1 DIE ELEMENTAREN FUNKTIONEN

1.1 Grundbegriffe der Funktionen

1.1.1 Definition einer Funktion

Unter einer Funktion von einer Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in W$ zuordnet.

$$\boxed{y = f(x)} \tag{1.1}$$

Somit ist x die unabhängige veränderliche Variable oder **Argument**, y die abhängige Variable oder **Funktionswert**, D ist der Definitionsbereich der Funktion und W ist der Wertebereich der Funktion.

1.1.2 Darstellungsform einer Funktion

Die **analytische Darstellung** einer Funktion wird durch eine explizite oder eine implizite Funktionsgleichung dargestellt

$$\boxed{\text{explizit:} \quad y = f(x)} \quad \boxed{\text{implizit:} \quad F(x; y) = 0} \tag{1.2}$$

Die **Parameterdarstellung** einer Funktion ist durch einen reellen Parameter t abhängig

$$\boxed{\left.\begin{array}{ccc} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right\} \quad t_1 \le t \le t_2} \tag{1.3}$$

Die **Polardarstellung** einer Funktion ist durch den Koordinatenursprung und durch eine Achse. Die Polardarstellung benutzt zwei Parameter, einen Polarwinkel φ und einen Abstand zum Ursprung r.

$$\boxed{r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2} \tag{1.4}$$

Die **graphische Darstellung** einer Funktion $y = f(x)$ wird in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Punktmenge dargestellt. Den Wertepaar (x_0, y_0) mit $y_0 = f(x_0)$ entspricht dabei der Kurvenpunkt $P = (x_0; y_0)$. Die Koordinate x_0 ist die Abszisse und die y_0 die Ordinate von P.

1.2 Allgemeine Funktionseigenschaften

1.2.1 Die Nullstellen

Die **Nullstellen** sind die Schnittstellen der Funktionskurve mit der x-Achse.

$$\boxed{f(x_0) = 0} \tag{1.5}$$

1.2.2 Die Symmetrie

Eine **gerade Funktion** ist zur y-Achse spiegelsymmetrisch.

$$\boxed{f(-x) = f(x), \quad \forall x \text{ mit } x \in D \Leftrightarrow -x \in D} \tag{1.6}$$

Eine **ungerade Funktion** ist zur y-Achse punktsymmetrisch.

$$\boxed{f(-x) = -f(x), \quad \forall x \text{ mit } x \in D \Leftrightarrow -x \in D} \tag{1.7}$$

1.2.3 Monotonie

Eine **monoton wachsende Funktion** wenn

$$\boxed{f(x_1) \le f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in D \text{ mit } x_1 < x_2} \tag{1.8}$$

Eine **monoton fallende Funktion** wenn

$$\boxed{f(x_1) \ge f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in D \text{ mit } x_1 < x_2} \tag{1.9}$$

1.2.4 Periodizität

Die Funktionswerte wiederholen sich, wenn man in der x-Richtung um eine Periode $p' = \pm k \cdot p$ fortschreitet

$$\boxed{f(x \pm k \cdot p) = f(x), \quad \forall x \in D} \tag{1.10}$$

1.2.5 Die inverse Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst **umkehrbar**, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. Zu verschiedenen Abszissen gehören verschiedene Ordinaten. Die Umkehrfunktion von $y = f(x)$ wird durch das Symbol $y = f^{-1}(x)$ gekennzeichnet.

Jede monoton fallende oder wachsende Funktion ist umkehrbar. Es werden Definitions- und Wertebereich miteinander vertauscht. Die Funktionsgleichung $y = f(x)$ wird nach der Variablen x aufgelöst und durch formales Vertauschen der beiden Variablen erhält man die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$. Die inverse Funktion ist eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

1.3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

1.3.1 Grenzwert einer Folge

Unter einer reellen zahlenfolge versteht man eine geordnete Menge reeller Zahlen. Jeder positiven ganzen Zah n wird in eindeutiger Weise eine reelle zahl a_n zugeordnet.

$$\boxed{\langle a_n\rangle = a_1,\, a_2,\, a_3\, \ldots\, ,\, a_n, \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.11}$$

Die reelle Zahl g heisst Grenzwert oder Limes der Zahlenfolge $\langle a_n\rangle$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine positive ganze Zahl n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ stets $\left|a_n - g\right| < \epsilon$ ist. Eine Folge heisst **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert g hat. Eine Folge, die keinen Grenzwert hat heisst **divergent**.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = g} \tag{1.12}$$

1.3.2 Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

Eine Funktion $x = f(x)$ sei in einer Umgebung von x_0 definiert. Gilt dann für jede im Definitionsbereich der DFunktion liegende und gegen die Stelle x_0 konvergierende Zahlenfolge $\langle x_n\rangle$ mit $x_n \neq x_0$ stets $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$, so heisst g der Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to x_0$ der Grenzwert an der Stelle x_0

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = g} \tag{1.13}$$

1.3.3 Grenzwert einer Funktion für $x \to \infty$

Besitzt eine Funktion $y = f(x)$ die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Funktionswerte für jede über alle Grenzen hinaus wachsende Zahlenfolge $\langle x_n\rangle$ gegen eine Zahl g strebt, so heisst g der Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to \infty$ der Grenzwert im Unendlichen.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = g} \tag{1.14}$$

1.3.4 Rechenregeln für Grenzwert

$$(i)\quad \lim_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\cdot\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right), \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to x_0}\Big[f(x) \pm g(x)\Big] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to x_0}\Big[f(x)\cdot g(x)\Big] = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

$$(iv)\quad \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

$$(v)\quad \lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

$$(vi)\quad \lim_{x\to x_0}\Big[f(x)\Big]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$$

$$(vii)\quad \lim_{x\to x_0}\left(a^{f(x)}\right) = a^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)}$$

$$(viii)\quad \lim_{x\to x_0}\Big[\log_a f(x)\Big] = \log_a\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right), \quad (f(x) < 0)$$

1.3.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form "0/0öder "∞/∞führen, gilt die folgende Regel

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{1.15}$$

Unbestimmte Ausdrücke der Form "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "0^0", "1^∞öder ∞^0 lassen sich durch elementare Umformungen auf den Typ "0/0öder "∞/∞".

$$(i)\quad \lim_{x\to x_0}\Big(u(x)\cdot v(x)\Big) = 0\cdot\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{u(x)}{1/v(x)}\right) \text{ oder } \lim_{x\to x_0}\left(\frac{v(x)}{1/u(x)}\right)$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to x_0}\Big(u(x) - v(x)\Big) = \infty - \infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1/v(x) - 1/u(x)}{1/\left(u(x)\cdot v(x)\right)}\right)$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to x_0}\left(u(x)^{v(x)}\right) = 0^0, \infty^\infty = 1^\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\right)$$

1.3.6 Stetigkeit einer Funktion

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 **stetig**, wenn der Grenzwert der Funktion für $x \to x_0$ vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} \tag{1.16}$$

Eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist, heisst sie **stetige Funktion**. Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 **unstetig**, wenn $f(x_0)$ nicht vorhanden ist oder $f(x_0)$ vom Grenzwert verschieden ist oder dieser nicht existiert. Den Unstetigkeiten gehören Lücken, Pole oder Sprünge.

1.4 Polynomfunktionen

1.4.1 Definition

Ganzrationale Funktionen oder **Polynomfunktionen** sind überall definiert und stetig. Sie werden in der Regel nach fallenden Potenzen geordnet. Sei n der Polynomgrad mit $n \in \mathbb{N}$ und a_i die reelle Polynomkoeffizienten.

