BAB 1 EKSPONEN DAN LOGARITMA

CATATAN:

Untuk Pendalaman Materi, silahkan buka kembali pada materi EKSPONEN DAN LOGARITMA kelompok TKPA Matematika Dasar. Khusus pada bagian ini sifatnya hanya pengulangan dan memantapan dari materi yang sudah diberikan sebelumnya.

A Persamaan Eksponen

1. Fungsi Eksponen (Pangkat)

Bilangan berpangkat yang pangkatnya berbentuk fungsi (memuat variabel), maka bentuk tersebut dinamakan fungsi eksponen.

Bentuk umum: $f(x) = a^{g(x)}$

dengan a = bilangan pokok, a> 0, dan $a \neq 1$, g(x) = pangkat atau eksponen.

Tidak menutup kemungkinan bilangan pokok dari fungsi eksponen juga berbentuk fungsi, sehingga bentuknya menjadi $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

2 Persamaan Eksponen

a. Jika $a^{f(x)} = a^p$ $(a > 0$ dan $a \neq 1)$, maka $f(x) = p$

b. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0$ dan $a \neq 1)$, maka $f(x) = g(x)$

c. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ $(a > 0$ dan $a \neq 1$, $b > 0$ dan $b \neq 0)$, maka $f(x) = 0$

d. Jika $\{h(x)\}^{f(x)} = \{h(x)\}^{g(x)}$, maka kemungkinannya adalah:

1) $f(x) = g(x)$
2) $h(x) = 1$
3) $h(x) = 0$ jika $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif
4) $h(x) = -1$ jika $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya genap.

e. Jika $A\{a^{f(x)}\}^2 + B\{a^{f(x)}\} + C = 0$ $(a > 0$ dan $a \neq 1$, $A, B, C \in$ real dan $A \neq 0)$, maka ditentukan dengan mengubah persamaan eksponen ke dalam persamaan kuadrat.

3. Grafik Eksponen

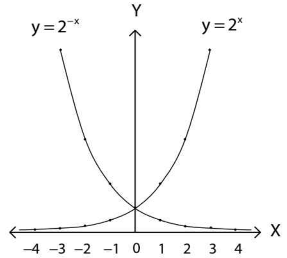
Contoh grafik fungsi eksponen:

a. Untuk bilangan pokok a > 1

Fungsi f(x) = 2^x dan f(x) = 2^{-x} dengan bantuan tabel adalah:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$y = 2^{-x}$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Grafik fungsi f(x) = 2^x dan f(x) = 2^{-x} adalah:

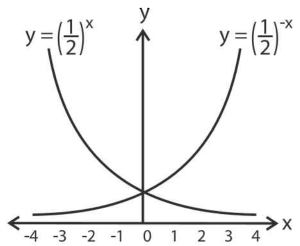


b. Untuk bilangan pokok 0 < a < 1

Fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ dengan bantuan

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ adalah:



Sifat-sifat grafik fungsi eksponen adalah:

– Grafik selalu berada di atas sumbu X.
– Grafik eksponen $f(x) = a^x$ selalu melalui titik (0, 1).
– Grafik fungsi eksponen dengan bilangan dasar a >1 disebut fungsi monoton naik, karena untuk setiap $x_2 > x_1$ maka $f(x_2) > f(x_1)$, sedangkan untuk 0 < a < 1 disebut fungsi monoton turun karena untuk setiap $x_2 > x_1$ maka $f(x_2) < f(x_1)$.

- Fungsi eksponen merupakan fungsi satu-satu, sebab jika $f(x_2)=f(x_1)$ maka $x_2=x_1$.
- Nilai fungsi eksponen selalu positif untuk setiap x bilangan real.
- Grafik $f(x) = a^x$ sama dengan grafik $f(x) = \frac{1}{a}^{-x}$ begitu juga grafik $f(x) = a^{-x}$ sama dengan grafik $f(x) = \frac{1}{a}^{x}$.

3. Pertidaksamaan Eksponen

Sifat Fungsi Eksponen	Keterangan
Monoton naik $(a>1)$	Jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, maka $f(x) \geq g(x)$ Jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$, maka $f(x) \leq g(x)$
Monoton turun $(0<a<1)$	Jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, maka $f(x) \leq g(x)$ Jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$, maka $f(x) \geq g(x)$

B Persamaan Logaritma

1. Fungsi Logaritma

Bentuk logaritma yang numerusnya adalah fungsi (memuat variabel), dinamakan fungsi logaritma.

Bentuk umum: $^{a}\log f(x)$

dengan a = bilangan pokok, a> 0, a≠1, f(x) = numerus, x = hasil logaritma, x > 0.

