Puntos discretos en el disco

Mauricio Huicochea Toledo

10 de junio de 2021

Queremos encontrar el numero de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ que quedan dento de un disco de radio R, como esta cantidad claramente depende de R podemos decir que si la cantidad es $P = P(R)$. Iniciamos pensando en un anillo concéntrico que pasan por el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$. Llamemos al conjunto de todos los posibles radios al cuadrado de estos círculos concéntricos r_c tal que si $\alpha \in r_c$ y $\alpha < R$. Como x_0^2, $y_0^2 \in \mathbb{Z}$ entonces su suma es un numero entero pero a la ves su suma es el cuadrado del radio del circulo concéntrico α. De manera matemática, tenemos:

$$r_c = \{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha < R \ \ \wedge \ \ \alpha = x_0^2 + y_0^2\}$$

La primera parte del problema seria encontrar a encontrar $|r_c|$ como función de R (que es la cardinalidad o largo del set), es decir, cuantos números enteros mas pequeños que R pueden ser expresados como la suma de dos cuadrados. Este problema es tratados en "Teorema de la suma de dos cuadrados". Este teorema implica que no existen patrones entre estos números, entonces no podemos encontrar la expresión analítica buscada por este método. El encontrar una expresión analítica por otro método implicaría que podríamos utilizar esa expresión y aplicarla a teorema antes mencionado, ya que tratan el mismo problema, lo cual genera una contradicción. Por lo tanto no existe una expresión analítica.

Probamos algunas cosas con un caso particular de $R = 6$, solo para convencernos de que no existe ningún patrón entre el radio de estos anillos (en la figura 1 se muestra la representación visual de este método):

- Set r_c para $R = 6$:

$$r_c = \{1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 13 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 20 \quad 25 \quad 26 \quad 29 \quad 32 \quad 34 \quad 36\}$$

- Como suma de dos cuadrados

$$r_c = \{1^2 + 0^2 \quad 1^2 + 1^2 \quad 2^2 + 0^2 \quad 2^2 + 1^2 \quad 2^2 + 2^2 \quad 3^2 + 0^2 \quad 3^2 + 1^2 \quad 3^2 + 2^2 \quad 4^2 + 0^2$$
$$4^2 + 1^2 \quad 3^2 + 3^2 \quad 4^2 + 2^2 \quad 5^2 + 0^2 \quad 5^2 + 1^2 \quad 5^2 + 2^2 \quad 4^2 + 4^2 \quad 5^2 + 9^2 \quad 6^2 + 0^2\}$$