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)} \tag{1.17}$$

1.4.2 Die Lineare Funktion

Die allgemeine Geradengleichung lautet

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \quad (A^2 + B^2 \neq 0)} \tag{1.18}$$

Gegeben sei die Steigung m und b der y-Achsenabschnitt. So lautet die **Hauptform der Geraden**

$$\boxed{y = mx + b = \tan(\alpha)\, x + b} \tag{1.19}$$

Gegeben sei ein Punkt $P_1 = (x_1; y_1)$ und die Steigung m oder der Steigungswinkel α, so lautet die **Punkt-Steigungsform der Geraden**

$$\boxed{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}} \tag{1.20}$$

Gegeben seien zwei verschiedene Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$, dann lautet der **zwei-Punkte-Form einer Geraden**

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2)} \tag{1.21}$$

Gegeben seien die Achsenabschnitte a und b auf der x- und y-Achse, dann lautet die **Achsenabschnittsform der Geraden**

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (a \neq 0,\, b \neq 0)} \tag{1.22}$$

Gegeben seien p die senkrechte Abstand vom Ursprung von der Geraden und α der Winkel zwischen Lot vom Ursprung auf die Gerade und der positiven x-Achse, dann lautet die **Hessesche Normalform der Geraden**

$$\boxed{x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) = p} \tag{1.23}$$

Gegeben ist die Gerade $Ax + By + C = 0$ und ein Punkt $P_1 = (x_1; y_1)$, dann lautet der **Abstand eines Punktes von einer Geraden**

$$\boxed{d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|, \quad (A^2 + B^2 \neq 0)} \tag{1.24}$$

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen $y = mx_1 + b_1$ und $y = mx_2 + b_2$, dann lautet der **Schnittwinkel zweier Geraden**

$$\boxed{\tan(\delta) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|, \quad (0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ), \quad (m_1 \cdot m_2 \neq -1)} \tag{1.25}$$

(i) $g_1 \parallel g_2 \Longrightarrow m_1 = m_2$ und $\delta = 0^\circ$

(ii) $g_1 \perp g_2 \Longrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ und $\delta = 90^\circ$

1.4.3 Die Quadratische Funktion

Die **Hauptform der Parabel** besteht aus einem Öffnungsparameter $a \neq 0$, wobei wenn $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet oder $a < 0$ nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt ist $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Sind $b = c = 0$ dann lautet die Parabelfunktion $y = x^2$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \tag{1.26}$$

Die **Produktform der Parabel** besteht aus einem Öffnungsparameter $a \neq 0$, wobei x_1 und x_2 die Nullstellen der Parabel sind. Sind $x_1 = x_2$ dann lautet die Parabelfunktion $y = a(x - x_1)^2$ und die Parabel berührt die x-Achse im Scheitelpunkt $S(x_1; 0)$

$$\boxed{y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)} \tag{1.27}$$

Die **Scheitelform der Parabel** besteht aus einem Öffnungsparameter $a \neq 0$ und aus den Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_0; y_0)$

$$\boxed{y - y_0 = a \cdot (x - x_0)^2} \tag{1.28}$$

1.4.4 Polynomfunktion n-ten Grades

Ist x_1 eine Nullstelle der Polynomfunktion $f(x)$ vom Grade n, so ist $f(x)$ in der Produktform darstellbar. Der Faktor $(x - x_1)$ heisst **Linearfaktor**, $f_1(x)$ ist das erste reduzierte Polynom vom Grade $n - 1$.

$$\boxed{f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)} \tag{1.29}$$

Das **Fundamentalsatz der Algebra** laitet: Eine Polynomfunktion n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Die **Produktdarstellung** der Polynomfunktion besteht aus einem Öffnungsparameter a_n und aus den Nullstellen x_i. Die Faktoren $(x - x_i)$ heissen Linearfaktoren. Ist x_1 eine k-fache Nullstelle von $f(x)$, so tritt der Linearfaktor $(x - x_1)$ k-mal auf.

$$\boxed{f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \quad (a_n \neq 0)} \tag{1.30}$$

Ist die Anzahl k der reellen Nullstellen kleiner als der Polynomgrad n, so ist $f^*(x)$ das Polynomfunktion vom Grade $n-k$ohne reelle Nullstellen und so lautet die Zerlegung

$$\boxed{f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot f^*(x)} \tag{1.31}$$

1.5 Gebrochenrationale Funktionen

1.5.1 Definition

Eine **gebrochenrationale Funktion** $f(x)$ besteht aus einem Zählerpolynom $g(x)$ vom Grade m, aus einem Nennerpolynom $h(x)$ vom Grade n, wobei wenn $n > m$ dann hendelt es sich um eine echt gebrochenrationale Funktion. Der Definitionsbereich ist $D = x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms $h(x)$.

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad (a_m \neq 0, b_n \neq 0)} \tag{1.32}$$

1.5.2 Nullstellen, Definitionslücken und Pole

Ist x_0 **Nullstellen** der gebrochenrationale Funktion $f(x_0) = 0$, so gelten $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$.

Ist x_0 **Definitionslücke** der gebrochenrationale Funktion $f(x)$ so verschwindet der Nenner an der Stelle x_0, also gilt $h(x_0) = 0$. Die Definitionslücken fallen daher mit den reellen Nullstellen des Nenners zusammen. Es gibt somit höchstens n reelle Definitionslücken, ermittelt aus der Gleichung $h(x) = 0$.

Ein **Pol** x_0 ist eine Definitionslücke besonderer Art: Nähert man sich der Stelle x_0, so strebt der Funktionswert gegen $\pm\infty$. In einer Polstelle gilt somit $h(x_0) = 0$ und $g(x_0) \neq 0$, falls Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen haben. Die in einem Pol errichtete Parallele zur y-Achse heisst Polgerade oder senkrechte Asymptote. Verhält sich die Funktion bei Annäherung an den Pol von beiden Seiter her gleichartig, so liegt ein Pol ohne Vorzeichenwechsel, anderenfalls ein pol mit Vorzeichenwechsel vor.

Ist x_0 eine k-fache Nullstelle des Nennerpolynoms $h(x)$, so liegt ein Pol k-ter Ordnung vor:

(i) Ist k gerade dann liegt ein Pol ohne Vorzeichenwechsel.

(ii) Ist k ungerade dann liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel.

Die gesuchten Nullstellen und Pole einer gebrochenrationale Funktion $f(x)$ findet man, indem man das Zähler- und das Nennerpolynom in Linearfaktoren zerlegt und gemeinsame Faktoren herauskürzt. Die bleibenden Linearfaktoren im Zählerpolynom sind die Nullstellen, die bleibenden Linearfaktoren im Nennerpolynom sind die Polstellen. Damit kann Definitionslücken behoben und der Definitionsbereich der Funktion erweitert werden.

1.5.3 Asymptotisches Verhalten im Unendlichen

Eine **echt gebrochenrationale Funktion** nähert sich im Unendlichen, d.h. für $x \to \pm\infty$ stets der x-Achse bei $y = 0$.

Eine **unecht gebrochenrationale Funktion** wird zunächst durch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion $p(x)$ und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ zerlegt: $f(x) = p(x) + r(x)$. Im Unendlichen verschwindet $r(x)$ und die Funktion $f(x)$ nähert sich daher asymptotisch der Polynomfunktion $p(x)$.

1.6 Potenz- und Wurzelfunktionen

1.6.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzfunktionen mit positiv ganzzahligen Exponenten haben für gerades n erhält man gerade Funktionen, für ungerades n ungerade Funktionen. Die Nullstelle ist $x = 0$.

$$\boxed{f(x) = x^n, \quad -\infty < x < \infty, \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.33}$$

Potenzfunktionen mit negativ ganzzahligen Exponenten haben für gerades n gerade Funktionen, für ungerades n ungerade Funktionen. Die Polstelle ist ist $x = 0$ und die Asymptote im Unendlichen ist $y = 0$.

$$\boxed{f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0, \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.34}$$

1.6.2 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der auf das Intervall $x \geq 0$ beschränkten Potenzfunktionen. Diese Funktionen sind streng monoton wachsend und haben die Nullstelle $x = 0$.

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0, \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)} \tag{1.35}$$

1.6.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten haben bei positiven Exponenten streng monoton wachsende Monotonie, bei negativen Exponenten streng monoton fallende Monotonie. Der Definitionsbereich ist $D = x > 0$ und bei positiven Exponenten $D = x \geq 0$.

$$\boxed{f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x > 0, \quad (m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.36}$$

1.7 Trigonometrische Funktionen

1.7.1 Winkelmass

Die trigonometrische Funktionen, auch Winkelfunktionen oder Kreisfunktionen sind am Einheitskreis erklärt. Der Winkel α wird in Grad oder Bogenmass gemessen. Voller Umlauf ist 360° oder 2π. Die Winkel erhalten wie folgt ein Vorzeichen: Im Gegenuhrzeigersinn überstrichene Winkel werden positiv, im Uhrzeigersinn überstrichene Winkel negativ gezählt.

