

FICH — UNL
Redes y Comunicaciones de datos 2 – 2010
TP N° 1

Fornal, Esteban Mastaglia, Nicolás Pfarher, Christian Torrez, Mauro

8 de abril de 2010

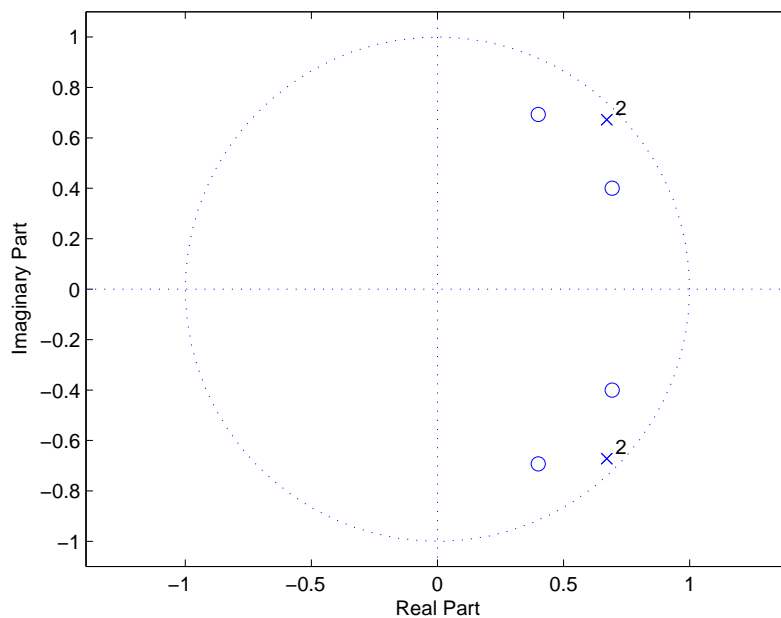
Ejercicio de ejemplo 1

punto a)

 Genere el diagrama de polos y ceros...

Generamos el diagrama con la función `zplane`.

```
polos=[ 0.95*exp(j*pi/4); 0.95*exp(-j*pi/4); 0.95*exp(j*pi/4); 0.95*exp(-j*pi/4) ];  
ceros=[ 0.80*exp(j*pi/6); 0.80*exp(-j*pi/6); 0.80*exp(j*pi/3); 0.80*exp(-j*pi/3) ];  
zplane( ceros, polos);
```



punto f)

