Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Lage eines Massenpunktes

Ein **Massensystem** $S\{M\}$ besteht aus **Massenpunkten** M. Jeder Massenpunkt M hat eine bestimmte geometrische Lage in Abhängigkeit der Zeit im Euklidischem Vektorraum. Zur Beschreibung der Lage von Massensystemen S braucht man Bezugspunkten und ein geeignetes **Koordinatensystem**.

1.1.1 Koordinaten bezüglich eines Bezugspunktes

Ein Bezugspunkt O ist ein starrer Körper, der für alle Zeiten eine feste konstante Lage besitzt. Der Bezugspunkt ist durch ein Koordinatensystem, durch drei unabhängige Grössen mit drei fest orthogonal gerichtete Achsen mit unendlicher Ausdehnung ohne Behaftung von Materie, orientiert.

Die Lage vom Massensystem $S\{M\}$ aus Massenpunkten M kann demzufolge bezüglich einen Bezugspunkt O beschrieben werden. Die Koordinaten jedem Massenpunkt M können durch Abstände und Winkel bezüglich des Bezugspunktes O gebildet werden. Die drei hauptsächliche Koordinaten sind die kartesische, die zylindrische und die sphärische Koordinaten.

1.1.2 Kartesische Koordinaten

Die Lage des Massenpunktes M bezügich O zur Zeit t im Euklidischem Vektorraum ist durch drei Projektionen auf die kartesische Achsen orientiert. Die drei kartesische Koordinaten eines Massenpunktes M sind $x := \overline{OM_x}$, $y := \overline{OM_y}$ und $z := \overline{OM_z}$ mit dem Definitionsintervall $(-\infty, \infty)$.

Man spricht von einer Lageänderung eines Massenpunktes, wenn zu Zeiten t_1 und t_2 zwei verschiedene Lageorten durch die kartesische Koordinaten erzeugt werden. Die kartesische Koordinaten erfolgen durch drei kartesische Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit. Diese Funktionen stellen eine Bahnkurve durch parametrische Gleichungen dar.

$$\boxed{x(t) = f_x(t)} \quad \boxed{y(t) = f_y(t)} \quad \boxed{z(t) = f_z(t)} \tag{1.1}$$

Werden zwei der drei Grössen konstant gehalten und die andere wird verändert, so beschreibt den Massenpunkt je eine Gerade. Somit entstehen drei Geraden, welche zur Achse der jeweils veränderten Koordinate parallel sind und heissen **kartesische Koordinatenlinien**.

Wird nur eine Koordinate konstant gehalten und die zwei anderen werden verändert, so beschreibt den Massenpunkt eine Ebene. Somit entstehen drei Ebenen, welche zu den Ebenen O_{xy}, O_{yz} und O_{xz} parallel sind und heissen **kartesische Koordinatenflächen**. Die kartesischen Koordinatenlinien sind geradlinig orthogonal.

1.1.3 Zylindrische Koordinaten

Drei Funktionen der Zeit im Zeitintervall ergeben die Bewegung des Massenpunktes M in zylindrischen Koordinaten.

$$\boxed{\rho\,(t) = f_\rho\,(t)} \quad \boxed{\varphi\,(t) = f_\varphi\,(t)} \quad \boxed{z\,(t) = f_z(t)} \tag{1.2}$$

Sei M_{xy} die Projektion des Massenpunktes in die Ebene O_{xy}. Der Abstand $\rho = \overline{OM_{xy}}$, der Winkel $\varphi := \measuredangle\,(Ox, OM_{xy})$ zwischen der x-Achse und die Projektion in die xy-Ebene sowie die z-Komponente des Massenpunktes sind die zylindrischen Koordinaten von M zur Zeit t. Der Winkel φ ist in Bogenmass angegeben und im gegenuhrzeigersinn positiv gemessen. Den Definitionsintervalle gehören $\rho \in [0\infty)$, $\varphi \in (\infty, \infty)$ und $z \in (\infty, \infty)$

Die zugehörige Umwandlungen von der kartesischen in die zylindrische Koordinaten sind

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \boxed{z = z} \tag{1.3}$$

Von der zylindrischen in die kartesischen Koordinaten lauten die Umwandlungen

$$\boxed{x = \rho \cdot \cos\,(\varphi)} \quad \boxed{y = \rho \cdot \sin\,(\varphi)} \quad \boxed{z = z} \tag{1.4}$$

Werden zwei der drei Grössen konstant gehalten und die andere wird verändert, so entsteht im betrachteten Massenpunkt M die ρ-Koordinatenlinie $\overline{\rho}$ als zylindrisch-radiale Halbgerade, die φ-Koordinatenlinie $\overline{\varphi}$ als Parallelkreis und die z-Koordinatenlinie $\overline{z}$ als axiale Gerade parallel zur z-Achse. Die drei Koordinatenlinien sind orthogonal zueinander. Die zylindrischen Koordinatenlinien sind **krummlinig orthogonal**.

Wird nur eine Koordinate konstant gehalten, so entstehen Kreiszylinderflächen um die z-Achse (ρ konstant), Halbebenen durch O_z (φ fest) und Ebenen parallel zu O_{xy} (z fest). Diese **zylindrische Koordinatenflächen** sind zueinander orthogonal.

Ist die z-Koordinate konstant, so wird die Bewegung des Massenpunktes M

durch $\rho = f_\rho(t)$ und $\varphi = f_\varphi(t)$ beschrieben und heissen in diesem Fall die zylindrischen Koordinaten ρ und φ **Polarkoordinaten** und wird in der **Kreisbewegung** benutzt.

1.1.4 Sphärische Koordinaten

Drei Funktionen der Zeit im zeitintervall ergeben die Bewegung des Massenpunktes M in sphärischen Koordinaten.

$$\boxed{r = f_r\,(t)} \quad \boxed{\theta = f_\theta\,(t)} \quad \boxed{\psi = f_\psi\,(t)} \tag{1.5}$$

Der Abstand $r := \overline{OM}$ sowie die Winkel $\theta := \measuredangle\,(O_z, OM)$ und $\psi = \measuredangle\,(Ox, OM_{xy})$ sind die sphärischen Koordinaten von M in O_{xyz} mit den Definitionsintervallen $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [-\infty, \infty]$, $\psi \in (-\infty, \infty)$. Der Winkel ψ übereinstimmt den Winkel φ aus den zylindrischen Koordinaten.

Die zugehörige Umwandlungen von der kartesischen in die sphärischen Koordinaten sind

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)} \quad \boxed{\psi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{1.6}$$

Von den sphärischen in die kartesische Koordinaten lauten die Umwandlungen

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\psi)} \quad \boxed{y = r\sin(\theta)\sin(\psi)} \quad \boxed{z = r\cos(\theta)} \tag{1.7}$$

Die **sphärischen Koordinatenlinien** werden analog zu den zylindrischen Koordinatenlinien konstruiert. Im betrachteten Massenpunkt M entsteht als ψ-Koordinatenlinie ein Parallelkreis, als θ-Koordinatenlinie ein Meridiankreis und als r-Koordinaten-linie eine radiale Halbgerade. Die sphärischen Koordinatenlinien sind **krummlinig orthogonal**. Die **sphärische Koordinatenfläche** für festgehaltenes r ist eine Kugel.

1.2 Bewegung eines Massenpunktes

Bezüglich des Ursprungs O entsteht den **Ortsvektor** vom Massenpunkt M. Dieser Ortsvektor $\vec{r}_M$ ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem und wird durch seinen Betrag und Richtung charakterisiert. Der Bewegungszustand eines Massenpunktes zwischen einem Zeitintervall wird durch seine Lage beschrieben.

$$\boxed{\vec{r}_M(t) := \vec{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)} \tag{1.8}$$

Eine Vektorfunktion der Zeit ist die Zuordnung einer vektoriellen abhängigen variablen zu gegebenen Werten der skalaren unabhängigen Variablen wie die Zeit. Die Funktion stellt eien Abbildung von Zahlen in Vektoren dar. Eine Vektorfunktion verändert den Betrag und die Richtung bezüglich eines Bezugspunktes.

Ist der Betrag $\left|\vec{r}\right|$ veränderlich, die Richtung aber konstant, so liegt eine **geradlinige Bewegung** vor und die Bahnkurve liegt auf einer Gerade, die durch den Ursprung O geht.

Wird die Richtung verändert und den Betrag $\left|\overrightarrow{r}\right|$ konstant gehalten, so liegt eine **krummlinige Bewegung** mit Bahnkurve auf einer Kugel.

Zur Beschreibung von Vektorfunktionen führt man **Basen** ein, welche aus drei Vektoren $\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$ und $\overrightarrow{b}_3$, die linear unabhängig sind.

Der Ortsvektor $\overrightarrow{r}$ und die Vektorfunktion $\overrightarrow{f}$ lassen sich bezüglich dieser Basis nach Parallelogramregel zerlegen wobei r_i die skalaren und $r_i\overrightarrow{b}_i$ die vektorielle Komponenten sind. Sind die drei Vektoren der Basis orthogonal zueinander und normiert, so heissen sie **orthonormierte Basisvektoren** oder orthogonale Einheitsvektoren.

$$\boxed{\overrightarrow{r} = r_1 \cdot \overrightarrow{b}_1 + r_2 \cdot \overrightarrow{b}_2 + r_3 \cdot \overrightarrow{b}_3} \tag{1.9}$$

Orthogonale Einheitsvektoren werden in Richtung zu den entsprechenden Koordinatenlinien aller Koordinatenarten eingeführt. Auf diese Weise entstehen kartesische, zylindrische und sphärische Basisvektoren.

1.2.1 Kartesische Komponenten der Bewegung

Die Zerlegung des Ortsvektors bezüglich der **kartesischen Basis** ergibt

$$\boxed{\overrightarrow{r}(t) = x(t) \cdot \overrightarrow{e}_x + y(t) \cdot \overrightarrow{e}_y + z(t) \cdot \overrightarrow{e}_z} \tag{1.10}$$

1.2.2 Zylindrische Komponenten der Bewegung

Den tangentialen Richtungen der Koordinatenlinien sind zylindrisch radial und azimutal gerichtet. Die Richtungen von $\overrightarrow{e}_\rho$ und $\overrightarrow{e}_\varphi$ sind bezüglich O_{xyz} veränderlich und von der jeweiligen Lage von M abhängig. Diese Vektoren sind nicht konstante Vektorfunktionen, welche durch die enzige skalare Winkelfunktion $\varphi = f_\varphi(t)$ festgelegt wird. Die Zerlegung des Ortsvektors bezüglich der **zylindrischen Basis** ergibt

$$\boxed{\overrightarrow{r}(t) = \rho(t) \cdot \overrightarrow{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t) \cdot \overrightarrow{e}_z} \tag{1.11}$$

1.2.3 Sphärische Komponenten der Bewegung

Die Einheitsvektoren $\overrightarrow{e}_r$, $\overrightarrow{e}_\varphi$ und $\overrightarrow{e}_\psi$ sind polar-radial, meridional und azimutal. Alle Einheitsvektoren haben veränderliche Richtungen. Die Zerlegung des Ortsvektors bezüglich der **sphärischen Basis** ergibt

$$\boxed{\overrightarrow{r}(t) = r(t) \cdot \overrightarrow{e}_r(\theta(t), \psi(t))} \tag{1.12}$$

1.2.4 Verschiebung

Beschreiben $\overrightarrow{r}(t_1)$ und $\overrightarrow{r}(t_2)$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 den Ort eines Massenpunktes bezüglich eines Koordinatensystems, so ist die Verschiebung $\triangle\overrightarrow{r}$

des Massenpunktes im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ gegeben durch

$$\boxed{\triangle\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1) = \left|\triangle\vec{r}\,(t)\right| \cdot \vec{e}_{\triangle\vec{r}}} \tag{1.13}$$

Jeder Verschiebungsvektor $\triangle\vec{r}$ kann als Produkt seiner Länge $\left|\triangle\vec{r}\right|$ und des Richtungsvektors $\vec{e}_{\triangle\vec{r}}$ der Verschiebung formuliert werden.

1.3 Geschwindigkeit eines Massenpunktes

1.3.1 Vektorfunktion einer skalaren Variable

Für die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Vektorfunktionen $\vec{r}$ gelten ähnliche Definitionen wie für skalare Funktionen. Die Ableitung einer differenzierbaren Vektorfunktion ist

$$\boxed{\dot{\vec{r}} := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{r}\,(t+\triangle t) - \vec{r}\,(t)}{\triangle t}} \tag{1.14}$$

Die folgenden Eigenschaften gehören der Ableitung einer Vektorfunktion.

(i) $(s \cdot \vec{r})^{\cdot} = \dot{s} \cdot \vec{r} + s \cdot \dot{\vec{r}}$

(ii) $(\vec{q} \bullet \vec{r})^{\cdot} = \dot{\vec{q}} \bullet \vec{r} + \vec{q} \bullet \dot{\vec{r}}$

(iii) $(\vec{q} \times \vec{r})^{\cdot} = \dot{\vec{q}} \times \vec{r} + \vec{q} \times \dot{\vec{r}}$

(iv) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

1.3.2 Schnelligkeit und Geschwindigkeit

Ein Massenpunkt M beschreibt durch seine Bewegung eine Bahnkurve C. Durch die Wahl eines Punktes A auf der Bahnkurve in Beziehung mit dem Massenpunkt M entsteht die **Bogenlänge** $s := AM$. Damit kann s als krummlinige Koordinate von M auf der Bahnkurve C aufgefasst werden. Die Bewegung auf C sei durch die Funktion $t \to s$ für $t \in [t_1, t_2]$ beschrieben. Die Ableitung heisst Schnelligkeit von M auf C

$$\boxed{\dot{s} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s\,(t+\triangle t) - s\,(t)}{\triangle t}} \tag{1.15}$$

Hat ein Massenpunkt zu jedem Zeitpunkt eine konstante Schnelligkeit, so heisst seine Bewegung **gleichförmig**. Die Bogenlänge ist dann eine lineare Funktion der Zeit von der Form $s = s_0 + \dot{s}t$. Ist die Bahnkurve C eine Gerade, so heisst die Bewegung **geradlinig gleichförmig**.

Die **Schnelligkeit** $\dot{s}$ ist eine skalare Grösse und enthält deshalb keine Information über die Richtung der Bahnkurve bezüglich O_{xyz}. Die **Geschwindigkeit** ist tangential an die Bahnkurve C und wird durch einen tangentialen Einheitsvektor $\vec{\tau}$ in positive Richtung der Bogenlänge s eingeführt. Dieser Einheitsvektor entspricht einer Vektorfunktion der Zeit $t \to \vec{\tau}$. Die Geschwindigkeit wird durch den Vektor $\vec{v}$ definiert, dessen Betrag $s = \left|\vec{v}\right|$ der Absolutwert der Schnelligkeit und dessen positiver Richtung jene von $\vec{\tau}$ und dessen negative Richtung jene von $-\vec{\tau}$ ist.

$$\boxed{\vec{v} := s \cdot \vec{\tau}} \quad \boxed{\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}} \tag{1.16}$$

1.3.3 Ortsvektor und Geschwindigkeit

Auf der Bahnkurve C seien zwei Massenpunkte M und M' gegeben. Die längs C gemessene krummlinige Strecke soll als $\triangle s := s\left(M'\right) - s\left(M\right)$, die Differenz der Ortsvektore als $\triangle \vec{r} := \vec{r}\left(M'\right) - \vec{r}\left(M\right)$. Der Betrag $\left|\vec{r}\right|$ entspricht der Länge MM' der Sehne von M zu M'. Fasst man den Ortsvektor $\vec{r}$ als Vektorfunktion der Bogenlänge auf und lässt M' gegen M streben, so kann man beweisen, dass $\dot{\vec{r}}$ die Ableitung des Ortsvektors nach s den tangentialen Einheitsvektor ergibt. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist demzufolge die zeitliche Änderung des Ortsvektors $\dot{\vec{r}}$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} := \lim_{\triangle s \to 0} \frac{\triangle \vec{r}}{\triangle s} = \vec{\tau}} \quad \boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}}} \tag{1.17}$$

1.3.4 Kartesische Komponenten der Geschwindigkeit

Die Ableitung des Ortsvektors in kartesischen Komponenten ist hier zu achten, dass die Einheitsvektoren der kartesischen Basis zeitlich konstant sind, d.h. $\dot{\vec{e}}_x = \dot{\vec{e}}_y = \dot{\vec{e}}_z = 0$. Bei der Anwendungdes Produktregels ergeben sich die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit.

$$\boxed{\vec{v}\left(t\right) = \dot{x}\left(t\right) \cdot \vec{e}_x + \dot{y}\left(t\right) \cdot \vec{e}_y + \dot{z}\left(t\right) \cdot \vec{e}_z} \tag{1.18}$$

1.3.5 Zylindrische Komponenten der Geschwindigkeit

Die Ableitung des Ortsvektors in zylindrischen Komponenten ist hier zu achten, dass der Einheitsvektor $\vec{e}_\rho$ trotz seines konstanten Betrages eine Funktion des WInkels $\varphi = \varphi\left(t\right)$ und damit der Zeit. Seine Ableitung beträgt $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\left(t\right) \cdot \vec{e}_\varphi$. Bei der Anwendung des Produkt- und Kettenregels ergeben sich die zylindrische Komponenten der Geschwindigkeit.

$$\boxed{\vec{v}\left(t\right) = \dot{\rho}\left(t\right) \cdot \vec{e}_\rho + \rho\left(t\right) \cdot \dot{\varphi}\left(t\right) \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z}\left(t\right) \cdot \vec{e}_z} \tag{1.19}$$

1.3.6 Sphärische Komponenten der Geschwindigkeit

Die Ableitung des Ortsvektor in sphärischen Komponenten ist hier zu achten, dass die Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_r$ abhängig von $\theta\left(t\right)$, $\psi\left(t\right)$ und der Zeit ist. Seine Ableitung beträgt $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\left(t\right) \cdot \vec{e}_\theta + \dot{\psi} \cdot \sin\left(\theta\right)\left(t\right) \cdot \vec{e}_\psi$. Bei der Anwendung des Produkt- und Kettenregels ergeben sich die sphärischen Komponenten der Geschwindigkeit.