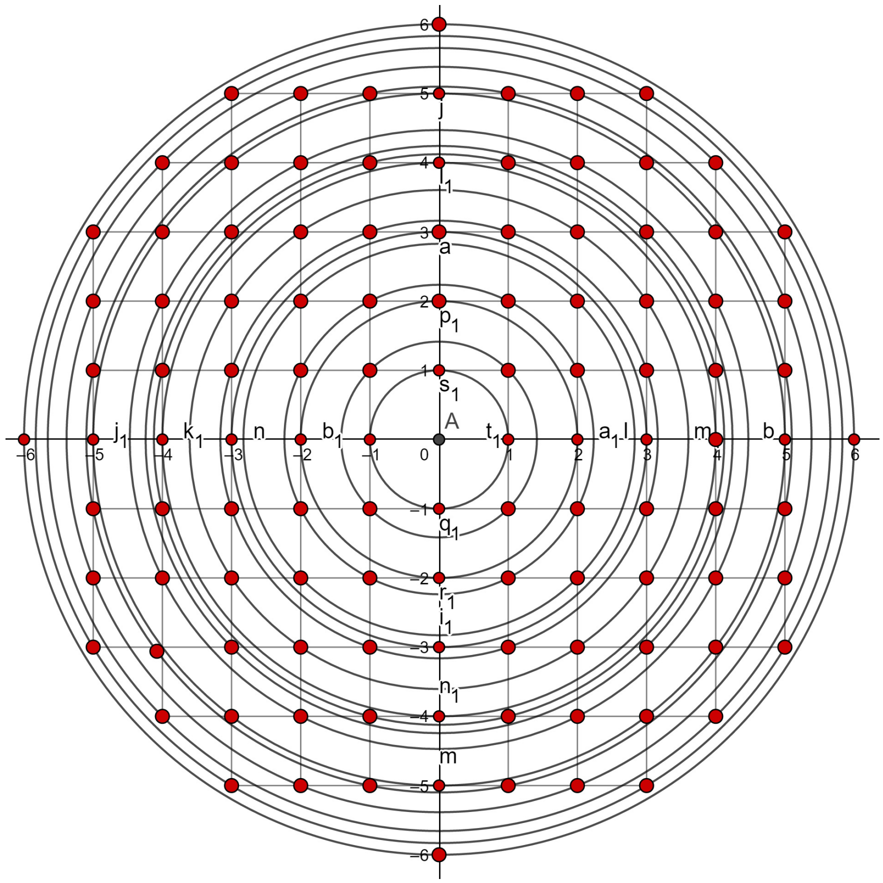

Figura 1: Anillos concéntricos para $R = 6$

- Descomposición en números primos:

$$r_c = \{1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 5 \quad 2^3 \quad 3^2 \quad 5 \cdot 2 \quad 13 \quad 2^4 \quad 13 \cdot 2 \quad 29 \quad 2^5 \quad 17 \cdot 2 \quad 3^2 \cdot 2^2\}$$

1. Propiedades

Como nuestro objetivo era utilizar $|r_c|$ como una herramienta para encontrar $P(R)$ podemos pensar como podría haber funcionado a manera de comprender mejor el problema. Cada elemento de r_C nos da la clave para encontrar cuantos puntos se encuentran en el anillo. Las siguiente propiedades cumplen su propósito aunque se usa una notación nueva aunque primero debemos definir un nuevo set. Sea Ω_c el set de todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ que se encuentra dentro de un disco centrado en el origen, claramente $|\Omega_c| = P(R)$. Podemos ver que claramente existe cierta relación entre r_c y Ω_c; previamente expresamos cada elemento de r_c como la suma de dos números cuadrados y si vemos estos como coordenadas $(x_0^2 + y_0^2 \to (x_0, y_0))$.

Dicho de otra manera

$$\Omega_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{x}| \in r_c\}$$

Inmediatamente al ya tener r_c podemos crear definir a $\xi_c \subseteq \Omega_c$ (en el caso particular de R=6) como:

$$r_c = \{1^2+0^2 \quad 1^2+1^2 \quad 2^2+0^2 \quad 2^2+1^2 \quad 2^2+2^2 \quad 3^2+0^2 \quad 3^2+1^2 \quad 3^2+2^2 \quad 4^2+0^2$$

$$4^2+1^2 \quad 3^2+3^2 \quad 4^2+2^2 \quad 5^2+0^2 \quad 5^2+1^2 \quad 5^2+2^2 \quad 4^2+4^2 \quad 5^2+9^2 \quad 6^2+0^2\}$$

$$\xi_c = \{(1,0) \quad (1,1) \quad (2,0) \quad (2,1) \quad (2,2) \quad (3,0) \quad (3,1) \quad (3,2) \quad (4,0) \quad (4,1) \quad (3,3)$$

$$(4,2) \quad (5,0) \quad (5,1) \quad (5,4) \quad (4,4) \quad (5,3) \quad (6,0)\}$$

A partir de ξ_c podemos generar una especie de çosets". Abusando de la notación decimos que la expresión: $(a,b)\xi_c$ significa que $\forall (x,y) \in \xi_c,\ (ax,by) \in (a,b)\xi_c$

1.1. Copias en los cuadrantes

Usando una notación descrita anteriormente podemos ver claramente que:

$$(-1,1)\xi_c,\ (1,-1)\xi_c,\ (-1,-1)\xi_c \subset \Omega$$

ya que por la definición de Ω_c si $(z,w) \in \xi_c$ entonces $z^2+w^2 \in r_c$; si consideramos a $(\pm z, \pm w)$ vemos que $(\pm z, \pm w)\cdot(\pm z, \pm w) = (\pm z)^2+(\pm w)^2 = z^2+w^2$, entonces $(\pm z, \pm w) \in \Omega_c$. También podemos ver que:

$$\xi_c \cap (-1,1)\xi_c \cap (1,-1)\xi_c \cap (-1,-1)\xi_c = \emptyset$$

lo cual nos asegura que no hay elementos repetidos y no estamos contando mas puntos de los necesarios. En el caso de que x o y sean igual a cero, entonces se duplican las soluciones. En el caso de que no, el numero de soluciones se multiplica por 4.

