4_1_AritmeticaDePuntoFlotante

February 12, 2018

```
In [1]: from IPython.display import Image
```

[Python Ver.: 3.6.x] | [Autor: Luis Miguel de la Cruz Salas]

1 Aritmética de Punto flotante

- La aritmética que se realiza en una computadora digital es diferente de la que se usa en matemáticas.
  - $2 + 2 = 4$
  - $4^2 = 16$
  - $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$?

```
In [2]: 2 + 2

Out[2]: 4

In [3]: 4**2

Out[3]: 16

In [4]: import math
        math.sqrt(3)**2

Out[4]: 2.9999999999999996
```

- En la aritmética continua se permite que un número real pueda tener un número infinito de dígitos.

$$\frac{1}{3} = 0.3333333\ldots33333\ldots$$

- Una computadora solo puede representar un subconjunto de los números reales, el cual solo contiene números racionales (positivos y negativos).

```
In [5]: 1/3

Out[5]: 0.3333333333333333
```

```
In [6]: format(1/3, '.52f')
```

```
Out[6]: '0.3333333333333333148296162562473909929394721984863281'
```

- Las computadoras cuentan con una cierta capacidad finita para almacenar información.
- Los números reales se representan mediante los llamados **números de punto flotante** (*floating point numbers*) usando las siguentes características:

  1. Signo **+** o **-** .
  2. Mantisa con t dígitos; donde t es un entero positivo mayor o igual a 1.
  3. Base β; donde β es un entero positivo mayor que 1
  4. Exponente e; donde $m \leq e \leq M$ con $m \leq 0$ y $M > t$

- Cada número de punto flotante se representa como:

$$\pm .d_1 d_2 d_3 \ldots d_t \times \beta^e$$

  donde $0 \leq d_i \leq \beta - 1 \ \ (i = 1, 2, 3, \ldots, t)$

- La forma normalizada ocurre cuando $d_1 \neq 0$
- El número de dígitos en la mantisa es finito, lo que propicia un error en la representación y en las operaciones aritméticas

1.0.1 Por ejemplo

IBM 3000 series

- Sistema numérico de punto flotante (SNPF) de simple precisión: 1 dígito binario (bit) para el signo, 7 bits para el exponente en base 16, y 24 bits para la mantisa.
  - 24 dígitos binarios corresponde a ≈ 6 dígitos decimales.
  - El exponente va de 0000000 = 0 a 1111111 = 127.
  - Para asegurar la representación de números de magnitud pequeña, se resta 64 al exponente, de tal manera que el rango en realidad es de -64 a 63.
  - Por ejemplo:

Signo	e	t
0	1000010	101100110000010000000000

$$1000010 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 0^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 66 \Longrightarrow 16^{66-64}.$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \right] 16^{66-64} = 179.015625$$

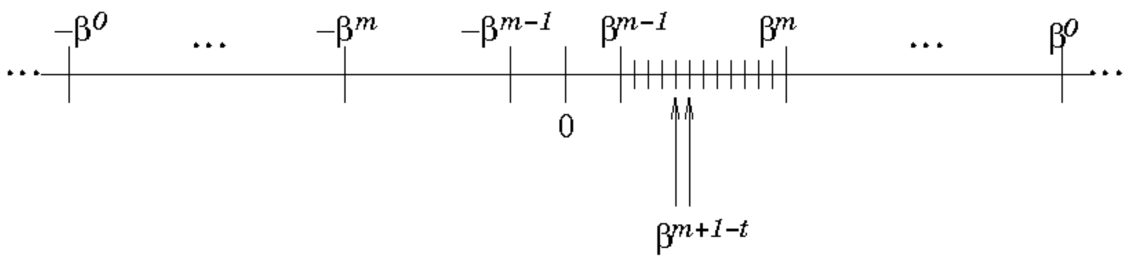
- En este sistema, el siguiente número más pequeño y el siguiente más grande son:

0	1000010	10110011000000111111111	=	179.0156097412109375
0	1000010	10110011000001000000001	=	179.0156402587890625

$$\Longrightarrow 179.015625 \text{ representa } [179.0156097412109375, 179.0156402587890625]$$

```
In [7]: Image(filename='floatingNumbers.png')
```

