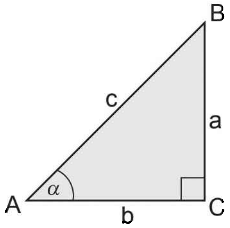
08

TRIGONOMETRI, BARIS, DAN DERET

A. Trigonometri

Perbandingan Trigonometri

1. Perbandingan sisi suatu segitiga siku-siku



$\sin a = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\text{cosec } a = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$

$\cos a = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\sec a = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

$\tan a = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\text{cotan } a = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

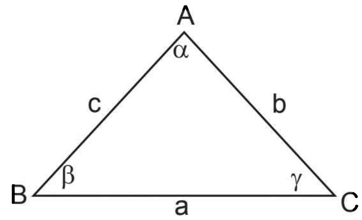
2. Nilai perbandingan sudut-sudut istimewa

x	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{2}$	∞

Keterangan: ∞ = tidak terdefinisi

Rumus-rumus dalam Segitiga

1. Hubungan sin, cos, dan tan
   - $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
   - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
   - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
2. Aturan sinus, kosinus, dan luas segitiga



   - Aturan sinus

   $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

   - Aturan kosinus

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a$

   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos b$

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos g$

   - Luas segitiga ABC

   $$\frac{1}{2}.a.b.\sin\gamma = \frac{1}{2}.a.c.\sin\beta = \frac{1}{2}.b.c.\sin\alpha$$

Rumus-rumus dalam Trigonometri

1. Jumlah dan selisih dua sudut
   - $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
   - $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
   - $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
   - $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a . \tan b}$

2. Sudut rangkap
   - $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
   - $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
     $= 2\cos^2 a - 1$
     $= 1 - 2\sin^2 A$
   - $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$
3. Perkalian sinus dan kosinus
   - $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$
   - $2 \cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$
   - $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
   - $-2 \sin a \sin b = \cos(a+b) - \cos(a-b)$

d. Penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus
   - $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
   - $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
   - $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
   - $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

Grafik Fungsi Trigonometri

Bentuk umum:

$f(x) = A . \cos(kx + b) = A . \cos k\left(x + \dfrac{b}{k}\right)$

$f(x) = A . \sin(kx + b) = A . \sin k\left(x + \dfrac{b}{k}\right)$

Langkah-langkah menyusun grafik f(x), yaitu:

1. Gambar grafik $y = \cos x$ atau $y = \sin x$
2. Kalikan semua ordinatnya (sumbu-Y) dengan k
3. Geser grafik ke kiri sejauh $\dfrac{b}{k}$ jika $\dfrac{b}{k}$ positif, atau geser grafik ke kanan sejauh $\dfrac{b}{k}$ jika $\dfrac{b}{k}$ negatif
4. Periode grafik adalah $\dfrac{2\pi}{k}$

Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

a. Persamaan Trigonometri

1. Persamaan dasar

   $\sin x = \sin p \rightarrow \begin{cases} x_1 = p + n.360^\circ \\ x_2 = (180 - p) + n.360^\circ \end{cases}$

   $\cos x = \cos p \rightarrow x = \pm p + n.360^\circ$

   $\tan x = \tan p \rightarrow x = p + n.180^\circ$

2. Bentuk persamaan $a \cos x + b \sin x = c$
   Dapat diselesaikan dengan mengubah menjadi bentuk $k \cos(x - a)$ dimana:
   $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan a = \dfrac{b}{a}$

b. Pertidaksamaan Trigonometri

Pertidaksamaan trigonometri dapat diselesaikan dengan:

1. Menggambar grafiknya.
2. Menggunakan garis bilangan seperti pertidaksamaan biasa.
3. Untuk soal-soal pilihan ganda bisa dilakukan cara uji pilihan ganda.

B. Baris dan Deret

Notasi Sigma

Notasi sigma atau $\sum$ digunakan untuk menyatakan operasi penjumlahan bilangan berurutan. Sifat-sifat notasi sigma:

1. $\sum_{i=m}^{n} i = \sum_{p=m}^{n} p$
2. $\sum_{i=m}^{n} ki = k\sum_{i=m}^{n} i$, k = konstanta
3. $\sum_{i=m}^{a-1} ki + \sum_{i=a}^{n} ki = \sum_{i=m}^{n} ki$

4. $\sum_{i=m+a}^{n+a}(i-a)=\sum_{i=m-a}^{n-a}(i+a)$

5. $\sum_{i=m}^{n}ai \pm \sum_{i=m}^{n}ai=\sum_{i=m}^{n}(ai \pm bi)$

Baris dan Deret Aritmetika

a. Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang mempunyai beda (selisih) yang tetap untuk setiap dua suku yang berurutan.

Contoh:

- 1, 3, 5, 7, ...
- 2, 6, 10, 14, ...
- 100, 90, 80, 70, ...

Bentuk umum barisan aritmetika adalah:

$$U_1, U_2, U_3, ..., U_n$$

$$a, a + b, a + 2b, ..., a + (n - 1)b$$

Suku ke-n barisan aritmetika dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n

a = suku pertama

b = beda barisan ($b = U_n - U_{n-1}$)

b. Deret Aritmetika

Bentuk umum deret aritmetika adalah:

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$$

$$a + (a + b) + (a + 2b) + ...+ (a + (n - 1)b)$$

Deret aritmetika dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$S_n = \frac{n}{2}(a+U_n)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)b)$$

S_n adalah jumlah n suku yang pertama.

Kemudian berlaku:

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

Baris dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

Bentuk umum barisan geometri adalah sebagai berikut:

$$U_1, U_2, U_3 .... U_n$$

$$a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}$$

Contoh:

- 1, 2, 4, 8, ...
- 27, −9, 3, −1, ...
- 1, −1, 1, −1 ....

Suku ke-n barisan geometri dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$U_n = ar^{n-1}$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n

a = suku pertama

r = rasio ($r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$)

b. Deret Geometri

Bentuk umum dari deret geometri sebagai berikut:

$$U_1 + U_2 + U_3 + ...+ U_n$$

$$a + ar + ar^2 + ...+ar^{n-1}$$

Rumus mencari jumlah n suku pertama pada deret geometri:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, \text{ jika } r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ jika } r < 1$$

b. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang memiliki jumlah suku sampai tak terhingga. Deret geometri tak hingga dibedakan menjadi:

1. Deret geometri divergen

   Syarat deret geometri divergen: jika $r < -1$ atau $r > 1$.

   Contoh:

   $2 + 6 + 18 + 54 + ...+ \infty \rightarrow S_\infty = \infty$

   S_∞ = jumlah suku-suku sampai tak terhingga

2. Deret geometri konvergen

   Syarat deret geometri konvergen: jika $-1 < r < 1$.

   Rumus jumlah suku sampai tak terhingga (S_∞) adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

1. **Soal Ujian SPMB**
Jika x_1 dan x_2 adalah solusi persamaan $\sqrt{2}+2\cos x = 0, 0^0 \le x \le 360^0$ maka $x_1 + x_2$ = ...
A. 310^0
B. 320^0
C. 340^0
D. 350^0
E. 360^0

Pembahasan:
$$\sqrt{2} + 2\cos x = 0$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
Nilai kosinus negatif pada kuadran II dan III maka:
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$x = 45^\circ$ (pada kuadran I)
Pada kuadran II: $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (x_1)
Pada kuadran III: $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ (x_2)
Jadi, $x_1 + x_2 = 135^\circ + 225^\circ = 360^\circ$

Jawaban: E

2. **Soal Ujian SPMB**
Jika jumlah n suku pertama deret aritmatika adalah $S_n = 2n^2 + 3n$, beda deretnya adalah ....
A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6

Pembahasan:
$S_n = 2n^2 + 3n$
Beda (b) = $U_2 - U_1$
$= (S_2 - S_1) - S_1$
$= S_2 - 2S_1$
$= [(2 . 2^2 + 3. 2)] - 2[2 . 1^2 + 3. 1]$
$= 14 - 10$
$= 4$

Jawaban: C

3. **Soal Ujian SNMPTN**
Misalkan, U_n menyatakan suku ke-n suatu barisan geometri. Jika diketahui $U_5 = 12$ dan $\log U_4 + \log U_5 - \log U_6 = \log 3$ maka nilai U_4 adalah ....
A. 12
B. 10
C. 8
D. 6
E. 4

Pembahasan:
Step 1: menyederhanakan persamaan
$\log U_4 + \log U_5 - \log U_6 = \log 3$
$\log U_4 + \log U_5 = \log 3 + \log U_6$
Ingat:
$\log a + \log b = \log (a.b)$
Maka:
$\log(U_4.U_5) = \log (3.U_6)$
$U_4.U_5 = 3.U_6$
$12.U_4 = 3.U_6$..... (2)

Diketahui: U_n menyatakan suku ke-n suatu barisan geometri dan $U_5 = 12$ maka:
$$r = \frac{U_6}{U_5}$$
$$r = \frac{U_6}{12}$$
$U_6 = 12r$ .....(1)
Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2) maka:
$12.U_4 = 3.U_6$
$12.U_4 = 3.(12r)$
$U_4 = 3r$
Step 2: mencari nilai r
$U_5 = U_4 . r$
$12 = 3r . r$
$12 = 3r^2$
$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$
Jadi, $U_4 = 3r = 3 . 2 = 6$

Jawaban: D