Tidak menutup kemungkinan bilangan pokoknya juga mengandung variabel, sehingga bentuk fungsi logaritmanya:

$^{f(x)}\log g(x)$

2. Persamaan Logaritma

a. Jika $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$, maka $f(x)=p$ dengan $f(x)>0$

b. Jika $^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$ (dengan $a \neq b$), maka $f(x)=1$

c. Jika $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x)=g(x)$ dengan f(x) dan g(x) keduanya harus positif

d. Jika $^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x)=g(x)$ dengan f(x) dan g(x) keduanya harus positif serta $h(x)>1$ dan $h(x) \neq 1$

e. $A\left({}^{a}\log x\right)^2 + B\left({}^{a}\log x\right) + C = 0$ $(a>0$ dan $a \neq 1$, $A,B,C \in$ real dan $A \neq 0)$, maka ditentukan dengan mengubah persamaan logaritma ke dalam persamaan kuadrat.

3. Grafik Fungsi Logaritma

Contoh grafik fungsi logaritma:

a) Untuk bilangan pokok a > 1

Fungsi $f(x) = {}^{2}\log$ dengan bantuan tabel adalah:

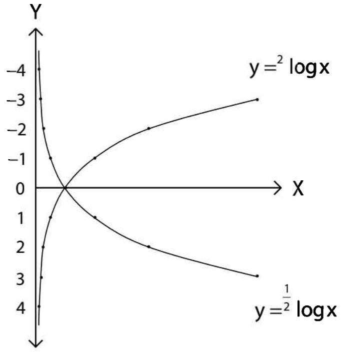
x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$y = {}^{2}\log x$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

b) Untuk bilangan pokok 0 < a < 1

Fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ dengan bantuan tabel adalah:

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4

Grafik fungsi $f(x) = {}^{2}\log x$ dan $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ adalah:



Sifat-sifat grafik fungsi logaritma:
- Grafik selalu berada di sebelah kanan sumbu Y.
- Grafik selalu melalui titik (1,0).
- Grafik fungsi logaritma dengan bilangan dasar a > 1 disebut fungsi monoton naik, sedangkan untuk 0 < a < 1 disebut fungsi monoton turun
- Fungsi logaritma merupakan fungsi satu-satu.

4. Pertidaksamaan Logaritma

Sifat Fungsi Logaritma	Keterangan
Monoton naik $(a>1)$	Jika $^{a}\log f(x) \geq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \geq g(x)$; $f(x), g(x) > 0$ Jika $^{a}\log f(x) \leq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \leq g(x)$; $f(x), g(x) > 0$
Monoton turun $(0<a<1)$	Jika $^{a}\log f(x) \geq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \leq g(x)$; $f(x), g(x) > 0$ Jika $^{a}\log f(x) \leq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \geq g(x)$; $f(x), g(x) > 0$

C Aplikasi Fungsi Eksponen dan Logaritma

1. Aplikasi Fungsi Eksponen

a) Fungsi pertumbuhan

$$M_n = M_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$$

b) Fungsi peluruhan

$$\boxed{M_n = M_0\left(1-\frac{i}{100}\right)^t}$$

dengan:
M_n = total jumlah uang di akhir tahun
M_n = modal awal
t = periode waktu
i = bunga

2 Aplikasi Fungsi Logaritma
Menentukan taraf intensitas bunyi:

$$\boxed{D = 10.\log\frac{I}{I_0}}$$

dengan:
D = taraf intensitas bunyi (skala desibel)
I = intensitas bunyi (satuan watt/m^2)
I_0 = intensitas bunyi minimum yang bisa didengar orang sehat, yaitu $1{,}0\times10^{-12}$

Rumus Praktis

(i) $\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{a\,.\,b}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

(ii) $p^{ax+b}+p^{c-ax}\Rightarrow x_1+x_2=\frac{c-b}{a}$

(iii) $a\,.\,p^{2x}+b\,.\,p^x+c=0\Rightarrow x_1+x_2={}^p\log\frac{c}{a}$

(iv) $a\left(p^{mx}\right)^2+b\left(p^{mx}\right)+c=0\Rightarrow x_1+x_2=\frac{{}^p\log\frac{c}{a}}{m}$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Grafik $y=3^{x+1}-\left(\frac{1}{9}\right)^x$ berada di bawah grafik $y=3^x+1$ jika ....

A. $0<x<1$ D. $x>3$
B. $x>1$ E. $1<x<3$
C. $x<0$

Pembahasan SMART:

$y_1=3^{x+1}-\left(\frac{1}{9}\right)^x$ di bawah $y_2=3^x+1$

Artinya:

$y_2-y_1>0$

$\Rightarrow\left(3^x+1\right)-\left(3^{x+1}-\left(\frac{1}{9}\right)^x\right)>0$

$\Rightarrow\left(3^x+1\right)-\left(3.3^x-\frac{1}{\left(3^x\right)^2}\right)>0$

$\Rightarrow3^x+1-3.3^x+\frac{1}{\left(3^x\right)^2}>0$ $\left[\text{Misalkan } 3^x=p\right]$

$\Rightarrow p+1-3p+\frac{1}{p^2}>0$

$\Rightarrow-2p+1+\frac{1}{p^2}>0$

Kedua ruas dikalikan dengan $\left(-p^2\right)$, diperoleh:

$\Rightarrow2p^3-p-<0$

$\Rightarrow(p-1)\underbrace{\left(2p^2+p+1\right)}_{\text{Definit}\oplus}<0$

$\Rightarrow p-1<0$

$\Rightarrow p<1$ [kembalikan $3^x=p$]

$\Rightarrow3^x<1$

$\Rightarrow x<0$

Jawaban: C

2. Jika diketahui:
$A=\frac{1}{6}\left({}^2\log3^3-{}^2\log6^3-{}^2\log12^3+{}^2\log24^3\right)$,

maka nilai = ...