Out[7]:



- En 1985, el IEEE (Institute for Electrical and Electronic Engineers) publicó: *Binary Floating Point Arithmetic Standard 754, 1985* .
- Se especifican los formatos para precisión simple, doble y extendida, y esos estándares son usados por muchos constructores de CPUs.

```
In [8]: 1/10 # El resultado que imprime se ve correcto
             # pero el resultado de la operación es
             # la fracción binaria representable más cercana
             # al valor correcto.
```

```
Out[8]: 0.1
```

```
In [9]: format(1/10, '.52f') # Esto da una idea de lo que está almacenado
```

```
Out[9]: '0.1000000000000000055511151231257827021181583404541016'
```

```
In [10]: format(0.1, '.52f')
```

```
Out[10]: '0.1000000000000000055511151231257827021181583404541016'
```

```
In [11]: format(3602879701896397 / 2 ** 55, '.52f')
```

```
Out[11]: '0.1000000000000000055511151231257827021181583404541016'
```

Observamos que el 0.1 y el $\dfrac{3602879701896397}{2^{55}}$ comparten la misma representación

```
In [12]: print(str(math.pi))             # Se redondea el valor real almacenado
         print(repr(math.pi))            # para propósitos de despliegue
         print(format(math.pi, '.52f'))  #
```

```
3.141592653589793
3.141592653589793
3.1415926535897931159979634685441851615905761718750000
```

1.0.2 Ejercicio:

£Que resultará de las siguientes evaluaciones?:

```
0.1 == 1/10
0.1 == repr(1/10)
repr(0.1) == 1/10
.1 + .1 + .1
round(.1, 1) + round(.1, 1) + round(.1, 1) == round(.3, 1)
```

Explique el resultado de las evaluaciones.
Hint: Checar el valor más aproximado almacenado en memoria usando por ejemplo `format(0.1,'.53f')`

```
In [13]: 0.1 == 1/10
```

```
Out[13]: True
```

```
In [14]: 0.1 == repr(1/10) # Por qué esto da como resultado False?
```

```
Out[14]: False
```

```
In [15]: repr(0.1) == 1/10 # Por qué esto da como resultado False?
```

```
Out[15]: False
```

```
In [16]: 0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3
```

```
Out[16]: False
```

```
In [17]: round(.1, 1) + round(.1, 1) + round(.1, 1) == round(.3, 1)
```

```
Out[17]: False
```

```
In [18]: round(.1 + .1 + .1, 10) == round(.3, 10)
```

```
Out[18]: True
```

1.1 Algunas funciones útiles

```
In [19]: x = 3.14159
         x.as_integer_ratio() # regresa los enteros usados para
                              # la representación del número flotante
```

```
Out[19]: (3537115888337719, 1125899906842624)
```

```
In [20]: 3537115888337719 / 1125899906842624
```

```
Out[20]: 3.14159
```

```
In [21]: x.hex() # Convierte el flotante a hexadecimal
```

```
Out[21]: '0x1.921f9f01b866ep+1'
```

```
In [22]: float.fromhex('0x1.921f9f01b866ep+1') # convierte el hexadecimal a flotante
```

```
Out[22]: 3.14159
```

```
In [23]: x == float.fromhex('0x1.921f9f01b866ep+1')
```

```
Out[23]: True
```

El uso de hexadecimales es útil para portabilidad de valores entre diferentes versiones de Python y para el intercambio de información con otros lenguajes.

- Algunas opciones para realizar las operaciones con *más confianza* en los resultados:
  - La función **round()**
  - El módulo **decimal**
  - El módulo **fractions**

1.2 Round

```
In [24]: print("(0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3) ?")
         print(round(0.1 + 0.1 + 0.1, 5) == round(0.3, 5))
         print(round(10.33333, 3))
         print(round(1/3,8))
```

```
(0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3) ?
True
10.333
0.33333333
```

```
In [25]: print('{: .3f}'.format(10.34123)) # ¿?
```

```
 10.341
```

