

Kapitel 1

Einführung

1.1 Physikalische Grössen

1.1.1 Zahlwert und Einheit

Eine physikalische Grösse beinhaltet eine Zahl und eine Einheit. Beinhaltet eine physikalische Grösse einen grossen Zahlenwert, so kann man diese als ein Vielfaches dieser Einheit ausdrücken. Die Dimension gibt Auskunft auf eine detaillierte Charakterisierung der Grösse wie die Höhe, der Abstand der die Strecke mit Einheit Meter.

1.1.2 Grundeinheiten und abgeleitete Einheiten

Die Grundeinheiten besteht aus sieben Grundeinheiten: **Länge** (Meter m), **Masse** (Kilogramm kg), Zeit (Sekunde s), **Stromstärke** (Ampere A), **Temperatur** (Kelvin K), **Stoffmenge** (Mol mol) und **Lichtstärke** (Candela cd).

Die abgeleitete Einheiten entstehen durch Beziehungen zwischen der Grundeinheiten wie die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung.

Werden Gleichungen mit den Grundeinheiten gerechnet, so wird das Resultat auch in einer Grundeinheit ausgedrückt. Das Ziel besteht auch darin, Resultate mit Hilfe von Zehnerpotenzen zu schreiben.

Grösse	Zeichen	Name	Symbol
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I, i	Ampere	A

Tab. 1.1: Grundeinheiten

Grösse	Zeichen	Name	Symbol	Ausdruck
Kraft	F	Newton	N	$N = \text{m kg s}^{-2}$
Leistung	P	Watt	W	$W = VA = \text{N m s}^{-1}$
Arbeit, Energie	W	Joule	J	$J = Ws = \text{N m}$
Spannung	U, u	Volt	V	$V = WA^{-1}$
Widerstand	R	Ohm	Ω	$\Omega = VA^{-1}$
Spezifischer Widerstand	ρ		$\Omega \text{ m}$	$\Omega \text{ m} = \text{V m A}^{-1}$
Leitwert	G	Siemens	S	$S = \Omega^{-1}$
Spezifische Leitfähigkeit	σ		S m^{-1}	$\text{S m}^{-1} = \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
Ladung	Q	Coulomb	C	$C = As$
Elektr. Verschiebungsdichte	D		A s m^2	$\text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$
Elektr. Feldstärke	E		V m^{-1}	
Kapazität	C	Farad	F	$F = \text{A s V}^{-1} = \text{s } \Omega^{-1}$
Induktionsfluss	ϕ	Weber	Wb	$\text{Wb} = Vs$
Magn. Induktionsdichte	B	Tesla	T	$T = \text{V s m}^{-2}$
Magn. Feldstärke	H		A m^{-1}	
Induktivität	L	Henry	H	$H = \text{V s A}^{-1} = \Omega \text{ s}$

Tab. 1.2: Abgeleitete Einheiten

Definition	Wert
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c_0 = 299'792'458 \text{ m s}^{-1}$
Elementarladung	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Ruhemasse Elektron	$m_0 = 9.1096 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse Proton	$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Permeabilität im Vakuum	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Permittivität im Vakuum	$\epsilon_0 = c_0^{-2} \mu_0^{-1} = 8.85419 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Wellenimpedanz des freien Raumes	$\nu_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.73 \Omega$

Tab. 1.3: Universelle Konstanten

1.1.3 Skalare und vektorielle Grössen

Zahlenwerte mit Einheiten bezeichnet man als skalare Grössen. Zahlenwerte mit Einheiten, die in einer bestimmten Richtung des Raumes wirken bezeichnet man als vektorielle Grössen und haben einen Vektorpfeil über das Symbol und ihr Betrag ist die Länge des Vektors.

1.2 Elektrizität und ihre Wirkungen

1.2.1 Elektrische Ladung und elektrischer Strom

Die elektrische Ladung Q ist eine physikalische Grösse und benötigt einen Träger. Der Raum befindet sich in einem elektrischen Feld. Körper, die eine elektrische Ladung tragen, üben eine Kraftwirkung aufeinander aus.

Elektrische Ladungen können sich dabei anziehen oder abstossen. Man unterscheidet zwischen positiver und negativer Ladung. Gleichnamige Ladungen

stossen sich ab, während ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Elektrizität entsteht durch Trennen von Ladungen verschiedenen Vorzeichens.

Im elektrischen neutralen Zustand heben sich die Wirkungen positiver und negativer Ladungen gegenseitig auf. Elektrische Ladungen lassen sich durch Berührung übertragen. Die Elektrizität besteht aus Elektronen.

Elektrizitätsträger können sich je nach Material übertragen. Ladungsträger bewegen sich in einem Leitungsstrom bzw. elektrischen Strom. Dieser elektrischen Strom ist das Verhältnis der elektrischen Ladung pro Zeit.

$$I = \frac{Q}{t} \quad (1.1)$$

Bewegte Ladungen haben thermische (Leiter erwärmt sich bis zum Schmelztemperatur), magnetische (Kräfte entstehen durch Magnete auf Leiter) und chemische Wirkungen (Durch Stromvorgang werden Stoffe verändert).

