

1 DAS ELEKTROSTATISCHE FELD

1.1 Die elektrische Ladung

Atome beinhalten Kerne aus Nukleonen, nämlich aus Protonen und Neutronen, und um den Kern herum aus Elektronen. **Protonen** haben positive Ladung, **Neutronen** haben neutrale Ladung und **Elektronen** haben eine negative Ladung. Die Summe aller den Kern umkreisenden Elektronen bezeichnet man als **Elektronenhülle**. Die Kernbindung bleibt stabil aufgrund der starken Wechselwirkung zwischen den Nukleonen.

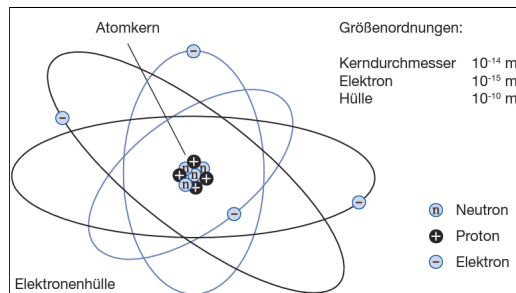


Abb. 1.1: Das Bohr'sche Atommodell

Die **Elementarladung** e ist die kleinste Ladungsmenge. Die Atome verhalten sich neutral dank der positiven Ladung der Protonen $+e$ und der negativen Ladung der Elektronen $-e$. Die **Ordnungszahl** ist die Anzahl an Protonen oder an Elektronen. Der Wert der Elementarladung e ist konstant und unabhängig vom Bewegungszustand des Teilchens. Die Teilchenmasse ist abhängig von der Geschwindigkeit bzw. der Bewegungszustand.

$$e = 1,60221892 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (1.1)$$

Durch chemische Reaktionen werden die Elektronen von den Atomen getrennt. Bei einem **Elektronenüberschuss** entstehen Kräfte als bei einem **Elektronenmangel**. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich gegenseitig ab. Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens ziehen sich gegenseitig an.

1.2 Das Coulomb'sche Gesetz

Die Kraft zwischen Ladungen Q_1 und Q_2 ist betragsmässig proportional zu jeder der beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r zwischen den Ladungen. Der Faktor

ϵ_0 ist die **elektrische Feldkonstante** oder Dielektrizitätskonstante des Vakuums.

$$F = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (1.2)$$

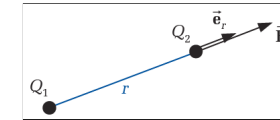


Abb. 1.2: Zwei Punktladungen gleichen Vorzeichens

Es wird angenommen, dass die geometrische Ausdehnung der Ladungen viel kleiner als der Abstand zwischen den Ladungen ist, daher spricht man von der Kraft zwischen **Punktladungen**. Mit der Festlegung eines Einheitsvektors \vec{e}_r kann die Kraft von der Punktladung Q_1 auf die Punktladung Q_2 zeigen. Haben beide Ladungen gleiche Vorzeichen, so wird die Ladung Q_2 von der Ladung Q_1 abgestossen.

Haben beide Ladungen unterschiedliche Vorzeichen, so wird die Ladung Q_2 von der Ladung Q_1 angezogen und die Kraft wirkt entgegengesetzte Richtung $-\vec{e}_r$ wirken.

$$\vec{F}_2 = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \vec{E}_1 \cdot Q_2 \quad \vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r \quad (1.3)$$

1.3 Die elektrische Feldstärke

Die zeitliche Abhängigkeit der Lage von Ladungen wird durch einen **elektrischen Feld** \vec{E} beschrieben unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Durch den Raum und Material wird zu jedem Zeitpunkt die Lage der Punktladungen bestimmt. Die **elektrische Feldstärke** \vec{E} hat die Dimension Vm^{-1} . Das elektrostatische Feld existiert auch wenn bei der Abwesenheit von Punktladungen keine Kräfte entstehen.

Eine positive Punktladung ruft im homogenen Raum eine radial nach aussen gerichtete elektrische Feldstärke hervor, die mit dem Quadrat des Abstandes von der Punktladung abnimmt. Bei einer negativen Punktladung zeigt der Feldstärkevektor zur Punktladung hin.

Die elektrische Feldstärke \vec{E} beschreibt die **Wirkung** des elektrischen Feldes. Sie ist eine **Intensitätsgrösse** und wird gemessen durch die auf Ladungen ausgeübte Kraftwirkung.

Die Kraft auf eine positive Punktladung hat die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke an der Stelle der Punktladung. Bei einer negativen Punktladung zeigen Feldstärke und Kraft in entgegengesetzte Richtungen.

1.4 Überlagerung von Feldern

Befindet sich eine Punktladung Q_1 im Ursprung des Kugelkoordinatensystems, so ruft sie die Feldstärke hervor. Der Vektor \vec{e}_r entspricht dem radialen Einheitsvektor des Kugelkoordinatensystems. Befindet sich die Punktladung Q_1 an der Quellenpunktskoordinate \vec{r}_Q und der Aufpunkt P mit Aufpunktskoordinate \vec{r}_P , an dem das Feld berechnet werden soll, dann ist die Richtung der Feldstärke im Aufpunkt P durch den Einheitsvektor \vec{e}_r und die Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}_P)$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.4)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \vec{e}_r \cdot k \cdot \frac{Q_1}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot k \cdot \frac{Q_1}{r^2} = k \cdot Q_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1.5)$$

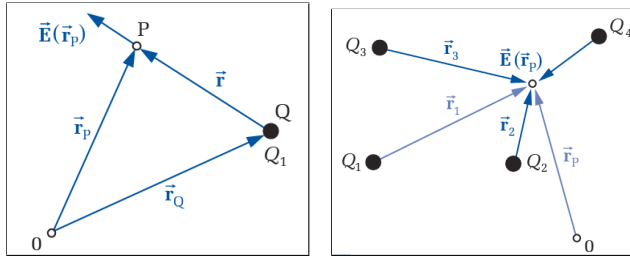


Abb. 1.3: **Links:** Berechnung der Feldstärke im Aufpunkt P . **Rechts:** Kräfte mehrerer Punktladungen

Sind 3 Ladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 an den Stellen \vec{r}_{Q_i} vorhanden, dann erhält man die Gesamtkraft auf die Punktladung Q_4 an die Stelle des Aufpunktes P durch lineare Überlagerung der einzelnen Kräfte, d.h. auch die gesamte elektrische Feldstärke ergibt sich durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungen hervorgerufenen Feldstärkebeiträge.

$$\vec{F}_4 = Q_4 \cdot \vec{E}(\vec{r}_{Q_4}) = Q_4 \cdot \vec{E}(\vec{r}_P) \quad (1.6)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = k \cdot \sum_{i=1}^3 \left(Q_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \quad \vec{r}_i = \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_i} \quad r_i = |\vec{r}_i| \quad (1.7)$$

Die Kräfte auf die Punktladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 können berechnet werden aus der Gleichgewichtsbedingung $\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{0}$, da alle zwischen jeweils zwei Punktladungen wirkenden Teilkräfte entgegengesetzt gleich gross sind.

1.5 Ladungsdichten

Ist eine Gesamtladung Q gleichmässig auf einer Linie der Länge l verteilt, dann bezeichnet man den Quotienten $\lambda = Ql^{-1}$ als **Linienladungsdichte** und hat die Dimension Asm^{-1} . Sind die einzelnen Ladungsträger nicht homogen verteilt, dann ist die Ladungsdichte ortsabhängig. Befindet sich auf einem elementaren Abschnitt der Länge Δl die elementare Ladungsmenge ΔQ , dann beschreibt der Quotient $\lambda = \Delta Q \cdot \Delta l^{-1}$ die mittlere Linienladungsdichte auf dem betrachteten Abschnitt.

Will man den Wert λ für einen bestimmten Punkt P auf der Linie angeben, dann muss man die elementare Länge Δl gegen Null gehen lassen so dass sie den Punkt P jederzeit einschliesst. Die Linienladungsdichte in P lautet

$$\lambda(P) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad Q = \int_l \lambda dl \quad (1.8)$$

Die gleichmässige Verteilung einer Gesamtladung Q auf einer Fläche A führt auf analoge Weise zu einer **Flächenladungsdichte** $\sigma = QA^{-1}$ der Dimension Asm^{-2} . Für eine ortsabhängige Ladungsverteilung gibt das Verhältnis $\sigma = \Delta Q \Delta A^{-1}$ die mittlere Flächenladungsdichte auf dem betrachteten elementaren Flächenelement ΔA an. Im Grenzübergang $\Delta A \rightarrow 0$ erhält man wieder die Flächenladungsdichte in einem betrachteten Punkt aus dem Differentialquotienten

$$\sigma(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA} \quad Q = \iint_A \sigma dA \quad (1.9)$$

Die **Raumladungsdichte** $\rho = QV^{-1}$ der Dimension Asm^{-3} im Falle einer homogenen Ladungsverteilung aus dem Verhältnis von Gesamtladung Q zu ladungsbesetztem Volumen V . Bei ortsabhängiger Ladungsverteilung beschreibt das Verhältnis $\rho = \Delta Q \Delta V^{-1}$ die mittlere Raumladungsdichte in dem betrachteten elementaren Volumenelement ΔV . Im Grenzübergang erhält man wieder die Raumladungsdichte in einem betrachteten Punkt P aus dem Differentialquotienten

$$\rho(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad Q = \iiint_V \rho dV \quad (1.10)$$

1.6 Darstellung von Feldern

Als **Feldlinien** bezeichnet man Raumkurven, deren gerichtetes Wegelement immer in Richtung der Feldstärke zeigt. Die Feldlinien werden mit Pfeile versehen, deren Spitzen in Richtung der Feldstärke zeigen. Die Richtung der Feldstärke ist an jeder Stelle entlang der Feldlinie durch die Tangente an die Feldlinie gegeben.

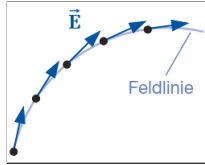


Abb. 1.4: Konstruktion der Feldlinie.

Die Dichte der in einem Feldlinienbild eingezeichneten Feldlinien kann in vielen Fällen sogewählt werden, dass sie ein Mass für den Betrag der Feldstärke darstellt.

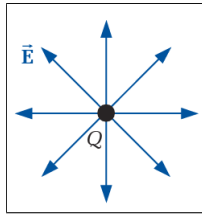


Abb. 1.5: Feldlinienbild einer positiven Punktladung.

Die Feldlinien gehen immer von der positiven Ladungen aus und enden auf den negativen. Man nimmt an, dass die zugehörigen negativen Ladungen auf einer unendlich fernen Hülle sich befinden, ihr Beitrag zur Feldstärke wird dann bei der Berechnung vernachlässigt. Zur Vereinfachung nimmt man an, dass sich die zugehörigen negativen Ladungen auf der **unendlich fernen Hülle** befinden, ihr Beitrag zur Feldstärke wird dann bei der Berechnung vernachlässigt. Die elektrische Feldstärke zeigt radial und nach ausse und ist abhängig nur vom Abstand zur Punktladung Q .

Einen weiteren Sonderfall bildet das **homogene Feld**, bei dem die Feldstärke überall die gleiche Richtung und den gleichen Betrag aufweist. Ein derartiges Feld lässt sich nur näherungsweise und auch nur in einem begrenzten räumlichen Bereich realisieren.

1.7 Feldbild für zwei Punktladungen

Das Feldlinienbild zweier Punktladungen Q_1 und Q_2 , die sich auf der y -Achse an den Stellen $y = a$ und $y = -a$ befinden wird wie folgt berechnet. Die elektrische Feldstärke in einem allgemeinen Punkte in der xy -Ebene wird zunächst berechnet.

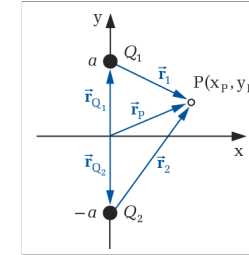


Abb. 1.6: Feldlinienbild zweier Punkte.

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_1} = x_P \vec{e}_x + (y_P - a) \vec{e}_y \\
 \vec{r}_2 &= \vec{r}_P - \vec{r}_{Q_2} = x_P \vec{e}_x + (y_P + a) \vec{e}_y \\
 r_1 &= \sqrt{x_P^2 + (y_P - a)^2} \\
 r_2 &= \sqrt{x_P^2 + (y_P + a)^2} \\
 \vec{E}(\vec{r}_P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[Q_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + Q_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(Q_1 \frac{x_P}{r_1^3} + Q_2 \frac{x_P}{r_2^3} \right) \vec{e}_x + \left(Q_1 \frac{y_P - a}{r_1^3} + Q_2 \frac{y_P + a}{r_2^3} \right) \vec{e}_y \right]
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Die Auswertung dieser Beziehung für die beiden Sonderfälle gleicher $Q_1 = Q_2 = Q$ bzw. entgegengesetzt gleicher Punktladungen $Q_1 = Q, Q_2 = -Q$ ist in folgendes Bild zu betrachten.

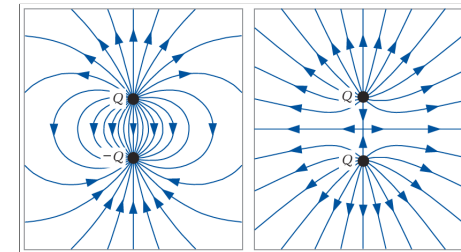


Abb. 1.7: **Links:** sich anziehende Ladungen. **Rechts:** sich abstoßende Ladungen

1.8 Das elektrostatische Potential

Eine Punktladung Q kann von einem äusseren elektrischen Feld oder von anderen Ladungen eine Kraft ausüben. Soll diese Ladung von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 verschoben werden, dann

muss gegen diese Feldkräfte eine Arbeit aufgewendet werden. Die erforderliche Arbeit ist

$$W_e = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.12)$$

Der Wert W_e beschreibt die von aussen dem System zugeführte Energie. Der Sonderfall, dass eine Ladung Q entlang eines geschlossenen Weges, beginnend beim Punkt P_0 entlang der Kontur C_1 zum Punkt P_1 und anschliessend entlang der Kontur C_2 wieder zurück zum Punkt P_0 bewegt wird. Die insgesamt geleistete Arbeit verschwindet, d.h. das Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_1 ist entgegengesetzt gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke entlang der Kontur C_2 . Die geschlossene Kontur C setzt sich aus den beiden Konturen C_1 und C_2 zusammen.

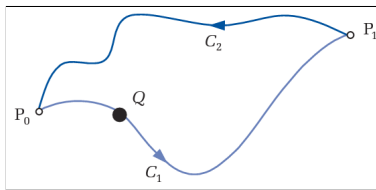


Abb. 1.8: Bewegung einer Punktladung entlang eines geschlossenen Weges.

$$\begin{aligned} W_e &= -Q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= -Q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Das Verschwinden des entlang einer geschlossenen Kontur gebildete Umlaufintegral im elektrostatischen Feld entsteht aus der Tatsache der Rechnung, dass die elektrischen Feldlinien bei den positiven Ladungen beginnen und bei den negativen enden. Die Ladungen stellen die Quellen für das elektrostatische Feld dar. Dieses wird daher als **Quellenfeld** bzw. **Wirbelfeld** bezeichnet.

