient alors :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

Soit, en réécrivant :

$$f(x) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Ainsi :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = c - \frac{b^2}{4a}$$

et on retrouve :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Interprétation géométrique

- Le point $S(\alpha, \beta)$ est le **sommet** de la parabole.
- α : abscisse du sommet (axe de symétrie de la parabole).
- β : ordonnée du sommet (minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$).

Intérêts de la forme canonique

- Lecture directe des variations sans calcul de dérivée.
- Repérage immédiat du sommet : optimisation rapide.
- Compréhension visuelle : distance au sommet dans $f(x)$.

Tableau de variation sans dérivée

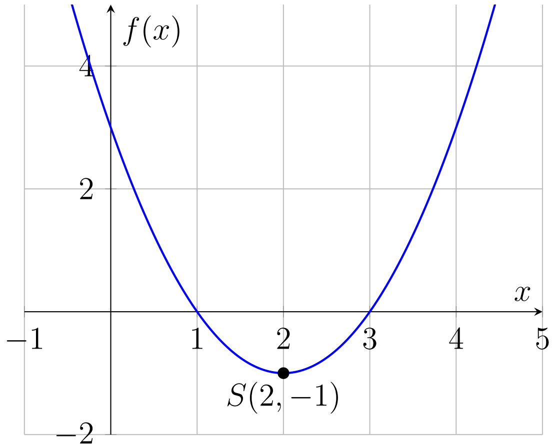
On sait que :
- Si $a > 0$, la fonction décroît jusqu'au sommet puis croît.
- Si $a < 0$, la fonction croît jusqu'au sommet puis décroît.

Exemple

Pour $f(x) = x^2 - 4x + 3$, on a $\alpha = 2$, $\beta = -1$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	min -1	$\searrow$

Courbe représentative



Pourquoi c'est important

- **Applications réelles** : trajectoires, optimisation, calculs physiques.
- **Préparation à la suite** : en Première, on utilisera la dérivée pour affiner ces tableaux.
- **Lien avec les complexes** : compréhension des équations sans solutions réelles.

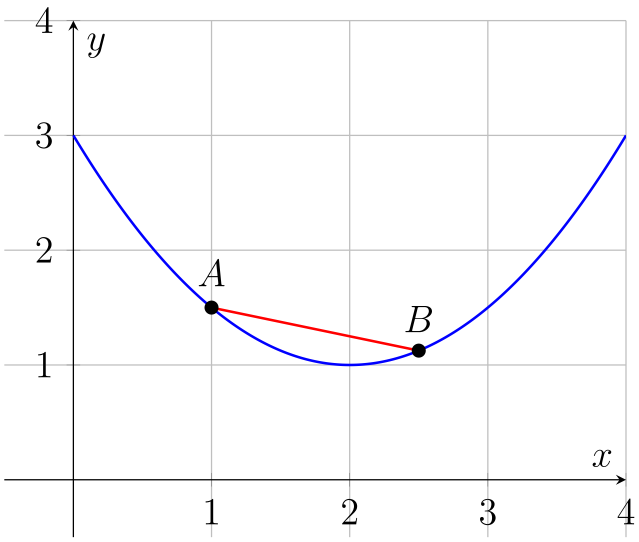
2 Introduction à la dérivation

Idée générale

La dérivée d'une fonction en un point permet de connaître **le comportement instantané de la courbe à cet endroit précis**. Elle donne la pente de la **tangente** à la courbe en ce point, et donc l'information **locale**, contrairement à une étude globale qui regarde la courbe dans son ensemble.

De la corde à la tangente

Considérons une fonction f et deux points $A(x, f(x))$ et $B(x+h, f(x+h))$ sur sa courbe.



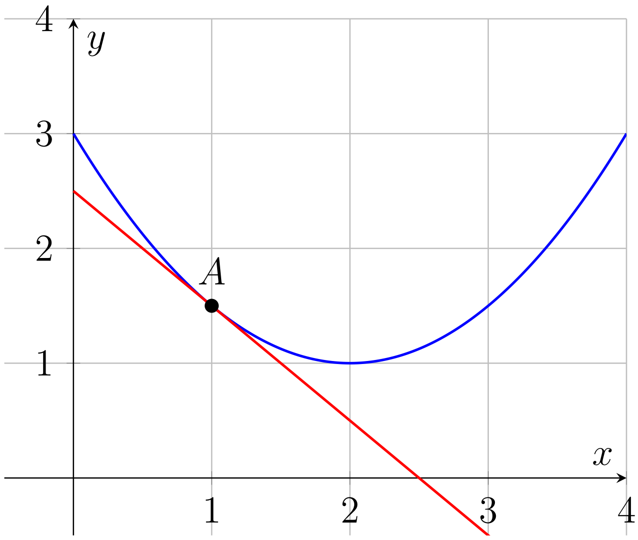
La **pente de la corde** AB est :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cette pente donne une information **globale** entre deux points de la courbe : elle « moyenne » le comportement.

Passage à la tangente : la limite

Si l'on rapproche B de A (en faisant *tendre* h vers 0, c'est-à-dire en prenant h aussi petit que possible, aussi proche de 0 que l'on souhaite.), la corde devient une **tangente** :



La **limite** de la pente de la corde quand $h \to 0$ est la pente de la tangente, appelée **dérivée** :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interprétation locale

— La dérivée décrit le comportement **au voisinage immédiat** du point x.
— Elle ne donne pas la forme globale de la courbe, mais seulement la pente instantanée à cet endroit.
— Pour obtenir une vision globale, on étudie la dérivée sur tout l'intervalle et on recompose l'information.

Résumé

— **Globale** : pente de la corde = comparaison entre deux points éloignés.
— **Locale** : pente de la tangente = comportement instantané en un seul point.
— La limite permet de « faire coïncider » ces deux points, pour passer du global au local.

À quoi sert la dérivée ?

La dérivée est un outil fondamental en mathématiques car elle permet de :
— **Trouver les variations d'une fonction** : savoir où elle croît, où elle décroît.
— **Repérer les extremums locaux** : maximum ou minimum en un point.
— **Étudier la vitesse de changement** : en physique, c'est la vitesse instantanée ; en économie, c'est la variation d'un coût ou d'un bénéfice.
— **Tracer plus précisément une courbe** : pente et comportement local.

Formules de dérivation usuelles à connaître

Fonction $f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

Règles de calcul de dérivées

— **Somme / différence** : $(u \pm v)' = u' \pm v'$
— **Produit** : $(uv)' = u'v + uv'$
— **Quotient** : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

Exemples simples

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$
$$f'(x) = 6x - 5 \quad (\text{domaine : } \mathbb{R})$$
2. $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$
$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \quad (\text{domaine : }]0, +\infty[\backslash \{0\})$$
3. $p(x) = (x^2 + 1)(3x - 4)$ (règle du produit)
$$p'(x) = (2x)(3x - 4) + (x^2 + 1)(3)$$
4. $q(x) = \frac{\sin x}{x}$ (règle du quotient)
$$q'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} \quad (\text{domaine : } \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

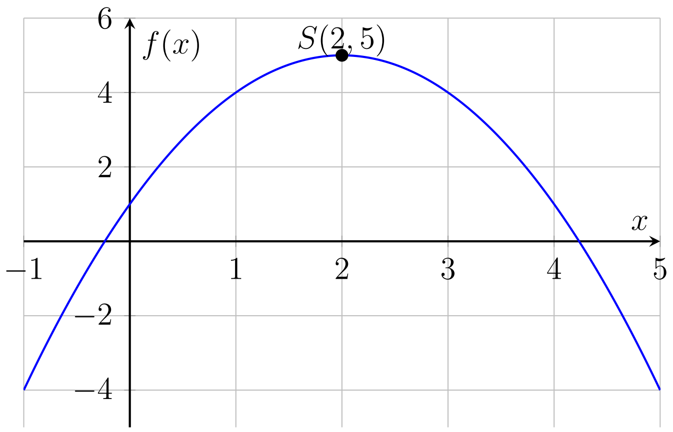
Lien avec le tableau de variation

— On étudie le signe de $f'(x)$ sur le domaine de f :
  — Si $f'(x) > 0$, f est **croissante**.
  — Si $f'(x) < 0$, f est **décroissante**.
  — Si $f'(x) = 0$, le point est **stationnaire** (maximum, minimum ou point d'inflexion).
— En combinant cette information avec les limites aux bornes du domaine, on construit le **tableau de variations**.

Exemple complet : étude de la fonction $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

1. Expression de la fonction

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$



2. Dérivée (avec la notation utilisée en physique, $\frac{d}{dx}$ qui est exactement la meme chose que f').

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(-x^2 + 4x + 1) = -2x + 4$$

3. Étude du signe de la dérivée Résolvons $f'(x) = 0$:

$$-2x + 4 = 0 \implies x = 2$$

- Pour $x < 2$, $f'(x) > 0$. - Pour $x > 2$, $f'(x) < 0$.

4. Valeur de la fonction au point critique

$$f(2) = 5$$

5. Étude aux bornes

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$

6. Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

7. Conclusion La fonction est croissante puis décroissante avec un maximum local en $x = 2$.

3 La fonction exponentielle

Une histoire de population malade

Imaginons qu'une maladie se propage dans une ville. Chaque jour :
- Le nombre de malades augmente.
- L'augmentation est **proportionnelle** au nombre de malades déjà présents.

Par exemple :
- Jour 0 : 100 malades.
- Jour 1 : 10% de plus → 110 malades.
- Jour 2 : encore 10% de plus, mais cette fois sur 110, donc 121 malades.

On remarque que **plus il y a de malades, plus la hausse est rapide**. Ce type de croissance est appelé **croissance exponentielle**.

Du calcul par étapes à la croissance continue

Si on applique une augmentation de 100% par an :
- en 1 étape (fin d'année) : on double,
- en 2 étapes (tous les 6 mois) : on multiplie par $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$,
- en 4 étapes (tous les 3 mois) : on multiplie par $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$,
- etc.

En augmentant la fréquence des étapes de croissance, on se rapproche d'un nombre particulier :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Le nombre d'Euler e

$$e \approx 2,718281828\dots$$

C'est un nombre **irrationnel** (il ne s'écrit pas comme une fraction exacte) et **transcendant** (il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers). Il intervient naturellement dans toutes les situations de croissance continue (population, intérêt bancaire, radioactivité...).

Définition de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie par :

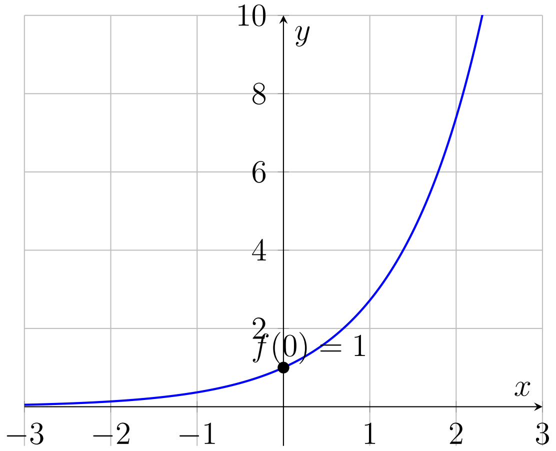
$$\exp(x) = e^x$$

où $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$
- $\exp(x) > 0$ pour tout x
- Sa dérivée est elle-même : $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

Graphique de $f(x) = e^x$



4 Probabilités et Statistiques

5 Suites

6 Produit scalaire

7 Trigonometrie