Libro de Texto para el estudiante de Noveno Año

"La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética." – Richard Courant

Mauricio José Ramírez Herrera
mauricio.ramirez.herrera@mep.go.cr

Impreso
10 de mayo de 2020

Cartago, Costa Rica

Licenciado
Enseñanza de la Matemática e Informática
ITCR, UNED

Noveno Año

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS III

ÍNDICE DE CUADROS V

INTRODUCCIÓN VII

I Números 1

1 NÚMEROS REALES 3

Los números son la tela con la que se construye la aritmética. Conforme el desarrollo del pensamiento científico fue avanzando se hizo necesario la existencia de nuevos conjuntos numéricos. Uno de ellos es el Conjunto de los Números Irracionales $\mathbb{I}$.

- 1.1 Números Irracionales 4
- 1.2 Radicales 6
- 1.3 Conjunto de los Número Reales 9

2 CÁLCULOS Y ESTIMACIONES 11

Al igual que con los demás conjuntos, en el Conjunto de los Números Reales podemos realizar la suma, la resta, la multiplicación y la división, así como la potenciación y la radicación. Nos apoyaremos en la Calculadora para dar solución a estas operaciones. Por la naturaleza de los diferentes números que componen el Conjunto de los Números Reales diremos que en ocasiones los resultados de dichas operaciones no serán exactos; debemos estimar (dar un resultado aproximado) una respuesta a los cálculos que llevaremos a cabo.

3 CANTIDADES MUY GRANDES Y MUY PEQUEÑAS 19
Las unidades de medida es el término dado para describir el tipo de medida que se está realizando. Por ejemplo, en los Estados Unidos se utilizan las libras para describir el peso y los pies y pulgadas para describir la longitud.

4 EJERCICIOS DE LA PARTE UNO 23
Práctica General de la Primera Parte.

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1 Cuadrado de la Historia de Hipaso 5
Fig. 1.2 Conformación del Conj. de los Reales 9

ÍNDICE DE CUADROS

Cuad. 1.1 Tema Números Reales 3

Cuad. 2.1 Tema Cálculos y Estimaciones 11

Cuad. 3.1 Tema Cant. muy grandes y muy pequeñas 19
Cuad. 3.2 Prefijos del Sistema Internacional de Medidas 20

Cuad. 4.1 Información del Ejercicio 63 40

INTRODUCCIÓN

0

Estimado estudiante estamos a las puertas de un gran éxito: la obtención de su titulo de Noveno Año. La puerta está abierta, tan solo debe poner toda su voluntad en pasar por ella. Es necesario que mantenga ese compromiso de trabajar juntos en la obtención de este titulo.

Un ejercicio que deseo que realice en este momento es que se visualice usted dentro de un año. ¿Qué ve? ¿Dónde se encuentra? ¿Qué metas ha alcanzado?

Hoy usted inicia el nivel de noveno, que le abrirá el camino para un reto mayor: la Prueba Nacional de *FARO*.

La clave del éxito para cualquier labor humana es la disciplina. Esa cualidad debe adquirirla lo más pronto, para poder enfrentar cualquier desafío.

Hablemos un poco de números. Para obtener la nota de bachillerato usted debe considerar dos rubros: la nota de presentación y la nota del examen. La nota del examen usted la obtendrá de acuerdo a la preparación que podamos conseguir juntos.

Compromiso y disciplina, esas deben ser las dos consignas que nos acompañen de ahora en adelante. Pasemos a hablar de la evaluación para el presente curso lectivo.

Según el Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes del Ministerio de Educación Pública, en su Artículo 37, inciso a), los componentes de la calificación son los que aparecen a continuación.

Componentes	Valor Porcentual
Trabajo Cotidiano	45 %
Tareas	10 %
Pruebas Escritas	35 %
Asistencia	10 %

Como se puede observar de inmediato que el trabajo cotidiano tiene un peso importante en la evaluación del III Ciclo para la materia de Matemáticas.

Por su parte, el Artículo 26 del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes del MEP define Trabajo Cotidiano como "todas las actividades educativas que realiza el alumno con la guía del docente. Este trabajo se observa en forma continua, durante el desarrollo de las lecciones, como parte del proceso de aprendizaje y no como producto. Para su calificación se debe utilizar la información recopilada con las escalas de calificación y otros instrumentos técnicamente elaborados".

Por lo menos se realizarán dos observaciones del Trabajo Cotidiano al mes. Se le hará saber al inicio de la lección que en esa fecha se estará realizando una observación y se le indicará la rúbrica que se estará empleando.

La Tarea se define en el Artículo 27 del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes del MEP como aquellos "trabajos cortos que se asignan al estudiantado con el propósito de reforzar aprendizajes esperados, de acuerdo con la información recopilada durante el trabajo cotidiano.".

Continua indicando el documento, "mediante las tareas, el estudiantado puede repasar o reforzar los aprendizajes esperados. Por ello es indispensable que sean ejecutadas por el estudiantado exclusivamente para que así puedan fortalecer su propio aprendizaje.".

Finalmente, aunque no menos importante, es la definición de la Asistencia y Puntualidad que el Reglamento de Evaluación de los Aprendizaje hace en el Artículo 30.

Dice el documento citado: "La asistencia se define como la presencia del estudiante en las lecciones y en todas aquellas otras actividades escolares a las que fuere convocado. Las ausencias y las llegadas tardías podrán ser justificadas o injustificadas. Se entiende por ausencia justificada aquella provocada por una razón de fuerza mayor ajena a la voluntad del estudiante, que le impide presentarse a la institución o al lugar previamente definido por el docente para cumplir con sus obligaciones habituales como estudiante.

"Tales razones son:

1. Enfermedad, accidente u otra causa de fuerza mayor.
2. Enfermedad grave de cualquiera de sus padres o hermanos.
3. Muerte de algún familiar hasta el segundo grado de consanguinidad y hasta por una semana.

4. Cualquier otro motivo justificable a juicio del docente o, en caso de ausencia de éste, del orientador respectivo.

"De igual forma, la llegada tardía justificada es aquella provocada por razones de fuerza mayor ajenas a la voluntad del estudiante y que le impiden presentarse puntualmente a la hora previamente definida, a juicio del docente.

"La asignación del porcentaje que le corresponde a cada estudiante por concepto de asistencia y de puntualidad, deberá ser consignada por el docente de cada asignatura. Para definir esta asignación, el docente tomará como referencia el número total de lecciones impartidas en la respectiva asignatura durante el correspondiente período, y el porcentaje de ausencias o de llegadas tardías injustificadas del estudiante en ese mismo período".

Porc. Ausencias	Asignación
0 % a menos del 1 %	10 %
Del 1 % a menos del 10 %	9 %
Del 10 % a menos del 20 %	8 %
Del 20 % a menos del 30 %	7 %
Del 30 % a menos del 40 %	6 %
Del 40 % a menos del 50 %	5 %
Del 50 % a menos del 60 %	4 %
Del 60 % a menos del 70 %	3 %
Del 70 % a menos del 80 %	2 %
Del 80 % a menos del 90 %	1 %
Del 90 % a menos del 100 %	0 %

Termina el Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes del MEP indicando que "las llegadas tardías injustificadas menores de diez minutos se computarán para estos efectos como media ausencia injustificada. Las llegadas tardías injustificadas mayores de diez minutos se considerarán para estos efectos como una ausencia injustificada".

Dejando de lado la evaluación, nos concentraremos en los contenidos que se considerarán. Durante este curso lectivo se tratarán tres grandes Áreas: Números, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad.

Este libro ha sido diseñado de tal forma que cada capítulo trate de manera práctica, eficaz y eficiente los contenidos de Noveno año. Puede dar un vistazo en el Índice General para darse una idea de la cantidad de contenidos y habilidades que debemos lograr al final del año escolar.

Agradezco que haya leído toda la información aquí expuesta; considero que es importante saber a qué nos enfrentamos para poder llegar con éxito al destino trazado.

Me despido reafirmando mi compromiso con usted, de que juntos llegaremos a obtener el titulo de Noveno Año en diciembre de este año.

Parte I

Números

1 NÚMEROS REALES

Los números son la tela con la que se construye la aritmética. Conforme el desarrollo del pensamiento científico fue avanzando se hizo necesario la existencia de nuevos conjuntos numéricos. Uno de ellos es el Conjunto de los Números Irracionales $\mathbb{I}$.

Conocimientos	Habilidades
Números reales	Identificar números irracionales en diversos contextos.
Números irracionales	Identificar números con expansión decimal infinita no periódica.
Concepto de número real	Realizar aproximaciones decimales de números irracionales.
Representaciones	Reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares.
Comparaciones	Comparar y ordenar números irracionales representados en notación decimal y radical.
Relaciones de orden	Identificar números reales (racionales e irracionales) y no reales en cualquiera de sus representaciones y en diversos contextos.
Recta numérica	Representar números reales en la recta numérica, con aproximaciones apropiadas.

Cuadro 1.1: *Conocimientos y Habilidades del tema Números Reales, tomadas del Programa de Estudio de Matemáticas del MEP*

Como ya hemos estudiado, los números naturales surgen de la necesidad de contar u ordenar. Así, por ejemplo, los números $0, 1, 2, 3 \ldots$ son números naturales. El conjunto de todos los números naturales se simboliza mediante la letra $\mathbb{N}$.

Existen muchas situaciones de la vida cotidiana que no pueden expresarse mediante números naturales como, por ejemplo, la temperatura del ambiente, -2°C, 0°C, 25°C... Por ello, surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales con un nuevo conjunto numérico, el de los números enteros, que representamos con la letra $\mathbb{Z}$.

Pero este nuevo conjunto de números no nos sirve para representar situaciones como andar la mitad de un camino, que se representa mediante el número $\frac{1}{2}$.

Por eso, se introduce un nuevo conjunto de números, los números racionales, que se representan con la letra $\mathbb{Q}$. Además, este conjunto coincide con el conjunto de los números decimales limitados o ilimitados y periódicos. Esto es así porque:

- Todo número racional puede expresarse como un número decimal limitado o un número decimal ilimitado y periódico.
- Y al revés, todo número decimal limitado y decimal ilimitado y periódico tiene una fracción generatriz asociada.