☞ ...esta vez genere la señal con una frecuencia de muestreo de 120Hz...

```
function ej1f
    radio=0.95;
    polos=[ radio*exp(j*pi/4); radio*exp(-j*pi/4); radio*exp(j*pi/4); radio*exp(-j*pi/4) ];
    ceros=[ 0.80*exp(j*pi/6); 0.80*exp(-j*pi/6); 0.80*exp(j*pi/3); 0.80*exp(-j*pi/3) ];

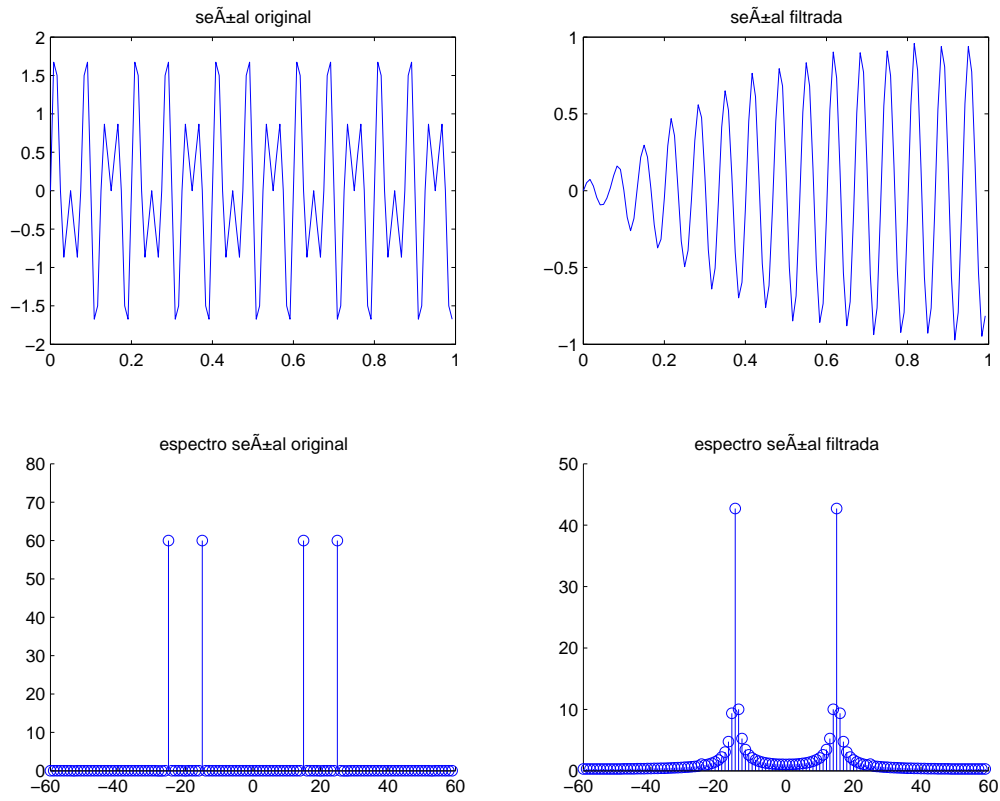
    w = 0:pi/512:pi-pi/512;
    [h] = freqz( poly(ceros), poly(polos), w);
    Gmax=h(129);

    % Genero la señal muestreada a 120Hz
    t=0:1/120:1-1/120;
    x=sin(2*pi*25*t)+sin(2*pi*15*t);

    % filtro la señal
    xfilt=filter(poly(ceros)/Gmax,poly(polos),x);

    % grafico las señales y sus espectros
    figure
    subplot(2,2,1)
    plot(t,x)
    title('señal original');
    subplot(2,2,2)
    plot(t,xfilt)
    title('señal filtrada');
    subplot(2,2,3)
    stem([0:59 -60:-1], abs(fft(x)) )
    title('espectro señal original');
    subplot(2,2,4)
    stem([0:59 -60:-1], abs(fft(xfilt)) )
    title('espectro señal filtrada');

end %function
```



Vemos que ahora la banda de paso ha quedado centrada en $f = 15\text{Hz}$. Esto implica que el filtro se comportará distinto para distintas frecuencias de muestreo que utilicemos; en particular, para una frecuencia de muestreo f_m la banda de paso se centrará en

$$f = \frac{1}{4} \left(\frac{f_m}{2} \right).$$

Ejercicio 2

La función de transferencia que conocemos para un filtro Butterworth es

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

donde n = orden del filtro; ω_c = frecuencia de corte; y G_0 es la componente DC (ganancia en la frecuencia cero). En términos de s , teniendo en cuenta que $s = \sigma + j\omega$, con $\sigma = 0$, podemos ver que:

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H^*(s)|_{s=j\omega} = H(s)H(-s) = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{-s^2}{\omega_c^2}\right)^n}$$

Los polos en esta expresión son los ceros del polinomio de Butterworth B_n . Por ello podemos escribir la función de transferencia en s de un filtro de Butterworth de la forma

$$H(s) = \frac{G_0}{B_n} = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)/\omega_c} \quad \text{donde} \quad s_k = \omega_c e^{j\frac{2k+n-1}{2n}\pi}$$

Paso 1

El filtro de Butterworth normalizado ($G_0 = 1, \omega_c = 1$) de grado n viene dado por:

$$H(s) = \frac{1}{B_n(s)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left[s - e^{j\frac{2k+n-1}{2n}\pi} \right]}$$