1.2. Propiedad de conmutabilidad

Notamos que $(x,y),(y,x) \in \Omega_c$ ya que cada uno significa respectivamente x^2+y^2 y y^2+x^2, y ambas cantidades son iguales. En el caso de que si $x=y$ esta propiedad no hace nada. Si esta propiedad aplica se obtienen automáticamente el doble de soluciones para el par individual (x,y).

Pensemos un poco, si la primera propiedad aplica se obtiene un múltiplo de 4 de soluciones. Si no aplica solo se tiene un múltiplo de dos, pero esto a la ves asegura la propiedad dos lo cual duplica el resultado, entonces el resultado también es múltiplo de 4. Independientemente de que para cierto anillo existan existan dos pares de soluciones, (x_1,y_1) y (x_2,y_2)

(como es el caso de 25 donde se tiene $(5,0)$ y $(3,4)$) esto no cambia nada, ya que todas las propiedades aplican de la misma manera. Como al numero de puntos en todos los anillos (que es un múltiplo de 4) y no le hemos sumado el punto $\{0,0\}$ podemos concluir que la solución $P(R) = 4n+1$, con $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otra manera toda solución $P(R) \equiv 1 \pmod 4$.

1.2.1. Numero de puntos por anillo

$$P_r = \{4 \quad 4 \quad 4 \quad 8 \quad 4 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 4 \quad 8 \quad 4 \quad 8 \quad 12 \quad 8 \quad 8 \quad 4 \quad 8 \quad 4\}$$
$$P_r = 4\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1\}$$

$P(6) = 113$, según el programa. Según nuestras suposiciones si sumamos lo números de adentro, multiplicamos por 4 y sumamos 1 debemos obtener 113, lo cual es el caso.

2. Programa para GNU OCTAVE

Este programa fue creado en el ambiente de GNU Octave y prácticamente es cuenta hilera por hilera que par $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^2$ tienen una distancia menor al al origen que el valor de R. Algo importante a notar es que se aprovecho la simetría del circulo para facilitar la tarea, esto obscurece un poco en la formula para usada en el programa. El programa sirve para $R \in \mathbb{R}$:

$R =; \quad n = 0; \quad R_f = floor(R);$
$for \;\; i = 0 : R$
$for \;\; j = 0 : R$
$m = \sqrt{i^2 + j^2}$
$if \;\; m > R$
break
endif
$n = n + 1;$
endfor
endfor
$P = 4n - 4R_f - 3$

A partir de los valores dados por el programa podemos generar una gráfica, que se encuentra en la figura 2, a manera de poder visualizar de mejor manera el comportamiento de $P(R)$. Que la gráfica no te deje engañar, por mas suave y continua que se vea esta función esta no es una función continua. Para el saber el porque de esto podemos volver a ver la figura 1; mientras nos movamos entre el espacio entre anillos esta función tiene un valor constante pero apenas el valor alcanza al siguen te anillo este tomara otro valor, no hay un incremento

gradual, esta función podría ser mejor descrita por una suma infinita de escalones unitarios que por un polinomio. Eso no significa que no lo intentemos.
No podemos dudar del descubrimiento empírico de que $P(R) \approx \pi R^2$ al que realmente no se tiene una explicación. Los valores siempre difieren, además de que estamos aproximando una función discontinua con una continua. Para visualizar esto mejor presentamos en la figura 2 las gráficas suavizadas de $P(R)$ por el programa, de $[\pi R^2]$ (que se refiere a la función parte entera πR^2) y un arreglo polinomial de grado 2. A primera vista todas las funciones se ven prácticamente iguales, pero es importante notar que la función polinomial es mas cercana al valor real, aunque tiene un problema, al moverse a valores lejanos a los abarcados por los datos dados al métodos de mínimos cuadrados esta se vuelve bastante inexacta, mientras la aproximación dada por $[\pi R^2]$ se mantiene bastante cercana al valor real de $P(R)$. Usando software se vio que con un valor de $R = 30$ tenemos que (si tomamos a $P_{ar}(R) = \pi R^2$):