Este año se hace necesario estudiar un nuevo conjunto, el de los números irracionales $\mathbb{I}$.

NÚMEROS IRRACIONALES 1.1.

En palabras sencillas, un número es irracional cuando no es racional. Esto quiere decir que tal número no se pueda escribir como una fracción $\frac{a}{b}$ donde a y b son valores enteros (sin decimales). Una de las características es que su escritura decimal es infinita y no hay períodos en esa expresión.

Uno de los primeros números irracionales que se descubrieron fue $\sqrt{2}$, y el descubrimiento de este se obtuvo al aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de un cuadrado de lado con longitud 1, como se muestra en la siguiente Figura 1.1.

Cuenta la leyenda que aparentemente Hipaso (un estudiante de Pitágoras) descubrió los números irracionales intentando escribir la raíz de 2 en forma de fracción (se cree que usando geometría). Pero en su lugar demostró que no se puede escribir como fracción, así que es irracional.

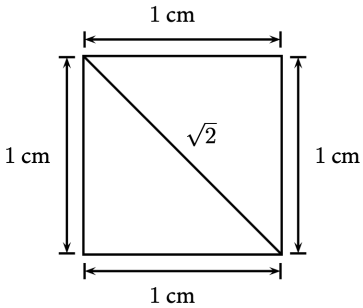


Figura 1.1: Cuadrado de la Historia de Hipaso: Uno de los primeros números irracionales descubiertos, el $\sqrt{2}$.

Pero Pitágoras no podía aceptar que existieran números irracionales, porque creía que todos los números tienen valores perfectos. Como no pudo demostrar que los "números irracionales" de Hipaso no existían, ¡tiraron a Hipaso por la borda y se ahogó!

Otro de los irracionales más famosos en la historia es π, su aparición fue vista tempranamente por diversas culturas, pero su naturaleza irracional no se demostró hasta que Johann Heinrich Lambert lo hizo en 1761 aproximadamente. Este irracional es tan famoso que se han hecho películas sobre él y algunas personas celebran su día.

Por la forma en que se escribe en el formato usado en los Estados Unidos, el 14 de marzo (3/14) se ha convertido en una celebración no oficial para el "Día Pi", derivándose de la aproximación de tres dígitos de pi: $3{,}14$.

Si hablamos de irracionales famosos no podemos dejar fuera al número phi ϕ (número de oro), utilizado principalmente en la mayoría de las obras de arte.

Pero, ¿Cómo son los números irracionales? Existen tres formas de representar un número irracional

Características de los Números Irracionales

1. Raíces No Exactas

$$\sqrt{5} \qquad -\sqrt{3} \qquad \sqrt[3]{-5}$$

2. Decimales No Periódicos-0.25cm

$$2{,}15872342391236\ldots \qquad -1{,}7721191283720\ldots$$

3. Números Trascendentales-0.25cm

$$\pi \qquad e \qquad \phi$$

Los números irracionales son expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas. Un número irracional no se puede expresar como el cociente (fracción) de dos números enteros[1].

Ejercicio Resuelto 1

Los siguientes son ejemplos de números irracionales.

1. $-3{,}141592654\ldots$
2. $1{,}414213562\ldots$
3. $1{,}709975947\ldots$
4. $\sqrt{5}$
5. $\sqrt[3]{5}$
6. π
7. -2π
8. $0{,}123456789\ldots$
9. $-1{,}112233445566\ldots$
10. $-0{,}135791113\ldots$

RADICALES 1.2.

El símbolo $\sqrt[n]{x}$ usado para indicar una raíz es llamado radical[2]. La expresión $\sqrt[n]{x}$ se lee "x radical n", o "la n-sima raíz de x". En el símbolo radical, la línea horizontal se llama Vínculo, la cantidad debajo del Vínculo se llama subradical, y la cantidad n escrita a la izquierda se llama índice.

El caso especial $\sqrt[2]{x}$ se escribe simplemente $\sqrt{x}$ y recibe el nombre de **Raíz Cuadrada** de x.

Por su parte $\sqrt[3]{x}$ se conoce como **Raíz Cúbica**, $\sqrt[4]{x}$ se conoce como **Raíz Cuarta** y $\sqrt[5]{x}$ se le da el nombre de **Raíz Quinta**.

Un detalle importante concerniente a los radicales es el siguiente:

1. Si el índice es **par**, entonces el subradical debe ser **siempre positivo**.

$$\text{Sea } n \in \mathbb{N},\ \text{tal que } n \text{ es par, si } \sqrt[n]{x} \text{ entonces } x \geq 0.$$

2. Si el índice es **impar**, entonces el subradical no tiene ninguna restricción, puede ser **positivo o negativo**.

$$\text{Sea } n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } n \text{ es impar, si } \sqrt[n]{x} \text{ entonces } x \in \mathbb{R}.$$

[1] *Abálsamo, R. (2013).* Activados 3 *(1.ª ed.). Puerto de Palos.*

[2] *Usado por primera vez en 1525, por Christoff Rudolff en su obra Die Coss.*

Características de los Radicales

Para el radical $\sqrt[n]{x} = c$ tenemos

- El símbolo $\sqrt{\ }$ se conoce como símbolo radical o vínculo.
- El número n es el índice.
- El número x es el subradical.
- El resultado c se conoce como raíz.

Teniendo presente lo anterior, para reconocer si un número es racional o irracional es necesario conocer las características que identifican a los elementos de cada uno de los conjuntos, Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales. veamos algunos ejemplos.

Ejercicio Resuelto 2

¿Cómo se clasifica el número $\sqrt{225}$? Con ayuda de la calculadora, obtenemos

$$\sqrt{225} = 15$$

El número que obtenemos como resultado es un número que no tiene decimales y es positivo. Por esta razón llegamos a la conclusión de que 15 es un número natural. Pero también es entero y además es racional.
Con las únicas características que no cumple son las de los irracionales. Entonces, podemos concluir que $\sqrt{225}$ es un número $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, pero no es $\mathbb{I}$.

Ejercicio Resuelto 3

¿Cómo se clasifica el número $\sqrt{114}$? Con ayuda de la calculadora, obtenemos

$$\sqrt{114} = 10{,}677078252031311\ldots$$

El resultado obtenido tiene decimales así que ya no califica como número natural ni entero. ¿Será racional? Bueno es un número con expansión decimal infinita no periódica ¿Por qué decimos eso?
Si vemos el número termina con "..." lo que indica que es infinito. Además, los decimales no tienen un patrón de repetición, no es posible identificar un orden especifico que permita establecer que número aparecer, luego del último dígito no sabemos cual número continua, por tanto $10{,}677078252031311\ldots$ es un número irracional.

Ejercicio Resuelto 4

¿Cómo se clasifican los siguientes números?
(1) $5{,}1727374757\ldots$,
(2) $-2{,}27272727272727\ldots$,
(3) $-0{,}51424242424242\ldots$

Primero el número $5{,}1727374757\ldots$ es un número con expansión decimal infinita no periódica. Debemos tener cuidado de no caer en la trampa de pensar que como hay un patrón, o orden, que parece indicar que va aumentando de 10 en 10 existe un periodo. ¿Se puede asegurar que luego del último par de dígitos sigue el 67? No hay nada que lo garantice. Entonces, $5{,}1727374757\ldots$ es un número irracional, o sea pertenece al conjunto $\mathbb{I}$.

Ahora veamos el número $2{,}27272727272727\ldots$ El par de dígitos 27 se repite durante toda la expansión decimal, un número mayor de tres veces, por tanto podemos asegurar que luego del último par de dígitos seguir un 27.

Recordando un poco, este número se puede clasificar como un número con expansión decimal infinita periódica, pues hay un patrón, un orden, que se repite indefinidamente. Entonces, concluimos que $2{,}27272727272727\ldots$ es un número racional, o sea pertenece al conjunto $\mathbb{Q}$.

Para terminar, analicemos el número $0{,}5142424242\ldots$ El par de dígitos 42 se repite durante toda la expansión decimal, un número mayor de tres veces, por tanto podemos asegurar que luego del último par de dígitos seguir un 42. Pero, ¿afecta el hecho que la expansión decimal inicia con un 51 que no se repite infinitamente? No, lo que importa es que existe un patrón, u orden, que se puede identificar y con el poder pronosticar el siguiente par de dígitos.

Una vez más, este número se puede clasificar como un número con expansión decimal infinita periódica. Entonces, concluimos que $0{,}51424242424242\ldots$ es un número racional, o sea pertenece al conjunto $\mathbb{Q}$.

Para el ejemplo anterior, $-2{,}27272727272727\ldots$ también se puede escribir $-2{,}\overline{27}$; así mismo, $-0{,}51424242424242\ldots$ se puede escribir $-0{,}51\overline{42}$.

Ejercicio Resuelto 5

Clasifique los siguientes números según corresponda. Marque con una "X" en la clasificación correcta.

Número	Racional	Irracional
$3.\overline{4}$	X	
$\sqrt[3]{27}$	X	
$\sqrt{24}$		X
$\frac{\sqrt{2}}{3}$		X
-3π		X
$-1{,}010101\ldots$	X	
$1{,}010203\ldots$		X
$1{,}010203$	X	

1.3. CONJUNTO DE LOS NÚMERO REALES

Como se puede observar en la Figura 1.2, el Conjunto de los Números Reales se forma por la unión de los Racionales con los Irracionales. A su vez los Racionales se forman por la unión de Enteros y Naturales. Ahora podemos realizar operaciones con el Conjunto de los Números Reales o simplemente los Reales.