1.2.2 Aufbau der Materie

Moleküle können in Atome aufgeteilt werden. Um den positiven Atomkern kreisen die negativ geladenen Elektronen. Diese Elektronen bilden die Elektronenhülle, welche Elektronen durch ihre Energie zu Gruppen (Elektronenschalen) aufgeteilt werden. Ein Elektron kann sich nur auf eine Quantenbahn aufhalten. Ein Atom ist elektrisch neutral. Die Elektronen in der äusseren Schale sind Valenzelektronen und bestimmen das chemische Verhalten des Atoms.

Der Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen bzw. aus Nukleonen. Neutronen sind für die Kernspaltung von grösser Bedeutung. Die Beeinflussung der Elektronenhülle erfolgt durch Ionisierungsenergie und bildet Ionen durch Elektronenabgabe oder -zugabe. Ein Ion ist ein elektrisch geladenes Atom.

1.2.3 Leiter und Nichtleiter

Materialien werden in Leiter und Nichtleiter unterteilt. Zu den Leitern zählen die Metalle, aber verändern nicht das Material durch Stromdurchgang. Säuren, Basen und Salzlösungen werden beim Stromdurchgang verändert.

Zu den Nichtleitern zählen Gummi, Seide, Kunststoffe, Porzellan, Glas, Glimmer, usw. In diesen Stoffen stehen nahezu keine Elektronen zur Verfügung.

Kapitel 2

Grundbegriffe und Grundgesetze

2.1 Spannung, Strom und Widerstand

2.1.1 Kraft zwischen Punktladungen

Massen ziehen sich durch Gravitation an. Der Betrag der Anziehungskraft zwischen zwei punktförmigen Massen m_1 und m_2 im Abstand d ist

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^3} \quad (2.1)$$

Geladene Körper üben zusätzliche Kräfte aus. Diese Kräfte werden Coulombsche Kräfte genannt, wobei sich Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstoßen und mit unterschiedlichen Vorzeichen anziehen.

Das Coulombsche Kraftgesetz für zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 mit Permittivität des Mediums ϵ lautet

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} \quad (2.2)$$

2.1.2 Das Feld

Der Betrag der Kraft nimmt quadratisch mit dem Abstand ab. Jede Ladung verändert in ihrer Umgebung den Zustand des Raumes derart, dass auf andere Ladungen Kraftwirkungen ausgeübt werden. Dieser Zustand des Raumes bezeichnet man als **elektrisches Feld**. Das elektrische Feld wird in jedem Raumpunkt durch einen Vektor \vec{E} beschrieben, der in Richtung der Kraftweist, die das elektrische Feld auf eine positive Probeladung q_2 ausübt.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} \quad (2.3)$$

Setzt man das **Coulombsche Kraftgesetz** für die Feldstärke ein, so erhält man für die elektrische Feldstärke der Punktladung Q_1 , wobei \vec{e}_r der Einheitsvektor in Richtung \vec{r} und r der Abstand vom Q_1 . Im Feldmodell ist eine Punktladung Q von einem elektrischen Feld E umgeben, das den ganzen Raum durchdringt.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_r \cdot \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r^2} \quad (2.4)$$

Stellt man Kräfte auf Ladungen fest, so ist die Ursache ein **elektrisches Feld**. Stellt man Kräfte auf Massen fest, so ist die Ursache ein **Gravitationsfeld**.

Durch Feldlinien werden elektrische Felder dargestellt. Diese geben in jedem Raumpunkt die Richtung des Feldvektors an. Solche Feldbilder vermitteln einen anschaulichen Überblick über den Verlauf des Feldes.

2.1.3 Arbeit im Feld, Spannung und Potential

Für die Verschiebung von Massen im Gravitationsfeld (i.d.R. Potentialfeld) benötigt man Arbeit. Die zu leistende Arbeit von einem Punkt A nach B ist nicht vom Weg abhängig, sondern nur von der Höhendifferenz zwischen A und B .

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot \underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_{AB}} \quad (2.5)$$

Diese wegunabhängige Arbeit führt zu der Definition der **elektrischen Spannung**, nämlich Arbeit pro Ladung.

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} \quad (2.6)$$

Für die Spannung U_{AB} wird ein gerichteter Spannungspfeil eingetragen. Der Pfeil erinnert an das Wegintegral für die Arbeit. So ist die Spannung U_{AB} der von A nach B zeigt.

Mit der Spannung wird das elektrische Potential eingeführt. Die Spannung wird durch zwei Punkte angegeben, das Potential hingegen wird einem Punkt im Raum zugeordnet. Für die Einführung des Potentials wird ein Punkt im Raum zum sogenannten **Potentialnullpunkt** bzw. **Bezugspunkt** erklärt und von diesem Punkt wird die Spannung gemessen. Die Wahl des Bezugspunktes mit $V = 0$ ist willkürlich. Für den Zusammenhang zwischen Spannung und Potential gilt folgende **Potentialdifferenz**, wobei Potential und Spannung dieselbe Einheit Volt ($[U] = [V] = V$) haben.