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \cdot \vec{e}_r + r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{e}_\theta + r(t) \cdot \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\psi}(t) \cdot \vec{e}_\psi} \tag{1.20}$$

1.3.7 Mittlere Geschwindigkeit

Beschreiben $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 den Ort des Massenpunktes bezüglich eines Koordinatensystems, so ist die mittlere Geschwindigkeit $\triangle\vec{v}(t)$ des Massenpunktes im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ gegeben durch

$$\boxed{\triangle\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\triangle\vec{r}(t)}{t_2 - t_1}} \tag{1.21}$$

1.3.8 Momentane Geschwindigkeit

Beschreiben $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 den Ort des Massenpunktes bezüglich eines Koordinatensystems, so ist die Momentangeschwindigkeit $\triangle\vec{v}(t_1)$ des Massenpunktes zur Zeit t_1 gegeben durch

$$\boxed{\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t_1)} \tag{1.22}$$

1.3.9 Momentane Schnelligkeit

Beschreibt $\vec{r}(t)$ den Ort der Bewegung eines Massenpunktes bezüglich eines Koordinatensystems, so ist die momentane Schnelligkeit $\dot{s}(t)$ zur Zeit t durch den Betrag der Geschwindigkeit des Massenpunkts definiert

$$\boxed{\dot{s}(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|} \tag{1.23}$$

1.3.10 Mittlere Schnelligkeit

Legt ein Massenpunkt, der der eine Bewegung vollzieht, in der Zeit $\triangle t$ die Strecke s zurück, so gilt für seine mittlere Schnelligkeit

$$\boxed{\triangle\dot{s}(t) = \frac{s}{\triangle t}} \tag{1.24}$$

1.3.11 Mittlere Beschleunigung

Beschreiben $\vec{v}(t_1)$ und $\vec{v}(t_2)$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 die Momentangeschwindigkeit eines Massenpunkts bezüglich eines Koordinatensystems, so ist die mittlere Beschleunigung $\triangle\vec{a}(t)$ des Massenpunkts im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ gegeben durch

$$\boxed{\triangle\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}} \tag{1.25}$$

1.3.12 Momentane Beschleunigung

Beschreiben $\vec{v}\left(t_1\right)$ und $\vec{v}\left(t_2\right)$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 die Momentangeschwindigkeit eines Massenpunkts bezüglich eines Koordinatensystems, so ist die Momentanbeschleunigung $\triangle\vec{a}\left(t_1\right)$ des Massenpunkts zur Zeit t_1 gegeben durch

$$\boxed{\vec{a}\left(t_1\right) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}\left(t_2\right) - \vec{v}\left(t_1\right)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\left(t_1\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(t_1\right)} \tag{1.26}$$

1.3.13 Integralformulierungen

Beschreibt $\vec{a}\left(t\right)$ die Momentanbeschleunigung eines Massenpunktes bezüglich eines Koordinatensystems, so gilt für die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}\left(t\right)$ des Massenpunktes zur Zeit t

$$\boxed{\vec{v}\left(t\right) = \int \vec{a}\left(t\right) + \vec{C}} \tag{1.27}$$

Beschreibt $\vec{v}\left(t\right)$ die Momentangeschwindigkeit eines Massenpunktes bezüglich eines Koordinatensystems, so gilt für den Ort $\vec{r}\left(t\right)$ des Massenpunktes zur Zeit t

$$\boxed{\vec{r}\left(t\right) = \int \vec{v}\left(t\right) + \vec{C}} \tag{1.28}$$

1.3.14 Schiefer Wurf

Unter der Annahme $\vec{a}\left(t\right) = -g \cdot \vec{e}_y$ einer konstanten Gravitationsbeschleunigung lässt sich der schiefe Wurf eines Massenpunktes kinematisch wie folgt beschreiben, wobei x_0, y_0, $v_{0,x}$, $v_{0,y}$ die Komponenten von Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, v_0 die Schnelligkeit des Massenpunktes zur Zeit $t = 0$, β der Abschusswinkel zur Horizontalen und $y\left(x\right)$ die Gleichung der Wurfparabel sind

$$\boxed{\vec{a}\left(t\right) = \begin{pmatrix} a_x\left(t\right) \\ a_y\left(t\right) \\ a_z\left(t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{1.29}$$

$$\boxed{\vec{v}\left(t\right) = \begin{pmatrix} v_x\left(t\right) \\ v_y\left(t\right) \\ v_z\left(t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ -gt + v_{0,y} \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{1.30}$$

$$\boxed{\vec{r}\left(t\right) = \begin{pmatrix} x\left(t\right) \\ y\left(t\right) \\ z\left(t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0,x}t + x_0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_{0,y}t + y_0 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{1.31}$$

$$\boxed{v_{0,x} = v_0 \cdot \cos\left(\varphi\right)} \quad \boxed{v_{0,y} = v_0 \cdot \sin\left(\varphi\right)} \tag{1.32}$$

$$\boxed{v_0 = \left|\vec{v}\left(0\right)\right| = \sqrt{v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2}} \tag{1.33}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\beta)}\cdot(x-x_0)^2 + \tan(\beta)\cdot(x-x_0) + y_0} \tag{1.34}$$

$$\boxed{\beta = \arctan\left(\frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}\right)} \tag{1.35}$$

1.3.15 Spezieller Fall: Die Kreisbewegung

Bei der Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius R gelten die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\rho(t) = R} \quad \boxed{\varphi(t) = \varphi} \quad \boxed{z = z_0} \tag{1.36}$$

Die Geschwindigkeit beträgt

$$\boxed{\vec{v} = R\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi} \quad \boxed{\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho} \tag{1.37}$$

Die Schnelligkeit ist $\dot{s} = R\dot{\varphi}$ und der tangentiale Einehitsvektor $\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi$. Die Grösse $\dot{\varphi}$ heisst **Winkelschnelligkeit**. Der Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi$ ist in Funktion von $\vec{e}_z$ und $\vec{e}_\rho$. Eingesetzt in die Geschwindigkeit erhält man folgende Beziehungen

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \vec{v} & = & R\cdot\dot{\varphi}\cdot(\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho) \\ & = & \dot{\varphi}\cdot\vec{e}_z \times R\cdot\vec{e}_\rho \\ & = & \dot{\varphi}\cdot\vec{e}_z \times (\vec{r} - z_0\cdot\vec{e}_z) \\ & = & \dot{\varphi}\cdot\vec{e}_z \times \vec{r} \underbrace{-\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_z \times z_0\cdot\vec{e}_z}_{0} \end{array}} \tag{1.38}$$

Der Vektor $\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_z$ soll **Winkelgeschwindigkeit** der Kreisbewegung um die z-Achse genannt und mit $\vec{\omega}$ bezeichnet werden.

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\cdot\vec{e}_z = \omega\cdot\vec{e}_z} \tag{1.39}$$

Für die Geschwindigkeit der Kreisbewegung ergibt sich

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{1.40}$$

1.3.16 Allgemeinste Kreisbewegung

Führt ein Massenpunkt eine Kreisbewegung durch, so ist seine Bewegung bezüglich eines Polarkoordinatensystems durch folgende Grössen: Radius $\rho(t) = R$ [m], Winkel $\varphi(t)$ [rad], Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ [rad s^{-1}] oder [s^{-1}] und Winkelbeschleunigung $\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$ [rad s^{-2}] oder [s^{-2}]. Für die Beschreibung der Bewegung bezüglich eines Koordinatensystems mit gleichem Ursprung wie das Polarkoordinatensystem gilt

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}} \tag{1.41}$$

1.4 Die Kinematik starrer Körper

Die Länge zwischen dem Verbindungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{MM'}$ zweier Massenpunkten sowie der Winkel zweier Verbindungsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{MM'}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{MM''}$ dreier Massenpunkten $\measuredangle(M'MM'')$ eines starren Körpers bleiben konstant.

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{a} = \text{konstant}} \qquad \boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\alpha)} \tag{1.42}$$

1.4.1 Satz der projizierten Geschwindigkeiten

Betrachte zwei beliebige Massenpunkte M und N eines starren Körpers und ihre Geschwindigkeiten $\vec{v}_M$ und $\vec{v}_N$ zum Zeitpunkt t bezüglich O_{xyz}. Die Projektionen von $\vec{v}_M$ und $\vec{v}_N$ auf die Verbindungsgerade $\vec{r}_{MN}$ seien $\vec{v}'_M$ und $\vec{v}'_N$. Die Geschwindigkeiten $\vec{v}_M$ und $\vec{v}_N$ weisen zu allen Zeiten gleiche Projektionen in Richtung ihrer Verbindungsgerade $\vec{r}_{MN}$ auf. Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten stellt eine Eigenschaft starrer Körper dar.

$$\boxed{\vec{v}'_M = \vec{v}'_N \Longleftrightarrow \vec{r}_{MN} \bullet \vec{v}_M = \vec{r}_{MN} \bullet \vec{v}_N} \tag{1.43}$$

Zum Beweis gelten zwei willkürliche Massenpunkte M mit $\vec{r}_M$ bzw. $\vec{v}_M$ und N mit $\vec{r}_N$ bzw. $\vec{v}_N$ eines starren Massensystems S mit

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
 & & \vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M, \quad \vec{v}_N = \vec{\omega} \times \vec{r}_N \\
\vec{v}_M \bullet \vec{r}_{MN} & = & \vec{v}_M \bullet (\vec{r}_N - \vec{r}_M) \\
 & = & (\vec{v}_M \bullet \vec{r}_N) - \underbrace{(\vec{v}_M \bullet \vec{r}_M)}_{0} \\
 & = & (\vec{\omega} \times \vec{r}_M) \bullet \vec{r}_N \\
\vec{v}_N \bullet \vec{r}_{MN} & = & \vec{v}_N \bullet (\vec{r}_N - \vec{r}_M) \\
 & = & \underbrace{(\vec{v}_N \bullet \vec{r}_N)}_{0} - (\vec{v}_N \bullet \vec{r}_M) \\
 & = & -(\vec{\omega} \times \vec{r}_N) \bullet \vec{r}_M = \\
 & = & (\vec{\omega} \times \vec{r}_M) \bullet \vec{r}_N \\
 & & \Longrightarrow \vec{r}_{MN} \bullet \vec{v}_M = \vec{r}_{MN} \bullet \vec{v}_N
\end{array}} \tag{1.44}$$

1.4.2 Translation

Bei der Bewegung eines starren Körpers bezüglich O_{xyz} bleibt nicht nur der Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{MN}$ zweier Massenpunkte M und N sondern auch seine Richtung für alle Zeiten konstant. Somit sind alle Bahnkurven aller Massenpunkte vom starren Körper kongruent. Alle Geschwindigkeiten sind uniform gleichgerichtet und betragsmässig gleich.

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_N} \tag{1.45}$$

Bei geradlinigen Translationen heisst die Translation auch **geradlinig**, sonst ist die Translation **krummlinig**. Sind die Bahnkurven eben, so liegt eine ebene **krummlinige Translation** vor. Bei Federmechanismen, so nennt man diese Schwingungen **Translationsschwingungen**. Ist die Translation von Massenpunkte auf einem Kreis, so heisst sie **kreisförmige Translation**. Ist an einem Massensystem S die Geschwindigkeit nur zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ gleichmässig verteilt, dann befindet sich das System in einer **momentanen Translation**.

1.4.3 Rotation

Bleiben bei der Bewegung eines starren Körpers bezüglich O_{xyz} zwei Massenpunktep A und B für alle Zeiten ohne Lageänderung, so heisst die Bewegung **Rotation**.

Die **Rotationsachse** $\mu := \overrightarrow{AB}$ läuft durch die Massenpunkte A und B und ist auch in Ruhe. Jeder Massenpunkt ausserhalb dieser Rotationsachse beschreibt eine Kreisbahn senkrecht zu μ mit dem Mittelpunkte auf μ. Alle Masenpunkte ausserhalb der Rotationsachse drehen sich auf ihren Kreisbahnen um den gleichen **Drehwinkel** $\phi(t)$ der Rotation und folgt daraus, dass alle Massenpunkte auf ihren Kreisbahnen mit gleicher Winkelschnelligkeit $\dot{\phi}(t)$.

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\phi} \cdot \vec{e}_\mu = \omega \cdot \vec{e}_\mu} \tag{1.46}$$

Diese gemeinsame Winkelgeschwindigkeit heisst **Rotationsgeschwindigkeit** und die skalare Grösse ω **Rotationsschnelligkeit**. Bleibt $\dot{\phi}$ konstant, so liegt eine **gleichförmige Rotation** vor.

Bei der Rotation eines starren Körpers beschreibt jeder Massenpunkt eine Kreisbewegung mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die gemeinsame Rotationsachse μ.

Da der Ortsvektor $\vec{r}$ je nach Punkt M verschiedene Beträge und Richtungen aufweist, sind die Geschwindigkeiten zu jedem Zeitpunkt örtlich veränderlich verteilt. Der Betrag der Geschwindigkeit zum Abstand von der Rotationsachse ist proportional. Der Betrag von $\vec{\omega}$ ist die Anzahl Umdrehungen pro Minute.

$$\boxed{\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}} \qquad \boxed{\left|\vec{\omega}\right| = \left|\dot{\phi}\right| = 2\pi \frac{n}{60}} \tag{1.47}$$

Ist an einem Massensystem die Geschwindigkeitsverteilung nur zu einem bestimmten Zeitpunkt$t = t_0$ gegeben, dann befindet sich das System zu diesem Zeitpunkt in einer momentanen Rotation.

1.4.4 Rollen und Gleiten

Das **Rollen** eines starren Massensystems S ist der Berührungspunkt $\vec{r}_Z$ mit einer ruhenden Lage momentan in Ruhe $\vec{v}_Z = \vec{0}$. Die Geschwindigkeiten der restlichen Massenpunkte auf dem rollenden Massensystem liegen tangential zum Verbindungsvektor $\vec{v}_M \perp \vec{r}_{ZM}$. Der Punkt Z heisst **Momentanzentrum**.

Zum Zeitpunkt t_0 eine Geschwindigkeitsverteilung mit $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_\mu$ und liegt auf der Berührungsgerade zwischen Massensystem S und ruhende Lage. Die Rollbewegung entspricht also einer momentanen Rotation um die jeweilige Berührungsgerade. Die mit der Berührungsgerade zusammenfallende Achse μ der momentanen Rotation verschiebt sich parallel auf der horizontalen Ebene. Die Bahnkurven der einzelnen Punkte sind Zykloiden mit Krümmungsmittelpunkten $Z(t_0)$ auf der jeweiligen Achse der momentanen Rotation.

Das **Gleiten** hat Berührungspunkte mit nicht verschwindender Geschwindigkeit, da die Geschwindigkeiten tangential zur Berührungsebene sind.

1.4.5 Kreiselung

Bleibt bei der BEwegung eines starren Massensystems bezüglich O_{xyz} ein Punkt $P \in S$ für alle Zeiten t fest, ohne Lageänderung, so heisst deie Bewegung eine **Kreiselung**.