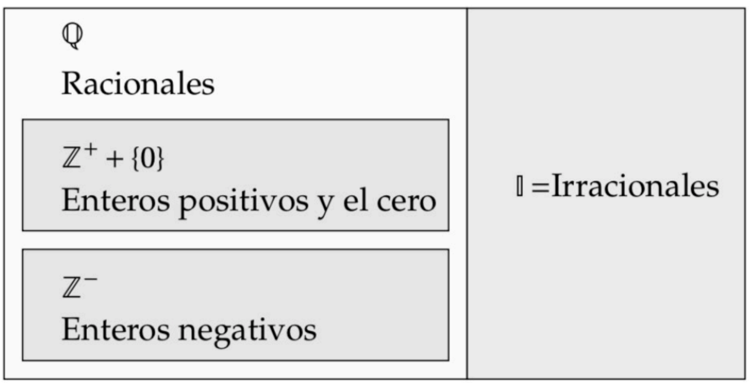


Figura 1.2: Conformación del Conjunto de los Números Reales.

Vamos a entender que cuando un número pertenece a alguno de los conjuntos, Enteros, Racionales o Irracionales entonces se le considera un número real. Pero si el número no se puede clasificar diremos qué es No Real.

Ejercicio Resuelto 6

El número $3{,}45454545\ldots$, ¿es real o no real?

Como se puede observar, nos piden que clasifiquemos un número decimal. Tiene expansión decimal infinita periódica, es decir, es un número racional. Como es un número racional entonces podemos decir que $3{,}45454545\ldots$ es un número real.

Ejercicio Resuelto 7

El número $-\sqrt{12}+1$, ¿es real o no real?

Como se puede observar, nos piden que clasifiquemos un que contiene un radical. Debemos utilizar la calculadora para saber si el radical es exacto o no exacto.
Con la calculadora obtenemos el resultado $-2{,}464101615\ldots$, lo que nos permite indicar qué es una raíz no exacta. Las raíces no exactas son números irracionales.
Entonces podemos decir que $-\sqrt{12}+1$ es un número real.

Ejercicio Resuelto 8

El número $3i$, ¿es real o no real?

El número anterior tiene una letra que nunca antes se había utilizado. Si intentamos clasificarlo como Entero, Racional o Irracional en ninguno de estos conjuntos se encuentra el símbolo i. Como no podemos ubicarlo en los reales, podemos decir que $3i$ es un número No Real.

2 CÁLCULOS Y ESTIMACIONES

Al igual que con los demás conjuntos, en el Conjunto de los Números Reales podemos realizar la suma, la resta, la multiplicación y la división, así como la potenciación y la radicación. Nos apoyaremos en la Calculadora para dar solución a estas operaciones. Por la naturaleza de los diferentes números que componen el Conjunto de los Números Reales diremos que en ocasiones los resultados de dichas operaciones no serán exactos; debemos estimar (dar un resultado aproximado) una respuesta a los cálculos que llevaremos a cabo.

Conocimientos	Habilidades
Cálculos y estimaciones	Estimar el valor de la raíz de un número entero.
Suma	Determinar números irracionales con representación radical entre dos números enteros consecutivos.
Resta	Utilizar la calculadora para resolver operaciones con radicales.
Multiplicación	Reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares.
División	Comparar y ordenar números irracionales representados en notación decimal y radical.
Potencias	Identificar números reales (racionales e irracionales) y no reales en cualquiera de sus representaciones y en diversos contextos.
Radicales	Representar números reales en la recta numérica, con aproximaciones apropiadas.

Cuadro 2.1: *Conocimientos y Habilidades del tema Cálculos y Estimaciones tomadas del Programa de Estudio de Matemáticas del MEP*

Ejercicio Resuelto 1

Realice la siguiente operación.

$$2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado $9\sqrt{5}$

Ejercicio Resuelto 2

Realice la siguiente operación.

$$4\sqrt[3]{2} - 13\sqrt[3]{2}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado $-9\sqrt[3]{2}$

Ejercicio Resuelto 3

Realice la siguiente operación.

$$\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado $\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$

Ejercicio Resuelto 4

Realice la siguiente operación.

$$\sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{48} + \sqrt{72}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado $3\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$

Ejercicio Resuelto 5

Realice la siguiente operación.

$$2\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado 6

Ejercicio Resuelto 6

Realice la siguiente operación.

$$4\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{3}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado $60\sqrt{2}$

Ejercicio Resuelto 7

Realice la siguiente operación.

$$\sqrt[3]{32} \div \sqrt[3]{16}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado $\sqrt[3]{2}$

Ejercicio Resuelto 8

Realice la siguiente operación.

$$12\sqrt{20} \div 4\sqrt{5}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado 6

Ejercicio Resuelto 9

Realice la siguiente operación.

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado 3

Ejercicio Resuelto 10

Realice la siguiente operación.

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \div \left(\frac{4}{3}\right)\right]^3$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado

$$\frac{1}{27}$$

Ejercicio Resuelto 11

Realice la siguiente operación.

$$\left[\frac{(-2)^3 \cdot (-3)}{4}\right]^2$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado 36

Ejercicio Resuelto 12

Realice la siguiente operación.

$$\left(5 - \frac{1}{5}\right)^{-1}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado

$$\frac{5}{24}$$

Ejercicio Resuelto 13

Realice la siguiente operación.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Digitamos en la calculadora la operación anterior, obtenemos el resultado

$$-\frac{1}{2}$$

Ejercicio Resuelto 14

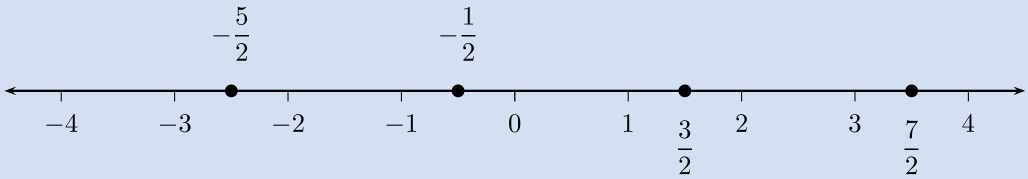
Represente los siguientes números en la recta numérica.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{5}{2}$

Para poder ubicar los números anteriores en una recta numérica utilizamos la calculadora para encontrar un valor aproximado de cada uno.

$\frac{3}{2} = 1{,}5$ $\frac{7}{2} = 3{,}5$ $-\frac{1}{2} = -0{,}5$ $-\frac{5}{2} = -2{,}5$

Una vez que ubicamos la posición, ponemos un punto y el número original. Los números anteriores se ubicarán como se muestra a continuación



Ejercicio Resuelto 15

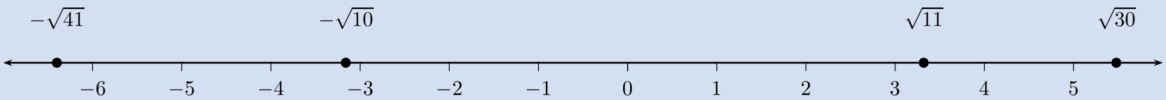
Represente los siguientes números en la recta numérica.

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{30}$ c) $-\sqrt{41}$ d) $-\sqrt{10}$

Para poder ubicar los números anteriores en una recta numérica utilizamos la calculadora para encontrar un valor aproximado de cada uno.

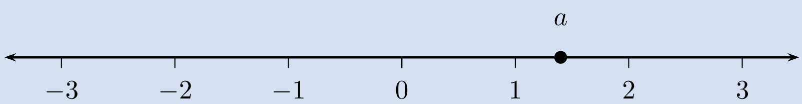
$\sqrt{11} \approx 3{,}3166$ $\sqrt{30} \approx 5{,}4772$ $-\sqrt{41} \approx -6{,}4031$ $-\sqrt{10} \approx -3{,}1622$

Una vez que ubicamos la posición, ponemos un punto y el número original. Los números anteriores se ubicarán como se muestra a continuación



Ejercicio Resuelto 16

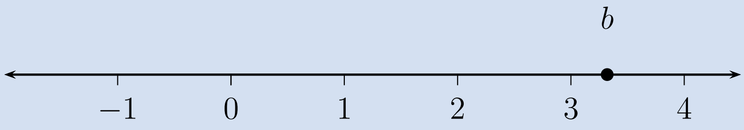
Estime el valor del número que se representa con la letra "a" en la recta numérica que se presenta a continuación.



Se puede observar que el número representado por la letra "a" se encuentra entre 1 y 2, esto nos indica que "a" puede valer 1,5 ó $\sqrt{2}$. Para que el ejercicio no tenga múltiples interpretaciones, por lo general se brinda una serie de opciones para que se marque la mas adecuada.

Ejercicio Resuelto 17

Considere la siguiente figura.



Un posible valor de "b" es:

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{101}$ c) $-\sqrt{5}$ d) $-\sqrt{15}$

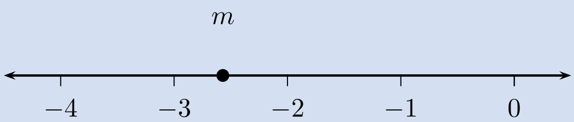
Para poder responder el ejercicio debemos calcular el valor de cada opción:

$\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$ $\sqrt{101} = 10{,}0498\ldots$ $-\sqrt{5} = -2{,}2360\ldots$ $-\sqrt{15} = -3{,}8729\ldots$

De aquí nos damos cuenta que el único valor que se encuentra entre 3 y 4 es $\sqrt{10}$, por tanto la opción correcta en este caso es la a).

Ejercicio Resuelto 18

Considere la siguiente figura.



Un posible valor de "m" es:

a) $\sqrt[3]{-10}$ b) $\sqrt[3]{-6}$ c) $-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ d) $-\sqrt[3]{17}$

Una vez más, para resolver el ejercicio, debemos calcular el valor de cada opción:

$\sqrt[3]{10} \approx -2{,}1544$ $\sqrt[3]{6} \approx -1{,}8171$ $-\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx -1{,}1447$ $-\sqrt[3]{17} \approx -2{,}5712$

A primera vista nos damos cuenta que la opción a) o la opción d) son las mas cercanas al valor representado por "m".

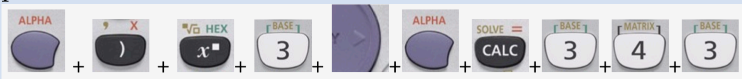
Pero considerando que $\sqrt[3]{-10} \approx 2{,}1544$ se encuentra mas cerca del 2 que del 3 y que $\sqrt[3]{17} \approx 2{,}5712$ se puede ubicar mas al centro entre los dos números; concluimos que la respuesta correcta en este caso es la opción d).