Das **Gravitationsfeld** ist auch ein Quellenfeld, wobei die Quellen in diesem Fall durch die Massen gegeben sind. Wird ein Körper der Masse m gegen die Kräfte eines Gravitationsfeldes von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 bewegt, dann ist dafür eine Arbeit aufzuwenden, die zu einer Erhöhung der potentiellen Energie des Körpers um den Betrag der geleisteten Arbeit führt.

Analog führt die Bewegung einer Ladung gegen die Kräfte des **elektrischen Feldes** zu einer Erhöhung der Energie dieser Ladung, die auch in diesem Fall gleich dem Betrag der geleisteten Arbeit ist. Man spricht auch hier von der **potentiellen Energie der Ladung** und beschreibt damit die

Möglichkeit dieser Ladung, durch Abgabe ihrer potentiellen Energie Arbeit leisten zu können.

Der Zuwachs an potentieller Energie bei einer Bewegung der Ladung Q von einem Punkt P_0 zu einem Punkt P_1 ist gegeben durch das Produkt aus dem Wert der Ladung und dem negativen Wegintegral der elektrischen Feldstärke. Das Wegintegral ist nicht von dem Verlauf des gewählten Weges, sondern vom Anfangs- und Endpunkt abhängig.

Wählt man ausgehend von einem Bezugspunkt P_0 unterschiedliche Endpunkte für den Integrationsweg, dann unterscheiden sich die Ergebnisse bei der Berechnung der potentiellen Energie nur durch den Wert einer skalaren Grösse. Damit kann jeder Punkt des Raumes, bezogen auf diesen Bezugspunkt durch eine skalare Grösse charakterisiert werden, für die Bezeichnung φ_e verwendet und als **elektrostatisches Potential** genannt wird mit Dimension V.

$$W_e = Q \cdot \left[\int_{P_0}^{P_1} (-\vec{E}) \cdot d\vec{s} \right] = Q \cdot [\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0)] \quad (1.14)$$

Der Zuwachs an potentieller Energie ist proportional zur Grösse der bewegten Ladung Q und zur Potentialdifferenz $\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0)$, die bei der Ladungsbewegung durchlaufen wird. Da in dieser Beziehung nicht das Potential selbst, sondern lediglich die Änderung des Potentials zwischen Anfangs- und Endpunkt von Bedeutung ist, kann dem gesamten Raum ein beliebiges konstantes Potential überlagert werden, ohne dass das Ergebnis davon beeinflusst wird.

Die Festlegung eines Bezugspunktes ist willkürlich und wird üblicherweise so vorgenommen, dass man der **Erde** oder auch der unendlichen fernen Hülle das Bezugspotential $\varphi_e = 0$ zuordnet. Die Erdoberfläche stellt aufgrund ihrer Leitfähigkeit eine Äquipotentialfläche dar. In Schaltungen wird üblicherweise der so genannten **Masse**, d.h. dem Minusanschluss bei einer Batterie oder dem an die Schaltung angeschlossenen metallischen Gehäuse der Bezugswert $\varphi_e = 0$ zugeordnet.

Legt man den Anfangspunkt P_0 so, dass $\varphi_e(P_0) = 0$ gilt, dann ist die absolute potentielle Energie einer Punktladung im Punkt P_1 durch die Beziehung

$$W_e(P_1) = Q [\varphi_e(P_1) - \underbrace{\varphi_e(P_0)}_0] = Q \varphi_e(P_1) \quad (1.15)$$

Umgekehrt lässt sich das **absolute Potential** in diesem Punkt aus der Beziehung herleiten.

$$\varphi_e(P_1) = \frac{W_e(P_1)}{Q} = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.16)$$

1.9 Das Potential einer Punktladung

Das von einer im Ursprung des Kugelkoordinatensystems befindlichen positiven Punktladung Q in einem beliebigen Punkt P hervorgerufene Potential wird hier berechnet. Die radial gerichtete Feld-

stärke ist durch folgende Gleichung gegeben.

$$\vec{F}_2 = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \vec{E}_1 \cdot Q_2 \quad \vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r \quad (1.17)$$

Bringt man eine zweite Punktladung Q_1 von der Stelle $r = r_1$ entgegen der Feldrichtung an die Stelle $r = r_2 < r_1$, dann muss folgende Arbeit geleistet werden.

$$\begin{aligned} W_e &= -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \underbrace{\vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{\vec{e}_r dr}_{d\vec{s}} \\ &= -Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \\ &= Q_1 \left(\underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}}_{\varphi_e(r_2)} - \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}}_{\varphi_e(r_1)} \right) = Q_1 \varphi_e(r_2) - Q_1 \varphi_e(r_1) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Verlegt man den Anfangspunkt r_1 auf die unendlich ferne Hülle $r_1 \rightarrow \infty$, dann gilt mit dem dort vorliegenden Bezugspotential $\varphi_e(\infty) = 0$ für die Energie der Punktladung Q_1 an der Stelle r_2

$$W_e = Q_1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = Q_1 \varphi_e(r_2) \quad \varphi_e(r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_2} \quad (1.19)$$

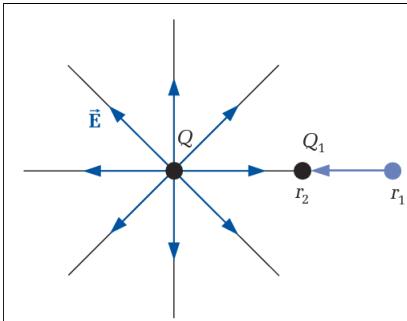


Abb. 1.9: Verschiebung einer Punktladung im Feld einer zweiten Punktladung

Der Ausdruck $\varphi(r_2)$ beschreibt das von der Punktladung Q an der Stelle $r = r_2$ hervorgerufene Potential. Dieses ist proportional zur Ladung und umgekehrt proportional zum Abstand von der Ladung. Die Arbeit ist positiv, wenn beide Ladungen gleiche Vorzeichen haben und sich gegenseitig abstoßen.

Die Gleichung $W_e = Q_1 \varphi_e(r_2) - Q_1 \varphi_e(r_1)$ beschreibt die aufzuwendende Arbeit bzw. die Zunahme der potentiellen Energie der Punktladung Q_1 , wenn diese von einem Punkt r_1 mit dem Potential $\varphi_e(r_1)$ zu einem Punkt r_2 mit dem Potential $\varphi_e(r_2)$ bewegt wird. Das Verschieben einer Ladung zwischen zwei Punkten mit gleichem Potential erfordert als Integral über den gesamten Weg betrachtet keine Arbeit.

1.10 Die elektrische Spannung

Die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 kann durch einen Bezugspunkt P_0 berechnet werden. Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes P_0 und wird als elektrische Spannung U zwischen den Punkten P_1 und P_2

$$\begin{aligned} \varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) &= - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$U_{12} = \varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.21)$$

1.11 Die Kapazität

Die Spannung U und die Ladung Q sind zueinander proportional. Diese Proportionalität gilt unabhängig von der geometrie der Anordnung. Der Proportionalitätsfaktor C wird als **Kapazität** bezeichnet und hat Dimension $F=As/V$.

$$Q = C \cdot U \quad (1.22)$$

Unter der Kapazität versteht man das Verhältnis aus der aufgenommenen Ladung Q zu der angelegten Spannung U . Sie ist ein Mass für die Fähigkeit eines Körpers, Ladungen zu speichern.

$$Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_A \sigma dA \quad U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.23)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (1.24)$$

Während die Kapazität die Eigenschaft der Leiteranordnung (Fassungsvermögen) beschreibt, wird eine Anordnung mit dieser Eigenschaft als **Kondensator** (als Bauelement) bezeichnet. Allgemein spricht man von einem Kondensator, wenn zwei leitende Beläge mit entgegengesetzten , gleich grossen Ladungen vorhanden sind und alle Feldlinien, d.h. der gesamte elektrische Fluss, von der mit den positiven Ladungen besetzten Fläche zu der mit den negativen Ladungen besetzten Fläche gelangen.

2 STATIONÄRES ELEKTRISCHES STRÖMUNGSFELD

Folgender Kapitel betrachtet der physikalische Vorgang einer im zeitlichen Mittel konstanten Ladungsträgerbewegung. Hiermit wird das Ohmsche Gesetz, Energie und Leistung eines stationären Strömungsfeld durch die Stromdichte und die elektrischer Feldstärke. Randbedingungen an Materialsprungstellen werden noch behandelt.

2.1 Der elektrische Strom

Auf zwei geladenen Körpern namens **Elektroden** befinden sich die entgegengesetzt gleichen Gesamtladungen $+Q$ und $-Q$. Die Elektrode 1 mit Ladung $+Q$ besitzt das Potential φ_{e1} und die Elektrode 2 mit Ladung $-Q$ das Potential $\varphi_{e2} < \varphi_{e1}$.

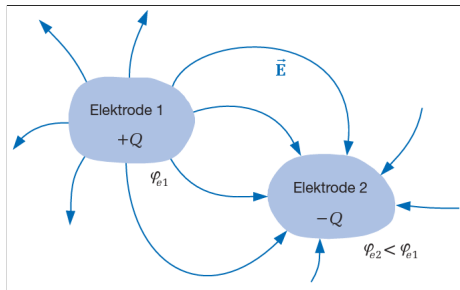


Abb. 2.1: Zwei Elektroden mit entgegengesetzten Ladungen.

Die elektrische Feldlinien verlaufen von den positiven Ladungen der Elektrode 1 zu den negativen Ladungen der Elektrode 2. Zwischen den Elektroden besteht die Spannung U_{12} aus der Differenz der Potentiale beider Elektroden.

$$U_{12} = \varphi_{e1} - \varphi_{e2} \quad (2.1)$$

Mit Hilfe eines Drahtes stellt man eine leitende Verbindung zwischen den beiden Elektroden her, in der sich die Elektronen frei bewegen können. Die wirkende Kraft auf die Ladungsträger führt dazu, dass ein Ladungsausgleich zwischen den beiden Elektroden stattfindet. Dieser Vorgang ist dann beendet, wenn im Draht zwischen den Elektroden keine elektrische Feldstärke, d.h. zwischen ihnen keine Spannung mehr vorhanden ist. Beide Elektroden besitzen in diesem Endzustand das gleiche Potential.

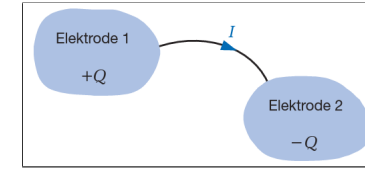


Abb. 2.2: Ladungsträgerbewegung zwischen Elektroden unterschiedlichen Potentials.

Die Bewegung der Ladungsträger bezeichnet man als **elektrischen Strom**. Die Richtung eines positiven Stromes ist so definiert, dass er von der Elektrode höheren Potentials zur Elektrode niedrigeren Potentials fließt. Er hat damit innerhalb der leitenden Verbindung die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke.

Die negativen Ladungsträger (Elektronen) bewegen sich entgegengesetzt zur festgelegten Stromrichtung, d.h. von der Elektrode niedrigeren Potentials zur Elektrode höheren Potentials. Den durch einen Transport von Ladungsträgern verursachten Strom nennt man **Konventionsstrom**. Im Gegensatz dazu tritt bei zeitabhängigen Vorgängen der so genannte **Verschiebungsstrom** auf, der proportional zur zeitlichen Ableitung der Verschiebungsdichte $\partial \vec{D} / \partial t$ ist.

An einer beliebigen Stelle der leitenden Verbindung betrachtet man deren gesamte Querschnittsfläche. Während eines kleinen Zeitabschnittes Δt erfasst man alle Ladungsträger, die diese Querschnittsfläche in einer bestimmten Richtung durchströmt. Das Produkt aus der Summe dieser Ladungsträger und dem Wert der Elementarladung stellt eine **Ladungsmenge** dar, die man mit ΔQ bezeichnet. In der Zeitspanne Δt während des Ausgleichsvorgangs fließt durch die leitende Verbindung von der Elektrode 1 zur Elektrode 2 die Ladungsmenge ΔQ .

Das Verhältnis aus der transportierten Ladungsmenge ΔQ und der betrachteten Zeit Δt bezeichnet man als **Stromstärke** I und hat Dimension A. Die **mittlere Stromstärke** in dem betrachteten Zeitabschnitt Δt lautet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Interessiert man sich für den Wert der Stromstärke in einem Augenblick zu einem beliebigen Zeitpunkt t , dann muss man die Dauer des Zeitabschnitts Δt gegen Null gehen lassen und zwar so, dass der Zeitpunkt t immer innerhalb von Δt verbleibt. Die Stromstärke in dem betrachteten Zeitpunkt lässt sich dann als Differentialquotient schreiben. Die **momentane Stromstärke** bei einem beliebigen Zeitpunkt t lautet

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (2.3)$$

Die obigen Gleichungen enthalten keine Information über die örtliche Verteilung der Ladungsträgerbewegung innerhalb der leitenden Verbindung.

2.2 Die Stromdichte

Zwischen zweier Elektroden besteht der Raum aus einem leitfähigen Material. Der von einer Elektrode 1 zur Elektrode 2 fließende Gesamtstrom I wird sich mit einer ortsabhängigen **Dichte** über den gesamten Raum verteilen.

Um die Elektrode 1 legt man eine geschlossene Hüllfläche A . So soll A gewählt sein, dass die Bewegungsrichtung der Ladungsträger an jeder Stelle senkrecht zur Hüllfläche verläuft. Somit sei der Winkel α zwischen der Ladungsträgerbewegung in Richtung \vec{J} und der Flächennormalen \vec{n} überall Null. Durch ein elementares Flächenelement ΔA wird der elementare Anteil des Stromes ΔI hindurchtreten.

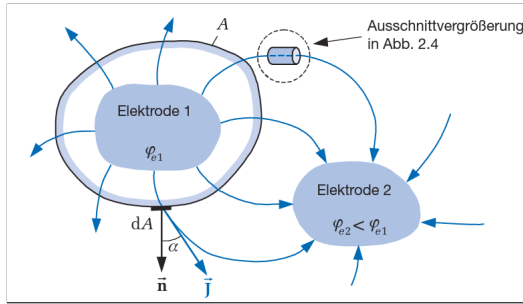


Abb. 2.3: Räumlich verteilter Stromfluss zwischen Elektroden unterschiedlichen Potentials.

Das Verhältnis aus elementarem Stromanteil und elementarem Flächenelement nennt man **Stromdichte** und hat Dimension Am^{-2} .

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta A}$$

(2.4)

Schneidet man aus dem stromführenden Bereich zwischen den beiden Elektroden ein elementares Volumenelement mit den Stirnseiten ΔA und der Mantelfläche M heraus. Das Volumenelement sei so gewählt, dass sich die Ladungsträger parallel zur Mantelfläche bewegen und seine Länge sei so klein, dass sich die Querschnittsfläche ΔA längs der Abmessung Δx nicht ändert.

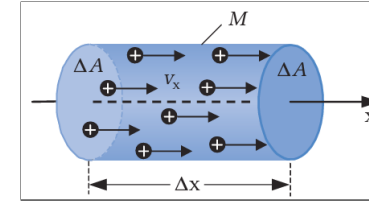


Abb. 2.4: Bewegung einer Raumladung in x -Richtung.

Sei die x -Achse eines Koordinatensystems parallel zur Bewegungsrichtung der Ladungsträger eingeführt. Bewegen sich die Ladungsträger mit der **Geschwindigkeit** v_x , dann benötigen sie zum Durchlaufen einer Strecke Δx die Zeit Δt .