A. 0 D. 64
B. 1 E. 96
C. 2

Pembahasan SMART:

$A=\frac{1}{6}\left[{}^2\log3^3-{}^2\log6^3-{}^2\log12^3+{}^2\log24^3\right]$

$=\frac{1}{6}\left[3.{}^2\log3-3.{}^2\log6-3.{}^2\log12+3.{}^2\log24\right]$

$=\frac{1}{2}\left[{}^2\log3-{}^2\log6-{}^2\log12+{}^2\log24\right]$

$=\frac{1}{2}\left[{}^2\log\left(\frac{3.24}{6.12}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[{}^2\log1\right]=\frac{1}{2}[0]=0$

Jadi, $2^A=2^0=1$

Jawaban: B

3. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan $5^{x+1}+5^{2-x}=126$, maka $x_1+x_2=$ .... **(SOAL SIMAK UI)**

A. $25\frac{1}{5}$ D. -1
B. 5 E. -3
C. 1

Pembahasan SMART:

$5^{x+1}+5^{2-x}=126$

$\Rightarrow5^x.5+5^2.5^{-x}=126$

$\Rightarrow5.5^x+\frac{25}{5^x}=126$ $\left(\text{dikalikan } 5^x\right)$

$\Rightarrow5.5^{2x}+25=126.\,5^x$

Misalkan $5^x = p$, maka:

$$5p^2 + 25 = 126p$$
$$\Rightarrow 5p^2 - 126p + 25 = 0$$
$$\Rightarrow (5p-1)(p-25) = 0$$

diperoleh $p = \frac{1}{5}$ atau $p = 25$

Ketika $p = \frac{1}{5}$, maka: $5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1}$

$$\Rightarrow x = -1$$

Ketika $p = 25$, maka: $5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2$

$$\Rightarrow x = 2$$

Jadi, nilai dari $x_1 + x_2 = -1 + 2 = 1$

trik Praktis!

$p^{ax+b} + p^{c-ax}$ dengan akar-akar x_1 dan x_2, maka: $x_1 + x_2 = \frac{c-b}{a}$

Dari persamaan $5^{x+1} + 5^{2-x} = 126$, maka:

$$x_1 + x_2 = \frac{2-1}{1} = 1$$

Jawaban: C

4. Jika nilai *x* yang memenuhi ${}^2\log 16^{\left(\frac{8x-\frac{1}{2}}{2}\right)} = 8$, maka ${}^{\frac{4}{3}}\log x = ...$

A. -2
B. -1
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{16}{9}$
E. 2

Pembahasan SMART:

$${}^2\log 16^{\left(\frac{8x-\frac{1}{2}}{2}\right)} = 8 \Rightarrow {}^2\log 2^{4\left(\frac{8x-\frac{1}{2}}{2}\right)} = 8$$
$${}^2\log 2^{16x-1} = 8$$
$$(16x-1)\,{}^2\log 2 = 8$$
$$(16x-1)\cdot 1 = 8$$
$$16x - 1 = 8$$
$$16x = 9$$
$$x = \frac{9}{16}$$

Jadi, ${}^{\frac{4}{3}}\log x = {}^{\frac{4}{3}}\log \frac{9}{16} = {}^{\frac{4}{3}}\log \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$$= {}^{\frac{4}{3}}\log \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = -2\,{}^{\frac{4}{3}}\log \left(\frac{4}{3}\right) = -2\cdot 1 = -2$$

Jawaban: A

5. Nilai dari $\left(\frac{\log\left(x\sqrt[4]{x}\right) + \log y + \log\left(xy\sqrt[4]{y}\right)}{\log x + \log y}\right)^{-\frac{3}{2}}$ adalah ....

A. $\frac{27}{8}$
B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{4}{9}$
E. $\frac{8}{27}$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

${}^a\log(x.y) = {}^a\log x + {}^a\log y$

$$\frac{\log\left(x\sqrt[4]{x}\right) + \log y + \log\left(xy\sqrt[4]{y}\right)}{\log x + \log y} = \frac{\log\left(x\sqrt[4]{x}\right)(y)\left(xy\sqrt[4]{y}\right)}{\log(xy)}$$

$$= \frac{\log x^2y^2\sqrt[4]{xy}}{\log(xy)} = \frac{\log(xy)^{\frac{9}{4}}}{\log(xy)} = \frac{\frac{9}{4}\log(xy)}{\log(xy)} = \frac{9}{4}$$

Jadi, $\left(\frac{\log\left(x\sqrt[4]{x}\right) + \log y + \log\left(xy\sqrt[4]{y}\right)}{\log x + \log y}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$$= \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Jawaban: E