

SUKU BANYAK, EKSPONEN, DAN LOGARITMA

A.

Suku Banyak

Bentuk Umum

Bentuk umum:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Dimana, n bilangan cacah disebut suku banyak (polinomial) dalam x berderajat n (n adalah pangkat tertinggi dari x). $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ disebut koefisien-koefisien suku banyak.

Contoh:

$f(x) = 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 7$ merupakan suku banyak berderajat 4 dimana:

- Koefisien x^4 adalah 5
- Koefisien x^3 adalah 2
- Koefisien x^2 adalah -1
- Koefisien x adalah 1
- Suku tetapnya adalah -7

Pembagian Suku Banyak

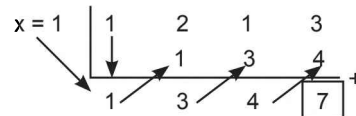
Pembagian suku banyak dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu cara pembagian biasa dan cara Horner.

Contoh: Berapakah hasil $x^3 + 2x^2 + x + 3$ dibagi $x - 1$?

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 4 \\ x - 1 \overline{) x^3 + 2x^2 + x + 3} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 3x^2 + x + 3 \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ 4x + 3 \\ \underline{4x - 4} \\ 7 \end{array}$$

Jadi, $x^2 + 3x + 4$ adalah hasil bagi dan 7 adalah sisa pembagiannya.

Cara Horner: Menuliskan koefisien x^n dari suku banyak, yaitu:



Langkah-langkah:

1. Menjumlahkan koefisien dimulai dari koefisien paling kiri ke bawah (hasilnya 1).
2. $1 \times 1 = 3$ (taruh hasilnya pada ruas kedua).
3. Jumlahkan: $2 + 1 = 3$.
4. $3 \times 1 = 3$ (taruh hasilnya pada ruas ketiga).
5. Jumlahkan: $1 + 3 = 4$.
6. $4 \times 1 = 4$ (taruh hasilnya pada ruas keempat).
7. Jumlahkan: $3 + 4 = 7$.

Jadi, $x^2 + 3x + 4$ adalah hasil bagi dan 7 adalah sisa pembagiannya.

Teorema Sisa

Jika suatu suku banyak $F(x)$ dibagi $P(x)$ akan diperoleh hasil bagi $H(x)$ dan sisa $S(x)$, atau dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$F(x) = P(x) \cdot H(x) + S(x)$$

Sehingga jika suku banyak $F(x)$ dibagi $(x - n)$ maka nilai sisanya $S(n)$ sama dengan nilai $F(n)$

Teorema Faktor

- Jika $f(a) = 0$ (tidak mempunyai sisa) maka $(x - a)$ adalah salah satu faktor dari suku banyak $f(x)$.
- Jika pada suku banyak $f(x)$ berlaku $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, dan $f(c) = 0$ maka $f(x)$ habis dibagi $(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$.
- Jika $(x - a)$ adalah faktor dari $f(x)$ maka $x = a$ adalah akar dari $f(x)$.
- Jika $f(x)$ dibagi $(x - a)(x - b)$ maka sisanya:

$$S = \frac{(x-a)}{(b-a)} f(b) + \frac{(x-b)}{(a-b)} f(a)$$

Akar-akar Suku Banyak

a. Fungsi Berderajat Dua

$f(x) = ax^2 + bx + c$ untuk $f(x) = 0$ maka:

1. $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
2. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

b. Fungsi Berderajat Tiga

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ untuk $f(x) = 0$ maka:

1. $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$
2. $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$
3. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a}$

c. Fungsi Berderajat Empat

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ untuk $f(x) = 0$ maka:

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-b}{a}$

2. $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$
3. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{-d}{a}$
4. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$

B.

Eksponen

Pengertian Eksponen

Eksponen merupakan perkalian yang berulang-ulang atau dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\underbrace{p \times p \times p \times \dots \times p}_{n \text{ kali}} = p^n$$

Dimana:

- a disebut bilangan pokok (basis)
- n disebut bilangan pangkat

Contoh: $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

Sifat-sifat Eksponen

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 5. $a^0 = 1; a \neq 0$
2. $\frac{a^x}{b^x} = a^{x-y}$ 6. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
3. $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ 7. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Persamaan Eksponen

Berikut ini bentuk-bentuk persamaan eksponen, yaitu:

1. $a^p = a^q$ maka $p = q$, syaratnya $a > 0, a \neq 1$
2. $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ maka $f(x) = 0$, syaratnya $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$
3. $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$

Maka terdapat beberapa kemungkinan, yaitu:

- $h(x) = 0$ dengan syarat $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

- $h(x) = 1$ maka $f(x)$ dan $g(x)$ tidak memberikan syarat apapun karena satu pangkat berapapun hasilnya adalah 1.
 - $h(x) = -1$ maka $f(x) - g(x)$ haruslah genap
 - $h(x) \neq 1$ maka $f(x) = g(x)$
4. $a^{2f(x)+b} + a^{f(x)+c} + d = 0$ maka penyelesaiannya dibentuk menjadi persamaan kuadrat berikut ini:

$$a^{2f(x)} \cdot a^b + a^{f(x)} \cdot a^c + d = 0$$

Pertidaksamaan Eksponen

Aturan penyelesaian pertidaksamaan eksponen, yaitu:

1. $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$

$$\begin{cases} \text{Jika } 0 < a < 1 \text{ maka } f(x) \leq g(x) \\ \text{Jika } a > 1 \text{ maka } f(x) \geq g(x) \end{cases}$$
2. $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$

$$\begin{cases} \text{Jika } 0 < a < 1 \text{ maka } f(x) \geq g(x) \\ \text{Jika } a > 1 \text{ maka } f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

C. Logaritma

Pengertian Logaritma

Jika $a^x = b$ maka $x = {}^a\log b$

${}^a\log b$ dibaca "logaritma b dengan bilangan pokok a."

- a disebut basis (bilangan pokok), $a > 0$ dan $a \neq 1$
- b disebut bilangan yang dilogartimkan, $b > 0$

Sifat-sifat Logaritma

1. $\log 1 = 0$
2. $\log 10 = 1$
3. ${}^a\log x \cdot y = {}^a\log x + {}^a\log y$
4. ${}^a\log \frac{x}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y$
5. ${}^a\log x^n = n \cdot {}^a\log x$

6. ${}^a\log a = 1$
7. ${}^a\log x = \frac{1}{{}^x\log a} = \frac{\log x}{\log a} = \frac{{}^p\log x}{{}^p\log a}$
8. ${}^a\log x \cdot {}^x\log y \cdot {}^y\log z = {}^a\log z$
9. ${}^{a^x}\log b^y = {}^a\log b^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} \cdot {}^a\log b$
10. $a^{a^{\log x}} = x$

Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma mempunyai beberapa bentuk, antara lain:

1. ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$ atau ${}^a\log f(x) = c$
Penyelesaiannya: $f(x) = p$ atau $f(x) = a^c$
2. ${}^a\log f(x) = {}^b\log p$ atau ${}^{g(x)}\log f(x) = c$
Penyelesaiannya: $f(x) = p = 1$ atau $f(x) = g(x)^c$
3. $a ({}^p\log x)^2 + b {}^p\log x + c = 0$
Penyelesaiannya: gunakan sifat persamaan kuadrat atau dengan cara singkat, yaitu:

$$x_1 \cdot x_2 = p^{\frac{b}{a}}$$

4. $a^{f(x)} = b^{g(x)}$
Penyelesaiannya: Kedua ruas dilogartimkan menjadi:

$$f(x) \log a = g(x) \log b$$

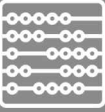
Pertidaksamaan Logaritma

Aturan pertidaksamaan logaritma, yaitu:

1. ${}^a\log f(x) \geq {}^a\log g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \text{ jika } 0 < a < 1 \\ f(x) \geq g(x), \text{ jika } a > 1 \end{cases}$$
2. ${}^a\log f(x) \leq {}^a\log g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \text{ jika } 0 < a < 1 \\ f(x) \geq g(x), \text{ jika } a > 1 \end{cases}$$



1. Soal Ujian SNMPTN

Salah satu faktor suku $x^3 + kx^2 + x - 3$ adalah $(x - 1)$. Faktor yang lain adalah ...

- A. $x^2 + 3x + 3$
- B. $x^2 + x - 3$
- C. $x^2 + x + 3$
- D. $x^2 + 2x + 3$
- E. $x^2 - 7x + 3$

Pembahasan:

Diketahui salah satu faktor suku $x^3 + kx^2 + x - 3$ adalah $(x - 1)$ maka:

$$f(1) = 1^3 + k \cdot 1^2 + 1 - 3$$

$$0 = k - 1$$

$$k = 1$$

$f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ dibagi dengan $(x - 1)$.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \\ x-1 \overline{\sqrt{x^3 + x^2 + x - 3}} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 2x^2 + x - 3 \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 3x - 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

Jadi, faktor yang lain adalah $x^2 + 2x + 3$.

Jawaban: D

2. Soal Ujian SPMB

Jika $p = \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)$ dan

$q = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)$ maka $\frac{p}{q} = \dots$

- A. $\sqrt[3]{x}$
- B. $\sqrt[3]{x^2}$
- C. x
- D. $x\sqrt[3]{x}$
- E. $x\sqrt[3]{x^2}$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)} \\ &= \frac{x^{\frac{2}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)} \\ &= \frac{x^{\frac{2}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{1 - \frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Jawaban: A

3. Soal Ujian SNMPTN

Jika ${}^b\log a + {}^b\log a^2 = 4$ maka nilai ${}^a\log b$ adalah

- A. $\frac{3}{4}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{4}{3}$
- D. 2
- E. $\frac{3}{2}$

Pembahasan:

$${}^b\log a + {}^b\log a^2 = 4$$

$${}^b\log a + 2 \cdot {}^b\log a = 4$$

$$3 {}^b\log a = 4$$

$${}^b\log a = \frac{4}{3}$$

$${}^a\log b = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Jawaban: A