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (2.7)$$

Liegt eine Ladung q im Punkt P , der das Potential $V(P)$ aufweist, so ergibt folgendes Produkt die potentielle Energie der Ladung gegenüber dem Potentialnullpunkt

$$E_{\text{pot}} = q \cdot V(P) \quad (2.8)$$

2.1.4 Strom

Die Bewegung von elektrischen Ladungsträgern ist der elektrische Strom bzw. **Ladungsfluss** von Ladungsträger. In einem Leiter, durch dessen Querschnitt die Ladung $Q = n \cdot e$ in der Zeit t hindurchtritt, ist die Stromstärke I

$$I = \frac{Q}{t} \quad (2.9)$$

Einen solchen zeitlich konstanten Strom nennt man **GHleichstrom**. Einheit der elektrischen Stromstärke ist das Ampere ($[I] = \text{A}$). Bezogen auf die Fläche A , durch die Strom tritt, ist ferner die **Stromdichte**

$$J = \frac{I}{A} \quad (2.10)$$

Die nicht zeitlich konstanter elektrische Stromstärke ist definiert als

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.11)$$

Man ordnet dem elektrischen Strom eine positive Zählrichtung zu, welche der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger im Leiter entsprechen würde, also vom Pluspol zum Minuspol, und kennzeichnet diese positive Zählrichtung durch einen entsprechenden Zählpfeil.

Die positive Zählpfeilrichtung des Stromes ist ausserhalb einer Energiequelle vom Pluspol zum Minuspol festgelegt und entspricht der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger.

2.1.5 Widerstand

Jeder Leiter setzt dem Stromfluss einen elektrischen Widerstand entgegen. Hat ein Verbraucher zwei Anschlussklemmen so bildet er einen **Zweipol**. Schliesst man eine Spannung U an die Zweiklemmen so wird ein Strom I durch den Zweipol fliessen. Je grösser der Strom desto grösser die Spannung. Den Widerstand eines Zweipols bezeichnet man als linear und heisst **ohmsches Gesetz**

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{G} \quad (2.12)$$

So ist R der elektrische Widerstand und G der elektrische Leitwert des Zweipols, wobei beide konstant sind. Sind R und G nicht konstant, so sind beide strom- und spannungsabhängig. Die Strom-Spannungskennlinie verläuft nicht-linear. Der Quotient $u/i = f(i)$ ergibt einen nichtlinearen Widerstand und man erhält einen **differentiellen Widerstand**.

$$r = \frac{\Delta u}{\Delta i} \Rightarrow \frac{du}{di} \quad (2.13)$$

Die Einheit des Widerstandes ist das Ohm (Ω) und die Einheit des elektrischen Leitwerts ist das Siemens (S) oder (Ω^{-1}). Der elektrische Widerstand ist eine

Materialgrösse, d.h. $R \approx l/A$. Für einen linearen Leiter der Länge l mit dem überall gleichen Querschnitt A erhält man

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{l}{\sigma \cdot A} \quad (2.14)$$

So ist ρ mit Einheit ($[\rho] = \Omega \text{ m}$) der spezifische Widerstand und σ mit Einheit ($[\sigma] = \text{S m}^{-1} = \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$) der spezifische Leitwert oder die Leitfähigkeit des Leitermaterials.

Material	Typ	$\sigma / \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
Quarz	Isolator	$\approx 10^{-17}$
Silikonöl	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Mica	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Paraffin	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Hartgummi	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Porzellan	Isolator	$\approx 10^{-14}$
Glas	Isolator	$\approx 10^{-12}$
Bakelit	Isolator	$\approx 10^{-9}$
Destilliertes Wasser	Isolator	$\approx 10^{-4}$
Sandige Erde, trocken	schlechter Isolator	$\approx 10^{-3}$
Feuchte Erde	schlechter Isolator	$\approx 10^{-2}$
Frischwasser	schlechter Isolator	$\approx 10^{-2}$
Tierisches Fett	schlechter Isolator	$\approx 4 \cdot 10^{-2}$
Tierischer Muskel	schlechter Leiter	0.4
Tierisches Blut	schlechter Leiter	0.7
Germanium (rein)	Halbleiter	≈ 2
Meerwasser	Leiter	≈ 4
Tellur	Leiter	$\approx 5 \cdot 10^2$
Kohle	Leiter	$\approx 3 \cdot 10^4$
Graphit	Leiter	$\approx 10^5$
Gusseisen	Leiter	$\approx 10^6$
Quecksilber	Leiter	$\approx 10^6$
Chromnickel	Leiter	$\approx 10^6$
Konstantan	Leiter	$\approx 2 \cdot 10^6$
Blei	Leiter	$\approx 5 \cdot 10^6$
Zinn	Leiter	$\approx 9 \cdot 10^6$
Bronze	Leiter	$\approx 10^7$
Messing	Leiter	$\approx 1.1 \cdot 10^7$
Zink	Leiter	$\approx 1.7 \cdot 10^7$
Wolfram	Leiter	$\approx 1.8 \cdot 10^7$
Aluminium	Leiter	$\approx 3.0 \cdot 10^7$
Aluminium hartgezogen	Leiter	$\approx 3.5 \cdot 10^7$
Gold	Leiter	$\approx 4.5 \cdot 10^7$
Kupfer	Leiter	$\approx 5.7 \cdot 10^7$
Silber	Leiter	$\approx 6.1 \cdot 10^7$
Nb3(Al-Ge)	Supraleiter	∞

Tab. 2.1: Übersicht der Leitfähigkeiten

Häufigste Leitwerkstoffe sind Kupfer und Aluminium. Für Kontakte werden Gold,

Silber und Wolfram eingesetzt und für Heizleiter Chromnickel. Für Messwiderstände werden Manganin und Konstantan wegen ihrer thermischen Eigenschaften verwendet. Der elektrische Widerstand eines Leiters ist temperaturabhängig $R = f(\theta)$.

Die nichtlineare Temperaturverteilung wird für den unteren Bereich bis 200° C mit folgendem Ansatz linearisiert, wobei R_{20} der Widerstandswert bei 20° C, R_W der Widerstandswert bei der Temperatur θ_W , θ_W die Temperatur des Widerstandes in ° C und α_{20} der Temperaturkoeffizient in 1/° C

$$R_W = R_{20} \cdot \left[1 + \alpha_{20} \cdot (\theta_W - 20^\circ \text{C}) \right] \quad (2.15)$$

Für höhere Temperaturen ab 200° C wird zusätzlich noch ein quadratischer Term in der Näherung eingefügt, wobei β_{20} der Temperaturkoeffizient in $(1/^\circ \text{C})^2$

$$R_W = R_{20} \cdot \left[1 + \alpha_{20} \cdot (\theta_W - 20^\circ \text{C}) + \beta_{20} \cdot (\theta_W - 20^\circ \text{C})^2 \right] \quad (2.16)$$

Somit sind α_{20} und β_{20} temperaturabhängig. Die meisten häufig eingesetzten Metalle haben einen Temperaturbeiwert in der Nähe von $\alpha = 0.004 \text{ K}^{-1}$. Widerstände ändern bei einer Temperaturänderung um je 1 K ihren Wert um etwa 0.4 %.

Material	$\sigma / \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$	$\alpha_{20} / \text{K}^{-1}$	$\beta_{20} / \text{K}^{-2}$
Silber	$6.1 \cdot 10^7$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$5.7 \cdot 10^7$	$(3.9 \dots 4.3) \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$
Gold	$4.5 \cdot 10^7$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$(3.3 \dots 3.6) \cdot 10^7$	$(4.2 \dots 5.0) \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$
Zink	$1.65 \cdot 10^7$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Wolfram	$1.82 \cdot 10^7$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Messing	$(1.1 \dots 1.59) \cdot 10^7$	$(1.5 \dots 4.0) \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
Nickel	$(1.0 \dots 1.5) \cdot 10^7$	$(3.7 \dots 6.0) \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$
Platin	$1.02 \cdot 10^7$	$(2 \dots 3) \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$
Zinn	$0.83 \cdot 10^7$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-6}$
Manganin	$0.232 \cdot 10^7$	$0.01 \cdot 10^{-3}$	—
Konstantan	$0.2 \cdot 10^7$	$0.01 \cdot 10^{-3}$	—
Novokonstant	$0.22 \cdot 10^7$	$-0.01 \cdot 10^{-3}$	—

Tab. 2.2: Leitfähigkeiten und Temperaturbeiwerte

2.2 Der einfache Gleichstromkreis

2.2.1 Zählpfeile und Zählpfeilrichtungen

Zählpfeile oder **Bezugspfeile** geben an, mit welchem Vorzeichen die einzelnen Strom- und Spannungsgrößen in die Netzwerkgleichungen eingehen. Zählpfeile können skalare Größen zugeordnet werden.

Der Richtungssinn für den Strom wird in Übereinstimmung mit der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger festgelegt. Der Bezugspfeil wird in den Leitungszug gezeichnet. Er kann mit dem Richtungssinn der Stromstärke übereinstimmen oder ihm entgegengerichtet sein.

Der Bezugssinn einer Spannung zwischen zwei Punkten kann durch die Bezeichnung dieser Punkte angegeben werden. Bei Verwendung eines Bezugspfeils kann der Doppelindex auch entfallen.

$$U_A = U_{12} = V_1 - V_2 \quad U_A = U_{21} = V_2 - V_1 \quad (2.17)$$

An einem allgemeinen Zweipol (Eintor) kann man die Bezugsrichtungen durch das Verbraucherzählpfeilsystem (VZS) oder durch das Erzeugerzählpfeilsystem (EZS).

Handelt es sich beim Eintor um einen **Verbraucher**, so wird das Produkt UI beim VZS positiv und beim EZS negativ. Ist das Eintor aber eine **Quelle**, so wird das Produkt UI beim VZS negativ und beim EZS positiv.

An jedem Eintor können die Bezugspfeile für I und U beliebig gewählt werden. Häufig wird bei einer Quelle das EZS und bei einem Verbraucher das VZS angewendet. Man spricht dabei von einem gemischten System.

2.2.2 Das ohmsche Gesetz

In einem linearen Leiter sind Strom und Spannung zueinander proportional. Bei einem linearen Leiter ist der ihn durchfließenden Strom der angelegten Spannung proportional und dem Leiterwiderstand gegenüber umgekehrt proportional.

$$I(U) = \frac{U}{R} = U \cdot G \quad (2.18)$$

Das ohmsche Gesetz ist ein Grundgesetz des elektrischen Stromes in Leitern. Als ohmschen Widerstand bezeichnet man einen idealen Zweipol, bei dem das ohmsche Gesetz unabhängig von äusseren Einflüssen stets erfüllt ist. Ein ohmscher Widerstand ist ein linearer passiver Zweipol: seine I - U -Kennlinie ist eine Gerade.

2.2.3 Die Kirchhoffschen Gesetze

Knotensatz: In jedem Knoten (auch Superknoten) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (2.19)$$

Maschensatz: Wird in einem Potentialfeld eine Ladung vom Ausgangspunkt A aus bewegt und wieder zurück zum Punkt A gebracht, so ist die verrichtete Arbeit Null und somit ist auch die Spannung Null. In jeder Masche ist die Summe

aller Spannungen (Umlaufspannung) gleich Null.

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (2.20)$$

Die Bezugspfeile für alle Spannungen sind entsprechend dem Umlaufsinn zu orientieren. Wenn der Bezugssinn einer Spannung nicht mit dem Umlaufsinn übereinstimmt, wird beim Aufstellen der Maschengleichung diese Spannung mit dem entsprechenden Vorzeichen versehen.

Ohmsches Gesetz, Knotensatz und Maschensatz sind drei grundlegende Gesetze, mit denen schon allgemeine Netzwerkprobleme gelöst werden können.

2.2.4 Leistung und Arbeit

Wird ein Leiter an eine Gleichspannung U angeschlossen, so fließt durch ihn ein Strom I . Ist Q dabei die durch den Leiterquerschnitt hindurchtretende Ladung, so ist zum Überwinden des Leiterwiderstandes R die Energie $W = Q \cdot U$ erforderlich, es muss also die Arbeit W geleistet werden, um den Strom I durch den Leiter aufrecht zu erhalten.

Die Energie W mit Einheit ($[W] = \text{Ws} = \text{J} = \text{Nm}$) muss von der speisenden Quelle als Energiequelle aufgebracht werden. Praktisch interessiert wie schnell diese Arbeit geleistet werden muss, das ist die Leistungsaufnahme P mit Einheit ($[P] = \text{W}$) des betrachteten Leiters vom Widerstand R .

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Q \cdot U}{t} = \frac{U \cdot I \cdot t}{t} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \quad (2.21)$$

Die in einem Widerstand verbrauchte Energie wird restlos in Wärme umgewandelt. Ein elektrischer Widerstand ist demnach ein Energiewandler, der elektrische Energie in Wärme oder mechanische Energie umwandelt.

Die nutzbare abgegebene Leistung P_{ab} ist um die Verlustleistung P_{verl} kleiner als die zugeführte Leistung P_{zu} . Anstelle der Verluste wird häufig der **Wirkungsgrad** η eines Gerätes angegeben

$$P_{\text{zu}} = P_{\text{ab}} + P_{\text{verl}} \quad \eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} \leq 1 \quad (2.22)$$

2.2.5 Elemente von Stromkreisen

Zur Darstellung von Stromkreisen oder Netzwerken werden Symbole, Schaltzeichen und Konventionen benützt. Folgende Eintore bzw. Bauelemente werden verwendet: Spannungsquelle U_q , Stromquelle I_q und Widerstand R . Diese Bauelemente stellen ein idealisiertes Verhalten dar und haben folgende Eigenschaften

- Die ideale Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung bei beliebigem Strom

- Die ideale Stromquelle liefert einen konstanten Strom bei beliebiger Spannung
- Der Widerstand ist linear und konstant

Werden die verwendeten Schaltzeichen (Eintore) mit Zählpfeilen versehen, so kann wahlweise mit dem VZS oder EZS gearbeitet werden. Besitzt ein Netzwerk Eingangsklemmen und Ausgangsklemmen, so bezeichnet man dieses als Zweitor.

Ein- und Zweitore werden eingeteilt in **passive**, **verlustlose** und **aktive** Ein- und Zweitore. Dabei muss noch zwischen aktivem n -Tor und **aktiv wirkenden** n -Tor unterschieden werden. Ein- und Zweitore können in verschiedenen **Betriebszuständen** betrieben werden. So kann ein aktives Eintor auch einen Betriebszustand aufweisen, wo es passiv wirkt, also Leistung aufnimmt.

Passiver Betriebszustand: Das n -Tor nimmt in diesem Betriebszustand mehr Leistung auf wie es abgibt.

Verlustloser Betriebszustand: Das n -Tor nimmt in diesem Betriebszustand gleichviel Leistung auf wie es abgibt.

Aktiver Betriebszustand: Das n -Tor nimmt in diesem Betriebszustand mehr Leistung ab wie es aufnimmt.

	Passiv	Verlustlos	Aktiv	Kommentar
Passives n -Tor	Normal	Möglich	Nicht möglich	keine Quellen
Verlustloses n -Tor	Nicht	Normal	Nicht möglich	nur verlustlose Elemente
Aktives n -Tor	Möglich	Möglich	Möglich	muss Quellen haben

Tab. 2.3: Allgemeines n -Tor auf verschiedene Betriebszustände

Ein elektrisches Netzwerk aus Eintore und Zweitore wird auf der Ebene projiziert bzw. dargestellt. Die Schaltung enthält die eben eingeführten Schaltzeichen, die idealisierte Bauelemente verkörpern.

Die einzelne Elemente sind durch **Linien** miteinander verbunden. Diese Verbindungslinien sind widerstandslos und ohne jede andere Wirkung des elektrischen Stromes anzusehen.

In den **Knoten** sollen mindestens 3 Verbindungsleitungen zusammentreffen. Ein **Zweig** verbindet zwei Knoten

Unter einer **Masche** versteht man einen in sich geschlossenen Kettenzug bzw. Ringschaltung von Zweigen und Knoten. Geht man von irgend einem Knoten aus, so durchwandert man eine Masche, wenn man, ohne irgend einen Zweig mehrfach zu durchlaufen, zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

2.2.6 Einfache Schaltungen von Widerständen

Mit Hilfe von Knotensatz, Maschensatz und ohmsches Gesetz können nun für die Serienschaltung und Parallelschaltung von Widerständen einfache Regeln hergeleitet werden.

Serieschaltung von Widerständen - Spannungsteilung

Anwendung des Maschensatzes und des ohmschen Gesetzes liefert in einer Serienschaltung

$$\sum_{k=1}^n U_k - U_q = \sum_{k=1}^n I \cdot R_k - U_q = I \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n R_k}_{R_E} - U_q = 0 \Rightarrow U_q = I \cdot R_E \quad (2.23)$$

Damit ergibt sich für den **Ersatzwiderstand** R_E und für das Verhältnis jeder Spannung zum Spannungsquelle die folgende **Spannungsteilung**

$$R_E = \sum_{k=1}^n R_k \quad \frac{U_k}{U_q} = \frac{I \cdot R_k}{I \cdot R_E} = \frac{R_k}{R_E} \quad (2.24)$$

Bei in Serie geschalteten Widerständen ist der Ersatzwiderstand die Summe der einzelnen Widerstände. Bei in Serie geschalteten Widerständen teilt sich die Spannung direkt proportional zu jedem Widerstand.

Parallelschaltung von Widerständen - Stromteilung

Anwendung des Knotensatzes und des ohmschen Gesetzes liefert in einer Parallelschaltung

$$\sum_{k=1}^n I_k - I_q = \sum_{k=1}^n \frac{U}{R_k} - I_q = U \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}_{G_E} - I_q = 0 \Rightarrow I_q = U \cdot G_E \quad (2.25)$$

Damit ergibt sich für den **Ersatzleitwert** G_E und für das Verhältnis jedem Strom zum Stromquelle die folgende **Stromteilung**

$$G_E = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad \frac{I_k}{I_q} = \frac{U \cdot G_k}{U \cdot G_E} = \frac{G_k}{G_E} = \frac{R_E}{R_k} \quad (2.26)$$

Bei parallel geschalteten Widerständen ist der Ersatzleitwert die Summe der einzelnen Leitwerte. Bei parallel geschalteten Widerständen teilt sich der Strom direkt proportional zu den Leitwerten bzw. indirekt proportional zu jedem Widerstand.

2.2.7 Quellen, Ersatzschaltungen und Kennlinien

Man betrachte ein beliebiges Netzwerk aus Widerständen, Spannungs- und Stromquellen besteht. Nun wird das Netzwerk an zwei Klemmen zugänglich gemacht. Belastet man jetzt das Netzwerk, so sind U_a und I_a linear voneinander abhängig (Gerade in U - I -Kennlinie).

Die lineare Abhängigkeit zwischen U_a und I_a kann in der Form $U_a = \alpha \cdot I_a + \beta$ geschrieben werden. Die Parameter α und β sind unabhängig von der Belastung sondern vom gegebenen Netzwerk abhängig.

Das gegebene Netzwerk soll in seinem Innern durch ein möglichst einfaches Ersatznetzwerk ersetzt werden, so dass die Wirkung nach aussen an den Klemmen unverändert bleiben. Ein äusserer Beobachter kann nicht festlegen, dass im Innern das komplizierte Netzwerk durch ein einfacheres Netzwerk ausgetauscht wurde.

Die Ersatznetzwerke sind die **Thevenin'sche Ersatzschaltung** (eine ideale Spannungsquelle mit Seriewiderstand) und die **Norton'sche Ersatzschaltung** (eine ideale Stromquelle mit Parallelwiderstand) unter der Bedingung, dass der Ersatz bezüglich zweier wohldefinierter Klemmen geschieht. Das Ersatznetzwerk weist die gleiche Wirkung wie das Originalnetzwerk auf. Beide Ersatzschaltungen sind mit zwei Grössen vollständig beschrieben und daher lässt sich die U_a - I_a -Gerade nachbilden.

Die zwei Grössen U_{qe} und R_{qe} bzw. I_{qe} und R_{qe} der Ersatzschaltungen sind nun mit geeigneten Überlegungen und Experimenten an den Klemmen zu bestimmen.

Zwei beliebige Punkte auf der U_a - I_a -Geraden genügen, um die Ersatzschaltungen nach Thevenin oder Norton vollständig zu beschreiben. Lässt man die Klemmen 1-1' offen (Leerlauf), so misst man an ihnen die sogenannte **Leerlaufspannung** U_{LL} , schliesst man die Klemmen kurz, so fliesst der sogenannte **Kurzschlussstrom** I_{KS} . Diese zwei Punkte sind extreme Betriebszustände. Schaltet man alle inneren Quellen ab, so wird das Netzwerk passiv, d.h. seine Kennlinie verläuft nun durch den Nullpunkt.

Abschalten einer Quelle bedeutet, sie durch ihren Innenwiderstand zu ersetzen. Bei der idealen Spannungsquelle ist der Innenwiderstand Null $U_q = 0$. Für die ideale Stromquelle ist der Innenwiderstand unendlich $I_q = 0$.

Die U_a - I_a -Kennlinie des passiven Netzwerkes durch den Nullpunkt entspricht der Kennlinie eines ohmschen Widerstandes. Dieser ohmsche Widerstand ist der **Ersatzwiderstand**, wenn bei **abgeschalteten Quellen** bei den Klemmen 1-1' in das Netzwerk hineingemessen wird. Dieser gemessene Widerstand wird dann gerade zum Widerstand R_e der Ersatzschaltung nach Thevenin oder nach Norton.

Beim Abschalten einer Quelle wird sie nicht einfach weggelassen, sondern durch ihren Innenwiderstand ersetzt. Beim Abschalten einer Quelle wird die ideale

Spannungsquelle durch einen Kurzschluss und die ideale Stromquelle durch einen Unterbruch ersetzt.

Damit stehen nun drei Experimente zur Verfügung, um die zwei Grössen U_{qe} und R_{qe} bzw. I_{qe} und R_{qe} der Ersatzschaltung zu bestimmen.

Von obigen drei Experimenten genügen zwei um die Ersatzschaltung zu bestimmen. Die drei Grössen U_{qe} , I_{qe} und R_{qe} sind voneinander abhängig.

$$U_{qe} = R_{qe} \cdot I_{qe} \quad (2.27)$$

Die beiden Ersatzschaltungen nach Thevenin und Norton sind vollständig gleichwertig. Mit obiger Gleichung kann eine Thevenin-Ersatzschaltung in einer Norton-Ersatzschaltung umgewandelt werden und umgekehrt.

Belastet eine Quelle (Ersatzschaltung eines linearen Netzwerkes) mit einem variablen Lastwiderstand, so werden folgende Bezeichnungen eingeführt: U_{qe} ist die Leerlaufspannung, R_{qe} ist der Innenwiderstand bzw. der Ersatzwiderstand, R_L ist der Lastwiderstand, U_a zwischen 1-1' ist die Klemmenspannung und I_a der Klemmestrom.

Fasst man I_a als unabhängige und U_a als abhängige Variable auf, so bezeichnet man die Funktion $U_a = f(I_a)$ und ihre graphische Darstellung als **Quellenkennlinie**. Die Schnittpunkte mit den Achsen sind der Leerlauf mit $U_{LL} = U_{qe}$ und der Kurzschluss I_{KS} .

$$U_a = U_{qe} - I_a \cdot R_{qe} \quad (2.28)$$

$$I_{KS} = \frac{U_{qe}}{R_{qe}} \quad R_{qe} = -\frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \quad (2.29)$$

Führt man für Quelle und Lastwiderstand je eine Kennlinie ein, so werden beim Zusammenschalten von Quelle und Lastwiderstand die beiden Kennlinien in ein gemeinsames Koordinatensystem gezeichnet. Den Schnittpunkt der beiden Kennlinien bezeichnet man als **Arbeitspunkt** (AP). Dieser Arbeitspunkt stellt sich dort ein, wo $U_{a1} = U_{a2}$ wird.

Gleichsetzen von U_{a1} und U_{a2} liefert Strom und Spannung des Arbeitspunktes

$$I_{AP} = \frac{U_{qe}}{R_{qe} + R_L} \quad U_{AP} = \frac{U_{qe} \cdot R_L}{R_{qe} + R_L} \quad (2.30)$$

2.2.8 Zusammenschalten von Quellen

Die Thevenin-Ersatzschaltung einer Quelle wird als "Thevenin-Quelle" bezeichnet, ebenso heisst nun die Norton-Ersatzschaltung einer Quelle "Norton-Quelle". Werden reale Quellen zusammengeschaltet, so bestimmt man mit den bekannten Methoden das Ersatznetzwerk (Thevenin oder Norton). Werden ideale Quellen parallel oder in Serie geschaltet, so sind folgende sechs Fälle zu unterscheiden.

den:

U-Quelle	parallel	U-Quelle	\Rightarrow Widerspruch
U-Quelle	in Serie	U-Quelle	\Rightarrow Addition der Spannungen
I-Quelle	in Serie	I-Quelle	\Rightarrow Widerspruch
I-Quelle	parallel	I-Quelle	\Rightarrow Addition der Ströme
I-Quelle	parallel	U-Quelle	\Rightarrow U-Quelle
I-Quelle	in Serie	U-Quelle	\Rightarrow I-Quelle

(2.31)

2.2.9 Verfügbare Quellenleistung und Leistungsanpassung

Eine Quelle wird mit einem variablen Lastwiderstand R_L belastet. Nun wird die an die Last abgegebene Leistung P_L berechnet.

$$I = \frac{U_q}{R_q + R_L} \quad P_L = I^2 \cdot R_L = \frac{U_q^2 \cdot R_L}{(R_q + R_L)^2} = f(R_L) \quad (2.32)$$

Für $R_L = 0$ (Kurzschluss) und $R_L = \infty$ (Leerlauf) wird $P_L = 0$. Dazwischen weist $P_L = f(R_L)$ ein Maximum auf. Mit Nullsetzen der Ableitung von $f(R_L)$ erhält man den Lastwiderstand für die maximale Leistung

$$\frac{df(R_L)}{dR_L} = 0 \Rightarrow R_L = R_q \quad (2.33)$$

Den Betriebszustand mit $R_L = R_q$ bezeichnet man als **Leistungsanpassung** und eine Quelle gibt ihre verfügbare Leistung an die Last ab. Setzt man $R_L = R_q$ ein,

$$P_L = I^2 \cdot R_L = \left(\frac{U_q}{R_q + R_L} \right)^2 \cdot R_L = \left(\frac{U_q}{R_q + R_q} \right)^2 \cdot R_q \quad (2.34)$$

so erhält man die maximale Leistung

$$P_{L,\max} = P_{AV} = \frac{U_q^2}{4 \cdot R_q} \quad (2.35)$$

Diese Leistung stellt das Maximum dar, welches die Quelle an Leistung abgeben kann. Man bezeichnet sie als **verfügbare Leistung** (available power). Man beachte, dass P_{AV} nicht vom Lastwiderstand abhängig ist und jeder Quelle zugeordnet werden kann.

Das Verhältnis P_L/P_{AV} in Funktion von R_L/R_q zeigt das Maximum die Leistungsanpassung. Für $R_q = 0$ und $R_q = \infty$ ist die verfügbare Leistung nicht definiert.

$$\frac{P_L}{P_{AV}} = \frac{\frac{U_q^2 \cdot R_L}{(R_q + R_L)^2}}{\frac{U_q^2}{4 \cdot R_q}} = \frac{4}{2 + \frac{R_q}{R_L} + \frac{R_L}{R_q}} = \frac{4}{2 + x + \frac{1}{x}} = \frac{4}{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2} \quad (2.36)$$

2.3 Analyse von Gleichstromkreisen

2.3.1 Anwendung von Knoten- und Maschensatz

Mit Hilfe von Knoten- und Maschensatz können Netzwerke gelöst werden. Bei der Anwendung erhält man Gleichungen, die dann mit geeigneten Methoden aufgelöst werden können.

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad \sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (2.37)$$

Um Knoten- und Maschensatz aufzustellen, führt man in Netzwerk zusätzliche Ströme ein. Die restlichen Ströme ergeben sich aus den Knotensatz.

2.3.2 Netzumwandlung

Meistens interessiert man sich in einem Netzwerk für eine bestimmte Spannung oder ein bestimmter Strom. Folgende Schritte können durchgeführt werden.

- Überflüssige Widerstände weglassen oder kurzschliessen.
- Widerstände bei Serie- oder Parallelschaltungen zusammenfassen.
- Punkte mit gleichem Potential können getrennt oder verbunden werden.
- Zusätzliche Einströmungen an Knoten anbringen, ohne Verletzung des Knotensatzes.
- Teile des Netzwerkes, oder ganzes Netzwerk durch Ersatzquellen ersetzen.
- Stern-Dreieck-Umwandlung.
- Weitere Äquivalenztransformationen (LC-Eintore).

2.3.3 Dreieck-Stern-Umwandlung

Hier handelt es sich um eine äquivalente Umwandlung eines 3-Pol-Netzwerkes (3 Anschlussklemmen).

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.38)$$

Auch die Rückumwandlung von der Sternschaltung in die Dreiecksschaltung ist möglich. Hier werden Leitwerte statt Widerstände verwendet.

$$G_A = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \quad G_B = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \quad G_C = \frac{G_1 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (2.39)$$

2.3.4 Spannungsquellen verdoppeln

In einem Netzwerk weisen zwei Punkte mit gleichem Potential gegenüber eines Bezugspunktes auf. Werden nun zwei **identische Spannungsquellen** an diese Punkte angeschlossen, so kann man die Verbindung zwischen dieser zwei Punkte weglassen. Die Widerstände im Netzwerk haben von dieser Umwandlung nichts bemerkt.

Jede Spannungsquelle hat nun einen Serienwiderstand und kann in eine **Norton-Quelle** verwandelt werden, damit lässt sich das Netzwerk weiter vereinfachen.

2.3.5 Stromquellen verdoppeln

Eine Brücke wird mit einer idealen Stromquelle gespeist. Die Stromquelle wird nun verdoppelt und einem Knoten wird der Strom zugeführt und wieder weggeführt. Die Widerstände bemerken nichts von der Umwandlung und die Einstromungsverhältnisse an den Knoten sind unverändert.

Dank der Umwandlung besitzt jede Stromquelle einen Parallelwiderstand und könnte in eine **Thevenin-Quelle** verwandelt werden.

2.3.6 Ersatzquellen einführen

Hier handelt es sich um die wirksamste Methode. Ein Strom durch einen Widerstand ist gesucht, alle anderen Spannungen und Ströme sind nicht gefragt. Das Netzwerk wird so weit wie möglich vereinfacht, nur die Verhältnisse beim Widerstand dürfen sich nicht ändern. Der Widerstand wird mit einer Umrandung versehen. Das Netzwerk ausserhalb dieser Umrandung wird jetzt in mehreren Schritten vereinfacht. Im ersten Schritt verdoppelt man die Spannungsquelle.

Einführen von zwei zusätzliche Klemmen und Umzeichen der Quelle. Blickt man von den Klemmen so kann das linke und das rechte Netzwerk mit einer Ersatzquelle ersetzt werden. Die Ersatzgrössen U_{qe_k} , R_{qe_k} , I_{qe_k} können bestimmt werden.

2.3.7 Überlagerungssatz (Superposition)

Überlagerung bedeutet, jede Ursache (fliessende Ströme I_k , Spannungsquellen U_k) wirkt einzeln im Netzwerk. Die Gesamtwirkung erhält man durch Addition der einzelnen Wirkungen. Die Methoden macht nur Sinn, wenn mehrere Quellen beteiligt sind.

Dabei gelten Konventionen: Erster Index ist der Ort, wo der Ursache gemessen wird. Zweiter Index ist der Ort, wo die Ursache wirkt. So gilt U_{xy} die Spannung U_x verursacht durch die Ursache U_y