1.3 Decimal

```
In [26]: from decimal import getcontext, Decimal
         from math import pi

         print(getcontext())

         print('<'+'-'*20+'>')

         getcontext().prec = 5
         print(Decimal(1)/Decimal(3))

         print('<'+'-'*20+'>')

         getcontext().prec = 30
         print(Decimal(pi))
```

```
Context(prec=28, rounding=ROUND_HALF_EVEN, Emin=-999999, Emax=999999, capitals=1, clamp=0, flag
<-------------------->
0.33333
<-------------------->
3.141592653589793115997963468544185161590576171875
```

- **getcontext()** permite especificar la precisión y la técnica de redondeo que se usará.
- Por omisión la técnica es ROUND_HALF_EVEN.

2 Fractions

```
In [27]: from fractions import Fraction

         num1 = Fraction(2,3)
         num2 = Fraction(1,3)

         print("num1 = {} and num2 = {}".format(num1,num2))

         print(num1 + num2)

         print(num1 - num2)

         print(num1*10)

         print(num1/num2)
```

```
num1 = 2/3 and num2 = 1/3
1
1/3
20/3
2
```

2.1 Características del SNPF en Python 3

NumPy soporta una variedad más amplia de tipos numéricos.

```
In [28]: Image(filename='dataTypes.png')
```

```
Out[28]:
```

Data type	Description
`bool_`	Boolean (True or False) stored as a byte
`int_`	Default integer type (same as C `long`; normally either `int64` or `int32`)
intc	Identical to C `int` (normally `int32` or `int64`)
intp	Integer used for indexing (same as C `ssize_t`; normally either `int32` or `int64`)
int8	Byte (-128 to 127)
int16	Integer (-32768 to 32767)
int32	Integer (-2147483648 to 2147483647)
int64	Integer (-9223372036854775808 to 9223372036854775807)
uint8	Unsigned integer (0 to 255)
uint16	Unsigned integer (0 to 65535)
uint32	Unsigned integer (0 to 4294967295)
uint64	Unsigned integer (0 to 18446744073709551615)
`float_`	Shorthand for `float64`.
float16	Half precision float: sign bit, 5 bits exponent, 10 bits mantissa
float32	Single precision float: sign bit, 8 bits exponent, 23 bits mantissa
float64	Double precision float: sign bit, 11 bits exponent, 52 bits mantissa
`complex_`	Shorthand for `complex128`.
complex64	Complex number, represented by two 32-bit floats (real and imaginary components)
complex128	Complex number, represented by two 64-bit floats (real and imaginary components)

In [29]:
```
import numpy as np
x = np.float64(0.1)
print(format(x,'.52f'))
print(type(x))

y = np.int_([1,2,4])
print(y)
print(type(y))
print(type(y[1]))

z = np.arange(3, dtype=np.uint8)
print(z)
print(type(z))
print(type(z[0]))
```

```
0.1000000000000000055511151231257827021181583404541016
<class 'numpy.float64'>
[1 2 4]
<class 'numpy.ndarray'>
<class 'numpy.int64'>
[0 1 2]
<class 'numpy.ndarray'>
```

```
<class 'numpy.uint8'>
```

```
In [30]: xd = math.pi
         print(format(xd,'.52f'))
         print(type(xd))

         xdd = np.float64(xd)
         print(format(xdd,'.52f'))
         print(type(xdd))
```

```
3.1415926535897931159979634685441851615905761718750000
<class 'float'>
3.1415926535897931159979634685441851615905761718750000
<class 'numpy.float64'>
```

```
In [31]: np.finfo(np.float)
```

```
Out[31]: finfo(resolution=1e-15, min=-1.7976931348623157e+308, max=1.7976931348623157e+308, dty
```

```
In [32]: np.finfo(np.float64)
```

```
Out[32]: finfo(resolution=1e-15, min=-1.7976931348623157e+308, max=1.7976931348623157e+308, dty
```

```
In [33]: np.finfo(np.float64).eps
```

```
Out[33]: 2.220446049250313e-16
```

```
In [34]: np.finfo(np.float64).nmant
```

```
Out[34]: 52
```

- Para entender esto con mayor detalle véase:
  - http://www.lahey.com/float.htm
  - https://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg_goldberg.html