FICH — UNL

Redes y Comunicaciones de datos 2 – 2010
TP N° 1

Fornal, Esteban   Mastaglia, Nicolás   Pfarher, Christian   Torrez, Mauro

8 de abril de 2010

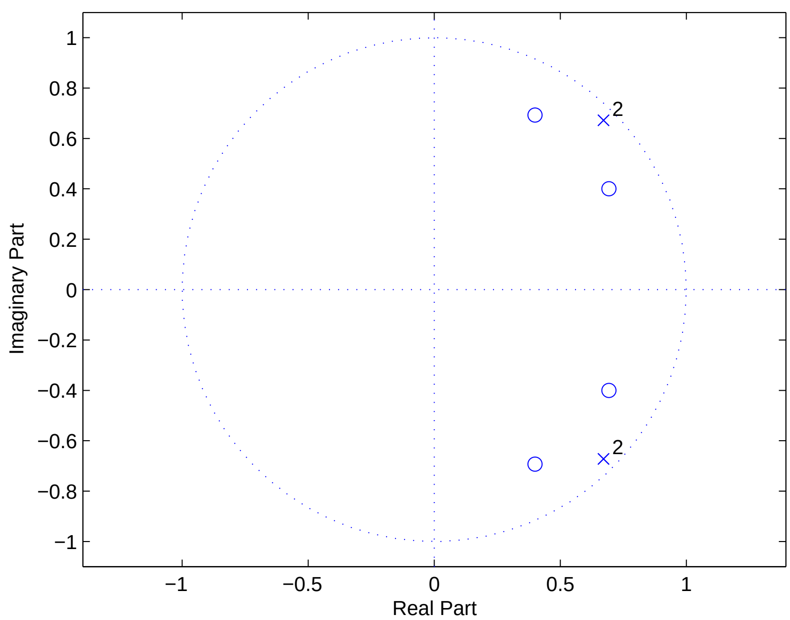
Ejercicio de ejemplo 1

punto a)

☞ *Genere el diagrama de polos y ceros...*

Generamos el diagrama con la función `zplane`.

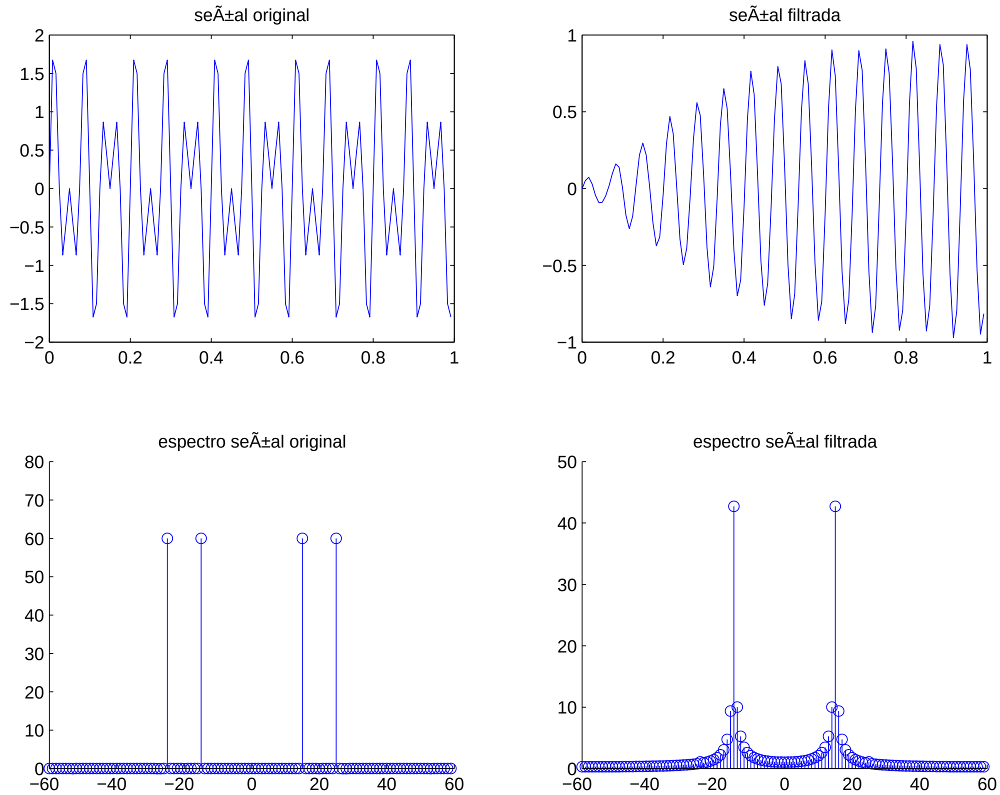
```
polos=[ 0.95*exp(j*pi/4); 0.95*exp(-j*pi/4); 0.95*exp(j*pi/4); 0.95*exp(-j*pi/4) ];
ceros=[ 0.80*exp(j*pi/6); 0.80*exp(-j*pi/6); 0.80*exp(j*pi/3); 0.80*exp(-j*pi/3) ];
zplane( ceros, polos);
```



punto f)

☞ *...esta vez genere la señal con una frecuencia de muestreo de 120Hz...*

```
function ej1f
  radio=0.95;
  polos=[ radio*exp(j*pi/4); radio*exp(-j*pi/4); radio*exp(j*pi/4); radio*exp(-j*pi/4) ];
  ceros=[ 0.80*exp(j*pi/6); 0.80*exp(-j*pi/6); 0.80*exp(j*pi/3); 0.80*exp(-j*pi/3) ];

  w = 0:pi/512:pi-pi/512;
  [h] = freqz( poly(ceros), poly(polos), w);
  Gmax=h(129);

  % Genero la señal muestreada a 120Hz
  t=0:1/120:1-1/120;
  x=sin(2*pi*25*t)+sin(2*pi*15*t);

  % filtro la señal
  xfilt=filter(poly(ceros)/Gmax,poly(polos),x);

  % grafico las señales y sus espectros
  figure
  subplot(2,2,1)
  plot(t,x)
  title('señal original');
  subplot(2,2,2)
  plot(t,xfilt)
  title('señal filtrada');
  subplot(2,2,3)
  stem([0:59 -60:-1], abs(fft(x)) )
  title('espectro señal original');
  subplot(2,2,4)
  stem([0:59 -60:-1], abs(fft(xfilt)) )
  title('espectro señal filtrada');

end %function
```



Vemos que ahora la banda de paso ha quedado centrada en $f = 15\text{Hz}$. Esto implica que el filtro se comportará distinto para distintas frecuencias de muestreo que utilicemos; en particular, para una frecuencia de muestreo f_m la banda de paso se centrará en

$$f = \frac{1}{4}\left(\frac{f_m}{2}\right).$$

Ejercicio 2

La función de transferencia que conocemos para un filtro Butterworth es

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{{G_0}^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

donde n = orden del filtro; ω_c = frecuencia de corte; y G_0 es la componente DC (ganancia en la frecuencia cero). En términos de s, teniendo en cuenta que $s = \sigma + j\omega$, con $\sigma = 0$, podemos ver que:

$$|H(j\omega)|^2 = \left. H(s)H^*(s)\right|_{s=j\omega} = H(s)H(-s) = \frac{{G_0}^2}{1+\left(\frac{-s^2}{\omega_c^2}\right)^{n}}$$

Los polos en esta expresión son los ceros del polinomio de Butterworth B_n. Por ello podemos escribir la función de transferencia en s de un filtro de Butterworth de la forma

$$H(s) = \frac{G_0}{B_n} = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)/\omega_c} \quad \text{donde} \quad s_k = \omega_c e^{j\frac{2k+n-1}{2n}\pi}$$

Paso 1

El filtro de Butterworth normalizado ($G_0 = 1, \omega_c = 1$) de grado n viene dado por:

$$H(s) = \frac{1}{B_n(s)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left[s - e^{j\frac{2k+n-1}{2n}\pi}\right]}$$

Los polinomios de Butterworth normalizados de grado 1, 2, 3, 6 son:

$$\begin{aligned}
B_1(s) &= s - e^{j\frac{2+1-1}{2}\pi} = s - e^{j\pi} = s - (\cos\pi + j\,\mathrm{sen}\,\pi) = s - (-1+0)\\
&= s+1\\
B_2(s) &= \left(s - e^{j\frac{2+2-1}{4}\pi}\right)\left(s - e^{j\frac{4+2-1}{4}\pi}\right) = \left(s - e^{j\frac{3}{4}\pi}\right)\left(s - e^{j\frac{5}{4}\pi}\right)\\
&= \left[s - \left(\cos\frac{3}{4}\pi + j\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)\right]\left[s - \left(\cos\frac{5}{4}\pi + j\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)\right]\\
&= \left[s - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left[s - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \left[s + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)\right]\left[s + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)\right]\\
&= s^2 + s\sqrt{2} + 1\\
B_3(s) &= \left(s - e^{j\frac{2+3-1}{6}\pi}\right)\left(s - e^{j\frac{4+3-1}{6}\pi}\right)\left(s - e^{j\frac{6+3-1}{6}\pi}\right) = \left(s - e^{j\frac{2}{3}\pi}\right)\left(s - e^{j\pi}\right)\left(s - e^{j\frac{4}{3}\pi}\right)\\
&= \left[s - \left(\cos\frac{2}{3}\pi + j\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)\right]\left[s - (\cos\pi + j\,\mathrm{sen}\,\pi)\right]\left[s - \left(\cos\frac{4}{3}\pi + j\,\mathrm{sen}\,\frac{4}{3}\pi\right)\right]\\
&= \left[s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[s-(-1)\right]\left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\\
&\ \vdots\\
&= (s+1)\left[s^2+s+1\right]\\
&= s^3 + 2s^2 + 2s + 1
\end{aligned}$$

Paso 2

Transformación en frecuencia pasa-bajos $\rightarrow$ pasa-altos:

$$s \rightarrow \frac{\omega_p}{s} = \frac{2\pi 500}{s}$$

Las funciones de transferencia me quedan:

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{1}{B_1\left(\frac{2\pi 500}{s}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{s}} \\
H_2(s) &= \frac{1}{B_2\left(\frac{2\pi 500}{s}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{s}\sqrt{2} + \left(\frac{2\pi 500}{s}\right)^2} \\
H_3(s) &= \frac{1}{B_3\left(\frac{2\pi 500}{s}\right)} = \frac{1}{1 + 2\frac{2\pi 500}{s} + 2\left(\frac{2\pi 500}{s}\right)^2 + \left(\frac{2\pi 500}{s}\right)^3}
\end{aligned}$$

Paso 3

Trransformación conforme bilineal:

$$s = \frac{2}{T}\left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right]$$

donde $T = 1/fm$ es la inversa de la frecuencia de muestreo (2000Hz).

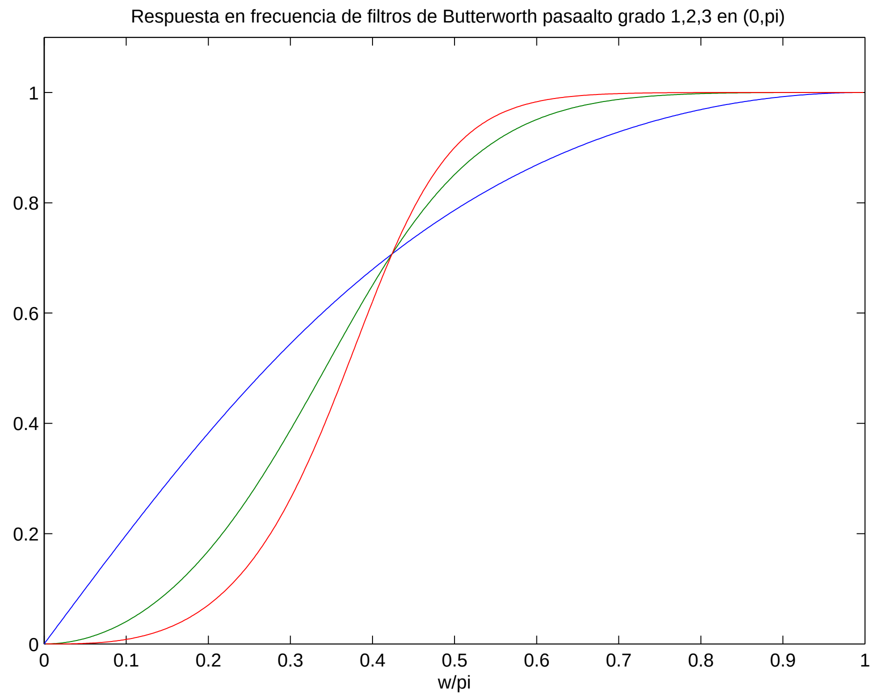
Notar que en este caso, no es utilizable la transformación de Euler, debido a que estaría mapeando las frecuencias altas a frecuencias bajas (al lado derecho de la circunferencia unidad).

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{\frac{2}{\frac{1}{2000}}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]}} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{4000}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{4}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} \\
H_2(z) &= \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500\sqrt{2}}{\frac{2}{\frac{1}{2000}}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]} + \frac{(2\pi 500)^2}{\left(\frac{2}{\frac{1}{2000}}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]\right)^2}} = \frac{1}{1 + 1{,}1107\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \left(0{,}7854\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^2} \\
H_3(z) &= \frac{1}{1 + 2\frac{2\pi 500}{4000\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} + 2\frac{(2\pi 500)^2}{\left(4000\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2} + \frac{(2\pi 500)^3}{\left(4000\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3}} \\
&= \frac{1}{1 + 1,5708\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + 2\left(0{,}7854\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^2 + \left(0{,}7854\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^3}
\end{aligned}$$

Puedo ahora despejar los resultados en términos de z. Se omite este paso aquí para evitar la engorrosidad algebraica. Sin embargo, podemos hacer directamente en Octave:

```
function ej2
  w=0:pi/500:pi-pi/500;
  z=exp(j*w);
  T=1/2000;
  s=(2/T)*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1));
  H1=(1+(pi/4)*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))).^(-1);
  H2=(1+1.1107*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))+(0.7854*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))).^2).^(-1);
  H3=(1+1.5708*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))+2*(0.7854*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))).^(2) + (0.7854*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-

  figure
  plot(w/pi, abs(H1), w/pi, abs(H2),w/pi,abs(H3))
end
```

Vemos las respuestas en frecuencia de estos filtros entre $[0, \pi]$:



- un item
- otro item
  - subitem!
  1. primer elemento
  2. segundo elemento
- otro elemento en el medio

  elemento a : primer elemento

  elemento b : segundo elemento