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,\text{Radiant} \approx 0.0174} \quad \boxed{1\,\text{Radiant} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295} \tag{1.37}$$

1.7.2 Definition der trigonometrischen Funktionen

Folgende sind Definitionen am Einheitskreis. α ist ein spitzer Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$). Der $\sin(\alpha)$ entspricht die Ordinate eines Kreispunktes P. Der $\cos(\alpha)$ ist die Abszisse von P. Die $\tan(\alpha)$ ist der Abschnitt auf der rechten Tangente und der $\cot(\alpha)$ ist der Abschnitt auf der oberen Tangente.

$$\begin{gathered}\boxed{\sin(\alpha) = \frac{y}{1}} \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{x}{1}} \quad \boxed{\tan(\alpha) = \frac{y}{x}} \quad \boxed{\cot(\alpha) = \frac{x}{y}} \\ \boxed{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{x}} \quad \boxed{\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{y}}\end{gathered} \tag{1.38}$$

1.7.3 Die Sinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \sin(x)} \tag{1.39}$$

Folgende sind Eigenschaften der Sinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = -\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $W = -1 \leq y \leq 1$

(c) Periode: $p = 2\pi$

(d) Symmetrie: ungerade

(e) Nullstellen: $x_N = k \cdot \pi$

(f) Relative Maxima: $x_{\text{max}} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

(g) Relative Minima: $x_{\text{min}} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = \cos(x)$

(i) Stammfunktion: $F(x) = -\cos(x)$

1.7.4 Die Kosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \cos(x)} \tag{1.40}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kosinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = -\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $W = -1 \leq y \leq 1$

(c) Periode: $p = 2\pi$

(d) Symmetrie: gerade

(e) Nullstellen: $x_N = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(f) Relative Maxima: $x_{\text{max}} = k \cdot 2\pi$

(g) Relative Minima: $x_{\text{min}} = \pi + k \cdot 2\pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = -\sin(x)$

(i) Stammfunktion: $F(x) = \sin(x)$

1.7.5 Die Tangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \tan(x)} \tag{1.41}$$

Folgende sind Eigenschaften der Tangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$

(b) Wertebereich: $W = -\infty \leq y \leq \infty$

(c) Periode: $p = \pi$

(d) Symmetrie: ungerade

(e) Nullstellen: $x_N = k \cdot \pi$

(f) Pole: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(g) Senkrechte Asymptoten: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

(i) Stammfunktion: $F(x) = -\ln\left|\cos(x)\right|$

1.7.6 Die Kotangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \tan(x)} \tag{1.42}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kotangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k = k \cdot \pi\}$

(b) Wertebereich: $W = -\infty \leq y \leq \infty$

(c) Periode: $p = \pi$

(d) Symmetrie: ungerade

(e) Nullstellen: $x_N = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(f) Pole: $x_k = k \cdot \pi$

(g) Senkrechte Asymptoten: $x = k \cdot \pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

(i) Stammfunktion: $F(x) = \ln \left| \sin(x) \right|$

1.7.7 Beziehungen

Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

(a) $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(d) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cot(x)}$

(e) $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$

(f) $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

(g) $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cot^2(x)$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2)$

(b) $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2)$

(c) $\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan(x_1) \pm \tan(x_2)}{1 \mp \tan(x_1) \cdot \tan(x_2)}$

(d) $\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot(x_1) \cdot \cot(x_2) \mp 1}{\cot(x_2) \pm \cot(x_1)}$

Beziehungen für halbe Winkel

(a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$

(b) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$

(c) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$

Beziehungen für doppelte Winkel

(a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(b) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

(c) $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

(d) $\cot(2x) = \frac{\cot^2(x) - 1}{2\cot(x)}$

Beziehungen für dreifache Winkel

(a) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

(b) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

(c) $\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$

Beziehungen für vierfache Winkel

(a) $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x) - 8\sin^3(x)\cos(x)$

(b) $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

(c) $\tan(4x) = \dfrac{4\tan(x) - 4\tan^3(x)}{1 - 6\tan^2(x) + \tan^4(x)}$

Beziehungen für n-fache Winkel

(a) $\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin(x)\cos^{n-1}(x) - \binom{n}{3}\sin^3(x)\cos^{n-3}(x) + \binom{n}{5}\sin^5(x)\cos^{n-5}(x) + \ldots$

(b) $\cos(nx) = \cos^n(x) - \binom{n}{2}\sin^2(x)\cos^{n-2}(x) + \binom{n}{4}\sin^4(x)\cos^{n-4}(x) - \ldots$

Beziehungen für Summen und Differenzen

(a) $\sin(x_1) + \sin(x_2) = 2\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(b) $\sin(x_1) - \sin(x_2) = 2\cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(c) $\cos(x_1) + \cos(x_2) = 2\cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(d) $\cos(x_1) - \cos(x_2) = -2\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(e) $\tan(x_1) \pm \tan(x_2) = \dfrac{\sin(x_1 \pm x_2)}{\cos(x_1)\cdot\cos(x_2)}$

(f) $\sin(x_1 + x_2) + \sin(x_1 - x_2) = 2\sin(x_1)\cos(x_2)$

(g) $\sin(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) = 2\cos(x_1)\sin(x_2)$

(h) $\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) = 2\cos(x_1)\cos(x_2)$

(i) $\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_1 - x_2) = -2\sin(x_1)\sin(x_2)$

Beziehungen für Produkte

(a) $\sin(x_1)\cdot\sin(x_2) = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)\Big]$

(b) $\cos(x_1)\cdot\cos(x_2) = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)\Big]$

(c) $\sin(x_1)\cdot\cos(x_2) = \dfrac{1}{2}\Big[\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)\Big]$

(d) $\tan(x_1)\cdot\tan(x_2) = \dfrac{\tan(x_1) + \tan(x_2)}{\cot(x_1) + \cot(x_2)}$

Beziehungen für Potenzen

(a) $\sin^{2n}(x) = \binom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{n-k}\cos(2kx)$

(b) $\sin^{2n-1}(x) = \dfrac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n-1}{n-k}\sin(2kx - x)$

(c) $\cos^{2n}(x) = \binom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}\cos(2kx)$

(d) $\cos^{2n-1}(x) = \dfrac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{n-k}\cos(2kx - x)$

Beziehungen für komplexen Fall

(a) $\sin(iy) = i\cdot\sinh(y)$

(b) $\cos(iy) = \cosh(y)$

(c) $\tan(iy) = i\cdot\tanh(y)$

(d) $\cot(iy) = -i\cdot\coth(y)$

Beziehungen komplexer Zahlen als Argumente

(a) $\sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$

(b) $\cos(x + iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)$

(c) $\tan(x + iy) = \dfrac{\tan(x) + \tan(iy)}{1 - \tan(x)\tan(iy)}$

$$(d)\ \cot(x+y) = -\frac{\cot(x)\cot(iy)-1}{\cot(x)-\cot(iy)}$$

Beziehungen komplexer Zahlen

Folgende Eigenschaften gehören den komplexen Zahlen

$$(a)\ \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$

$$(b)\ \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

Beziehungen Lösungen trigonometrischer Gleichung

$$(i)\quad \begin{array}{l} \sin(x) = c, \quad (-1 \le c \le 1) \\ \Longrightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} x_0 + 2n\pi \\ (\pi - x_0) + 2n\pi \end{array} \right., \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad x_0 = \arcsin(c) \Big\} \end{array}$$

$$(ii)\quad \begin{array}{l} \cos(x) = c, \quad (-1 \le c \le 1) \\ \Longrightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} x_0 + 2n\pi \\ -x_0 + 2n\pi \end{array} \right., \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad x_0 = \arccos(c) \Big\} \end{array}$$

$$(iii)\quad \begin{array}{l} \tan(x) = c \\ \Longrightarrow x = \{\ x_0 + n\pi\ , \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad x_0 = \arctan(c) \} \end{array}$$

Beziehungen an einem allgemeinen Dreieck

$$(i)\ \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}, \quad \text{(Sinussatz)}$$

$$(ii)\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha), \quad \text{(Kosinussatz)}$$

$$(iii)\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}, \quad \text{(Tangenssatz)}$$

$$(iv)\ A = \frac{bc\sin(\alpha)}{2}, \quad \text{(Flächenformel)}$$

$$(v)\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \text{(Winkelsumme)}$$

Beziehungen Amplituden-Phasen

Folgende sind die Amplituden-Phasen in Polarform von $a\cos(x) + b\sin(x)$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} a\cos(x) + b\sin(x) & = & r\cos(x-\varphi) \\ a\sin(x) + b\cos(x) & = & r\sin(x+\varphi) \end{array} \right\}} \tag{1.43}$$

$$\boxed{r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \arccos(a/r), & \text{falls } b \ge 0 \\ -\arccos(a/r), & \text{falls } b < 0 \\ \text{unbestimmt}, & \text{falls } r = 0 \end{array} \right\}} \tag{1.44}$$

1.7.8 Anwendungen in der Schwingungslehre

Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(bx + c), \quad (a > 0, \quad b > 0)} \tag{1.45}$$

$$\boxed{f(x) = a \cdot \cos(bx + c), \quad (a > 0, \quad b > 0)} \tag{1.46}$$

Folgende allgemeine Sinusfunktion hat die Periode $p = 2\pi/b$, Wertebereich $W = -a \le y \le a$, für $c > 0$ ist die Kurve nach links, für $c < 0$ nach rechts verschoben. Bezogen auf die elementare Sinusfunktion ist die verschiebung $x_0 = -c/b$.

Gleichung einer harmonischen Schwingung

Die harmonische Schwingung misst die Auslenkung eines Federpendels in Abhängigkeit der Zeit t, wobei A die Amplitude (maximale Auslenkung), ω die Kreisfrequenz der Schwingung, φ der Nullphasenwinkel, T die Schwingungs- oder Periodendauer, f die Frequenz

$$\boxed{f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \tag{1.47}$$

$$\boxed{f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\varphi + \frac{\pi}{2}}_{\varphi^*}\right) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi^*)} \tag{1.48}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \tag{1.49}$$

Darstellung einer harmonischen Schwingung

Eine harmonische Schwingung lässt sich in einem Zeigerdiagramm durch einen rotierenden Zeiger der Länge A darstellen. Die Rotation erfolgt dabei aus der durch den Nullphasenwinkel φ eindeutig bestimmten Anfangslage heruas um den Nullpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn. Die Ordinate der Zeigerspitze entspricht dabei dem augenblicklichen Funktionswert der Schwingung.

Bei der bildlichen Darstellung einer Schwingung im zeigerdiagramm zeichnet man die Anfangslage, Zeiger der Länge A unter dem Winkel φ gegen die Horizontale. Lässt man einen negativen Amplitudenfaktor A zu, so gelten für das Abtragen der unverschobenen Schwingungen die folgenden Regeln für die **Sinusschwingung** $f(t) = A \cdot \sin(\omega t)$: $A > 0$ so nach rechts abtragen, $A < 0$ nach links abtragen und für eine **Kosinusschwingung** $f(t) = A \cdot \sin(\omega t)$: $A > 0$ nach oben abtragen und $A < 0$ nach unten abtragen.

Liegen die Schwingungen in der **phasenverschobenen Form** $f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ bzw. $f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ vor, so erfolgt eine zusätzliche Drehung um den Nullphasenwinkel $\varphi > 0$ im Gegenuhrzeigersinn oder um den Nullphasenwinkel $\varphi < 0$ im Uhrzeigersinn.

Superposition

Die Überlagerung zweier gleichfrequenter harmonischer Schwingungen führt zu einer resultierenden Schwingung der gleichen Frequenz. Im Zeigerdiagramm werden die Zeiger nach dem Parallelogrammregel zu einem resultierenden Zeiger zusammengesetzt. Die übrigen Parameter können folgendermassen berechnet werden

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \tag{1.50}$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \tag{1.51}$$

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{A_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\varphi_2)}} \tag{1.52}$$

1.8 Arkusfunktionen

Die Umkehrfunktionen der auf bestimmte Intervalle beschränkten trigonome-trischen Funktionen heissen **Arkus-** oder **zyklometrische Funktionen**. Die Intervalle müssen dabei so gewählt werden, dass die trigonometrischen Funktionen dort in streng monotoner Weise sämtliche Funktionswerte durchlaufen und somit umkehrbar sind. Der Funktionswert einer Arkusfunktion ist ein Bogen- oder Radiant dargestellter Winkel.

1.8.1 Die Arkussinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \arcsin(x)} \tag{1.53}$$

Die Arkussinusfunktion ist die Umkehrfunktion der Sinusfunktion. Der Arkussinus liefert nur Winkel aus dem 1. und 4. Quadrat. Folgende sind Eigenschaften der Arkussinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-1 \leq x \leq 1$

(b) Wertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Monotonie: streng monoton wachsend

(e) Nullstellen: $x_N = 0$

(f) Ableitung: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(g) Stammfunktion: $\int \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

1.8.2 Die Arkuskosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \arccos(x)} \tag{1.54}$$

Die Arkuskosinusfunktion ist die Umkehrfunktion der Kosinusfunktion. Der Arkuskosinus liefert nur Winkel aus dem 1. und 2. Quadrant. Folgende sind Eigenschaften der Arkussinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-1 \leq x \leq 1$

(b) Wertebereich: $0 \leq y \leq \pi$

(c) Symmetrie: punktsymmetrisch zu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(d) Monotonie: streng monoton fallend

(e) Nullstellen: $x_N = 1$

(f) Ableitung: $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(g) Stammfunktion: $\int \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C$

1.8.3 Die Arkustangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \arctan(x)} \tag{1.55}$$

Die Arkustangensfunktion ist die Umkehrfunktion der Tangensfunktion. Der Arkustangens liefert nur Winkel aus dem 1. und 4. Quadrant. Folgende sind Eigenschaften der Arkustangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty \leq x \leq \infty$

(b) Wertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Monotonie: streng monoton wachsend

(e) Asymptoten: $y = \pm\frac{\pi}{2}$

(f) Nullstellen: $x_N = 0$

(g) Ableitung: $\frac{1}{1+x^2} = \cos^2(\arctan(x))$

(h) Stammfunktion: $\int \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2} \ln a^2 + x^2 + C$

1.8.4 Die Arkuskotangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \operatorname{arccot}(x)} \tag{1.56}$$

Die Arkuskotangensfunktion ist die Umkehrfunktion der Kotangensfunktion. Der Arkuskotangens liefert nur Winkel aus dem 1. und 2. Quadrant. Folgende sind Eigenschaften der Arkuskotangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty \leq x \leq \infty$

(b) Wertebereich: $0 \leq y \leq \pi$

(c) Symmetrie: punktsymmetrisch zu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(d) Monotonie: streng monoton fallend

(e) Asymptoten: $y = 0$ und $y = \pi$

(f) Nullstellen: keine

(g) Ableitung: $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{1+x^2} = -\sin^2(\operatorname{arccot}(x))$

(h) Stammfunktion: $\int \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2} \ln a^2 + x^2 + C$

1.8.5 Beziehungen

Beziehungen des negativen Arguments

(a) $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

(b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

(c) $\arctan(-x) = -\arctan(x)$

(d) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

(b) $\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2}$

(c) $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} \pi/2 - \arctan(x), & x > 0 \\ -\pi/2 - \arctan(x), & x < 0 \end{array} \right\}$

(d) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \left\{ \begin{array}{ll} \pi, & xy > 1, x > 0 \\ 0, & xy < 1 \\ -\pi, & xy > 1, x < 0 \end{array} \right\}$

1.9 Exponentialfunktionen

1.9.1 Definition der Exponentialfunktion

Die e-Fnuktion

$$\boxed{f(x) = e^x, \quad -\infty < x < \infty} \quad \boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\ldots} \tag{1.57}$$

Die exponentialfunktion hat die Eulersche Basis e. Die Funktion ist streng monoton wachsend.

Die allgemeine Exponentialfunktion

$$\boxed{f(x) = a^x = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \ln(a), \quad -\infty < x < \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1} \tag{1.58}$$

Die allgemeine Exponentialfunktion hat die Basis a. Folgende sind Eigenschaften der allgemeine Exponentialfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $0 < x < \infty$

(c) Nullstellen: keine

(d) Monotonie für $\lambda > 0$ bzw. $a > 1$: streng monoton wachsend

(e) Monotonie für $\lambda < 0$ bzw. $0 < a < 1$: streng monoton fallend

(f) Asymptote: $y = 0$ (x-Achse)

(g) Fall $f(0) = 1$: Alle Kurven schneiden die y-Achse bei $y = 1$

(h) Fall $f(x) = a^{-x}$: Spiegelung an der y-Achse

1.9.2 Spezielle Exponentialfunktionen

Abklingfunktion

$$\boxed{f(t) = a \cdot e^{-\lambda t} + b = a \cdot e^{-t/\tau} + b, \quad \lambda = \frac{1}{\tau}} \tag{1.59}$$

Die Abklingfunktion ist eine streng monoton fallend Funktion. Sie hat eine waagrechte Asymptote für $t \to \infty$ bei $f(t) = b$ und hat eine Tangente in $t = 0$ und schneidet die Asymptote an der Stelle $\tau = 1/\lambda$.

Sättigungsfunktion

$$\boxed{f(t) = a \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right) + b = a \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) + b, \quad \lambda = \frac{1}{\tau}} \tag{1.60}$$

Die Sättigungsfunktion ist eine streng monoton wachsende Funktion. Sie hat eine Asymptote für $t \to \infty$ bei $f(t) = a + b$. Die Tangente in $t = 0$ schneidet die Asymptoten an der Stelle $\tau = 1/\lambda$.

Wachstumsfunktion

$$\boxed{f(t) = f_0 \cdot e^{\alpha t}, \quad t \geq 0} \tag{1.61}$$

Die Wachstumsfunktion ist für $f_0 > 0$ den Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$ und $\alpha > 0$ die Wachstumsrate

Gauss-Funktion oder Gausssche Glockenkurve

$$\boxed{f(t) = a \cdot e^{-b \cdot (x - x_0)^2}} \tag{1.62}$$

Die Gausssche Glockenkurve hat ein Maximumstelle bei x_0: $f(x_0) = a$. Sie hat eine Symmetrieachse bei $x = x_0$ und ist eine Parallele zur y-Achse durch das Maximum. Die Asymptote im Unendlichen ist die x-Achse

Kettenlinie

$$\boxed{f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)} \tag{1.63}$$

Eine an zwei Punkten P_1 und P_2 befestigte freihängende Kette nimmt unter dem Einfluss der Schwerpkraft die geometrische Form einer Kettenlinie an für $a > 0$.

1.10 Logarithmusfunktionen

1.10.1 Definition der Logarithmusfunktionen

$$\boxed{f(x) = \log_a(x)} \tag{1.64}$$

Die Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ für $a > 0$ und $a \neq 1$. Folgende sind Eigenschjaften der allgemeinen Logarithmusfunktion

(a) Definitionsbereich: $x > 0$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Nullstellen: $x_N = 1$

(d) Monotonie für $0 < a < 1$: streng monoton fallend

(e) Monotonie für $a > 1$: streng monoton wachsend

(f) Asymptote: $x = 0$ (y-Achse)

(g) Für jede zulässige Basis a gilt: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

(h) Die Funktionskurve der Logarithmusfunktion erhält man durch Spiegelung der Exponentialfunktion an der 1. Winkelhalbierenden.

1.10.2 Spezielle Logarithmusfunktion

Natürlicher Logarithmus

$$\boxed{f(x) = \log_e x \equiv \ln(x), \quad x > 0} \tag{1.65}$$

Zehnerlogarithmus: Dekadischer oder Briggscher Logarithmus, $a = 10$

$$\boxed{f(x) = \log_{10} x \equiv \lg(x)\,, \quad x > 0} \tag{1.66}$$

Zweierlogarithmus: Binärlogarithmus, $a = 2$

$$\boxed{f(x) = \log_2 x \equiv \mathrm{lb}(x)\,, \quad x > 0} \tag{1.67}$$

1.11 Hyperbelfunktionen

1.11.1 Die Sinushyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \tag{1.68}$$

Folgende sind Eigenschaften der Sinushyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Extremwerte: keine

(f) Monotonie: streng monoton wachsend

1.11.2 Die Kosinushyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \tag{1.69}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kosinushyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $1 \leq y < \infty$

(c) Symmetrie: gerade

(d) Nullstellen: keine

(e) Extremwerte: $x_{\min} = 0$

(f) Monotonie: keine

1.11.3 Die Tangenshyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \tag{1.70}$$

Folgende sind Eigenschaften der Tangenshyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $1 < y < 1$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Polstellen: keine

(f) Monotonie: streng monoton wachsend

(g) Asymptoten: $y = \pm 1$

1.11.4 Die Kotangenshyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}} \tag{1.71}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kotangenshyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $\left|x\right| > 0$

(b) Wertebereich: $\left|y\right| > 1$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: keine

(e) Polstellen: $x_P = 0$

(f) Monotonie: keine

(g) Asymptoten: $x = 0$ und $y = \pm 1$

1.11.5 Beziehungen

Beziehungen zwischen Hyperbolicusfunktionen

(a) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1$

(b) $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

(c) $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{1}{\tanh(x)}$

Umrechnungen zwischen Hyperbolicusfunktionen

Folgende Eigenschaften gelten für $x \geq 0$ für oberes Vorzeichen und für $x < 0$ für unteres Vorzeichen.

(a) $\sinh(x) = \pm\sqrt{\cosh^2(x) - 1} = \dfrac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$

(b) $\cosh(x) = \sqrt{\sinh^2(x) + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} = \pm\dfrac{\coth(x)}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$

(c) $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}} = \pm\dfrac{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}{\cosh(x)} = \dfrac{1}{\coth(x)}$

(d) $\coth(x) = \dfrac{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}}{\sinh(x)} = \pm\dfrac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \dfrac{1}{\tanh(x)}$

Beziehungen mit negativen Argumenten

(a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

(b) $\cos(-x) = \cosh(x)$

(c) $\tanh(-x) = -\tanh(x)$

(d) $\coth(-x) = -\coth(x)$

Beziehungen mit dem pythagorischen Hyperbolicus

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(b) $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

(c) $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{1}{\tanh(x)}$

Beziehungen der Summe zweier Argumenten

(a) $\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \cosh(x_1) \cdot \sinh(x_2)$

(b) $\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \sinh(x_1) \cdot \sinh(x_2)$

(c) $\tanh(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\tanh(x_1) \pm \tanh(x_2)}{1 \pm \tanh(x_1) \cdot \tanh(x_2)}$

(d) $\coth(x_1 \pm x_2) = \dfrac{1 \pm \coth(x_1) \cdot \coth(x_2)}{\coth(x_1) \pm \coth(x_2)}$

Beziehungen der Verdoppelung des Arguments

(a) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

(b) $\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x)$

(c) $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$

(d) $\coth(2x) = \dfrac{\coth^2(x) + 1}{2\coth(x)}$

Beziehungen der Verdreifachung des Arguments

(a) $\sinh(3x) = 3\sinh(x) + 4\sinh^3(x)$

(b) $\cosh(3x) = 4\cosh^3(x) - 3\cosh(x)$

(c) $\tanh(3x) = \dfrac{3\tanh(x) + \tanh^3(x)}{1 + 3\tanh^2(x)}$

Beziehungen für n-fache Argumente

(a) $\sinh(nx) = \binom{n}{1}\cosh^{n-1}(x)\sinh(x) + \binom{n}{3}\cosh^{n-3}(x)\sinh^3(x) + \binom{n}{5}\cosh^{n-5}(x)\sinh^5(x) + \ldots$

(b) $\cosh(nx) = \cosh^n(x) + \binom{n}{2}\cosh^{n-2}(x)\sinh^2(x) + \binom{n}{4}\cosh^{n-4}(x)\sinh^4(x) + \ldots$

Beziehungen der Hälfte des Arguments

(a) $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$

(b) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}$

(c) $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1}$

(d) $\coth(2x) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{\cosh(x)-1}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)-1}$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\sinh(x_1) + \sinh(x_2) = 2\sinh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(b) $\sinh(x_1) - \sinh(x_2) = 2\cosh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sinh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(c) $\cosh(x_1) + \cosh(x_2) = 2\cosh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(d) $\cosh(x_1) - \cosh(x_2) = 2\sinh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sinh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(e) $\tanh(x_1) \pm \tanh(x_2) = \frac{\sinh(x_1 \pm x_2)}{\cosh(x_1)\cosh(x_2)}$

(f) $\coth(x_1) \pm \coth(x_2) = \frac{\sinh(x_1 \pm x_2)}{\sinh(x_1)\sinh(x_2)}$

Beziehungen der Produkttheoreme

(a) $\sinh(x_1)\cdot\sinh(x_2) = \frac{1}{2}\Big[\cosh(x_1+x_2) - \cosh(x_1-x_2)\Big]$

(b) $\sinh(x_1)\cdot\cosh(x_2) = \frac{1}{2}\Big[\sinh(x_1+x_2) + \sinh(x_1-x_2)\Big]$

(c) $\cosh(x_1)\cdot\cosh(x_2) = \frac{1}{2}\Big[\cosh(x_1+x_2) + \cosh(x_1-x_2)\Big]$

(d) $\tanh(x_1)\cdot\tanh(x_2) = \frac{\tanh(x_1)+\tanh(x_2)}{\coth(x_1)+\coth(x_2)}$

Beziehungen der komplexen Fall

(a) $\sinh(iy) = i\cdot\sinh(y)$

(b) $\cosh(iy) = \cosh(y)$

(c) $\tanh(iy) = i\cdot\tanh(y)$

(d) $\coth(iy) = -i\cdot\coth(y)$

(e) $\Big(\cosh(x) \pm \sinh(x)\Big)^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx) = e^{\pm nx}$

Beziehungen der komplexen Argumente

(a) $\sinh(x \pm i\cdot y) = \sinh(x)\cdot\cosh(iy) \pm \cosh(x)\cdot\sinh(iy)$

(b) $\cosh(x \pm i\cdot y) = \cosh(x)\cdot\cosh(iy) \pm \sinh(x)\cdot\sinh(iy)$

(c) $\tanh(x \pm iy) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(iy)}{1 \pm \tanh(x)\cdot\tanh(iy)}$

(d) $\coth(x \pm iy) = \frac{1 \pm \coth(x)\cdot\coth(iy)}{\coth(x) \pm \coth(iy)}$

1.12 Areafunktionen

1.12.1 Die Areasinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \text{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{1.72}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areasinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Monotonie: streng monoton wachsend

1.12.2 Die Areakosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \text{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{1.73}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areakosinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $x \geq 1$

(b) Wertebereich: $y \geq 0$

(c) Symmetrie: keine

(d) Nullstellen: $x_N = 1$

(e) Monotonie: streng monoton wachsend

1.12.3 Die Areatangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \tag{1.74}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areatangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $-1 < x < 1$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Polstellen: $x_P = \pm 1$

(f) Monotonie: streng monoton wachsend

(g) Asymptoten: $x = \pm 1$

1.12.4 Die Areakotangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \text{Arcoth}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \tag{1.75}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areakotangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $\left|x\right| > 1$

(b) Wertebereich: $\left|y\right| > 0$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: keine

(e) Polstellen: $x_P = \pm 1$

(f) Monotonie: keine

(g) Asymptoten: $x = \pm 1$ und $y = 0$ (x-Achse)

1.12.5 Beziehungen

Umrechnungen zwischen der Areafunktionen

Folgende Beziehungen gelten für oberes Vorzeichen für $x > 0$ und für unteres Vorzeichen für $x < 0$

(a) $\text{Arsinh}(x) = \pm\text{Arcosh}\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \text{Artanh}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \text{Arcoth}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

(b) $\text{Arcosh}(x) = \text{Arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \text{Artanh}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \text{Arcoth}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

(c) $\text{Artanh}(x) = \text{Arsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \pm\text{Arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{Arcoth}\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $\text{Arcoth}(x) = \text{Arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \pm\text{Arcosh}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \text{Artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\text{Arsinh}(x_1) + \text{Arsinh}(x_2) = \text{Arsinh}\left(x_1 \cdot \sqrt{1+x_2^2} \pm x_2 \cdot \sqrt{1+x_1^2}\right)$

(b) $\text{Arcosh}(x_1) + \text{Arcosh}(x_2) = \text{Arcosh}\left(x_1 \cdot x_2 \pm \sqrt{(x_1^2-1)\cdot(x_2^2-1)}\right)$

(c) $\text{Artanh}(x_1) + \text{Artanh}(x_2) = \text{Artanh}\left(\frac{x_1 \pm x_2}{1 \pm x_1 \cdot x_2}\right)$

(d) $\text{Arcoth}(x_1) + \text{Arcoth}(x_2) = \text{Arcoth}\left(\frac{1 \pm x_1 \cdot x_2}{x_1 \pm x_2}\right)$

2 GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Ein einführendes Beispiel

Ein Körper unter Einfluss der Schwerkraft erfährt in der Nähe der Erdoberfläche die konstante Erdbeschleunigung $a = -g$. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Bewegung lautet

$$\boxed{a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) - g} \tag{2.1}$$

Diese Gleichung enthält die 2. Ableitung einer unbekannten Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$. Gleichungen dieser Art werden in der Mathematik als Differentialgleichungen bezeichnet. Die Lösung der Differentialgleichung ist eine Funktion, nämlich die Weg-Zeit-Funktion der Fallbewegung und entsteht durch zweimal integrieren mit zwei unbekannten Parameter, welche mit einer physikalischen Nebenbedingung wie Anfangshöhe bzw. Anfangsgeschwindigkeit bestimmt werden können.

$$\boxed{v(t) = \int a(t)\ \mathrm{d}t = -\int g\,\mathrm{d}t = -gt + C_1} \quad \boxed{v(0) = C_1 = v_0} \tag{2.2}$$

$$\boxed{s(t) = \int v(t)\ \mathrm{d}t = \int (-gt + C_1)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2} \quad \boxed{s(0) = C_2 = s_0} \tag{2.3}$$

Die **allgemeine Löeung** geht dann in die spezielle, den physikalischen ANfangsbedingungen angepasste Lösung über, die auch als **partikuläre Lösung** der Differentialgleichung bezeichnet wird.

$$\boxed{s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t + s_0 \quad (t \geq 0)} \tag{2.4}$$

2.1.2 Definition einer gewöhnliche Differentialgleichung

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung** n-ter Ordnung enthält als höchste Ableitung die n-te Ableitung der unbekannten Funktion $y = y(x)$, kann aber auch Ableitungen niedrigerer Ordnung sowie die Funktion $y = y(x)$ und deren unabhängige Variable x enthalten. Sie ist in der impliziten Form oder falls diese Gleichung nach der höchsten Ableitung auflösbar ist in der expliziren Form

$$\boxed{F(x; y; y'; y''; \dots) = 0} \quad \boxed{y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots)} \tag{2.5}$$

Neben den gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es noch die partiellen Differentialgleichungen. Sie enthalten **partiellen Ableitungen** einer unbekannten Funktion von mehreren Variablen.

2.1.3 Lösungen einer Differentialgleichung

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen der Differentialgleichung identisch erfüllt. Man unterscheidet zwischen der allgemeinen Lösung und der speziellen oder partikulären Lösung. Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängige Parameter. Eine partikuläre Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund zusätzlicher Bedingungen den n Parametern feste Werte zuweist. Dies kann durch Anfangsbedingungen oder Randbedingungen geschehen.

Die Anzahl der unabhängigen Parameter in der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung ist durch die Ordnung der Differentialgleichung bestimmt. Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung enthält somit einen Parameter, die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung genau zwei unabhängige Parameter.

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung repräsentiert eine Kurvenschar mit n Parametern. Für jede spezielle Parameterwahl erhält man eine Lösungskurve. Die Lösungen einer Differentialgleichung werden als Integrale bezeichnet.

2.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.2.1 Geometrische Betrachtung

Die Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ besitze die Eigenschaft, dass durch jeden Punkt des Definitionsbereiches von $f(x; y)$ genau eine Lösungskurve verlaufe. $P_0 = (x_0; y_0)$ ist ein solcher Punkt und $y = y(x)$ die durch den Punkt P_0 gehende Lösungskurve.

Die Steigung $m = \tan(\alpha)$ der Kurventangejte P_0 kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden: Aus der Funktionsgleichung $y = y(x)$ der Lösungskurve durch Differentiation nach der Variablen x: $m = y'(x_0)$ und aus der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ selbst, indem man in diese Gleichung die Koordinaten des Punktes P_0 einsetzt: $m = f(x_0; y_0)$. Somit gilt

$$\boxed{m = y'(x_0) = f(x_0; y_0)} \tag{2.6}$$

Der Anstieg der Lösungskurve durch den Punkt P_0 kann somit direkt aus der Differentialgleichung berechnet werden, die Funktionsgleichung der Lösungskurve wird dabei überhaupt nicht benötigt. Durch die Differentiagleichung der Funktion $f(x; y)$ wird nämlich jedem Punkt $P = (x; y)$ aus dem Definitionsbereich der Funktion $f(x; y)$ ein Richtungs- oder Steigungswert zugeordnet. Er gibt den Anstieg der durch P gehenden Lösungskurve in diesem Punkt an.

Die Richtung der Kurventangente in P kennzeichnet man graphisch durch eine kleine, in der Tangente liegende Strecke, die als Linien- oder Richtungselement bezeichnet wird. Das dem Punkt $P = (x; y)$ zugeordnete Linienelement ist demnach durch die Angabe der beiden Koordinaten x, y

und des Steigungsswertes $m = f(x; y)$ eindeutig bestimmt. Die Gesamtheit der Linienelemente bildet das Richtungsfeld der Differentialgleichung, aus dem sich ein erster, grober Überblick über den Verlauf der Lösungskurven gewinnen lässt. Eine Lösungskurve muss dabei in jedem ihrer Punkte die durch das Richtungsfeld vorgegebene Steigung aufweisen.

Bei der Konstruktion von Näherungskurven erweisen sich die sogenannten Isoklinen als sehr hilfreich. Unter einer Isokline versteht man dabei die Verbindungslinie aller Punkte, deren zugehörige Linienelemente in die gleiche Richtung zeigen, d.h. zueinande rparallel sind. Die Isoklinen der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ sind daher durch folgende Gleichung definiert

$$\boxed{f(x; y) = \text{const.}} \tag{2.7}$$

Im Richtungsfeld der Differentialgleichung konstruiert man nun Kurven, die in ihren Schnittpunkten mit den Isoklinen den gleichen Anstieg besitzen wie die dortigen Linienelemente. In einem Schnittpunkt verlaufen somit Kurventangente und Linienelement parallel, d.h. das Linienelement fällt in die dortige Kurventangente. Kurven mit dieser Eigenschaft sind dann Näherungen für die tatsächlichen Lösungskurven.

2.2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(x)} \tag{2.8}$$

heisst separabel und lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Dabei wird die Differentialgleichung zunächst wie folgt, wobei $g(y) \neq 0$ umgestellt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\ \mathrm{d}x} \tag{2.9}$$

Die linke Seite der Gleichung enthält nur noch die Variable $y$und deren Differential $\mathrm{d}y$, die rechte Seite dagegen nur noch die Variable x und deren Differential $\mathrm{d}x$. Die Variablen wurden somit getrennt und beide Seiten integriert.

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\ \mathrm{d}x} \tag{2.10}$$

Die dann in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegende Lösung wird nach der Variablen y aufgelöst, was in den meisten Fällen möglich ist und man erhält die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ in der expliziten Form $y = y(x)$. Die Lösungen der Gleichung $g(y) = 0$ sind vom Typ $y = \text{const.} = a$ und zugleich dauch Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$.

2.2.3 Differentialgleichungen durch Substitution

In einigen Fällen ist es möglich, eine expliziten Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x; y)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine separable Differentialgleichung 1. Ordnung zurückzuführen, die dann durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

Eine Differentialgleichung von diesem Typ lässt sich durch die lineare Substitution lösen

$$\boxed{u = ax + by + c} \tag{2.11}$$

Dabei sind y und u als Funktionen von x zu betrachten. Berücksichtigt man noch, dass $y' = f(u)$ ist, so folgt hieraus die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + b \cdot f(u)} \tag{2.12}$$

Differentialgleichungen vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Eine Differentialgleichung von diesem Typ wird durch die Substitution gelöst

$$\boxed{u = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = x \cdot u} \tag{2.13}$$

Man differenziert diese Gleichung nach x und erhält

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}} \tag{2.14}$$

wobei y und u Funktionen von x sind. Da $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ ist, geht die Differentialgleichung schliesslich in die separable Differentialgleichung über, die ebenfalls durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Anschluessen folgt die Rücksubstitution und Auflösen nach y.

$$\boxed{u + x \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u) - u}{x}} \tag{2.15}$$

2.2.4 Exakte Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{g(x;y)}{h(x;y)}} \tag{2.16}$$

heisst **exakt** oder vollständig, wenn sie folgende Bedingung erfüllt

$$\boxed{\frac{\partial g(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x;y)}{\partial x}} \tag{2.17}$$

Die linke Seite der Gleichung ist dann das **totale Differential** einer unbekannten Funktion $u(x;y)$. Es gilt

$$\boxed{\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = h(x;y)\,\mathrm{d}x + g(x;y)\,\mathrm{d}y = 0} \tag{2.18}$$

Die Faktorfunktionen $g(x;y)$ und $h(x;y)$ in der exakten Differentialgleichung sind also die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $u(x;y)$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = g(x;y)} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = h(x;y)} \tag{2.19}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet dann in impliziter Form $u(x;y) = \text{const} = C$. Die Funktion $u(x;y)$ lässt sich aus den Gleichungen bestimmen. Die erste der beiden Gleichungen wird bezüglich der Variablen x integriert, wobei zu beachten ist, dass die Integrationskonstante K noch von y abhängen

$$\boxed{u = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \int g(x;y)\,\mathrm{d}x + K(y)} \tag{2.20}$$

Wenn man diese Funktion nach der Variable y partiell ableitet, erhält man die Faktorfunktion $h(x;y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int g(x;y)\,\mathrm{d}x + K(y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\int g(x;y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}K(y) \\ &= \int \frac{\partial g(x;y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x + K'(y) = h(x;y) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Aufgelöst nach $K'(y)$ und durch Integration erhält man die gesuchte Funktion $K(y)$. Damit ist auch $u(x;y)$ und die allgemeine Lösung der exakten Differentialgleichung bekannt.

2.2.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst **linear**, wenn sie in folgender Form darstellbar ist

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = g(x)} \tag{2.22}$$

Die Funktion $g(x)$ wird als **Störfunktion** bezeichnet. Ist $g(x) = 0$, so heisst die lineare Fifferentialgleichung **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

Eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = 0} \tag{2.23}$$

lässt sich durch Trennung der Variablen wie folgt lösen. Zunächst trennt man die beiden Variablen

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x + \ln|C| \\ y &= e^{C}\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (C\in\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = g(x)} \tag{2.25}$$

lässt sich wie folgt durch Variation der Konstanten lösen. Zunächst wird die zugehörige homogene Differentialgleichung durch Trennung der Variablen gelöst. Dies führt zu der allgemeinen Lösung. Die Integrationskonstante K wird durch eine noch unbekannte Funktion $K(x)$ ersetzt.

$$\boxed{y_0 = K\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} \quad \boxed{y = K(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} \tag{2.26}$$

Die inhomogene Differentialgleichung wird durch die 1. Ableitung unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel gelöst

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[K(x)\Big]\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - K(x)\cdot f(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} \tag{2.27}$$

Man setzt für die für y und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ gefundenen Funktionsterme in die inhomogene Differentialgleichung ein

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K(x)\right]\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}-K(x)\cdot f(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}+f(x)\cdot\underbrace{K(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}}_{y}=g(x) \tag{2.28}$$

Somit erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K(x)\right]\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}=g(x)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K(x)\right]=g(x)\cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{2.29}$$

Durch Integration erfolgt

$$K(x)=\int g(x)\cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C \tag{2.30}$$

Diesen Ausdruck setzt man für die Faktorfunktion $K(x)$ des Lösungsansatzes ein und erhält dann die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y=\underbrace{\left[\int g(x)\cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]}_{K(x)}\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{2.31}$$

Durch die Bezeichnung "Variation der Konstantenßoll zum Ausdruck gebracht werden, dass die Integrationskonstante K "variiert", d.h. durch eine Funktion $K(x)$ ersetzt wird.

Integration der inhomogenen Differentialgleichung durch Aufsuchen einer partikulären Lösung

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f(x)\cdot y=g(x) \tag{2.32}$$

ist als Summe aus der allgemeinen Lösung $y_0=y_0(x)$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f(x)\cdot y=0 \tag{2.33}$$

und einer beliebigen partikulären Lösung $y_p=y_p(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung darstellbar

$$y(x)=y_0(x)+y_p(x)\qquad y_0=C\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}\quad(C\in\mathbb{R}) \tag{2.34}$$

Auch lineare Differentialgleichung 2. und höherer Ordnung besitzen diese Eigenschaft. Der Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung y_p hängt noch sowohl vom Typ der Koeffizientenfunktion $f(x)$ als auch vom Typ der Störfunktion $g(x)$ ab. Man muss sich für einen speziellen Funktionstyp entscheiden und dann versuchen, die im Ansatz y_p enthaltenen Parameter so zu bestimmen, dass diese Funktion der inhomogenen Differentialgleichung genügt. Der partikuläre Lösungsansatz y_p wird in die ursprüngliche lineare Differentialgleichung eingesetzt und die Parameter ausgerechnet.

2.2.6 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In den Anwendungen spielen lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten iene besondere Rolle. Sie sind vom Typ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=g(x) \tag{2.35}$$

Die zugehörige homogene Gleichung enthält nur konstante Koeffizienten und wird durch Trennung der Variablen oder durch den Exponentialansatz gelöst.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=0\qquad y_0=C\cdot e^{\lambda x}\qquad y_0'=\lambda\cdot C\cdot e^{\lambda x} \tag{2.36}$$

Mit diesem Ansatz geht man in die homogene Differentialgleichung ein und erhält eine Bestimmungsgleichung für den Parameter λ

$$y_0'+ay_0=\lambda\cdot C\cdot e^{\lambda x}+a\cdot C\cdot e^{\lambda x}=\underbrace{(\lambda+a)}_{0}\cdot C\cdot e^{\lambda x}=0\Longrightarrow\lambda=-a \tag{2.37}$$

Die homogene Differentialgleichung $y'+ay=0$ besitzt also die allgemeine Lösung

$$y_0=C\cdot e^{-ax}\quad(C\in\mathbb{R}) \tag{2.38}$$

Folgende Tabelle zeigt die Lösungsansätze y_p für einige in den Anwendungen besonders häufig auftretende Störfunktionen

Störfunktion $g(x)$	**Lösungsansatz** $y_p(x)$
Konstante Funktion	$y_p = c_0$
Lineare Funktion	$y_p = c_1 x + c_0$
Quadratische Funktion	$y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
Polynomfunktion vom Grade n	$y_p = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$
$g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$ $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$ $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
$g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & \text{für } b = -a \end{cases}$

Tab. 2.1: Lösungsansatz für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die im Lösungsansatz y_p enthaltenen Parameter sind so zu bestimmen, dass die Funktion eine partikuläre Lösung der vorgegebenen inhomogenen Differentialgleichung darstellt. Bei einem richtig gewählten Ansatz stösst man stets auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem für die im Lösungsansatz enthaltenen Stellparameter.

Die Störfunktion $g(x)$ ist eine Summe aus mehreren Störgliedern, somit werden die Lösungsansätze für die einzelnen Glieder addiert. Die Störfunktion $g(x)$ ist ein Produkt aus mehreren Störgliedern, somit werden die einzelnen Gliedern multipliziert.

2.3 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

2.3.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = g(x)} \tag{2.39}$$

heisst lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $(a, b \in \mathbb{R})$. Die Funktion $g(x)$ wird als Störfunktion oder Störglied bezeichnet. Fehlt das Störglied, so heisst die lineare Differentialgleichung homogen, sonst inhomogen.

2.3.2 Allgemeine Eigenschaft der homogenen linearen Differentialgleichung

Eine homogene lineare Differentialgleichung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0} \tag{2.40}$$

besitzt folgende Eigenschaften

- Ist $y_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist auch die mit einer beliebigen Konstanten C multiplizierte Funktion eine Lösung der Differentialgleichung $(C \in \mathbb{R})$

$$\boxed{y(x) = C \cdot y_1(x)} \quad \boxed{y'(x) = C \cdot y_1'(x)} \quad \boxed{y''(x) = C \cdot y_1''(x)} \tag{2.41}$$

- Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung, so ist auch die aus ihnen gebildete Linearkombination eine Lösung der Differentialgleichung $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)} \quad \boxed{y'(x) = C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x)} \tag{2.42}$$

$$\boxed{y''(x) = C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x)} \tag{2.43}$$

- Ist $y(x)$ eine komplexwertige Lösung der Differentialgleichung, so sind auch Realteil $u(x)$ und Imaginärteil $v(x)$ reelle Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y(x) = u(x) + \mathrm{j} \cdot v(x)} \quad \boxed{y'(x) = u'(x) + \mathrm{j} \cdot v'(x)} \quad \boxed{y''(x) = u''(x) + \mathrm{j} \cdot v''(x)} \tag{2.44}$$

Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0} \tag{2.45}$$

werden als Basisfunktionen oder Basislösungen der Differentialgleichung bezeichnet, wenn die aus ihnen gebildete sog. **Wronski-Determinante** von Null verschieden ist

$$\boxed{W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \tag{2.46}$$

Die Wronski-Determinante ist eine 2-reihige Determinante. Sie enthält in der 1. Zeile die beiden Lösungsfunktionen y_1 und y_2 und in der 2. Zeile deren Ableitungen y_1' und y_2'. Man beachte, dass der Wert der Wronski-Determinante noch von der Variablen x abhängt. Es genügt zu zeigen, dass die Wronski-Determinante an einer Stelle x_0 vom Null verschieden ist.

Zwei Basislösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der homogenen Differentialgleichung werden auch als linear unabhängige Lösungen bezeichnet. Verschwindet dagegen die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1 und y_2, so werden die Lösungen als linear abhängig bezeichnet.

Die Konstanten im Lösungsansatz müssen eindeutig aus Anfangsbedingungen bestimmbar sein. Mit den Anfangsbedingungen erhält man ein lineares Gleichungssystem. Das System hat genau eine Lösung, wenn die Wronski-Determinante an der Stelle x_0 von Null verschieden ist.

2.3.3 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

Eine Fundamentalbasis der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=0} \tag{2.47}$$

lässt sich durch einen Lösungsansatz in Form einer Exponentialfunktion mit Parameter λ vom Typ

$$\boxed{y=e^{\lambda x}} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda\cdot e^{\lambda x}} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}=\lambda^2\cdot e^{\lambda x}} \tag{2.48}$$

Eingesetzt in die lineare Differentialgleichung erhält man die charakteristische Gleichung der homogenen Gleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=\lambda^2\cdot e^{\lambda x}+a\lambda\cdot e^{\lambda x}+b\cdot e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)=0} \tag{2.49}$$

$$\boxed{\lambda^2+a\lambda+b=0} \quad \boxed{\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}} \tag{2.50}$$

Die Diskriminante a^2-4b entscheidet dabei über die Art der Lösungen

- Fall $a^2-4b<0$: $\lambda_1\neq\lambda_2$

$$\boxed{y_1=e^{\lambda_1 x}} \quad \boxed{y_2=e^{\lambda_2 x}} \quad \boxed{y=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}} \tag{2.51}$$

- Fall $a^2-4b<0$: $\lambda_1=\lambda_2=c$

$$\boxed{y_1=e^{cx}} \quad \boxed{y_2=x\cdot e^{cx}} \quad \boxed{y=\left(C_1+C_2\cdot x\right)\cdot e^{cx}} \tag{2.52}$$

- Fall $a^2-4b>0$: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{j}\omega$

$$\boxed{y_1=e^{\alpha x}\cdot\sin\left(\omega x\right)} \quad \boxed{y_2=e^{\alpha x}\cdot\cos\left(\omega x\right)} \quad \boxed{y=e^{\alpha x}\cdot\left[C_1\cdot\sin\left(\omega x\right)+C_2\cdot\cos\left(\omega x\right)\right]} \tag{2.53}$$

Die charakteristische Gleichung hat dieselben Koeffizienten wie die homogene Differentialgleichung.

2.3.4 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung $y=y\left(x\right)$ einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=g\left(x\right)} \tag{2.54}$$

ist als Summe aus der allgemeinen Lösung $y_0=y_0\left(x\right)$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=0} \tag{2.55}$$

und einer beliebigen partikulären Lösung $y_p=y_p\left(x\right)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\boxed{y\left(x\right)=y_0\left(x\right)+y_p\left(x\right)} \tag{2.56}$$

Störfunktion $g\left(x\right)$	Lösungsansatz $y_p\left(x\right)$
$g\left(x\right)=P_n\left(x\right)$	$y_p=\begin{cases}Q_n\left(x\right) & \text{für } b\neq 0\\ x\cdot Q_n\left(x\right) & \text{für } a\neq 0 \text{ und } b=0\\ x^2\cdot Q_n\left(x\right) & \text{für } a=b=0\end{cases}$
$g\left(x\right)=e^{cx}$	$y_p=\begin{cases}A\cdot e^{cx} & \text{für } c \text{ keine Lösung der ch. Gleichung}\\ Ax\cdot e^{cx} & \text{für } c \text{ eindeutige Lösung der ch. Gleichung}\\ Ax^2\cdot e^{cx} & \text{für } c \text{ doppelte Lösung der ch. Gleichung}\end{cases}$
$g\left(x\right)=\sin\left(\beta x\right)+\cos\left(\beta x\right)$	$y_p=\begin{cases}A\cdot\sin\left(\beta x\right)+B\cdot\cos\left(\beta x\right) & \text{für j}\beta \text{ keine Lösung}\\ C\cdot\sin\left(\beta x+\varphi\right) & \text{für j}\beta \text{ keine Lösung}\end{cases}$ $y_p=\begin{cases}x\cdot\left[A\cdot\sin\left(\beta x\right)+B\cdot\cos\left(\beta x\right)\right] & \text{für j}\beta \text{ eindeutige Lösung}\\ C\cdot x\cdot\sin\left(\beta x+\varphi\right) & \text{für j}\beta \text{ eindeutige Lösung}\end{cases}$
$g\left(x\right)=P_n\left(x\right)\cdot e^{cx}\cdot\sin\left(\beta x\right)$ $g\left(x\right)=P_n\left(x\right)\cdot e^{cx}\cdot\cos\left(\beta x\right)$	Für jβ keine Lösung $y_p=e^{cx}\cdot\left[Q_n\left(x\right)\cdot\sin\left(\beta x\right)+R_n\left(x\right)\cdot\cos\left(\beta x\right)\right]$ Für jβ eindeutige Lösung $y_p=x\cdot e^{cx}\cdot\left[Q_n\left(x\right)\cdot\sin\left(\beta x\right)+R_n\left(x\right)\cdot\cos\left(\beta x\right)\right]$

Tab. 2.2: Lösungsansatz für die partikuläre Lösung $y_p\left(x\right)$ der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten