02

TURUNAN DAN INTEGRAL

A. Turunan Fungsi

Definisi

Jika fungsi y = f(x) maka turunan fungsi y terhadap x ditulis dengan y'(x) atau f '(x) dan didefinisikan sebagai:

$$y'(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Nilai fungsi turunan untuk x = a adalah:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

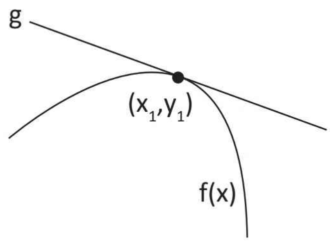
Rumus-rumus Turunan Fungsi

1. $y = a.x^n \rightarrow y' = a.n.\ x^{n-1}$
2. $y = a.U^n \rightarrow y' = (a.n.\ U^{n-1}).\ U'$
3. $y = \sin U \rightarrow y' = (\cos U).\ U'$
4. $y = \cos U \rightarrow y' = (-\sin U).\ U'$
5. $y = \tan U \rightarrow y' = (\sec^2 U).\ U'$
6. $y = \text{cotan } U \rightarrow y' = (-\text{cosec}^2 U).\ U'$
7. $y = \sec U \rightarrow y' = (\sec U\ .\ \tan U).\ U'$
8. $y = \text{cosec } U \rightarrow y' = (-\text{cosec} U\ .\text{cotan} U).\ U'$

Sifat-sifat Turunan Fungsi

1. $y = c \rightarrow y' = 0$
2. $y = c.\ U \rightarrow y' = c.\ U'$
3. $y = U \pm V \rightarrow y = U' \pm V'$
4. $y = U.V \rightarrow y = U'.V + V'.U$
5. $y = \frac{U}{V} \rightarrow y' = \frac{U'.V - V'.U}{V^2}$

Gradien Garis Singgung



Titik (x_1,y_1) adalah titik singgung garis g dengan kurva y = f (x).

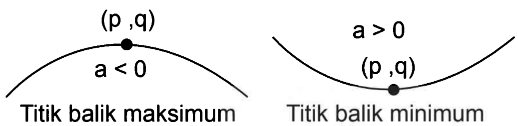
Gradien (kemiringan) garis singgung kurva y = f (x) adalah m = f '(x_1) maka persamaan garis singgungnya:

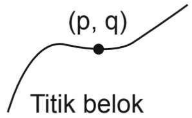
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Fungsi Naik dan Turun

Interval fungsi naik dan fungsi turun, yaitu jika fungsi f '(x) > 0 maka fungsi naik, sebaliknya jika f '(x) < 0 maka fungsi akan turun.

Titik Stasioner





Fungsi y = f(x) mengalami stasioner jika $f'(x) = 0$ dan terdapat titik-titik stasioner. Jenis-jenis titik stasioner:

1. Titik balik maksimum

   Syarat: $f'(x) = 0$ dan $f''(x) < 0$
2. Titik balik minimum

   Syarat: $f'(x) = 0$ dan $f''(x) > 0$
3. Titik belok horizontal

   Syarat: $f'(x) = 0$ dan $f''(x) = 0$

B. Integral

Definisi

Integral merupakan antiturunan (antidifferensial) dan secara umum dapat dirumuskan menjadi:

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c$$

Sifat-sifat Integral

1. $\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx$
2. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
4. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
5. $\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx$
6. $\int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
7. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Rumus Dasar Integral

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
3. $\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$
4. $\int k\,dx = kx + c$
5. $\int \frac{1}{x}\,dx = \text{Ln}|x| + c$
6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\text{Ln}\,a} + c$
7. $\int e^x\,dx = e^x + c$

Teknik Integral

1. **Metode substitusi**

   Misalkan, u = g(x) dengan g(x) merupakan fungsi yang mempunyai turunan maka:

   $$\int f(g(x)).\,g'(x) = \int f(u).\,du = F(u) + c$$

   Dimana F(u) adalah anti-turunan dari f(u).
2. **Teknik parsial**

   Teknik parsial biasanya digunakan untuk mencari integral suatu fungsi yang tidak dapat dicari menggunakan teknik substitusi.

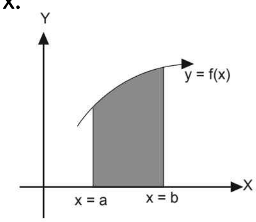
   Jika u = f(x) dan v = g(x) maka berlaku rumus:

   $$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

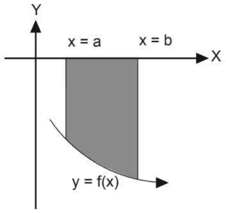
Aplikasi Integral

a. **Menghitung Luas daerah**

Luas daerah yang dibatasi kurva dan sumbu x:

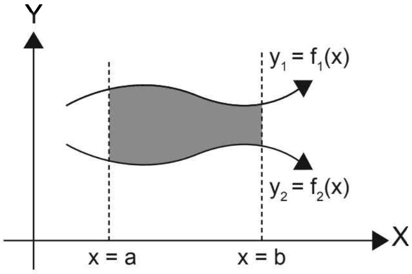


$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$



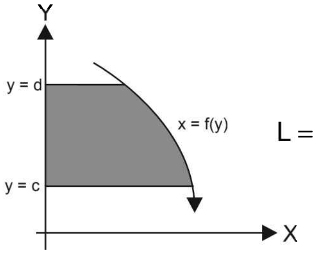
$$L = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Luas daerah yang dibatasi dua buah kurva terhadap batas sumbu x:

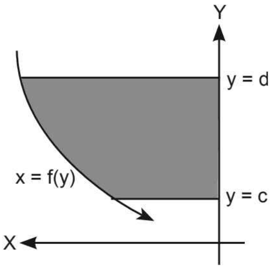


$$L = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

Luas daerah yang dibatasi kurva dan sumbu y:



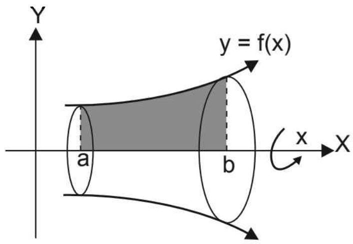
$$L = \int_c^d f(y)\,dy$$



$$L = -\int_c^d f(x)dx = \left|\int_c^d f(x)dx\right|$$

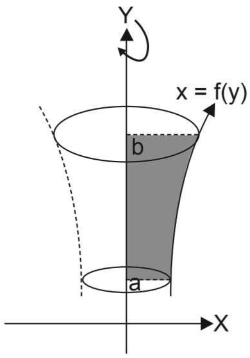
b. Menghitung Volume Benda Putar

Volume benda putar terhadap sumbu x:



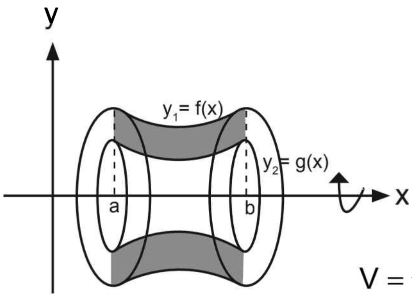
$$V = \pi\int_a^b (f(y))^2\,dx$$

Volume benda putar terhadap sumbu y:

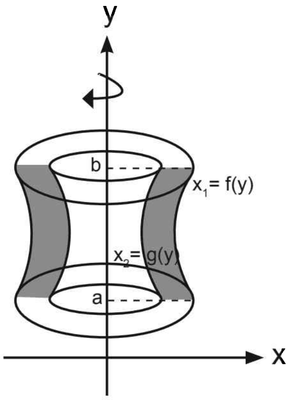


$$V = \pi\int_a^b (f(y))^2\,dx$$

Volume daerah yang dibatasi dua buah kurva, yaitu:



$$V = \pi\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx$$



$$V = \pi\int_a^b (x_1^2 - x_2^2)\,dy$$

1. **Soal Ujian SNMPTN**
Diketahui fungsi *f* dan *g* dengan $f(x) = x^2 + 4x + 1$ dan $g'(x) = \sqrt{10 - x^2}$ dengan $g'(x)$ menyatakan turunan pertama fungsi g. Nilai turunan pertama g o f di x = 0 adalah....
(A) 3
(B) 6
(C) 9
(D) 12
(E) 15

Pembahasan:

$f(x) = x^2 + 4x + 1$

$f'(x) = 2x + 4$

$g'(x) = \sqrt{10 - x^2}$

Maka:

$(g \circ f)'(x) = f'(x) \,.\, g'(f(x))$

$= (2x + 4)(\sqrt{10 - (x^2 + 4x + 1)^2})$

$(g \circ f)'(0) = (2.0 + 4)\sqrt{10 - (1)^2}$

$= 4 \,.\, 3 = 12$

Jawaban: D

2. **Soal Ujian SNMPTN**

$$15\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx = ...$$

(A) 18 (D) 24
(B) 20 (E) 26
(C) 22

Pembahasan:

$$= 15\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx$$

Gunakan integral parsial.
Misalkan:

$u = x \qquad dv = \sqrt{x-2}$

$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}$

$= u.v - \int v.du$

$$= 15\left[x\left(\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right) - \int \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\,dx\right]$$

$$= 15\left[\frac{2}{3}x(x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x-2)^{\frac{5}{2}}\right]_2^3$$

$$= 15\left[(\frac{2}{3}3(3-2)^{\frac{3}{2}}) - (\frac{2}{3}3(2-2)^{\frac{3}{2}})\right] - \left[\left(\frac{4}{15}(3-2)^{\frac{5}{2}}\right) - \left(\frac{4}{15}(2-2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]$$

$$= 15\left[(2-0) - \left(\frac{4}{15} + 0\right)\right]$$

$$= 15\left[2 - \frac{4}{15}\right] = 15\left[\frac{26}{15}\right] = 26$$

Jawaban: E

3. **Soal Ujian SNMPTN**
Jika pada integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ disubstitusikan $\sqrt{x} = \sin y$ maka menghasilkan....

(A) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 x\ dx$

(B) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}dy$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\ dx$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y\ dy$

(E) $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x$

Pembahasan:

Step 1: Mencari nilai dx

$$\sqrt{x} = \sin y$$
$$x = \sin^2 y$$
$$\frac{dx}{dy} = 2\sin y \cdot \cos y$$
$$dx = 2\sin y \cdot \cos y \, dy$$

Step 2: Mencari batas antara x = 0 dan

x = $\frac{1}{2}$

Untuk x = 0

$$\sqrt{x} = \sin y$$
$$0 = \sin y$$
$$y = 0$$

Untuk x = $\frac{1}{2}$

$$\sqrt{x} = \sin y$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sin y$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin y$$
$$y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

Step 3: Mencari hasil substitusi integral

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ **ke** $\sqrt{x} = \sin y$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{1-x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} 2\sin y \cos y \; dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\sqrt{\cos^2 y}} 2\sin y \cos y \; dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y} 2\sin y \cos y \; dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y \; dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x$$

Jawaban: C