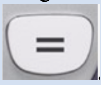
Ejercicio Resuelto 19

Encuentre el valor de “x” en la siguiente ecuación.

$$x^3 = 343$$

Para resolver este tipo de problemas nos vamos a apoyar en el uso de la calculadora. En especial utilizando la función Alpha.

Digitamos 

En la pantalla aparece la ecuación y digitamos ; nos aparece Solve for x en la pantalla. Presionamos entonces dos veces el botón . Obtenemos el resultado

$$x = 7$$

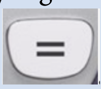
Ejercicio Resuelto 20

Encuentre el valor de “x” en la siguiente ecuación.

$$x^5 = 6$$

Para resolver este tipo de problemas nos vamos a apoyar en el uso de la calculadora. En especial utilizando la función Alpha.

Digitamos 

En la pantalla aparece la ecuación y digitamos ; nos aparece Solve for x en la pantalla. Presionamos entonces dos veces el botón . Obtenemos el resultado

$$x = 1{,}430969081\ldots$$

3 CANTIDADES MUY GRANDES Y MUY PEQUEÑAS

Las unidades de medida es el término dado para describir el tipo de medida que se está realizando. Por ejemplo, en los Estados Unidos se utilizan las libras para describir el peso y los pies y pulgadas para describir la longitud.

Conocimientos	Habilidades
Cantidades muy grandes y muy pequeñas	Utilizar los prefijos del Sistema Internacional de Medidas para representar cantidades muy grandes y muy pequeñas.
	Utilizar la calculadora o software de cálculo simbólico como recurso en la resolución de problemas que involucren las unidades.

Cuadro 3.1: *Conocimientos y Habilidades del tema Cantidades muy grandes y muy pequeñas, tomadas del Programa de Estudio de Matemáticas del MEP*

Debemos reconocer cuatro grandes grupos de medidas, las de longitud, las de masa, las de temperatura y las de tiempo.

La masa se considera una cantidad base del SI y se representa por la unidad gramos (g). La longitud y distancia también es una cantidad base del SI cuya unidad es el metro (m).

La temperatura tiene como unidad base el kelvin (K) – nombrado así en honor a William Thomson Baron Kelvin, y la unidad es el grado. Está se basa en el cero absoluto (0K), la temperatura más baja en cualquier sistema microscópico.

Por último, el tiempo se mide en segundos.

A continuación vamos a definir los prefijos decimales y exponentes de expresiones del Sistema Internacional.

Cuadro 3.2: *Prefijos del Sistema Internacional de Medidas, aplicados a medidas de longitud, masa y volúmen.*

Exp	Prefijo	Longitud	Masa	Volúmen
10^{24}	yotta	yottametro	yottagramo	yottalitro
10^{21}	zetta	zettametro	zettagramo	zettalitro
10^{18}	exa	exametro	exagramo	exalitro
10^{15}	peta	petametro	petagramo	petalitro
10^{12}	tera	terametro	teragramo	teralitro
10^{9}	giga	gigametro	gigagramo	gigalitro
10^{6}	mega	megametro	megagramo	megalitro
10^{3}	kilo	kilometro	kilogramo	kilolitro
10^{2}	hecto	hectometro	hectogramo	hectolitro
10^{1}	deca	decametro	decagramo	decalitro
10^{0}	–	metro	gramo	litro
10^{1}	deci	decimetro	decigramo	decilitro
10^{2}	centi	centimetro	centigramo	centilitro
10^{3}	mili	milimetro	miligramo	mililitro
10^{6}	micro	micrometro	microgramo	microlitro
10^{9}	nano	nanometro	nanogramo	nanolitro
10^{12}	pico	picometro	picogramo	picolitro
10^{15}	femto	femtometro	femtogramo	femtolitro
10^{18}	atto	attometro	attogramo	attolitro
10^{21}	zepto	zeptometro	zeptogramo	zeptolitro
10^{24}	yocto	yoctometro	yoctogramo	yoctolitro

Ejercicio Resuelto 1

En 2 decalitros, ¿cuántos litros hay?
Para iniciar buscamos en la tabla anterior a cuanto equivale un decalitro; observamos que equivale a 10^1 litros entonces usaremos la relación de conversión

$$\text{Valor dado} \cdot \text{Unidad original} \times \frac{1}{\text{Unidad Nueva}}$$

Para nuestro caso tendríamos

$$2 \cdot 10^1 \times \frac{1}{10^0} = 20$$

Por tanto, la respuesta es: En 2 decalitros hay 20 litros.

Ejercicio Resuelto 2

En 1 hectómetro, ¿cuántos metros hay?
Para iniciar buscamos en la tabla anterior a cuanto equivale un hectómetro; observamos que equivale a 10^2 metros entonces usaremos la relación de conversión

$$\text{Valor dado} \cdot \text{Unidad original} \times \frac{1}{\text{Unidad Nueva}}$$

Para nuestro caso tendríamos

$$1 \cdot 10^2 \times \frac{1}{10^0} = 100$$

Por tanto, la respuesta es: En 1 hectómetro hay 100 metros.

Ejercicio Resuelto 3

En 4 petametros, ¿cuántos micrómetros hay?
Para iniciar buscamos en la tabla anterior a cuanto equivale un hectómetro; observamos que equivale a 10^{15} metros entonces usaremos la relación de conversión. Además buscamos a cuanto equivale un micrómetros y encontramos que es 10^6

$$\text{Valor dado} \cdot \text{Unidad original} \times \frac{1}{\text{Unidad Nueva}}$$

Para nuestro caso tendríamos

$$4 \cdot 10^{15} \times \frac{1}{10^{-6}} = 4 \times 10^{21}$$

Por tanto, la respuesta es: En 4 petametros hay 4×10^{21} micrómetros.

4 EJERCICIOS DE LA PARTE UNO

Práctica General de la Primera Parte.

Aplique los conceptos y procedimientos estudiados para resolver de manera correcta los ejercicios que se le proponen a continuación[1].

1. Para cada uno de los siguientes números establezca el conjunto o conjuntos al que pertenece.

   a) $\sqrt{10}$
   b) 2π
   c) $-\frac{e}{5}$
   d) $\frac{3}{4}$
   e) $3.\overline{543}$
   f) -5
   g) $\sqrt{11}$
   h) $-\frac{3}{4}$
   i) $\sqrt{36}$
   j) 23
   k) $\sqrt[3]{6}$
   l) $-\sqrt[4]{16}$
   m) 0
   n) $\sqrt{1}$
   ñ) $\frac{3\pi}{2\pi}$
   o) $\frac{1+e}{\pi}$

2. Clasifique los siguientes números como racionales o irracionales, si están bien definidos.

   a) $\sqrt{3}$
   b) $\frac{19}{17}$
   c) $\sqrt{7}$
   d) 45
   e) e
   f) $2{,}026$
   g) $\sqrt[5]{12}$
   h) $\sqrt[3]{\frac{27}{12}}$
   i) $\sqrt[4]{-16}$
   j) $\sqrt{\frac{1}{9}}$
   k) $\sqrt[5]{-32}$
   l) $-101{,}\overline{567}$
   m) $-4\frac{2}{5}$
   n) $16{,}028424\ldots$

3. Analice y conteste la siguiente pregunta

   Al restar o sumar dos número irracionales, ¿se obtiene como resultados un número irracional?

[1] *Ramírez, M. (2015).* Pendulum Noveno: develando la realidad *(1.ª ed.). Siwo Editorial.*

4. Clasifique las siguientes expresiones como racionales o irracionales.

   a) $\sqrt{2}$
   b) $\sqrt{13}$
   c) $\sqrt{24}$
   d) $-\sqrt{37}$
   e) $\sqrt[3]{12}$
   f) $\sqrt[3]{-5}$
   g) $\sqrt[5]{8}$
   h) 5
   i) $-10e$
   j) $-\frac{7}{5}+\frac{23}{7}$
   k) $\pi - 5{,}86$
   l) $3+\sqrt{3}$

5. Escriba Falso, si la proposición es falsa, o Verdadero si es verdadera.

   a) Toda fracción es un número racional

   ____

   b) Toda raíz es un número irracional

   ____

   c) Todos los números irracionales son raíces

   ____

   d) Toda expansión decimal finita puede también ser representada por una expansión decimal infinita periódica

   ____

   e) Algunas fracciones mixtas representan números irracionales

   ____

   f) Algunos números irracionales pueden denotarse por medio de una fracción

   ____

   g) La suma de un número racional y otro irracional da como resultado un racional

   ____

   h) El producto de un racional y un irracional siempre es irracional

   ____

6. Para las siguientes expresiones determine si son racionales o irracionales.

   a) $-\frac{1}{7}$
   b) -4
   c) $-\frac{e}{5}$
   d) $-\pi+2$
   e) $\sqrt[3]{(-8)^5}$
   f) 17
   g) $2\sqrt[3]{8}$
   h) 0
   i) $-7{,}4$
   j) $-\sqrt{169}$
   k) $2{,}711$
   l) $-1.\overline{4}$

7. Clasifique las siguientes expresiones como racionales o irracionales.

   a) $\sqrt{2}+3$
   b) $\frac{\sqrt{36}}{6}$
   c) $\sqrt{16}-\pi$
   d) $-\frac{\sqrt[3]{8}}{3}$
   e) $1+\sqrt{100}$
   f) $9+\sqrt{2}$
   g) -8π
   h) $-\frac{3e}{2}$
   i) $\pi-\pi$
   j) $\frac{\pi}{\pi}$
   k) $\sqrt[5]{32}$
   l) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}$

8. Determine en cada caso si los números tiene expansión decimal infinita periódica o no periódica. Luego, determine si es un número racional o irracional.

   a) $2{,}8383838383\ldots$ ____________________
   b) $2{,}3333333333\ldots$ ____________________
   c) $2{,}132132132\ldots$ ____________________
   d) $5{,}131331333\ldots$ ____________________
   e) $1{,}90919293\ldots$ ____________________

9. Considere las siguiente proposiciones

   I. “e” es un número irracional.

   II. $-\sqrt{10}$ es un número irracional.

   De ellas son verdaderas

   a) Ambas
   b) Ninguna
   c) Solo la I.
   d) Solo la II.

10. Considere las siguiente proposiciones

    I. $\frac{1}{8}$ es un número racional.

    II. $\sqrt{2{,}3}$ es un número real.

    De ellas son verdaderas

    a) Ambas
    b) Ninguna
    c) Solo la I.
    d) Solo la II.

11. Considere las siguiente proposiciones

    I. $\sqrt{17} < \pi$

    II. $\sqrt{3} > \sqrt{2}$

    De ellas son verdaderas

    a) Ambas
    b) Ninguna
    c) Solo la I.
    d) Solo la II.

12. ¿Cuál de los siguiente números <u>no</u> es real?

    a) $\sqrt[3]{11}$ b) $\sqrt{-5}$ c) $-\sqrt{7}$ d) $-\sqrt[3]{13}$

13. ¿Cuál de los siguientes números tiene expansión decimal infinita no periódica?

    a) $\frac{1}{9}$ b) $0{,}37$ c) $\sqrt{9}$ d) $\sqrt{15}$

14. ¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación de $\sqrt{8}$?

    a) $1{,}92$ b) $2{,}83$ c) $3{,}24$ d) $3{,}35$

15. Si $5 < x < 6$ entonces, un posible valor de "x" corresponde a

    a) $\sqrt{20}$
    b) $\sqrt{22}$
    c) $\sqrt{24}$
    d) $\sqrt{26}$

16. Si $2 < x < 3$ entonces, un posible valor de "x" corresponde a

    a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{11}$

17. ¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación de $\sqrt{2}$?

    a) 0,50 b) 0,99 c) 1,01 d) 1,41

18. ¿Cuál de los siguientes números corresponde a un número con expansión decimal infinita no periódica?

    a) 2,838383838...
    b) 2,333333333...
    c) 2,132132132...
    d) 2,131331333...

19. La expresión $\pi + 1$ corresponde a un número

    a) entero
    b) no real
    c) racional
    d) irracional

    Considere los siguiente números para responder las preguntas 20 y 21

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad b = \sqrt{8} + 1 \quad c = 3{,}14 \quad d = 1{,}909192\ldots$$

20. Considere las siguiente proposiciones

    I. a^2 representa un número irracional

    II. c representa un número irracional

    De ellas son verdaderas

    a) Ambas c) Solo la I.
    b) Ninguna d) Solo la II.

21. Considere las siguiente proposiciones

I. $b = 3$

II. $a > d$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

22. Considere las siguiente proposiciones

I. Si $x = \sqrt{11}$ entonces $5 < x < 6$

II. Si $7 < a < 8$ entonces un posible valor para "a" corresponde a $a = \sqrt{60}$

De ellas son verdaderas

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

23. Considere las siguiente proposiciones

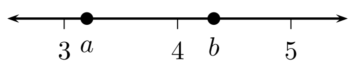
I. La expresión $\sqrt{13}$ corresponde a un número real

II. La expresión $\sqrt{-5}$ corresponde a un número no real

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

Considere los datos de la siguiente gráfica para responder las preguntas 24 y 25



24. Un posible valor de "a" es

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt{17}$
c) $\sqrt{37}$
d) $\sqrt{50}$

25. Un posible valor de "b" es

    a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{70}$

26. Considere las siguiente proposiciones

    I. "π" es un número irracional

    II. $\sqrt{16}$ es un número irracional

    De ellas son verdaderas

    a) Ambas c) Solo la I.

    b) Ninguna d) Solo la II.

27. Un número irracional corresponde a

    a) $3^{1/2}$ b) $9^{1/2}$ c) $(\sqrt{1})^2$ d) $(\sqrt{3})^2$

28. Considere las siguiente proposiciones

    I. $\sqrt{15} < e$

    II. $\sqrt{5} > \sqrt{3}$

    De ellas son verdaderas

    a) Ambas c) Solo la I.

    b) Ninguna d) Solo la II.

29. ¿Cuál de los siguientes números corresponde a un número con expansión decimal infinita no periódica?

    a) $\frac{1}{3}$ b) $0{,}29$ c) $\sqrt{4}$ d) $\sqrt{17}$

30. ¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación de $\sqrt{11}$?

    a) $1{,}43$ b) $2{,}31$ c) $3{,}32$ d) $4{,}63$

31. Si $20 < x < 21$ entonces, un posible valor de "x" corresponde a

    a) $\sqrt{41}$
    b) $\sqrt{400}$
    c) $\sqrt{435}$
    d) $\sqrt{441}$

32. Si $9 < x < 10$ entonces, un posible valor de "x" corresponde a

    a) $\sqrt{19}$ b) $\sqrt{81}$ c) $\sqrt{90}$ d) $\sqrt{100}$

33. ¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación de $\sqrt{3}$?

    a) $0{,}49$ b) $0{,}97$ c) $1{,}73$ d) $2{,}41$

34. Considere las siguiente proposiciones

    I. "0" pertenece al conjunto de los número reales

    II. $\sqrt{4}$ pertenece al conjunto de los números irracionales

    De ellas son verdaderas

    a) Ambas
    b) Ninguna
    c) Solo la I.
    d) Solo la II.

35. Un número irracional corresponde a

    a) $2^{1/2}$ b) $4^{1/2}$ c) $(\sqrt{2})^2$ d) $(\sqrt{4})^2$

36. Considere las siguiente proposiciones

    I. $\sqrt{-2}$ representa un número real

    II. $4^{1/3}$ representa un número irracional

    De ellas son verdaderas

    a) Ambas
    b) Ninguna
    c) Solo la I.
    d) Solo la II.

37. Considere las siguiente proposiciones

I. $\pi > \sqrt{8}$

II. $\sqrt{3} < e$

De ellas son verdaderas

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

38. ¿Cuál de los siguientes números es no real?

a) $-\sqrt{2}$
b) $\sqrt{-3}$
c) $\sqrt[3]{-4}$
d) $-\sqrt[3]{5}$

39. ¿Cuál de los siguientes números tiene expansión decimal infinita no periódica?

a) $\frac{1}{7}$
b) $\frac{3}{13}$
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{25}$

40. El número $\sqrt[3]{6}$ se ubica entre

a) 0 y 1
b) 1 y 2
c) 2 y 3
d) 3 y 4

41. Si "x" representa un número irracional con la condición $2 < x < 3$ corresponde a

a) $\sqrt{41}$
b) $\sqrt{400}$
c) $\sqrt{435}$
d) $\sqrt{441}$

42. Considere las siguiente números

I. $-23{,}5\overline{34}$

II. $100{,}011111\ldots$

III. $7{,}1010010001\ldots$

¿Cuál de ellos corresponde a números con expansión decimal infinita no periódica?

a) Solo el I.
b) Solo el III.
c) El I y el II.
d) El II y el III.

43. El número $3\sqrt{11}$ en notación decimal es aproximadamente

a) $3{,}32$ b) $9{,}95$ c) $12{,}00$ d) $33{,}00$

44. Considere las siguiente proposiciones

I. $\sqrt[3]{0}$ es un número racional

II. 2π es un número racional

De ellas son verdaderas

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

45. Considere las siguiente proposiciones

I. $\sqrt{10} - 1$ es un número racional

II. $-2{,}337445$ es un número irracional

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

46. Considere las siguiente proposiciones

I. $\sqrt[3]{3} > \sqrt{3}$

II. $3{,}121121112\ldots < 3\sqrt{2}$

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

47. Considere las siguiente proposiciones

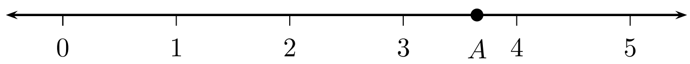
I. $\sqrt[3]{-5}$ es un número <u>no</u> real

II. $\sqrt{3\pi}$ es un número real

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I.
d) Solo la II.

48. Considere la siguiente representación gráfica



De acuerdo con la representación anterior, un posible valor de “A” es:

a) $\sqrt[3]{4}$
b) $\sqrt[3]{27}$
c) $\sqrt[3]{50}$
d) $\sqrt[3]{64}$

49. Realice las siguiente sumas y restas con radicales

a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

b) $2+\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{125}$

c) $2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}$

d) $-3\sqrt[3]{5}+6\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}$

e) $6\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+8\sqrt{3}+\sqrt{2}$

f) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}+2\sqrt{6}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

g) $3\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}$

h) $3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{128}-2\sqrt[3]{250}-6\sqrt[3]{2}$

i) $3\sqrt[3]{2}+\sqrt{12}-4\sqrt[3]{54}-3\sqrt{12}$

j) $2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}+2\sqrt[4]{729}+\sqrt[4]{1875}$

k) $\sqrt{45}-\sqrt{243}+5\sqrt{32}$

l) $-1\sqrt{3}+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

m) $-4\sqrt{2}-5\sqrt{2}$

n) $8\sqrt{5}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{3}$

ñ) $\sqrt{4}-\sqrt{9}-\sqrt{16}+3$

o) $\sqrt{108}+\sqrt{75}$

p) $3\sqrt{5}-\sqrt{20}+3\sqrt{45}$

q) $\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}$

r) $3\sqrt{18}-2\sqrt{72}+2\sqrt{50}$

s) $\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

t) $\sqrt[3]{64}-2\sqrt[3]{27}+5\sqrt[3]{216}$

u) $6\sqrt{2}-5\sqrt{3}-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

v) $5\sqrt{6}-4\sqrt{24}-2\sqrt{30}$

w) $\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}$

x) $-2\sqrt{5}+6\sqrt{75}$

y) $3\sqrt[4]{81}+2\sqrt[4]{16}$

50. Efectúe las siguiente sumas y restas con radicales.

a) $\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

c) $-4\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}$

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+3\sqrt{2}-5\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-6\sqrt{2}-2\sqrt[3]{2}$

f) $\frac{2}{3}\sqrt{7}+\frac{3}{4}\sqrt{7}-\frac{1}{6}\sqrt{7}$

g) $\sqrt{4}+\sqrt{16}+\sqrt{25}$

h) $\frac{1}{2}\sqrt{64}-\frac{3}{4}\sqrt{144}-\sqrt{36}$

i) $\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{25}{16}}-1$

j) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}}-\frac{5}{8}\sqrt{\frac{64}{25}}$

51. Efectúe cada una de las siguientes multiplicaciones de radicales homogéneos.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{9}$

c) $2\sqrt[3]{3}\cdot 3\sqrt[3]{18}$

d) $3\sqrt[5]{3}\cdot 2\sqrt[5]{81}$

e) $4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$

f) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{4}$

g) $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2}$

h) $\sqrt[3]{21} \cdot \sqrt[3]{49}$

i) $\dfrac{5}{6}\sqrt{27} \cdot 6\sqrt{12}$

j) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{6}$

k) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{6}$

l) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{4} \cdot -\dfrac{5}{6}\sqrt[3]{4}$

m) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{5}$

n) $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{3}$

ñ) $\dfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

52. Efectúe las siguientes multiplicaciones con radicales.

a) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

c) $\sqrt{\dfrac{9}{2}} \cdot \sqrt{32}$

d) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{360}$

f) $\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - \sqrt{20}\right)$

g) $-\sqrt{6}\left(\sqrt{24} + \sqrt{6}\right)$

h) $4\sqrt{6}\left(-2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right)$

i) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{8}\right)$

j) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{10}\right)$

k) $\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{2} - 4\sqrt{6}\right)$

l) $\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$

53. Efectúe cada una de las siguientes divisiones con radicales.

a) $\sqrt[5]{256} \div \sqrt[5]{16}$

b) $8\sqrt[5]{64} \div 2\sqrt[5]{2}$

c) $15\sqrt[7]{54} \div 5\sqrt[7]{27}$

d) $18\sqrt[8]{5} \div 9\sqrt[8]{5}$

e) $25\sqrt[6]{4} \div 25\sqrt[6]{2}$

f) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$

g) $\sqrt{147} \div \sqrt{3}$

h) $\left(\sqrt{75} - \sqrt{12}\right) \div \sqrt{3}$

i) $\sqrt{3 - \dfrac{2}{9}}$

j) $\sqrt[5]{-32} \div \sqrt[5]{243}$

k) $\sqrt{60} \div \sqrt{15}$

l) $18\sqrt{15} \div 6\sqrt{3}$

m) $\sqrt{45} \div \sqrt{48}$

n) $\sqrt{75} \div \sqrt{12}$

ñ) $\sqrt{20} \div \sqrt{45}$

o) $\sqrt[3]{-54} \div \sqrt[3]{16}$

p) $\sqrt[3]{250} \div \sqrt[3]{2}$

q) $\sqrt[3]{108} \div \sqrt[3]{4}$

r) $\sqrt{\dfrac{625}{169}}$

s) $\sqrt[3]{\dfrac{343}{64}}$

t) $\sqrt{5 + \dfrac{1}{16}}$

54. Efectúe las siguientes fórmulas notables con radicales.

a) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)$

b) $\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)$

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$

d) $\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)$

e) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

f) $\left(2\sqrt{7}-5\right)^2$

g) $\left(2+\sqrt{2}\right)^2$

h) $\left(3-\sqrt{3}\right)^2$

i) $\left(\sqrt{5}+6\right)^2$

j) $\left(5\sqrt{2}-4\right)^2-\left(3-\sqrt{2}\right)^2$

k) $\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$

l) $\left(5\sqrt{4}-6\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{4}\right)$

m) $\left(3\sqrt{2}-5\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)$

n) $\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)$

ñ) $\left(5\sqrt{6}-4\sqrt{3}\right)^2$

o) $\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)^2$

p) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2$

q) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

55. Coloque el símbolo que corresponda $>, <$ ó $=$, en cada uno de los espacios en blanco.

a) $-\sqrt{5}$ ______ $-\pi$

b) $-2\sqrt{5}$ ______ -1

c) $-\dfrac{4}{5}$ ______ $-\frac{1}{5}$

d) $-\sqrt[3]{9}$ ______ $-\sqrt[3]{8}$

e) π ______ $2e$

f) $3\sqrt{\pi}$ ______ $4\sqrt[5]{e}$

g) $2\sqrt{9}$ ______ $3\sqrt{8}$

h) $3\sqrt[5]{8}$ ______ $4\sqrt{7}$

i) $3\sqrt[7]{8} - e$ ______ 2π

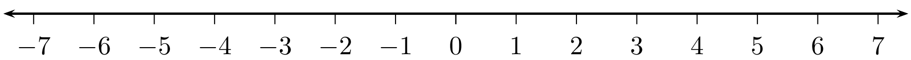
j) $\dfrac{2e}{3}$ ______ $\dfrac{10e}{15}$

k) $-5\pi^2$ ______ $-5e^3$

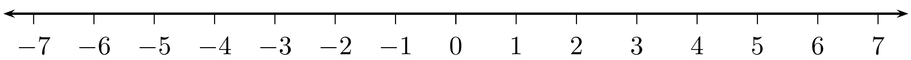
l) $\dfrac{-5\pi}{7}$ ______ $\dfrac{-15\pi}{21}$

56. Ubique en cada recta numérica la letra que corresponda a cada número.

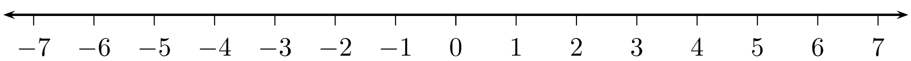
a) $a = \sqrt{32}$ $\quad b = \sqrt{24}$ $\quad c = -\sqrt{15}$ $\quad d = -\sqrt{8}$ $\quad e = \sqrt{2}$



b) $a = \sqrt[3]{9}$ $b = \sqrt[3]{30}$ $c = \sqrt[3]{-70}$ $d = -\sqrt[3]{135}$ $e = \sqrt[3]{-240}$

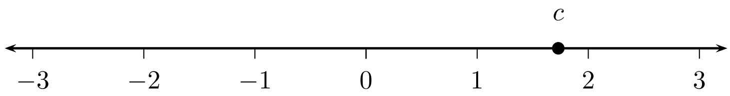


c) $a = \sqrt[4]{18}$ $\quad b = \sqrt[4]{120}$ $\quad c = -\sqrt[4]{350}$ $\quad d = \sqrt[4]{800}$



57. Para cada uno de los siguiente ejercicios, elija la opción correcta.

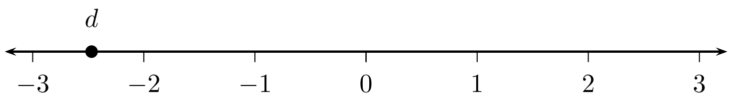
a) Considere la siguiente figura.



Un posible valor de "c" es:

a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{10}$

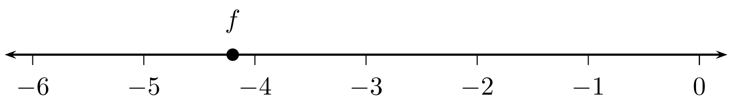
b) Considere la siguiente figura.



Un posible valor de "d" es:

a) $\sqrt[5]{6}$ b) $-\sqrt[4]{29}$ c) $\sqrt[5]{-6}$

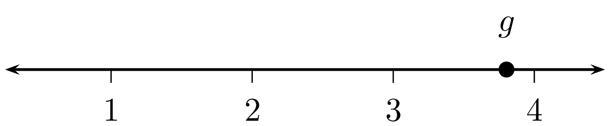
c) Considere la siguiente figura.



Un posible valor de "f" es:

a) $\sqrt[3]{17}$ b) $-\sqrt{17}$ c) $\sqrt[3]{-17}$

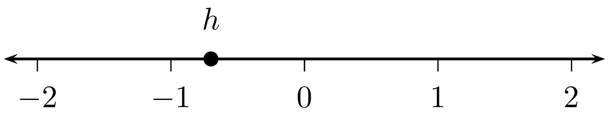
d) Considere la siguiente figura.



Un posible valor de "g" es:

a) $\sqrt[5]{28}$ b) $\sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{28}$

e) Considere la siguiente figura.



Un posible valor de "h" es:

a) $\sqrt[3]{\frac{9}{20}}$ b) $\sqrt[3]{-\frac{9}{20}}$ c) $-\sqrt{\frac{29}{20}}$

58. Utilizando la calculadora encuentre el valor de la "x" en las siguiente ecuaciones.

a) $2^x = 8$

b) $x^4 = 32$

c) $x^7 = 1234$

d) $3^x = 81$

e) $x^2 = 121$

f) $x^3 = 125$

g) $5^x = 625$

h) $3^x = 343$

i) $x^7 = 150$

59. De acuerdo con el Sistema Internacional de Medidas, 1 nanómetro equivale a

a) 100000000 metros

b) 0, 000000001 metros

c) 1000000000 metros

d) 0, 0000000001 metros

60. De acuerdo con el Sistema Internacional de Medidas, el número 3 000 000 000 equivale a

a) 3 gigas

b) 3 nanos

c) 3 teras

d) 3 megas

61. Dos megámetros equivalen a

a) $2x10^3$ metros
b) $2x10^6$ metros
c) $2x10^9$ metros
d) $2x10^{12}$ metros

62. ¿A cuántos nanómetros equivalen 4 micrómetros?

a) 400
b) 800
c) 4000
d) 8000

63. En el siguiente cuadro se presentan algunos dispositivos de memoria o de almacenamiento de información (unidad de medida byte "b") y su respectiva capacidad de almacenamiento:

Cuadro 4.1: *Información del Ejercicio 63.*

Nombre del Dispositivo	Capacidad de almacenamiento de información
Disco Compacto	700 Mb
Disco Duro Externo	1 Tb
Llave Maya	16 Gb
Micro SD	8000 Mb

Con base en el contexto dado, considere las siguientes proposiciones:

I. Tiene más capacidad de almacenamiento la llave maya que el disco duro externo.

II. La capacidad de almacenamiento de la llave maya es mayor que la capacidad de almacenamiento de la micro SD.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

a) Ambas
b) Ninguna
c) Solo la I
d) Solo la II

64. De acuerdo con el Sistema Internacional de Medidas, el número 8000000 de metros equivalen a

a) 8 picómetros
b) 8 gigámetros
c) 8 megámetros
d) 8 micrómetros

65. De acuerdo al Sistema Internacional de Medidas, 1 gigámetro equivale a

a) 1 000 000 metros
b) $0,000\,000\,001$ metros
c) 1 000 000 000 metros
d) $0,000\,000\,000\,1$ metros

66. De acuerdo al Sistema Internacional de Medidas, 1 microlitro equivale a

a) 1 000 000 litros
b) 0,000 001 litros
c) 0,000 000 000 1 litros
d) 1 000 000 000 litros

67. Dos micrómetros equivalen a

a) 100 nanómetros
b) 200 nanómetros
c) 1000 nanómetros
d) 2000 nanómetros

68. De acuerdo al Sistema Internacional de Medidas 1000000 metros equivalen a

a) 1 picómetro
b) 1 gigámetro
c) 1 megámetro
d) 1 micrómetro

Práctica General. Efectúe las siguientes operaciones con números reales.

69. $\dfrac{18 - 12 \div 3 + 2}{4 + 3 \cdot 5}$

70. $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}{\sqrt{8}}$

71. $\left(3^4 + 3^2\right)^{1/2}$

72. $(-1+3^{-2}\cdot 6^2)^{-1}$

73. $3\sqrt{27}-\sqrt{48}+\dfrac{4}{\sqrt{12}}$

74. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$

75. $\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^{-2}\div\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^{2}$

76. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{-81}}+\sqrt[3]{3}$

77. $\dfrac{3^0+\sqrt[4]{16}}{-\left[-3-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^{-1}}$

78. $\left(2-\dfrac{1}{5}\right)^{-1}+\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{8}\right)^{2}$

79. $5\sqrt[4]{256}+\left(3\sqrt{3}\right)^2\div\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

80. $\dfrac{-20+12\div 4}{9}+\left(-2\cdot -3+\dfrac{1}{3}\right)$

81. $-2\dfrac{1}{3}+0.\overline{1}$

82. $2.\overline{3}-3.\overline{1}$

83. $-3.\overline{1}\cdot 2.\overline{3}$

84. $-3\dfrac{1}{2}+1.\overline{8}+1{,}9$

85. $5.\overline{4}-5{,}4$

86. $2\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{12}\div\sqrt{6}$

87. $\dfrac{3^{-2}-2}{-2^0\div 5^0}$

88. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{-8}\right)^{-2}}{2\cdot 3^{-1}}$

89. $\dfrac{(-2)^2-(-3)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)}$

90. $-\left[2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^{-1}$

91. $\dfrac{\sqrt{12}+4}{\sqrt{18}}-\sqrt{\dfrac{2}{9}}$

92. $\dfrac{2\cdot 3^{-1}}{\left(\sqrt[6]{\frac{1}{8}}\right)^2}$

93. $\dfrac{5\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}}{3\left(5-2\sqrt[3]{8}\right)^3}$

94. $\dfrac{2\sqrt{2^3+2}}{\sqrt{5}-\sqrt{20}}$

95. $\dfrac{5+5^{-2}\div 5^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 4^{-1}}$

96. $\dfrac{-2\left(-3+24\div 4\cdot 3\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\frac{1}{4}\cdot -4^2}$

97. $\dfrac{\frac{-1}{2}+\frac{3}{4}\cdot 2}{1-\frac{1}{2}}$

98. $\dfrac{1}{4}-\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{12}}$

99. $1-3\div\dfrac{7}{3}+\sqrt[5]{32^{-1}}$

100. $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8-2^{-1}\cdot 3^2$

101. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{-16}}+\sqrt[3]{2}$

102. $\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

103. $\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{4}{3}-2\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\div 2^{-2}$

104. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{-3125}\right)^{-2}}{4\cdot 3^{-3}}$

105. $\left(\sqrt{5}\right)^6 - 10 \cdot 4^3$

106. $\dfrac{1}{(-7)^{-3}} - 9$

107. $\left(\dfrac{4^2 - 8}{5^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$

108. $\dfrac{(-1)^2 - 1^7 + (-8)^0}{3^4 - 12^0}$

109. $\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3} + 1}$

110. $11\left[3^3 - 5^3 \div \left(2\sqrt[3]{7}\right)^3\right]$

111. $\left(\sqrt{6}\right)^6 - 5 \cdot 4^5$

112. $\left(\sqrt[3]{4^{-1}}\right) + (-8 + 3)^3$

113. $\left(\sqrt[7]{12}\right)^4 - 3^{-2} \cdot 6^3$

114. $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{10}}$

115. $\sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$

116. $\dfrac{5}{3}\left(\sqrt{\dfrac{18 + 5 - 9}{15 + 4^2}}\right)^{-3}$

117. $\dfrac{2 - \sqrt{5}}{5} - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$

118. $\dfrac{\left(8\sqrt{5}\right)^3}{-3 \cdot \sqrt[3]{-8}}$

119. $3 + \dfrac{\dfrac{6}{5} \div 3 + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{4}{5} \div \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{4}}$

120. $\sqrt{1 - \dfrac{8}{9}} \cdot (-3)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 \div \dfrac{3}{2}$

121. $\sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt[3]{27} \div \frac{3}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

122. $\left(\sqrt{3} + 4\right)^2 - \left(1 + 4\sqrt{3}\right)^2$

123. $\sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{6}}$

124. $\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 - 6\left(3 - \sqrt{2}\right) + 7$

125. $\left(\sqrt{7} - 3\right)^2 + 6\left(\sqrt{7} - 3\right) - 19$

126. $3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$

127. $4\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{125} + 3\sqrt[6]{1600} - 15\sqrt{\frac{1}{25}}$

128. $\left(8\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right)$

129. $\left(5 + 2\sqrt{3}\right)^2 - 10\left(5 + 2\sqrt{3}\right) + 13$

130. $\frac{2}{\sqrt{18}} - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$

131. $\frac{2 + \sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{4}}$

132. $\frac{\sqrt{\sqrt{2} + 1}}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$

133. $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

134. $\frac{7 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$

135. $\frac{\sqrt{6}}{2 - \sqrt{6}}$

136. $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

137. $\frac{12}{3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2}}$

138. $20 - [(4 \cdot 3 + 15) \div 3 - 2]$

139. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$

140. $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

141. $-2 + \frac{1}{2} - \left[-1 - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right]$

142. $\left(-1 - \frac{1}{2}\right)\left(-2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{4}$

143. $1 \div \left(-\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}$

144. $\dfrac{\left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}{2}$

145. $\dfrac{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^3} + 1$

146. $\sqrt[3]{-1} + \sqrt{4} - \sqrt[5]{-32}$

147. $\sqrt[3]{-1 + \frac{7}{8}} - \sqrt{-\frac{3}{4} + 1}$

148. $\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$

149. $\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right]^{-1} + 7$

150. $\left(1 - \sqrt[3]{-8}\right)^{-1} - 0.\overline{3} - \left(10^{-1} + \frac{1}{10}\right)$

151. $\sqrt{1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}} + 5^{-1} - 0.\overline{9}$

152. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 3^{-1} - \sqrt[3]{-27} - 1.\overline{8}\right]^{-1}$

153. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 0{,}3^{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right]^{-2}$

154. $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \div \left(-\frac{2}{3}\right)^4\right] \div 2{,}3\overline{4}$

155. $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)-2\sqrt{2}$

156. $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)-2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}$

157. $\left(\sqrt{2}-1\right)^3-\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)$

158. $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}\cdot\sqrt[3]{5}}{5^2\cdot\sqrt[6]{25}}$

159. $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{32}}$

160. $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[6]{9}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

161. $-4+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot 5+\dfrac{5}{8}\cdot\left(-2\dfrac{2}{15}\right)-\dfrac{3}{2}\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot -4\right]$

162. $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{8}\right)\left(-\dfrac{4}{3}\right)+-5\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{10}{3}\right)$
$-\left(-2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2\cdot 2^2}$

163. $\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^{-4}-\sqrt[3]{2^{-1}\div\sqrt{16}}+\sqrt{\left(\sqrt[3]{8}\right)^{-1}\div 2}$

164. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\div\sqrt{8\div\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}+\dfrac{3}{4}\div -2-\left[\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^{-1}\right]^{-3}$

165. $\sqrt{\sqrt{\left[-5\cdot 2-\dfrac{1}{8}\right]\left(-\dfrac{1}{2}\right)}}-\sqrt{\left[1+\sqrt{16}\sqrt{36}\right]\left(-\dfrac{3}{4}+1\right)}$
$+\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-4)^2\cdot(2)^3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}}}$

Respuestas

1. *a*) $\mathbb{I}$
   b) $\mathbb{I}$
   c) $\mathbb{I}$
   d) $\mathbb{Q}$
   e) $\mathbb{Q}$
   f) $\mathbb{Q}$
   g) $\mathbb{I}$
   h) $\mathbb{Q}$
   i) $\mathbb{Q}$
   j) $\mathbb{Q}$
   k) $\mathbb{I}$
   l) $\mathbb{Q}$
   m) $\mathbb{Q}$
   n) $\mathbb{Q}$
   ñ) $\mathbb{I}$
   o) $\mathbb{I}$

2. *a*) $\mathbb{I}$
   b) $\mathbb{Q}$
   c) $\mathbb{I}$
   d) $\mathbb{Q}$
   e) $\mathbb{I}$
   f) $\mathbb{Q}$
   g) $\mathbb{I}$
   h) $\mathbb{I}$
   i) No es real
   j) $\mathbb{Q}$
   k) $\mathbb{Q}$
   l) $\mathbb{Q}$
   m) $\mathbb{Q}$
   n) $\mathbb{I}$

3. No, siempre se obtendrá como resultado un irracional.

4.
   a) $\mathbb{I}$
   b) $\mathbb{I}$
   c) $\mathbb{I}$
   d) $\mathbb{I}$
   e) $\mathbb{I}$
   f) $\mathbb{I}$
   g) $\mathbb{Q}$
   h) $\mathbb{Q}$
   i) $\mathbb{I}$
   j) $\mathbb{Q}$
   k) $\mathbb{I}$
   l) $\mathbb{I}$

5.
   a) **F**
   b) **F**
   c) **F**
   d) **F**
   e) **F**
   f) **V**
   g) **F**
   h) **V**

6.
   a) $\mathbb{Q}$
   b) $\mathbb{Q}$
   c) $\mathbb{I}$
   d) $\mathbb{I}$
   e) No es un numero real.
   f) $\mathbb{Q}$
   g) $\mathbb{Q}$
   h) $\mathbb{Q}$
   i) $\mathbb{Q}$
   j) $\mathbb{Q}$
   k) $\mathbb{Q}$
   l) $\mathbb{Q}$

7.
   a) $\mathbb{I}$
   b) $\mathbb{Q}$

- *c*) $\mathbb{I}$
- *d*) $\mathbb{Q}$
- *e*) $\mathbb{Q}$
- *f*) $\mathbb{I}$
- *g*) $\mathbb{I}$
- *h*) $\mathbb{I}$
- *i*) $\mathbb{I}$
- *j*) $\mathbb{I}$
- *k*) $\mathbb{Q}$
- *l*) $\mathbb{I}$

8. *a*) Periódica, $\mathbb{Q}$
   b) Periódica, $\mathbb{Q}$
   c) Periódica, $\mathbb{Q}$
   d) No periódica, $\mathbb{I}$
   e) No periódica, $\mathbb{I}$

9. a)
10. a)
11. d)
12. b)
13. d)
14. b)
15. d)
16. c)
17. d)
18. d)
19. d)
20. b)
21. b)
22. d)
23. a)
24. a)
25. c)
26. c)
27. a)
28. d)
29. d)

30. c)
31. c)
32. c)
33. c)
34. c)
35. a)
36. d)
37. c)
38. b)
39. c)
40. b)
41. b)
42. b)
43. b)
44. c)
45. b)
46. d)
47. d)
48. c)

49.
a) $5\sqrt{2}$
b) -4
c) $-4\sqrt{2}$
d) 0
e) $2\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$
f) $5\sqrt{3} + 5\sqrt{6}$
g) $-7,956940526$
h) $-11,3928945$
i) $-19,4151078$
j) $-18,26749268$
k) $19,40401791$
l) $-5\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$
m) $-9\sqrt{2}$
n) $3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$
ñ) -2
o) $11\sqrt{3}$
p) $10\sqrt{5}$

q) 9,449407874

r) $7\sqrt{2}$

s) $6\sqrt{2}$

t) 28

u) $-8\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

v) $-2\sqrt{30}-3\sqrt{6}$

w) $\sqrt{3}$

x) $-2\sqrt{5}+30\sqrt{3}$

y) 13

50. *a*) $6\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{3}$

c) $-2\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

e) $-3{,}291304662$

f) $\frac{5\sqrt{7}}{4}$

g) 11

h) -11

i) $\frac{11}{12}$

j) 0

51. *a*) 2

b) 2,279507057

c) 22,6785789

d) 18

e) 40

f) 1,414213562

g) 169,7056275

h) 10,09574699

i) 90

j) 2,632148026

k) 3,77976315

l) $-3{,}129802625$

m) $5\sqrt{3}$

n) 3,909658804

ñ) $\frac{9}{8}$

52. *a*) 12

b) 9

c) 12

d) 4

e) 60

f) -5

g) -18

h) $-16\sqrt{3}+36\sqrt{2}$

i) $-1{,}192237183$

j) 0,585807897

k) $-27{,}73877007$

l) $-4+3\sqrt{15}$

53. *a*) 1,25992105

b) 1,379729661

c) 1,316074013

d) 1,791101127

e) 8

f) 3,312268541

g) 2

h) 1,122462048

i) 2

j) 7

k) 3

l) $\frac{5}{3}$

m) $-\frac{2}{3}$

n) 2

ñ) $3\sqrt{5}$

o) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

p) $\frac{5}{2}$

q) $\frac{2}{3}$

r) $-\frac{3}{2}$

s) 5

t) 3

u) $\frac{25}{13}$

v) $\frac{7}{4}$

w) $\frac{9}{4}$

54. *a*) -1
b) -6
c) -3
d) $95-7\sqrt{35}$
e) 10
f) $4+4\sqrt{6}$
g) $53-20\sqrt{7}$
h) $6+4\sqrt{2}$
i) $12-6\sqrt{3}$
j) $41+12\sqrt{5}$
k) $93{,}53074361$
l) $55-34\sqrt{2}$
m) -30
n) $-9{,}003947505$
ñ) -32
o) 5
p) $28{,}29437252$
q) $47+12\sqrt{15}$
r) 18
s) $8-2\sqrt{15}$

55. *a*) $>$
b) $<$
c) $<$
d) $<$
e) $<$
f) $>$
g) $<$
h) $<$
i) $<$
j) $=$
k) $>$
l) $=$

56. ver final

57. *a*) b)
b) c)
c) c)

d) c)

e) b)

58. *a*) 3

b) 2,37841423

c) 2,76449909

d) 4

e) 11

f) 5

g) 4

h) 5,313731247

i) 2,045833001

59. c)
60. a)
61. b)
62. c)
63. d)
64. c)
65. b)
66. b)
67. d)
68. c)
69. $\frac{16}{19}$
70. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$
71. 9,486832981
72. $\frac{1}{3}$
73. $\frac{17\sqrt{3}}{3}$
74. 5,235309007
75. $\frac{16}{9}$
76. 0,2866474464
77. 15
78. $\frac{23}{9}$
79. 29
80. $\frac{40}{9}$
81. $-\frac{67}{30}$
82. $-\frac{4}{5}$
83. $-\frac{713}{100}$

84. $\frac{1}{5}$
85. $\frac{9}{10}$
86. $2\sqrt{2}$
87. $\frac{17}{9}$
88. $\frac{3}{8}$
89. $\frac{15}{4}$
90. $\frac{1}{3}$
91. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}$
92. $\frac{4}{3}$
93. $\frac{20}{3}$
94. $-2\sqrt{2}$
95. 10
96. 12
97. 2
98. $-0{,}5386751346$
99. $\frac{3}{14}$
100. $\frac{41}{2}$
101. $-0{,}3274800021$
102. $\frac{22}{25}$
103. $-\frac{110}{9}$
104. $\frac{27}{100}$
105. -515
106. -352
107. $6{,}32455532$
108. $\frac{1}{80}$
109. $\frac{8+3\sqrt{3}}{8}$
110. $\frac{15257}{56}$
111. -4904
112. $-124{,}3700395$
113. $-19{,}86310024$
114. $1{,}440757312$
115. $5{,}930604859$
116. $5{,}491604306$
117. $\frac{3-9\sqrt{5}}{20}$
118. $954{,}0556704$
119. $\frac{303}{71}$
120. $\frac{35}{12}$
121. $\frac{35}{8}$

122. -30
123. 2
124. 0
125. -21
126. $20\sqrt{2}$
127. $29{,}92811665$
128. $19 - 4\sqrt{6}$
129. 0
130. $\frac{-9+7\sqrt{2}}{3}$
131. $0{,}7533070166$
132. $2{,}414213562$
133. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$
134. $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$
135. $-3 - \sqrt{6}$
136. $0{,}3715861212$
137. $4{,}984132075$
138. 13
139. $\frac{31}{6}$
140. $\frac{21}{2}$
141. 1
142. $\frac{1}{2}$
143. $\frac{3}{2}$
144. $\frac{1}{2}$
145. $\frac{1}{2}$
146. 3
147. -1
148. $\frac{1}{5}$
149. 9
150. $\frac{13}{30}$
151. $\frac{1}{10}$
152. $\frac{15}{68}$
153. $\frac{9}{10000}$
154. $\frac{25}{26}$
155. $4 - 4\sqrt{2}$
156. $-6{,}18154055$
157. $-9 + 2\sqrt{2}$
158. 1
159. $1{,}587401052$

160. $1{,}732050808$

161. $-\frac{10}{3}$

162. $\frac{233}{6}$

163. $-\frac{13}{8}$

164. $\frac{1}{3}$

165. $-\frac{7}{12}$

166. 1

BIBLIOGRAFÍA

Abálsamo, R. (2013). *Activados 3* (1.ª ed.). Puerto de Palos.

Armenta, M., Cadena, L., Cruz, F., Figueroa, J., Ibarra, S., Martinez, N. & Valencia, M. (2009). *Álgebra* (1.ª ed.). Cecytes.

Buriticá, B. (2010). *Álgebra y Trigonometría* (3.ª ed.). Universidad de Antioquia.

Dueñas, W., Garavito, A. & Lara, G. (2008). *Aciertos Matemáticos 8* (1.ª ed.). Grupo Editorial Educar.

Fernández, A. & Huertas, C. (2016). *Álgebra* (1.ª ed.). Lumbreras Editores.

Garza, B. (2015). *Geometría y Trigonometría* (2.ª ed.). Pearson Educación.

Gray, B. (2011). *Trigonometry and the Global Positioning System*. http://www.barrygraygillingham.com/Tutoring/Trig.html

ICER. (2016). *Matemática* (1.ª ed.). Mep-ICER.

Papiewski, J. (2016). *Trigonometry involved in GPS*. https://itstillworks.com/accurate-mph-speed-gps-2016.html

Ramírez, M. (2015). *Pendulum Noveno: develando la realidad* (1.ª ed.). Siwo Editorial.

Vilca, Y. & Mamami, R. (2016). *Álgebra Esencial* (1.ª ed.). Lumbreras Editores.