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t \quad (2.5)$$

In einem Zeitabschnitt Δt werden diejenigen Ladungsträger die rechte Stirnseite der Stromröhre durchfließen, die sich zum Beginn des Beobachtungszeitraumes innerhalb der Stromröhre mit der Länge Δx befinden. Das Volumenelement ΔV entsteht aus der Ladungsmenge ΔQ mit dem **mittleren Raumladungsdichte** ρ . Dann entspricht die x -gerichtete **Stromdichte** J_x

$$\Delta Q = \rho \cdot \Delta V \quad \Delta V = \Delta A \cdot \Delta x \quad (2.6)$$

$$J_x = \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{\Delta Q}{\Delta A \cdot \Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho \cdot v_x \quad (2.7)$$

Eine grössere Stromdichte kann entweder durch eine grössere Anzahl der am Ladungsträgertransport beteiligten Elementarladungen im Volumen oder durch eine höhere Geschwindigkeit zustande kommen.

Im dreidimensionalen Fall durch den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ ist die Stromdichte

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v} = (-\rho) \cdot (-\vec{v}) \quad (2.8)$$

Bei **positiven Raumladung** ($\rho > 0$) zeigen Stromdichte \vec{J} und Geschwindigkeit \vec{v} in die gleiche Richtung. Bei einer **negativen Raumladung** ($\rho < 0$) zeigt die Kraft auf die Ladungsträger in die entgegengesetzte Richtung, so dass sich die Bewegungsrichtung und damit auch das Vorzeichen von \vec{v} ebenfalls umkehrt. Das Produkt ist für beide Ladungsträgerarten gleich.

Betrachtet man wieder die **Abbildung 2.4** eine beliebig geformte Hüllfläche A , mit der senkrecht auf der Fläche stehenden Flächennormalen \vec{n} der Länge $|\vec{n}| = 1$ und erweitert man das skalare Flächenelement dA auf das vektorielle Flächenelement $d\vec{A} = \vec{n} dA$, das mit der an dem Ort des Flächenelements vorliegenden Stromdichte \vec{J} den Winkel α einschliesst. Den elementaren

Strom durch dA erhält man aus der Multiplikation von dA mit der senkrecht zu dA stehenden Komponente der Stromdichte \vec{J} bzw. aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren

$$dI = |\vec{J}| \cdot dA \cdot \cos(\alpha) = \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

Zur Berechnung des Gesamtstromes durch eine Fläche A müssen die Beiträge über die Fläche integriert werden

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.10)$$

Soll der Strom zwischen den Elektroden unabhängig von der Zeit immer einen konstanten Wert aufweisen, dann müssen die von den Elektroden abfliessenden Ladungsträger immer wieder nachgeliefert werden. Da die Ladungsträger weder erzeugt noch vernichtet werden können, ist im stationären Zustand die innerhalb eines umschlossenen Volumens vorhandene Summe der Ladungsträger zeitlich konstant und das obige Integral über eine geschlossene Fläche verschwindet.

$$I = \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.11)$$

2.3 Ladungsträgerbewegung im Leiter

Ladungsträger können sich in einem Material zwischen den beiden Elektroden bewegen. Bei Metallen sind die Elektronen auf der äusseren Schale praktisch ungebunden. Sie können sich relativ frei innerhalb des Atomverbandes bewegen. Ein Material mit frei beweglichen Elektronen bezeichnet man als **Leiter**. Die positiven Ladungsträger (Protonen) sind dagegen ortsfest. In einem Metal bewegen sich die Elektronen ohne äussere Einflüsse ungeordnet zwischen den Atomen hin und her. Da sie sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jede Richtung bewegen können, verschwindet der über alle Elektronen gebildete Mittelwert ihrer Bewegungen.

Ein **Konventionsstrom** ist nach aussen nicht feststellbar. Diese Situation ändert sich, wenn eine elektrische Feldstärke \vec{E} vorhanden ist. Die Elektronen erfahren als negative Ladungsträger nach dem Coulomb'schen Gesetz eine Kraft, die entgegengesetzt zur elektrischen Feldstärke gerichtet ist. Ihrer bisherigen stückweise geradlinigen Bewegung ist eine permanente Beschleunigung in eine von der Feldstärke aufgeprägte Richtung überlagert.

Diese beschleunigte Bewegung wird immer wieder unterbrochen durch Zusammenstösse, einerseits mit den ortsfesten Atomen im Gitter und andererseits infolge der Unregelmässigkeiten im Gitteraufbau. Dabei werden die Elektronen an den Stossstellen sowohl gestreut, d.h. ihre Bewegungsrichtung ändert sich, als auch abgebremst, wobei sie ihre kinetische Energie zum Teil verlieren.

Die fortwährend erneute Beschleunigung verleiht den Elektronen im Mittel aber eine so genannte

Driftgeschwindigkeit \vec{v}_e , die proportional zum Betrag der elektrischen Feldstärke ist. Den Proportionalitätsfaktor μ_e zwischen der Driftgeschwindigkeit und der Feldstärke bezeichnet man als **Beweglichkeit**. Das Minuszeichen bringt die unterschiedlichen Richtungen der beiden Vektoren, nämlich der Feldstärke und der ihr entgegengesetzt gerichteten Elektronenbewegung. Die Beweglichkeit μ_e ist eine positive Grösse.

$$\vec{v}_e = -\mu_e \cdot \vec{E} \quad (2.12)$$

Angenommen die elektrische Feldstärke sei x -gerichtet, dann legen die Elektronen in einem endlichen Zeitintervall Δt einen mittleren Weg Δs in negativer x -Richtung zurück. Verlässt ein Elektron sein Atom, dann entsteht ein als **Ion** bezeichnetes positiv geladenes Atom. Wird diese freigewordene Stelle von einem nachrückenden Elektron besetzt, dann haben sich nicht nur Elektronen entgegen der Feldstärkerichtung bewegt, sondern die frei werdenden Stellen bewegen sich in Richtung der Feldstärke.

2.4 Die spezifische Leitfähigkeit und der spezifische Widerstand

Mit folgenden Gleichungen wird einen Zusammenhang zwischen der Stromdichte \vec{J} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} erzeugt.

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v} \quad \vec{v}_e = -\mu_e \cdot \vec{E} \quad (2.13)$$

Bezeichnet man mit n die **Ladungsträgerkonzentration**, d.h. die Anzahl der freien Elektronen pro Volumen, dann gilt mit der **Raumladungsdichte** $\rho = -n \cdot e$ und der **Driftgeschwindigkeit** \vec{v}_e der Elektronen die Beziehung

$$\vec{J} = (-n \cdot e) \cdot \vec{v}_e = n \cdot e \cdot \mu_e \cdot \vec{E} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (2.14)$$

Die Abkürzung κ wird als **spezifische Leitfähigkeit** bezeichnet und hat die Dimension $\Omega^{-1}m^{-1}$. In vielen Fällen wird anstelle der spezifischen Leitfähigkeit deren Kehrwert verwendet. Diese als **spezifischer Widerstand** ρ_R bezeichnete Materialeigenschaft ist zusammen mit der spezifischen Leitfähigkeit für verschiedene Materialien angegeben. Der Index R (resistivity) wird hier verwendet, um Verwechslungen mit der mit gleichem Buchstaben bezeichneten Raumladungsdichte zu vermeiden. Aus technischen Gründen wird vielfach nicht die Einheit Ωm , sondern $\Omega mm^2 m^{-1}$, verwendet.

$$\rho_R = \frac{1}{\kappa} \quad (2.15)$$

In der Praxis lässt sich eine Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Temperatur feststellen. In den meisten technischen Anwendungen ist der auftretende Temperaturbereich soweit begrenzt, dass die Temperaturabhängigkeit $\rho_R(\theta)$ durch eine lineare Näherung hinreichend genau beschrieben werden kann. Mathematisch stellt man diesen Zusammenhang durch folgende Gleichung dar

$$\rho_R(\theta) = \rho_{R,20^\circ C} \cdot \left[1 + \alpha(\theta - 20^\circ C) \right] = \rho_{R,20^\circ C} \cdot (1 + \alpha \Delta \theta) \quad (2.16)$$

Darin beschreibt $\rho_{R,20^\circ\text{C}}$ den angegebenen spezifischen Widerstand bei der Umgebungstemperatur $\theta_u = 20^\circ\text{C}$ und der Temperaturkoeffizient α beschreibt den linearen Anstieg des spezifischen Widerstandes mit der Temperatur θ .

Eine noch bessere Beschreibung der Temperaturabhängigkeit lässt sich erreichen, wenn in der obigen Beziehung ein weiterer Korrekturfaktor hinzugefügt wird, der sich quadratisch mit der Temperatur ändert und die Abweichung des temperaturabhängigen spezifischen Widerstandes vom dem linearen Verlauf beschreibt.

$$\rho_R(\theta) = \rho_{R,20^\circ\text{C}} \cdot \left[1 + \alpha \Delta\theta + \beta (\Delta\theta)^2 \right] \quad (2.17)$$

Die **Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes** wird von verschiedenen Faktoren beeinflusst. Betrachte man zunächst die Metalle mit ihrem relativ regelmässigen Gitteraufbau. Die Beweglichkeit der freien Elektronen ist abhängig von der mittleren freien Weglänge zwischen zwei Zusammenstössen. Der Wert für die Beweglichkeit μ_e wird geringer mit abnehmender freier Weglänge. In Abhängigkeit von der Temperatur schwingen die Atome um ihre feste Gleichgewichtslage und zwar umso mehr, je höher die Temperatur wird.

Die Wahrscheinlichkeit der Stösse nehmen durch steigender Temperatur zu, die mittlere freie Weglänge wird kürzer und der spezifische Widerstand steigt an. Der Temperaturkoeffizient α ist daher positiv und liegt bei allen reinen Metallen in ähnlicher Grossenordnung.

Bei **Legierungen** führt der unregelmässige Gitteraufbau zu einer erhöhten Wahrscheinlichkeit für Zusammenstösse der Elektronen mit den Gitteratomen. Der spezifische Widerstand ist bei Legierungen daher wesentlich grösser. Gleichzeitig spielt der Einfluss der thermischen Gitterschwingungen auf die Anzahl der Zusammenstösse nur noch eine untergeordnete Rolle, so dass der Temperaturkoeffizient deutlich geringer ist. Solche Legierungen werden bevorzugt benutzt zur Herstellung temperaturabhängiger Präzisionswiderstände.

Bei **Halbleitern** nimmt die Beweglichkeit μ_e der freien Ladungsträger mit steigender Temperatur zwar ebenfalls ab, ihre Zahl pro Volumen steigt aber an, so dass die Leitfähigkeit dennoch zunimmt und der Temperaturkoeffizient einen negativen Zahlenwert besitzt.

2.5 Das Ohm'sche Gesetz

Der Zusammenhang zwischen der Stromdichte \vec{J} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} wird als **Ohm'sches Gesetz** bezeichnet. Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der im allgemeinen Fall dreidimensionalen Stromdichteverteilung und der zugehörigen Feldstärkeverteilung an jeder Stelle des Raumes. Die elektrische Feldstärke im stromdurchflossenen Leiter besitzt einen nicht verschwindenden Wert.

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (2.18)$$

Die Stromdichte kann sich aus drei vektoriellen Komponenten zusammensetzen, die ihrerseits wiederum von allen drei Koordinaten abhängen können. In manchen Fällen ist diese aufwändige Berechnung der Strömungsfelder unumgänglich, sehr häufig ist jedoch die Beschreibung und Lösung eines Problems mit integralen Grössen ausreichend.

Betrachte ein zylindrischer Leiter der Länge l und der Querschnittsfläche A aus einem homogenen Material der Leitfähigkeit κ . Die beiden Stirnseiten befinden sich auf den Potentialen φ_{e1} und $\varphi_{e2} < \varphi_{e1}$ und spielen die gleiche Rolle wie die beide Elektroden. Nimmt man an dass die beiden Elektroden aussen an eine Quelle angeschlossen werden, die die abfliessenden Ladungsträger immer wieder nachliefert, dann wird von der Elektrode höheren Potentials ein Gleichstrom I zu der Elektrode mit niedrigerem Potential fliessen, der sich aus Symmetriegründen gleichmässig über den Leiterquerschnitt verteilt. Damit gilt

$$\vec{J} = J_x \cdot \vec{e}_x = \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_x \quad (2.19)$$

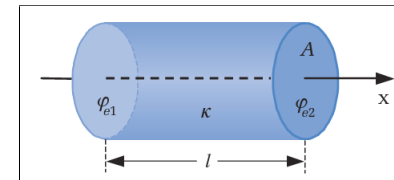


Abb. 2.5: Widerstand eines zylindrischen Leiters.

Aus dem Ohm'schen Gesetz ist die **elektrische Feldstärke** innerhalb des Leiters

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x = \frac{\vec{J}}{\kappa} = \frac{J}{\kappa} \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{\kappa} \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_x \quad (2.20)$$

Drückt man die zwischen den Elektroden anliegende Spannung durch das Wegintegral der Feldstärke aus, dann erhält man einen Zusammenhang zwischen der anliegenden Spannung und dem insgesamt fliessenden Strom.

$$\begin{aligned} U_{12} = \varphi_{e1} - \varphi_{e2} &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{x=0}^l \frac{1}{\kappa} \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x dx \\ &= \frac{I}{\kappa \cdot A} \int_{x=0}^l dx = \frac{I \cdot l}{\kappa \cdot A} \end{aligned} \quad U_{12} = R \cdot I \quad (2.21)$$

$$R = \frac{l}{\rho \cdot A} = \frac{\rho_R \cdot l}{A} \quad (2.22)$$

Der Proportionalitätsfaktor R heisst **elektrischer Widerstand** und hat die Dimension $VA^{-1} = \Omega$. Der Widerstand des betrachteten Zylinders ist durch die obige Beziehung definiert. Der Widerstand ist von der Geometrie der Anordnung und von den Materialeigenschaften abhängig.

Für den spezifischen Widerstand ρ_R des Materials in Funktion der Temperatur gilt analog für den Widerstand

$$R(\theta) = \rho_R(\theta) \cdot \frac{l}{A} = \rho_{R,20^\circ C} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \cdot \frac{l}{A} = R_{20^\circ C} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \quad (2.23)$$

Die Spannung U_{12} ist noch mit den beiden Indizes 12 behaftet, die die Zählrichtung der Spannung von der Elektrode 1 mit höherem Potential zu der Elektrode 2 mit niedrigerem Potential zum Ausdruck bringen. Da der Strom aber in der gleichen Richtung positiv gezählt wird, kann auf die beiden Indizes verzichtet werden. Daraus entsteht folgende Beziehungen

$$U = R \cdot I \quad (2.24)$$

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad R = \frac{U}{I} = \frac{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}} \quad (2.25)$$

Das Strom-Spannungs-Diagramm erzeugt eine Gerade, deren Steigung $\Delta I / \Delta U$ dem Kehrwert des Widerstandes entspricht. Ein grösserer Widerstand bedeutet eine geringere Steigung. Bei einer Temperatur von $20^\circ C$ hat ein Kupferdraht den Widerstand von 1Ω . Der gleiche Kupferdraht hat bei $100^\circ C$ einen Widerstand von 1.31Ω .

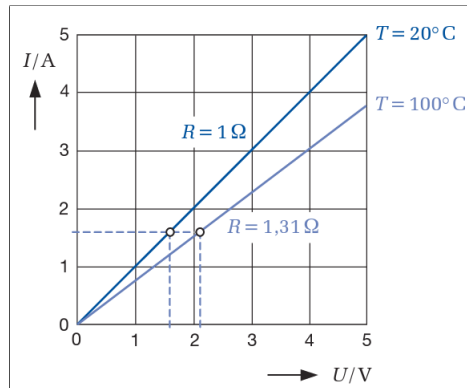


Abb. 2.6: Widerstandsgerade eines Kupferdrahtes bei unterschiedlichen Temperaturen.

Die zugehörige Widerstandsgerade im Strom-Spannungs-Diagramm hat jetzt einen flacheren Verlauf, d.h. bei gleichem Strom durch den Kupferdraht nimmt der Spannungsabfall entlang des Drahtes mit steigender Temperatur zu. Wird dagegen die an den Draht angelegte Spannung konstant gehalten, dann fliesst bei niedrigerer Temperatur wegen des geringeren Widerstandes ein grösserer Strom.

In vielen Fällen wird die Berechnung von Schaltungen dadurch erleichtert, dass man nicht den Widerstand, sondern seinen Kehrwert verwendet.

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.26)$$

G heisst **elektrischer Leitwert** des Widerstands und besitzt die Dimension $AV^{-1} = \Omega^{-1}$.

2.6 Praktische Ausführungsformen von Widerständen

Neben dem Widerstandswert sind insbesondere die Herstellungstoleranz, die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes, die maximal zulässige Verlustleistung, die Kurzzeitbelastung oder der Dauerbetrieb von besonderer Bedeutung.

2.6.1 Festwiderstände

Die **Festwiderstände** haben eine lineare Widerstandscharakteristik und genügen dem Ohm'schen Gesetz. Die Abstufung der Widerstandswerte entspricht den in den Normen festgelegtem E-Reihen. Die spezielle Kennzeichnung einer E-Reihe durch den betreffenden Zahlenwert gibt an, wie viele Werte innerhalb jeder Dekade liegen. Festwiderstände werden als **Schicht-**, **Draht-** oder **Massewiderstände** hergestellt.

Bei den **Schichtwiderständen** wird eine dünne Widerstandsschicht aus Kohle oder Metall auf einen zylindrischen Träger aus Keramik oder Glas aufgebracht. An den Enden werden Kappen aufgepresst und mit den Anschlüssen versehen. Zum Schutz wird das Bauelement mit einer Schicht aus Lack oder Kunststoff überzogen. Zur Herstellung grösserer Widerstandswerte wird die dünne Metall- oder Kohleschicht gewandelt ausgeführt.

Bei höheren Leistungen werden **Drahtwiderstände** eingesetzt, bei denen der Träger mit einem Draht umwickelt wird. Kleine Widerstandswerte können auf diese Weise leicht hergestellt werden, bei grösseren Werten wird spezieller Widerstandsdraht verwendet. Der Drahtquerschnitt begrenzt den maximal zulässigen Strom und die maximale Verlustleistung wird durch die Wärmeabfuhr, d.h. die Bauteilgrösse und die Ausführung der Oberfläche bestimmt. Zur Reduzierung parasitären Induktivitäten werden die Wicklungen **bifilar** ausgeführt, d.h. es werden zwei Drähte so nebeneinander gewickelt, dass sie in entgegengesetzter Richtung vom Strom durchflossen werden. Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung der parasitären Induktivitäten besteht darin, den Wickelsinn mehrfach umzudrehen.

Die **Massenwiderstände** besitzen keinen Träger, sondern bestehen insgesamt aus einem Widerstandsmaterial. Sie werden in verschiedenen Bauformen, bpsw. als Stäbe oder Scheiben, hergestellt.

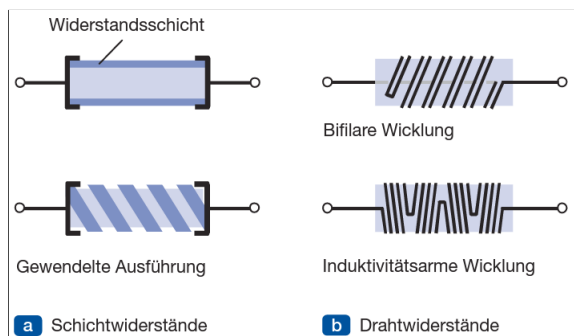


Abb. 2.7: Bauformen von Festwiderständen.

2.6.2 Einstellbare Widerstände

Bei einstellbaren Widerständen wird ein Schleifkontakt über das nicht isolierte Widerstandsmaterial bewegt. Bei einem **Schiebewiderstand** ist der Wickelkörper linear gestreckt, bei einem **Drehwiderstand** dagegen ringförmig ausgeführt. Üblicherweise spricht man bei diesen Bauelementen von **Potentiometern**, wenn sie im Betrieb immer wieder neu eingestellt werden, bzw. von **Trimpotentiometern**, wenn sie nur einmal, zum Abgleich einer Schaltung auf einen bestimmten Wert justiert werden.

2.6.3 Weitere Widerstände

Für besondere Aufgaben gibt es eine grosse Gruppe von nichtlinearen Widerständen, deren Verhalten von unterschiedlichen physikalischen Grössen abhängen kann.

Zu der **temperaturabhängigen Widerstände** gehören die **Heissleiter**, deren Widerstand mit steigender Temperatur kleiner wird. Sie werden als **NTC** (negative temperature coefficient) bezeichnet. Diese Bauelemente besitzen bei Raumtemperatur einen grossen Widerstand und begrenzen beim Einschalten eines elektronischen Gerätes dessen Einschaltstrom. Infolge der ohmschen Verluste werden sie stark aufgeheizt, wodurch ihr Widerstand sehr viel kleiner wird. Im Dauerbetrieb einer Schaltung verursachen sie dann lediglich geringe Verluste. Das temperaturabhängige Verhalten ist bei den als **PTC** (positive temperature coefficient) bezeichneten **Kaltleitern** genau umgekehrt.

Widerstände, deren Wert von der Spannung abhängt, werden als **VDR** (voltage dependent resistor) bezeichnet. Sie werden zur Spannungsschließung oder zur Unterdrückung von kurzzeitigen

Spannungsspitzen eingesetzt.

Eine weitere Gruppe sind die als **LDR** (light dependent resistor) bezeichneten lichtabhängigen Widerstände, die für Belichtungsmesse oder bei Helligkeitsabhängigen Steuerungen verwendet werden.

2.7 Energie und Leistung

Bei dem Stromleitungsmechanismus der Driftbewegung werden die Elektronen durch das anliegende Feld beschleunigt. Die Zunahme der kinetischen Energie wird dem Energieinhalt des elektrischen Feldes entnommen. Bezeichnet man mit ΔQ die transportierte elementare Ladung, dann ist die dem Feld entnommene elementare Energie ΔW_e aus dem Produkt der Ladung und der durchlaufenen Potentialdifferenz gegeben. Damit gilt der Zusammenhang

$$\Delta W_e = (\varphi_{e1} - \varphi_{e2}) \cdot \Delta Q = U \cdot \Delta Q = U \cdot I \cdot \Delta t \quad (2.27)$$

Die dem Feld entnommene Energie nimmt einen positiven Wert an, wenn bspw. eine positive Ladung ΔQ von einem höheren Potential φ_{e1} zu einem niedrigeren Potential φ_{e2} bewegt wird. Das Verhältnis aus geleisteter Arbeit ΔW_e und dazu benötigter Zeit Δt wird allgemein als **Leistung** bezeichnet und mit P abgekürzt.

$$P = \frac{\Delta W_e}{\Delta t} = U \cdot I \quad (2.28)$$

Bei den zeitlich konstanten Grössen Gleichspannung U und Gleichstrom I ist auch die Leistung P zeitlich konstant und somit unabhängig von der Wahl des elementaren Zeitabschnitts Δt . Sind dagegen Strom und Spannung zeitlich veränderliche Grössen, dann beschreibt P lediglich den Mittelwert der Leistung in den beiden betrachteten Zeitintervall. Interessiert man sich bei einem bestimmten Zeitpunkt t , dann muss man den Zeitabschnitt Δt gegen Null gehen lassen und zwar so, dass der Zeitpunkt t immer innerhalb von Δt verbleibt. Die Leistung in dem betrachteten Zeitpunkt lässt sich dann als Differentialquotient in der Form schreiben. Die Leistung hat die Dimension $VA=W$. Die elektrische Arbeit hat die Dimension kWh .

$$P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_e}{\Delta t} = \frac{dW_e}{dt} \quad W_e = \int_t P(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

Die berechnete Leistung wird an dem Widerstand in Wärme umgewandelt. Mit dem Ohm'schen Gesetz kann die Leistung an einem Widerstand R auch in der Form geschrieben werden. Da sowohl der Strom als auch die Spannung quadratisch auftreten, spielt ihre Zählrichtung keine Rolle. Der Wert von P beschreibt die an einem Widerstand R entstehende **Verlustleistung**.

$$\begin{aligned} P &= U \cdot I = (R \cdot I) \cdot I = R \cdot I^2 \\ &= U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bei vielen Problemstellungen fragt man sich nach der **örtlichen Verteilung** der in einem Volumen entstehenden Verluste. Zur Beantwortung dieser Frage betrachtet man das elementare Volumenelement $\Delta V = \Delta A \cdot \Delta x$. Die Querschnittsfläche ΔA sei hinreichend klein gewählt, so dass die in der eingetragene x -gerichtete Stromdichte als homogen über den Querschnitt verteilt angesehen werden kann. Zusätzlich sei Δx die Länge so klein, dass sich die Spannung linear über die Länge verteilt, d.h. die elektrische Feldstärke ist, genauso wie die Stromdichte, innerhalb des Volumens x -gerichtet und ortsunabhängig.

Ersetzt man die Spannung durch das Produkt aus Feldstärke und elementarer Länge und den Strom durch das Produkt aus Stromdichte und Querschnittsfläche, dann erhält man für die in dem elementaren Volumen entstehende elementare Verlustleistung die Beziehung

$$\Delta P = E \cdot \Delta x \cdot J \cdot \Delta A = (E \cdot \vec{e}_x) \cdot \Delta x \cdot (J \cdot \vec{e}_x) \cdot \Delta A = \vec{E} \bullet \vec{J} \cdot \Delta V \quad (2.31)$$

Das Verhältnis aus Verlustleistung ΔP und Volumenelement ΔV bezeichnet man als **Verlustleistungsdichte** p_V

$$p_V = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \vec{E} \bullet \vec{J} \quad (2.32)$$

Der Ausdruck beschreibt die mittlere Verlustleistungsdichte im elementaren Volumen ΔV , die in dem betrachteten homogenen Feld unabhängig von der Wahl des Volumenelementes ist. Für den allgemeinen Fall eines nicht homogenen Feldes kann die Verlustleistungsdichte p_V in einem beliebigen Punkt P angegeben werden, wenn man das Volumenelement gegen Null gehen lässt und zwar so, dass sich der Punkt P immer innerhalb von ΔV befindet. Die Verlustleistungsdichte wird dann als Differentialquotient geschrieben und kann aus dem Produkt von elektrischer Feldstärke $\vec{E}(P)$ und Stromdichte $\vec{J}(P)$ berechnet werden.

$$p_V(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV} \quad (2.33)$$

Ist im umgekehrten Fall die ortsabhängige Verlustleistungsdichte im gesamten Volumen bekannt, dann können die Gesamtverluste durch Integration über das Volumen berechnet werden

$$P = \iiint_V p_V dV = \iiint_V \vec{E} \bullet \vec{J} dV \quad (2.34)$$

3 EINFACHE ELEKTRISCHE NETZWERKE

Bei der Analyse elektronischer Schaltungen geht man in der Regel so vor, dass in einem ersten Schritt die realen Bauelemente durch einfache Ersatzschaltbilder ersetzt werden.

3.1 Definitionen

Unter einem **Zweipol** versteht man ein Bauelement mit zwei Anschlussklemmen. Für die Behandlung von Zweipolen in den Netzwerken ist nur noch ihr **Klemmenverhalten**, also der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am betreffenden Bauelement, von Interesse, die praktische Realisierung durch eine dreidimensionale Anordnung und die ortsabhängige Verteilung der Feldgrößen spielen keine Rolle mehr. Die Beschreibung erfolgt durch einfache skalare Beziehungen zwischen den an den Klemmen zugänglichen Größen Strom und Spannung.

Durch die Zusammenschaltung von Bauelementen entstehen **elektrische Netzwerke**. Zur vollständigen Beschreibung eines Netzwerks muss neben dem Klemmenverhalten aller Komponenten auch die Verknüpfung der Bauelemente untereinander bekannt sein. Die Zusammenschaltung bezeichnet man als **Topologie**.

Die grafische Darstellung von Netzwerken bezeichnet man als **Schaltbilder**. zur Darstellung der Bauelemente werden die Symbolsymbole verwendet. Die leitende Verbindung zwischen den Bauelementen wird als idealer Leiter angesehen und spielt bei der Schaltungsanalyse keine Rolle. Die einzelnen Verbindungen sollten möglichst geradlinig, kreuzungsfrei und ohne Richtungsänderungen dargestellt werden. Gleichzeitig sollte die Wirkungsrichtung bzw. die Signalflussrichtung den Normen entsprechend von links nach rechts oder von oben nach unten verlaufen.

3.2 Zählpfeile

Sei U_{12} die elektrische Spannung als das Wegintegral der elektrischen Feldstärke

$$U_{12} = \varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3.1)$$

Die beiden Indizes bei der Spannung verdeutlichen die Richtung, in der die Feldstärke integriert wird. Wendet man diese Beziehung auf die zylindrische Anordnung an, dann wird die Feldstärke von einem in der Äquipotentialfläche φ_{e1} liegenden Punkt P_1 bis zu einem in der Äquipotentialfläche φ_{e2} liegenden Punkt P_2 , d.h. die Richtung der x -Koordinate integriert. Die Spannung wird dann ebenfalls in der gleichen Richtung positiv gezählt und in einem Schaltbild mit einem **Zählpfeil** versehen. Eine Kennzeichnung mit den Zahlen 1 und 2 ist dann nicht mehr notwendig. Ist der Wert der Spannung positiv, dann stimmt die Richtung des elektrischen Feldes mit der Integrationsrichtung

und damit auch mit der **Zählrichtung für die Spannung** überein, der Pfeil zeigt von positiven zu negativen Ladungen.

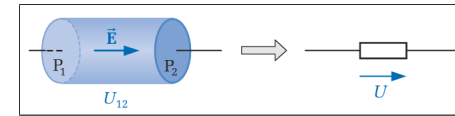


Abb. 3.1: Kennzeichnung der Spannung durch Zählpfeile.

Auf ähnlicher Weise wird ein Zählpfeil für den Strom vereinbart. Die Stromdichte erhält man durch die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger. Den Strom erhält man, indem man das Skalarprodukt aus der gerichteten Stromdichte mit dem vektoriellen Flächenelement über die zu betrachtende Fläche integriert. Je nach Orientierung der vektoriellen Fläche ergeben sich unterschiedliche Vorzeichen für den Strom. Nach Festlegung der Richtung von $d\vec{A}$ kann dem Strom eindeutig ein Zählpfeil in diese Richtung zugeordnet werden. Besitzt der Strom I einen positiven Wert, dann bewegen sich die positiven Ladungsträger in Richtung des vektoriellen Flächenelementes.

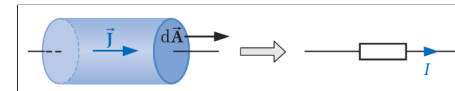


Abb. 3.2: Kennzeichnung des Stromes durch Zählpfeile.

Strom und Spannung sind skalare Größen. Dennoch werden ihnen in Schaltungen Pfeile zugeordnet. Diese Pfeile dienen der Zählweise und dürfen nicht mit Vektoren verwechselt werden. Ein Spannungspfeil in Richtung der elektrischen Feldstärke zeigt positive Spannungen an. Ein Strompfeil in **Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger** zeigt positive Ströme an.

3.3 Spannungs- und Stromquellen

Zur Aufrechterhaltung eines Gleichstromes in einer Schaltung müssen Quellen vorhanden sein, die die von den Elektroden abfließenden Ladungsträger immer wieder nachliefern. Betrachte man zunächst zwei Ladungen $+Q$ und $-Q$ auf zwei Platten eines Kondensators. An den Kondensator wird ein Verbraucher, symbolisiert durch einen Widerstand, angeschlossen, an den die im Kondensator gespeicherte Energie abgegeben werden soll. Da die auf der negativ geladenen Platte befindlichen Elektronen durch die angeschlossenen Drähte und den Widerstand zur positiv geladenen Platte fließen können, wird die anfänglich vorhandene Kondensatorspannung stetig abnehmen. Die aus dem Kondensator entnommene Energie wird im Widerstand in Wärme umgewandelt.

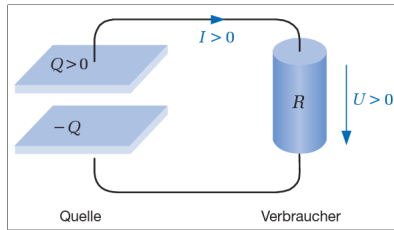


Abb. 3.3: Spannungsquelle und Verbraucher.

Der Kondensator in der vorliegenden Anordnung ist nur bedingt als Spannungsquelle einsetzbar. Einerseits nimmt seine Spannung zeitlich ab und andererseits kann er nur für einen begrenzten Zeitabschnitt Leistung abgeben, da lediglich die zuvor im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeicherte Energie zur Verfügung steht. Der üblicherweise verwendete Begriff Quelle ist etwas irreführend, da keine Energieerzeugung, sondern immer nur Energieumwandlung stattfindet. In einem Akkumulator wird beispielsweise chemische Energie in elektrische Energie umgewandelt, im betrachteten Beispiel wird die elektrische Energie des Kondensators in Wärmeenergie am Widerstand umgewandelt.

Von einer **idealen Gleichspannungsquelle** wird jedoch erwartet, dass sie die Spannung unabhängig von dem Belastungswiderstand zeitlich konstant hält. Eine Batterie bzw. ein Akkumulator mit hinreichend grosser Energiereserve kommt dieser Situation schon sehr nahe. Mit elektronischen Schaltungen, die die vom 230V-Netz angebotene Energie in eine Gleichspannung umwandeln, lassen sich nahezu ideale Spannungsquellen realisieren.

Für eine **ideale Spannungsquelle** gilt

- (i) die Ausgangsspannung ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk.
- (ii) der Strom hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich z.B. im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $I = U/R$ ein.

Für eine **ideale Stromquelle** gilt

- (i) der Ausgangsstrom ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk.
- (ii) die Ausgangsspannung hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $U = RI$ ein.

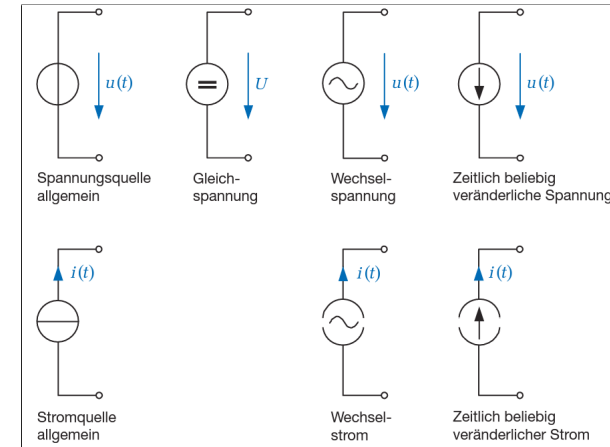


Abb. 3.4: Ideale Spannungs- und Stromquellen.

3.4 Zählfeilsysteme

Ein Zählfeilsystem am ohmschen Widerstand bei dem Strom und Spannung gleich gerichtet sind heisst **Verbraucherzählfeilsystem**. Für $U > 0$ wird der in die positive Anschlussklemme hineinfließende Strom positiv gezählt.

Für die Quellen verwendet man üblicherweise das **Generatorzählfeilsystem**, bei dem Spannung und Strom entgegengesetzt gerichtet sind. Der aus der positiven Anschlussklemme herausfließende Strom wird positiv gezählt. Diese Festlegung ist angepasst an den physikalischen Hintergrund, dass der Generator (Quelle) die Energie liefert, während der Verbraucher die Energie aufnimmt.

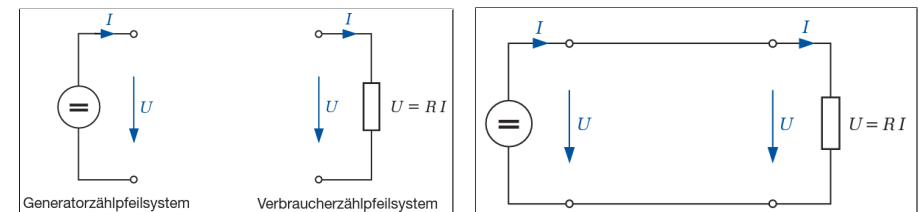


Abb. 3.5: Generator- und Verbraucherzählfeilsystem.

3.5 Die Kirchhoff'schen Gleichungen

Eine der Hauptaufgaben der **Netzwerkanalyse** besteht darin, die Ströme und Spannungen an den einzelnen Zweipolen auszurechnen, sofern die verwendeten Netzwerkelemente (Widerstände, Kondensatoren, usw.), ihre Verknüpfungen untereinander sowie die Quellen innerhalb des Netzwerkes bekannt sind.

Die schwarz ausgefüllten Markierungspunkte oder **Knoten** in dem Netzwerk zeigen an, dass die Leitungen an dieser Stelle elektrisch leitend miteinander verbunden sind, z.B. durch Zusammenschrauben oder Verlöten. Die Kreise markieren diejenigen Punkte im Netzwerk, zwischen denen die eingezeichnete Spannung gemessen wird.

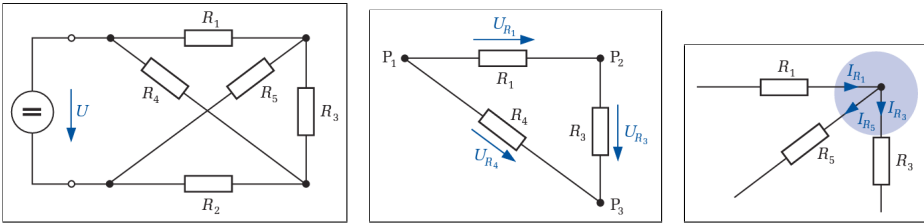


Abb. 3.6: Einfaches Netzwerk, Maschen- und Knotenregel.

Zur allgemeinen Netzwerkanalyse werden offenbar weitere Bestimmungsgleichungen benötigt. Einen ersten Zusammenhang erhält man aus dem Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke, welches entlang eines geschlossenen Weges verschwinden muss. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs betrachtet man eine **Masche** in dargestellten Netzwerk.

Nummeriert man die Verbindungspunkte gemäss einer Masche aus drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 mit drei Widerstände R_1 , R_2 und R_3 des Netzwerkes, dann kann die Gleichung mit den **Feldstärken** folgendermassen geschrieben werden

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{P_2}^{P_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{P_3}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.2)$$

Diese Gleichung lässt sich mit den eingetragenen Spannungen und den ihnen willkürlich zugeordneten Zählpfeilen folgendermassen schreiben.

$$U_{R_1} + U_{R_3} - U_{R_2} = 0 \quad (3.3)$$

Verläuft der Integrationsweg $d\vec{s}$ entgegen der willkürlich angenommenen Zählrichtung bei der Spannung, dann ist diese mit negativen Vorzeichen einzusetzen. Dieser lässt sich als **Maschenregel** bezeichnen und lässt sich für jede geschlossene Masche in der allgemeinen Form darstellen. Die

Summe aller Spannungen beim Umlauf in einer geschlossenen Masche ist Null. Spannungen, deren Zählpfeil in Umlaufrichtung verläuft, werden mit positivem Vorzeichen eingesetzt.

$$\sum_{\text{Masche}} U_{R_i} = 0 \quad (3.4)$$

Einen weiteren Zusammenhang erhält man aus dem Hüllflächenintegral der **Stromdichte**, das im stationären Strömungsfeld verschwindet.

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.5)$$

Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs betrachtet man einen **Knoten** an einem Netzwerk. Die obige Gleichung besagt, dass im stationären Zustand die Zahl der Ladungsträger innerhalb des markierten Bereiches zeitlich konstant sein muss, d.h. die Summe der zu dem Knoten hinfließenden Ladungsträger muss gleich sein zu der Summe der vom Knoten wegfließenden Ladungsträger.

Dieser Sachverhalt lässt sich mit den Strömen und den ihnen zugeordneten Zählpfeilen folgendermassen schreiben

$$I_{R_1} - I_{R_3} - I_{R_5} = 0 \quad (3.6)$$

Die Zählrichtung für die Ströme durch die Widerstände R_1 und R_3 am Knoten ist nicht mehr frei wählbar. Sie muss in Übereinstimmung mit den bereits festgelegten Zählpfeilen für die Spannungen entsprechend dem Verbraucherzählpfeilsystem festgelegt werden. Dieser lässt sich als **Knotenregel** bezeichnen und lässt sich für jeden Knoten in der allgemeinen Form darstellen. Die Summe aller zu einem Knoten hinfließenden Ströme ist gleich der Summe aller von dem Knoten wegfließenden Ströme.

$$\sum_{\text{Knoten}} I_{R_i} = 0 \quad (3.7)$$

Der Begriff Knoten gilt nicht nur für die betrachtete leitende Verbindung zwischen den Drähten, sondern er schliesst die Möglichkeit ein, einzelne Netzwerkelemente oder auch grössere Teile einer Schaltung als Bestandteile des Knotens anzusehen.

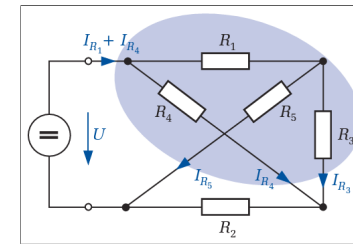


Abb. 3.7: Zur Verallgemeinerung des Begriffs Knoten.

Die Knotenregel bezieht sich in diesem Fall auf alle durch die Hüllfläche in Knoten hinein. bzw. aus dem Knoten herausfließenden Ströme. Mit den definierten Ströme erhält man die identische Beziehung

$$I_{R_1} + I_{R_4} = I_{R_3} + I_{R_4} + I_{R_5} \quad (3.8)$$

3.6 Einfache Widerstandsnetzwerke

Die Netzwerkanalyse kann dadurch vereinfacht werden, dass einzelne Teile eines Netzwerks vorab zusammengefasst werden. Dabei muss lediglich darauf geachtet werden, dass sich das Klemmenverhalten des neuen vereinfachten Netzwerks gegenüber dem ursprünglichen Netzwerk nicht ändert, d.h. beim Anlegen der gleichen Spannung an die Klemmen muss in beiden Fällen der gleiche Strom fließen. An dieser Stelle werden die beiden Möglichkeiten der Reihenschaltung und Parallelschaltung von Widerständen untersucht.

Bei der **Reihenschaltung** werden alle Widerstände von dem gleichen Strom durchflossen. Entsprechend dem Maschenumlauf setzt sich die gesamte an den Eingangsanschlüssen anliegende Spannung aus den Teilspannungen an den einzelnen Widerständen zusammen. Der Vergleich mit dem Netzwerk mit nur einem Gesamtwiderstand liefert unmittelbar das Ergebnis

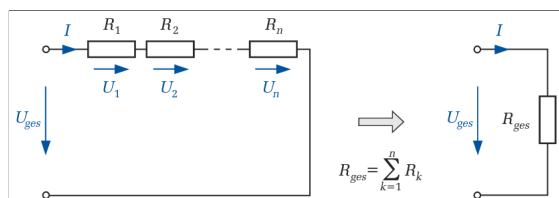


Abb. 3.8: Reihenschaltung von n Widerständen.

$$U_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n (R_k \cdot I) = \left(\sum_{k=1}^n R_k \right) \cdot I = R_{\text{ges}} \cdot I \quad (3.9)$$

$$R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n R_k$$

Bei der **Parallelschaltung** ist die Spannung an allen Widerständen gleich gross und der gesamte Eingangsstrom setzt sich aus den Strömen durch die einzelnen Widerstände zusammen. Bei der Parallelschaltung ist die Verwendung der Leitwerte sinnvoll. In diesem Fall liefert der Vergleich mit dem Ersatznetzwerk das Ergebnis

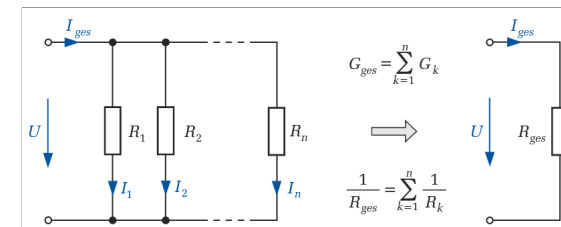


Abb. 3.9: Parallelschaltung von n Widerständen.

$$I_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{U}{R_k} \right) = U \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right) = \frac{U}{R_{\text{ges}}} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

$$G_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n G_k$$

Für den Sonderfall mit nur zwei parallel geschalteten Widerständen gilt dann

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.11)$$

Ein weiterer Sonderfall ist die Parallelschaltung von n gleichen Widerständen. Der resultierende Gesamtwiderstand nimmt in diesem Fall den Wert an.

$$R_{\text{ges}} = \frac{R}{n} \quad (3.12)$$

Daraus ergeben sich folgende Merkmale:

- (a) Bei der Reihenschaltung von Widerständen addieren sich die Werte der einzelnen Widerstände.
- (b) Bei der Reihenschaltung ist der Gesamtwiderstand grösser als der grösste Einzelwiderstand.
- (c) Bei der Parallelschaltung berechnet sich der gesamte Leitwert aus der Summe der einzelnen Leitwerte.
- (d) Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

3.6.1 Der Spannungsteiler - Reihenschaltung

Die **Reihenschaltung** von zwei Widerständen kann benutzt werden, um eine gegebene Spannung U mit höherer Genauigkeit in kleinere Teilspannungen umzuwandeln. Für den fest eingestellten Spannungsteiler will man das Spannungsverhältnis U_1/U_2 sowie das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung U_2/U bestimmen.

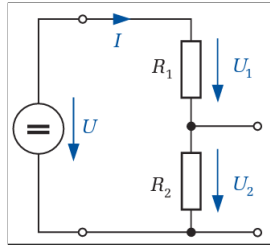


Abb. 3.10: Schaltung zur Spannungsteilung.

Somit besteht die Schaltung aus einer einzigen Masche, in der überall der gleiche Strom I fließt. Aus dem **Ohm'schen Gesetz** und mit der **Maschenregel** erhält man die Beziehungen

$$\boxed{U_1 = R_1 I} \quad \boxed{U_2 = R_2 I} \quad \boxed{-U + U_1 + U_2 = 0 \Rightarrow U = (R_1 + R_2) I} \quad (3.13)$$

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}} \quad \boxed{\frac{U_2}{U} = \frac{U_2}{U_1 + U_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3.14)$$

Fließt der gleiche Strom durch mehrere in Reihe geschaltete Widerstände, dann stehen die Teilspannungen im gleichen Verhältnis wie die Teilwiderstände, an denen sie abfallen.

Infolge des gleichen Stromes stehen die **Leistungen** an den Widerständen im gleichen Verhältnis zueinander wie die Spannungen und wie die Widerstände.

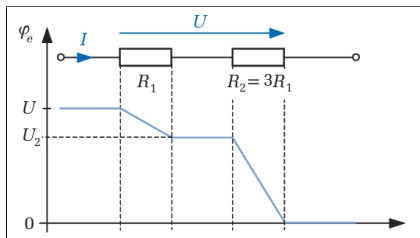


Abb. 3.11: Potentialverlauf an einer Reihenschaltung.

Die an einem Widerstand entstehende Teilspannung wird als **Spannungsabfall** bezeichnet. Definiert man das Potential am Minusanschluss der Spannungsquelle als Bezugswert $\varphi = 0$, dann besitzt das Potential am positiven Anschluss den Wert $\varphi_e = U$. Mit einem ortsunabhängigen Feldstärkeverlauf innerhalb der Widerstände nimmt das Potential linear ab und man erhält entlang der Reihenschaltung für ein angenommenes Widerstandsverhältnis dargestellten Potentialverlauf.

3.6.2 Der belastete Spannungsteiler

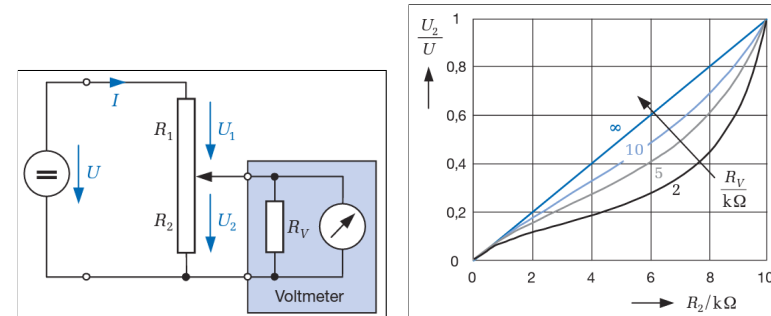


Abb. 3.12: **Links:** Belasteter Spannungsteiler. **Rechts:** Ausgangsspannung am belasteten Spannungsteiler für $R_1 + R_2 = 10\text{k}\Omega$.

Die Spannung an dem Schleifkontakt eines Potentiometers soll mit einem realen Spannungsmessgerät (**Voltmeter**) gemessen werden. Dabei ist zu beachten, dass fast alle Spannungsmessgeräte von einem kleinen Strom durchflossen werden, der die in **Gleichung des Spannungsteilers** berechnete Spannungsteilung beeinflusst und das Messergebnis verfälscht. Diesen Einfluss kann man erfassen, indem man das reale Messgerät durch ein ideales Messgerät mit unendlich grossem Innenwiderstand und zusätzlich durch einen parallel geschalteten Widerstand R_V ersetzt.

Die Berechnung der resultierenden Spannung U_2 wird wesentlich vereinfacht, wenn man die Parallelschaltung der beiden Widerstände R_2 und R_V durch einen neuen Widerstand R_{par} ersetzt und die Spannung U_2 aus der Reihenschaltung von R_1 und R_{par} bestimmen

$$\boxed{R_{\text{par}} = \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} \Rightarrow \frac{U_2}{U} = \frac{R_{\text{par}}}{R_1 + R_{\text{par}}} = \frac{R_2 R_V}{R_1 (R_2 + R_V) + R_2 R_V}} \quad (3.15)$$

3.6.3 Messbereich eines Spannungsmessgerätes

Ein Anwendungsbeispiel für den Spannungsteiler ist die Messbereichserweiterung eines Voltmeters. Soll mit dem Messgerät eine Spannung U gemessen werden, die die maximal zulässige Spannung am Voltmeter U_{max} überschreitet, dann kann die zu messende Spannung mit einem in Serie geschalteten Vorwiderstand R_S heruntergeteilt werden. Der Wert des Vorwiderstandes kann mit Hilfe der **Gleichung des Spannungsteilers** berechnet werden

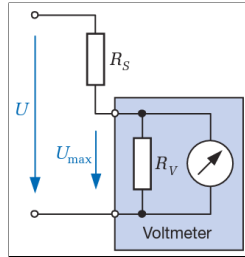


Abb. 3.13: Voltmeter mit Vorwiderstand.

$$\frac{U_{\max}}{U} = \frac{R_V}{R_S + R_V} \Rightarrow R_S = \left(\frac{U}{U_{\max}} - 1 \right) R_V \quad (3.16)$$

3.6.4 Der Stromteiler - Parallelschaltung

Zur Aufteilung eines Gesamtstromes in mehrere Teilströme werden Widerstände parallel geschaltet. Für eine Schaltung will man das Verhältnis I_1/I_2 sowie das Verhältnis von Ausgangsstrom zu Quellenstrom I_2/I bestimmen.

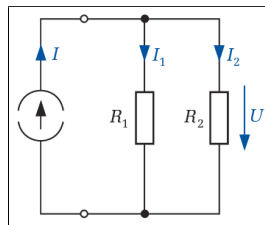


Abb. 3.14: Schaltung zur Stromleitung.

Mit der gleichen Spannung an den beiden parallel liegenden Widerständen gelten nach dem **Ohm'schen Gesetz** und mit der **Knotenregel** die Beziehungen

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad -I + I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow I = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = U \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad (3.17)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2} \quad \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad (3.18)$$

Liegt die gleiche Spannung an mehreren parallel geschalteten Widerständen, dann stehen die Ströme im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte, die sie durchfließen. Die **Leistungen** an den Widerständen verhalten sich wegen der gleichen Spannung wie die Ströme durch die Widerstände und stehen im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte.

3.6.5 Messbereich eines Strommessgerätes

Zur Messung eines Stromes wird das Messgerät (**Ampèremeter**) in den Strompfad geschaltet, sein Innenwiderstand R_A sollte daher möglichst gering sein, um das Messergebnis nur wenig zu beeinflussen. Soll ein Strom gemessen werden, der den maximal zulässigen Bereich des Ampèremeters I_{\max} überschreitet, dann kann der Gesamtstrom I durch einen parallel geschalteten Widerstand heruntergeteilt werden. Der Wert des Parallelwiderstandes kann mit Hilfe der **Gleichung des Stromleiters** berechnet werden.

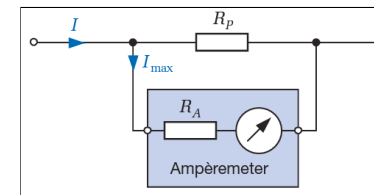


Abb. 3.15: Ampèremeter mit Parallelwiderstand.

$$\frac{I_{\max}}{I} = \frac{R_p}{R_p + R_A} \rightarrow R_p = \frac{I_{\max}}{I - I_{\max}} R_A \quad (3.19)$$

3.6.6 Widerstandsmessung

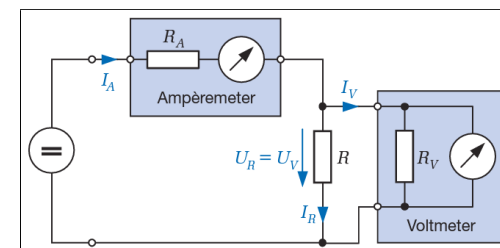


Abb. 3.16: Korrekte Spannungsmessung.

Bei der Schaltung der **Abbildung 3.16** wird die Spannung am Widerstand richtig erfasst, das Ampèremeter misst allerdings nicht nur den Strom I_R durch den Widerstand, sondern zusätzlich auch noch den Strom I_V durch das Voltmeter. Für den Widerstandswert R erhält man

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - U_V/R_V} = \frac{U_V R_V}{I_A R_V - U_V} \quad (3.20)$$

Der Innenwiderstand des Ampèremeters spielt bei dieser Messanordnung keine Rolle. Im Falle eines idealen Voltmeters $R_V \rightarrow \infty$ vereinfacht sich die obige Gleichung auf den Zusammenhang $R = U_V/I_A$, d.h. der Wert R kann direkt aus den beiden Messwerten berechnet werden.

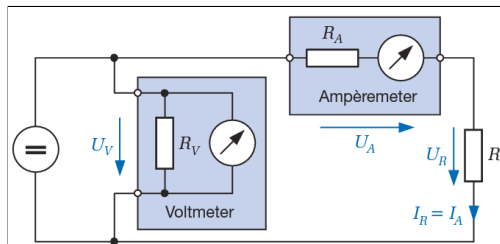


Abb. 3.17: Korrekte Strommessung.

Bei der alternativen Messanordnung wird der Strom durch den Widerstand richtig gemessen, allerdings wird jetzt der Spannungsabfall U_A am Innenwiderstand des Ampèremeters bei der Spannungsmessung miteingefasst. Den Widerstandswert erhält man aus der Beziehung

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A} \quad (3.21)$$

In diesem Fall spielt der Innenwiderstand des Voltmeters keine Rolle. Im Falle eines idealen Ampèremeters $R_A \rightarrow 0$ vereinfacht sich die obige Gleichung auf den Zusammenhang $R = U_V/I_A$, d.h. der Wert R kann wieder direkt aus den beiden Messwerten berechnet werden.

Allgemein stellt man sich die Aufgabe, den ohmschen Widerstand R eines Bauteils durch gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung und mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes zu bestimmen. Da das Ampèremeter den Strom durch den Widerstand messen soll, muss es in Reihe zum Widerstand geschaltet werden. Zur Erfassung der Spannung am Widerstand muss das Voltmeter aber parallel zum Widerstand angeschlossen werden.

3.7 Reale Spannungs- und Stromquellen

Wird eine Spannungsquelle durch einen Verbraucher belastet, dann ruft der Strom innerhalb der Quelle, z.B. an den internen Anschlussleistungen einen Spannungsabfall und damit Verluste hervor.

Dieser Einfluss wird durch einen zur **idealen Quellenspannung** U_0 in Reihe liegenden Innenwiderstand R_i erfasst. In der Praxis kann die Beschreibung des Quellenverhaltens durch Ersatznetzwerke noch wesentlich komplizierter werden, insbesondere wenn zeitabhängige Ströme und Spannungen betrachtet werden.

Die Berücksichtigung der Verlustmechanismen führt auf das dargestellte einfache **Ersatzschaltbild einer Spannungsquelle**. Wird kein Verbraucher angeschlossen, dann fließt kein Strom und die an den Anschlussklemmen vorliegende Spannung $U = U_L = U_0$ wird als **Leerlaufspannung** U_L (=Quellenspannung) bezeichnet.

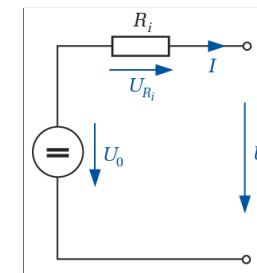


Abb. 3.18: Spannungsquelle mit Innenwiderstand.

Verbindet man die beiden Anschlussklemmen miteinander (**Kurzschluss**), dann wird der **Kurzschlussstrom** nur durch den Innenwiderstand begrenzt.

$$I_K = \frac{U_0}{R_i} \quad (3.22)$$

Die gesamte von der Quelle abgegebene Energie wird in diesem Fall am Innenwiderstand in Wärme umgewandelt, d.h. Spannungsquellen sollten nicht im Kurzschluss betrieben werden. Die Spannungsquelle wird durch Angabe von Leerlaufspannung $U_L = U_0$ und Innenwiderstand R_i oder durch Angabe von Leerlaufspannung $U_L = U_0$ und Kurzschlussstrom I_K eindeutig beschrieben.

Ein geladener **Kondensator**, der seine Energie an einem Widerstand abgibt, verhält sich prinzipiell wie eine **Spannungsquelle**. Der Wert der Spannung ist durch die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie gegeben und der Strom durch einen angeschlossenen Widerstand stellt sich in Abhängigkeit von dem Wert des Widerstandes ein.

Im Gegensatz dazu hat die **Spule** ein gleiches Verhalten wie die von einer **Stromquelle**. In diesem Fall wird der Strom durch die magnetische Energie in der Spule bestimmt und die Spannung stellt sich in Abhängigkeit von dem Wert eines angeschlossenen Widerstandes entsprechend dem Ohm'schen Gesetz ein.

Die **Abbildung 3.19** zeigt eine **Stromquelle** mit dem **Quellenstrom** I_0 und dem Innenwiderstand R_i . Da der Strom vorgegeben ist, muss immer ein geschlossener Strompfad vorhanden sein. Bei geöffneten Anschlussklemmen fließt der gesamte Strom I_0 durch den parallel zur Quelle liegenden Innenwiderstand und die von der Quelle abgegebene Energie wird an R_i in Wärme umgewandelt, d.h. Stromquellen sollten nicht im Leerlauf betrieben werden.

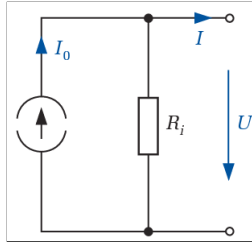


Abb. 3.19: Stromquelle mit Innenwiderstand.

Der an den Anschlussklemmen im Kurzschlussbetrieb zur Verfügung stehende Strom $I = I_K = I_0$ wird als **Kurzschlussstrom** I_K (=Quellenstrom) bezeichnet.

Für die **Leerlaufspannung** gilt

$$U_L = I_0 \cdot R_i \quad (3.23)$$

Bezüglich ihres Klemmenverhaltens können Spannungs- und Stromquelle ineinander umgerechnet werden. Dazu muss sichergestellt werden, dass beide Quellen die gleiche Leerlaufspannung und den gleichen Kurzschlussstrom aufweisen. Beide Forderungen werden erfüllt, wenn der Zusammenhang

$$U_0 = I_0 \cdot R_i \quad (3.24)$$

zwischen Quellenstrom und Quellenspannung gilt. Unter dieser Voraussetzung verhalten sich beide Quellen bezüglich ihrer Anschlussklemmen gleich und der Strom I durch einen beliebigen Verbraucher R hat in beiden Fällen den gleichen Wert $I = U_0 / (R + R_i)$. Das Ergebnis lässt sich mit den beiden äquivalenten Schaltungen in **Abbildung 3.20** leicht bestätigen.

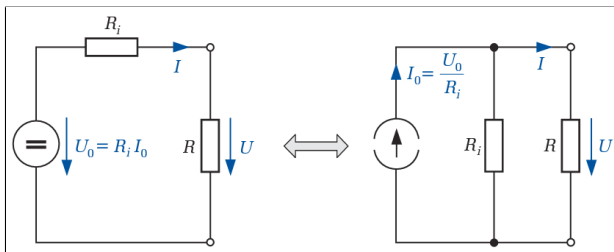


Abb. 3.20: Äquivalente Quellen.

An dieser Stelle ist noch ein Hinweis in Bezug auf die beiden Quellen angebracht. Obwohl an einen beliebigen Widerstand R in beiden Fällen die gleiche Leistung abgegeben wird, ist das interne Verhalten der Quellen unterschiedlich. Die Ursache liegt an der unterschiedlichen Verlustleistung an dem jeweiligen Innenwiderstand R_i . Im Leerlauf wird der Spannungsquelle keine Leistung entnommen, während die Stromquelle die Leistung $U_0 I_0$ an R_i abgibt. Im Kurzschlussfall ist die Situation genau umgekehrt.

3.8 Wechselwirkungen zwischen Quelle und Verbraucher

Die Zusammenschaltung von Quellen und Verbrauchern wirft naturgemäß einige Fragen auf. In den folgenden Abschnitten werden die Besonderheiten bei der Verwendung mehrerer Quellen betrachtet und die Fragen nach der maximal von einer Quelle zur Verfügung gestellten Leistung sowie nach dem Wirkungsgrad beantwortet.

3.8.1 Zusammenschaltung von Spannungsquellen

In vielen Anwendungen findet man Reihenschaltungen von Spannungsquellen zur **Erhöhung der Gesamtspannung** oder auch Parallelschaltungen zur **Erhöhung des verfügbaren Stromes** oder zur Erhöhung der Kapazität, z.B. um einen Verbraucher über einen längeren Zeitraum mit Energie versorgen zu können.

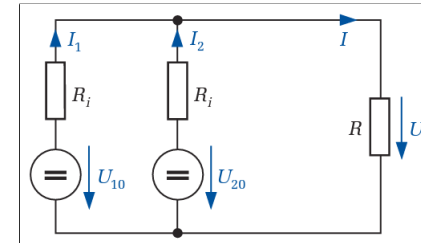


Abb. 3.21: Parallel geschaltete Spannungsquellen.

Die damit zusammenhängenden Probleme will man diskutieren anhand einer Schaltung mit zwei Spannungsquellen mit den gleichen Innenwiderständen R_i , aber mit unterschiedlichem Ladezustand. Aus den beiden parallel geschalteten Quellen mit den Leerlaufspannungen U_{10} und U_{20} soll ein Verbraucher R mit Energie versorgt werden. Aus den Kirchhoff'schen Gleichungen folgt

$$U \stackrel{!}{=} RI = R(I_1 + I_2) \stackrel{!}{=} U_{10} - R_i I_1 \stackrel{!}{=} U_{20} - R_i I_2 \quad (3.25)$$

$$I_1 = \frac{1}{R_i^2 + 2RR_i} \left[(R_i + R) U_{10} - RU_{20} \right] \quad I_2 = \frac{1}{R_i^2 + 2RR_i} \left[(R_i + R) U_{20} - RU_{10} \right] \quad (3.26)$$

Setzt man positive Werte für U_{10} , U_{20} , R_i und R ein, so ergibt sich eine positive Zahl für I_1 und eine negative Zahl für I_2 . Infolge der unterschiedlichen Leerlaufspannungen wird in dem betrachteten Netzwerk die Quelle 2 zum Verbraucher. Die aus der Spannungsquelle U_{10} entnommene Energie wird teilweise an den Widerstand R abgegeben und teilweise zum Nachladen der zweiten Spannungsquelle U_{20} verwendet. Eine gleichmässig aufgeteilte Energieabgabe ist nur möglich bei identischen Quellen.

- (a) Die Leistungsabgabe von parallel geschalteten Spannungsquellen ist unterschiedlich, wenn die Leerlaufspannungen oder die Innenwiderstände unterschiedlich sind.
- (b) In einem Netzwerk mit mehreren Quellen kann ein Teil der Quellen als Verbraucher wirken, wenn sie nämlich die von anderen Quellen abgegebene Energie aufnehmen. Dieser Zustand ist gewollt beim Nachladen einer Batterie.

3.8.2 Leistungsanpassung

Eine weitere wichtige Frage im Zusammenwirken von Quelle und Verbraucher ist die Frage nach der maximal von einer Quelle zur Verfügung gestellten Leistung. Ausgehend von der Schaltung der **Abbildung 3.22**, in der ein Verbraucher (Lastwiderstand) R_L an eine durch die Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i charakterisierte Spannungsquelle angeschlossen ist, soll die Bedingung für maximale Leistungsabgabe an den Verbraucher abgeleitet werden.

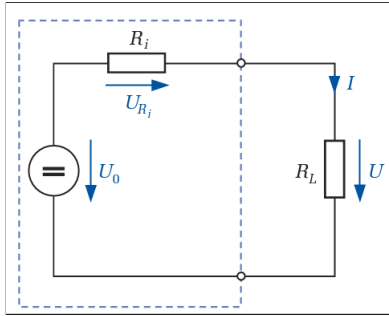


Abb. 3.22: Berechnung der maximalen Ausgangsleistung.

Gesucht ist also derjenige Wert für R_L , für den die Leistung P_L an diesem Verbraucher den Maximalwert erreicht. Für die Leistung gilt

$$U - U_0 + U_{R_i} = 0 \implies U_0 = U + U_{R_i} = I(R_L + R_i) \quad I = \frac{U_0}{R_i + R_L} \quad (3.27)$$

$$P_L(R_L) = I^2 \cdot R_L = \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2 \cdot R_L \quad (3.28)$$

Die maximale Leistung in Abhängigkeit von dem Wert R_L erhält man aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Ableitung

$$\frac{d}{dR_L} [P_L(R_L)] = \frac{d}{dR_L} \left[\frac{U_0^2 \cdot R_L}{(R_i + R_L)^2} \right] = U_0^2 \cdot \frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3} \stackrel{!}{=} 0 \implies R_L = R_i \quad (3.29)$$

Eine Gleichspannungsquelle gibt die maximale Leistung bei Widerstandsanpassung

$$R_L = R_i \quad (3.30)$$

Die maximale Ausgangsleistung (**verfügbare Leistung**) beträgt dann

$$P_{L,\max}(R_L = R_i) = \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2 \cdot R_L = \left(\frac{U_0}{R_i + R_i} \right)^2 \cdot R_i = \left(\frac{U_0}{2R_i} \right)^2 \cdot R_i = \frac{U_0^2}{4R_i} \quad (3.31)$$

Das Verhältnis aus der an den Widerstand R_L abgegebenen Leistung zu der verfügbaren Leistung ist für den gesamten Wertebereich zwischen Kurzschluss und Leerlauf $0 \leq R_L \leq \infty$

$$\frac{P_L}{P_{L,\max}} = \frac{4R_i R_L}{(R_i + R_L)^2} = \frac{4R_L/R_i}{(1 + R_L/R_i)^2} \quad (3.32)$$

Zur besseren Übersicht wird auf der Abszisse aber nicht der Wertebereich von R_L zwischen Null und Unendlich aufgetragen. Das Ergebnis lässt sich nämlich anschaulicher darstellen, wenn der von der Quelle abgegebene Strom für die Achseneinteilung verwendet wird. Dieser Strom nimmt seinen Maximalwert im Kurzschlussfall, d.h. bei $R_L = 0$ an.

$$I(R_L) = \frac{U_0}{R_i + R_L} \quad I_{\max}(R_L = 0) = \frac{U_0}{R_i} \quad (3.33)$$

Das Verhältnis der beiden Ströme ändert sich also von 0 auf 1, wenn sich der Lastwiderstand von Leerlauf ($R_L = \infty$) auf Kurzschluss ($R_L = 0$) reduziert.

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{R_i}{R_i + R_L} = \frac{1}{1 + R_L/R_i} \quad (3.34)$$

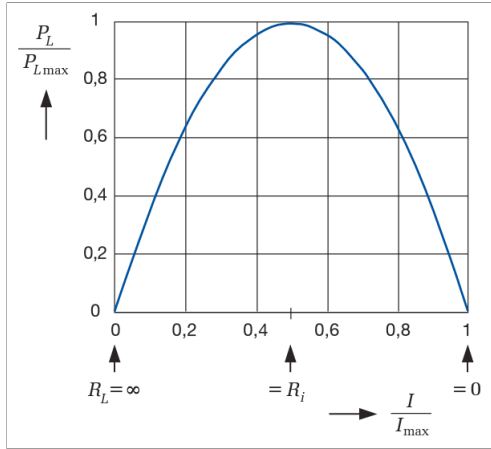


Abb. 3.23: Normierte Ausgangsleistung als Funktion des normierten Stromes.

Die Kurve in der **Abbildung 3.23** lässt sich leicht berechnen, indem für verschiedenen Zahlenverhältnisse R_L/R_i mit der Abszissenwert und der jeweils zugehörige Ordinatenwert berechnet wird. Alternativ kann nach dem Widerstandsverhältnis R_L/R_i aufgelöst und das Ergebnis eingesetzt werden. Damit erhält man direkt den gesuchten Zusammenhang

$$\frac{P_L}{P_{L,\max}} = \frac{4I}{I_{\max}} \left(1 - \frac{I}{I_{\max}}\right) \quad (3.35)$$

Interessant sind die drei Zustände, Leerlauf, Widerstandsanpassung und Kurzschluss. Bei Widerstandsanpassung $R_L = R_i$ nimmt die Ausgangsleistung ihren Maximalwert $P_L = P_{L,\max}$ an. Weicht der Widerstand R_L von dem Wert R_i ab, dann wird weniger Leistung von der Quelle an den Verbraucher abgegeben. An den beiden Grenzen Leerlauf und Kurzschluss verschwinden entweder Strom oder Spannung am Verbraucher, so dass die Leistung $P_L = UI$ ebenfalls in beiden Fällen verschwindet.

3.8.3 Wirkungsgrad

Mit kleiner werdendem Lastwiderstand in **Abbildung 3.22** steigt der Strom kontinuierlich an. Obwohl die von der Quelle gelieferte Leistung

$$P_{\text{ges}} = U_0 I \stackrel{!}{=} 4 \frac{P_{L,\max}}{I_{\max}} I \Rightarrow \frac{P_{\text{ges}}}{P_{L,\max}} = 4 \frac{I}{I_{\max}} \quad (3.36)$$

damit ebenfalls ansteigt, nimmt die Leistung an Verbraucher in dem Bereich $R_L < R_i$ kontinuierlich ab. In der **Abbildung 3.24** sind sowohl die Verbraucherleistung P_L als auch die von der Quelle ab-

gegebene Leistung P_{ges} mit dem gleichen Bezugswert $P_{L,\max}$ dargestellt. Die Differenz zwischen den beiden Kurven entspricht der an dem Innenwiderstand der Quelle entstehenden Verlustleistung.

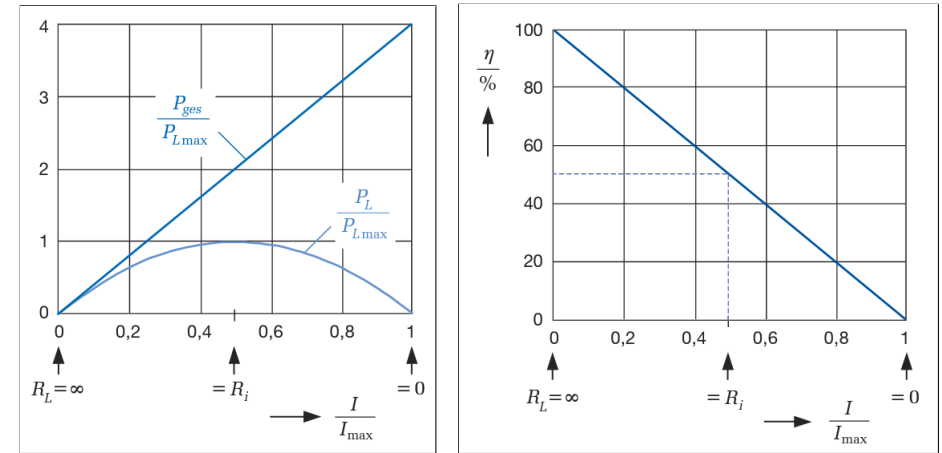


Abb. 3.24: **Links:** Von der Quelle abgegebene und vom Verbraucher aufgenommene Leistung. **Rechts:** Wirkungsgrad.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach dem **Wirkungsgrad** η . Darunter versteht man das Verhältnis von der an dem Lastwiderstand verbrauchten Leistung zu der gesamten von der Quelle abgegebenen Leistung.

$$\eta = \frac{P_L}{P_{\text{ges}}} \cdot 100\% = \frac{I^2 R_L}{I^2 (R_i + R_L)} \cdot 100\% = \frac{R_L/R_i}{1 + R_L/R_i} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{I}{I_{\max}}\right) \cdot 100\% \quad (3.37)$$

Aus dieser linearen abfallenden Funktion erkennt man, dass der Wirkungsgrad mit zunehmendem Strom aus der Quelle geringer wird. Bei Widerstandsanpassung beträgt der Wirkungsgrad nur 50%, d.h. am Innenwiderstand der Quelle wird genau so viel Leistung verbraucht wie am Lastwiderstand.

Die Wirkungsgradfrage ist von besonderem Interesse bei Energieübertragungssystemen. Die im Kraftwerk erzeugte Energie soll möglichst verlustarm zum Verbraucher transportiert werden. Bei vorgegebener Verbraucherleistung $P_L = UI$ und ebenfalls vorgegebenem Innenwiderstand R_i lässt sich der Wirkungsgrad steigern, wenn der Strom möglichst klein und als Konsequenz die Spannung entsprechend gross wird. In der Praxis erfolgt die Energieübertragung auf Hochspannungsleitungen mit Spannungen im Bereich von einigen hundert kV.

3.9 Das Überlagerungsprinzip

Enthält eine Schaltung mehrere Quellen, dann können die Ströme und Spannungen in den einzelnen Zweigen des Netzwerks durch die Überlagerung von Teillösungen berechnet werden. Voraussetzung dafür ist, dass an den einzelnen Netzwerkelementen lineare Beziehungen zwischen Strom und Spannung gelten. Zur Berechnung einer Teillösung wird nur eine einzige Quelle betrachtet, die anderen Quellen werden zu Null gesetzt. Für diese Quelle wird dann die Netzwerkanalyse durchgeführt, d.h. es werden die Ströme und Spannungen in den interessierenden Zweigen berechnet.

Bei dieser Vorgehensweise muss sichergestellt werden, dass nach der Überlagerung der Teillösungen in jedem Zweig, der eine Stromquelle enthält, genau der vorgegebene Quellenstrom fließt und dass in jedem Zweig mit einer Spannungsquelle genau die vorgegebene Spannung vorliegt. Bei der Überlagerung dürfen keine zusätzlichen Ströme zu einer Stromquelle und keine zusätzlichen Spannungen zu einer Spannungsquelle addiert werden. Nullsetzen der Quellen bedeutet also, dass eine Spannungsquelle durch einen Kurzschluss (keine Spannung in dem Zweig, d.h. $U = 0$) und eine Stromquelle durch einen Leerlauf (kein Strom in dem Zweig, d.h. $I = 0$) ersetzt wird.

Ist die Netzwerkanalyse in dieser Weise für jede Quelle einzeln durchgeführt, dann ist der gesamte Strom in einem Zweig des Netzwerks bei Vorhandensein aller Quellen gleich der Summe aller vorher berechneten Teilströme in diesem Zweig.

Betrachte man folgendes Netzwerk in der **Abbildung 3.25 Links** mit jeweils einer Strom- und einer Spannungsquelle. Mit der beschriebene Methode will man den Strom I_2 durch den Widerstand R_2 berechnen.

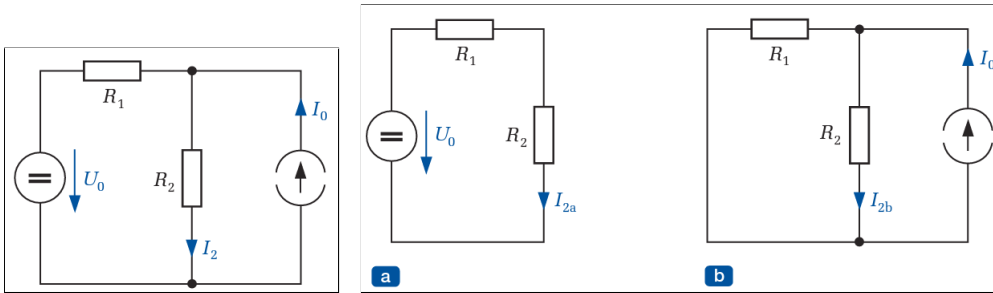


Abb. 3.25: **Links:** Überlagerung von Quellen. **Rechts:** Netzwerke für die beiden Lösungen

In der **ersten Teillösung** soll der Beitrag der Spannungsquelle U_0 zum gesuchten Strom berechnet werden. Wird die Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt, dann vereinfacht sich das Netzwerk wie in **Abbildung 3.25 Rechts a** dargestellt. Der Strom I_{2a} durch den Widerstand R_2 kann für diese

Teillösung mit dem Ohm'schen Gesetz unmittelbar angegeben werden.

$$I_{2a} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \quad (3.38)$$

In der **zweiten Teillösung** wird nur die Stromquelle I_0 betrachtet, wobei die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt werden muss. Das resultierende Netzwerk in **Abbildung 3.25 Rechts b** ist aber identisch zu dem Stromteiler, so dass der Strom durch R_2 ebenfalls direkt angegeben werden kann.

$$I_{2b} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0 \quad (3.39)$$

Damit ist der **Gesamtstrom** für das Ausgangsnetzwerk in **Abbildung 3.25 Links** bekannt.

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = \frac{U_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2} \quad (3.40)$$

Voraussetzung für die Überlagerung war ein linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an den Komponenten. Betrachtet man die Gleichung für die Leistung an dem Widerstand R_2 , in der der Strom nicht mehr linear, sondern quadratisch vorkommt.

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (I_{2a} + I_{2b})^2 R_2 = (I_{2a}^2 + 2I_{2a}I_{2b} + I_{2b}^2) R_2 \quad (3.41)$$

Bei linearer Überlagerung der einzelnen Beiträge fällt das gemischte Glied weg und man erhält ein falsches Ergebnis.

$$P_{2a} + P_{2b} = I_{2a}^2 R_2 + I_{2b}^2 R_2 = P_2 - 2I_{2a}I_{2b}R_2 \neq P_2 \quad (3.42)$$

Wegen des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Strom und Leistung darf die Leistung an einem Widerstand nicht durch Summation der Teilleistungen infolge der Teilströme berechnet werden.

3.10 Analyse umfangreicher Netzwerke

Umfangreicher Netzwerke können Spannungsquellen, Stromquellen und Widerstände enthalten. An allen im Netzwerk vorhandenen Widerständen sind Spannung und Strom proportional zueinander. Die Gleichungen zur Beschreibung der Netzwerke sind dann ebenfalls linear. Unabhängig von dieser Einschränkung gelten die folgenden Überlegungen allgemein auch für nichtlineare Netzwerke. Der Unterschied besteht lediglich in dem erhöhten mathematischen Aufwand bei der Auflösung der sich ergebenden nichtlinearen Gleichungssysteme.

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die Schaltung in der **Abbildung 3.26**. Mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes können die Anzahl der Unbekannten auf die Anzahl der Zweipole reduziert werden. An jedem Widerstand bleibt entweder Spannung oder Strom unbestimmt, an einer Spannungsquelle ist der Strom unbekannt und an einer Stromquelle die Spannung.

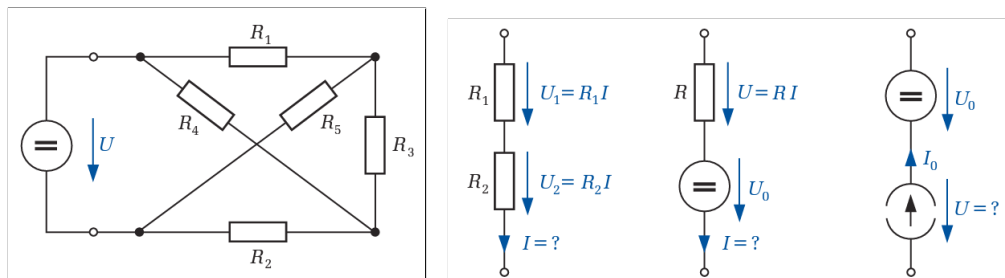


Abb. 3.26: **Links:** Einfaches Netzwerk. **Rechts:** Zweipolnetzwerke.

In **Abbildung 3.26 Rechts** sind einige Beispiele für zusammengesetzte Zweipole dargestellt. Auch in diesen Fällen verbleibt immer genau eine Unbekannte. Ist beispielsweise der Strom im mittleren Zweipol bekannt, dann lässt sich daraus die Spannung am Widerstand berechnen.

Unabhängig von dem Aufbau der Zweipole kann man feststellen, dass ihre Anzahl in einem Netzwerk identisch ist mit der Anzahl der unbekannten Größen. In der Netzwerktheorie spricht man allgemein von **Zweigen** und meint damit die beliebig zusammengesetzten Zweipole, die zwischen zwei Knoten des Netzwerkes liegen.

- (i) Unter Zuhilfenahme der an den Komponenten geltenden Beziehungen zwischen Strom und Spannung kann die Anzahl der unbekannten Ströme und Spannungen für jeden Zweig auf eine Unbekannte reduziert werden.
- (ii) Setzt sich ein Netzwerk aus z Zweigen zusammen, dann werden genau z linear unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der verbleibenden Unbekannten benötigt.
- (iii) Zur Aufstellung der Gleichungen stehen die Kirchhoff'schen Sätze, nämlich die Maschenregel und die Knotenregel zur Verfügung.

3.10.1 Darstellung des Netzwerkgraphen

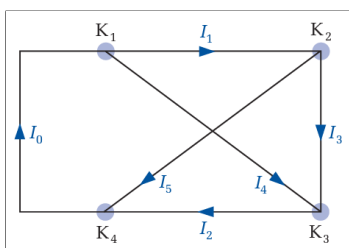


Abb. 3.27: Netzwerkgraph.

Das Netzwerk wird ohne die Komponenten nochmals dargestellt. In dieser als **Netzwerkgraph** bezeichneten Darstellung ist die Struktur des Netzwerks, d.h. welche Zweige an welchen Knoten miteinander verbunden sind, besonders gut zu erkennen.

3.10.2 Festlegung der Zählrichtungen

Für jeden Zweig ohne Quellen wird vereinbart, in welcher Richtung der Strom positiv gezählt werden soll. Diese Festlegung ist willkürlich und hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, sie muss aber für die gesamte Analyse konsequent beibehalten werden. Die tatsächliche Stromrichtung ist erst nach Auflösung des Gleichungssystems bekannt. Hat der Strom einen positiven Wert, dann stimmt seine tatsächliche Richtung mit der gewählten Richtung überein, hat er dagegen einen negativen Wert, dann fließt er entgegengesetzt zur gewählten Richtung. Die Zählrichtung für die Spannung wird am Verbraucher in Richtung des Stromes gewählt.

Bei Spannungsquellen wird die Spannung, bei Stromquellen der Strom in der von der Quelle vorgegebenen Richtung gezählt. Die Richtung des Stromes bei einer Spannungsquelle und die Richtung der Spannung bei einer Stromquelle können frei gewählt werden. Befindet sich nur eine Quelle in einem Zweig, dann empfiehlt sich die Verwendung des Generatorzähl Pfeilsystems.

3.10.3 Aufstellung der Knotengleichungen

Zur Vermeidung linear abhängiger Gleichungen betrachtet man üblicherweise nur Knoten in denen keine Komponenten enthalten sind. Unterschiedliche Knoten führen auf identische und damit linear abhängige Gleichungen. Das zu betrachtende Netzwerk besitzt vier Knoten. Da die Summe aller Ströme in allen Knoten immer Null ist, ist eine der Knotengleichungen linear von den anderen abhängig. Besitzt ein Netzwerk k Knoten, dann können immer $k - 1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Die Auswahl des nicht zu berücksichtigenden Knotes hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Für das betrachtete Beispiel gilt

$$\begin{array}{lcl} K_1 : & I_0 & -I_1 & & -I_4 & = 0 \\ K_2 : & & I_1 & & -I_3 & -I_5 & = 0 \\ K_3 : & & & -I_2 & +I_3 & +I_4 & = 0 \end{array} \quad (3.43)$$

Die lineare Unabhängigkeit dieser Gleichungen erkennt man unmittelbar daran, dass in jeder Gleichung ein Strom enthalten ist, der in den anderen Gleichungen nicht auftritt. Auf der anderen Seite ist die lineare Abhängigkeit der Gleichung am Knoten leicht zu überprüfen, da diese Gleichung identisch ist zur Summe der bereits angegebenen Gleichungen.

3.10.4 Aufstellung der Maschengleichungen

Die Anzahl m der noch benötigten unabhängigen Maschengleichungen beträgt $m = z - (k - 1)$. Im Beispiel sind es 3 unabhängige Maschengleichungen zu sehen. Während der Aufstellung der $k - 1$ Knotengleichungen völlig unproblematisch ist, müssen bei der Auswahl der Maschen bestimmte Vorgehensweisen eingehalten werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Maschen

so auszuwählen, dass die resultierenden Gleichungen zwangsläufig linear unabhängig sind. Die unterschiedlichen Methoden laufen im Prinzip darauf hinaus, sicherzustellen, dass in jeder Masche ein **Zweig** enthalten ist, der in keiner anderen Masche vorkommt.

Die erste Methode wird als **vollständiger Baum** bezeichnet. Zunächst werden alle k Netzwerkknoten entlang der Zweige so miteinander verbunden, dass keine geschlossene Masche entsteht. Bei k Knoten werden genau $k - 1$ Zweige für die Verbindungen benötigt. Die in **Abbildung 3.28** zeigt nur zwei der Möglichkeiten, für das gegebene Netzwerk einen vollständigen Baum zu konstruieren.

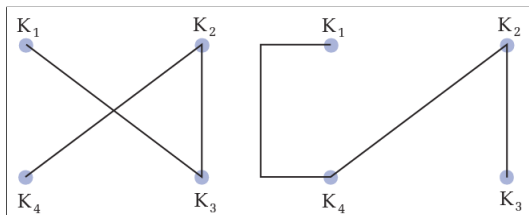


Abb. 3.28: Vollständiger Baum.

Von den insgesamt z Zweigen des Netzwerkes gehören damit $k - 1$ Zweige zu dem vollständigen Baum und $z - (k - 1) = m$ Zweige, die so genannten **Verbindungszweige**, sind unabhängig von dem vollständigen Baum. Da die Anzahl der Verbindungszweige identisch ist zu der noch benötigten Anzahl unabhängiger Maschengleichungen, werden die Maschen jetzt so gewählt, dass jeder Verbindungszweig in genau einer Masche enthalten ist. Dazu muss jeder Verbindungszweig über den vollständigen Baum zu einer Masche geschlossen werden.

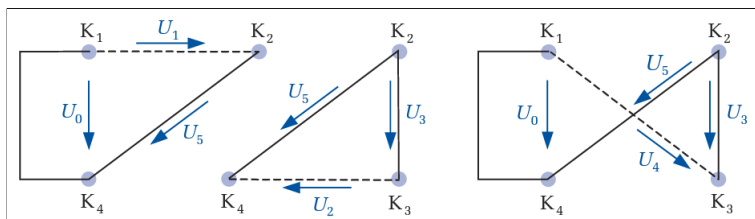


Abb. 3.29: Aufstellung der Maschengleichungen beim vollständigen Baum.

Die drei in der **Abbildung 3.29** dargestellten Maschen führen auf die Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} M_1 : & U_1 & +U_5 = U_0 \\ M_2 : & U_2 +U_3 & -U_5 = 0 \\ M_3 : & -U_3 +U_4 +U_5 & = U_0 \end{array} \quad (3.44)$$

Zusammen mit den Ohm'schen Beziehungen an den fünf Widerständen liegen jetzt elf Gleichungen zur Bestimmung aller unbekannten Ströme und Spannungen in dem Netzwerk vor. Zur Reduzierung des Gleichungssystems können die Zweigspannungen mithilfe des Ohm'schen Gesetzes durch die Zweigströme ersetzt werden. Mit den Knoten- und den Maschengleichungen liegen jetzt genau $z = 6$ Bestimmungsgleichungen vor, aus denen alle zweigströme I_0 bis I_5 eindeutig berechnet werden können. Mit den Strömen sind auch alle Zweigspannungen bekannt und das Problem ist vollständig gelöst.

$$\begin{array}{lcl} M_1 : & R_1 I_1 & +R_5 I_5 = U_0 \\ M_2 : & R_2 I_2 +R_3 I_3 & -R_5 I_5 = 0 \\ M_3 : & -R_3 I_3 +R_4 I_4 +R_5 I_5 & = U_0 \end{array} \quad (3.45)$$

Die zweite Methode wird als **Auftrennung der Maschen** bezeichnet. Die Vorgehensweise ist relativ einfach. Man wählt einen beliebigen Maschenumlauf und stellt die zugehörige Gleichung auf. Diese Masche wird jetzt an einem beliebigen Zweig aufgetrennt, der in den folgenden Maschen nicht mehr verwendet werden darf.

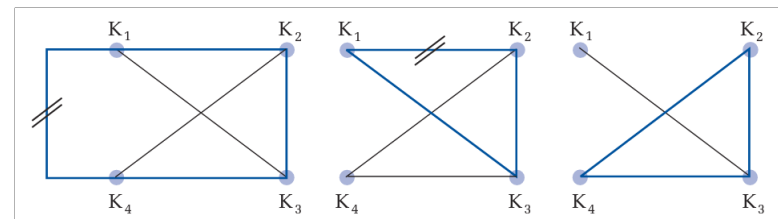


Abb. 3.30: Auftrennung der Maschen.

Ausgehend von dem verbleibenden Netzwerk stellt man wieder eine Maschengleichung auf und trennt diese Masche ebenfalls auf. Die fortgesetzte Anwendung dieser Methode liefert ebenfalls die benötigten $m = z - (k - 1)$ Gleichungen. Die lineare Unabhängigkeit dieser Gleichungen ist leicht einzusehen. Beginnt man die Überprüfung bei der zuletzt aufgestellten Beziehung, dann erkennt man unmittelbar, dass die jeweils zuvor aufgestellte Gleichung einen weiteren Zweig enthält, der nachher nicht mehr verwendet wurde, d.h. jede Gleichung ist infolge der Maschenauftrennung zwangsläufig linear unabhängig von den nachfolgend aufgestellten Gleichungen.