Kapitel 1

Einführung

1.1 Physikalische Grössen

1.1.1 Zahlwert und Einheit

Eine physikalische Grösse beinhaltet eine Zahl und eine Einheit. Beinhaltet eine physikalische Grösse einen grossen Zahlenwert, so kann man diese als ein Vielfaches dieser Einheit ausdrücken. Die Dimension gibt Auskunft auf eine detaillierte Charakterisierung der Grösse wie die Höhe, der Abstand der die Strecke mit Einheit Meter.

1.1.2 Grundeinheiten und abgeleitete Einheiten

Die Grundeinheiten besteht aus sieben Grundeinheiten: **Länge** (Meter m), **Masse** (Kilogramm kg), Zeit (Sekunde s), **Stromstärke** (Ampere A), **Temperatur** (Kelvin K), **Stoffmenge** (Mol mol) und **Lichtstärke** (Candela cd).

Die abgeleitete Einheiten entstehen durch Beziehungen zwischen der Grundeinheiten wie die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung.

Werden Gleichungen mit den Grundeinheiten gerechnet, so wird das Resultat auch in einer Grundeinheit ausgedrückt. Das Ziel besteht auch darin, Resultate mit Hilfe von Zehnerpotenzen zu schreiben.

Grösse	Zeichen	Name	Symbol
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I, i	Ampere	A

Tab. 1.1: Grundeinheiten

Grösse	Zeichen	Name	Symbol	Ausdruck
Kraft	F	Newton	N	$\mathrm{N} = \mathrm{m\,kg\,s^{-2}}$
Leistung	P	Watt	W	$\mathrm{W} = \mathrm{V\,A} = \mathrm{N\,m\,s^{-1}}$
Arbeit, Energie	W	Joule	J	$\mathrm{J} = \mathrm{W\,s} = \mathrm{N\,m}$
Spannung	U, u	Volt	V	$\mathrm{V} = \mathrm{W\,A^{-1}}$
Widerstand	R	Ohm	Ω	$\Omega = \mathrm{V\,A^{-1}}$
Spezifischer Widerstand	ρ		$\Omega\,\mathrm{m}$	$\Omega\,\mathrm{m} = \mathrm{V\,m\,A^{-1}}$
Leitwert	G	Siemens	S	$\mathrm{S} = \Omega^{-1}$
Spezifische Leitfähigkeit	σ		$\mathrm{S\,m^{-1}}$	$\mathrm{S\,m^{-1}} = \Omega^{-1}\,\mathrm{m^{-1}}$
Ladung	Q	Coulomb	C	$\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$
Elektr. Verschiebungsdichte	D		$\mathrm{A\,s\,m^{2}}$	$\mathrm{C\,m^{-2}} = \mathrm{A\,s\,m^{-2}}$
Elektr. Feldstärke	E		$\mathrm{V\,m^{-1}}$	
Kapazität	C	Farad	F	$\mathrm{F} = \mathrm{A\,s\,V^{-1}} = \mathrm{s}\,\Omega^{-1}$
Induktionsfluss	ϕ	Weber	Wb	$\mathrm{Wb} = \mathrm{V\,s}$
Magn. Induktionsdichte	B	Tesla	T	$\mathrm{T} = \mathrm{V\,s\,m^{-2}}$
Magn. Feldstärke	H		$\mathrm{A\,m^{-1}}$	
Induktivität	L	Henry	H	$\mathrm{H} = \mathrm{V\,s\,A^{-1}} = \Omega\,\mathrm{s}$

Tab. 1.2: Abgeleitete Einheiten

Definition	Wert
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c_0 = 299'792'458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Elementarladung	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Ruhemasse Elektron	$m_0 = 9.1096 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse Proton	$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Permeabilität im Vakuum	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Permittivität im Vakuum	$\epsilon_0 = c_0^{-2}\mu_0^{-1} = 8.85419 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Wellenimpendanz des freien Raumes	$\nu_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.73\,\Omega$

Tab. 1.3: Universelle Konstanten

1.1.3 Skalare und vektorielle Grössen

Zahlenwerte mit Einheiten bezeichnet man als skalare Grössen. Zahlenwerte mit Enheiten, die in einer bestimmten Richtung des Raumes wirken bezeichnet man als vektorielle Grössen und haben einen Vektorpfeil über das Symbol und ihr Betrag ist die Länge des Vektors.

1.2 Elektrizität und ihre Wirkungen

1.2.1 Elektrische Ladung und elektrischer Strom

Die elektrische Ladung Q ist eine physikalische Grösse und benötigt einen Träger. Der Raum befindet sich in einem elektrischen Feld. Körper, die eine elektrische Ladung tragen, üben eine Kraftwirkung aufeinander aus.

Elektrische Ladungen könenn sich dabei anziehen oder abstossen. Man unterscheidet zwischen positiver und negativer Ladung. Gleichnamige Ladungen stossen sich ab, während ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Elektrizität entsteht durch Trennen von Ladungen verschiedenen Vorzeichens.

Im elektrischen neutralen Zustand heben sich die Wirkungen positiver und negativer Ladungen gegenseitig auf. Elektrische Ladungen lassen sich durch Berührung übertragen. Die Elektrizität besteht aus Elektronen.

Elektrizitätsträger können sich je nach Material übertragen. Ladungsträger bewegen sich in einem Leitungsstrom bzw. elektrischen Strom. Dieser elektrischen Strom ist das Verhältnis der elektrischen Ladung pro Zeit.

$$\boxed{I = \frac{Q}{t}} \tag{1.1}$$

Bewegte Ladungen haben thermische (Leiter erwärmt sich bis zum Schmelztemperatur), magnetische (Kräfte entstehen durch Magnete auf Leiter) und chemische Wirkungen (Durch Stromvorgang werden Stoffe verändert).

1.2.2 Aufbau der Materie

Moleküle können in Atome aufgeteilt werden. Um den positiven Atomkern kreisen die negativ geladenen Elektronen. Diese Elektronen bilden die Elektronenhülle, welche Elektronen durch ihre Energie zu Gruppen (Elektronenschalen) aufgeteilt werden. Ein Elektron kann sich nur auf eine Quantenbahn aufhalten. Ein Atom ist elektrisch neutral. Die Elektronen in der äusseren Schale sind Valenzelektronen und bestimmen das chemische Verhalten des Atoms.

Das Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen bzw. aus Nukleonen. Neutronen sind für die Kernspaltung von grösser Bedeutung. Die Beeinflussung der Elektronenhülle erfolgt durch Ionisierungsenergie und bildet Ionen durch Elektronenabgabe oder -zugabe. Ein Ion ist ein elektrisch geladenes Atom.

1.2.3 Leiter und Nichtteiler

Materialien werden in Leiter und Nichtteiler unterteilt. Zu den Leiter zählen die Metalle, aber verändern nicht das Material durch Stromdurchgang. Säuren, Basen und Salzlösungen werden beim Stromdurchgang verändert.

Zu den Nichtleiter zählen Gummi, Seide, Kunststoffe, Porzellan, Glas, Glimmer, usw. In diesen Stoffen stehen nahezu keine Elektronen zur Verfügung.

Kapitel 2

Grundbegriffe und Grundgesetze

2.1 Spannung, Strom und Widerstand

2.1.1 Kraft zwischen Punktladungen

Massen zeihen sich durch Gravitation an. Der Betrag der Anziehungskraft zwischen zwei punktförmigen Massen m_1 und m_2 im Abstand d ist

$$\boxed{F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^3}} \tag{2.1}$$

Geladene Körper üben zusätzliche Kräfte aus. Diese Kräfte werden Coulombsche Kräfte genannt, wobei sich Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstossen und mit unterschiedlichen Vorzeichen anziehen.

Das Coulombsche Kraftgesetz für zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 mit Permittivität des Mediums ϵ lautet

$$\boxed{F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}} \tag{2.2}$$

2.1.2 Das Feld

Der Betrag der Kraft nimmt quadratisch mit dem Abstand ab. Jede Ladung verändert in ihrer Umgebung den Zustand des Raumes derart, dass auf andere Ladungen Kraftwirkungen ausgeübt werden. Dieser Zustand des Raumes bezeichnet man als **elektrisches Feld**. Das elektrische Feld wird in jedem Raumpunkt durch einen Vektor $\overrightarrow{E}$ beschrieben, der in Richtung der Kraftweist, die das elektrische Feld auf eine positive Probeladung q_2 ausübt.

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q_2}} \tag{2.3}$$

Setzt man das **Coulombsche Kraftgesetz** für die Feldstärke ein, so erhält man für die elektrische Feldstärke derPunktladung Q_1, wobei $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}$ und r der Abstand vom Q_1. Im Feldmodell ist eine Punktladung Q von einem elektrischen Feld E umgeben, das den ganzen Raum durchdringt.

$$\boxed{\vec{E}\,(\vec{r}) = \vec{e}_r \cdot \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r^2}} \tag{2.4}$$

Stellt man Kräfte auf Ladungen fest, so ist die Ursache ein **elektrisches Feld**. Stellt man Kräfte auf Massen fest, so ist die Ursache ein **Gravitationsfeld**.

Durch Feldlinien werden elektrische Felder dargestellt. Diese geben in jedem Raumpunkt die Richtung des Feldvektors an. Solche Feldbilder vermitteln einen anschaulichen Überblick über den Verlauf des Feldes.

2.1.3 Arbeit im Feld, Spannung und Potential

Für die Verschiebung von Massen im Gravitationsfeld (i.d.R. Potentialfeld) benötigt man Arbeit. Die zu leistende Arbeit von einem Punkt A nach B ist nicht vom Weg abhängig, sondern nur von der Höhendifferenz zwischen A und B.

$$\boxed{W_{AB} = \int_{P_A}^{P_B} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = q \cdot \underbrace{\int_{P_A}^{P_B} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{s}}_{U_{AB}}} \tag{2.5}$$

Diese wegunabhängige Arbeit führt zu der Definition der **elektrischen Spannung**, nämlich Arbeit pro Ladung.

$$\boxed{U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q}} \tag{2.6}$$

Für die Spannung U_{AB} wird ein gerichteter Spannungspfeil eingetragen. Der Pfeil erinnert an das Wegintegral für die Arbeit. So ist die Spannung U_{AB} der von A nach B zeigt.

Mit der Spannung wird das elektrische Potential eingeführt. Die Spannung wird durch zwei Punkte angegeben, das Potential hingegen wird einem Punkt im Raum zugeordnet. Für die Einführung des Potentials wird ein Punkt im Raum zum sogenannten **Potentialnullpunkt** bzw. **Bezugspunkt** erklärt und von diesem Punkt wird die Spannung gemessen. Die Wahl des Bezugspunktes mit $V = 0$ ist willkürlich. Für den Zusammenhang zwischen Spannung und Potential gilt folgende **Potentialdifferenz**, wobei Potential und Spannung dieselbe Einheit Volt ($[U] = [V] = V$) haben.

$$\boxed{\begin{aligned} U_{AB} = V_A - V_B \quad &= -\int_{P_0}^{P_A} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{s} + \int_{P_0}^{P_B} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_{P_A}^{P_0} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{s} + \int_{P_0}^{P_B} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{P_A}^{P_B} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{s} \end{aligned}} \tag{2.7}$$

Liegt eine Ladung q im Punkt P, der das Potential $V(P)$ aufweist, so ergibt folgendes Produkt die potentielle Energie der Ladung gegenüber dem Potentialnullpunkt

$$\boxed{E_{\text{pot}} = q \cdot V(P)} \tag{2.8}$$

2.1.4 Strom

Die Bewegung von elektrischen Ladungsträgern ist der **elektrische Strom** bzw. **Ladungsfluss** von Ladungsträger. Die Richtung eines positiven Stromes ist so definiert, dass er von der Elektrode höheren Potentials zur Elektrode niedrigeren Potenttials fliesst. Innerhalb der leitenden Verbindung hat er die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke. In einem Leiter, durch dessen Querschnitt die Ladung $Q = n \cdot e$ in der Zeit t hindurchtritt, ist die Stromstärke I definiert als

$$\boxed{I = \frac{Q}{t}} \tag{2.9}$$

Einen solchen zeitlich konstanten Strom nennt man **Gleichstrom**. Einheit der elektrischen Stromstärke ist das Ampere ($[I] = \mathrm{A}$). Bezogen auf die Fläche A, durch die Strom tritt, ist ferner die **Stromdichte**

$$\boxed{J = \frac{I}{A}} \tag{2.10}$$

Die nicht zeitlich konstanter elektrische Stromstärke ist definiert als die **momentane Stromstärke** bei einem beliebigen Zeitpunkt t

$$\boxed{i(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}} \tag{2.11}$$

Man ordnet dem elektrischen Strom eine positive Zählrichtung zu, welche der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger im Leiter entsprechen würde, also vom Pluspol zum Minuspol, und kennzeichnet diese positive Zählrichtung durch einen entsprechenden Zählpfeil.

Die positive Zählpfeilrichtung des Stromes ist ausserhalb einer Energiequelle vom Pluspol zum Minuspol festgelegt und entspricht der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger.

2.1.5 Widerstand

Jeder Leiter setzt dem Stromfluss einen elektrischen Widerstand entgegen. Hat ein Verbraucher zwei Anschlussklemmen so bildet er einen **Zweipol**. Schliesst man eine Spannung U an die Zweiklemmen so wird ein Strom I durch den Zweipol fliessen. Je grösser der Strom desto grösser die Spannung. Den Widerstand eines Zweipols bezeichnet man als linear und heisst **ohmsches Gesetz**

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{1}{G}} \tag{2.12}$$

So ist R der elektrische Widerstand und G der elektrische Leitwert des Zweipols, wobei beide konstant sind. Sind R und G nicht konstant, so sind beide strom- und spannungsabhängig. Die Strom-Spannungskennlinie verläuft nichtlinear. Der Quotient $u/i = f(i)$ ergibt einen nichtlinearen Widerstand und man erhält einen **differentiellen Widerstand**.

$$\boxed{r = \frac{\triangle u}{\triangle i} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}} \tag{2.13}$$

Die Einheit des Widerstandes ist das Ohm (Ω) und die Einheit des elektrischen Leitwerts ist das Siemens (S) oder $\left(\Omega^{-1}\right)$.

2.1.6 Spezifische Leitfähigkeit und spezifischer Widerstand

Der elektrische Widerstand ist eine **Materialgrösse**, d.h. $R \approx l/A$. Für einen linearen Leiter der Länge l mit dem überall gleichen Querschnitt A erhält man

$$\boxed{R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{l}{\sigma \cdot A}} \tag{2.14}$$

So ist ρ mit Einheit $([\rho] = \Omega\,\mathrm{m})$ der spazifische Widerstand und σ mit Einheit $\left([\sigma] = \mathrm{S\,m^{-1}} = \Omega^{-1}\,\mathrm{m^{-1}}\right)$ der spezifische Leitwert oder die Leitfähigkeit des Leitermaterials.

Häufigste Leitwerkstoffe sind Kupfer und Aluminium. Für Kontakte werden Gold, Silber und Wolfram eingesetzt und für Heizleiter Chromnickel. Für Messwiderstände werden Manganin und Konstatan wegen ihrer thermischen Eigenschaften verwendet. Der elektrische Widerstand eines Leiters ist temperaturabhängig $R = f(\theta)$.

Die nichtlineare Temperaturen wird für den unteren Bereich bis 200° C mit folgendem Ansatz linearisiert, wobei R_{20} der Widerstandswert bei 20° C, R_W der Widerstandswert bei der Temperatur θ_W, θ_W die Temperatur des Widerstandes in $^\circ$ C und α_{20} der Temperaturkoeffizient in $1/^\circ$ C

$$\boxed{R_\mathrm{W} = R_{20} \cdot \left[1 + \alpha_{20} \cdot (\theta_W - 20^\circ\,\mathrm{C})\right]} \tag{2.15}$$

Für höhere Temperaturen ab 200° C wird zusätzlich noch ein quadratischer Term in der Näherung eingefügt, wobei β_{20} der Temperaturkoeffizient in $(1/^\circ\,\mathrm{C})^2$

$$\boxed{R_\mathrm{W} = R_{20} \cdot \left[1 + \alpha_{20} \cdot (\theta_W - 20^\circ\,\mathrm{C}) + \beta_{20} \cdot (\theta_W - 20^\circ\,\mathrm{C})^2\right]} \tag{2.16}$$

Somit sind α_{20} und β_{20} temperaturabhängig. Die meisten häufig eingesetzten Metalle haben einen Temperaturbeiwert in der Nähe von $\alpha = 0.004\,\mathrm{K}^{-1}$. Widerstände ändern bei einer Temperaturänderung um je $1\,\mathrm{K}$ ihren Wert um etwa $0.4\,\%$.

Material	Typ	σ / $\Omega^{-1}\mathbf{m}^{-1}$
Quarz	Isolator	$\approx 10^{-17}$
Silikonöl	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Mica	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Paraffin	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Hartgummi	Isolator	$\approx 10^{-15}$
Porzellan	Isolator	$\approx 10^{-14}$
Glas	Isolator	$\approx 10^{-12}$
Bakelit	Isolator	$\approx 10^{-9}$
Destilliertes Wasser	Isolator	$\approx 10^{-4}$
Sandige Erde, trocken	schlechter Isolator	$\approx 10^{-3}$
Feuchte Erde	schlechter Isolator	$\approx 10^{-2}$
Frischwasser	schlechter Isolator	$\approx 10^{-2}$
Tierisches Fett	schlechter Isolator	$\approx 4 \cdot 10^{-2}$
Tierischer Muskel	schlechter Leiter	0.4
Tierisches Blut	schlechter Leiter	0.7
Germanium (rein)	Halbleiter	≈ 2
Meerwasser	Leiter	≈ 4
Tellur	Leiter	$\approx 5 \cdot 10^{2}$
Kohle	Leiter	$\approx 3 \cdot 10^{4}$
Graphit	Leiter	$\approx 10^{5}$
Gusseisen	Leiter	$\approx 10^{6}$
Quecksilber	Leiter	$\approx 10^{6}$
Chromnickel	Leiter	$\approx 10^{6}$
Konstantan	Leiter	$\approx 2 \cdot 10^{6}$
Blei	Leiter	$\approx 5 \cdot 10^{6}$
Zinn	Leiter	$\approx 9 \cdot 10^{6}$
Bronze	Leiter	$\approx 10^{7}$
Messing	Leiter	$\approx 1.1 \cdot 10^{7}$
Zink	Leiter	$\approx 1.7 \cdot 10^{7}$
Wolfram	Leiter	$\approx 1.8 \cdot 10^{7}$
Aluminium	Leiter	$\approx 3.0 \cdot 10^{7}$
Aluminium hartgezogen	Leiter	$\approx 3.5 \cdot 10^{7}$
Gold	Leiter	$\approx 4.5 \cdot 10^{7}$
Kupfer	Leiter	$\approx 5.7 \cdot 10^{7}$
Silber	Leiter	$\approx 6.1 \cdot 10^{7}$
Nb3(Al-Ge)	Supraleiter	∞

Tab. 2.1: Übersicht der Leitfähigkeiten

Material	σ / $\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$	α_{20} / K^{-1}	β_{20} / K^{-2}
Silber	$6.1 \cdot 10^7$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$5.7 \cdot 10^7$	$(3.9 \ldots 4.3) \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$
Gold	$4.5 \cdot 10^7$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$(3.3 \ldots 3.6) \cdot 10^7$	$(4.2 \ldots 5.0) \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$
Zink	$1.65 \cdot 10^7$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Wolfram	$1.82 \cdot 10^7$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Messing	$(1.1 \ldots 1.59) \cdot 10^7$	$(1.5 \ldots 4.0) \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
Nickel	$(1.0 \ldots 1.5) \cdot 10^7$	$(3.7 \ldots 6.0) \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$
Platin	$1.02 \cdot 10^7$	$(2 \ldots 3) \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$
Zinn	$0.83 \cdot 10^7$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-6}$
Manganin	$0.232 \cdot 10^7$	$0.01 \cdot 10^{-3}$	–
Konstatan	$0.2 \cdot 10^7$	$0.01 \cdot 10^{-3}$	–
Novokonstant	$0.22 \cdot 10^7$	$-0.01 \cdot 10^{-3}$	–

Tab. 2.2: Leitfähigkeiten und Temperaturbeiwerte

Die **Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes** wird von verschiedenen Faktoren beeinflusst. Betrachte man zunächst die Metalle mit ihrem relativ regelmässigen Gitteraufbau. Die Beweglichkeit der freien Elektronen ist abhängig von der mittleren freien Weglänge zwischen zwei Zusammenstössen. Der Wert für die Beweglichkeit wird geringer mit abnehmender freier Weglänge. In Abhängigkeit von der Temperatur schwingen die Atome um ihre feste Gleichgewichtslage und zwar umso mehr, je höher die Temperatur wird.

Die Wahrscheinlichkeit der Stösse nehmen durch steigender Temperatur zu, die mittlere freie Weglänge wird kürzer und der spezifische Widerstand steigt an. Der Temperaturkoeffizient α ist daher positiv und liegt bei allen reinen Metallen in ähnlicher Grossenanordnung.

Bei **Legierungen** führt der unregelmässige Gitteraufbau zu einer erhöhten Wahrscheinlichkeit für Zusammenstösse der Elektronen mit den Gitteratomen. Der spezifische Widerstand ist bei Legierungen daher wesentlicher grösser. Gleichzeitig spielt der Einfluss der thermischen Gitterschwingungen auf die Anzahl der Zusammenstösse nur noch eine untergeordnete Rolle, so dass der Temperaturkoeffizient deutlich geringer ist. Solche Legierungen werden bevorzugt benutzt zur Herstellung temperaturabhängiger Präzisionswiderstände.

Bei **Halbleitern** nimmt die Beweglichkeit μ_e der freien Ladungsträger mit steigender Temperatur zwar ebenfalls ab, ihre Zahl pro Volumen steigt aber an, so dass die Leitfähigkeit dennoch zunimmt und der Temperaturkoeffizient einen negativen Zahlenwert besitzt.

2.1.7 Praktische Ausführungsformen von Widerstände

Neben dem Widerstandswert sind insbesondere die Herstellungstoleranz, die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes, die maximal zulässige Verlustleistung, die Kurzzeitbelastung oder der Dauerbetrieb von besonderer Bedeutung.

Festwiderstände

Die **Festwiderstände** haben eine lineare Widerstandscharakteristik und genügen dem Ohm'schen Gesetz. Die Abstufung der Widerstandtswerte entspricht den in den Normen festgelegtem E-Reihen. Die spezielle Kennzeichnung einer E-Reihe durch den betreffenden Zahlenwert gibt an, wie viele Werte innerhalb jeder Dekade liegen. Festwiderstände werden als **Schicht-**, **Draht-** oder **Massewiderstände** hergestellt.

Bei den **Schichtwiderständen** wird eine dünne Widerstandsschicht aus Kohle oder Metall auf einen zylindrischen Träger aus Keramik oder Glas aufgebracht. An den Enden werden Kappen aufgepresst und mit den Anschlüssen versehen. Zum Schutz wird das Bauelement mit einer Schicht aus Lack oder Kunststoff überzogen. Zur Herstellung grösserer Widerstandswerte wird die dünne Metall- oder Kohleschicht gewendelt ausgeführt.

Bei höheren Leistungen werden **Drahtwiderstände** eingesetzt, bei denen der Träger mit einem Draht umwickelt wird. Kleine Widerstandswerte können auf diese Weise leicht hergestellt werden, bei grösseren Werten wird spezieller Widerstandsdraht verwendet. Der Drahtquerschnitt begrenzt den maximal zulässigen Strom und die maximale Verlustleistung wird durch die Wärmeabfuhr, d.h. die Bauteilgrösse und die Ausführung der Oberfläche bestimmt. Zur Reduzierung parasitären Induktivitäten werden die Wicklungen **bifilar** ausgeführt, d.h. es werden zwei Drähte so nebeneinander gewickelt, dass sie in entgegengesetzter Richtung vom Strom durchflossen werden. Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung der parasitären Induktivitäten besteht darin, den Wickelsinn mehrfach umzudrehen.

Die **Massenwiderstände** besitzen keinen Träger, sondern bestehen insgesamt aus einem Widerstandsmaterial. Sie werden in verschiedenen Bauformen, bpsw. als Stäbe oder Scheiben, hergestellt.

Einstellbare Widerstände

Bei einstellbaren Widerständen wird ein Schleifkontakt über das nicht isolierte Widerstandsmaterial bewegt. Bei einem **Schiebewiderstand** ist der Wickelkörper linear gestreckt, bei einem **Drehwiderstand** dagegen ringförmig ausgeführt. Üblichwerweise spricht man bei diesen Bauelementen von **Potentiometern**, wenn sie im Betrieb immer wieder neu eingestellt werden, bzw. von **Trimmpotentiometern**, wenn sie nur einmal, zum Abgleich einer Schaltung auf einen bestimmten Wert justiert werden.

2.1.8 Weitere Widerstände

Für besondere Aufgaben gibt es eine grosse Gruppe von nichtlinearen Widerständen, deren Verhalten von unterschiedlichen physikalischen Grössen abhängen kann.

Zu der **temperaturabhängigen Widerstände** gehören die **Heissleiter**, deren

Widerstand mit steigender Temperatur kleiner wird. Sie werden als **NTC** (negative temperature coefficient) bezeichnet. Diese Bauelemente besitzen bei Raumtemperatur einen grosseren Widerstand und begrenzen beim Einschalten eines elektronischen Gerätes dessen Einschaltstrom. Infolge der ohmschen Verluste werden sie stark aufgeheizt, wodurch ihr Widerstand sehr viel kleiner wird. Im Dauerbetrieb einer Schaltung verursachen sie dann lediglich geringe Verluste. Das temperaturabhängige Verhalten ist bei den als **PTC** (positive temperature coefficient) bezeichneten **Kaltleitern** genau umgekehrt.

Widerstände, deren Wert von der Spannung abhängt, werden als **VDR** (voltage dependent resistor) bezeichnet. Sie werden zur Spannungsstabilisierung oder zur Unterdrückung von kurzzeitigen Spannungsspitzen eingesetzt.

Eine weitere Gruppe sind die als **LDR** (light dependent resistor) bezeichneten lichtabhängigen Widerstände, die für Belichtungsmesse oder bei helligkeitsabhängigen Steuerungen verwendet werden.

2.2 Der einfache Gleichstromkreis

2.2.1 Definitionen

Unter einem **Zweipol** versteht man ein Bauelement mit zwei Anschlussklemmen. Für die Behandlung von Zweipolen in den Netzwerken ist nur noch ihr **Klemmenverhalten**, also der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am betreffenden Bauelement, von Interesse, die praktische Realisierung durch eine dreidimensionale Anordnung und die ortsabhängige Verteilung der Feldgrössen spielen keine Rolle mehr. Die Beschreibung erfolgt durch einfache skalare Beziehungen zwischen den an den Klemmen zugänglichen Grössen Strom und Spannung.

Durch die Zusammenschaltung von Bauelementen entstehen **elektrische Netzwerke**. Zur vollständigen Beschreibung eines Netzwerks muss neben dem Klemmenverhalten aller Komponenten auch die Verknüpfung der Bauelemente untereinander bekannt sein. Die Zusammenschaltung bezeichnet man als **Topologie**.

Die grafische Darstellung von Netzwerken bezeichnet man als **Schaltbilder**. zur Darstellung der Bauelemente werden die Schaltsymbole verwendet. Die leitende Verbindung zwischen den Bauelementen wird als idealer Leiter angesehen und spielt bei der Schaltungsanalyse keine Rolle. Die einzelnen Verbindungen sollten möglichst geradlinig, kreuzungsfrei und ohne Richtungsänderungen dargestellt werden. Gleichzeitig sollte die Wirkungsrichtung bzw. die Signalflussrichtung den Normen entsprechend von links nach rechts oder von oben nach unten verlaufen.

2.2.2 Zählpfeile und Zählpfeilrichtungen

Zählpfeile oder **Bezugspfeile** geben an, mit welchem Vorzeichen die einzelnen Strom- und Spannungsgrössen in die Netzwerkgleichungen eingehen. Zählpfeile können skalare Grössen zugeordnet werden.

Der **Richtungssinn für den Strom** wird in Übereinstimmung mit der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger festgelegt. Der Bezugspfile wird in den Leitungszug gezeichnet. Er kann mit dem Richtungssinn der Stromstärke übereinstimmen oder ihm entgegengerichtet sein.

Der **Bezugssinn einer Spannung** zwischen zwei Punkten kann durch die Bezeichnung dieser Punkte angegeben werden. Bei Verwendung eines Bezugspfeils kann der Doppelindex auch entfallen.

$$\boxed{U_A = U_{12} = V_1 - V_2} \quad \boxed{U_A = U_{21} = V_2 - V_1} \tag{2.17}$$

An einem allgemeinen Zweipol (Eintor) kann man die Bezugsrichtungen durch das Verbraucherzählpfeilsystem (VZS) oder durch das Erzeugerzählpfeilsystem (EZS).

Handelt es sich beim Eintor um einen **Verbraucher**, so wird das Produkt UI beim VZS positiv und beim EZS negativ. Ist das Eintor aber eine **Quelle**, so wird das Produkt UI beim VZS negativ und beim EZS positiv.

An jedem Eintor können die Bezugspfeile für I und U beliebig gewählt werden. Häufig wird bei einer Quelle das EZS und bei einem Verbraucher das VZS angewendet. Man spricht dabei von einem gemischten System.

2.2.3 Spannungs- und Stromquellen

Von einer **idealen Gleichspannungsquelle** wird jedoch erwartet, dass sie die Spannung unabhängig von dem Belastungswiderstand zeitlich konstant hält. Eine Batterie bzw. ein Akkumulator mit hinreichend grosser Energiereserve kommt dieser Situation schon sehr nahe. Mit elektronischen Schaltungen, die die vom 230V-Netz angebotene Energie in eine Gleichspannung umwandeln, lassen sich nahezu ideale Spannungsquellen realisieren.

Für eine **ideale Spannungsquelle** gilt

(i) die Ausgangsspannung ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk.

(ii) der Strom hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich z.B. im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $I = U/R$ ein.

Für eine **ideale Stromquelle** gilt

(i) der Ausgangsstrom ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk.

(ii) die Ausgangsspannung hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $U = RI$ ein.

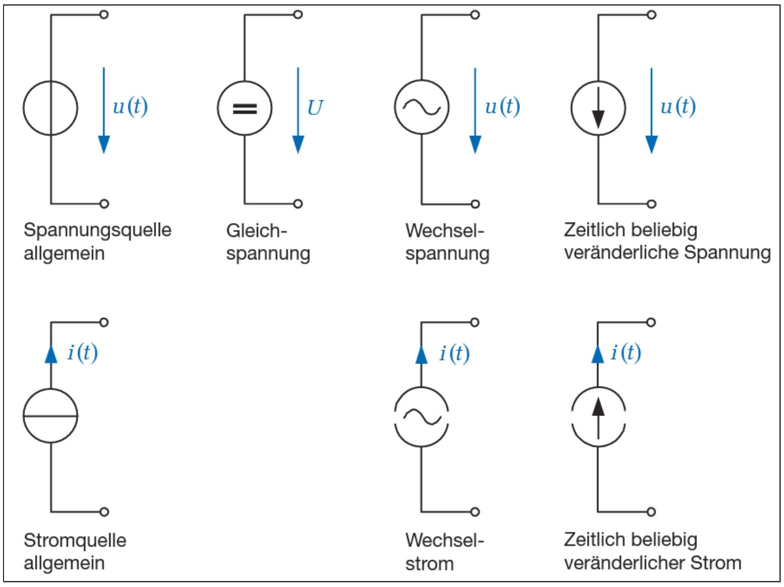

Abb. 2.1: Ideale Spannungs- und Stromquellen.

2.2.4 Elemente von Stromkreisen

Zur Darstellung von Stromkreisen oder Netzwerken werden Symbole, Schaltzeichen und Konvenktionen benützt. Folgende Eintore bzw. Bauelemente werden verwendet: Spannungsquelle U_q, Stromquelle I_q und Widerstand R. Diese Bauelemente stellen ein idealisiertes Verhalten dar und haben folgende Eigenschaften

- Die ideale Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung bei beliebigem Strom
- Die ideale Stromquelle liefert einen konstanten Strom bei beliebiger Spannung
- Der Widerstand ist linear und konstant

Werden die verwendeten Schaltzeichen (Eintore) mit Zählpfeilen versehen, so kann wahlweise mit dem VZS oder EZS gearbeitet werden. Besitzt ein Netzwerk Eingangsklemmen und Ausgangsklemmen, so bezeichnet man dieses als Zweitor.

Ein- und Zweitore werden eingeteilt in **passive**, **verlustlose** und **aktive** Ein- und Zweitore. Dabei muss noch zwischen aktivem n-Tor und **aktiv wirkenden** n-Tor unterschieden werden. Ein- und Zweitore können in verschiedenen **Betriebszuständen** betrieben werden. So kann ein aktives Eintor auch einen Betriebszustand aufweisen, wo es passiv wirkt, also Leistung aufnimmt.

Passiver Betriebszustand: Das n-Tor nimmt in diesdem Betriebszustand mehr Leistung auf wie es abgibt.

Verlustloser Betriebszustand: Das n-Tor nimmt in diesdem Betriebszustand gleichviel Leistung auf wie es abgibt.

Aktiver Betriebszustand: Das n-Tor nimmt in diesdem Betriebszustand mehr Leistung ab wie es aufnimmt.

	Passiv	Verlustlos	Aktiv	Kommentar
Passives n-Tor	Normal	Möglich	Nicht möglich	keine Quellen
Verlustloses n-Tor	Nicht	Normal	Nicht möglich	nur verlustlose Elemente
Aktives n-Tor	Möglich	Möglich	Möglich	muss Quellen haben

Tab. 2.3: Allgemeines n-Tor aufverschiedene Betriebszustände

Ein eletrisches Netzwerk aus Eintore und Zweitore wird auf der Ebene projiziert bzw. dargestellt. Die Schaltung enthält die eben eingeführten Schaltzeichen, die idealisierte Bauelemente verkörpern.

Die einzelne Elemente sind durch **Linien** miteinander verbunden. Diese Verbindungslinien sind widerstandslos und ohne jede andere Wirkung des elektrischen Stromes anzusehen.

In den **Knoten** sollen mindestens 3 Verbindungsleitungen zusammentreffen. Ein **Zweig** verbindet zwei Knoten

Unter einer **Masche** versteht man einen in sich geschlossenen Kettenzug bzw. Ringschaltung von Zweigen und Knoten. Geht man von irgend einem Knoten aus, so durchwandert man eine Masche, wenn man, ohne irgend einen Zweig mehrfach zu durchlaufen, zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

2.2.5 Zählpfeilsysteme

Ein Zählpfeilsystem am ohmschen Widerstand bei dem Strom und Spannung gleich gerichtet sind heisst **Verbraucherzählpfeilsystem**. Für $U > 0$ wird der in die positive Anschlussklemme hineinfliessende Strom positiv gezählt.

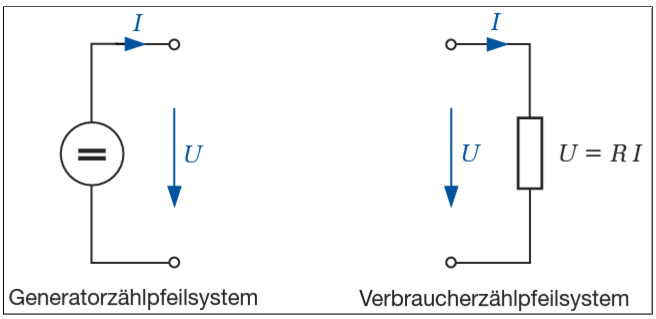

Abb. 2.2: Generator- und Verbraucherzählpfeilsystem.

Für die Quellen verwendet man üblichwerweise das **Generatorzählpfeilsystem**, bei dem Spannung und Strom entgegengesetzt gerichtet sind. Der aus der positiven Anschlussklemme herausfliessende Strom wird positiv gezählt. Diese Festlegung ist angepasst an den physikalischen Hintergrund, dass der Generator (Quelle) die Energie liefert, während der Verbraucher die Energie aufnimmt.

2.2.6 Das ohmsche Gesetz

In einem linearen Leiter sind Strom und Spannung zueinander proportional. Bei einem linearen Leiter ist der ihn durchfliessenden Strom der angelegten Spannung proportional und dem Leiterwiderstand gegenüber umgekehrt proportional.

$$\boxed{I(U) = \frac{U}{R} = U \cdot G} \tag{2.18}$$

Das **ohmsche Gesetz** ist ein Grundgesetz des elektrischen Stromes in Leitern. Als ohmschen Widerstand bezeichnet man einen idealen Zweipol, bei dem das ohmsche Gesetz unabhängig von äusseren Einflüssen stets erfüllt ist. Ein ohmscher Widerstand ist ein linearer passiver Zweipol: seine I-U-Kennlinie ist eine Gerade.

2.2.7 Die Kirchhoffschen Gesetze

Eine der Hauptaufgaben der **Netzwerkanalyse** besteht darin, die Ströme und Spannungen an den einzelnen Zweipolen auszurechnen, sofern die verwendeten Netzwerkelemente (Widerstände, Kondensatoren, usw), ihre Verknüpfungen untereinander sowie die Quellen innerhalb des Netzwerkes bekannt sind.

Die schwarz ausgefüllten Markierungspunkte oder **Knoten** in dem Netzwerk zeigen an, dass die Leitungen an dieser Stelle elektrisch leitend miteinander verbunden sind, z.B. durch Zusammenschrauben oder Verlöten. Die Kreisringe markieren diejenigen Punkte im Netzwerk, zwischen denen die eingezeichnete Spannung gemessen wird.

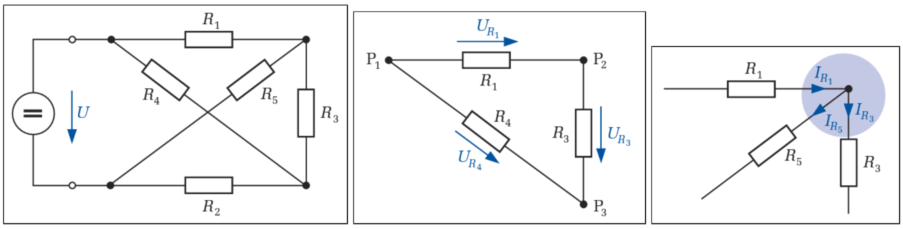

Abb. 2.3: Einfaches Netzwerk, Maschen- und Knotenregel.

Zur allgemeinen Netzwerkanalyse werden offenbar weitere Bestimmungsgleichungen benötigt. Einen ersten Zusammenhang erhält man aus dem Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke, welches entlang eines geschlossenen Weges verschwinden muss. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs betrachtet man eine **Masche** in dargestellten Netzwerk.

Knotensatz: In jedem Knoten (auch Superknoten) ist die Summe der zufliessenden Ströme gleich der Summe der abfliessenden Ströme.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0} \tag{2.19}$$

Maschensatz: Wird in einem Potentialfeld eine Ladung vom Ausgangspunkt A aus bewegt und wieder zurück zum Punkt A gebracht, so ist die verrichtete Arbeit Null und somit ist auch die Spannung Null. In jeder Masche ist die Summe aller Spannungen (Umlaufspannung) gleich Null.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k = 0} \tag{2.20}$$

Die Bezugspfeile für alle Spannungen sind entsprechend dem Umlaufsinn zu orientieren. Wenn der Bezugssinn einer Spannung nicht mit dem Umlaufsinn übereinstimmt, wird beim Aufstellen der Maschengleichung diese Spannung mit dem entsprechenden Vorzeichen versehen.

Im Beispiel lauten die Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} I_{R_1} - I_{R_3} - I_{R_5} & = & 0 \\ I_{R_3} + I_{R_4} - I_{R_2} & = & 0 \\ U_{R_1} + U_{R_3} - U_{R_4} & = & 0 \\ U_{R_3} + U_{R_2} - U_{R_5} & = & 0 \\ U_{R_1} + U_{R_3} + U_{R_2} - U & = & 0 \end{array} \tag{2.21}$$

Ohmsches Gesetz, Knotensatz und Maschensatz sind drei grundlegende Gesetze, mit denen schon allgemeine Netzwerkprobleme gelöst werden können.

2.2.8 Leistung und Arbeit

Wird ein Leiter an eine Gleichspannung U angeschlossen, so fliesst durch ihn ein Strom I. Ist Q dabei die durch den Leiterquerschnitt hindurchtretende Ladung, so ist zum Überwinden des Leiterwiderstandes R die **Energie** $W = Q \cdot U$ erforderlich, es muss also die Arbeit W geleistet werden, um den Strom I durch den Leiter aufrecht zu erhalten.

Die Energie W mit Einheit ($[W] = \mathrm{W\,s} = \mathrm{J} = \mathrm{N\,m}$) muss von der speisenden Quelle als Energiequelle aufgebracht werden. Praktisch interessiert wie schnell diese Arbeit geleistet werden muss, das ist die Leistungsaufnahme P mit Einheit ($[P] = \mathrm{W}$) des betrachteten Leiters vom Widerstand R.

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{Q \cdot U}{t} = \frac{U \cdot I \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}} \tag{2.22}$$

Die in einem Widerstand verbrauchte Energie wird restlos in Wärme umgewandelt. Ein elektrischer Widerstand ist demnach ein Energiewandler, der elektrische Energie in **Wärme** oder **mechanische Energie** umwandelt.

Die nutzbare abgegebene Leistung P_{ab} ist um die Verlustleistung P_{verl} kleiner als die zugeführte Leistung P_{zu}. Anstelle der Verluste wird häufig der **Wirkungsgrad** η eines Gerätes angegeben

$$\boxed{P_{\text{zu}} = P_{\text{ab}} + P_{\text{Verl}}} \qquad \boxed{\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} \leq 1} \tag{2.23}$$

2.2.9 Einfache Schaltungen von Widerständen

Die Netzwerkanylsse kann dadurch vereinfacht werden, dass einzelne Teile eines Betzwerks vorab zusammengefasst werden. Dabei muss lediglich darauf geachtet werden, dass sich das Klemmenverhalten des neuen vereinfachten Netzwerks gegenüber dem ursprünglichen Netzwerk nicht ändert, d.h. beim Anlegen der gleichen Spannung an die Klemmen muss in beiden Fällen der gleiche Strom fliessen.

Mit Hilfe von Knotensatz, Maschensatz und ohmsches Gesetz können nun für die Serienschaltung und Parallelschaltung von Widerständen einfache Regeln hergeleitet werden.

2.2.10 Reihenschaltung - Spannungsteiler

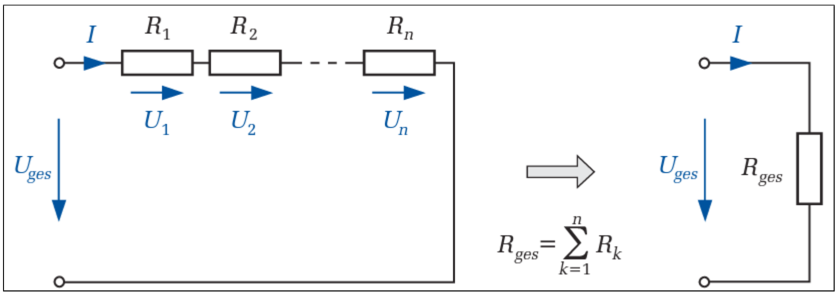

Abb. 2.4: Reihenschaltung von n Widerständen.

Bei einer **Reihenschaltung** werden alle Widerstände von dem gleichen Strom I durchfliessen. Die gesamte anliegende Spannung U_{ges} entsprechend dem Maschenumlauf setzt sich aus den Teilspannungen U_k an den einzelnen Widerständen R_k zusammen.

Bei der Reihenschaltung von Widerstände, addieren sich die Werte der einzelnen Widerstände und der Gesamtwiderstand ist grösser als der grösste Einzelwiderstand.

$$\boxed{U_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} (R_k \cdot I) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} R_k\right)}_{R_{\text{ges}}} \cdot I} \qquad \boxed{R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} R_k} \tag{2.24}$$

Fliesst der gleiche Strom durch mehrere in Reihe geschaltete Widerstände, dann stehen die Teilspannungen im gleichen Verhältnis wie die Teilwiderstände, an denen sie abfallen.

$$\boxed{\frac{U_i}{U_{i+1}} = \frac{R_i}{R_{i+1}}} \quad \boxed{\frac{U_i}{U_{\text{ges}}} = \frac{U_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} U_k} = \frac{\cancel{I} \cdot R_i}{\cancel{I} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} R_k} = \frac{R_i}{R_{\text{ges}}}} \tag{2.25}$$

Infolge des gleichen Stromes stehen die **Leistungen** an den Widerständen im gleichen Verhältnis zueinander wie die Spannungen und wie die Widerstände. Die an einem Widerstand entstehende Teilspannung wird als **Spannungsabfall** bezeichnet.

Definiert man das Potential am Minusanschluss der Spannungsquelle als Bezugswert $V = 0$, dann besitzt das Potential am positiven Anschluss den Wert $V = U$. Mit einem ortsunabhängigen Feldstärkeverlauf innerhalb der Widerstände nimmt das Potential linear ab und man erhält entlang der Reihenschaltung für ein angenommenes Widerstandsverhältnis dargestellten Potentialverlauf.

Beispiel einer Reihenschaltung

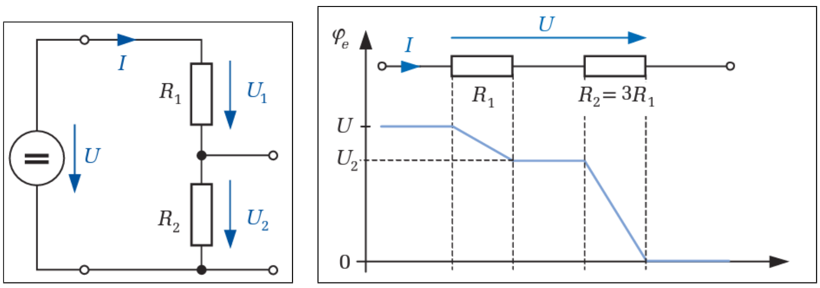

Abb. 2.5: Schaltung zur Spannungsteilung und Potentialverlauf.

Maschensatz: $-U + U_1 + U_2 = 0 \Longrightarrow U = U_1 + U_2$
Ohmsches Gesetz: $U_1 = R_1 \cdot I \quad U_2 = R_2 \cdot I$
Verhältnis: $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{R_1 \cdot \cancel{I}}{R_2 \cdot \cancel{I}}$
Verhältnis: $\dfrac{U_2}{U} = \dfrac{U_2}{U_1 + U_2} = \dfrac{R_2 \cdot \cancel{I}}{(R_1 + R_2) \cdot \cancel{I}}$

2.2.11 Parallelschaltung - Stromteiler

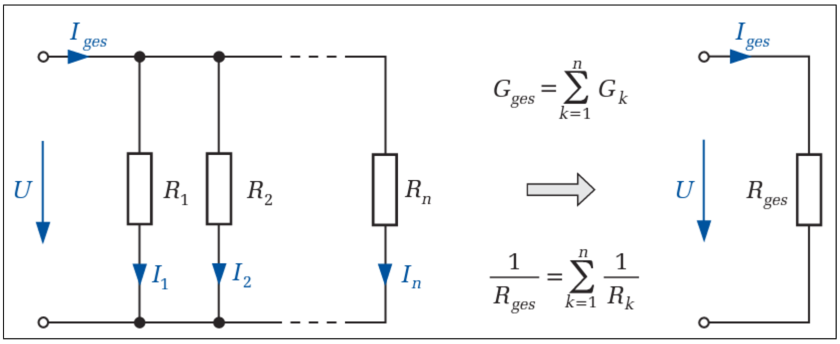

Abb. 2.6: Parallelschaltung von n Widerständen.

Bei der **Parallelschaltung** ist die Spannung U an allen Widerständen gleich gross und der gesamte Eingangsstrom I_{ges} setzt sich aus den Teilströmen I_k durch die einzelnen Widerstände R_k zusammen. Bei der Parallelschaltung ist die Verwendung der Leitwerte sinnvoll.

Bei der Parallelschaltung berechnet sich der gesamte Leitwert aus der Summe der einzelnen Leitwerte und der Gesamtwiderstand ist kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

$$\boxed{I_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{U}{R_k}\right) = U \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}\right)}_{G_{\text{ges}}}} \qquad \boxed{R_{\text{ges}} = \frac{1}{G_{\text{ges}}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} R_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} R_k}} \tag{2.26}$$

$$\boxed{\frac{I_i}{I_{i+1}} = \frac{G_i}{G_{i+1}} = \frac{R_{i+1}}{R_i}} \qquad \boxed{\frac{I_i}{I_{\text{ges}}} = \frac{I_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} I_k} = \frac{\cancel{U_i} \cdot \frac{1}{R_i}}{\cancel{U_i} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} = \frac{G_i}{G_{\text{ges}}}} \tag{2.27}$$

Für den Sondernfall mit nur zwei parallel geschalteten Widerständen gilt

$$\boxed{R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \tag{2.28}$$

Für den Sondernfall mit n parallel gleiche geschalteten Widerständen gilt

$$\boxed{R_{\text{ges}} = \frac{R}{n}} \tag{2.29}$$

Liegt die gleiche Spannung an mehreren parallel geschachtelten Widerständen, dann stehen die Ströme im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte, die sie durchfliessen. Die **Leistungen** an den Widerständen verhalten sich wegen der gleichen Spannung wie die Ströme durch die Widerstände und stehen im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte.

Beispiel einer Parallelschaltung

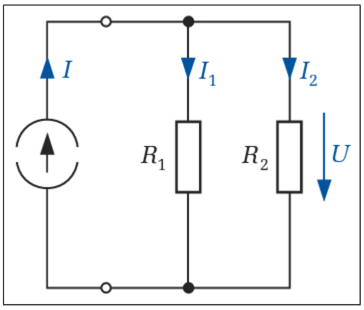

Abb. 2.7: Schaltung zur Stromleitung.

Knotensatz: $-I + I_1 + I_2 = 0 \Longrightarrow I = I_1 + I_2$

Ohmsches Gesetz: $I_1 = \dfrac{U}{R_1} \quad I_2 = \dfrac{U}{R_2}$

Verhältnis: $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{G_1}{G_2}$

Verhältnis: $\dfrac{I_2}{I} = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = \dfrac{G_2}{G_1 + G_2}$

2.2.12 Anwendungen der Schaltungen

Der belastete Spannungsteiler

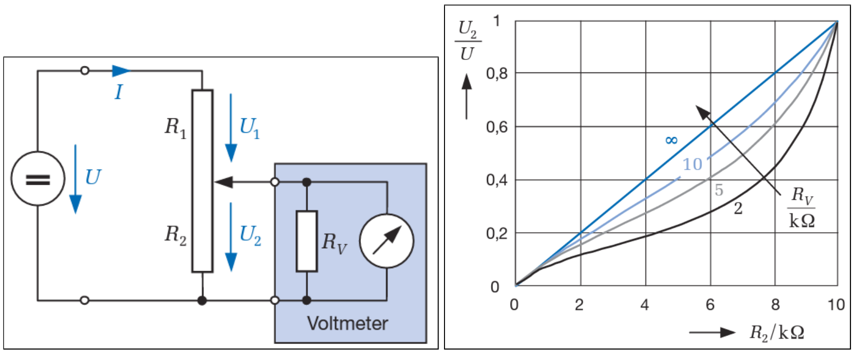

Abb. 2.8: *Links:* Belasteter Spannungsteiler. *Rechts:* Ausgangsspannung am belasteten Spannungsteiler für $R_1 + R_2 = 10k\Omega$

Die Spannung an dem Schleifkontakt eines Potentiometers soll mit einem realen Spannungsmessgerät (Voltmeter) gemessen werden. Dabei ist zu beachten, dass fast alle Spannungsmessgeräte von einem kleinen Strom durchflossen werden, der die in Gleichung des Spannungsteilers berechnete Spannungsteilung beeinflusst und das Messergebnis verfälscht. Diese Einfluss kann man erfassen, indem man das reale Messgerät durch ein ideales Messgerät mit unendlich grossem Innenwiderstand und zusätzlich durch einen parallel geschalteten Widerstand R_V ersetzen. Die Berechnung der resultierenden Spannung U_2 wird wesentlich vereinfacht, wenn man die Parallelschaltung der beiden WIderstände R_2 und R_V durch einen neuen Widerstand R_{par} ersetzen und die Spannung U_2 aus der Reihenschaltung von R_1 und R_{par} bestimmen.

$$\boxed{R_{\text{par}} = \frac{R_2 \cdot R_V}{R_2 + R_V}} \quad \boxed{\frac{U_2}{U} = \frac{R_{\text{par}}}{R_1 + R_{\text{par}}}} \tag{2.30}$$

Messbereich eines Spannungsmessgerätes

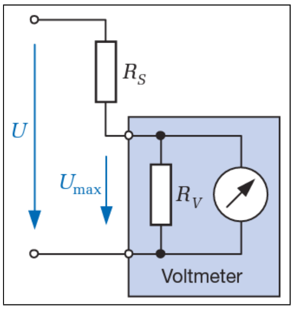

Abb. 2.9: Voltmeter mit Vorwiderstand.

Ein Anwendungsbeispiel für den Spannungsteiler ist die Messbereichserweiterung eines Voltmeters. Soll mit dem Messgerät eine Spannung U gemessen werden, die die maximal zulässige Spannung am Voltmeter U_{max} überschreitet, dann kann die zu messende Spannung mit einem in Serie geschalteten Vorwiderstand R_S heruntergeteilt weerden. Der Wert des Vorwiderstandes kann mit Hilfe der Gleichung des Spannungsteilers berechnet werden.

$$\boxed{\frac{U_{\text{max}}}{U} = \frac{R_V}{R_S + R_V}} \tag{2.31}$$

Messbereich eines Strommessgeräts

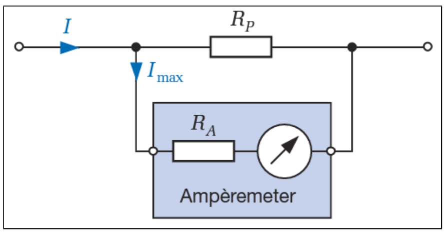

Abb. 2.10: Ampèremeter mit Parallelwiderstand.

Zur Messung eines Stromes wird das Ampèremeter in den Strompfad geschaltet, sein Innenwiderstand R_A sollte daher möglichst gering sein, um das Messergebnis nur wenig zu beeinflussen. Soll ein Strom gemessen werden, der den maximal zulässigen Bereich des Ampèremeters I_{max} überschreitet, dann kann der Gesamtstrom I durch einen parallel geschalteten Widerstand heruntergeteilt werden. Der Wert des Parallelwiderstandes kann mit Hilf der Gleichung des Stromleiters berechnet werden.

$$\boxed{\frac{I_{\text{max}}}{I} = \frac{R_P}{R_P + R_A}} \tag{2.32}$$

Widerstandsmessung

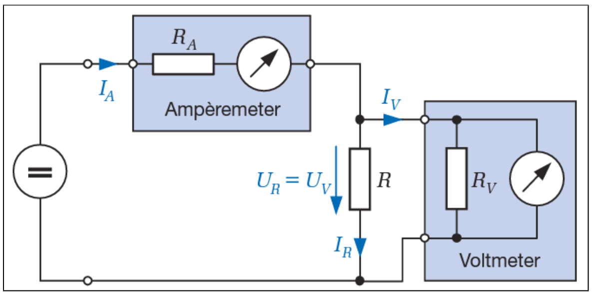

Abb. 2.11: Korrekte Spannungsmessung.

Bei der obigen Schaltung wird die Spannung am Widerstand richtig erfasst, dass Ampèremeter misst allerdings nicht nur den Strom I_R durch den Widerstand, sondern zusätzlich auch noch den Strom I_V durch das Voltmerer. Für den Widerstandswert R erhält man

$$\boxed{R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - U_V/R_V} = \frac{U_V R_V}{I_A R_V - U_V}} \tag{2.33}$$

Der Innenwiderstand des Ampèremeters spielt bei dieser Messanordnung keine Rolle. Im Falle eines idealen Voltmeters $R_V \to \infty$ vereinfacht sich die obige Gleichung auf den Zusammenhang $R = U_V/I_A$, d.h. der Wert R kann direkt aus den beiden Messwerten berechnet werden.

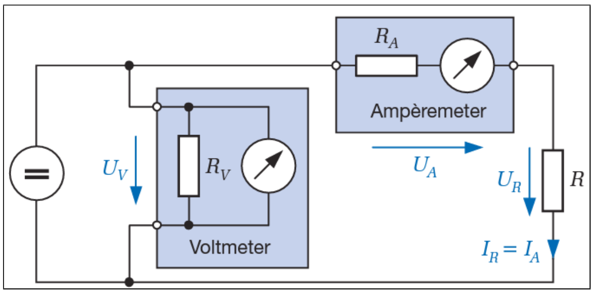

Abb. 2.12: Korrekte Spannungsmessung.

Bei den alternativen Messanordnung wird der Strom durch den Widerstand richtig gemessen, allerdings wird jetzt der Spannungsabfall U_A am Innenwiderstand des Ampèremeters bei der Spannungsmessung miterfasst. Den Widerstandswert erhält man aus der Bezeichnung

$$\boxed{R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A}} \tag{2.34}$$

In diesem Fall spielt der Innenwiderstand des Voltmeters keine Rolle. Im Falle eines idealen Ampèremeters $R_A \to 0$ vereinfacht sich die obige Gleichung auf den Zusammenhang $R = U_V/I_A$, d.h. der Wert R kann wieder direkt aus den beiden Messwerten berechnet werden.

Allgemein stellt man sich die Aufgabe, den ohmschen Widerstand R eines Bauteils durch gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung und mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes zu bestimmen. Da das Ampèremeter den Strom durch den Widerstand messen soll, muss es in Reihe zum Widerstand geschaltet werden. Zur Erfassung der Spannung am Widerstand muss das Voltmeter aber parallel zum Widerstand angeschlossen werden.

2.2.13 Quellen, Ersatzschaltungen und Kennlinien

Man betrachte ein beliebiges Netzwerk aus Widerständen, Spannungs- und Stromquellen besteht. Nun wird das Netzwerk an zwei Klemmen zugänglich gemacht. Belastet man jetzt das Netzwerk, so sind U_a und I_a linear voneinander abhängig (Gerade in U-I-Kennlinie).

Die lineare Abhängigkeit zwischen U_a und I_a kann in der Form $U_a = \alpha \cdot I_B + \beta$ geschrieben werden. Die Parameter α und β sind unabhängig von der Belastung sondern vom gegebenen Netzwerk abhängig.

Das gegebene Netzwerk soll in seinem Innern durch ein möglichst einfaches Ersatznetzwerk ersetzt werden, so dass die Wirkung nach aussen an den Klemmen unverändert bleiben. Ein äusserer Beobachter kann nicht festlegen, dass im Innern das komplizierten Netzwerk durch ein einfacheres Netzwerk ausgetauscht wurde.

Die Ersatznetzwerke sind die **Thevenin'sche Ersatzschaltung** (eine ideale Spannungsquelle mit Seriewiderstand) und die **Norton'sche Ersatzschaltung** (eine ideale Stromquelle mit Parallelwiderstand) unter der Bedingung, dass der Ersatz bezüglich zweier wohldefinierter Klemmen geschieht. Das Ersatznetzwerk weist die gleiche Wirkung wie das Originalnetzwerk auf. Beide Ersatzschaltungen sind mit zwei Grössen vollständig beschrieben und daher lässt sich die U_a-I_a-Gerade nachbilden.

Die zwei Grössen U_{qe} und R_{qe} bzw. I_{qe} und R_{qe} der Ersatzschaltungen sind nun mit geeigneten Überlegungen und Experimenten an den Klemmen zu bestimmen.

Zwei beliebige Punkte auf der U_a-I_a-Geraden genügen, um die Ersatzschaltungen nach Thevenin oder Norton vollständig zu beschreiben. Lässt man die

Klemmen 1-1′ offen (Leerlauf), so misst man an ihnen die sogenannte **Leerlaufspannung** U_{LL}, schliesst man die Klemmen kurz, so fliesst der sogenannte **Kurzschlussstrom** I_{KS}. Diese zwei Punkte sind extreme Betriebszustände. Schaltet man alle inneren Quellen ab, so wird das Netzwerk passiv, d.h. seine Kennlinie verläuft nun durch den Nullpunkt.

Abschalten einer Quelle bedeutet, sie durch ihren Innenwiderstand zu ersetzen. Bei der idealen Spannungsquelle ist der Innenwiderstand Null $U_q = 0$. Für die ideale Stromquelle ist der Innenwiderstand unendlich $I_q = 0$.

Die U_a-I_a-Kennlinie des passiven Netzwerkes durch den Nullpunkt entspricht der Kennlinie eines ohmschen Widerstandes. Dieser ohmsche Widerstand ist der **Ersatzwiderstand**, wenn bei **abgeschalteten Quellen** bei den Klemmen 1-1′ in das Netzwerk hineingemessen wird. Dieser gemessene Widerstand wird dann gerade zum Widerstand R_e der Ersatzschaltung nach Thevenin oder nach Norton.

Beim Abschalten einer Quelle wird sie nicht einfach weggelassen, sondern durch ihren Innenwiderstand ersetzt. Beim Abschalten einer Quelle wird die ideale Spannungsquelle durch einen Kurzschluss und die ideale Stromquelle durch einen Unterbruch ersetzt.

Damit stehen nun drei Experimente zur Verfügung, um die zwei Grössen U_{qe} und R_{qe} bzw. I_{qe} und R_{qe} der Ersatzschaltung zu bestimmen.

Von obigen drei Experimenten genügen zwei um die Ersatzschaltung zu bestimmen. Die drei Grössen U_{qe}, I_{qe} und R_{qe} sind voneinander abhängig.

$$\boxed{U_{qe} = R_{qe} \cdot I_{qe}} \tag{2.35}$$

Die beiden Ersatzschaltungen nach Thevenin und Norton sind vollständig gleichwertig. Mit obiger Gleichung kann eine Thevenin-Ersatzschaltung in einer Norton-Erschatzschaltung umgewandelt werden und umgekehrt.

Belastet eine Quelle (Ersatzschaltung eines linearen Netzwerkes) mit einem variablen Lastwiderstand, sowerden folgende Bezeichnungen eingeführt: U_{qe} ist die Leerlaufspannung, R_{qe} ist der Innenwiderstand bzw. der Ersatzwiderstand, R_L ist der Lastwiderstand, U_a zwischen 1-1′ ist die Klemmenspannung und I_a der Klemmestrom.

Fasst man I_a als unabhängige und U_a als abhängige Variable auf, so bezeichnet man die Funktion $U_a = f(I_a)$ und ihre graphische Darstellung als **Quellenkennlinie**. Die Schnittpunkte mit den Achsen sind der Leerlauf mit $U_{\text{LL}} = U_{qe}$ und der Kurzschluss I_{KS}.

$$\boxed{U_a = U_{qe} - I_a \cdot R_{qe}} \tag{2.36}$$

$$\boxed{I_{\text{KS}} = \frac{U_{qe}}{R_{qe}}} \quad \boxed{R_{qe} = -\frac{\triangle U_a}{\triangle I_a}} \tag{2.37}$$

Führt man für Quelle und Lastwiderstand je eine Kennlinie ein, so werden beim Zusammenschalten von Quelle und Lastwiderstand die beiden Kennlinien in ein gemeinsames Koordinatensystem gezeichnet. Den Schnittpunkt der beiden Kennlinien bezeichnet man als **Arbeitspunkt** (AP). Dieser Arbeitspunkt stellt sich dort ein, wo $U_{a1} = U_{a2}$ wird.

Gleichsetzen von U_{a1} und U_{a2} liefert Strom und Spannung des Arbeitspunktes

$$\boxed{I_{\text{AP}} = \frac{U_{qe}}{R_{qe} + R_L}} \quad \boxed{U_{\text{AP}} = \frac{U_{qe} \cdot R_L}{R_{qe} + R_L}} \tag{2.38}$$

2.2.14 Zusammenschalten von Quellen

Die Thevenin-Ersatzschaltung einer Quelle wird als “Thevenin-Quelle” bezeichnet, ebenso heisst nun die Norton-Ersatzschaltung ener Quelle “Norton-Quelle”. Werden reale Quellen zusammengeschaltet, so bestimmt man mit den bekannten Methoden das Ersatznetzwerk (Thevenin oder Norton). Werden ideale Quellen parallel ode rin Serie geschaltet, so sind folgende sechs Fälle zu unterscheiden:

U-Quelle	parallel	U-Quelle	$\Rightarrow$ Widerspruch	(2.39)
U-Quelle	in Serie	U-Quelle	$\Rightarrow$ Addition der Spannungen	
I-Quelle	in Serie	I-Quelle	$\Rightarrow$ Widerspruch	
I-Quelle	parallel	I-Quelle	$\Rightarrow$ Addition der Ströme	
I-Quelle	parallel	U-Quelle	$\Rightarrow$ U-Quelle	
I-Quelle	in Serie	U-Quelle	$\Rightarrow$ I-Quelle	

2.2.15 Verfügbare Quellenleistung und Leistungsanpassung

Eine Quelle wird mit einem variablen Lastwiderstand R_L belastet. Nun wird die an die Last abgegebene Leistung P_L berechnet.

$$\boxed{I = \frac{U_q}{R_q + R_L}} \quad \boxed{P_L = I^2 \cdot R_L = \frac{U_q^2 \cdot R_L}{(R_q + R_L)^2} = f\,(R_L)} \tag{2.40}$$

Für $R_L = 0$ (Kurzschluss) und $R_L = \infty$ (Leerlauf) wird $P_L = 0$. Dazwischen weist $P_L = f\,(R_L)$ ein Maximum auf. Mit Nullsetzen der Ableitung von $f\,(R_L)$ erhält man den Lastwiderstand für die maximale Leistung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f\,(R_L)}{\mathrm{d}R_L} = 0 \Longrightarrow R_L = R_q} \tag{2.41}$$

Den Betriebszustand mit $R_L = R_q$ bezeichnet man als **Leistungsanpassung** und eine Quelle gibt ihre verfügbare Leistung an die Last ab. Setzt man $R_L = R_q$ ein,

$$\boxed{P_L = I^2 \cdot R_L = \left(\frac{U_q}{R_q + R_L}\right)^2 \cdot R_L = \left(\frac{U_q}{R_q + R_q}\right)^2 \cdot R_q} \tag{2.42}$$

so erhält man die maximale Leistung

$$\boxed{P_{L,\max} = P_{\text{AV}} = \frac{U_q^2}{4 \cdot R_q}} \tag{2.43}$$

Diese Leistung stellt das Maximum dar, welches die Quelle an Leistung abgeben kann. Man bezeichnet sie als **verfügbare Leistung** (available power). Man beachte, dass P_{AV} nicht vom Lastwiderstand abhängig ist und jeder Quelle zugeordnet werden kann.

Das Verhältnis P_L/P_{AV} in Funktion von R_L/R_q zeigt das Maximum die Leistungsanpassung. Für $R_q = 0$ und $R_q = \infty$ ist die verfügbare Leistung nicht definiert.

$$\boxed{\frac{P_L}{P_{\text{AV}}} = \frac{\dfrac{U_q^2 \cdot R_L}{(R_q + R_L)^2}}{\dfrac{U_q^2}{4 \cdot R_q}} = \frac{4}{2 + \dfrac{R_q}{R_L} + \dfrac{R_L}{R_q}} = \frac{4}{2 + x + \dfrac{1}{x}} = \frac{4}{\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \tag{2.44}$$

2.3 Analyse von Gleichstromkreisen

2.3.1 Anwendung von Knoten- und Maschensatz

Mit Hilfe von Knoten- und Maschensatz können Netzwerke gelöst werden. Bei der Anwendung erhält man Gleichungen, die dann mit geeigneten Methoden aufgelöst werden können.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k = 0} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0} \tag{2.45}$$

Um Knoten- und Maschensatz aufzustellen, führt man in Netzwerk zusätzliche Ströme ein. Die restlichen Ströme ergeben sich aus den Knotensatz.

2.3.2 Netzumwandlung

Meistens interessiert man sich in einem Netzwerk für eine bestimmte Spannung oder ein bestimmter Strom. Folgende Schritte können durchgeführt werden.

- Überflüssige Widerstände weglassen oder kurzschliessen.
- Widerstände bei Serie- oder Parallelschaltungen zusammenfassen.
- Punkte mit gleichem Potential können getrennt oder verbunden werden.
- Zusätzliche Einströmungen an Knoten anbringen, ohne Verletzung des Knotensatzes.
- Teile des Netzwerkes, oder ganzes Netzwerk durch Ersatzquellen ersetzen.
- Stern-Dreieck-Umwandlung.
- Weitere Äquivalenztransformationen (LC-Eintore).

2.3.3 Dreieck-Stern-Umwandlung

Hier handelt es sich um eine äquivalente Umwandlung eines 3-Pol-Netzwerkes (3 Anschlussklemmen).

$$\boxed{R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}} \quad \boxed{R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}} \quad \boxed{R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}} \tag{2.46}$$

Auch die Rückumwandlung von der Sternschaltung in die Dreiecksschaltung ist möglich. Hier werden Leitwerte statt Widerstände verwendet.

$$\boxed{G_A = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}} \quad \boxed{G_B = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}} \quad \boxed{G_C = \frac{G_1 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}} \tag{2.47}$$

2.3.4 Spannungsquellen verdoppeln

In einem Netzwerk weisen zwei Punkte mit gleichem Potential gegenüber eines Bezugspunktes auf. Werden nun zwei **identische Spannungsquellen** an diese Punkte angeschlossen, so kann man die Verbindung zwischen dieser zwei Punkte weglassen. Die Widerstände im Netzwerk haben von dieser Umwandlung nichts bemerkt.

Jede Spannungsquelle hat nun einen Serienwiderstand und kann in eine **Norton-Quelle** verwandelt werden, damit lässt sich das Netzwerk weiter vereinfachen.

2.3.5 Stromquellen verdoppeln

Eine Brücke wird mit einer idealen Stromquelle gespeist. Die Stromquelle wird nun verdoppelt und einem Knoten wird der Strom zugeführt und wieder weggeführt. Die Widerstände bemerken nichts von der Umwandlung und die Einströmungsverhältnisse an den Knoten sind unverändert.

Dank der Umwandlung besitzt jede Stromquelle einen Parallelwiderstand und könnte in eine **Thevenin-Quelle** verwandelt werden.

2.3.6 Ersatzquellen einführen

Hier handelt es sich um die wirksamste Methode. Ein Strom durch einen Widerstand ist gesucht, alle anderen Spannungen und Ströme sind nicht gefragt. Das Netzwerk wird so weit wie möglich vereinfacht, nur die Verhältnisse beim Widerstand dürfen sich nicht ändern. Der Widerstand wird mit einer Umrandung versehen. Das Netzwerk ausserhalb dieser Umrandung wird jetzt in mehreren Schritten vereinfacht. Im ersten Schritt verdoppelt man die Spannungsquelle.

Einführen von zwei zusätzliche Klemmen und Umzeichen der Quelle. Blickt man von den Klemmen so kann das linke und das rechte Netzwerk mit einer Ersatzquelle ersetzt werden. Die Ersatzgrössen U_{qe_k}, R_{qe_k}, I_{qe_k} können bestimmt werden.

2.3.7 Überlagerungssatz (Superposition)

Überlagerung bedeutet, jede Ursache (fliessende Ströme I_k, Spannungsquellen U_k) wirkt einzeln im Netzwerk. Die Gesamtwirkung erhält man durch Addition der einzelnen Wirkungen. Die Methoden macht nur Sinn, wenn mehrere Quellen beteiligt sind.

Dabei gelten Konvenktionen: Erster Index ist der Ort, wo der Ursache gemessen wird. Zweiter Index ist der Ort, wo die Ursache wirkt. So gilt U_{xy} die Spannung U_x verursacht durch die Ursache U_y

2.3.8 Knotenpotentialverfahren

Die Einströmungen I_i eines Netzwerks sind gegeben und die Potentiale V_i der Knoten sind die unbekannten Grössen. Die Knoten werden nummeriert und jeder Knoten erhält sein Knotenpotential. Ebenso erhält jeder Knoten eine Einströmung. Für die Netzwerkelemente trägt man Leitwerte ein.

Für jeden Knoten wird jetzt der **Knotensatz** formuliert, d.h. der zufliessende Strom ist gleich der Summe der wegfliessenden Ströme. Die Ströme in den Zweigen werden durch die Potentialdifferenzen (Spannungen) und die Leitwerte G_i ausgedrückt (Ohmsches Gesetz). Danach ordnet man das Gleichungssystem um und sortiert nach den Knotenpotentialen, so ergibt sich

$$\boxed{Y_{UAM} \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{I}} \tag{2.48}$$

wobei Y_{UAM} eine unbestimmte Admittanzmatrix (UAM) mit den Leitwerten G_i, $\overrightarrow{V}$ ein Spaltenvektor mit den Potentialen V_i und $\overrightarrow{I}$ ein Spaltenvektor mit den Einströmungen I_i sind. Folgende sind Eigenschaften der Y_{UAM}:

Die Summe aller Elemente einer Zeile von Y_{UAM} ist Null. Die Summe aller Elemente einer Spalte von Y_{UAM} ergibt Null. Die Elemente der i-te Zeile und i-te Spalte von Y_{UAM} sind identisch. Alle Elemente auf der Hauptdiagonalen von Y_{UAM} sind positiv, restliche Elemente sind alle negativ. Auf der Hauptdiagonalen steht die Summe aller am Knoten i angeschlossener Leitwerte. Das Element (j, k) enthält den negativen Leitwert, der die Knoten j und k verbindet. Die Summe aller am Knoten i angeschlossener Leitwerte heisst Eignleitwert des Knoten i. Die Summe aller Leitwerte, die Knoten j und k verbinden heisst Koppelleitwert zwischen Knoten j und Knoten k. Fehlt eine Verbindung zwischen Knoten j und k, so trägt man eine Null an der entsprechenden Stelle (j, k) in der Y_{UAM} ein

Um die Lösungsmenge eindeutig zu machen, muss ein Potentialnullpunkt festgelegt werden. Der Ort des Potentialnullpunktes ist frei und kann willkürlich gewählt werden. Sinnvollerweise wählt man eiinen Netzwerkknoten als Potentialnullpunkt. Durch die Wahl eines Knotens zum Potentialnullpunkt wird sein Potentail im Gleichungsystem Null. Dadurch lassen sich im Gleichungssystem eine Spalte und eine Zeile streichen.

Folgende Schema zeigt die Vorgehensweise der Methode

1. Netzwerk so umzeichnen/umwandeln, dass nur doch Einströmungen als Quellen vorliegen.
2. Knoten des Netzwerkes numerieren.
3. bezugspfeile für EInströmungen einheitlich definieren
4. Aufstellen der Y_{UAM}.
5. Kontrolle der Y_{UAM}
6. Einströmungsvektor aufstellen
7. Potentialnullpunkt wählen und entsprechende Zeile und Spalte streichen
8. Gleichungssystem numerisch lösen
9. Diskussion

2.3.9 Maschenstromverfahren

Die Spannungen eines Netzwerks sind gegeben und die Maschenströme sind die unbekannten Grössen. Die Maschen werden nummeriert und erhalten einen Umlaufsinn (identisch für alle Maschen). Für die Netzwerkelemente trägt man Widerstände ein.

Für jede Masche wird der **Maschensatz** formuliert, d.h. die Umlaufspannung in jeder Masche ist gleich Null. Die Teilspannungen werden durch die Maschenströme und die Widerstände ausgedrückt (Ohmsches Gesetz). Ordnet man alle Gleichungen um und sortiert man nach den Maschenströmen so ergibt sich

$$\boxed{Z_{KIM} \cdot \overrightarrow{I} = \overrightarrow{U}} \tag{2.49}$$

Wobei Z_{KIM} die Kreisimpendanzmatrix ist, $\overrightarrow{I}$ der Spaltenvektor mit Maschenströmen und $\overrightarrow{U}$ der Spaltenvektor mit Spannungsquellen.

Die Kreisimpendanzmatrix weist einige besondere Eigenschaften auf: die i-te Zeile und die i-te Spalte sind identisch. Alle Elemente auf der Hauptdiagonalen sind positiv, die restliche Elemente sind alle negativ. Auf der Hauptdiagonalen (i, i) steht die Summe aller Widerstände in der Masche i. Das Element $(j.k)$ enthält den gemeinsamen Widerstand der Maschen j und k. Das Vorzeichen des Koppelwiderstandes in der Matrix hängt von den angenommenen Umlaufsrichtungen der beiden beteiligten Maschen ab.

Folgende Schema zeigt die Vorgehensweise der Methode

1. Netzwerk so umzeichnen/umwandeln, dass nur noch Spannungsquellen vorliegen
2. Maschenströme mit Umlaufsrichtung einführen
3. Aufstellen der Z_{KIM}
4. Kontrolle der Z_{KIM}

5. Spannugsquellenvektor aufstellen
6. Gleichungssystem numerisch lösen
7. Diskussion

2.3.10 Dualität

Von äquivalenten n-Toren spricht man, wenn sich zwei n-Tore bezüglich ihrer Klemmen nach aussen identisch verhaltne. Dabei dürfen an den Klemmen beliebige Experimente durchgeführt werden.

Eine häufig verwendete Verwandschaft von Netzwerken ist die **Dualität**. Zwei Netzwerke heissen **dual**, wenn sich die Ströme in einem Netzwerk genau so verhalten wie die Spannungen im anderen Netzwerk. Die Spannungen in einem Netzwerk verhalten sich dann genau so wie die Ströme in anderem Netzwerk.

Betrachtet man ein Originalnetzwerk und das zugehörige duale Netzwerk, so gelten folgende Beziehungen

Originalnetzwerk		duales Netzwerk
Spannungen	$\Longleftrightarrow$	Strom
Widerstand	$\Longleftrightarrow$	Leitwert
Spule	$\Longleftrightarrow$	Kondensator
U-Quelle	$\Longleftrightarrow$	I-Quelle
Serieschaltung	$\Longleftrightarrow$	Parallelschaltung
Leerlauf	$\Longleftrightarrow$	Kurzschluss
Masche	$\Longleftrightarrow$	Knoten

(2.50)

Kapitel 3

Einfache RLC-Netzwerke im Zeitbereich

3.1 Grundgesetze im Zeitbereich

Der Strom und die Spannung sollen beliebige Zeitabhängigkeit aufweisen. Die Grossbuchstaben werden für konstante Grössen (**DC**) und die Mittelwerte bzw. Effektivwerte verwendet. Formal wird dies durch folgende Schreibweise ausgedrückt

$$\boxed{\begin{array}{ll} i\left(t\right): & \text{Momentanwert des Stromes} \\ u\left(t\right): & \text{Momentanwert der Spannung} \\ p\left(t\right): & \text{Momentanwert der Leistung} \end{array}} \tag{3.1}$$

Wird elektrische Energie einem elementaren Netzwerkelement (1-Tor) zugeführt, so sind drei grundsätzliche Fälle zu unterscheiden.

- Wird die Energie verbraucht (in Wärme umgewandelt), so ist das Element ein **reiner Widerstand**.
- Wird die Energie im magnetischen Feld gespeichert, so handelt es sich um eine **Spule**.
- Wird die Energie im elektrischen Feld gespeichert, so ist das Element ein **Kondensator**.

Die neue Elemente sind **Energiespeicher**. Beim Füllen der Speicher wirken die Spule und Kondensator als Verbraucher. Beim Entleeren wirken die Spule und Kondensator als Quelle. Da keine Energie verloren geht, nennt man diese Elemente **verlustlose Elemente**.

Bei **idealen Elementen** bleibt die Energie beliebig lang gespeichert, für diesen Zustand werden die Klemmen beim Kondensator offen gelassen (konstante Spannung) und bei der Spule kurzgeschlossen (konstanter Strom).

3.1.1 Widerstand

Strom $i(t)$ und Spannung $u(t)$ sind zueinander proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist der Widerstandswert R. Das **ohmsche Gesetz am Widerstand** lautet

$$\boxed{u_R(t) = R \cdot i(t)} \quad \boxed{i(t) = \frac{u_R(t)}{R}} \tag{3.2}$$

3.1.2 Spule

Ein zeitlich ändernder Strom in einer Drahtschleife erzeugt ein zeitlich änderndes Magnetfeld. Diese Flussänderung induziert in der Drahtschleife ein elektrisches Gegenfeld $\vec{E}$, das der ursprünglichen Stromänderung entgegenwirkt.

Die induzierte Spannung ist proportional zur zeitlichen Änderung des Stromes. Die Proportionalitätskonstante L heisst **Induktivität** und wird in Henry H angegeben. Das **ohmsche Gesetz an der Spule** lautet

$$\boxed{u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[i(t)\Big]} \quad \boxed{i(t) = \frac{1}{R} \cdot \int_0^t u_L(\tau)\ \mathrm{d}\tau + i(t=0)} \tag{3.3}$$

Das Phänomen bei der Spule wird mit einer der Maxwell'schen Gleichungen begründet. Selbstinduktion bedeutet, dass ein Stromanstieg oder Abfall behindert wird. Die Spule wehrt sich gegen eine Änderung des Stromes.

3.1.3 Kondensator

Der Kondensator besteht aus zwei Leitern, die durch einen Isolator getrennt sind. Eine solche Anordnung ist in der Lage, elektrische Ladungen zu speichern. Das **ohmsche Gesetz am Kondensator** lautet

$$\boxed{i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[u_C(t)\Big]} \quad \boxed{u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \underbrace{\int_0^t i(\tau)\ \mathrm{d}\tau + u_C(t=0)}_{q_C(t)}} \quad \boxed{q_C(t) = C \cdot u_C(t)} \tag{3.4}$$

Die Proportionalitätskonstante zwischen der Ladung und der Spannung ist die **Kapazität** C und wird in Farad F angegeben. Die Elemente Kondensator und Spule sid zueinander dual.

3.1.4 Momentanleistung und Energie

Die Leistung wird als Produkt von Strom und Spannung definiert, wobei jetzt aber Strom und Spannung zeitabhängig sind. Man bezeichnet diese Leistung als **Momentanleistung**, wird in Watt W angegeben und lautet

$$\boxed{p(t) = u(t) \cdot i(t)} \tag{3.5}$$

Im allgemeinen Fall wird auch $p(t)$ eine zeitabhängige Funktion. Der Grossbuchstabe P wird für konstante Leistung oder mittlere Leistung verwendet.

Für die Energie definiert man

$$\boxed{w(t) = \int_0^t p(\tau)\ \mathrm{d}\tau + w(t=0)} \tag{3.6}$$

Ob ein 1-Tor momentan aktiv oder passiv wirkt, kann wiederum mit dem Vorzeichen von $p(t)$ entschieden (Zählpfeile beachten) werden. Ist ein 1-Tor mit dem VZS bepfeilt, so bedeuten

- $p(t) > 0$, das 1-Tor ist für diese Zeitpunkte eine **Last** (nimmt Leistung auf)
- $p(t) < 0$, das 1-Tor ist für diese Zeitpunkte eine **Quelle** (gibt Leistung ab)

3.2 Periodische Zeitabhängigkeit

3.2.1 Definitionen und Begriffe

Die **periodischen Funktionen** bilden eine wichtige Klasse innerhalb der Funktionen mit beliebiger Zeitabhängigkeit. Bei einer periodischen Zeitfunktion wiederholt sich der Verlauf der zeitlichen Änderung nach Ablauf einer Periodendauer T. Mit n als ganzer Zahl gilt also für eine periodische Funktion allgemein

$$\boxed{s(t) = s(t + nT)} \tag{3.7}$$

$s(t)$ ist die neutrale Bezeichnung für irgendeine elektrische Grösse wie Strom $i(t)$, Spannung $u(t)$ oder Leistung $p(t)$. Handelt es sich um eine sinus- oder cosinusförmige Zeitabhängigkeit, so spricht man von **harmonischer Zeitabhängigkeit** oder **harmonische Funktionen**. Die allgemeine harmonisch zeitabhängige Spannung lautet

$$\boxed{u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)} \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \tag{3.8}$$

wobei u der Momentanwert in Volt V, $\hat{U}$ die Amplitude in Volt V, ω die Kreisfrequenz in rad s^{-1}, φ_0 der Nullphasenwinkel in rad und f die Frequenz in Herz Hz.

3.2.2 Mittelwerte

Man unterscheidet algemein für zeitabhängige periodische Wechselgrössen folgende Kennwerte

Linearer Mittelwert

Dieser lineare Mittelwert wird auch als **arithmetischer Mittelwert** bzw. **DC-Anteil** bezeichnet. Für harmonische Zeitfunktionen ist der Wert Null. Der lineare Mittelwert lautet

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t)\ \mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

Betragsmittelwert

Die Wechselgrösse wird zuerst gleichgerichtet und anschliessend gemittelt. Bei elektrolytischen Vorgängen ist dieser Mittelwert ebenfalls von Bedeutung und heisst ach elektrolytischer Mittelwert. Der **Betragsmittelwert** lautet

$$\boxed{\left|\overline{x}\right| = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left|x\left(t\right)\right| \mathrm{d}t} \tag{3.10}$$

Effektivwert oder Quadratischer Mittelwert

Berechnet man an einem ohmschen Widerstand die Momentanleistung: $p\left(t\right) = i^2 \cdot R$ oder $p\left(t\right) = u^2/R$. Strom und Spannung treten **quadratisch** auf. Durch Mittelwertbildung der Leistung $p\left(t\right)$ tritt die **mittlere Leistung** P und erhält

$$\boxed{P = \overline{p\left(t\right)} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p\left(t\right)\,\mathrm{d}t} \tag{3.11}$$

Die mittlere Leistung P ist nun massgebend für die **Wärmewirkung** oder die umgesetzte **Wirkleistung** P. Denkt man sich einen Gleichstrom I so, dass die Gleichstromleistung identisch mit obiger mittlerer Leistung wird. Die Grösse dieses fiktiven Gleichstroms I bezeichnet man als **Effektivwert** I_{eff} des Wechselstromes $i\left(t\right)$.

$$\boxed{I^2 \cdot R = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T R \cdot i^2\left(t\right)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2\left(t\right)\,\mathrm{d}t}} \tag{3.12}$$

Eine analoge Rechnung mit der Spannung $u\left(t\right)$, so erhält man für den **Effektivwert** U_{eff}

$$\boxed{\frac{U^2}{R} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{u^2\left(t\right)}{R}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2\left(t\right)\,\mathrm{d}t}} \tag{3.13}$$

Die Wirkleistung P ist der lineare Mittelwert der periodischen Momentanleistung $p\left(t\right)$. Bei einem Widerstand ist die Wirkleistung P proportional zum Quadrat des Effektivwertes $P \approx I_{\text{eff}}^2$ bzw. $P \approx U_{\text{eff}}^2$

Übliche Strom- und Spannungsmessgeräte sind immer so ausgelegt, dass sie für harmonische Zeitabhängigkeit den Effektivwert anzeigen, obwohl die interne Signalverarbeitung z.B. den Betragsmittelwert misst. Misst man mit einem solchen Messgerät nichtharmonische Zeitfunktionen wie Dreieck, Rechteck, Sägezahn, usw, so erhält man eine falsche Anzeige.

Scheitelfaktor SF

Als Scheitelfaktor bezeichnet man ganz allgemein das Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert. Für **harmonische Zeitabhängigkeit** beträgt der Scheitelfaktor $SF = \sqrt{2}$. Beim Widerstand ist der Scheitelfaktor gleich gross; für ein beliebiges Eintor kann er unterschiedliche Werte annehmen, wenn die Kurvenformen von Strom und Spannung voneinander abweichen.

Formfaktor FF

Der Formfaktor stellt das Verhältnis von Effektivwert zu Betragsmittelwert dar und wird gern zur Beurteilung der Kurvenform, insbesondere für nichtharmonische Wechselgrössen, herangezogen. Fpr harmonische Zeitabhängigkeit beträgt der Formfaktor $FF = \pi/(2\sqrt{2})$

3.3 Ein- und Ausschaltvorgänge

Im allgemeinen Fall sind der zeitliche Strom- und Spannungsverlauf unbekannte Grössen. Stellt man für ein beliebiges RLC-Netzwerk die Maschengleichung auf und setzt die ohmsche Gesetze ein, so resultiert eine **Differentialgleichung**. Die Lösung beschreibt die gesuchte Grösse, nämlich die zeitabhängige Spannung oder den zeitabhängigen Strom.

3.3.1 RC-Netzwerke