

## A.

## Vektor

## Definisi

Vektor adalah besaran yang memiliki nilai (panjang vektor) dan arah.

## Komponen Vektor

Komponen vektor  $\vec{AB}$  adalah:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

atau

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

## Nilai Vektor

Misalkan,  $\vec{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  maka panjang vektor  $\vec{a}$  adalah:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

## Vektor Satuan

Vektor satuan  $\vec{a}$  ditulis  $\hat{a}$ , dimana  $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ .

Vektor satuan  $\hat{a}$  panjangnya satu dan searah  $\vec{a}$

## Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Besar vektor hasil penjumlahan secara geometris, yaitu:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

Sedangkan, besar vektor hasil pengurangan secara geometris adalah:

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

Keterangan:

$|\vec{a}|$  = panjang vektor a

$|\vec{b}|$  = panjang vektor b

$\theta$  = sudut antara vektor a dan vektor b

## Pembagian Ruas Garis dengan Vektor

Jika  $\vec{a}$  adalah vektor posisi titik A,  $\vec{b}$  adalah vektor posisi titik B,  $\vec{p}$  adalah vektor posisi dari titik P yang membagi ruas garis AB dengan perbandingan  $\vec{AP} : \vec{PB} = m : n$  maka:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{n+m}$$

**Catatan:** jika titik P berada pada ruas garis AB maka nilai m dan n positif. Sedangkan, jika titik P berada di luar garis (merupakan perpanjangan) garis AB maka salah satu nilai m atau n negatif.

## Perkalian Vektor

### a. Dengan Skalar

Jika  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  maka  $k\vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$

### b. Dengan vektor

Misalkan, vektor  $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$  dan vektor  $\vec{b} = b_1i + b_2j + b_3k$  maka:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ , dimana  $\theta$  adalah sudut antara vektor  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$ , atau  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

## Proyeksi Vektor

- Proyeksi skalar ortogonal vektor  $\vec{a}$  pada vektor  $\vec{b}$  adalah:

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

- Proyeksi vektor ortogonal vektor  $\vec{a}$  pada vektor  $\vec{b}$  adalah:

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

## B.

## Matriks

### Definisi

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segi empat yang diatur dalam baris dan kolom. Ukuran matriks dinyatakan dalam (baris x kolom). Bentuk umum matriks  $A_{i \times j}$  ( $i$  = baris dan  $j$  kolom).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

## Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan matriks, yaitu:

- $A + B = B + A$
- $A - B \neq B - A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$

Syarat dua buah matriks dapat dijumlahkan adalah ordo kedua matriks tersebut sama.

## Perkalian Matriks

Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B bila terpenuhi:

- Banyak kolom A = banyak baris B
- Ordo hasil perkalian matriks  $A_{p \times q}$  dan  $B_{q \times r}$  adalah:

$$A_{p \times q} \cdot B_{q \times r} = C_{p \times r}$$

Jumlah kolom A = jumlah baris B

Contoh:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.p + b.r & a.q + b.s \\ c.p + d.r & c.q + d.s \end{pmatrix}$$

## Transpose Matriks

Transpose matriks adalah matriks baru yang diperoleh dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Contoh:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ maka } A^T_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Beberapa sifat matriks transpose:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $k(A^T) = (kA)^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

## Determinan Matriks

Misalkan, matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  maka determinan A adalah:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Misalkan, matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  maka

determinan A adalah:

$$|A| = (a.e.i + b.f.g + c.d.h) - (c.e.g + a.f.h + b.d.i)$$

Sifat-sifat determinan matriks:

- Matriks singular, yaitu matriks yang nilai determinannya sama dengan nol ( $\det(A) = 0$ ).
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

## Invers Matriks

Misalkan, matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  maka invers dari A adalah:

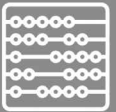
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat invers matriks:

1.  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
2.  $(A^{-1})^{-1} = A$
3.  $(A.B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4.  $AB = C$  maka:  
 $A = C \cdot B^{-1}$   
 $B = A^{-1} \cdot C$

## CONTOH SOAL

## VEKTOR & MATRIKS



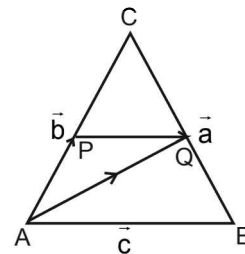
### 1. Soal Ujian SNMPTN

Diketahui segitiga ABC. Titik P di tengah AC, dan Q pada BC sehingga  $BQ = QC$ . Jika  $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ , dan  $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$  maka  $\overrightarrow{PQ} = \dots$

- $\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$
- $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$
- $\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c})$
- $\frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c})$
- $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})$

#### Pembahasan:

Perhatikan gambar.



$$\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

Maka:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$

**Jawaban: A**

2. **Soal Ujian SNMPTN**

Diberikan vektor-vektor:  $\vec{a} = x\vec{i} - 3x\vec{j} + 6y\vec{k}$   
dan  $\vec{b} = (1-y)\vec{i} + 3\vec{j} - (1+x)\vec{k}$  dengan  $x > 0$ .  
Jika  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  sejajar maka  $\vec{a} + 3\vec{b} = \dots$

- A. 0  
B.  $-7\vec{i} + 21\vec{j} + 21\vec{k}$   
C.  $\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$   
D.  $2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$   
E.  $-6\vec{i} - 24\vec{k}$

**Pembahasan:**

**Step 1: Mencari persamaan x**

Karena  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  sejajar maka:

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} 1-y \\ 3 \\ -(1+x) \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} x \\ -3x \\ 6y \end{bmatrix}$$

$$3 = -3kx$$

$$kx = -1 \dots (1)$$

$$1 - y = kx$$

$$1 - y = -1$$

$$y = 2$$

$$-(1+x) = 6ky$$

$$-1 - x = 6k(2)$$

$$1 - x = 12k$$

$$\text{Karena: } kx = -1 \text{ maka } k = \frac{-1}{x}$$

$$-1 - x = 12\left(\frac{-1}{x}\right)$$

$$x(1+x) = 12$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x = -4 \text{ (tidak memenuhi) atau } x = 3 \text{ (memenuhi)}$$

**Step 2: Masukan nilai x ke persamaan vektor  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$**

$$\vec{a} = x\vec{i} - 3x\vec{j} + 6y\vec{k}$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 9\vec{j} + 12\vec{k}; \text{ dan}$$

$$\vec{b} = (1-y)\vec{i} + 3\vec{j} - (1+x)\vec{k}$$

$$\vec{b} = (1-2)\vec{i} + 3\vec{j} - (1+3)\vec{k}$$

$$\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$3\vec{b} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\text{Maka, } \vec{a} + 3\vec{b} = 0$$

**Jawaban: A**

3. **Soal Ujian SNMPTN**

$$d = \det \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{6}\pi & \cos \frac{5}{6}\pi \\ \cos \frac{7}{6}\pi & \sin \frac{5}{6}\pi \end{pmatrix} \text{ maka}$$

$$\frac{d}{5} + \frac{d^2}{25} + \frac{d^3}{125} + \frac{d^4}{625} + \dots = \dots$$

- A.  $-\frac{1}{2}$  D.  $-\frac{1}{3}$   
B.  $-\frac{1}{9}$  E.  $\frac{1}{2}$   
C.  $-\frac{1}{11}$

**Pembahasan:**

**Step 1: Mencari determinan**

$$d = \det \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{6}\pi & \cos \frac{5}{6}\pi \\ \cos \frac{7}{6}\pi & \sin \frac{5}{6}\pi \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \sin 30^\circ & \cos 150^\circ \\ \cos 210^\circ & \sin 150^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

**Step 2: Memasukkan nilai d**

$$= \frac{d}{5} + \frac{d^2}{25} + \frac{d^3}{125} + \frac{d^4}{625} + \dots$$

$$= -\frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1.000} + \frac{1}{10.000} + \dots$$

Membentuk deret geometri tak hingga dengan:

$$a = -\frac{1}{10} = -0,1 \text{ dan } r = -\frac{1}{10} = -0,1$$

Maka:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{-0,1}{1-(-0,1)} = \frac{-0,1}{1,1} = -\frac{1}{11}$$

**Jawaban: C**