$$P(300) = 282697 \qquad P_{ar}(300) = 282743 \qquad |\Delta P| = 46$$

Así que si optamos por una aproximación buena, $P_{ar}(R)$ es lo que buscamos. También podemos sacar de esto una de las maneras mas ineficientes y estúpidas de aproximar π, si hacemos un arreglo polinomial con los suficientes valores, deberíamos obtener una aproximación decente de π en el termino cuadrático. Este es el polinomio para 40 muestras:

$$2{,}2673 - 0{,}59545R + 3{,}1496R^2$$

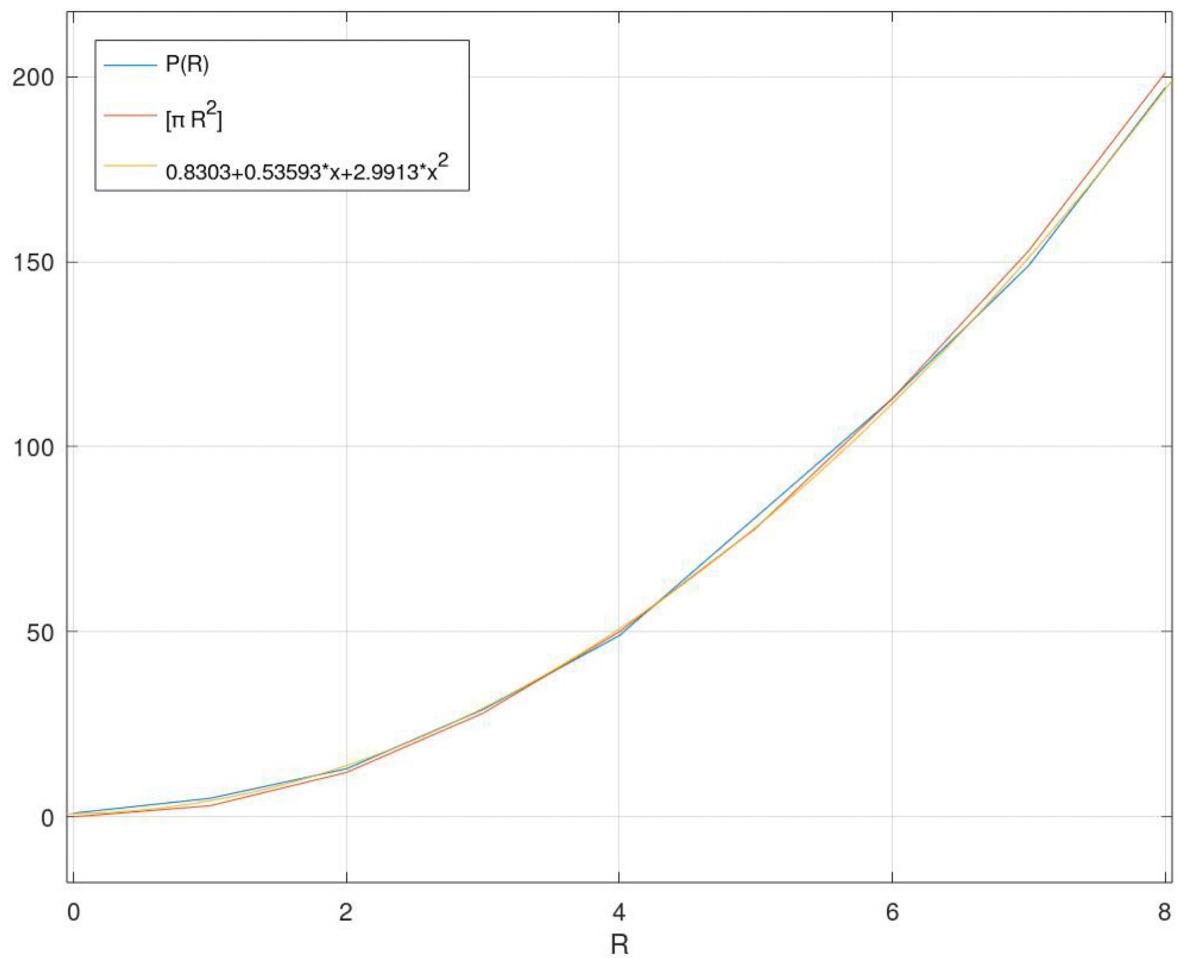

Figura 2: Comparación de $P(R)$ con las dos aproximaciones.