Jeder Massenpunkt $M \in S$ führt eine sphärische Bewegung mit Bahnkurve auf der Kugeloberfläche vom Radius $\vec{r}_{PM}$ und seine Geschwindigkeit liegt senkrecht $\vec{v}_M \perp \vec{r}_{PM}$ dazu. Das Massensystem S rotiert um eine momentane Rotationsachse μ durch P, seine Winkelgeschwindigkeit ist $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_\mu$, wobei $\vec{e}_\mu$ ein veränderlicher Einheitsvektor ist.

1.4.6 Die allgemeinste Bewegung

Ein starrer Massensystem S zum Zeitpunkt t bewegt sich bezüglich O_{xyz}. Die Bewegung des Systems wird durch einen Bezugspunkt $B \in S$ mit dem Ortsvektor $\vec{r}_B$ und einen Massenpunkt $M \in S$ mit dem Ortsvektor

$$\boxed{\vec{r}_M = \vec{r}_B + \vec{r}_{BM}} \tag{1.48}$$

Somit läuft die Bewegung auf einer Kugeloberfläche mit Radius $\left|\vec{r}_{BM}\right|$ und Radius B als Zentrum. Die Kugel führt hierbei eine Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_B(t) = \dot{\vec{r}}_B(t)$.

Die Geschwindigkeit vom Massenpunkt M besteht aus folgenden Beziehungen. Der Vektor $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_\mu$ entspricht der momentanen Rotationsgeschwindigkeit der Kreiselung um den gewählten Bezugspunkt $B \in S$

$$\boxed{\vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{BM}} \tag{1.49}$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}}_{BM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BM}} \quad \boxed{\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_\mu} \tag{1.50}$$

Die Grundgleichung des Bewegungszustandes eines starren Massensystems S lautet

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BM}, \quad \forall B, M \in S} \tag{1.51}$$

(i) Ist $\vec{\omega} = 0$ für alle t, so führt das Massensystem S eine **Translation** mit $\vec{v}_B = \vec{v}_M$.

(ii) Ist $\vec{v}_B = \vec{0}$ für alle t, so beschreibt das Massensystem S eine **Kreiselung** um B.

(iii) Falls sowohl $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, so liegt eine allgemeine Bewegung vor und setzt sich aus einer **Translation** und aus einer **Kreiselung** zusammen.

1.4.7 Kinemate und Invarianzen

Die Kinemate in B ist $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ und besteht aus dem Vektor der Translation $\vec{v}_B$ und aus dem Vektor $\vec{\omega}$ der momentane Rotation um die Achse μ und allgemein die Kreiselung um B.

Da Bezugspunkte im Massensystem S frei wählbar sind erhält man durch die Kinemate in B als Bezugspunkt einen weiteren Bezugspunkt B'

$$\boxed{\vec{v}_{B'} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'}} \tag{1.52}$$

Mit der Kinemate in B $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ und die Kinemate in B' $\{\vec{v}_{B'}, \vec{\omega'}\}$, untersucht man die Kinemate in einem weiteren Massenpunkt M unter der Bedingung, dass $\vec{r}_{BM} = \vec{r}_{BB'} + \vec{r}_{B'M}$ und $\vec{v}_{B'} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'}$ sind.

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\vec{v}_M & = & \vec{v}_M \\
\vec{v}_B + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{BM}) & = & \vec{v}_{B'} + \vec{\omega'} \times \vec{r}_{B'M} \\
\vec{v}_B + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{BB'} + \vec{r}_{B'M}) & = & \vec{v}_{B'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}_{B'M} \\
\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B'M} & = & (\vec{v}_{B'}) + \vec{\omega}' \times \vec{r}_{B'M} \\
(\cancel{\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'}}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B'M}) & = & (\cancel{\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'}}) + (\vec{\omega}' \times \vec{r}_{B'M}) \\
(\vec{\omega} \times \vec{r}_{B'M}) - \left(\vec{\omega'} \times \vec{r}_{B'M}\right) & = & \vec{0} \\
\left(\vec{\omega} - \vec{\omega'}\right) \times \vec{r}_{B'M} & = & \vec{0}
\end{array}} \tag{1.53}$$

1. Invariante: Zu jedem Zeitpunkt ist daher die Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ärtlich konstant verteilt.

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega'} \quad \forall B,\, B' \in S} \tag{1.54}$$

Aus der Kinemate in M durch den Bezugspunkt B erweitert man durch die Bildung des Skalarproduktes auf beiden Seiten mit $\vec{\omega}$. Das Skalarproduukt weist in jedem Punkt des Massensystems S den gleichen Wert auf. Die Komponente der Geschwindigkeit in $\vec{\omega}$-Richtung in jedem Massenpunkt des Massensystems durch den gleichen Vektor gegeben ist, dass also zu jedem Zeitpunkt und bei jeder nicht translatorischen Bewegung des Massensystems ist. Der neue Vektor $\vec{v}_\omega$ entsteht aus der Projektion der Vektoren $\vec{v}_M$ und $\vec{v}_B$ in Richtung von $\vec{\omega}$.

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\vec{v}_M & = & \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BM} \\
\vec{v}_M \bullet \vec{\omega} & = & (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BM}) \bullet \vec{\omega} \\
\vec{v}_M \bullet \vec{\omega} & = & \vec{v}_B \bullet \vec{\omega} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_{BM}) \bullet \vec{\omega}}_{0} \\
v_\omega & = & v_\omega
\end{array}} \tag{1.55}$$

2. Invariante: Die Komponente v_ω ist gleich für alle Punkte von S. Der neue Vektor $\vec{v}_\omega$ ist in Richtung der Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

$$\boxed{\vec{v}_\omega = v_\omega \cdot \vec{e}_\omega} \tag{1.56}$$

1.4.8 Zentralachse und Schraube

Auf einer Geraden g betrachte man einen Bezugspunkt B mit Kinemate $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ und daraus alle weitere Bezugspunkte B' bezüglich B auf g. Die Geschwindigkeit in B' wird durch eine in g senkrecht gerichtete Komponente $(\vec{v}_{B'})^\perp$ und eine in $\vec{\omega}$ parallel gerichetete Komponente $\vec{v}_\omega$. Somit folgt

$$\boxed{(\vec{v}_{B'})^\perp = (\vec{v}_B)^\perp + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'}} \tag{1.57}$$

Die Vektoren $(\vec{v}_B)^\perp$ und $\vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'}$ sind senkrecht zur Ebene, welche von $\vec{\omega}$ und g zueinander parallel. Auf die Gerade g existiert einen Massenpunkt mit $(\vec{v}_Z)^\perp = 0$. Der Verbindungsvektor erfüllt folgende Beziehung

$$\boxed{\vec{\omega} \times \vec{r}_{BZ} = -(\vec{v}_B)^\perp} \tag{1.58}$$

Die skalare Auswertung der obigen Gleichung ergibt den Abstand $d_Z := \left|\vec{r}_{BZ}\right|$

$$\boxed{d_Z = \frac{\left|\overrightarrow{(\vec{v}_B)^\perp}\right|}{\left|\vec{\omega}\right|}} \tag{1.59}$$

Die Kinemate in Z $\{\vec{v}_Z \equiv \vec{v}_\omega, \vec{\omega}\}$ besteht aus einer Translationsgeschwindigkeit parallel dazu. Diese Kinemate in Z entspricht eine **momentane Schraubung**, welche aus einer momentanen Rotation mit $\vec{\omega}$ und einer momentanen Translation mit $\vec{v}_\omega$ in Richtung von $\vec{\omega}$ besteht.

Stellt man den allgemeinsten Bewegungszustand eines Massenpunktes S bezüglich Z, also durch eine Schraube, dar, so erkennt man dass für alle Massenpunkte Z' auf der Geraden ξ durch Z in Richtung $\vec{\omega}$ die Geschwindigkeit $\vec{v}_{Z'} = \vec{v}_\omega$, also keine zu $\vec{\omega}$ senkrechte Komponente besitzt, denn der Zusatzterm mit dem Vektorprodukt zwischen $\vec{\omega}$ und $\vec{r}_{ZZ'}$ verschwindet. Diese Gerade ξ heisst **Zentralachse** des Bewegungszustandes von S zum Zeitpunkt t. Diese Zentralachse ist eine Gerade parallel zu $\vec{\omega}$ und liegt in der Ebene durch B senkrecht zu $(\vec{v}_B)^\perp$.

Die Kinemate in den Massenpunkten Z der Zentralachse besteht aus den beiden Invarianzen $\vec{v}_Z \equiv \vec{v}_\omega$ und $\vec{\omega}$ und heisst **Schraube**.

Die allgemeinste Bewegung eines starren Massensystems ist eine **Schraubung um die Zentralachse**.

Seien B und B' zwei Bezugspunkte und $Z \in \xi$ und $Z' \in \xi'$ zwei Massenpunkte auf der entsprechenden Zentralachsen. Wobei $\vec{v}_\omega$ als 2. Invariante des allgemeinsten Bewegungszustandes vom Bezugspunkt unabhängig bleibt.

$$\boxed{\begin{array}{lll} & \vec{v}_{B'} = & \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'} \\ (i) & \vec{v}_Z = & \vec{v}_\omega = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BZ} \\ (ii) & \vec{v}_{Z'} = & \vec{v}_\omega = \vec{v}_{B'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B'Z'} \\ & = & \vec{v}_\omega = (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BB'}) + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B'Z'} \\ & = & \vec{v}_\omega = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BZ'} \\ (i) = (ii) & \vec{0} = & (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BZ'}) - (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BZ}) \\ & \vec{0} = & \vec{\omega} \times (\vec{r}_{BZ'} - \vec{r}_{BZ}) \end{array}} \tag{1.60}$$

Folgende Gleichung kann nnur für Massenpunkte Z' erfüllt werden, welche auf der Geraden durch Z parallel zu $\vec{\omega}$, also auf der Zentralachse ξ liegen; folglich fallen ξ und ξ' zusammen.

$$\boxed{\vec{\omega} \times (\vec{r}_{BZ'} - \vec{r}_{BZ}) = \vec{0}} \tag{1.61}$$

Die Konstruktion der Zentralachse versagt, falls $\vec{\omega} = \vec{0}$ ist, mithin der Bewegungszustand einer momentanen Translation entspricht und die Zentralachse wandert ins Unendliche. Die Schraube degeneriert, falls $\vec{v}_\omega = \vec{0}$ oder $\vec{v}_\omega = \vec{0}$ ist, was gleich bedeutend ist mit

$$\boxed{\vec{\omega} \bullet \vec{v}_B = 0} \tag{1.62}$$

Damit die obige Formel gültig ist, müssen eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein

(i) $\boxed{\vec{\omega} = \vec{0}}$: Es liegt eine momentane Translation vor. Die 2. Invariante wird durch $\vec{v}_B$ übernommen.

(ii) $\boxed{\vec{v}_B = \vec{0}}$: Es liegt eine momentane Rotation um die Achse μ durch B in $\vec{\omega}$-Richtung vor. Die 2. Invariante $\vec{v}_\omega = \vec{0}$ verschwindet und die Zentralachse reduziert sich auf die Momentanachse $\mu \equiv \xi$ durch B.

(iii) $\boxed{\vec{v}_B \perp \vec{\omega}}$: Die 2. Invariante verschwindet. Die Zentralachse ξ geht nicht durch B, hat aber alle Punkte Z mit $\vec{v}_\omega = \vec{0}$, degeneriert also wieder zu einer momentaner Rotationsachse μ. Dieser Fall kommt in der ebene Bewegung Zustande.

1.4.9 Die ebene Bewegung

Die Bewegung eines starren Massensystems S heisst ebene Bewegung, wenn die Bahnkurve aller Massenpunkte auf der Ebene sind. Die Bahnkurven sind kongruent zur parallelen Ebene O_{xy}. Die Geschwindigkeiten sind zu allen Zeiten parallel zur Ebene.

Die Lage eines Massensystems S bezüglich eines ebenen Bezugssystems O_{xy} hängt von den den kartesischen Koordinaten in x- und y-Richtung, sowie durch den Winkel zwischen dem Bezugspunkt B und betrachtetem Massenpunkt M.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{BM} &= \rho \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \rho \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y \\ \dot{\vec{r}}_{BM} &= -\rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_y \\ &= (\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z) \times (\rho \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \rho \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y) \\ &= \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z \times \vec{r}_{BM} \end{aligned}} \tag{1.63}$$

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & \vec{r}_M &=& \vec{r}_B + \vec{r}_{BM} \\ (i) & \dot{\vec{r}}_M &=& \left(\dot{\vec{r}}_B\right) + \left(\dot{\vec{r}}_{BM}\right) \\ & &=& \vec{v}_B + (\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z \times \vec{r}_{BM}) \\ (ii) & \vec{v}_M &=& \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BM} \\ (i) = (ii) & \vec{\omega} &=& \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z \end{array}} \tag{1.64}$$

Daraus folgt die Beziehung der Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ senkrehct auf der Ebene in z-Richtung mit Betrag als Rotationsschnelligkeit $\dot{\varphi}$, als zeitliche Ableitung des Winkels zwischen den Bezugspunkt B und den betrachteten Massenpunkt M.

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z} \tag{1.65}$$

Ausserdem erkennt man dass $\vec{v}_B \perp \vec{\omega}$ ist. Die Zentralachse reduziert sich auf eine momentane Drehachse μ mit Richtungsvektor $\vec{\omega}$. Die 2. Invariante $\vec{\omega} = \vec{0}$ verschwindet für alle Massenpunkte des Massensystems S, so fällt die auftretende senkrechte Komponente $(\vec{v}_B)^{\perp}$ mit $\vec{v}_B$ zusammen und so ist im Schnittpunkt von $\mu \in E$ die Geschwindigkeit $\vec{v}_Z = \vec{0}$ und sich die Schraube auf $\vec{\omega}$ reduziert. Der Schnittpunkt Z wird genannt **Momentanzentrum** und ist der einzige momentan ruhende Massenpunkt.

D ie Geschwindigkeit $\vec{v}_M$ eines Massenpunktes M ist dann senkrecht zur Verbindungsgeraden mit dem Momentanzentrum Z und besitzt den durch den Drehsinn von $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z$ vorgeschriebenen Richtungssinn sowie den mit dem Abstand r von Z gebildeten Betrag

$$\boxed{v_M = \omega \cdot r} \tag{1.66}$$

Kapitel 2

Statik

2.1 Kräfte

2.1.1 Definition der Kraft

Kräfte beeinflussen Körperzustände. Sie können den Bewegungszustand eines Körpers, die Geschwindigkeit, die Arbeit und die Energie eines Körpers beeinflussen und somit den Körper deformieren. Die Einheit der Kraft ist das Newton.

Wirkt eine Kraft auf ein Massensystem, so wird die Wirkung abhängen von dem Betrag $\left|\overrightarrow{F}\right|$, der Richtung $\frac{\overrightarrow{F}}{\left|\overrightarrow{F}\right|}$ und dem Angriffspunkt und die Wirklinie der Kraft. Die Kräfte sind punktgebundene Vektoren. Eine Kräftegruppe ist eine Gruppe von Massenangriffspunkte mit den zugehörigen Angriffskräfte.

$$\boxed{\left\{\left\{A_1|\overrightarrow{F}_1\right\}, \left\{A_2|\overrightarrow{F}_2\right\}, \ldots\right\}} \tag{2.1}$$

Die Vektoranteile der Kräfte mit verschiedenen Massenangriffspunkte kann man durch das Parallelogramregel addieren. Die Addition heisst die resultierende Kraft.

$$\boxed{\overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i} \tag{2.2}$$

Die Stärke der Wechselwirkung der Betrag der Kraft wird gemessen in **Newton**, also die Kraft welche einem Kilogramm Masse 1kg m s^{-2} die Beschleunigung erteilen kann. Richtung und Ort können durch die Komponenten des Kraftvektors durch die Koordinaten des Angriffpunktes bezüglich eines passend gewählten **Bezugskörpers** ermittelt werden.

Kräfte dürfen entlang ihrer Wirklinie beliebig verschoben werden. Kräfte dürfen nicht parallel verschoben werden.

Man spricht von **Fernkräfte**, wenn die Wechselwirkung zwischen den Massensystemen ohne Berührung stattfinden. Beispiele sind Gravitationskräfte zwischen der Sonne und den Planeten, die elektromagnetische Kräfte zwischen geladenen Partikeln, die induktiven Wechselwirkungen zwischen Stator und Rotor in einem Elektromotor oder Generator. Die Gewichtskraft ist eine Fernkraft, welche die Erde auf einen Körper das Gewicht verursacht.

Man spricht von **Kontaktkräfte**, wenn die Wechselwirkung zwischen den Massensystemen mit Berührung auf einem gemeinsamen Massenangriffspunkt stattfinden. Beispiele sind Kräfte zwischen Kugel und Ring in einem Kugellager, die mechanische Wechselwirkung zwischen Dampf und Turbinenschaufel in einer Dampfturbine, die Kräfte zwischen dem Lastkörper und dem Träger sowie zwischen Träger und den Stützen.

2.1.2 Das Reaktionsprinzip

Übt ein Massenangriffspunkt A_1 auf einen Massenangriffspunkt A_2 die Kraft $\left\{A_2|\overrightarrow{F}\right\}$ aus, so wirkt seinerseits der Massenangriffspunkt A_2 auf A_1 mit der Gegenkraft $\left\{A_1|-\overrightarrow{F}\right\}$.

Der Vektoranteil der Gegenkraft wird als **Reaktion** genannt und entspricht dem negativen Vektoranteil der Kraft. Eine Kraft existiert nicht ohne ihre Reaktion mit negativen Vektoranteil. Kraft und Gegenkraft sind entgegengesetzt, sind aber auf gleiche **Wirkungslinie** durch A_1 und A_2.

2.1.3 Innere und äussere Kräfte

Das Massensystem ist das betrachtete System, das freigeschnitten oder abgegrenzt wird. Dabei treten Wechselwirkungen in Form von Kräften beim Auftrennen von Kontakten. Eine **innere** oder **äussere Kraft** bezeichnet je nachdem ob der Massenangriffspunkt der Reaktion innerhalb oder ausserhalb des Massensystems liegt. Der Unterschied liegt in der **Systemabgrenzung** des Massensystems S.

2.1.4 Verteilte Kräfte und Kraftdichte

Die Kontaktkräfte sind auf einer endlichen Berührungsfläche verteilt. Solche Kräfteverteilungen auf einer Fläche werden **Flächenkräfte** bezeichnet. Analog sind die auf einen endlichen Raumteil verteilten Fernkräfte **Raumkräfte**.

Die Flächenkraftdichte $\overrightarrow{s}(Q)$ ist eine spezifische Kontaktkraft je Flächeninhalt mit dem Massenangriffspunkt Q und dem Vektoranteil $\overrightarrow{s}$. Der Vektoranteil der totalen Kraft auf ein Flächenstück $\triangle A$ sei $\triangle\overrightarrow{F}$. Der Betrag $\left|\overrightarrow{s}\right|$ hat die DImension Kraft je Flächeninhalt. Die Flächenkraftdichte wird auch **Spannungsvektor** genannt.

$$\boxed{\overrightarrow{s} := \lim_{\triangle A \to 0} \frac{\triangle\overrightarrow{F}}{\triangle A}} \tag{2.3}$$

Die **Raumkraftdichte** $\overrightarrow{f}(Q)$ ist eine spezifische Fernkraft je Volumeneinheit mit dem Massenangriffspunkt Q und dem Vektoranteil $\overrightarrow{f}$. Der Vektoranteil der totalen Kraft auf ein Körperstück $\triangle V$ sei $\triangle \vec{F}$. Der Betrag $\left|\vec{f}\right|$ hat die DImension einer Kraft je Volumeneinheit.

$$\boxed{\vec{f} := \lim_{\triangle V \to 0} \frac{\triangle \vec{F}}{\triangle V}} \tag{2.4}$$

Die **Linienkraftdichte** $\vec{q}\,(Q)$ ist die spezifische Kraft je Längeneinhet mit dem Massenangriffspunkt Q und dem Vektoranteil $\vec{q}$, welche auf einen linienförmigen Massensystem wirkt. Der Vektoranteil der totalen Kraft auf ein Körperstück $\triangle s$ sei $\triangle \vec{F}$. Der Betrag $\left|\vec{q}\right|$ hat die Dimension einer Kraft je Längeneinheit.

$$\boxed{\vec{q} := \lim_{\triangle s \to 0} \frac{\triangle \vec{F}}{\triangle s}} \tag{2.5}$$

2.2 Leistung

Das Skalarprodukt aus der Kraft mit der Geschwindigkeit ergibt eine skalare Grösse, nämlich die Leistung, welche die Wirkung der Kräfte an bewegten Massensystemen charakterisiert. Die Leistung ist eine zeit- und bewegungsabhängige Grösse. Die Dimension der Leistung ist der **Watt**, also die Kraft welche 1N m s^{-1}

2.2.1 Leistung einer Einzelkraft

Die Leistung einer Einzelkraft mit dem Massenangriffspunkt M ist

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{F} \bullet \vec{v}_A} \tag{2.6}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{v}_A\right| \cdot \cos(\alpha)} \tag{2.7}$$

Für $\alpha < 90°$ ist $\mathcal{P} > 0$ und die Kraft $\vec{F}$ wirkt als **Antriebskraft**. Ist $\alpha > 90°$ ist $\mathcal{P} < 0$ und die Kraft $\vec{F}$ wirkt als **Widerstandskraft**. Ist $\alpha = 90°$, so verschwindet die Leistung $\mathcal{P} = 0$ und die Kraft $\vec{F}$ ist **momentan leistungslos**.

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{F} \bullet \vec{v}_A = \vec{F} \bullet (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}) = \vec{\omega} \bullet \underbrace{\left(\vec{r}_{OA} \times \vec{F}\right)}_{\vec{M}_O} = \vec{\omega} \bullet \vec{M}_O} \tag{2.8}$$

Das Vektorprodukt zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}_{OA}$ des Massenangriffspunkts A einer Kraft und dem Vektoranteil $\vec{F}$ heisst **Moment** $\vec{M}_O$ der Kraft bezüglich O, wobei O Bezugspunkt des betrachteten Massessystems ist. Ein Moment entspricht immer ein Paar zweier Kräfte. Dabei sind die Kräfte gleich gross, entgegengerichtet und besitzen unterschiedliche Wirklinien. Ein **reines Moment** hat keine translatorische Wirkung. Wird ein Körper in seinem Schwerpunkt aufgehängt, so ist da auf den Körper wirkende Moment für alle Orientierungen des Körpers im Raum gleich null.

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}} \tag{2.9}$$

$$\boxed{M_O = \left|\overrightarrow{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{r}_{OA}\right| \cdot \sin(\alpha)} \tag{2.10}$$

Die Leistung einer Einzelkraft an einem rotierenden starren Massensystem ergibt sich aus dem Skalarprodukt der Rotationsgeschwindigkeit $\overrightarrow{\omega}$ mit dem Moment $\overrightarrow{M}_O$ der Kraft bezüglich eines Bezugspunktes O auf der Rotationsachse.

Projiziert man den Momentvektor $\overrightarrow{M}_O$ einer Kraft bezüglich O auf eine Achse Oz durch O, so erhält man das Moment M_z der Kraft bezüglich der Achse Oz.

$$\boxed{M_z := \overrightarrow{e}_z \bullet \overrightarrow{M}_O} \quad \boxed{\mathcal{P} = \omega \cdot M_z} \tag{2.11}$$

2.2.2 Gesamtleistung mehrerer Kräfte

Die Gesamtleistung mehrerer Kräfte besteht aus der Summe der Leistungen der einzelnen Kräfte.

$$\boxed{\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_1, \ldots, \overrightarrow{F}_n\right) = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_1\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_2\right) + \ldots + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_n\right)} \tag{2.12}$$

Haben n Einzelkräfte den gleichen Massenangriffspunkt A und ist $\overrightarrow{v}_A$ die Geschwindigkeit dieses Massenpunktes, so ist die Gesamtleistung

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{F}_1 \bullet \overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{F}_2 \bullet \overrightarrow{v}_A + \ldots + \overrightarrow{F}_n \bullet \overrightarrow{v}_A = \overrightarrow{R} \bullet \overrightarrow{v}_A} \tag{2.13}$$

Haben n Einzelkräfte n verschiedene Massenangriffspunkte M_i und ist $\overrightarrow{v}_{M_i}$ die Geschwindigkeit jedes Massenpunktes, so ist die Gesamtleistung

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{F}_1 \bullet \overrightarrow{v}_{A_1} + \overrightarrow{F}_2 \bullet \overrightarrow{v}_{A_2} + \ldots + \overrightarrow{F}_n \bullet \overrightarrow{v}_{A_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{F}_i \bullet \overrightarrow{v}_{A_i}\right)} \tag{2.14}$$

2.2.3 Gesamtleistung eines starren Massensystems

Betrachte man ein starres Massensystem S und n Kräfte $\overrightarrow{F}_1$ bis $\overrightarrow{F}_n$ mit Massenangriffspunkte A_1 bis $A_n \in S$. Die Bewegung von S sei zum Zeitpunkt t durch die Kinemate $\{\overrightarrow{v}_O, \overrightarrow{\omega}\}$ in $O \in S$ gegeben.

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \overrightarrow{F}_1 \bullet \overrightarrow{v}_{A_1} + \ldots + \overrightarrow{F}_n \bullet \overrightarrow{v}_{A_n} \\
&= \overrightarrow{F}_1 \bullet (\overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_{OA_1}) + \ldots + \overrightarrow{F}_n \bullet (\overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_{OA_n}) \\
&= \overrightarrow{F}_1 \bullet \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{F}_1 \bullet (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_{OA_1}) + \ldots + \overrightarrow{F}_n \bullet \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{F}_n \bullet (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_{OA_n}) \\
&= \overrightarrow{F}_1 \bullet \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\omega} \bullet \left(\overrightarrow{r}_{OA_1} \times \overrightarrow{F}_1\right) + \ldots + \overrightarrow{F}_n \bullet \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\omega} \bullet \left(\overrightarrow{r}_{OA_n} \times \overrightarrow{F}_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{F}_i\right) \bullet \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\omega} \bullet \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{r}_{OA_i} \times \overrightarrow{F}_i\right) \\
&= \overrightarrow{R} \bullet \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\omega} \bullet \overrightarrow{M}_O
\end{aligned}} \tag{2.15}$$

2.3 Äquivalenz und Reduktion

Hiermit betrachtet man Kräftegruppen $\{G\}$ und $\{G'\}$ und heissen **äquivalent**, wenn sie auf ein Massensystem S die gleiche Wirkung ausüben. Die Ermittlung einer möglichst einfachen zu $\{G\}$ statisch äquivalenten Kräftegruppe $\{G'\}$ heisst **Reduktion** der Kräftegruppe $\{G\}$.

2.3.1 Statische Äquivalenz

Zwei an einem Massensystem S angreifende Kräftegruppen $\{G\}$ und $\{G'\}$ heissen **statisch äquivalent**, falls für jede Bewegung bezüglich eines Bezugspunktes $O \in S$ die Gesamtleistung von $\{G\}$ gleich der Gesamtleistung von $\{G'\}$ ist. Die statishe Äquivalenz drückt eine augenblickliche energetische Gleichwertigkeit der Kräftegruppen bei Bewegungen des erstarrten Massensystems aus.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathcal{P}\left(\{G\}\right) & = & \mathcal{P}\left(\{G'\}\right) \\ \vec{R} \bullet \vec{v}_O + \vec{\omega} \bullet \vec{M}_O & = & \vec{R'} \bullet \vec{v}_O + \vec{\omega} \bullet \vec{M'}_O, \quad \forall \{\vec{v}_B, \vec{\omega}\} \end{array}} \tag{2.16}$$

Zwei Kräftegruppen $\{G\}$ und $\{G'\}$ an einem Massensystem S sind dann und nur dann statisch äquivalent, wenn ihre Resultierenden und ihre Gesamtmomente bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes gleich sind.

$$\boxed{\begin{array}{lclcl} \left(\vec{R} - \vec{R'}\right) \bullet \vec{v}_O & = & 0 & \Rightarrow & \vec{R} = \vec{R'} \\ \left(\vec{M}_O - \vec{M'}_O\right) \bullet \vec{v}_B & = & 0 & \Rightarrow & \vec{M}_O = \vec{M'}_O \end{array}} \tag{2.17}$$

2.3.2 Resultierende und Moment einer Kräftegruppe

Die Summe der Vektoranteile aller beteiligten Kräfte einer Kräftegruppe eines Massensystems S heisst **Resultierende der Kräftegrupe**. Aus n Einzelkräfte lautet die Resultierende

$$\boxed{\vec{R} := \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i} \tag{2.18}$$

Das **Moment einer Einzelkraft** $\left\{A, \vec{F}\right\}$ bezüglich eines Bezugspunktes O ist

$$\boxed{\vec{M}_O := \vec{r}_{OA} \times \vec{F}} \tag{2.19}$$

$$\boxed{M_O = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{r}_{OA}\right| \cdot \sin(\alpha) = F \cdot a} \tag{2.20}$$

Die Gerade durch den Massenangriffspunkt A, welche den Kraftvektor $\vec{F}$ trägt und in der Ebene E liegt, heisst **Wirkungslinie** der Kraft. Der Abstand zwischen dem Bezugspunkt O und der Wirkungslinie ist mit a bezeichnet, der Betrag $\left|\vec{F}\right|$

des Kraftvektors und der Winkel α zwischen OA und der Wirkungslinie.

Der **Verschiebungssatz** besagt, dass das Moment einer Kraft $\vec{M}_O$ bezüglich eines Bezugspunktes O bleibt gleich, wenn bei gleich bleibendem Vektoranteil der Massenangriffspunkt A der Kraft $\vec{F}$ längs ihrer Wirkungslinie verschoben wird. Tatsächlich bleiben der Abstand a und M_O erhalten.

Das **Moment der Kraft bezüglich einer Koordinatenachse** ist die Zerlegung des Moments in seine kartesischen Komponenten.

$$\boxed{\begin{aligned} M_O^{(x)} &= \left|\vec{r}_{OA}^{(y)}\right| \cdot \left|\vec{F}^{(z)}\right| - \left|\vec{r}_{OA}^{(z)}\right| \cdot \left|\vec{F}^{(y)}\right| \\ M_O^{(y)} &= \left|\vec{r}_{OA}^{(z)}\right| \cdot \left|\vec{F}^{(x)}\right| - \left|\vec{r}_{OA}^{(x)}\right| \cdot \left|\vec{F}^{(z)}\right| \\ M_O^{(z)} &= \left|\vec{r}_{OA}^{(x)}\right| \cdot \left|\vec{F}^{(y)}\right| - \left|\vec{r}_{OA}^{(y)}\right| \cdot \left|\vec{F}^{(z)}\right| \end{aligned}} \tag{2.21}$$

Das **Moment einer Kraft** $\left\{A, \vec{F}\right\}$ **bezüglich einer Achse** γ ist die Projektion auf γ des Momentes $\vec{M}_O$ bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes O auf der Achse γ.

$$\boxed{M_\gamma = \vec{e}_\gamma \bullet \vec{M}_O} \tag{2.22}$$

Der Wert von M_γ ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes $O \in \gamma$. Es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} M'_\gamma &= \vec{e}_\gamma \bullet \vec{M}'_O = \vec{e}_\gamma \bullet \left(\vec{r}_{O'A} \times \vec{F}\right) \\ &= \vec{e}_\gamma \bullet \left[\left(\vec{r}_{O'O} + \vec{r}_{OA}\right) \times \vec{F}\right] \\ &= \vec{e}_\gamma \bullet \left[\underbrace{\left(\vec{r}_{O'O} \times \vec{F}\right)}_{0} + \underbrace{\left(\vec{r}_{OA} \times \vec{F}\right)}_{\vec{M}_O}\right] \\ &= \underbrace{\vec{e}_\gamma \bullet \left(\vec{r}_{O'O} \times \vec{F}\right)}_{0, \Longleftrightarrow \vec{e}_\gamma \| \vec{r}_{O'O}} + \vec{e}_\gamma \bullet \underbrace{\left(\vec{r}_{OA} \times \vec{F}\right)}_{\vec{M}_O} \\ &= \vec{e}_\gamma \bullet \vec{M}_O \\ &= M_\gamma \end{aligned}} \tag{2.23}$$

Somit beeinflusst die Wahl vom Bezugspunkt den Wert von M_γ nicht, so ist es vorteilhaft, O als Schnittpunkt der Ahcse γ mit der auf γ senkrechten Ebene $E^\perp$ durch A zu wählen. Zerlegt man den Vektor $\vec{F}$ in eine parallele Komponente zu γ $\vec{F}_\gamma$ und eine senkrechte Komponente $\vec{F}^\perp$ zu Ebene E, so erkennt man dass der Beitrag von $\vec{F}_\gamma$ zu $\vec{M}_O$ senkrehct auf γ steht und deswegen bei der Bildung des Skalarproduktes verschwindet.

$$\boxed{\vec{r}_{OA} \times \vec{F}^\perp = M_\gamma \cdot \vec{e}_\gamma} \tag{2.24}$$

(i) Das Moment einer Kraft $\left\{A, \vec{F} \neq \vec{0}\right\}$ bezüglich einer Achse γ verschwindet dann und nur dann, wenn die Wirkungslinie die Achse γ oder zu ihr parallel ist.

(ii) Um das Moment einer Kraft $\left\{A, \vec{F} \neq \vec{0}\right\}$ bezüglich einer Achse γ zu erhalten, zerlege man $\vec{F}$ vorerst in zwei Komponenten $\vec{F}_\gamma$ und $\vec{F}^\perp$ und multipliziere de Betrag der zu γ normalen Komponente $\vec{F}^\perp$ mit dem Abstand a zwischen der Achse und der Wirkungslinie von $\vec{F}^\perp$ in A.

$$\boxed{\left|M_\gamma\right| = a \cdot \left|\vec{F}^\perp\right|} \tag{2.25}$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus dem Drehsinn von $\vec{F}^\perp$ bezüglich des Einheitsvektors $\vec{e}_\gamma$ auf der Achse.

Das **Moment einer Kräftegruppe** bezüglich eines beliebig wählbaren Bezugspunktes O ist die Summe der Momente der einzelnen Kräfte bezüglich O.

$$\boxed{\vec{M}_O := \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{OA_i} \times \vec{F}_i\right)} \tag{2.26}$$

Wählt man einen anderen Bezugspunkt P, so entsteht ein neuer und im Allgemeinen von $\vec{M}_O$ verschiedener Momentvektor $\vec{M}_P$ in P. Das Moment einer Kräftegruppe ist demzufolge ein punktgebundener Vektor.

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{M}_P : \quad &= \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{PA_i} \times \vec{F}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((\vec{r}_{PO} + \vec{r}_{OA_i}) \times \vec{F}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{PO} \times \vec{F}_i + \vec{r}_{OA_i} \times \vec{F}_i\right) \\
&= \vec{r}_{PO} \times \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i\right) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{OA_i} \times \vec{F}_i\right)}_{\vec{M}_O} \\
&= \vec{r}_{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_O = \vec{R} \times \vec{r}_{OP} + \vec{M}_O
\end{aligned}} \tag{2.27}$$

Die Grundformel, welche das Moment der Kräftegruppe bezüglich P mit jenem bezüglich O verbindet ist. Die folgende Formel ist das Moment bezüglich P der resultierenden Kraft in O.

$$\boxed{\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{r}_{OP}} \tag{2.28}$$

Die Analogie der obigen Formel mit demr Formel der allgemeinsten Bewegungszustand eines Körpers kommt aus der Definition der Leistung einer Kräftegruppe an einem Massensystem S.

Die Resultierende $\vec{R}$ einer Kräftegruppe $\{G\}$ sowie das definierte Moment der Kräftegruppe $\vec{M}_O$ bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes in O ergeben das **Dyname der Kräftegruppe** $\{\vec{R}, \vec{M}_O\}$ in O.

2.3.3 Statische Äquivalenz bei speziellen Kräftegruppen

Zwei Einzelkräfte sind dann und nur dann statisch äquivalent, wenn sie den gleichen Vektoranteil und die gleiche Wirkungslinie besitzen.

Die resultierende Kraft $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ in einem gemeinsamen Massenangriffspunkt A ist zur Kräftegruppe $\left\{\left\{A, \vec{F}_1\right\}, \left\{A, \vec{F}_2\right\}\right\}$ statisch äquivalent, denn die Resultierenden sind trivialerweise gleich und die Momente bezüglich des Massenangriffspunktes A auch $(\vec{M}_A = \vec{0})$.

Eine **ebene Kräftegruppe** besteht aus nichtparallelen Kräften, deren Wirkungslinien und Massenangriffspunkte in derselben Ebene liegen. Die Resultierende $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ einer Kräftegruppe $\left\{\left\{A_1, \vec{F}_1\right\}, \left\{A_2, \vec{F}_2\right\}\right\}$ mit dem gemeinsamen Massenangriffspunkt A ist in der Ebene statisch äquivalent. Das Moment von $\left\{A, \vec{R}\right\}$ und das Gesamtmoment der beiden Kräfte bezüglich des Schnittpunktes S der drei Wirkungslinien ist null.

Die Kräfte von $\left\{\left\{A_1, \vec{F}_1\right\}, \left\{A_2, \vec{F}_2\right\}\right\}$ können einzeln längs ihrer Wirkungslinien bis zum Schnittpunkt S statisch verschoben werden. DAmit entsteht eine statisch äquivalente Kräftegruppe mit gemeinsamen Angriffspunkt S, der Vektor $\vec{R}$ in S ergibt eine statisch äquivalente resultierende Kraft, welche wiederum längs ihrer Wirkungslinie bis zum frei wählbaren Punkt A statisch äquivalent verschiben werden kann. Dies stellt das **graphische Prinzip der Statik**.
Die Kraft $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ mit Angriffspunkt A ist $\left\{\left\{A, \vec{F}_1\right\}, \left\{A, \vec{F}_2\right\}\right\}$ der Kräftegruppe statisch äuivalent, falls die Abstände a_1, a_2 durch die Momentenformel, auch **Hebelgesetzt** genannt, miteinander verknüpft sind.

$$\boxed{a_1 \cdot \left|\vec{F}_1\right| = a_2 \cdot \left|\vec{F}_2\right|} \tag{2.29}$$

Somit ist das Moment von $\left\{A, \vec{R}\right\}$ als auch das Gesamtmoment bezüglich eines Massenangriffspunktes A $\left\{\left\{A_1, \vec{F}_1\right\}, \left\{A_2, \vec{F}_2\right\}\right\}$ null. Die Bedingungen sind der statischen Äquivalenz sind damit erfüllt.

Eine aus zwei parallelen Kräften bestehende Kräftegruppe $\left\{\left\{A_1, \vec{F}\right\}, \left\{A_2, -\vec{F}\right\}\right\}$ mit verschindender Resultierende heisst **Kräftepaar**.

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}} \tag{2.30}$$

Der Abstand b der beiden Wirkungslinien beider Kräfte wird als **Breite des Kräftepaares** bezeichnet. Das Moment der Kräftegruppe bezüglich eines beliebigen Punktes O.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{M}_O &= \left(\vec{r}_{OA_1} \times \vec{F}\right) - \left(\vec{r}_{OA_2} \times \vec{F}\right) \\ &= \left(\vec{r}_{OA_1} - \vec{r}_{OA_2}\right) \times \vec{F} \\ &= \vec{r}_{A_2A_1} \times \vec{F} \end{aligned}} \tag{2.31}$$

Das **Moment eines Kräftepaars** ist vom Bezugspunkt unabhängig und lässt sich durch folgenden Ausdruck vektoriell schreiben als

$$\boxed{\vec{M}\,(\text{Kräftepaar}) = \vec{r}_{A_2 A_1} \times \vec{F}} \tag{2.32}$$

Dieses Momentenvektor ist ein freier Vektor, der von einer Verschiebung der beiden Kräfte längs ihrer Wirkungslinie nicht abhängt. Dessen Richtung ist zur Ebene E des Kräftepaares senkrecht und bildet den Drehsinn des Kräftepaars eine Rechtsschraube. Sein Betrag ist das Produkt des Kraftbetrages mit der Breite des Kräftepaars und lautet

$$\boxed{\left|\vec{M}\right| =: M = \pm b \cdot \left|\vec{F}\right|} \tag{2.33}$$

Das positive Vorzeichen entsteht aus dem **Gegenuhrzeigersinn**. Der Momentenvektor steht senkrecht auf der Ebene ist und sein Richtung wird durch das Voezeichen beschrieben. Da die Resultierende eines Kräftepaars null ist, kann das Kräftepaar niemals einer EInzelkraft statisch äquivalent sein.

Zwei Kräftepaare mit gleichem Moment sind statisch äquivalent, da auch ihre Resultierende null, also gleich sind. Es folgt, dass die Wirkung eines Kräftepaars an einem starren Massensystem durch das Moment des Kräftepaars $\vec{M}$ vollständig beschrieben ist. Somit darf ein Kräftepaar, das auf einem starren Massensystem wirkt, in seiner Ebene beliebig verschoben und verdreht werden.

Man darf sogar den Kraftbetrag und die Breite ändern oder das Kräftepaar in eine parallele Ebene verschieben, sofern man nur sein Moment konstant hält.

2.3.4 Kräftegruppen im Gleichgewicht

Eine Kräftegruppe ist im **Gleichgewicht**, wenn ihre Resultierende und ihr Moment bezüglich eines Punktes verschwinden. Folgende Bedingungen sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0}} \quad \boxed{\vec{M}_O = \vec{0}} \tag{2.34}$$

Die erste Bedingung ist die **Komponentenbedingung** udnd die zweite Bedingung ist die **Momentenbedingung**. Sind die obigen Bedingungen erfüllt, so folgt daraus, dass die Momentenbedingung auch bezüglich jedes anderen Punktes des Raumes erfüllt sein muss.

Bei räumliche Kräftegruppen ergeben die obigen Bedingungen insgesamt sechs skalare Gleichungen. Bei ebenen Kräftegruppen reduziert sich diese Anzahl auf drei, nämlich zwei Komponentenbedingungen und eine einzige Momentenbedingung in normaler Richtung zur Ebene der Kräftegruppe.

2.3.5 Reduktion einer Kräftegruppe

Die Erzeugung einer einfachen statisch äquivalenten Kräftegruppe $\{G'\}$ zu einer gegebene Kräftegruppe $\{G\}$ heisst **Reduktion**. Eine Kräftegruppe wird durch die Dyname $\left\{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{M}_B\right\}$ in einem frei wählnaren Bezugspunkt B charakterisiert.. Eine Kräftegruppe $\{G'\}$ aus einer Einzelkraft $\left\{B|\overrightarrow{R}\right\}$ und einen Kräftepaar $\left\{\overrightarrow{F}, -\overrightarrow{F}\right\}$ mit Moment $\overrightarrow{M}_B$, würde die gleiche Dyname in B aufweisen wie die gegebene Kräftegruppe $\{G\}$. Die Kräftegruppe $\{G'\}$ wird mit der Einzelkraft $\left\{B|\overrightarrow{R}\right\}$ und dem Moment $\overrightarrow{M}_B$ bezüglich B, oder noch kürzer, mit der Dyname $\left\{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{M}_B\right\}$ in B charakterisiert. Die gegebene Kräftegruppe $\{G\}$ wird auf ihre Dyname $\left\{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{M}_B\right\}$ in B reduziert.

Bei der Reduktion einer Kräftegruppe auf ihre Dyname kann der Bezugspunkt willkürlich gewählt werden. Der Vektoranteil $\overrightarrow{R}$ der Einzelkraft ist vom Bezugspunkt unabhängig, die Resultierende einer Kräftegruppe heissst deshalb die **1. Invariante** dieser Kräftegruppe.

Das in der Dyname in B auftretende Moment $\overrightarrow{M}_B$ der Kräftegruppe hingegen ist gemäss der Grundformel vom Bezugspunkt abhängig. Es zeigt sich eine Analogie zur Transformationsformel für die Translationsgeschwindigkeit in der Kinemate.

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{M}_P &= \overrightarrow{M}_O + \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{r}_{OP} \\ \overrightarrow{v}_P &= \overrightarrow{v}_O + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_{OP}\end{aligned}} \tag{2.35}$$

Beim GBewegungszustand ist die Rotationsgeschwindigkeit $\overrightarrow{\omega}$ die **1. Invariante**, bei einer Kräftegruppe ist es nun die Resultierende $\overrightarrow{R}$. Somit gilt

$$\boxed{\overrightarrow{R} \bullet \overrightarrow{M}_P = \overrightarrow{R} \bullet \overrightarrow{M}_O} \tag{2.36}$$

Die Projektion des Momentes einer Kräftegruppe auf ihre Resultierende kann als **2. Invariante** bezeichnet werden, denn sie hat in allen Bezugspunkten des Raumes denselben Wert. Eine **Zentralachse** ξ kann auch ermittelt werden

$$\boxed{\overrightarrow{M}_Z = \overrightarrow{M}^{(R)} = \lambda \cdot \overrightarrow{R}} \tag{2.37}$$

Die Zentralachse enthält alle Bezugspunkte Z mit dem Momentvektor parallel zur Resultierenden der Kräftegruppe. Die Dyname $\left\{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{M}_Z = \overrightarrow{M}^{(R)}\right\}$ in den Punkten $Z \in \xi$ der Zentralachse wird als **Schraube der Kräftegruppe** bezeichnet.

Jede Kräftegruppe mit $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$ lässt sich statisch äquivalent auf eine resultierende Kraft $\left\{Z|\overrightarrow{R}\right\}$ mit Massenangriffspunkt Z auf der Zentralachse ξ der Kräftegruppe und ein Kräftepaar in einer Ebene senkrecht zur Zentralachse reduzieren. Das Moment dieses Kräftepaars muss gleich der **2. Invariante** $\overrightarrow{M}^{(R)}$ der Kräftegruppe sein, die Zentralachse fällt mit der Wirkungslinie der resultierenden Kraft $\left\{Z|\overrightarrow{R}\right\}$ zusammen.

Verschwindet die 2. Invariante $\overrightarrow{M}^{(R)}$, ist also das Moment der Kräftegruppe bezüglich eines beliebigen Punktes B des Raums senkrecht zur Resultierenden der

Kräftegruppe $\left(\vec{R} \bullet \vec{M}_B = 0\right)$, so lässt sich die Kräftegruppe statisch äquivalent auf eine EInzelkraft $\left\{Z|\vec{R}\right\}$ mit Massenangriffspunkt Z auf der Zentralachse ξ und mit Wirkungslinie ξ reduzieren. Eine Kräftepaar mit verschwindender Resultierenden $\vec{R} = \vec{0}$ ist einem Kräftepaar statisch äquivalent, dessen Moment gleich dem (invarianten) Moment der Kräftegruppe ist.

Bei einem **ebenen Kräftegruppe** bestehend aus Kräften, deren Wirkungslinien in einer Ebene E liegen, sind die einzelnen Momente bezüglich eines beliebigen Punktes $B \in E$ definitionsgemäss senkrecht zur Ebene. Ist die Resultierende der Kräftegruppe $\vec{R} \neq \vec{0}$, so liegt sie in der Ebene und muss folglich senkrecht stehen zum Gesamtmoment der Kräftegruppe bezüglich B. Es gilt also $\vec{R} \bullet \vec{M}_B = 0$, so dass, wegen der Invarianz dieses Skalarproduktes, nicht nur bezüglich $B \in E$, sondern bezüglich aller Punkte des Raumes das Moment der Kräftegruppe notwendigerweise senkrecht zu $\vec{R}$ sein muss. Eine ebene Kräftegruppe mit $\vec{R} \neq \vec{0}$ lässt sich also stets auf eine statisch äquivalente Einzelkraft längs der Zentralachse reduzieren. Diese liegt ebenfalls in der Ebene der Kräftegruppe.

2.4 Parallele Kräfte und Schwerpunkt

2.4.1 Kräftemittelpunkt

Eine Kräftegruppe aus beliebig vielen Kräften mit parallelen Wirkungslinien haben folgende Massenangriffspunkte

$$\boxed{\vec{r}_i = x_i \cdot \vec{e}_x + y_i \cdot \vec{e}_y + z_i \cdot \vec{e}_z, \quad i = 1 \ldots n} \tag{2.38}$$

und bei der statisch äquivalente Reduktion auf den Ursprung O des Koordinatensystems wird im Allgemeinen eine Einzelkraft mit dem Vektoranteil längs der z-Achse sowie ein Kräftepaar entsteht, dessen Momentvektor $\vec{M}_O$ in der xy-Ebene liegt und die Komponenten M_x und M_y hat

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \vec{e}_z} \quad \boxed{M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i Z_i} \quad \boxed{M_y = -\sum_{i=1}^{n} x_i Z_i} \tag{2.39}$$

Die beiden Komponenten des Gesamtmomentes entsprechen den Summen der Einzelmomente bezüglich der x- bzw. y-Achse.

Da $\vec{R} \bullet \vec{M}_O = 0$ ist, kann eine Kräftegruppe von parallelen Kräfte stets auf eine Einzelkraft oder ein Kräftepaar statisch äquivalent reduziert werden. Der letztere Fall tritt für $\vec{R} = \vec{0}$ auf und führt auf ein Kräftepaar in einer zur z-Achse parallelen Ebene, dessen Moment also senkrecht zur z-Achse steht. Für $\vec{R} \neq \vec{0}$ fällt die Wirkungslinie der statisch äquivalenten Einzelkraft mit der Zentralachse zusammen, welche in diesem Fall zur z-Achse parallel ist.

Haben die gegebenen Kräfte alle denselben Richtungssinn, so spricht man von einer **gleich gerichteten Kräftegruppe**. Diese lässt sich stets auf eine Einzelkraft reduzieren, denn in diesem Fall gilt sicher $\vec{R} \neq \vec{0}$.

Man betrachte eine gleich gerichtete Kräftegruppe von parallelen Kräften, deren Wirkungslinien einem Einheitsvektor $\vec{e}$ mit beliebiger Richtung parallel sind. Die einzelnen Kraftvektoren schreibt man als $\vec{F}_i = F_i \vec{e}$, wobi $F_i > 0$ ist. Der Vektor der statisch äquivalenten resultierenden Kraft hat die Eigenschaft $R > 0$.

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \vec{e} = R \cdot \vec{e}} \tag{2.40}$$

Sei A ein Punkt auf der Wirkungslinie der statisch äquivalenten Einzelkraft. Da das Moment dieser Kraft bezüglich des Koordinatenursprungs O dem Gesamtmoment der Kräftegruppe gleich sein muss, gilt für den Ortsvektor $\vec{r}_A$

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{r}_A \times \vec{R} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\
\vec{r}_A \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \vec{e} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times F_i \vec{e} \\
\left(\vec{r}_A \sum_{i=1}^{n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{e} &= 0
\end{aligned}} \tag{2.41}$$

Der Vektor im Klammern muss entweder verschwinden oder parallel zu $\vec{e}$ sein. Der Ortsvektor $\vec{r}_A$ auf der Wirkungslinie der statisch äquivalenten resultierenden Kraft ist, wobei λ eine beliebige reelle Zahl ist

$$\boxed{\vec{r}_A = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}}_{\vec{r}_S} + \lambda \vec{e}} \tag{2.42}$$

Der Vektor $\vec{r}_S$ entspricht einem besonderen Punkt auf der Wirkungslinie der resultierenden Kraft mit folgender Eigenschaft: Dreht man alle Kräfte der gleich gerichteten Kräftegruppe bei fest bleibenden Massenangriffspunkten um den gleichen Drehwinkel α, so dass die Kraftvektoren zu einem neuen Einheitsvektor $\vec{e'}$ parallel sind, so bleibt der Punkt S fest, und die Wirkungslinie der resultierenden Kraft dreht sich um den gleichen Winkel α um S. Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes A' auf der neuen Wirkungslinie ist dann

$$\boxed{\vec{r}_{A'} = \vec{r}_S + \lambda \vec{e'}} \tag{2.43}$$

Man nennt den Punkt S mit dem Ortsvektor $\vec{r}_S$ Kräftemittelpunkt der gleich gerichteten Kräftegruppe

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}} \tag{2.44}$$

Lässt sich ein dreidimensionaler Körper mit Masse M in n Körper mit Massen m_i und Schwerpunktortsvektoren $\vec{r}_i$ zerlegen, so gilt für den Ortsvektor $\vec{r}_S$ des Körpers

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} \tag{2.45}$$

Der Kräftemittelpunkt S einer gleich gerichteten Kräftegruppe ist ein Punkt auf der Wirkungslinie der statisch äquivalenten resultierenden Kraft, um den sich diese Kraft dreht, wenn man alle Kräfte der Kräftegruppe um ihre Massenangriffspunkte um den gleichen Winkel dreht. Die kartesischen Komponenten dieses Vektors sind

$$\boxed{x_S \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i} \quad \boxed{y_S \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i} \quad \boxed{z_S \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} z_i F_i} \tag{2.46}$$

Wählt man einen anderen Bezugspunkt O' als Ursprung, so lauten due neuen Ortsvektoren

$$\boxed{\vec{r'}_i = \vec{r}_i + \vec{r}_{O'O}} \tag{2.47}$$

$$\boxed{\vec{r'}_{S'} \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r'}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_{O'O} = \vec{r}_S \sum_{i=1}^{n} F_i + \vec{r}_{O'O} \sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{2.48}$$

$$\boxed{\vec{r'}_{S'} = \vec{r}_S + \vec{r}_{O'O}} \tag{2.49}$$

Da aber für den Ortsvektor $\vec{r'}_S$ die gleiche Beziehung, d.h. $\vec{r'}_S = \vec{r}_S + \vec{r}_{O'O}$, gilt, fallen S' und S zusammen. Die relative Lage des Kräftemittelpunktes bezüglich des starren Massenpunktes ist demzufolge von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.

2.4.2 Linien- und flächenverteilte Kräfte, Flächenmittelpunkt

Betrachte man eine Linienverteilung in einem Geradenstück mit Kraftdichte $\vec{q} = q \cdot \vec{e}$, wobei q der Wert einer beliebigen integrierbaren Funktion $q(x)$ im Intervall $x \in [0, L]$ sein kann.Die REsultierende wird aus der Summe der infinitesimalen Kraftvektoren d$\vec{F} = q\mathrm{d}x\vec{e}$ als

$$\boxed{\vec{R} = \int_0^L \mathrm{d}\vec{F} = \left(\int_0^L q\,\mathrm{d}x\right)} \tag{2.50}$$

berechnet. Das Moment bezüglich A ist

$$\boxed{\vec{M}_A = \int_0^L \vec{M}_A = \int_0^L \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = \int_0^L (x\vec{e}_x \times q\mathrm{d}x\vec{e}) = -\left(\int_0^L x\,q\,\mathrm{d}x\right) \sin(\alpha)\,\vec{e}_z} \tag{2.51}$$

Der Kräftemittelpunkt ergibt sich aus

$$\boxed{\vec{r}_{AS} \times \vec{R} = \vec{M}_A} \tag{2.52}$$

$$\boxed{x_S = \frac{\int_0^L x\,q\,\mathrm{d}x}{\int_0^L q\,\mathrm{d}x}} \tag{2.53}$$

Die Kräftevertilung heisst **uniform** falls $q(x) = q_0$ konstant ist. Somit ist $x_S = \frac{L}{2}$ und die Resultierende beträgt $\vec{R} = R = L \cdot q_0$.

Für eine **Dreiecksverteilung** gilt $q(x) = \frac{x}{L} q_0$ wobei $q_0 = q(L)$ ist. Somit sind $x_S = \frac{2L}{3}$ und $\vec{R} = R = \frac{Lq_0}{2}$

Für eine **flächenverteilung** an einem Flächenstück, das beliebig gekrümmt sein kann, wird die Richtung der Flächenkraftdichte $\vec{s} = s\vec{e}$ durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ charakterisiert. Die Skalare s kann der Funktionswert einer beliebigen integrierbaren FUnktion $s(x, y, z)$ der Koordinaten des jeweiligen Massenangriffpunktes der Flächenkraftdichte sein. In Abhängigkeit des Ortsvektors $\vec{r}$ dieses Massenangriffpunktes kann die gleiche Funktion als $s(\vec{r})$ dargestellt werden. Die Resultierende ergibt sich aus der Summe der infinitesimalen Kräfte $\mathrm{d}\vec{F} = s\,\vec{e}\,\mathrm{d}A$, wobei $\mathrm{d}A$ der Flächeninhalt der inifitesimalen Fläche um den jeweiligen Massenangriffspunkt ist. Für die Resultierende folgt eine doppelte Integral über den Flächenbereich BCDE.

$$\boxed{\vec{R} = \iint \mathrm{d}\vec{F} = \left[\iint s(\vec{r})\,\mathrm{d}A\right]\vec{e} = \left[\int_{\text{BCDE}} s(\vec{r})\,\mathrm{d}A\right]\vec{e}} \tag{2.54}$$

Das Moment bezüglich O lässt sich wieder aus dem Momentensumme der infinitesimalen Kräfte zu folgendem Term berechnen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{M}_O &= \int_{\text{BCDE}} \mathrm{d}\vec{M}_O = \int_{\text{BCDE}} \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = \int_{BCDE} \vec{r} \times s(\vec{r})\,\mathrm{d}A\,\vec{e} \\ &= \left[\int_{BCDE} \vec{r}\,s(\vec{r})\,\mathrm{d}A\right] \times \vec{e} \end{aligned}} \tag{2.55}$$

Der Ortsvektor $\vec{r}_S$ des Kräftemittelpunktes S ergibt sich

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{\int_{BCDE} \vec{r}\,s\,\mathrm{d}A}{\int_{BCDE} s\,\mathrm{d}A}} \tag{2.56}$$

Ist die Kräfteverteilung uniform mit $s = s_0$, so fällt der Kräftemittelpunkt S mit dem Flächenmittelpunkt C zusammen, der manachmal als Schwerpunkt der Fläche genannt wird. Der entsprechende Ortsvektor $\vec{r}_C$ gilt dann, wobei $\triangle A$ der Flächeninhalt von BCDE ist

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{\triangle A} \int_{\text{BCDE}} \vec{r} \, \mathrm{d}A} \tag{2.57}$$

Man beachte, dass der Flächenmittelpunkt einer gekrümmten Fläche im Allgemeinen ausserhalb der Fläche liegt.

2.4.3 Raumkräfte, Schwerpunkt und Massenmittelpunkt

Die Resultierende bei kontinuerlich verteilten parallelen Fernkräften geht man von der Raumkraftdichte $\vec{f} = f \vec{e}$ aus

$$\boxed{\vec{R} = \left[\iint f \, \mathrm{d}V \right] \vec{e} = \left[\int_K f \, \mathrm{d}V \right] \vec{e}} \tag{2.58}$$

Die integration über den räumlichen Bereich des betrachteten Körpers K erstreckt sich mit dem Volumeninhalt $\triangle V$. Die skalare Kraftdichte f ist im Allgemeinen von den Koordinaten des jeweiligen Massenpunktes abhängig. Eine uniforme Raumverteilung liegt vor, falls $f = f_0$ konstant ist. Die Resultierende und das Moment sind

$$\boxed{\vec{R} = f_0 \triangle V \vec{e}, \quad \vec{M}_O = \left[\int_K \vec{r} f \, \mathrm{d}V \right]} \tag{2.59}$$

Das Resultat ist

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{\displaystyle\int_K \vec{r} f \, \mathrm{d}V}{\displaystyle\int_K f \, \mathrm{d}V}} \tag{2.60}$$

Der Begriff des Kräftemittelpunktes von parallelen Raumkräfteverteilungen findet eine wichtige Anwendung bei der **Gravitationskraft** in der Nähe der Erdoberfläche für Körper mit kleinen Abmessungen im vergleich zum Erdradius (Gewicht). Auf dem Körper bilden wirkenden verteilten Gewichtskräfte eine glecihgerichtet Kräftegruppe aus.

Die skalare Raumkraftdichte f wird bei Gewichtskräften mit γ bezeichnet und **spezifisches Gewicht** genannt. Die Resultierende der verteilten Gewichtskräfte heisst **Gesamtgewicht** des Körpers und beträgt allgemein

$$\boxed{G = \int_K \mathrm{d}G = \int_K \gamma(x, y, z) \, \mathrm{d}V} \tag{2.61}$$

Der Kräftemittelpunkt der verteilten Gewichtskräfte an einem Körper heisst **Schwerpunkt**. Sein Ortsvektor ist

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{G} \int_K \vec{r} \, \mathrm{d}G = \frac{1}{G} \int_K = \vec{r} \gamma \, \mathrm{d}V} \tag{2.62}$$

und seine kartesische Koordinaten sind

$$\boxed{x_S = \frac{1}{G}\int_K x\gamma\,\mathrm{d}V} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{G}\int_K y\gamma\,\mathrm{d}V} \quad \boxed{z_S = \frac{1}{G}\int_K z\gamma\,\mathrm{d}V} \tag{2.63}$$

Der Schwerpunkt ist der Massenangriffspunkt der resultierenden Gewichtskraft an einem Körper K unabhängig von der Richtung des Gewichtes bezüglich des Körpers. Solange K bleibt in der Nähe der Erdoberfläche, ändert sich also bei Starrkörperbewegungen von K die relative Lage des Schwerpunktes bezüglich K nicht. Der Kräftemittelpunkt muss nicht unbedingt innerhalb des Körpers K liegen.

Ein Körper K aus n Teilkörpern K_i mit den teilgewichtsbeträgen G_i und den Teilschwerpunkten S_i mit den Ortsvektoren $\vec{r}_i$ ist

$$\boxed{G = \sum_{i=1}^{n} G_i}, \quad \boxed{\frac{1}{G}\int_K \vec{r}\gamma\,\mathrm{d}V = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\int_{K_i} \vec{r}\gamma\,\mathrm{d}V = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n} G_i\vec{r}_i} \tag{2.64}$$

Die kartesischen koordinaten des Schwerpunktes sind folgendermassen definiert. Die Koordinaten können auch durch Gewichte der Teilkörper in ihrem Schwerpunkten und Momentenbedingungen

$$\boxed{x_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n} G_i x_i} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n} G_i y_i} \quad \boxed{z_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n} G_i z_i} \tag{2.65}$$

Im Zusammenhang mit der Bewegung eines materiellen Massensystems wird die **spezifische Masse** ρ eingeführt. Diese ist ein Proportionalitätsfaktor zwischen der Beschleunigung $\vec{a}$ eines materiellen Massenpunktes M und einer fiktiven Raumkraftdichte, der **Trägheitskraftdichte** $\vec{f}_T$, welche den Einfluss der Bewegung in der allgemeinen Form des Prinzip der virtuellen Leistungen berücksichtigt. Die spezifische Masse ρ wird auch **Dichte** genannt und hat die Dimension $[\rho] = \mathrm{ML}^{-3}$

Bei einem Körper ergibt sich der Betrag des spezifischen Gewichts γ aus der spezifischen Masse ρ und dem Betrag der Erdbeschleunigung g. Es muss zwischen der in der Trägheitskraftdichte auftretenden spezifischen trägen Masse und der bei der Gravitationskraft auftretenden spezifischen schweren Masse unterschieden.

$$\boxed{\gamma = \rho \cdot g} \tag{2.66}$$

Die infinitesimale Masse $\mathrm{d}m$ eines infinitesimalen Volumenelements $\mathrm{d}V$ um den Massenpunkt P ist

$$\boxed{\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V} \tag{2.67}$$

Die GEsamtmasse m eines Kärpers K erhält man durch Integration als

$$\boxed{\int_K \mathrm{d}m = \int_K \rho\,\mathrm{d}V = \iiint \rho\,\mathrm{d}V} \tag{2.68}$$

wobei die spezifische Masse der Funktionswert einer ortsabhängigen Funktion $\rho(x, y, z)$ ist. In Analogie mit dem Ortsvektor $\vec{r}_S$ des Schwerpunktes S definiert man den Ortsvektor $\vec{r}_C$ des **Massenmittelpunktes** C von K

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_K \vec{r}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int_K \vec{r}\,\rho\,\mathrm{d}V = \frac{1}{m}\iiint \vec{r}\,\rho\,\mathrm{d}V} \tag{2.69}$$

Ist die spezifische Masse ρ im ganzen gebiet des Körpers K gleichmässig verteilt, d.h. $\rho = \rho_0$, so wird der Körper als **homogen** bezeichnet. Man kann dann ρ_0 aus den Integralen herausziehen und erhält für die Gesamtsumme $m = \rho_0 \cdot V$ und für den Ortsvektor des Massenmittelpunktes wobei V der Volumeninhalt des Körpers K ist.

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{V}\int_K \vec{r}\,\mathrm{d}V} \tag{2.70}$$

2.5 Ruhe und Gleichgewicht

Hiermit wird die Beziehung zwischen dem kinematischen Zustand **Ruhe** eines materiellen Massensystems und das Gleichgewicht der auf das materiellen Systems wirkende Kräfte diskutiert.

2.5.1 Definitionen

Ein materielles Massensystem S ist in **Ruhe**, falls die Geschwindigkeiten null sind. Das System S ist in **momrntaner Ruhe**, falls die obige Bedingung zum betrachteten Zeitpiunkt t_0 erfüllt ist

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{0}, \quad \forall M \in S} \tag{2.71}$$

Die **Ruhelage** eines materiellen Massensystems existiert, sobald dieses zu einem beliebigen Zeitpunkt in Ruhe ist, so bleibt es für alle Zeiten in dieser Lage in Ruhe. Für die Ruhelage wird auch den Begriff **Gleichgewichtslage** verwendet.

Materielle Massensysteme sind oft **Bindungen** und schränken die Bewegungsmöglichkeites des Systems ein und sind mit Kräfte und Momente verknüpft, welche **Bindungskräfte** bzw. **Bindungsmomente** heissen. Jeder Komponente der Bindungskräfte und -momente nennt man **Bindungskomponente** und entspricht eine linear unabhängige Gleichung zwischen den Bewegungszuständen der verbundenen Körper.

Innere Bindungen sind Einschränkungen der Bewegungsfreiheit von Bestandteilen des materiellen Massensystems S relativ zueinander und die zugehörige Kräfte sind die **innere Bindungskräfte**.

Äussere Bindungen sind Einschränkungen der Bewegungsfreiheit von Randpunkten des materiellen Massensystems S und die zugehörige Kräfte sind die **innere Bindungskräfte**.

Ein **virtueller Bewegungszustand** besteht aus einer Menge von willkürlich wählbaren gedachten Geschwindigkeiten der materiellen Massenpunkte eines Massensystems. Der virtuelle Bewegungszustand braucht mit der willkürlich Bewegung des Massensystems in keiner Beziehung zu stehen. Virtuelle Geschwindigkeiten $\tilde{\vec{v}}$ werden mit einer Tilde bezeichnet.

Ein **zulässiger virtueller Bewegungszustand eines Massensystems** ist eine Verteilung von gedachten Geschwindigkeiten, die mit den inneren und äusseren Bindungen des Systems verträglich sind, sonst aber beliebig wählbar bleiben. Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten muss gelten.

Eine Bindung heisst **einseitig**, wenn sie durch eine wirkliche BEwegung gelöst oder aufgehoben werden kann, sonst heisst sie **vollständig**.

In einer Bindung zwischen starren Systemen, welche unabhängig und nicht durch Antrieb beeinflusst ist, heissen Bindungskräfte parallel zu zulässigen virtuellen Geschwindigkeiten in der Bindung **Reibungskräfte**. Bindungsmomente parallel zu zulässigen virtuellen Rotationsgeschwindigkeiten heissen **Reibungsmomente**. Eine unnachgiebige Bindung zwischen starren Systemen heisst **reibungsfrei**, falls in ihr alle Reibungskräfte und -momente verschwinden.

2.5.2 Berechnung von virtuellen Leistungen

Für einen virtuellen Bewegungszustand kann die **virtuelle Leistung** $\tilde{\mathcal{P}}$ einer Kraft $\vec{F}$ berechnet werden, deren Massenangriffspunkt sich mit der virtuellen Geschwindigkeit $\tilde{\vec{v}}_M$ bewegt

$$\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \vec{F} \bullet \tilde{\vec{v}}_M} \tag{2.72}$$

Die **virtuelle Gesamtleistung** einer Kräftegruppe ist die Summe der virtuellen Leistungen der Einzelkräfte.

2.5.3 Das Grundprinzip der Statik

Ein beliebig abgegrenztes Massensystem befindet sich dann und nur dann in einer Ruhelage, wenn in dieser Lage die virtuelle Gesamtleistung aller inneren und äusseren Kräfte, einschliesslich der inneren und äusseren Bindungskräfte, bei jedem virtuellen Bewegungszustand des Systems null ist. Dies ist fie Grunddefinition des **Prinzips der virtuellen Leistungen**, kurz PdvL.

Aus dem PdvL lassen sich die inneren und äusseren Kräfte in einer Ruhelage berechnen. Zusatzbedingungen können unter anderen die richtige Richtung der Normalkraft in einer einseitigen Bindung, die Standfestigkeit oder die Haftreibung sein. Bei der Anwendung des PdvL wählt man spezielle virtuelle Bewegungszustände und leitet mit ihrer Hilfe aus

$$\boxed{\tilde{P} = 0} \tag{2.73}$$

notwendige Bedingungen für die Ruhelage her. Damit kann man Bindungskräfte bestimmen.

2.5.4 Der Hauptsatz der Statik

Alle äussere Kräfte, einschliesslich der äusseren Bindungskräfte, welche auf ein Massensystem in einer **Ruhelage** wirken, müssen notwendigerweise im **Gleichgewicht** sein. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräftegruppe von äusseren Kräften sind also notwendige Bedingungen, welche in einer Ruhelage eines beliebigen Massensystems mit frei wählbarer Abgrenzung erfüllt sein müssen.

$$\boxed{\vec{R}^{(a)} = \vec{0}} \quad \boxed{\vec{M}_O^{(a)} = \vec{0}} \tag{2.74}$$

Man erteile dem Massensystem mit beliebiger Abgrenzung, das sich in einer Ruhelage befindet, eine beliebige moemntane Starrkörperbewegung. Die inneren Kräfte, einschliesslich der inneren Bindungskräfte, bilden gemäss Reaktionsprinzip eine Nullgruppe, da in der Kräftegruppe der inneren Kräfte am Massensystem mit jeder inneren Kraft auch ihre Reaktion enthalten ist. Die Resultierende und das Moment der Kräftegruppe der inneren Kräfte erfülen die Gleichungen $\vec{R}^{(i)} = \vec{0}$ und $\vec{M}_O^{(i)} = \vec{0}$.

Mit den Bezeichnungen $\vec{R}^{(a)}$ und $\vec{M}_O^{(a)}$ für die Resultierende und das Moment der äussere Kräfte bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes O beträgt dann die virtuelle Gesamtleistung am Massensystem

$$\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\vec{v}}_O \bullet \vec{R}^{(a)} + \tilde{\vec{\omega}} \bullet \vec{M}_O^{(a)} = 0} \tag{2.75}$$

wobei $\left\{\tilde{\vec{v}}_O, \tilde{\vec{\omega}}\right\}$ die willkürlich wählbare Kinemate in O der momentanen virtuellen Starrkörperbewegung ist. Das Massensystem ist in einer Ruhelage, so dass das PdvL $\tilde{\mathcal{P}} = 0$

Man beachte, dass die Gleichgewichtsbedingungen nur nptwendige Bedingungen für bleibende Ruhe sind und im Allgemeinen zur vpollständigen Charakterisierung der Ruhelage nicht ausreichen. Ein deformierbars materielles System braucht nicht in Ruhe zu bleiben.

Es entstehen Differentialgleichungen des Gleichgewichts wenn die Gleichgewichtsbedingungen für jeden infinitesimalen Bestandteil eines beliebigen deformierbaren Massensystems formuliert werden. Diese Gleichungen, die zugehörigen Randbedingungen, die durch die Bindungen entstehen kinematischen Beziehungen und die Bedingungen für die zugehörigen inneren und äusseren Bindungskräfte ergeben einen vollständigen Satz von notwendigen und hinreichenden Bindungen für etwaige Ruhelagen eines deformierbaren Massenkörpers.

Aus der Formulierung des PdvL für bewegte Massensysteme folgt, dass sich die Kinemate eines starren Massenkörpers bezüglich seines Massenmittelpunktes genau dann nicht verändert, wenn die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Dies liegt bei einer gleichförmigen Translationsbewegung und bei einer gleichförmigen Rotation um deine Achse durch den Massenmittelpunkt vor, sowie bei allen Überlagerungen dieser Bewegungszustände.

2.6 Lagerbindungen und Lagerkräfte

2.6.1 Ebene Unterlagen

Ein starrer Körper auf ebener Unterlage heisst **standfest**, wenn er nicht kippt. Der Körper ist über eine Berührungsfläche mit der Unterlage in Kontakt und erfährt in jedem mit ihr gemeinsamen infinitesimalen Flächenelement $\mathrm{d}A$ eine infinitesimale Normalkraft $\mathrm{d}\vec{N}$ und eine infinitesimale Reibungskraft $\mathrm{d}\vec{F}_R$, welche zusammen den Einfluss der Unterlage auf den Körper beschreiben und eine Kräftegruppe von flächenverteilten Kräften bilden.

Die infinitesimalen Reibungskräften $\mathrm{d}\vec{F}_R$ erschweren oder verhindern das Gleiten des Körpers auf der Unterlage. Die infinitesimalen Normalkräfte $\mathrm{d}\vec{N}$ bilden eine Kräftegruppe von flächenverteilten, gleich gerichteten Kräften mit Massenangriffspunkten innerhalb der Berührungsfläche. Sie entsprechen die Bindungskräften einer einseitigen Bindung. Ihr Moment bezüglich eines beliebigen Punktes der ebenen Unterlage ist senkrecht zu jeder dieser infinitesimalen Kräfte. Das Gesamtmoment ist also senkrechtzur Resultierenden der Kräftegruppe. Die Kräftegruppe lässt sich statisch äquivalent auf eine Einzelkraft, auf eine resultierende Normalkraft $\vec{N}$ reduzieren.

Der Massenangriffspunkt dieser Einzelkraft, also der Kräftemittelpunkt ist vorerst unbekannt. Er muss aber innerhalb der kleinsten konvexen,die Berührungsfläche enthaltenden Fläche liegne. Man nennt diese Fläche die **Standfläche** des Körpers. Solange die Gleichgewichtsbedingungen eine resultierende Normalkraft liefern, die innerhalb der Standfläche angreift und gegen den Körper gerichtet ist, bleibt der Körper **standfest**.

2.6.2 Lager bei Balkenträgern und Wellen

(a) **Auflager:** Sie wirken einseitig und verhindert die Bewegung der Berührungspunkte eines Trägers in eine Halbebene. Die zugehörige Bindungskraft auf den Träger, die **Auflagerkraft**, ist demzufolge gegen den anderen Halbraum gerichtet. Ist das Auflager reibungsfrei, so muss die Stützkraft normal zur Trägerachse sein.

(b) **Kurze Querlager:** Sie verhindern die Quertranslation senkrecht zur Trägerachse eines ganzen Querschnitts eines Trägers oder einen drehenden Welle, lassen jedoch eine Längstranslation, Kipprotationen um Achse senkrecht zur Trägerachse und, bei kreisförmigen Querschnitten, Eigenrotationen um die Trägerachse zu. Technisch lassen sie sich durch schmale Ringlager oder durch Kugellager realisieren. Ist das Lager reibungsfrei, so besteht die Lagerkraft im Allgemeinen, den zwei Richtungen der verhinderten Quertranslationen entsprechend, aus zwei Komponenten senkrecht zur Trägerachse. Der Richtungsssinn der zwei Komponenten stellt sich je nach Belastung ein.

(c) **Langslager:** Sie verhindern die Verschiebung des Trägers in Richtung seiner Achse. Das Längslager kann einseitig oder zweiseitig sein.

(d) **Lange Querlager:** Sie verhindern nicht nur Quertranslationen des Trägers, wie bei den kurzen Querlagern, sondern auch Kipprotationen. technisch lassen sie sich durch breite Gleitlager oder durch Rolllager realisieren. Die Lagerdyname besteht hier nicht nur aus einer resultierenden Lagerkraft, sondern, wegen der Verhinderung der Kipprotationen, auch aus einem resultierenden Kräftepaar, das durch sein Moment charakterisiert wird. Ist das Lager reibungsfrei, so besitzt die resultierende Lagerkraft keine Komponente in Richtung der Trägerachse, ausser wenn das Querlager durch ein Längslager ergänzt wird.

(e) **Starre Einspannung:** Eine starre Einspannung verhindert alle Bewegungen desTrägerquerschnittes. Die entsprechende Lagerdyname besteht aus einer resultierenden Kraft, der **Einspannkraft**, und einem Moment, dem **Einspannmoment**, welches das zugehörige resultierende Kräftepaar charakterisiert. Die Einspannkraft kann Quer- und Längskomponenten haben. In einem ebenen Problem ergibt die Einspanndyname 3 Unbekannte (2 Kraftkomponenten und 1 Momentkomponente), in einem räumlichen Problem 6 Unbekannte (je 3 Kraft- und 3 Momentkomponenten).

(f) **Kugelgelenke:** Sie verhindern im Idealfall alle 3 Verschiebungskomponenten des Trägerendes, lassen aber sämtliche Rotationsbewegungen um das Gelenk, also **Kreiselungen**, zu.

(g) **Zylindergelenke:** Sie lassen eine Rotation um die Zapfenachse und gegebenfalls eine Verschiebung in Richtung der Zapfenachse zu, verhindern jedoch im Idealfall alle anderen Bewegungsmöglichkeiten. Bei einem ebenen Problem hat es 2 Kraftkomponenten und 2 Momentkomponenten, welche null sind.

2.6.3 Vorgehen zur Ermittlung der Lagerkräfte

Zur Ermittlung der unbekannten äusseren Lagerkräfte in der Ruhelage eignet sich das folgende Vorgehen durch Gleichgewichtsbedingungen.

(a) Abgrenzung des Massensystems.

(b) Einführung der äusseren Kräfte, insbesondere der Lasten und der äusseren Lagerkräfte.

(c) Wahl einer zweckmässigen Basis $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ mit dem zugehörogen Koordinatensystem $\{x, y, z\}$ zur komponentenweise Darstellung der Kraftvektoren.

(d) Ermittlung der statischen Bestimmtheit bzw. Unbestimmtheit des Systems durch Abzählen und Vergleich der Anzahl von skalaren Gleichungen und Unbekannten, sowie durch Lösen von Bindungen.

(e) komponentenweise Formulierung der skalaren Gleichgewichtsbedingungen in der Ruhelage.

(f) gegebenfalls Trennung des SYstems in Teilsysteme und Durchführung der Schritte (a) bis (e) für die Teilsysteme (statisch unbestimmte Systeme).

(g) Ermittlung der Unbekannten.

(h) Diskussion der Resultate.

2.6.4 Bemerkungen

Lagerkräfte, d.h. lagerartige Bindungen entstehende Bindungskräfte, werden auch als **Lagerreaktionen** bezeichnet. Die Lagerkräfte sind nicht direkt die Reaktionen der auf den Träger wirkenden Lasten. Lagerkräfte stellen den Respons der ausserhalb des Massensystems liegenden Berührungspunkte der Lager auf die Einwirkung durch die gelagerten Trägerquerschnitte dar. Die Reaktionen zu den Lasten, die definitionsgemäss äussere Kräfte sind, befinden sich mit ihren Massenangriffspunkten ausserhalb des Massensystems, da dieses nur aus dem Träger selbst besteht.

Die Wahl der Basis und vor allem des Bezugspunktes zur Formulierung der Momentenbedingungen kann unter Umständen die Lösung wesentlich erleichtern. In der Regel sollte der Bezugspunkt gewählt werden, wo sich möglichst viele Wirkungslinien von unbekanntenKräfte treffen. So erscheint in den Momentenbedingungen die kleinstmögliche Anzahl von Unbekannten.

Es ist nützlich bei der Formulierung von Gleichgewichtsbedingungen mehrere Momentenbedingungen bezüglich verschiedene Punkte aufzustellen. Man beachte, dass man bei ebenen Problemen keinesfalls mehr als drei unabhängige Gleichgewichtsbedingungen für die äussere Kräfte an einem gegebenen Träger formulieren kann. Diese garantieren, dass die resultierende Dyname verschwindet, und damit ist jede weitere Gleichgewichtsbedingungvon selbst erfüllt.

Bei räumliche Probleme lassen sich drei Komponenten- und Momentenbedingungen beispielsweise durch 6 Momentenbedingungen bezüglich 6 räumlich liegenden Achsen ersetzen. Auch in diesem Fall können für einen gegebenen Träger nicht mehr als 6 linear unabhängige Gleichgewichtsbedingungen formuliert werdem.

;Man bezeichnet ein Gleichgewichtsproblem mit n Unbekannten, für welche sich nur $m < n$ (linear unabhängige) Gleichungen aufstellen lassen, als $(n-m)$-**fach statisch unbestimmt**; im Fall $m = n$ heisst das Problem **statisch bestimmt**. Bei einem **statisch unbestimmten System** können Bindungen gelöst werden, und das System bleibt immer noch unbeweglich. Ein **statisch bestimmtes System** hingegen wird durch Lösen einer Bindungskomponente zu einem beweglichen Mechanismus. Statisch unbestimmte Probleme lassen sich nur durch Berücksichtigung der **Verformung** lösen.

Die Gleichgewichtsbedingungen können nicht nur zur Ermittlung von Lagerkräften sondern mitunter auch zur Bestimmung der **Ruhelagen** selbst dienen.

In Wirklichkeit sind jedoch sowohl der Träger als auch der Stützkörper deformierbar, so dass feste Lager einer Idealisierung entsprechen, bei der die Nachgiebigkeit des Lagers vernachlässigt wird. In einzelnen Anwendungen könnte aber diese Nachgiebigkeit eine wichtige Rolle spielen. In solchen Fällen werden die bisher erwähnten Lager durch **lineare Federn** ergänzt, welche die Lagerelastizität charakterisieren. Die Steifigkeit einer linearen Druck- und Zugfeder wird durch eine Federkonstante k gegeben. Die zur Deformation der Feder nötige Federkraft ergibt sich aus der Längenänderung $\triangle x$, wobei $\overrightarrow{e}$ in der Zugrichtung liegt.

$$\boxed{\vec{F} = F \cdot \vec{e}, \quad F = k \cdot \triangle x} \tag{2.76}$$

Einspannungen können mit einer gewissen Drehnachgiebigkeit versehen sein. In einem solchen Fall kann man, im Sinne eines einfachen aber durchaus wirklichkeitsnahen Modells, die Einspannung durch eine lineare Drehfeder oder **Torsionsfeder** ersetzen, welche bei einem Drehwinkel von $\triangle\varphi$ ein Kräftepaar mit dem Moment M entwickelt,

$$\boxed{M = C \cdot \triangle\varphi} \tag{2.77}$$

wobei C die Federkonstante darstellt.Ist die Einspannung auch translatorisch nachgiebig, so kann dies durch entsprechende lineare Druck- und Zugfedern berücksichtigt werden. Damit entsteht eine **elastische Einspannung**.

2.7 Statisch bestimmte Fachwerke

Ein **Fachwerk** ist ein Massensystem, das aus mehreren miteinander verbundenen Stabträgern besteht. Die Verbindungsstellen und die Lager der gelagerten Träger heissen **Knoten** und können als Gelenke, durch Verschweissung oder durch kleinere an den Stabträgern mit Nieten befestigte Plattenzustände realisiert werden.

2.7.1 Ideale Fachwerke, Pendelstützen

Unter einem idealen Fachwerk versteht man ein System von Stabträgern mit folgenden Eigenschaften

(a) Alle Knoten sind bezüglich der Drehmöglichkeit der Stabträger relativ zueinander so weich, dass sie als reibungsfreie Gelenke aufgefasst werden können.

(b) Alle Stabträger sind so leicht, dass sie als gewichtslos gelten können, d.h. die Stangewichte dürfen im Vergleich zu den übrigen Lasten vernachlässigt werden.

(c) Alle Knoten befinden sich an den Stabenden.

(d) Alle Lasten greifen nur in den Knoten an, sie heissen deshalb **Knotenlasten**.

Greift man einen beliebigen Stab aus einem idealen Fachwerk heraus, so folgt aus den drei erwähnten Voraussetzungen, dass er an den beiden Enden A, A' durch je eine Kraft $\left\{A|\vec{S}\right\}$, $\left\{A'|\vec{S}'\right\}$ belastet ist. In der Ruhelage müssen diese Kräfte im Gleichgewicht sein. Sie müssen also eine Nullgruppe bilden, so dass $\vec{S}' = -\vec{S}$ ist. Man nennt $\left\{A|\vec{S}\right\}$, $\left\{A'|-\vec{S}\right\}$ **Stabkräfte**. Sie belasten den Stab auf Zug oder Druck, je nachdem, ob sie in Richtung der äusseren Normalen zum Querschnitt zeigen oder entgegengesetzt dazu. In A ist der Einheitsvektor in Richtung der äusseren Normalen zum Querschnitt $\vec{e}_N$ und in A' entsprechend

$\vec{e}'_N = -\vec{e}_N$. Man charakterisiert also beide Kräfte mit der einzigen skalaren Grösse S

$$\boxed{\vec{S} = S \cdot \vec{e}_N} \quad \boxed{\vec{S}' = -\vec{S} = S \cdot \vec{e}'_N} \tag{2.78}$$

Ist $S > 0$, so ist S eine Zugkraft. Ist $S < 0$, so ist S eine Druckkraft. Ein Stabträger, der Bestandteil eines idealen Fachwerkes ist, d.h. an beiden Enden reibungsfrei gelenkig gelagert, gewichtslos und nur an den beiden Enden durch Einzelkräfte belastet ist, heisst **Pendelstütze**. Ein ideales Fachwerk besteht demzufolge aus Pendelstützen.

Zur Beurteilung der Tragfähigkeit eines ruhenden Fachwerkes ist die Ermittlung einzelner oder aller Stabkräfte unerlässlich. Hierzu seien drei verschiedene Verfahren eingeführt und illustriert: das Knotengleichgewicht, der Dreikräfteschnitt und die Anwendung des PdvL.

2.7.2 Knotengleichgewicht

Bei der Analyse eines statisch bestimmten idealen Fachwerkes nach dem Verfahren des **Knotengleichgewichtes** werden im Rahmen eines ersten Schrittes, mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen am ganzen Fachwerk oder an zweckmässig zerlegten Teilen, die Lagerkräfte ermittelt.

In einem zweiten Schritt weden die Stabkräfte nach dem verfahren des **Knotengleichgewichts** ermittelt. Dabei trennt man die Stäbe von den Gelenken und führt an jedem Gelenk die darauf wirkende Kräfte ein. An einem Lager wirken neben den im ersten Schritt ermittelten Lagerkräften auch die von den Stäben auf das Gelenk ausgeübten, gesuchten Stabkräfte. Diese werden so eingetragen, dass ihre Reaktionen an den Stabträgern **Zugkräfte** sind. Die zugehörigen skalaren Unbekannten S_i lassen sich dann mit je zwei komponentenbedingungen für jedes Gelenk ermitteln. Bei positivem Wert von S_i ist die zugehörige Stabkraft tatsächlich eine Zugkraft, sonst eine Druckkraft.

Betrachte man ein ideales Fachwerk aus s Stäben und k Knoten. Seine äussere Lagerung entspreche gesamthaft r Kraft- und Momentenkomponenten. wseil jeder Stab eine Pendelstütze ist, also nur gerade eine unbekannte Stabkraft beinhaltet, erhält man die Gesamtzahl der Unbekannten als

$$\boxed{n = s + r} \tag{2.79}$$

Für jeden Knoten können zwei Komponentenbedingungen formuliert werden, woraus sich die Gesamtzahl der linear unabhängigen Gleichungen zu $m = 2k$ ergibt. Der Grad u der statischen Unbestimmtheit von ebenen idealen Fachwerken

$$\boxed{u = s + r - 2k} \tag{2.80}$$

Bei räumliche Fachwerken sind die gleichen Überlegungen gültig, nur erhält man hier drei Komponenten für jedes Knotengleichgewicht. So gilt für räumlichen Fachwerken

$$\boxed{u = s + r - 3k} \tag{2.81}$$

2.7.3 Dreikräfteschnitt

Bei ruhenden, ebenen, idealen Fachwerken können einzelne Stabkräfte dank geschickt gewähltes Systemabgrenzung mit relativ kleinem REchenaufwand berechnet werden. Dazu werden wieder in einem ersten Schritt die Lagerkräfte mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am ganzen Fachwerk, oder am ganzen Teilen des Fachwerkes ermittelt.

Danach versucht man, durch das Fachwerk einen Schnitt zu legen, der den Stab k mit der gesuchten Stabkraft S_K und weitere Stäbe $k+1$ und $k+2$ schneidet. Die Stabträger k, $k+1$ und $k+2$ dürfen nicht vom gleichen Knotenpunkt ausgehen. Der erwähnte Schnitt zerlegt das Fachwerk in zwei Teile, von denen nur der eine Teil mit seinen äusseren Kräften, einschliesslich der Lagerkräfte und der drei Stabkräfte S_k, S_{k+1} und S_{k+2} betrachtet wird.

Formuliert man die Momentenbedingungen bezüglich des Schnittpunktes P der beiden Stabachsen $k+1$ und $k+2$, so entsteht eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten S_k. Sind die Stäbe $k+1$ und $k+2$, so entsteht eine Gleichung mit der einzuigen Unbekannten S_k. Sind die Stäbe $k+1$ und $k+2$ parallel, so ergibt eine Komponentenbedingung in der zu diesen parallelen Stabachsen senkrechten Richtung eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten S_k.

2.7.4 Anwendung des PdvL

Sucht man an einem statisch bestimmten idealen Fachwerk nur die Stabkraft in einem einzigen Stab AB, so ergibt die direkte Anwendung des PdvL eine wirkungsvolle Lösungsmethode. Bei der Wahl des virtuellen Bewegungszustandes sollte man darauf achten, dass er den Satz der projizierten Geschwindig-keiten am Stab AB verletzt und sonst mit allen übrigen inneren und äusseren Bindungen verträglich ist. Dann erscheinen bei reibungsfreien Bindungen im Ausdruck für die Gesamtleistung keine überflüssigen Unbekannten. Man bekommt eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, nämlich der gesuchten Stabkraft.

Man denkt sich den Stab AB mit gesuchter Stabkraft S_{AB}. Der Stab AB wird vom System getrennt und stellt eine Wirkung auf das übrig bleibende System durch die Knotenkräfte mit den Vektoren $\vec{S}$ und $-\vec{S}$ in A bzw. B dar. Wählt man an einem Ersatzsystem, das bei statisch bestimmten Fachwerken zu einem **Mechanismus** wird, einen zulässigen virtuellen Bewegungszustand, der allem inneren und äusseren Bindungen genügt, so leisten neben den bekannten Lasten nur die Kräfte $\left\{A|\vec{S}\right\}$, $\left\{B|-\vec{S}\right\}$ einen Beitrag zur Gesamtleistung, da der Satz der projizierten Geschwindigkeiten zwischen A und B wegen des fehlenden Stabes nciht mehr erfüllt wird. Setzt man die **virtuelle Gesamtleistung in der Ruhelage** gemäss PdvL gleich null, so folgt die gesuchte Gleichung für die unbekannte Stabkraft S_{AB}.

2.8 Reibung

2.8.1 Physikalische Grundlage

Normal- und Reibungskräften treten bei der Berührung zweier materiellen Flächen auf. Die **Normalkräfte** charakterisieren den Widerstand der festen Körper gegen Eindringen und liegen längs der gemeinsamen Normalen durch die Berührungspunkte und ergeben keine Leistung bei zulässigen virtuellen Bewegungen beider Körpern. Die **Reibungskräfte** liegen dagegen in der gemeinsamen Tangentialebene τ der beiden Berührungsflächen und ergeben Beiträge zur virtuellen Leistung, selbst bei zulässigen virtuellen Bewegungen.

Die **Rauigkeit** der Berührungsflächen, welche zumindest lokal zu unterschiedlichen Richtungen der gemeinsamen Flächennormalen führt und sie tendenziell in Richtung der Verhinderung einer etwaigen Bewegung verdreht. Die Tendenz der Moleküle ihre Bindungen durch externe Faktoren wie Wärme, Druck verursachen **lokale Verschweissungen**, welche eine Erhöhung des Haftvermögens, also des Gleitwiderstandes. Dies äussert sich wiederum in einer zusätzlichen Schubkomponente der Kontaktkraft, d.h. einer Komponente in der gemeinsamen tangentialen Ebene τ.

Ein Körper 1 mit Gesamtgewicht G durch Hinzufügen oder Wegnehmen von Standardgewichten kann verändert werden, ruhe vorerst auf einer ebenen horizontalen Unterlage 2 und sei einer horizontalen Kraft mit Kraftvektor $\vec{F}$

$$\boxed{\vec{F} = F \cdot \vec{e}_x} \quad \boxed{\vec{F}_R = F_R \cdot \vec{e}_x = -F \cdot \vec{e}_x} \quad \boxed{F_R = -F} \tag{2.82}$$

ausgesetzt, dessen Betrag allmählich erhöht wird. Der Körper 1 bleibt wegen der REibung an seiner Berührungsfläche in Ruhe, bis der Kraftbetrag $\left|\vec{F}\right|$ einen Grenzwert erreicht. Anschliessend steuert man den Kraftbetrag so, dass die Geschwindigkeit $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_x$ der geradlinigen Translation des Körpers konstant bleibt. Man erzeugt sowohl positive als auch negative Werte von F mit entsprechenden Werte von v und registriert die Funktion $F = F(v)$ für verschiedene Werte des Gewichtes G. Da sowohl in der Ruhelage als auch bei der gleichförmigen geradlinigen Translation die äusseren Kräfte im Gleichgewicht sein müssen, ist der Reibungskraftvektor $\vec{F}_R$ und der Normalvektor $\vec{N}$.

$$\boxed{\vec{N} = N \cdot \vec{e}_y = -\vec{G} = G \cdot \vec{e}_y} \quad \boxed{N = G} \tag{2.83}$$

Man beachte, dass die Vektoren so definiert sind, dass N und G immer positives Vorzeichen haben, während die Vorzeichen von F_R und F stets verschieden sind. Wirkt $\vec{F}$ in der positiven x-Richtung, so ist F positiv und F_R negativ, während für $\vec{F}$ in der negativen x-Richtung F_R positiv wird.

Die Funktion $F_R(v)$ ist proportional zum Normalkraftbetrag $\left|\vec{N}\right|$. Die Funktion $f(v) = \dfrac{F_R(v)}{\left|\vec{N}\right|}$ stellt für alle Werte von $\left|\vec{N}\right|$ einen einzigen Graphen dar. Gemäss diesen Graph setzt sich der Körper in Bewegung, sobald $\left|f(v)\right|$ einen Grenzwert μ_0 erreicht. Dann aber nimmt das Verhältnis $\left|f(v)\right|$ mit zunehmender Schnelligkeit $\left|v\right|$ ab bis zu einem stationären Wert μ_1, der für alle grösseren

Werte von $\left|v\right|$ in erster Näherung konstant bleibt.

Der Grenzwert μ_0 heisst **Haftreibungszahl** und der stationäre Wert μ_1 **Gleitreibungszahl**. Beide zahlen hängen hauptsächlich von der Art der Materialpaarung und von den Schmierverhältnissen an den Berührungsflächen ab.

2.8.2 Haftreibung

Ein Körper setzt sich in Bewegung erst dann, wenn der Betrag der Reibungskraft $\left|\vec{F}_R\right|$ den Grenzwert $\mu_0\left|\vec{N}\right|$ erreicht hat.

An den materiellen Berührungspunkten zwischen zwei Körpern 1 und 2 bleibt die relative Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{0}$, solange die Haftbedingung erfüllt ist.

$$\boxed{\left|\vec{F}_R\right| < \mu_0 \cdot \left|\vec{N}\right|} \tag{2.84}$$

Die Haftreibungsgesetz ist eine Ungleichung, welche nicht zur Bestimmung der Haftreibungskraft benutzt werden kann. In einer Bindung mit Haftreibung muss deshalb vorerst eine Haftreibungskraft oder ein Haftreibungsmoment von unbekanntem Betrag und unbekannter Richtung eingeführt werden. Bei einem statisch bestimmten System ergibt sich die Haftreibungskraft und die Normalkraft aus den Gleichgewichtsbedingungen. Die so berechneten Kräfte werden in das Haftreibungsgesetz eingesetzt, um im Rahmen der Diskussion der Resultate zu entscheiden, ob das System in Ruhe sein kann.

2.8.3 Gleireibung

Verlangen die Gleichgewichtsbedingungen Lagerkomponenten, die der Haftbedingung nicht genügen, so tritt Gleiten ein. Nimmt man einfachheitshalber an, dass einer der beiden sich berührenden Körper in Ruhe ist, dann greift im Berührungspunkt am bewegten Körper eine Reibungskraft an, die der Geschwindigkeit des materiellen Massenangriffspunktes entgegengesetzt ist. Der Reibungsvektor besitzt die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Gleitreibungszahl μ_1.

$$\boxed{\vec{F}_R = \mu_1 \cdot \left|N\right| \cdot \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}} \tag{2.85}$$

Die Gleitreibung wird meist nur mit trockener Reibung, d.h. Gleitreibung zwischen ungefetteten oder nur mässig gefetteten Flächen in Verbindung gebracht. Die Gleichgewichtsbedingungen sind für einen bewegten starren Körper erfüllt, dessen Kinemate bezüglich seines Massenmittelpunktes konstant bleibt. In einem solchen Fall liefert das Gleitreibungsgesetzt im Gegensatz zum Haftreibungsgesetz eine zusätzliche Gleichung zur Ermittlung der Unbekannten.

2.8.4 Gelenk- und Lagerreibung

2.9 Seilstatik

2.10 Beanspruchung