Los polinomios de Butterworth normalizados de grado 1, 2, 3, 6 son:

$$\begin{aligned} B_1(s) &= s - e^{j\frac{2+1-1}{2}\pi} = s - e^{j\pi} = s - (\cos \pi + j \sen \pi) = s - (-1 + 0) \\ &= s + 1 \\ B_2(s) &= \left(s - e^{j\frac{2+2-1}{4}\pi} \right) \left(s - e^{j\frac{4+2-1}{4}\pi} \right) = \left(s - e^{j\frac{3}{4}\pi} \right) \left(s - e^{j\frac{5}{4}\pi} \right) \\ &= \left[s - \left(\cos \frac{3}{4}\pi + j \sen \frac{3}{4}\pi \right) \right] \left[s - \left(\cos \frac{5}{4}\pi + j \sen \frac{5}{4}\pi \right) \right] \\ &= \left[s - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \left[s - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \left[s + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j) \right] \left[s + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) \right] \\ &= s^2 + s\sqrt{2} + 1 \\ B_3(s) &= \left(s - e^{j\frac{2+3-1}{6}\pi} \right) \left(s - e^{j\frac{4+3-1}{6}\pi} \right) \left(s - e^{j\frac{6+3-1}{6}\pi} \right) = \left(s - e^{j\frac{2}{3}\pi} \right) (s - e^{j\pi}) \left(s - e^{j\frac{4}{3}\pi} \right) \\ &= \left[s - \left(\cos \frac{2}{3}\pi + j \sen \frac{2}{3}\pi \right) \right] [s - (\cos \pi + j \sen \pi)] \left[s - \left(\cos \frac{4}{3}\pi + j \sen \frac{4}{3}\pi \right) \right] \\ &= \left[s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] [s - (-1)] \left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\ &\vdots \\ &= (s + 1) [s^2 + s + 1] \\ &= s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \end{aligned}$$

Paso 2

Transformación en frecuencia pasa-bajos \rightarrow pasa-altos:

$$s \rightarrow \frac{\omega_p}{s} = \frac{2\pi 500}{s}$$

Las funciones de transferencia me quedan:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{B_1 \left(\frac{2\pi 500}{s} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{s}} \\ H_2(s) &= \frac{1}{B_2 \left(\frac{2\pi 500}{s} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{s} \sqrt{2} + \left(\frac{2\pi 500}{s} \right)^2} \\ H_3(s) &= \frac{1}{B_3 \left(\frac{2\pi 500}{s} \right)} = \frac{1}{1 + 2 \frac{2\pi 500}{s} + 2 \left(\frac{2\pi 500}{s} \right)^2 + \left(\frac{2\pi 500}{s} \right)^3} \end{aligned}$$

Paso 3

Transformación conforme bilineal:

$$s = \frac{2}{T} \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]$$

donde $T = 1/f_m$ es la inversa de la frecuencia de muestreo (2000Hz).

Notar que en este caso, no es utilizable la transformación de Euler, debido a que estaría mapeando las frecuencias altas a frecuencias bajas (al lado derecho de la circunferencia unidad).

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{\frac{2}{2000} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]}} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500}{4000} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{4} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} \\ H_2(z) &= \frac{1}{1 + \frac{2\pi 500 \sqrt{2}}{\frac{2}{2000} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]} + \frac{(2\pi 500)^2}{\left(\frac{2}{2000} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right] \right)^2}} = \frac{1}{1 + 1,1107 \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \left(0,7854 \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^2} \\ H_3(z) &= \frac{1}{1 + 2 \frac{2\pi 500}{4000 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} + 2 \frac{(2\pi 500)^2}{\left(4000 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2} + \frac{(2\pi 500)^3}{\left(4000 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^3}} \\ &= \frac{1}{1 + 1,5708 \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + 2 \left(0,7854 \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^2 + \left(0,7854 \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^3} \end{aligned}$$

Puedo ahora despejar los resultados en términos de z . Se omite este paso aquí para evitar la engorrosidad algebraica. Sin embargo, podemos hacer directamente en Octave:

```
function ej2
w=0:pi/500:pi-pi/500;
z=exp(j*w);
T=1/2000;
s=(2/T)*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1));
H1=(1+(pi/4)*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))).^(-1);
H2=(1+1.1107*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))+(0.7854*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))).^2).^(-1);
H3=(1+1.5708*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))+2*(0.7854*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))).^2 + (0.7854*(1+z.^(-1))./(1-z.^(-1))).^3).^(-1);

figure
plot(w/pi, abs(H1), w/pi, abs(H2), w/pi, abs(H3))
end
```

Vemos las respuestas en frecuencia de estos filtros entre $[0, \pi]$:

