1 DIE ELEMENTAREN FUNKTIONEN

1.1 Grundbegriffe der Funktionen

1.1.1 Definition einer Funktion

Unter einer Funktion von einer Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in W$ zuordnet.

$$\boxed{y = f(x)} \tag{1.1}$$

Somit ist x die unabhängige veränderliche Variable oder **Argument**, y die abhängige Variable oder **Funktionswert**, D ist der Definitionsbereich der Funktion und W ist der Wertebereich der Funktion.

1.1.2 Darstellungsform einer Funktion

Die **analytische Darstellung** einer Funktion wird durch eine explizite oder eine implizite Funktionsgleichung dargestellt

$$\boxed{\text{explizit:} \quad y = f(x)} \quad \boxed{\text{implizit:} \quad F(x;\, y) = 0} \tag{1.2}$$

Die **Parameterdarstellung** einer Funktion ist durch einen reellen Parameter t abhängig

$$\boxed{\left.\begin{array}{ccc} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right\} \quad t_1 \leq t \leq t_2} \tag{1.3}$$

Die **Polardarstellung** einer Funktion ist durch den Koordinatenursprung und durch eine Achse. Die Polardarstellung benutzt zwei Parameter, einen Polarwinkel φ und einen Abstand zum Ursprung r.

$$\boxed{r = r(\varphi)\,, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2} \tag{1.4}$$

Die **graphische Darstellung** einer Funktion $y = f(x)$ wird in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Punktmenge dargestellt. Den Wertepaar (x_0, y_0) mit $y_0 = f(x_0)$ entspricht dabei der Kurvenpunkt $P = (x_0; y_0)$. Die Koordinate x_0 ist die Abszisse und die y_0 die Ordinate von P.

1.2 Allgemeine Funktionseigenschaften

1.2.1 Die Nullstellen

Die **Nullstellen** sind die Schnittstellen der Funktionskurve mit der x-Achse.

$$\boxed{f(x_0) = 0} \tag{1.5}$$

1.2.2 Die Symmetrie

Eine **gerade Funktion** ist zur y-Achsse spiegelsymmetrisch.

$$\boxed{f(-x) = f(x)\,, \quad \forall x \text{ mit } x \in D \Leftrightarrow -x \in D} \tag{1.6}$$

Eine **ungerade Funktion** ist zur y-Achsse punktsymmetrisch.

$$\boxed{f(-x) = -f(x)\,, \quad \forall x \text{ mit } x \in D \Leftrightarrow -x \in D} \tag{1.7}$$

1.2.3 Monotonie

Eine **monoton wachsende Funktion** wenn

$$\boxed{f(x_1) \leq f(x_2)\,, \quad \forall x_1,\, x_2 \in D \text{ mit } x_1 < x_2} \tag{1.8}$$

Eine **monoton fallende Funktion** wenn

$$\boxed{f(x_1) \geq f(x_2)\,, \quad \forall x_1,\, x_2 \in D \text{ mit } x_1 < x_2} \tag{1.9}$$

1.2.4 Periodizität

Die Funktionswerte wiederholen sich, wenn man in der x-Richtung um eine Periode $p' = \pm k \cdot p$ fortschreitet

$$\boxed{f(x \pm k \cdot p) = f(x)\,, \quad \forall x \in D} \tag{1.10}$$

1.2.5 Die inverse Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst **umkehrbar**, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. Zu verschiedenen Abszissen gehören verschiedene Ordinaten. Die Umkehrfunktion von $y = f(x)$ wird durch das Symbol $y = f^{-1}(x)$ gekennzeichnet.

Jede monoton fallende oder wachsende Funktion ist umkehrbar. Es werden Definitions- und Wertebereich miteinander vertauscht. Die Funktionsgleichung $y = f(x)$ wird nach der Variablen x aufgelöst und durch formales Vertauschen der beiden Variablen erhält man die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$. Die inverse Funktion ist eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

1.3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

1.3.1 Grenzwert einer Folge

Unter einer reellen zahlenfolge versteht man eine geordnete Menge reeller Zahlen. Jeder positiven ganzen Zah n wird in eindeutiger Weise eine reelle zahl a_n zugeordnet.

$$\boxed{\langle a_n \rangle = a_1,\, a_2,\, a_3\, \ldots\, ,\, a_n, \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.11}$$

Die reelle Zahl g heisst Grenzwert oder Limes der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine positive ganze Zahl n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ stets $\left| a_n - g \right| < \epsilon$ ist. Eine Folge heisst **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert g hat. Eine Folge, die keinen Grenzwert hat heisst **divergent**.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = g} \tag{1.12}$$

1.3.2 Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

Eine Funktion $x = f(x)$ sei in einer Umgebung von x_0 definiert. Gilt dann für jede im Definitionsbereich der DFunktion liegende und gegen die Stelle x_0 konvergierende Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \neq x_0$ stets $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$, so heisst g der Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to x_0$ der Grenzwert an der Stelle x_0

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = g} \tag{1.13}$$

1.3.3 Grenzwert einer Funktion für $x \to \infty$

Besitzt eine Funktion $y = f(x)$ die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Funktionswerte für jede über alle Grenzen hinaus wachsende Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ gegen eine Zahl g strebt, so heisst g der Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to \infty$ der Grenzwert im Unendlichen.

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = g} \tag{1.14}$$

1.3.4 Rechenregeln für Grenzwert

$$(i) \quad \lim_{x \to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right), \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$(ii) \quad \lim_{x \to x_0} \Big[f(x) \pm g(x) \Big] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$(iii) \quad \lim_{x \to x_0} \Big[f(x) \cdot g(x) \Big] = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$$

$$(iv) \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \right)$$

$$(v) \quad \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

$$(vi) \quad \lim_{x \to x_0} \Big[f(x) \Big]^n = \Big[\lim_{x \to x_0} f(x) \Big]^n$$

$$(vii) \quad \lim_{x \to x_0} \left(a^{f(x)} \right) = a^{\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)}$$

$$(viii) \quad \lim_{x \to x_0} \Big[\log_a f(x) \Big] = \log_a \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right), \quad (f(x) < 0)$$

1.3.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form "0/0öder "∞/∞führen, gilt die folgende Regel

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{1.15}$$

Unbestimmte Ausdrücke der Form "$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$", "0^0", "1^∞öder ∞^0 lassen sich durch elementare Umformungen auf den Typ "0/0öder "∞/∞".

$$(i) \quad \lim_{x \to x_0} \Big(u(x) \cdot v(x) \Big) = 0 \cdot \infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(x)}{1/v(x)} \right) \text{ oder } \lim_{x \to x_0} \left(\frac{v(x)}{1/u(x)} \right)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \to x_0} \Big(u(x) - v(x) \Big) = \infty - \infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1/v(x) - 1/u(x)}{1/\left(u(x) \cdot v(x) \right)} \right)$$

$$(iii) \quad \lim_{x \to x_0} \left(u(x)^{v(x)} \right) = 0^0, \infty^\infty = 1^\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(e^{v(x) \cdot \ln u(x)} \right)$$

1.3.6 Stetigkeit einer Funktion

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 **stetig**, wenn der Grenzwert der Funktion für $x \to x_0$ vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)} \tag{1.16}$$

Eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist, heisst sie **stetige Funktion**. Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 **unstetig**, wenn $f(x_0)$ nicht vorhanden ist oder $f(x_0)$ vom Grenzwert verschieden ist oder dieser nicht existiert. Den Unstetigkeiten gehören Lücken, Pole oder Sprünge.

1.4 Polynomfunktionen

1.4.1 Definition

Ganzrationale Funktionen oder **Polynomfunktionen** sind überall definiert und stetig. Sie werden in der Regel nach fallenden Potenzen geordnet. Sei n der Polynomgrad mit $n \in \mathbb{N}$ und a_i die reelle Polynomkoeffizienten.

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)} \tag{1.17}$$

1.4.2 Die Lineare Funktion

Die allgemeine Geradengleichung lautet

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \quad (A^2 + B^2 \neq 0)} \tag{1.18}$$

Gegeben sei die Steigung m und b der y-Achsenabschnitt. So lautet die **Hauptform der Geraden**

$$\boxed{y = mx + b = \tan(\alpha)\, x + b} \tag{1.19}$$

Gegeben sei ein Punkt $P_1 = (x_1; y_1)$ und die Steigung m oder der Steigungswinkel α, so lautet die **Punkt-Steigungsform der Geraden**

$$\boxed{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}} \tag{1.20}$$

Gegeben seien zwei verschiedene Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$, dann lautet der **zwei-Punkte-Form einer Geraden**

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2)} \tag{1.21}$$

Gegeben seien die Achsenabschnitte a und b auf der x- und y-Achse, dann lautet die **Achsenabschnittsform der Geraden**

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (a \neq 0,\, b \neq 0)} \tag{1.22}$$

Gegeben seien p die senkrechte Abstand vom Ursprung von der Geraden und α der Winkel zwischen Lot vom Ursprung auf die Gerade und der positiven x-Achse, dann lautet die **Hessesche Normalform der Geraden**

$$\boxed{x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) = p} \tag{1.23}$$

Gegeben ist die Gerade $Ax + By + C = 0$ und ein Punkt $P_1 = (x_1; y_1)$, dann lautet der **Abstand eines Punktes von einer Geraden**

$$\boxed{d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|, \quad (A^2 + B^2 \neq 0)} \tag{1.24}$$

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen $y = mx_1 + b_1$ und $y = mx_2 + b_2$, dann lautet der **Schnittwinkel zweier Geraden**

$$\boxed{\tan(\delta) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|, \quad (0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ), \quad (m_1 \cdot m_2 \neq -1)} \tag{1.25}$$

(i) $g_1 \parallel g_2 \Longrightarrow m_1 = m_2$ und $\delta = 0^\circ$

(ii) $g_1 \perp g_2 \Longrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ und $\delta = 90^\circ$

1.4.3 Die Quadratische Funktion

Die **Hauptform der Parabel** besteht aus einem Öffnungsparameter $a \neq 0$, wobei wenn $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet oder $a < 0$ nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt ist $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Sind $b = c = 0$ dann lautet die Parabelfunktion $y = x^2$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \tag{1.26}$$

Die **Produktform der Parabel** besteht aus einem Öffnungsparameter $a \neq 0$, wobei x_1 und x_2 die Nullstellen der Parabel sind. Sind $x_1 = x_2$ dann lautet die Parabelfunktion $y = a(x - x_1)^2$ und die Parabel berührt die x-Achse im Scheitelpunkt $S(x_1; 0)$

$$\boxed{y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)} \tag{1.27}$$

Die **Scheitelform der Parabel** besteht aus einem Öffnungsparameter $a \neq 0$ und aus den Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_0; y_0)$

$$\boxed{y - y_0 = a \cdot (x - x_0)^2} \tag{1.28}$$

1.4.4 Polynomfunktion n-ten Grades

Ist x_1 eine Nullstelle der Polynomfunktion $f(x)$ vom Grade n, so ist $f(x)$ in der Produktform darstellbar. Der Faktor $(x - x_1)$ heisst **Linearfaktor**, $f_1(x)$ ist das erste reduzierte Polynom vom Grade $n - 1$.

$$\boxed{f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)} \tag{1.29}$$

Das **Fundamentalsatz der Algebra** laitet: Eine Polynomfunktion n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Die **Produktdarstellung** der Polynomfunktion besteht aus einem Öffnungsparameter a_n und aus den Nullstellen x_i. Die Faktoren $(x - x_i)$ heissen Linearfaktoren. Ist x_1 eine k-fache Nullstelle von $f(x)$, so tritt der Linearfaktor $(x - x_1)$ k-mal auf.

$$\boxed{f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \quad (a_n \neq 0)} \tag{1.30}$$

Ist die Anzahl k der reellen Nullstellen kleiner als der Polynomgrad n, so ist $f^*(x)$ das Polynomfunktion vom Grade $n-k$ohne reelle Nullstellen und so lautet die Zerlegung

$$\boxed{f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot f^*(x)} \tag{1.31}$$

1.5 Gebrochenrationale Funktionen

1.5.1 Definition

Eine **gebrochenrationale Funktion** $f(x)$ besteht aus einem Zählerpolynom $g(x)$ vom Grade m, aus einem Nennerpolynom $h(x)$ vom Grade n, wobei wenn $n > m$ dann hendelt es sich um eine echt gebrochenrationale Funktion. Der Definitionsbereich ist $D = x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms $h(x)$.

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad (a_m \neq 0, b_n \neq 0)} \tag{1.32}$$

1.5.2 Nullstellen, Definitionslücken und Pole

Ist x_0 **Nullstellen** der gebrochenrationale Funktion $f(x_0) = 0$, so gelten $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$.

Ist x_0 **Definitionslücke** der gebrochenrationale Funktion $f(x)$ so verschwindet der Nenner an der Stelle x_0, also gilt $h(x_0) = 0$. Die Definitionslücken fallen daher mit den reellen Nullstellen des Nenners zusammen. Es gibt somit höchstens n reelle Definitionslücken, ermittelt aus der Gleichung $h(x) = 0$.

Ein **Pol** x_0 ist eine Definitionslücke besonderer Art: Nähert man sich der Stelle x_0, so strebt der Funktionswert gegen $\pm\infty$. In einer Polstelle gilt somit $h(x_0) = 0$ und $g(x_0) \neq 0$, falls Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen haben. Die in einem Pol errichtete Parallele zur y-Achse heisst Polgerade oder senkrechte Asymptote. Verhält sich die Funktion bei Annäherung an den Pol von beiden Seiter her gleichartig, so liegt ein Pol ohne Vorzeichenwechsel, anderenfalls ein pol mit Vorzeichenwechsel vor.

Ist x_0 eine k-fache Nullstelle des Nennerpolynoms $h(x)$, so liegt ein Pol k-ter Ordnung vor:

(i) Ist k gerade dann liegt ein Pol ohne Vorzeichenwechsel.

(ii) Ist k ungerade dann liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel.

Die gesuchten Nullstellen und Pole einer gebrochenrationale Funktion $f(x)$ findet man, indem man das Zähler- und das Nennerpolynom in Linearfaktoren zerlegt und gemeinsame Faktoren heraus kürzt. Die bleibenden Linearfaktoren im Zählerpolynom sind die Nullstellen, die bleibenden Linearfaktoren im Nennerpolynom sind die Polstellen. Damit kann Definitionslücken behoben und der Definitionsbereich der Funktion erweitert werden.

1.5.3 Asymptotisches Verhalten im Unendlichen

Eine **echt gebrochenrationale Funktion** nähert sich im Unendlichen, d.h. für $x \to \pm\infty$ stets der x-Achse bei $y = 0$.

Eine **unecht gebrochenrationale Funktion** wird zunächst durch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion $p(x)$ und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ zerlegt: $f(x) = p(x) + r(x)$. Im Unendlichen verschwindet $r(x)$ und die Funktion $f(x)$ nähert sich daher asymptotisch der Polynomfunktion $p(x)$.

1.6 Potenz- und Wurzelfunktionen

1.6.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzfunktionen mit positiv ganzzahligen Exponenten haben für gerades n erhält man gerade Funktionen, für ungerades n ungerade Funktionen. Die Nullstelle ist $x = 0$.

$$\boxed{f(x) = x^n, \quad -\infty < x < \infty, \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.33}$$

Potenzfunktionen mit negativ ganzzahligen Exponenten haben für gerades n gerade Funktionen, für ungerades n ungerade Funktionen. Die Polstelle ist ist $x = 0$ und die Asymptote im Unendlichen ist $y = 0$.

$$\boxed{f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0, \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.34}$$

1.6.2 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der auf das Intervall $x \geq 0$ beschränkten Potenzfunktionen. Diese Funktionen sind streng monoton wachsend und haben die Nullstelle $x = 0$.

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0, \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)} \tag{1.35}$$

1.6.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten haben bei positiven Exponenten streng monoton wachsende Monotonie, bei negativen Exponenten streng monoton fallende Monotonie. Der Definitionsbereich ist $D = x > 0$ und bei positiven Exponenten $D = x \geq 0$.

$$\boxed{f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x > 0, \quad (m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^*)} \tag{1.36}$$

1.7 Trigonometrische Funktionen

1.7.1 Winkelmass

Die trigonometrische Funktionen, auch Winkelfunktionen oder Kreisfunktionen sind am Einheitskreis erklärt. Der Winkel α wird in Grad oder Bogenmass gemessen. Voller Umlauf ist 360° oder 2π. Die Winkel erhalten wie folgt ein Vorzeichen: Im Gegenuhrzeigersinn überstrichene Winkel werden positiv, im Uhrzeigersinn überstrichene Winkel negativ gezählt.

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\text{ Radiant} \approx 0.0174} \quad \boxed{1\text{ Radiant} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295} \tag{1.37}$$

1.7.2 Definition der trigonometrischen Funktionen

Folgende sind Definitionen am Einheitskreis. α ist ein spitzer Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$). Der $\sin(\alpha)$ entspricht die Ordinate eines Kreispunktes P. Der $\cos(\alpha)$ ist die Abszisse von P. Die $\tan(\alpha)$ ist der Abschnitt auf der rechten Tangente und der $\cot(\alpha)$ ist der Abschnitt auf der oberen Tangente.

$$\begin{gathered}\boxed{\sin(\alpha) = \frac{y}{1}} \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{x}{1}} \quad \boxed{\tan(\alpha) = \frac{y}{x}} \quad \boxed{\cot(\alpha) = \frac{x}{y}} \\ \boxed{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{x}} \quad \boxed{\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{y}}\end{gathered} \tag{1.38}$$

1.7.3 Die Sinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \sin(x)} \tag{1.39}$$

Folgende sind Eigenschaften der Sinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = -\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $W = -1 \leq y \leq 1$

(c) Periode: $p = 2\pi$

(d) Symmetrie: ungerade

(e) Nullstellen: $x_N = k \cdot \pi$

(f) Relative Maxima: $x_{\text{max}} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

(g) Relative Minima: $x_{\text{min}} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = \cos(x)$

(i) Stammfunktion: $F(x) = -\cos(x)$

1.7.4 Die Kosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \cos(x)} \tag{1.40}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kosinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = -\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $W = -1 \leq y \leq 1$

(c) Periode: $p = 2\pi$

(d) Symmetrie: gerade

(e) Nullstellen: $x_N = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(f) Relative Maxima: $x_{\text{max}} = k \cdot 2\pi$

(g) Relative Minima: $x_{\text{min}} = \pi + k \cdot 2\pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = -\sin(x)$

(i) Stammfunktion: $F(x) = \sin(x)$

1.7.5 Die Tangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \tan(x)} \tag{1.41}$$

Folgende sind Eigenschaften der Tangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$

(b) Wertebereich: $W = -\infty \leq y \leq \infty$

(c) Periode: $p = \pi$

(d) Symmetrie: ungerade

(e) Nullstellen: $x_N = k \cdot \pi$

(f) Pole: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(g) Senkrechte Asymptoten: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

(i) Stammfunktion: $F(x) = -\ln\left|\cos(x)\right|$

1.7.6 Die Kotangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \tan(x)} \tag{1.42}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kotangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $D = x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k = k \cdot \pi\}$

(b) Wertebereich: $W = -\infty \leq y \leq \infty$

(c) Periode: $p = \pi$

(d) Symmetrie: ungerade

(e) Nullstellen: $x_N = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

(f) Pole: $x_k = k \cdot \pi$

(g) Senkrechte Asymptoten: $x = k \cdot \pi$

(h) Ableitung: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

(i) Stammfunktion: $F(x) = \ln\left|\sin(x)\right|$

1.7.7 Beziehungen

Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

(a) $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(d) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cot(x)}$

(e) $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$

(f) $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

(g) $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cot^2(x)$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2)$

(b) $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2)$

(c) $\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan(x_1) \pm \tan(x_2)}{1 \mp \tan(x_1) \cdot \tan(x_2)}$

(d) $\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot(x_1) \cdot \cot(x_2) \mp 1}{\cot(x_2) \pm \cot(x_1)}$

Beziehungen für halbe Winkel

(a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$

(b) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$

(c) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$

Beziehungen für doppelte Winkel

(a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(b) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

(c) $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

(d) $\cot(2x) = \frac{\cot^2(x) - 1}{2\cot(x)}$

Beziehungen für dreifache Winkel

(a) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

(b) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

(c) $\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$

Beziehungen für vierfache Winkel

(a) $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x) - 8\sin^3(x)\cos(x)$

(b) $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

(c) $\tan(4x) = \dfrac{4\tan(x) - 4\tan^3(x)}{1 - 6\tan^2(x) + \tan^4(x)}$

Beziehungen für n-fache Winkel

(a) $\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin(x)\cos^{n-1}(x) - \binom{n}{3}\sin^3(x)\cos^{n-3}(x) + \binom{n}{5}\sin^5(x)\cos^{n-5}(x) + \ldots$

(b) $\cos(nx) = \cos^n(x) - \binom{n}{2}\sin^2(x)\cos^{n-2}(x) + \binom{n}{4}\sin^4(x)\cos^{n-4}(x) - \ldots$

Beziehungen für Summen und Differenzen

(a) $\sin(x_1) + \sin(x_2) = 2\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(b) $\sin(x_1) - \sin(x_2) = 2\cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(c) $\cos(x_1) + \cos(x_2) = 2\cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(d) $\cos(x_1) - \cos(x_2) = -2\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$

(e) $\tan(x_1) \pm \tan(x_2) = \dfrac{\sin(x_1 \pm x_2)}{\cos(x_1)\cdot\cos(x_2)}$

(f) $\sin(x_1 + x_2) + \sin(x_1 - x_2) = 2\sin(x_1)\cos(x_2)$

(g) $\sin(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) = 2\cos(x_1)\sin(x_2)$

(h) $\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) = 2\cos(x_1)\cos(x_2)$

(i) $\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_1 - x_2) = -2\sin(x_1)\sin(x_2)$

Beziehungen für Produkte

(a) $\sin(x_1)\cdot\sin(x_2) = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)\Big]$

(b) $\cos(x_1)\cdot\cos(x_2) = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)\Big]$

(c) $\sin(x_1)\cdot\cos(x_2) = \dfrac{1}{2}\Big[\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)\Big]$

(d) $\tan(x_1)\cdot\tan(x_2) = \dfrac{\tan(x_1) + \tan(x_2)}{\cot(x_1) + \cot(x_2)}$

Beziehungen für Potenzen

(a) $\sin^{2n}(x) = \binom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{n-k}\cos(2kx)$

(b) $\sin^{2n-1}(x) = \dfrac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n-1}{n-k}\sin(2kx - x)$

(c) $\cos^{2n}(x) = \binom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}\cos(2kx)$

(d) $\cos^{2n-1}(x) = \dfrac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{n-k}\cos(2kx - x)$

Beziehungen für komplexen Fall

(a) $\sin(iy) = i\cdot\sinh(y)$

(b) $\cos(iy) = \cosh(y)$

(c) $\tan(iy) = i\cdot\tanh(y)$

(d) $\cot(iy) = -i\cdot\coth(y)$

Beziehungen komplexer Zahlen als Argumente

(a) $\sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$

(b) $\cos(x + iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)$

(c) $\tan(x + iy) = \dfrac{\tan(x) + \tan(iy)}{1 - \tan(x)\tan(iy)}$

$(d)\ \cot(x+y) = -\dfrac{\cot(x)\cot(iy)-1}{\cot(x)-\cot(iy)}$

Beziehungen komplexer Zahlen

Folgende Eigenschaften gehören den komplexen Zahlen

$(a)\ \cos(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$

$(b)\ \sin(x) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$

Beziehungen Lösungen trigonometrischer Gleichung

$$(i)\quad \begin{array}{l} \sin(x) = c, \quad (-1 \leq c \leq 1) \\ \Longrightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} x_0 + 2n\pi \\ (\pi - x_0) + 2n\pi \end{array} \right., \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad x_0 = \arcsin(c) \Big\} \end{array}$$

$$(ii)\quad \begin{array}{l} \cos(x) = c, \quad (-1 \leq c \leq 1) \\ \Longrightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} x_0 + 2n\pi \\ -x_0 + 2n\pi \end{array} \right., \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad x_0 = \arccos(c) \Big\} \end{array}$$

$$(iii)\quad \begin{array}{l} \tan(x) = c \\ \Longrightarrow x = \left\{ x_0 + n\pi \right., \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad x_0 = \arctan(c) \} \end{array}$$

Beziehungen an einem allgemeinen Dreieck

$(i)\ \dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b} = \dfrac{\sin(\gamma)}{c}$, (Sinussatz)

$(ii)\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, (Kosinussatz)

$(iii)\ \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}$, (Tangenssatz)

$(iv)\ A = \dfrac{bc\sin(\alpha)}{2}$, (Flächenformel)

$(v)\ \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, (Winkelsumme)

Beziehungen Amplituden-Phasen

Folgende sind die Amplituden-Phasen in Polarform von $a\cos(x) + b\sin(x)$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} a\cos(x) + b\sin(x) & = & r\cos(x-\varphi) \\ a\sin(x) + b\cos(x) & = & r\sin(x+\varphi) \end{array} \right\}} \tag{1.43}$$

$$\boxed{r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \arccos(a/r), & \text{falls } b \geq 0 \\ -\arccos(a/r), & \text{falls } b < 0 \\ \text{unbestimmt}, & \text{falls } r = 0 \end{array} \right\}} \tag{1.44}$$

1.7.8 Anwendungen in der Schwingungslehre

Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(bx+c), \quad (a > 0, \quad b > 0)} \tag{1.45}$$

$$\boxed{f(x) = a \cdot \cos(bx+c), \quad (a > 0, \quad b > 0)} \tag{1.46}$$

Folgende allgemeine Sinusfunktion hat die Periode $p = 2\pi/b$, Wertebereich $W = -a \leq y \leq a$, für $c > 0$ ist die Kurve nach links, für $c < 0$ nach rechts verschoben. Bezogen auf die elementare Sinusfunktion ist die verschiebung $x_0 = -c/b$.

Gleichung einer harmonischen Schwingung

Die harmonische Schwingung misst die Auslenkung eines Federpendels in Abhängigkeit der Zeit t, wobei A die Amplitude (maximale Auslenkung), ω die Kreisfrequenz der Schwingung, φ der Nullphasenwinkel, T die Schwingungs- oder Periodendauer, f die Frequenz

$$\boxed{f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \tag{1.47}$$

$$\boxed{f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\varphi + \frac{\pi}{2}}_{\varphi^*}\right) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi^*)} \tag{1.48}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \tag{1.49}$$

Darstellung einer harmonischen Schwingung

Eine harmonische Schwingung lässt sich in einem Zeigerdiagramm durch einen rotierenden Zeiger der Länge A darstellen. Die Rotation erfolgt dabei aus der durch den Nullphasenwinkel φ eindeutig bestimmten Anfangslage heruas um den Nullpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn. Die Ordinate der Zeigerspitze entspricht dabei dem augenblicklichen Funktionswert der Schwingung.

Bei der bildlichen Darstellung einer Schwingung im zeigerdiagramm zeichnet man die Anfangslage, Zeiger der Länge A unter dem Winkel φ gegen die Horizontale. Lässt man einen negativen Amplitudenfaktor A zu, so gelten für das Abtragen der unverschobenen Schwingungen die folgenden Regeln für die **Sinusschwingung** $f(t) = A \cdot \sin(\omega t)$: $A > 0$ so nach rechts abtragen, $A < 0$ nach links abtragen und für eine **Kosinusschwingung** $f(t) = A \cdot \sin(\omega t)$: $A > 0$ nach oben abtragen und $A < 0$ nach unten abtragen.

Liegen die Schwingungen in der **phasenverschobenen Form** $f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ bzw. $f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ vor, so erfolgt eine zusätzliche Drehung um den Nullphasenwinkel $\varphi > 0$ im Gegenuhrzeigersinn oder um den Nullphasenwinkel $\varphi < 0$ im Uhrzeigersinn.

Superposition

Die Überlagerung zweier gleichfrequenter harmonischer Schwingungen führt zu einer resultierenden Schwingung der gleichen Frequenz. Im Zeigerdiagramm werden die Zeiger nach dem Parallelogrammregel zu einem resultierenden Zeiger zusammengesetzt. Die übrigen Parameter können folgendermassen berechnet werden

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \tag{1.50}$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \tag{1.51}$$

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{A_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\varphi_2)}} \tag{1.52}$$

1.8 Arkusfunktionen

Die Umkehrfunktionen der auf bestimmte Intervalle beschränkten trigonome-trischen Funktionen heissen **Arkus-** oder **zyklometrische Funktionen**. Die Intervalle müssen dabei so gewählt werden, dass die trigonometrischen Funktionen dort in streng monotoner Weise sämtliche Funktionswerte durchlaufen und somit umkehrbar sind. Der Funktionswert einer Arkusfunktion ist ein Bogen- oder Radiant dargestellter Winkel.

1.8.1 Die Arkussinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \arcsin(x)} \tag{1.53}$$

Die Arkussinusfunktion ist die Umkehrfunktion der Sinusfunktion. Der Arkussinus liefert nur Winkel aus dem 1. und 4. Quadrat. Folgende sind Eigenschaften der Arkussinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-1 \leq x \leq 1$

(b) Wertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Monotonie: streng monoton wachsend

(e) Nullstellen: $x_N = 0$

(f) Ableitung: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(g) Stammfunktion: $\int \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

1.8.2 Die Arkuskosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \arccos(x)} \tag{1.54}$$

Die Arkuskosinusfunktion ist die Umkehrfunktion der Kosinusfunktion. Der Arkuskosinus liefert nur Winkel aus dem 1. und 2. Quadrant. Folgende sind Eigenschaften der Arkussinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-1 \leq x \leq 1$

(b) Wertebereich: $0 \leq y \leq \pi$

(c) Symmetrie: punktsymmetrisch zu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(d) Monotonie: streng monoton fallend

(e) Nullstellen: $x_N = 1$

(f) Ableitung: $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(g) Stammfunktion: $\int \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C$

1.8.3 Die Arkustangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \arctan(x)} \tag{1.55}$$

Die Arkustangensfunktion ist die Umkehrfunktion der Tangensfunktion. Der Arkustangens liefert nur Winkel aus dem 1. und 4. Quadrant. Folgende sind Eigenschaften der Arkustangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty \leq x \leq \infty$

(b) Wertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Monotonie: streng monoton wachsend

(e) Asymptoten: $y = \pm\frac{\pi}{2}$

(f) Nullstellen: $x_N = 0$

(g) Ableitung: $\frac{1}{1+x^2} = \cos^2(\arctan(x))$

(h) Stammfunktion: $\int \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2} \ln a^2 + x^2 + C$

1.8.4 Die Arkuskotangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \operatorname{arccot}(x)} \tag{1.56}$$

Die Arkuskotangensfunktion ist die Umkehrfunktion der Kotangensfunktion. Der Arkuskotangens liefert nur Winkel aus dem 1. und 2. Quadrant. Folgende sind Eigenschaften der Arkuskotangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty \leq x \leq \infty$

(b) Wertebereich: $0 \leq y \leq \pi$

(c) Symmetrie: punktsymmetrisch zu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(d) Monotonie: streng monoton fallend

(e) Asymptoten: $y = 0$ und $y = \pi$

(f) Nullstellen: keine

(g) Ableitung: $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{1+x^2} = -\sin^2(\operatorname{arccot}(x))$

(h) Stammfunktion: $\int \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = x \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2} \ln a^2 + x^2 + C$

1.8.5 Beziehungen

Beziehungen des negativen Arguments

(a) $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

(b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

(c) $\arctan(-x) = -\arctan(x)$

(d) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

(b) $\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2}$

(c) $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} \pi/2 - \arctan(x), & x > 0 \\ -\pi/2 - \arctan(x), & x < 0 \end{array} \right\}$

(d) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \left\{ \begin{array}{ll} \pi, & xy > 1, x > 0 \\ 0, & xy < 1 \\ -\pi, & xy > 1, x < 0 \end{array} \right\}$

1.9 Exponentialfunktionen

1.9.1 Definition der Exponentialfunktion

Die e-Fnuktion

$$\boxed{f(x) = e^x, \quad -\infty < x < \infty} \quad \boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\ldots} \tag{1.57}$$

Die exponentialfunktion hat die Eulersche Basis e. Die Funktion ist streng monoton wachsend.

Die allgemeine Exponentialfunktion

$$\boxed{f(x) = a^x = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \ln(a), \quad -\infty < x < \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1} \tag{1.58}$$

Die allgemeine Exponentialfunktion hat die Basis a. Folgende sind Eigenschaften der allgemeine Exponentialfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $0 < x < \infty$

(c) Nullstellen: keine

(d) Monotonie für $\lambda > 0$ bzw. $a > 1$: streng monoton wachsend

(e) Monotonie für $\lambda < 0$ bzw. $0 < a < 1$: streng monoton fallend

(f) Asymptote: $y = 0$ (x-Achse)

(g) Fall $f(0) = 1$: Alle Kurven schneiden die y-Achse bei $y = 1$

(h) Fall $f(x) = a^{-x}$: Spiegelung an der y-Achse

1.9.2 Spezielle Exponentialfunktionen

Abklingfunktion

$$\boxed{f(t) = a \cdot e^{-\lambda t} + b = a \cdot e^{-t/\tau} + b, \quad \lambda = \frac{1}{\tau}} \tag{1.59}$$

Die Abklingfunktion ist eine streng monoton fallend Funktion. Sie hat eine waagrechte Asymptote für $t \to \infty$ bei $f(t) = b$ und hat eine Tangente in $t = 0$ und schneidet die Asymptote an der Stelle $\tau = 1/\lambda$.

Sättigungsfunktion

$$\boxed{f(t) = a \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right) + b = a \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) + b, \quad \lambda = \frac{1}{\tau}} \tag{1.60}$$

Die Sättigungsfunktion ist eine streng monoton wachsende Funktion. Sie hat eine Asymptote für $t \to \infty$ bei $f(t) = a + b$. Die Tangente in $t = 0$ schneidet die Asymptoten an der Stelle $\tau = 1/\lambda$.

Wachstumsfunktion

$$\boxed{f(t) = f_0 \cdot e^{\alpha t}, \quad t \geq 0} \tag{1.61}$$

Die Wachstumsfunktion ist für $f_0 > 0$ den Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$ und $\alpha > 0$ die Wachstumsrate

Gauss-Funktion oder Gausssche Glockenkurve

$$\boxed{f(t) = a \cdot e^{-b \cdot (x - x_0)^2}} \tag{1.62}$$

Die Gausssche Glockenkurve hat ein Maximumstelle bei x_0: $f(x_0) = a$. Sie hat eine Symmetrieachse bei $x = x_0$ und ist eine Parallele zur y-Achse durch das Maximum. Die Asymptote im Unendlichen ist die x-Achse

Kettenlinie

$$\boxed{f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)} \tag{1.63}$$

Eine an zwei Punkten P_1 und P_2 befestigte freihängende Kette nimmt unter dem Einfluss der Schwerpkraft die geometrische Form einer Kettenlinie an für $a > 0$.

1.10 Logarithmusfunktionen

1.10.1 Definition der Logarithmusfunktionen

$$\boxed{f(x) = \log_a(x)} \tag{1.64}$$

Die Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ für $a > 0$ und $a \neq 1$. Folgende sind Eigenschjaften der allgemeinen Logarithmusfunktion

(a) Definitionsbereich: $x > 0$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Nullstellen: $x_N = 1$

(d) Monotonie für $0 < a < 1$: streng monoton fallend

(e) Monotonie für $a > 1$: streng monoton wachsend

(f) Asymptote: $x = 0$ (y-Achse)

(g) Für jede zulässige Basis a gilt: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

(h) Die Funktionskurve der Logarithmusfunktion erhält man durch Spiegelung der Exponentialfunktion an der 1. Winkelhalbierenden.

1.10.2 Spezielle Logarithmusfunktion

Natürlicher Logarithmus

$$\boxed{f(x) = \log_e x \equiv \ln(x), \quad x > 0} \tag{1.65}$$

Zehnerlogarithmus: Dekadischer oder Briggscher Logarithmus, $a = 10$

$$\boxed{f(x) = \log_{10} x \equiv \lg(x), \quad x > 0} \tag{1.66}$$

Zweierlogarithmus: Binärlogarithmus, $a = 2$

$$\boxed{f(x) = \log_2 x \equiv \mathrm{lb}(x), \quad x > 0} \tag{1.67}$$

1.11 Hyperbelfunktionen

1.11.1 Die Sinushyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \tag{1.68}$$

Folgende sind Eigenschaften der Sinushyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Extremwerte: keine

(f) Monotonie: streng monoton wachsend

1.11.2 Die Kosinushyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \tag{1.69}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kosinushyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $1 \leq y < \infty$

(c) Symmetrie: gerade

(d) Nullstellen: keine

(e) Extremwerte: $x_{\min} = 0$

(f) Monotonie: keine

1.11.3 Die Tangenshyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \tag{1.70}$$

Folgende sind Eigenschaften der Tangenshyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $1 < y < 1$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Polstellen: keine

(f) Monotonie: streng monoton wachsend

(g) Asymptoten: $y = \pm 1$

1.11.4 Die Kotangenshyperbolicusfunktion

$$\boxed{f(x) = \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}} \tag{1.71}$$

Folgende sind Eigenschaften der Kotangenshyperbolicusfunktion

(a) Definitionsbereich: $\left|x\right| > 0$

(b) Wertebereich: $\left|y\right| > 1$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: keine

(e) Polstellen: $x_P = 0$

(f) Monotonie: keine

(g) Asymptoten: $x = 0$ und $y = \pm 1$

1.11.5 Beziehungen

Beziehungen zwischen Hyperbolicusfunktionen

(a) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1$

(b) $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

(c) $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{1}{\tanh(x)}$

Umrechnungen zwischen Hyperbolicusfunktionen

Folgende Eigenschaften gelten für $x \geq 0$ für oberes Vorzeichen und für $x < 0$ für unteres Vorzeichen.

(a) $\sinh(x) = \pm\sqrt{\cosh^2(x) - 1} = \dfrac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$

(b) $\cosh(x) = \sqrt{\sinh^2(x) + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} = \pm\dfrac{\coth(x)}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$

(c) $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}} = \pm\dfrac{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}{\cosh(x)} = \dfrac{1}{\coth(x)}$

(d) $\coth(x) = \dfrac{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}}{\sinh(x)} = \pm\dfrac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \dfrac{1}{\tanh(x)}$

Beziehungen mit negativen Argumenten

(a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

(b) $\cos(-x) = \cosh(x)$

(c) $\tanh(-x) = -\tanh(x)$

(d) $\coth(-x) = -\coth(x)$

Beziehungen mit dem pythagorischen Hyperbolicus

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(b) $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

(c) $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{1}{\tanh(x)}$

Beziehungen der Summe zweier Argumenten

(a) $\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \cosh(x_1) \cdot \sinh(x_2)$

(b) $\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \sinh(x_1) \cdot \sinh(x_2)$

(c) $\tanh(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\tanh(x_1) \pm \tanh(x_2)}{1 \pm \tanh(x_1) \cdot \tanh(x_2)}$

(d) $\coth(x_1 \pm x_2) = \dfrac{1 \pm \coth(x_1) \cdot \coth(x_2)}{\coth(x_1) \pm \coth(x_2)}$

Beziehungen der Verdoppelung des Arguments

(a) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

(b) $\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x)$

(c) $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$

(d) $\coth(2x) = \dfrac{\coth^2(x) + 1}{2\coth(x)}$

Beziehungen der Verdreifachung des Arguments

(a) $\sinh(3x) = 3\sinh(x) + 4\sinh^3(x)$

(b) $\cosh(3x) = 4\cosh^3(x) - 3\cosh(x)$

(c) $\tanh(3x) = \dfrac{3\tanh(x) + \tanh^3(x)}{1 + 3\tanh^2(x)}$

Beziehungen für n-fache Argumente

(a) $\sinh(nx) = \binom{n}{1}\cosh^{n-1}(x)\sinh(x) + \binom{n}{3}\cosh^{n-3}(x)\sinh^3(x) + \binom{n}{5}\cosh^{n-5}(x)\sinh^5(x) + \ldots$

(b) $\cosh(nx) = \cosh^n(x) + \binom{n}{2}\cosh^{n-2}(x)\sinh^2(x) + \binom{n}{4}\cosh^{n-4}(x)\sinh^4(x) + \ldots$

Beziehungen der Hälfte des Arguments

(a) $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$

(b) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}$

(c) $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1}$

(d) $\coth(2x) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{\cosh(x)-1}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)-1}$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\sinh(x_1) + \sinh(x_2) = 2\sinh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(b) $\sinh(x_1) - \sinh(x_2) = 2\cosh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sinh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(c) $\cosh(x_1) + \cosh(x_2) = 2\cosh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(d) $\cosh(x_1) - \cosh(x_2) = 2\sinh\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sinh\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$

(e) $\tanh(x_1) \pm \tanh(x_2) = \frac{\sinh(x_1 \pm x_2)}{\cosh(x_1)\cosh(x_2)}$

(f) $\coth(x_1) \pm \coth(x_2) = \frac{\sinh(x_1 \pm x_2)}{\sinh(x_1)\sinh(x_2)}$

Beziehungen der Produkttheoreme

(a) $\sinh(x_1)\cdot\sinh(x_2) = \frac{1}{2}\Big[\cosh(x_1+x_2) - \cosh(x_1-x_2)\Big]$

(b) $\sinh(x_1)\cdot\cosh(x_2) = \frac{1}{2}\Big[\sinh(x_1+x_2) + \sinh(x_1-x_2)\Big]$

(c) $\cosh(x_1)\cdot\cosh(x_2) = \frac{1}{2}\Big[\cosh(x_1+x_2) + \cosh(x_1-x_2)\Big]$

(d) $\tanh(x_1)\cdot\tanh(x_2) = \frac{\tanh(x_1)+\tanh(x_2)}{\coth(x_1)+\coth(x_2)}$

Beziehungen der komplexen Fall

(a) $\sinh(iy) = i\cdot\sinh(y)$

(b) $\cosh(iy) = \cosh(y)$

(c) $\tanh(iy) = i\cdot\tanh(y)$

(d) $\coth(iy) = -i\cdot\coth(y)$

(e) $\Big(\cosh(x) \pm \sinh(x)\Big)^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx) = e^{\pm nx}$

Beziehungen der komplexen Argumente

(a) $\sinh(x \pm i\cdot y) = \sinh(x)\cdot\cosh(iy) \pm \cosh(x)\cdot\sinh(iy)$

(b) $\cosh(x \pm i\cdot y) = \cosh(x)\cdot\cosh(iy) \pm \sinh(x)\cdot\sinh(iy)$

(c) $\tanh(x \pm iy) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(iy)}{1 \pm \tanh(x)\cdot\tanh(iy)}$

(d) $\coth(x \pm iy) = \frac{1 \pm \coth(x)\cdot\coth(iy)}{\coth(x) \pm \coth(iy)}$

1.12 Areafunktionen

1.12.1 Die Areasinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \text{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{1.72}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areasinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Monotonie: streng monoton wachsend

1.12.2 Die Areakosinusfunktion

$$\boxed{f(x) = \operatorname{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{1.73}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areakosinusfunktion

(a) Definitionsbereich: $x \geq 1$

(b) Wertebereich: $y \geq 0$

(c) Symmetrie: keine

(d) Nullstellen: $x_N = 1$

(e) Monotonie: streng monoton wachsend

1.12.3 Die Areatangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \tag{1.74}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areatangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $-1 < x < 1$

(b) Wertebereich: $-\infty < y < \infty$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: $x_N = 0$

(e) Polstellen: $x_P = \pm 1$

(f) Monotonie: streng monoton wachsend

(g) Asymptoten: $x = \pm 1$

1.12.4 Die Areakotangensfunktion

$$\boxed{f(x) = \operatorname{Arcoth}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \tag{1.75}$$

Folgende sind Eigenschaften der Areakotangensfunktion

(a) Definitionsbereich: $\left|x\right| > 1$

(b) Wertebereich: $\left|y\right| > 0$

(c) Symmetrie: ungerade

(d) Nullstellen: keine

(e) Polstellen: $x_P = \pm 1$

(f) Monotonie: keine

(g) Asymptoten: $x = \pm 1$ und $y = 0$ (x-Achse)

1.12.5 Beziehungen

Umrechnungen zwischen der Areafunktionen

Folgende Beziehungen gelten für oberes Vorzeichen für $x > 0$ und für unteres Vorzeichen für $x < 0$

(a) $\operatorname{Arsinh}(x) = \pm\operatorname{Arcosh}\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{Artanh}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \operatorname{Arcoth}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

(b) $\operatorname{Arcosh}(x) = \operatorname{Arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \operatorname{Artanh}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \operatorname{Arcoth}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

(c) $\operatorname{Artanh}(x) = \operatorname{Arsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \pm\operatorname{Arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{Arcoth}\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $\operatorname{Arcoth}(x) = \operatorname{Arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \pm\operatorname{Arcosh}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \operatorname{Artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$

Beziehungen der Additionstheoreme

(a) $\operatorname{Arsinh}(x_1) + \operatorname{Arsinh}(x_2) = \operatorname{Arsinh}\left(x_1 \cdot \sqrt{1+x_2^2} \pm x_2 \cdot \sqrt{1+x_1^2}\right)$

(b) $\operatorname{Arcosh}(x_1) + \operatorname{Arcosh}(x_2) = \operatorname{Arcosh}\left(x_1 \cdot x_2 \pm \sqrt{(x_1^2-1)\cdot(x_2^2-1)}\right)$

(c) $\operatorname{Artanh}(x_1) + \operatorname{Artanh}(x_2) = \operatorname{Artanh}\left(\frac{x_1 \pm x_2}{1 \pm x_1 \cdot x_2}\right)$

(d) $\operatorname{Arcoth}(x_1) + \operatorname{Arcoth}(x_2) = \operatorname{Arcoth}\left(\frac{1 \pm x_1 \cdot x_2}{x_1 \pm x_2}\right)$

2 DIFFERENTIALRECHNUNG

2.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

2.1.1 Der Differenzenquotient

Gegeben sei die Funktion $f(x)$ einer Kurve. Die **Steigung der Sekante** aus der Differenz zweier Punkte P und Q sei gegeben durch

$$\boxed{m_{\text{Sek},PQ} = \tan(\epsilon) = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_P + \triangle x) - f(x_P)}{\triangle x}} \tag{2.1}$$

2.1.2 Der Differentialquotient

Gegeben sei die Funktion $f(x)$ einer Kurve. Die **Steigung der Tangente** an der Stelle x_P entsteht aus dem Grenzwert für $x_Q \to x_P$ bzw. $\triangle x \to 0$. Ist der Grenzwert vorhanden, so ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle P **differenzierbar**.

$$\boxed{\begin{aligned} m_{\text{Tan},P} = \tan(\alpha) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{x_Q \to x_P} \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_P + \triangle x) - f(x_P)}{\triangle x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x_P)\Big] = f'(x_P) \end{aligned}} \tag{2.2}$$

2.1.3 Die Ableitungsfunktion

Die **Ableitungsfunktion** $f'(x)$ ordnet jeder Stelle x aus einem Intervall I den Steigungswert der dortigen Kurventangente als Funktionswert zu. Man spricht dann kurz von der ersten Ableitung oder dem ersten Differentialquotient von $f(x)$.

Eine differenzierbare Funktion ist immer **stetig**. Eine Funktion mit einer stetigen Ableitung wird als **stetig differenzierbar** bezeichnet.

2.2 Ableitungen elementarer Funktionen

2.2.1 Ableitungen der Potenzfunktionen

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[x^n\Big] = n \cdot x^{n-1}$

2.2.2 Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\sin(x)\Big] = \cos(x)$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\cos(x)\Big] = -\sin(x)$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\tan(x)\Big] = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\cot(x)\Big] = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$

2.2.3 Ableitungen der Arkusfunktionen

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\arcsin(x)\Big] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\arccos(x)\Big] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\arctan(x)\Big] = \frac{1}{1+x^2}$

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\operatorname{arccot}(x)\Big] = -\frac{1}{1+x^2}$

2.2.4 Ableitungen der Exponentialfunktionen

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[e^x\Big] = e^x$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[a^x\Big] = \Big(\ln(a)\Big) \cdot a^x$

2.2.5 Ableitungen der Logarithmusfunktionen

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\ln(x)\Big] = \frac{1}{x}$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\log_a(x)\Big] = \frac{1}{\Big(\ln(a)\Big) \cdot x}$

2.2.6 Ableitungen der Hyperbelfunktionen

$(a)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\sinh(x)\Big] = \cosh(x)$

$(b)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\cosh(x)\Big] = \sinh(x)$

$(c)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\tanh(x)\Big] = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$

$(d)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\coth(x)\Big] = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$

2.2.7 Ableitungen der Areafunktionen

$(a)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\mathrm{Arsinh}(x)\Big] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(b)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\mathrm{Arcosh}(x)\Big] = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(c)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\mathrm{Artanh}(x)\Big] = \frac{1}{1-x^2}$

$(d)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\mathrm{Arcoth}(x)\Big] = \frac{1}{1-x^2}$

2.3 Ableitungsregeln

2.3.1 Ableitung einer Konstante

Ein konstanter Faktor C ist beim Differenzieren null

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[C\Big] = 0} \tag{2.3}$$

2.3.2 Faktorregel

Ein konstanter Faktor C bleibt beim Differenzieren erhalten

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[C \cdot f(x)\Big] = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big]} \tag{2.4}$$

2.3.3 Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f_1(x) + \ldots + f_n(x)\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f_1(x)\Big] + \ldots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f_n(x)\Big]} \tag{2.5}$$

2.3.4 Produktregel

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u(x) \cdot v(x)\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u(x)\Big] \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[v(x)\Big]} \tag{2.6}$$

2.3.5 Quotientregel

Gebrochenrationale Funktionen werden nach dieser Regel differenziert

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u(x)\Big] \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[v(x)\Big]}{\Big[v(x)\Big]^2}, \quad \Big(v(x) \neq 0\Big)} \tag{2.7}$$

2.3.6 Kettenregel

Die Ableitung einer aus den beiden elementaren Funktionen $F(u)$ und $u(x)$ zusammengesetzten verketteten Funktion $f(x) = F\Big(u(x)\Big)$ ist das Produkt aus der äusseren und der inneren Ableitung.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Big[F(u)\Big] \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u(x)\Big]} \tag{2.8}$$

2.3.7 Logarithmische Differentiation

Bei der logarithmischen Differentiation wird die Funktion $f(x)$ zunächst beiderseits logarithmiert und anschliessend unter Verwendung der Kettenregel differenziert. Die Ableitung der logarithmierten Funktion $\ln\Big(f(x)\Big)$ heisst logarithmische Ableitung von $f(x)$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\ln\Big(f(x)\Big)\Big] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big]} \tag{2.9}$$

2.3.8 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ eine umkehrbare Funktion und $x = g(y)$ die nach der Variablen x aufgelöste Form von $y = f(x)$. Zwischen den Ableitungen besteht dann folgende Beziehung aus der sich die Ableitung der Umkehrfunktion bestimmen lässt, indem man zunächst in der Ableitung die Variable x durch $g(y)$ ersetzt und anschliessend auf beiden Seiten die Variablen x und y vertauscht.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[g(y)\Big] = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big]}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] \neq 0\right)} \tag{2.10}$$

2.3.9 Ableitungen implizite Funktionen

Sei $F(x;y) = 0$ die Gleichung der implizite Funktion. Die Ableitung lässt sich nach den folgenden zwei Methoden bestimmen.

Unter Verwendung der Kettenregel

Die Funktionsgleichung $F(x) = 0$ wird gliedweise nach der Variablen x differenziert, wobei y als eine von x abhängige Funktion zu betrachten ist. Daher ist jeder die Variable y enthaltene Term unter Verwendung der Kettenregel zu differenzieren. Anschliessend wird die Gleichung nach y' aufgelöst.

Unter Verwendung partieller Ableitungen

$$\boxed{y' = -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}, \quad \Big(F_y(x;y)\Big) \neq 0} \tag{2.11}$$

2.3.10 Ableitung einer parameterabhängige Funktion

Sei $x = x(t)$ und $y = y(t)$ eine in der Parameterform dargestellten Funktion.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x(t)}\Big[y(t)\Big] = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[y(t)\Big]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x(t)\Big]} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}} \tag{2.12}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x(t)^2}\Big[y(t)\Big] = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x(t)\Big]\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big[y(t)\Big] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[y(t)\Big]\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big[x(t)\Big]}{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[x(t)\Big]\right]^3}} \tag{2.13}$$

2.3.11 Ableitung einer Funktion in Polarkoordinaten

Eine in Polarkoordinaten dargestellte Kurve mit der Gleichung $r(\varphi)$ lautet in der Parameterform $x(\varphi) = r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)$, somit lauten die erste und die zweite Ableitungen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x(\varphi)}\Big[y(\varphi)\Big] = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big[r(\varphi)\Big]\cdot\sin(\varphi) + r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big[r(\varphi)\Big]\cdot\cos(\varphi) + r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}} \tag{2.14}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x(\varphi)^2} = \frac{r(\varphi)^2 + 2\cdot\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}r(\varphi)\right]^2 - r(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Big[r(\varphi)\Big]}{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big[r(\varphi)\Big]\cdot\cos(\varphi) - r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right]^3}} \tag{2.15}$$

2.4 Anwendungen der Differentialrechnung

2.4.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ einer geradlinigen Bewegung erhält man als 1. bzw. 2. Ableitung des Weg-Zeit-Gesetzes $s = s(t)$ nach der Zeit t

$$\boxed{v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[s(t)\Big]} \tag{2.16}$$

$$\boxed{a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[v(t)\Big] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big[s(t)\Big]} \tag{2.17}$$

2.4.2 Tangente und Normale

Tangente und Normale im Kurvenpunkt $P = (x_P; y_P)$ einer Kurve $y = f(x)$ stehen senkrecht aufeinander. Die Gleichung der Tangente und der Normale lauten

$$\boxed{\frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x_P)\Big]} \quad \boxed{\frac{y - y_P}{x - x_P} = -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x_P)\Big]}} \tag{2.18}$$

2.4.3 Linearisierung einer Funktion

Eine nichtlinieare Funktion $y = f(x)$ lässt sich in der unmittelbaren Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_P; y_P)$ durch die dortige Kurventangente, d.h. durch eine lineare Funktion approximieren.

Die Gleichung der **linearisierten Funktion** lautet

$$\boxed{y - y_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big] \cdot \left(x - x_P\right)} \tag{2.19}$$

2.4.4 Monotonie und Krümmung einer Kurve

Monotonie-Verhalten

Die 1. Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist die Steigung der Kurventangente und bestimmt somit das Monotonie-Verhalten der Funktion

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big] > 0$: so ist $f(x_P)$ an der Stelle x_P **streng monoton wachsend** und die Steigung der Tangente in x_P ist positiv.

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big] < 0$: so ist $f(x_P)$ an der Stelle x_P **streng monoton fallend** und die Steigung der Tangente in x_P ist negativ.

Krümmungs-Verhalten

Die 2. Ableitung einer Funktion $f(x)$ bestimmt das Krümmungs-Verhalten der Funktion

(a) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[f\left(x_P\right)\Big] > 0$: so hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_P eine **Linkskrümmung** bzw. eine **konvexe Krümmung** (↶).

(b) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[f\left(x_P\right)\Big] < 0$: so hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_P eine **Rechtskrümmung** bzw. eine **konkave Krümmung** (↷).

Kurvenkrümmung

Die Krümmung κ einer ebenen Kurve $y = f(x)$ im Kurvenpunkt $P = (x_P; y_P)$ ist ein quantitatives Mass dafür, wie stark der Kurvenverlauf in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes P von dem einer Geraden abweicht

$$\boxed{\kappa_{(P)} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[f\left(x_P\right)\Big]}{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big]\right)^2\right]^{3/2}}} \tag{2.20}$$

(a) Ist $\kappa_{(P)} > 0$: so liegt um Punkt P eine **Linkskrümmung** vor (↶).

(b) Ist $\kappa_{(P)} < 0$: so liegt um Punkt P eine **Rechtskrümmung** vor (↷).

Krümmungskreis

Der Krümmungskreis einer Kurve $f(x)$ im Kurvenpunkt $P(x_P; y_P)$ berührt dort die Kurve von 2. Ordnung. Der Radius dieses Kreises heisst **Krümmungsradius**, der Mittelpunkt $M = (x_M; y_M)$ **Krümmungsmittelpunkt**.

Krümmungsradius

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\left|\kappa\right|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\left(x_P\right)\Big]\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[f\left(x_P\right)\Big]\right|}} \tag{2.21}$$

Krümmungsmittelpunkt

Der Krümmungsmittelpunkt M liegt stets auf der Kurvennormale des Berührungspunktes P. Die Verbindungslinie aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve heisst **Evolute**, die Kurve selbst wird als **Evolvente** bezeichnet. Die Koordinaten x_M und y_M des Krümmungsmittelpunktes sind dabei Funktionen der x-Koordinate des laufenden Kurvenpunktes P und bilden daher eine Parameterdarstellung der zur Kurve gehörenden Evolute.

$$\boxed{x_M = x_P - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big] \cdot \frac{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big]\right)^2}{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[f\left(x_P\right)\Big]}} \tag{2.22}$$

$$\boxed{y_M = y_P + \frac{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big]\right)^2}{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[f\left(x_P\right)\Big]}} \tag{2.23}$$

2.4.5 Relative Extremwerte

Eine Funktion $f(x)$ besitzt in x_P ein relatives Maximum bzw. ein relatives Minimum, wenn in einer gewissen Umgebung von x_P stets $f(x_P) > f(x)$ bzw. $f(x_P) < f(x)$ ist mit $x \neq x_P$.

Relatives Minimum (Tiefpunkt)

Die Kurve $f(x)$ besitzt in x_P eine **waagrechte Tangente** und **Linkskrümmung** (↶) wenn

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\left(x_P\right)\Big] = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[f\left(x_P\right)\Big] > 0} \tag{2.24}$$

Relatives Maximum (Hochpunkt)

Die Kurve $f(x)$ besitzt in x_P eine **waagrechte Tangente** und **Rechtskrümmung** ($\curvearrowright$) wenn

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x_P)\right] = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[f(x_P)\right] < 0} \tag{2.25}$$

2.4.6 Wendepunkte und Sattelpunkte

Wendepunkt

In einem **Wendepunkt** ändert sich die Art der Kurvenkrümmung, d.h. die Kurve geht dort von einer **Links- in eine Rechtskurve** über oder **umgekehrt**. In einem Wendepunkt ändert sichsomit der Drehsinn der Kurventangente. Folgende Bedingung ist hinreichend

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[x_P\right] = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[x_P\right] \neq 0} \tag{2.26}$$

Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** auch **Terrasenpunkt** ist ein Wendepunkt mit waagrechter tangente. Die hinreichende Bedingung ist daher

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x_P)\right] = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[f(x_P)\right] = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[f(x_P)\right] \neq 0} \tag{2.27}$$

3 INTEGRALRECHNUNG

3.1 Das bestimmte Integral

3.1.1 Definition des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral ist der Flächeninhalt A zwischen der stetigen Funktion $y = f(x)$, der x-Achse und den beiden zur y-Achse parallelen Geraden $x = a$ und $x = b$, sofern die Kurve im gesamten Intervall $a \leq x \leq b$ oberhalb der x-Achse verläuft

Die Fläche A wird in n Streifen gleicher Breite $\triangle x$ zerlegt und durch endlich viele Rechteckflächen ersetzt. Dies führt zu der Untersumme U_n die einen Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt darstellt.

$$\boxed{\begin{aligned} U_n &= f(x_0) \cdot \triangle x + f(x_1) \cdot \triangle x + f(x_2) \cdot \triangle x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \triangle x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x_{k-1}) \cdot \triangle x \Big) \end{aligned}} \tag{3.1}$$

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ und somit $\triangle x \to 0$ strebt die Untersumme U_n gegen einen Grenzwert, der als bestimmtes Integral von $f(x)$ in den Grenzen $x = a$ und $x = b$ bezeichnet wird und geometrisch als Flächeninhalt A unter der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ interpretiert werden darf.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x_{k-1}) \cdot \triangle x \Big) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x} \tag{3.2}$$

Somit sei x die Integrationsvariable, $f(x)$ die Integrandfunktion oder der Integrand und a, b die untere bzw. obere Integrationsgrenze. Das Integral existiert, wenn $f(x)$ stetig ist oder aber beschränkt ist und nur endlich viele Unstetigkeiten im Integrationsintervall enthält.

3.1.2 Berechnung des bestimmten Integrals

Die Berechnung des bestimmten Integrals beruht auf den **Hauptsatz der Integralrechnung**. Sei $F(x)$ die eine **Stammfunktion** von $f(x)$.

$$\boxed{\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \Big[F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)} \tag{3.3}$$

3.1.3 Integrationsregeln für bestimmte Integrale

Faktorregel

Ein konstanter Faktor C darf vor das Integral gezogen werden

$$\boxed{\int_a^b C \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = C \cdot \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x, \quad (C \in \mathbb{R})} \tag{3.4}$$

Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf gliedweise integriert werden

$$\boxed{\int_a^b \Big[f_1(x) + \ldots + f_n(x) \Big] \, \mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x + \ldots + \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x} \tag{3.5}$$

Vertauschregel

Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals

$$\boxed{\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x} \tag{3.6}$$

Der Flächeninhalt unter der Kurve ist Null: Fallen die Integrationsgrenzen zusammen, so ist der Integralwert gleich Null

$$\boxed{\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0} \tag{3.7}$$

Die Fläche wird in zwei Teilflächen zerlegt: Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x, \quad (a \leq c \leq b)} \tag{3.8}$$

3.2 Das unbestimmte Integral

3.2.1 Definition des unbestimmten Integrals

Das unbestimmte Integral beschreibt den Flächeninhalt A zwischen der stetigen Kurve $y = f(t)$ und der t-Achse im Intervall $a \leq t \leq x$ in Abhängigkeit von der oberen variabel gehaltenen Grenze x und wird daher auch als **Flächenfunktion** $I(x)$ bezeichnet.

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

3.2.2 Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale

(a) Zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ gibt es unendlich viele unbestimmte Integrale, die sich in ihrer unteren Integrationsgrenze voneinander unterscheiden.

(b) Die Differenz zweier unbestimmter Integrale von $f(x)$ ist eine **Konstante**.

(c) Differenziert man ein unbestimmtes Integral $I(x)$ nach der oberen Grenze x, so erhält man die Integrandfunktion $f(x)$, sogenannte **Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung**.

Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$ wird als eine Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet. Jedes unbestimmte Integral $I(x)$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = f(x)} \tag{3.10}$$

(d) Ist $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$ und C_1 eine geeignete reelle Konstante, die aus der Bedingung $I(a) = F(a) + C_1 = 0$ berechnen lässt, so gilt

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) + C_1} \tag{3.11}$$

(e) Die Menge aller Funktionen vom Typ $I(x) + K = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + K$ wird als unbestimmtes Integral von $f(x)$ bezeichnet und durch das Symbol $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ gekennzeichnet.

$$\boxed{\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + K, \quad (K \in \mathbb{R})} \tag{3.12}$$

(f) Die Begriffe "Stammfunktion von $f(x)$" und "unbestimmtes Integral von $f(x)$" sind somit gleichwertig. Das unbestimmte Integral $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ von $f(x)$ ist daher in folgender Form darstellbar, wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion zu $f(x)$ bedeutet und die Integrationskonstante C alle reelle Werte durchläuft. Das Aufsuchen sämtlicher Stammfunktionen $F(x)$ zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ heisst **unbestimmte Integration**.

$$\boxed{\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)\right)} \tag{3.13}$$

(g) Die Stammfunktionen oder Integralkurven zu einer stetigen Funktion $f(x)$ bilden eine **einparametrige Kurvenschar**. Jede Integralkurve entsteht dabei aus jeder anderen durch Parallelverschiebung in der y-Richtung.

(h) Faktor- und Summenregel für bestimmte Integrale gelten sinngemäss auch für unbestimmte Integrale.

3.3 Integrale elementarer Funktionen

3.3.1 Integralen der Potenzfunktionen

(a) $\int 0\,\mathrm{d}x = C$

(b) $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$

(c) $\int x^n\ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(d) $\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln\left|x\right| + C$

3.3.2 Integralen der trigonometrischen Funktionen

(a) $\int \sin(x)\ \mathrm{d}x = -\cos(x) + C$

(b) $\int \cos(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x) + C$

(c) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x = \tan(x) + C$

(d) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}\ \mathrm{d}x = -\cot(x) + C$

3.3.3 Integralen der Arkusfunktionen

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin(x) + C_1 \\ -\arccos(x) + C_2 \end{cases}$

(b) $\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \arctan(x) + C_1 \\ -\operatorname{arccot}(x) + C_2 \end{cases}$

3.3.4 Integralen der Exponentialfunktionen

$(a)\ \displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$

$(b)\ \displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

3.3.5 Integralen der Hyperbelfunktionen

$(a)\ \displaystyle\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$

$(b)\ \displaystyle\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$

$(c)\ \displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tanh(x) + C$

$(d)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\coth(x) + C$

3.3.6 Integralen der Areafunktionen

$(a)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Arsinh}(x) + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$

$(b)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Arcosh}(x) + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, \quad \left(\left|x\right| > 1\right)$

$(c)\ \displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{Artanh}(x) + C_1 = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C_1, & \left(\left|x\right| < 1\right) \\ \operatorname{Arcoth}(x) + C_2 = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C_2, & \left(\left|x\right| > 1\right) \end{cases}$

3.4 Integrationsmethoden

3.4.1 Integration durch Substitution

Allgemeines Verfahren

Das vorgegebene Integral wird mit Hilfe einer geeigneten Substitution in ein Grund- oder Stammintegral ersetzt

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \begin{array}{c} u = g(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)\right] \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)\right]} \end{array} = \int \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(u) = \Phi\Big(g(x)\Big) = F(x)} \tag{3.14}$$

Anmerkungen

(i) In bestimmten Fällen ist es günstiger, die Hilfsvariable u durch eine Substitution om Typ $x = h(u)$ einzuführen. Es gilt dann

$$\boxed{x = h(u), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[h(u)\right], \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[h(u)\right]\cdot\mathrm{d}u} \tag{3.15}$$

(ii) Die Substitutionen $u = g(x)$ und $x = h(u)$ müssen monotone und stetige differenzierbare Funktionen sein.

(iii) Bei einem bestimmten Integral kann auf die Rücksubstitution verzichtet werden, wenn man die Integrationsgrenzen mit Hilfe der Substitutionsgleichung $u = g(x)$ bzw. $x = h(u)$ mitsubstituiert.

Spezielle Integrationssubstitutionen

(a)
$$\begin{aligned} \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{c} u = ax+b \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a \Rightarrow \mathrm{d}u = a\cdot\mathrm{d}x \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{a}\int f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\cdot F(u) + C = \frac{1}{2}\cdot F(ax+b) + C \end{aligned}$$

$$
\text{(b)} \quad \int f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big]\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u = f(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] \cdot \mathrm{d}x \end{array}\right\}
$$

$$
= \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\Big[f(x)\Big]^2 + C
$$

$$
\text{(c)} \quad \int \Big[f(x)\Big]^n \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big]\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u = f(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] \cdot \mathrm{d}x \end{array}\right\}
$$

$$
= \int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{\Big[f(x)\Big]^{n+1}}{n+1} + C
$$

$$
\text{(d)} \quad \int f\Big[g(x)\Big] \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[g(x)\Big]\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u = g(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[g(x)\Big] \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[g(x)\Big] \cdot \mathrm{d}x \end{array}\right\}
$$

$$
= \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C = F\Big[g(x)\Big] + C
$$

$$
\text{(e)} \quad \int \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big]}{f(x)}\,\mathrm{d}x = = \left\{\begin{array}{c} u = f(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x)\Big] \cdot \mathrm{d}x \end{array}\right\}
$$

$$
= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\Big|u\Big| + C = \ln\Big|f(x)\Big| + C
$$

$$
\text{(f)} \quad \int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} x = a \cdot \sin(u) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = a \cdot \cos(u) \Rightarrow \mathrm{d}x = a \cdot \cos(u)\,\mathrm{d}u \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos(u) \end{array}\right\}
$$

$$
\text{(g)} \quad \int R\left(x; \sqrt{x^2 + a^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} x = a \cdot \sinh(u) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = a \cdot \cosh(u) \Rightarrow \mathrm{d}x = a \cdot \cosh(u)\,\mathrm{d}u \\ \sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot \cosh(u) \end{array}\right\}
$$

$$
\text{(h)} \quad \int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} x = a \cdot \cosh(u) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = a \cdot \sinh(u) \Rightarrow \mathrm{d}x = a \cdot \sinh(u)\,\mathrm{d}u \\ \sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \sinh(u) \end{array}\right\}
$$

$$
\text{(i)} \quad \int R\Big(\sin(x); \cos(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{2} = \dfrac{1 + u^2}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1 + u^2}\mathrm{d}u \\ \sin(x) = \dfrac{2u}{1 + u^2} \\ \cos(x) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2} \end{array}\right\}
$$

$$
\text{(j)} \quad \int R\Big(\sinh(x); \cosh(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u = e^x \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x = u \Rightarrow \mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}x \\ \sinh(x) = \dfrac{u^2 - 1}{2u} \\ \cosh(x) = \dfrac{u^2 + 1}{2u} \end{array}\right\}
$$

3.4.2 Partielle Integration

Die Formel der partiellen Integration lautet

$$
\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[v(x)\Big]\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u(x)\Big] \cdot v(x)\,\mathrm{d}x} \tag{3.16}
$$

$$
\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[v(x)\Big]\,\mathrm{d}x = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u(x)\Big] \cdot v(x)\,\mathrm{d}x} \tag{3.17}
$$

Der Integrand $f(x)$ wird in geeigneter Weise in ein Produkt aus zwei Funktionen $u(x)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[v(x)\Big]$ zerlegt. Die Integration gelingt, wenn sich eine Stammfunktion zum kritischen Faktor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[v(x)\Big]$ angeben lässt und das neue Hilfsintegral der rechten Seite elementar lösbar ist.

Anmerkungen

(a) in einigen Fällen muss man mehrmals hintereinander partiell integrieren, ehe man auf ein Grundintegral stösst.

(b) Die Formel der partiellen Integration gilt sinngemäss auch für bestimmte Integrale.

3.4.3 Integration durch Partialbruchzerlegung

Vorgehensweise

Die Integration einer gebrochenrationale Funktion $f(x)$ geschieht nach dem folgenden Schema

(a) Ist die Funktion $f(x)$ unecht gebrochenrational, so wird sie zunächst durch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion $p(x)$ und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ zerlegt.

$$\boxed{f(x) = p(x) + r(x)} \tag{3.18}$$

(b) Der echt gebrochenrationale Anteil $r(x)$ wird in Partialbrüche zerlegt.

(c) Anschliessend erfolgt die Integration des ganzrationalen Anteils $p(x)$ sowie sämtlicher Partialbrüche.

Fall 1: Der Nenner $N(x)$ besitzt reelle Nullstellen

Die echt gebrochenrationale Funktion ist dann als Summe sämtlicher Partialbrüche darstellbar. Besitzt der Nenner $N(x)$ ausschliesslich n verschiedene einfache Nullstellen, so lautet die Partialbruchzerlegung

$$\boxed{r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}} \tag{3.19}$$

Ist x_1 eine r-fache Nullstelle des Nenners $N(x)$ so lautet der Partialbruch

$$\boxed{\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}} \tag{3.20}$$

Fall 2: Der Nenner $N(x)$ besitzt auch komplexe Nullstellen

Die komplexen Nullstellen des Nenners $N(x)$ treten immer paarweise, d.h. in komplex konjugierte Form auf. Für zwei einfache konjugiert komplexe Nennernullstellen x_1 und x_2, wobei x_1 und x_2 die konjugiert komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, lautet der Partialbruchansatz

$$\boxed{\frac{Bx + C}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}} \tag{3.21}$$

Sind x_1 und x_2 r-fach konjugiert komplexen Nullstellen so lautet der Partialbruch

$$\boxed{\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{B_r x + C_r}{(x^2 + px + q)^r}} \tag{3.22}$$

Integration der Partialbrüche bei reellen Nullstellen von $N(x)$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x - x_1}\, dx = \ln\left|x - x_1\right| + C_1} \tag{3.23}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x - x_1)^r}\, dx = \frac{1}{(1 - r)(x - x_1)^{r-1}} + C_2, \quad (r \geq 2)} \tag{3.24}$$

Integration der Partialbrüche bei komplexen Nullstellen von $N(x)$

$$\boxed{\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\, dx = \frac{B}{2} \cdot \ln\left|x^2 + px + q\right| + \left(\frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}}\right) \cdot \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + C_3} \tag{3.25}$$

3.5 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale werden durch Grenzwerte erklärt. Ist der jeweilige Grenzwert vorhanden, so heisst das uneigentliche Integral konvergent, sonst divergent.

3.5.1 Unendliches Integrationsintervall

Die Integration erfolgt über ein unendliches Intervall. Falls der Grenzwert vorhanden ist, setzt man $\lambda = a$

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\, dx\right)} \tag{3.26}$$

3.5.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)

Der Integrand $f(x)$ besitzt an der Stelle $x = b$ einen Pol. Falls der Grenzwert vorhanden ist, setzt man $a < \lambda < b$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to b} \left(\int_a^\lambda f(x)\, dx\right)} \tag{3.27}$$

3.6 Anwendungen der Integralrechnung

3.6.1 Integration der Bewegungsgleichung

Aus der Beschleunigungs-Zeit-Funktion $a(t)$ einer geradlinigen Bewegung erhält man durch ein- bzw. zweimalige Integration bezüglich der Zeitvariablen t den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit $v(t)$ und Weg $s(t)$. Die Integrationskonstanten v_0 und s_0 erhält man durch Anfangswerte für $t = 0$.

$$\boxed{v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t + v_0} \quad \boxed{s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t + s_0} \tag{3.28}$$

3.6.2 Die Arbeit einer ortsabhängigen Kraft

Ein Massenpunkt m wird durch eine ortsabhängige Kraft $\vec{F}(s)$ geradlinig von s_1 nach s_2 verschoben. Es sei $F_s(s)$ die skalare ortsabhängige Kraftkomponente in Richtung des Weges, s die Ortskoordinate und $\mathrm{d}s$ da Wegelement. Die dabei verrichtete Arbeit beträgt:

$$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} \left(\vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{s}\right) = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s)\,\mathrm{d}\vec{s}} \tag{3.29}$$

3.6.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion

Der lineare Mittelwert

Die Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ entspricht dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $b - a$ und $\overline{y}_{\text{linear}}$. Voraussetzung dabei ist der Verlauf gilt oberhalb der x-Achse. Allgemein ist der lineare Mittelwert eine Art mittlere Ordinate der Kurve $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$.

$$\boxed{\overline{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{3.30}$$

Der quadratische Mittelwert

$$\boxed{\overline{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \Big[f(x)\Big]^2\,\mathrm{d}x}} \tag{3.31}$$

Die zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion

Sei $y = f(t)$ eine zeitabhängige periodische Funktion mit der Periodendauer T. Bei Wechselströmen und Wechselspannungen werden die quadratischen Mittelwerte als Effektivwerte bezeichnet.

$$\boxed{\overline{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\,\mathrm{d}t} \quad \boxed{\overline{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} \Big[f(t)\Big]^2\,\mathrm{d}t}} \tag{3.32}$$

3.6.4 Der Flächeninhalt

In kartesische Koordinaten

Sei $f_o(x)$ die obere Randkurve und $f_u(x)$ die untere Randkurve. Voraussetzung ist es, die beiden Randkurven im Intervall $a \leq x \leq b$ sollen sich nicht durchschneiden, andererseits muss die Fläche in Teilflächen zerlegt werden.

$$\boxed{A = \int_a^b \Big(f_o(x) - f_u(x)\Big)\,\mathrm{d}x} \tag{3.33}$$

in der Parameterform

Sei $f(t)$ die Parametergleichung der oberen Randkurve, so lautet den Flächeninhalt unterhalb der Kurve

$$\boxed{f(t) = \begin{Bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{Bmatrix} \Longrightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x(t)\Big]\,\mathrm{d}t} \tag{3.34}$$

Leibnizsche Sektorformel

Sei $f(t)$ die Parametergleichung der oberen Randkurve, so lautet den Flächeninhalt unterhalb der Kurve bezüglich des Ursprungs

$$\boxed{f(t) = \begin{Bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{Bmatrix} \Longrightarrow A = \frac{1}{2}\left|\int_{t_1}^{t_2} x(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[y(t)\Big] - y(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x(t)\Big]\,\mathrm{d}t\right|} \tag{3.35}$$

in Polarkoordinaten

Sei $r(\varphi)$ die Randkurve in Polarkoordinaten. Den Flächeninhalt unterhalb der Kurve bezüglich des Ursprungs lautet

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Big[r(\varphi)\Big]^2\,\mathrm{d}\varphi} \tag{3.36}$$

3.6.5 Der Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche

Sei $f_o(x)$ die obere Randkurve, $f_u(x)$ die untere Randkurve und A den Flächeninhalt. So lautet den Schwerpunkt

$$\boxed{x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot \Big(f_o(x) - f_u(x) \Big) \, \mathrm{d}x} \tag{3.37}$$

$$\boxed{y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b \Big(f_o^2(x) - f_u^2(x) \Big) \, \mathrm{d}x} \tag{3.38}$$

Multipliziert man die Formeln mit der Fläche A, so erhält man die statischen Momente M_x und M_y der Fläche bezogen auf die x- bzw. y-Achse

$$\boxed{M_x = A \cdot y_S = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b \Big(f_o^2(x) - f_u^2(x) \Big) \, \mathrm{d}x} \tag{3.39}$$

$$\boxed{M_y = A \cdot x_S = \int_a^b x \cdot \Big(f_o(x) - f_u(x) \Big) \, \mathrm{d}x} \tag{3.40}$$

Teilschwerpunktsatz

Der Schwerpunkt S der Fläche A liegt auf der Verbindungslinie der beiden Teilflächenschwerpunkte S_1 und S_2 zweier Flächen A_1 und A_2

$$\boxed{A \cdot x_S = A_1 \cdot x_{S_1} + A_2 \cdot x_{S_2}} \quad \boxed{A \cdot y_S = A_1 \cdot y_{S_1} + A_2 \cdot y_{S_2}} \tag{3.41}$$

3.6.6 Das Flächenträgheitsmoment

Sei $f_o(x)$ die obere Randkurve und $f_u(x)$ die untere Randkurve, I_x und I_y die axiale oder äquatoriale Flächenmomente 2. Grades bezüglich der x- bzw. y-Achse und I_p das polare Flächenmoment 2. Grades bezüglich des Nullpunktes

$$\boxed{I_x = \frac{1}{3} \cdot \int_a^b \Big(f_o^3(x) - f_u^3(x) \Big) \, \mathrm{d}x} \tag{3.42}$$

$$\boxed{I_y = \int_a^b x^2 \cdot \Big(f_o(x) - f_u(x) \Big) \, \mathrm{d}x} \tag{3.43}$$

$$\boxed{I_p = I_x + I_y} \tag{3.44}$$

Satz von Steiner

Sei I das Flächenmoment bezüglich der gewählten Bezugsachse. I_S das Flächenmoment bezüglich der zur Bezugsachse parallelen Schwerpunktachse, A die Fläche und d der Abstand zwischen Bezugs- und Schwerpunktachse.

$$\boxed{I = I_S + A \cdot d^2} \tag{3.45}$$

3.6.7 Die Bogenlänge einer ebenen Kurve

In kartesischen Koordinaten

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big[f(x) \Big] \right)^2} \, \mathrm{d}x} \tag{3.46}$$

In der Parameterform

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[x(t) \Big] \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[y(t) \Big] \right)^2} \, \mathrm{d}t} \tag{3.47}$$

In Polarkoordinaten

$$\boxed{s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\Big(r(\varphi) \Big)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \Big[r(\varphi) \Big] \right)^2}} \tag{3.48}$$

3.6.8 Das Volumen eines Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse in kartesische Koordinaten

$$\boxed{V_x = \pi \cdot \int_a^b \Big[f(x) \Big]^2 \, \mathrm{d}x} \tag{3.49}$$

Rotation um die y-Achse in kartesische Koordinaten

$$\boxed{V_y = \pi \cdot \int_c^d \Big[f^{-1}(x) \Big]^2 \, \mathrm{d}x} \tag{3.50}$$

Rotation um die x-Achse in Parameterform

$$\boxed{f(t) = \begin{Bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{Bmatrix} \Longrightarrow V_x = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} \Big[y(t) \Big]^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[x(t) \Big] \, \mathrm{d}t} \tag{3.51}$$

Rotation um die y-Achse in Parameterform

$$\boxed{f(t) = \begin{Bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{Bmatrix} \Longrightarrow V_y = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t)\right]^2 \cdot \dot{y}(t)\ \mathrm{d}t} \tag{3.52}$$

3.6.9 Die Mantelfläche eines Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse

$$\boxed{M_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\right]\right)^2}\ \mathrm{d}t} \tag{3.53}$$

Rotation um die y-Achse

$$\boxed{M_y = 2\pi \cdot \int_c^d f^{-1}(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{-1}(x)\right]\right)^2}\ \mathrm{d}t} \tag{3.54}$$

3.6.10 Der Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse

$$\boxed{x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x \cdot \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x, \quad y_S = z_S = 0} \tag{3.55}$$

Rotation um die x-Achse

$$\boxed{y_S = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \left[f^{-1}(x)\right]^2 \mathrm{d}x} \tag{3.56}$$

3.6.11 Das Massenträgheitsmoment eines Körpers

Allgemeine Definition

Sei $\mathrm{d}m$ das Massenelement, $\mathrm{d}V$ das Volumenelement, r der senkrechte Abstand des Massen- bzw. Volumenelements von der gewählten Bezugsachse, ρ die Dichte des homogenen Körpers.

$$\boxed{J = \int_{(m)} r^2\ \mathrm{d}m = \rho \cdot \int_{(V)} r^2\ \mathrm{d}V} \tag{3.57}$$

Satz von Steiner

Sei J das Massenträgheitsmoment bezüglich der gewählten Bezugsachse, J_S das Massenträgheitsmoment bezüglich der zur Bezugsachse parallelen Schwerpunktachse, m die Masse des Körpers und d der Abstand zwischen Bezugs- und Schwerpunktachse

$$\boxed{J = J_S + m \cdot d^2} \tag{3.58}$$

Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse

$$\boxed{J_x = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^4 \mathrm{d}x} \tag{3.59}$$

Rotation um die y-Achse

$$\boxed{J_y = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot \int_c^d \left[f^{-1}(x)\right]^4 \mathrm{d}x} \tag{3.60}$$

4 UNENDLICHE REIHEN, TAYLOR UND FOURIER-REIHEN

4.1 Unendliche Reihe

4.1.1 Grundbegriffe

Aus den Gliedern einer **unendlichen Zahlenfolge** $\langle a_n \rangle = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ werden wie folgt Partial- oder Teilsummen s_n gebildet.

$$\boxed{s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k} \tag{4.1}$$

Die Folge $\langle s_n \rangle$ dieser Partialsummen heisst **unendliche Reihe**. Besitzt die Folge der Partialsummen s_n einen Grenzwert s, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so heisst die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergent** mit dem Summenwert s. Besitzt die Partialsumme keinen Grenzwert, so heisst die unendliche Reihe **divergent**.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = s} \tag{4.2}$$

Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die aus den Beträgen ihrer Glieder gebildete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$ konvergiert. Eine Reihe mit dem Summenwert $s = \pm\infty$ ist divergent.

4.1.2 Konvergenzkriterien

Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist zwar notwendig, nicht aber hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Die Reihenglieder einer konvergenten Reihe müssen also eine **Nullfolge** bilden.

Folgende Bedingungen stellen hinreichende Konvergenzbedingungen dar. Sie ermöglichen in vielen Fällen eine Entscheidung darüber, ob eine vorgegebene Reihe **konvergiert** oder **divergiert**.

Quotientenkriterium

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1} \tag{4.3}$$

Für $q > 1$ divergiert die Reihe, für $q = 1$ versagt das Kriterium, d.h. eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz ist anhand dieses Kriteriums nicht möglich.

Wurzelkriterium

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1} \tag{4.4}$$

Für $q > 1$ divergiert die Reihe, für $q = 1$ versagt das Kriterium, d.h. eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz ist anhand dieses Kriteriums nicht möglich.

Vergleichskriterien

Das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit positiven Gliedern kann oft mit Hilfe einer geeigneten konvergenten bzw. divergenten Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bestimmt werden. Mit dem **Majorantenkriterium** kann die Konvergenz, mit dem **Minorantenkriterium** die Divergenz einer Reihe festgestellt werden.

Majorantenkriterium

Die vorliegende Reihe konvergiert, wenn die Vergleichsreihe konvergiert und zwischen den Gliedern beider Reihen die Beziehung besteht

$$\boxed{a_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*} \tag{4.5}$$

Die konvergente Vergleichsreihe wird als **Majorante** bezeichnet. Es genügt wenn die angegebene Bedingung $a_n \le b_n$ von einem gewissen n_0 an, d.h. für alle Reihenglieder mit $n \ge n_0$ erfüllt wird.

Minorantenkriterium

Die vorliegende Reihe divergiert, wenn die Vergleichsreihe divergiert und zwischen den Gliedern beider Reihen die Beziehung besteht

$$\boxed{a_n \ge b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*} \tag{4.6}$$

Die divergente Vergleichsreihe wird als **Minorante** bezeichnet. Es genügt wenn die angegebene Bedingung $a_n \ge b_n$ von einem gewissen n_0 an, d.h. für alle Reihenglieder mit $n \ge n_0$ erfüllt wird.

Leibnizkriterien

Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt: Die Glieder eine rkonvergenten alternierende Reihe bilden dem Betrage nach eine monoton fallende Nullfolge. Die Reihe konvergiert auch dann, wenn die erste der beiden Bedingungen erst von einem bestimmten Glied an erfüllt ist.

Eigenschaften

(*a*) Eine konvergente Reihe bleibt konvergent, wenn man endlich viele Glieder weglässt oder hinzufügt oder abändert. Dabei kann sich jedoch der Summenwert ändern. Klammern dürfen in Allgemeinen nicht weggelassen werden, ebenso wenig darf die Reihenfolge der Glieder verändert werden.

(*b*) Aufeinander folgende Glieder einer konvergenten Reihe dürfen durch eine Klammer zusammengefasst werden; der Summenwert der Reihe bleibt dabei erhalten.

(*c*) Eine konvergente Reihe darf gliedweise mit einer Konstanten multipliziert werden, wobei sich auch der Summenwert der Reihe mit dieser Konstanten multipliziert.

(*d*) Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert und subtrahiert werden, wobei sich ihre SUmmenwerte addieren bzw. subtrahieren.

(*e*) Eine absolut konvergente Reihe ist stets konvergent. Für solche Reihen gelten sinngemäss die gleichen Rechenregeln wie für endliche Summen gliedweise Addition, Subtraktion und Multiplikation, beliebige Anordnung der Reihenglieder usw.

4.1.3 Spezielle konvergente Reihen

Geometrische Reihe

Divergenz für $\left|q\right| \geq 1$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(a \cdot q^{n-1}\right) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-q}, \quad \left(\left|q\right| < 1\right)} \tag{4.7}$$

Weitere konvergente Reihen

(*a*) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e$

(*b*) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots = \ln(2)$

(*c*) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}$

(*d*) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

(*e*) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$

(*f*) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots = 1$

4.2 Potenzreihen

4.2.1 Definition einer Potenzreihe

Entwicklung um die Stelle x_0

$$\boxed{P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots} \tag{4.8}$$

Entwicklung um den Nullpunkt $x_0 = 0$

$$\boxed{P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots} \tag{4.9}$$

4.2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ besteht aus dem offenen Intervall positive Zahl r heisst Konvergenzradius. Für $\left|x\right| > r$ divergiert die Potenzreihe.

Berechnung des Konvergenzradius r

Folgende Formeln gelten auch für eine um die Stelle x_0 entwickelte Potenzreihe. Die Reihe konvergiert dann im Intervall $\left|x - x_0\right| < r$, zu dem gegebenfalls noch ein oder gar beide Randpunkte hinzukommen.

$$\boxed{r = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \quad \boxed{r = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}}} \tag{4.10}$$

(*i*) Sei $r = 0$ so ist konvergiert die Potenzreihe nur für $n \to \infty$

(*ii*) Sei $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe beständig, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$

4.2.3 Eigenschaften einer Potenzreihe

(*i*) Eine Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergentbereiches absolut.

(*ii*) Eine Potenzreihe darf innerhalb ihres Konvernegzbereiches gliedweise differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen haben dabei denselben Konvergenzradius r wie die ursprüngliche Reihe.

(*iii*) Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich der Reihen gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der beiden Ausgangsreihen.

4.3 Taylor-Reihen

4.3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel

Taylorsche Formel

$$f_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{4.11}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (x < \xi < x_0) \tag{4.12}$$

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x) \tag{4.13}$$

Mac Laurinsche Formel

$$f_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n \tag{4.14}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1) \tag{4.15}$$

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x) \tag{4.16}$$

4.3.2 Taylorsche Reihe

$f(x)$ ist in der Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar und das Restglied $R_n(x)$ in der Taylorschen Formel verschwindet für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.3.3 Mac Laurinsche Reihe

Die Mac Laurinsche Reihe ist eine spezielle Form der Taylorschen Reihe für das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$. Bei einer geraden Funktion treten nur gerade Potenzen auf, bei einer ungeraden Funktion nur ungerade Potenzen.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen

Allgemeine Binomische Reihe

(*a*) $(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 \pm \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 \pm \ldots$

(*b*) $(a \pm x)^n = a^n \pm \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 \pm \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \binom{n}{4}a^{n-4}x^4 \pm \ldots$

Spezielle Binomische Reihen

(*a*) $(1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\frac{3}{8}x^2 \pm \frac{1}{4}\frac{3}{8}\frac{7}{12}x^3 - \frac{1}{4}\frac{3}{8}\frac{7}{12}\frac{11}{16}x^4 \pm \ldots \quad \begin{cases} n > 0: & |x| \leq 1 \\ n < 0: & |x| < 1 \end{cases}$

(*b*) $(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{2}{6}x^2 \pm \frac{1}{3}\frac{2}{6}\frac{5}{9}x^3 - \frac{1}{3}\frac{2}{6}\frac{5}{9}\frac{8}{12}x^4 \pm \ldots \quad \begin{cases} n > 0: & |x| \leq |a| \\ n < 0: & |x| < |a| \end{cases}$

(*c*) $(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2 \pm \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}x^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}x^4 \pm \ldots \quad |x| \leq 1$

(*d*) $(1 \pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\frac{1}{4}x^2 \mp \frac{3}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{6}\frac{3}{8}x^4 \mp \ldots \quad |x| \leq 1$

(*e*) $(1 \pm x)^{-1/4} = 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\frac{5}{8}x^2 \mp \frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{9}{12}x^3 + \frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{9}{12}\frac{13}{16}x^4 \mp \ldots \quad |x| < 1$

(*f*) $(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\frac{4}{6}x^2 \mp \frac{1}{3}\frac{4}{6}\frac{7}{9}x^3 + \frac{1}{3}\frac{4}{6}\frac{7}{9}\frac{10}{12}x^4 \mp \ldots \quad |x| < 1$

(*g*) $(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^2 \mp \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}x^4 \mp \ldots \quad |x| < 1$

(h) $(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots \quad \left|x\right| \leq 1$

(i) $(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\frac{5}{4}x^2 \mp \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{9}{8}x^4 \mp \dots \quad \left|x\right| < 1$

(j) $(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots \quad \left|x\right| < 1$

(k) $(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp \frac{1}{2}\left(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \dots\right) \quad \left|x\right| < 1$

Reihen der Exponentialfunktionen

(a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \left|x\right| < \infty$

(b) $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \quad \left|x\right| < \infty$

(c) $a^x = 1 + \frac{\ln(a)}{1!}x + \frac{(\ln(a))^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln(a))^3}{3!}x^3 + \frac{(\ln(a))^4}{4!}x^4 + \dots \quad \left|x\right| < \infty$

Reihen der logarithmischen Funktionen

(a) $\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + - \dots \quad 0 < x \leq 2$

(b) $\ln(x) = 2\Big[\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \dots\Big] \quad x > 0$

(c) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots \quad -1 < x \leq 1$

(d) $\ln(1-x) = -\Big[x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\Big] \quad -1 \leq x \leq 1$

(e) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\Big[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\Big] \quad \left|x\right| < 1$

Reihen der trigonometrischen Funktionen

(a) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \left|x\right| < \infty$

(b) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \left|x\right| < \infty$

(c) $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots \quad \left|x\right| < \frac{\pi}{2}$

(d) $\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots \quad 0 < \left|x\right| < \pi$

Reihen der Arkusfunktionen

(a) $\arcsin(x) = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots \left|x\right| < 1$

(b) $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \Big[x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots\Big] \quad \left|x\right| < 1$

(c) $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots \quad \left|x\right| < 1$

(d) $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \Big[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots\Big] \quad \left|x\right| < 1$

Reihen der Hyperbelfunktionen

(a) $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \left|x\right| < \infty$

(b) $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \left|x\right| < \infty$

(c) $\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - + \dots \quad \left|x\right| < \frac{\pi}{2}$

(d) $\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 - + \dots \quad 0 < \left|x\right| < \pi$

Reihen der Areafunktionen

(a) $\operatorname{Arsinh}(x) = x - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \quad \left|x\right| < 1$

(b) $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots \quad \left|x\right| > 1$

(c) $\operatorname{Artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \quad \left|x\right| < 1$

(d) $\operatorname{Arcoth}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \quad \left|x\right| > 1$

4.5 Näherungspolynome einer Funktion

Bricht man die Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f(x)$ nach der n-ten POtenz ab, so erhält man ein Näherungspolynom $f_n(x)$ vom Grade n für $f(x)$, das sogenannte Mac. Laurinsches bzw. Taylorsches Polynom. Funktion $f(x)$ und $f_n(x)$ stimmen an der Entwicklungsstelle x_0 in ihrem Funktionswert und in ihren ersten n Ableitungen miteinander überein.

4.5.1 Fehlerabschätzung

Der durch den Abbruch der Potenzreihe entstandene Fehler lässt sich in Allgemeinen anhand der Lagrangeschen Restgliedformel abschätzen. Er liegt in der Grössenordnung des grössten Reihengliedes, das in der Näherung nicht mehr berücksichtigt wurde.

4.5.2 Näherungspolynome spezieller Funktionen

$$(a)\ (1 \pm x)^n = \begin{cases} = 1 + \pm nx, & \text{(1. Näherung)} \\ = 1 \pm nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(b)\ e^x = \begin{cases} = 1 + x, & \text{(1. Näherung)} \\ = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(c)\ e^{-x} = \begin{cases} = 1 - x, & \text{(1. Näherung)} \\ = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(d)\ a^x = \begin{cases} = 1 + \ln(a)\,x, & \text{(1. Näherung)} \\ = 1 + \ln(a)\,x + \dfrac{(\ln(a))^2}{2}x^2, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(e)\ \ln(1+x) = \begin{cases} = x, & \text{(1. Näherung)} \\ = x - \dfrac{1}{2}x^2, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(f)\ \ln(1-x) = \begin{cases} = -x, & \text{(1. Näherung)} \\ = -x - \dfrac{1}{2}x^2, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(g)\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} = 2x, & \text{(1. Näherung)} \\ = 2x + \dfrac{2}{3}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(h)\ \sin(x) = \begin{cases} = x, & \text{(1. Näherung)} \\ = x - \dfrac{1}{6}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(i)\ \cos(x) = \begin{cases} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2, & \text{(1. Näherung)} \\ = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(j)\ \tan(x) = \begin{cases} = x, & \text{(1. Näherung)} \\ = x + \dfrac{1}{3}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(k)\ \arcsin(x) = \begin{cases} = x, \text{(1. Näherung)} \\ = x + \dfrac{1}{6}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(l)\ \arccos(x) = \begin{cases} = \dfrac{\pi}{2} - x, \text{(1. Näherung)} \\ = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(m)\ \arctan(x) = \begin{cases} = x, \text{(1. Näherung)} \\ = x - \dfrac{1}{3}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(n)\ \operatorname{arccot}(x) = \begin{cases} = \dfrac{\pi}{2} - x, \text{(1. Näherung)} \\ = \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{1}{3}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(o)\ \sinh(x) = \begin{cases} = x, \text{(1. Näherung)} \\ = x + \dfrac{1}{6}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(p)\ \cosh(x) = \begin{cases} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2, \text{(1. Näherung)} \\ = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(q)\ \tanh(x) = \begin{cases} = x, \text{(1. Näherung)} \\ = x - \dfrac{1}{3}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(r)\ \operatorname{Arsinh}(x) = \begin{cases} = x, \text{(1. Näherung)} \\ = x - \dfrac{1}{6}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

$$(s)\ \operatorname{Artanh}(x) = \begin{cases} = x, \text{(1. Näherung)} \\ = x + \dfrac{1}{3}x^3, & \text{(2. Näherung)} \end{cases}$$

4.6 Fourier-Reihen

4.6.1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Eine periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode $p = 2\pi$ lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form entwickeln.

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \right]} \tag{4.19}$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n und b_n

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{d}x} \tag{4.20}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, \mathrm{d}x} \tag{4.21}$$

(1) Voraussetzung ist, dass die folgenden Dirichletschen Bedingungen erfüllt sind

- (a) Das Periodenintervall lässt sich in endlich Teilintervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist.
- (b) Besitzt die Funktion $f(x)$ im Periodenintervall Unstetigkeitsstellen, so existiert in ihnen sowohl der links-als auch der rechtsseitige Grenzwert.

(2) In den Sprungstellen der Funktion $f(x)$ liefert die Fourier-Reihe von $f(x)$ das arithmetische Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion.

Symmetriebetrachtungen

$f(x)$ ist eine gerade Funktion:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx), \quad (b_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}^*)} \tag{4.22}$$

$f(x)$ ist eine ungerade Funktion:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx), \quad (a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}^*)} \tag{4.23}$$

Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jnx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jnx}, \quad (n \in \mathbb{Z})} \tag{4.24}$$

Die komplexe Fourier-Reihe lässt sich auch wie folgt aufspalten

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jnx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-jnx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jnx}} \tag{4.25}$$

Der Koeffizient c_{-n} ist dabei konjugiert komplex zu c_n, d.h. $c_{-n} = c_n^*$

Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_n, b_n und c_n

Übergang von der reellen zur komplexen Form

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{4.26}$$

Übergang von der komplexen zur reellen Form

$$\boxed{a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = j(c_n - c_{-n}), \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{4.27}$$

4.6.2 Fourier einer nichtsinusförmigen Schwingung

Eine nichtsinusförmig verlaufende Schwingung $y = y(t)$ mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Schwingungsdauer (Periodendauer) $T = 2\pi/\omega$ lässt sich nach Fourier wie folgt in ihre harmonischen Bestandteile zerlegen. $\omega_0 = 2\pi/T$ ist die Kreisfrequenz der Grundschwingung. $n\omega_0$ sind die Kreisfrequenzen der harmonischen Oberschwingungen $(n = 2, 3, 4, \dots)$

$$\boxed{y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \right]} \tag{4.28}$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n und b_n

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t)\, \mathrm{d}t} \tag{4.29}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\, \mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\, \mathrm{d}t} \tag{4.30}$$

Fourier-Zerlegung in phasenverschobene Sinusschwingungen

$$\boxed{y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)} \tag{4.31}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)} \tag{4.32}$$

Fourier-Zerlegung in komplexer Form

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}} \tag{4.33}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \, \mathrm{d}t} \tag{4.34}$$

4.6.3 Spezielle Fourier-Reihen

Rechteckskurve

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} \hat{y} & \texttt{für} \quad 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \texttt{für} \quad \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}} \tag{4.35}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \ldots \right)} \tag{4.36}$$

Rechtecksimpuls

$$\boxed{b = \frac{T}{2} - 2a} \tag{4.37}$$

$$\boxed{y(t) \begin{cases} \hat{y} & \text{für} \quad a < t < \frac{T}{2} - a \\ -\hat{y} & \text{für} \quad \frac{T}{2} + a < t < T - a \\ 0 & \text{im übrigen Intervall} \end{cases}} \tag{4.38}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi} \left(\frac{\cos(\omega_0 a)}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \ldots \right)} \tag{4.39}$$

Dreieckskurve

$$\boxed{y(t) \begin{cases} -\frac{2\hat{y}}{T} + \hat{y} & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ \frac{2\hat{y}}{T} t - \hat{y} & \text{für} \quad \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}} \tag{4.40}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5\omega_0 t) + \ldots \right)} \tag{4.41}$$

5 DIE KOMPLEXE ZAHLEN

5.1 Darstellungsformen einer komplexe Zahlen

5.1.1 Die Kartesische Form

Eine komplexe Zahl z lässt sich in der Gaussschen Zahlenebene durch einen Bildpunkt $P(z)$ oder durch einen vom Koordinatenursprung O zum Bildpunkt $P(z)$ gerichteten Zeiger bildlich darstellen. Die komplexe Zahl besteht aus einem reellen $\text{Re}(z) = a$, einem imaginären Anteil $\text{Im}(z) = b$ und eine imaginäre Einheit $\mathrm{j}^2 = -1$. Die Menge ist $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + \mathrm{j}b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{z = a + \mathrm{j}\, b} \tag{5.1}$$

Die Länge des Zeigers heisst Betrag $\left|z\right|$ der komplexen Zahl z.

$$\boxed{\left|z\right| = \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{5.2}$$

Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind genau gleich, $z_1 = z_2$, wenn ihre Bildpunkte zusammenfallen, d.h. $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ ist.

Die zu z konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ liegt spiegelsymmetrisch zur rellen Achse. Die komplexe Zahl z und ihre konjugiert $\overline{z}$ unterscheiden sich in ihrem Imaginärteil durch das Vorzeichen.

$$\boxed{\overline{z} = \overline{a + \mathrm{j}b} = a - \mathrm{j}b} \tag{5.3}$$

Somit gelten folgende Ausdrücke

(i) $\text{Re}(\overline{z}) = \text{Re}(z) = a$

(ii) $\left|\overline{z}\right| = \left|z\right|$

(iii) $\overline{(\overline{z})} = z$

(iv) Gilt $\overline{z} = z$, so ist z reell

5.1.2 Die Polarform

In der Polarform erfolgt die Darstellung einer komplexen Zahl durch die Polarkoordinaten r und φ. Man beschränkt sich auf $[0, 2\pi)$.

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \left\{\begin{array}{ll} +0, & \text{(I)} \\ +\pi, & \text{(II, III)} \\ +2\pi, & \text{(IV)} \end{array}\right\}} \tag{5.4}$$

Die **goniometrische Form** besteht aus dem Betrag und dem Argument von z. Die entsprechende konjugiert komplexe Zahl ist

$$\boxed{z = r \cdot \Big(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)\Big)} \quad \boxed{\overline{z} = r \cdot \Big(\cos(\varphi) - \mathrm{j}\sin(\varphi)\Big)} \tag{5.5}$$

Die **Exponentialform** besteht aus dem Betrag und dem Argument von z. Die entsprechende konjugierte komplexe Zahl ist

$$\boxed{z = r \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}} \quad \boxed{\overline{z} = r \cdot e^{-\mathrm{j}\varphi}} \tag{5.6}$$

Somit ergeben sich folgende Beziehungen

$$\boxed{e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)} \quad \boxed{e^{-\mathrm{j}\varphi} = \cos(\varphi) - \mathrm{j}\sin(\varphi)} \tag{5.7}$$

5.2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen

5.2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Zwei komplexe Zahlen werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Real- und Imaginärteil (jeweils für sich getrennt) addiert bzw. subtrahiert. Addition und Subtraktion sind nur in der karteischen Form durchführbar. Geometrisch entspricht dem Parallelogramregel der Vektorrechnung.

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + \mathrm{j}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{j}b_2) \\ &= (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 \pm b_2) \end{aligned}} \tag{5.8}$$

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(ii) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

5.2.2 Multiplikation komplexer Zahlen

Die Multiplikation in **kartesische Form** erfolgt, indem jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summand der zweiter Klammer unter Beachtung von $\mathrm{j}^2 = -1$ multipliziert. Geometrisch erfolgt eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn falls $\varphi_2 > 0$ und im Uhrzeigersinn falls $\varphi_2 < 0$ und eine Streckung um den Faktor r_2.

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + \mathrm{j}b_1) \cdot (a_2 + \mathrm{j}b_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{j}\,(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}} \tag{5.9}$$

Die Multiplikation in **Polarform** erfolgt, indem man ihre Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \Big[r_1\Big(\cos(\varphi_1) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1)\Big)\Big] \cdot r_2\Big(\cos(\varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_2)\Big)\Big] \\ &= (r_1r_2) \cdot \Big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big] \end{aligned}} \tag{5.10}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(r_1 \cdot e^{j\varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 \cdot e^{j\varphi_2}\right) \\ &= (r_1 r_2) \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}} \tag{5.11}$$

(i) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

(ii) $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

(iii) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(iv) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = \left|z\right|^2 \Longrightarrow \left|z\right| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

(v) $j^{4n} = 1, \quad j^{4n+1} = j, \quad j^{4n+2} = -1, \quad j^{4n+3} = -j \quad (n \in \mathbb{Z})$

5.2.3 Division komplexer Zahlen

Zähler und Nenner des Quotienten werden zunächst mit dem konjugiert komplexen Nenner, d.h. der Zahl $\overline{z}_2$ multipliziert, dadurch wird der Nenner reell. Geometrisch erfährt z_1 eine Zurückdrehung im Uhrzeigersinn falls $\varphi_2 > 0$ und im Gegenuhrzeigersinn falls $\varphi_2 < 0$ und eine Streckung um den Faktor $1/r_2$.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2)}{(a_2 + jb_2) \cdot (a_2 + jb_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}} \tag{5.12}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \left[\cos(\varphi_1) + j\sin(\varphi_1)\right]}{r_2 \left[\cos(\varphi_2) + j\sin(\varphi_2)\right]} \\ &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \end{aligned}} \tag{5.13}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}} \tag{5.14}$$

(i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot e^{j\varphi}} = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot e^{-j\varphi}$

(ii) $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j\frac{b}{a^2 + b^2}$

(iii) $\frac{1}{j} = -j$

5.3 Potenzieren komplexer Zahlen

5.3.1 Die kartesische Form

In kartesischer Form ist das Potenzieren komplexer Zahlen nach dem binomischen Lehrsatz

$$\boxed{z^n = (a + jb)^n = a^n + j\binom{n}{1}a^{n-1}b + j^2\binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + j^n b^n} \tag{5.15}$$

5.3.2 Die Polarform

In Polarform wird der Betrag in die n-te Potenz erhebt und ihr Argument mit dem Exponenten n multipliziert

$$\boxed{\begin{aligned} z^n &= \left[r \cdot \left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right)\right]^n \\ &= r^n \cdot \left[\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)\right] \end{aligned}} \tag{5.16}$$

$$\boxed{z^n = \left[r \cdot e^{j\varphi}\right]^n = r^n \cdot e^{jn\varphi}} \tag{5.17}$$

5.4 Radizieren komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl z heisst eine n-te Wurzel aus a, wenn sie der algebraischen Gleichung $z^n = a$ genügt ($a \in \mathbb{C}; \quad n \in \mathbb{N}^*$).

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades von folgendem Typ besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen stets genau n Lösungen. Bei ausschliesslich reellen koeffizienten a_i treten komplexe Lösungen immer paarweise in Form konjugiert komplexer Zahlen auf.

$$\boxed{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (a_i : \text{ reell oder komplex})} \tag{5.18}$$

Die n Wurzeln der Gleichung $z^n = a = a_0 \cdot e^{j\varphi}$ mit $a_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$ lauten

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{a_0} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha + k\,2\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\alpha + k\,2\pi}{n}\right)\right], \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)} \tag{5.19}$$

Der Hauptwert ist bei $k = 0$ und für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ erhält man Nebenwerte. Die Winkel können auch mîm Gradmass angegeben werden.

geometrisch liegen die zugehörige Bildpunkte aufdem Mittelpunktskreis mit dem Radius $R = \sqrt[n]{a_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks.

Die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ heissen n-te Einheitswurzeln und lauten

$$\boxed{z^n = 1 \Longrightarrow z_k = \cos\left(\frac{k\,2\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{k\,2\pi}{n}\right) = e^{\mathrm{j}\frac{k\,2\pi}{n}}} \tag{5.20}$$

5.5 Logarithmieren komplexer Zahlen

Der natürliche Logarithmus einer komplexen Zahl

$$\boxed{z = r\cdot e^{\mathrm{j}\varphi} = r\cdot e^{\mathrm{j}(\varphi + k\,2\pi)}, \quad (0 \le \varphi < 2\pi;\ k \in \mathbb{Z})} \tag{5.21}$$

ist unendlich vieldeutig, denn der Hauptwert des Winkels wird häufig auch im Intervall $-\pi < \varphi < \pi$

$$\boxed{\ln(z) = \ln(r) + \mathrm{j}(\varphi + k\,2\pi), \quad (k \in \mathbb{Z})} \tag{5.22}$$

5.6 Ortskurven

5.6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen

Die von einem reellen Parameter t abhängige komplexe Zahl heisst komplexwertige Funktion $z(t)$ der reellen Variablen t.

$$\boxed{z = z(t) = x(t) + \mathrm{j}y(t), \quad (a \le z \le b)} \tag{5.23}$$

5.6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl

Die von einem parameterabhängigen komplexen Zeiger $\underline{z} = \underline{z}(t)$ in der Gaussschen Zahlenebene beschriebene Bahn heisst Ortskurve

$$\boxed{\underline{z}(t) = x(t) + \mathrm{j}y(t)} \tag{5.24}$$

5.6.3 Inversion einer Ortskurve

Der Übergang von einer komplexen Zahl $z \neq 0$ zu ihrem Kehrwert $w = 1/z$ heisst Inversion. Vorzeichenwechsel im Argument, Kehrwertbildung des Betrages von z. Geometrisch wird der Zeiger an der reellen Achse gespiegelt und dann gestreckt mit Faktor $1/r^2$.

$$\boxed{z = r\cdot e^{\mathrm{j}\varphi} \to w = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)\cdot e^{-\mathrm{j}\varphi}} \tag{5.25}$$

(i) Der Punkt mit dem kleinsten Abstand vom Nullpunkt führt zu dem Bildpunkt mit dem grössten Abstand und umgekehrt.

(ii) Ein Punkt oberhalb der reellen Achse führt zu einem Bildpunkt unterhalb der reellen Achse und umgekehrt.

(iii) Eine Gerade durch den Nullpunkt auf der z-Ebene erzeugt eine Gerade durch den Nullpunkt auf der w-Ebene.

(iv) Eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt auf der z-Ebene geht, erzeugt einen Kreis durch den Nullpunkt auf der w-Ebene.

(v) Ein Mittelpunktskreis auf der z-Ebene erzeugt einen Mittelpunktskreis auf der w-Ebene.

(vi) Ein Kreis durch den Nullpunkt auf der z-Ebene erzeugt eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt verläuft auf der w-Ebene.

(vii) Ein Kreis, der nicht durch den Nullpunkt auf der z-Ebene verläuft erzeugt einen Kreis, der nicht durch den Nullpunkt verläuft, auf der w-Ebene.

5.7 Komplexe Funktionen

5.7.1 Definition einer komplexen Funktion

Unter der komplexen Funktion versteht man eine Vorschrift, de jeder komplexen Zahl $z \in D$ genau eine komplexe Zahl $w \in W$ zuordnet. Symbolische Schreibweise sind $w = f(z)$. D und W sind Teilmengen von $\mathbb{C}$.

5.7.2 Definitionsgleichungen elementarer Funktionen

Trigonometrische Funktionen

$$\boxed{\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots} \quad \boxed{\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots} \tag{5.26}$$

$$\boxed{\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}} \quad \boxed{\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{1}{\tan(z)}} \tag{5.27}$$

Hyperbelfunktionen

$$\boxed{\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots} \quad \boxed{\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots} \tag{5.28}$$

$$\boxed{\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}} \quad \boxed{\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{1}{\tanh(z)}} \tag{5.29}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{5.30}$$

5.7.3 Beziehungen

Eulersche Formeln

$$e^{\mathrm{j}x} = \cos(x) + \mathrm{j}\sin(x) \qquad e^{-\mathrm{j}x} = \cos(x) - \mathrm{j}\sin(x) \tag{5.31}$$

Beziehungen trigonometrischen und komplexen e-Funktion

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}\right) \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}\right) \tag{5.32}$$

$$\tan(x) = -\mathrm{j}\frac{\left(e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}\right)}{\left(e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}\right)} \qquad \cot(x) = \mathrm{j}\frac{\left(e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}\right)}{\left(e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}\right)} \tag{5.33}$$

Beziehungen trigonometrischen und Hyperbelfunktionen

$$\sin(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\sinh(x) \qquad \cos(\mathrm{j}x) = \cosh(x) \qquad \tan(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\tanh(x) \tag{5.34}$$

$$\sinh(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\sin(x) \qquad \cosh(\mathrm{j}x) = \cos(x) \qquad \tanh(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\tan(x) \tag{5.35}$$

Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \sin(x \pm \mathrm{j}y) &= \sin(x)\cdot\cosh(y) \pm \mathrm{j}\cdot\cos(x)\cdot\sinh(y) \\ \cos(x \pm \mathrm{j}y) &= \cos(x)\cdot\cosh(y) \mp \mathrm{j}\cdot\sin(x)\cdot\sinh(y) \\ \tan(x \pm \mathrm{j}y) &= \frac{\sin(2x) \pm \mathrm{j}\cdot\sinh(2x)}{\cos(2x) + \cosh(2x)} \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm \mathrm{j}y) &= \sinh(x)\cdot\cos(y) \pm \mathrm{j}\cdot\cosh(x)\cdot\sin(y) \\ \cosh(x \pm \mathrm{j}y) &= \cosh(x)\cdot\cos(y) \pm \mathrm{j}\cdot\sinh(x)\cdot\sin(y) \\ \tanh(x \pm \mathrm{j}y) &= \frac{\sinh(2x) \pm \mathrm{j}\cdot\sin(2x)}{\cosh(2x) + \cos(2x)} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Arkus- und Areafunktionen

$$\arcsin(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\mathrm{arsinh}(x) \qquad \arccos(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\mathrm{Arcosh}(x) \tag{5.38}$$

$$\mathrm{arsinh}(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\arcsin(x) \qquad \mathrm{Arcosh}(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\arccos(x) \tag{5.39}$$

$$\arctan(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\mathrm{Artanh}(x) \qquad \mathrm{Artanh}(\mathrm{j}x) = \mathrm{j}\cdot\arctan(x) \tag{5.40}$$

5.8 Anwendungen in der Schwingungslehre

5.8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger

Eine harmonische Schwingung vom Typ $y = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$ mit $A > 0$ und $\omega > 0$ lässt sich in der Gaussschen Zahlenebene durch einen mit der Winkelgeschwin-digkeit ω um den Nullpunkt rotierenden komplexen zeitabhängigen Zeiger der Länge A darstellen

$$\underline{y}(t) = A\cdot e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \underline{A}\cdot e^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \underline{A} = A\cdot e^{\mathrm{j}\varphi} \tag{5.41}$$

Die Drehung erfolgt im Gegenuhrzeigersinn. Die komplexe Schwingungsamplitude $\underline{A}$ beschreibt dabei die Anfangslage des Zeigers $\underline{y}(t)$ zur Zeit $t = 0$, d.h. es ist $\underline{y}(0) = \underline{A}$

Eine in der Kosinusform vorliegende Schwingung lässt sich wie folgt ein die Sinusform umschreiben

$$y = A\cdot\cos(\omega t + \varphi) = A\cdot\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi^*) \tag{5.42}$$

Der Nullphasenwinkel beträgt somit $\varphi^* = \varphi + \frac{\pi}{2}$, d.h. der Zeiger ist um 90° vorzudrehen.

5.8.2 Ungestörte überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen

Durch ungestörte Überlagerung der gleichfrequenten harmonische Schwingungen

$$y_1 = A_1\cdot\sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y_2 = A_2\cdot\sin(\omega t + \varphi_2) \tag{5.43}$$

entsteht nach dem Superpositionsprinzip der Physik eine resultierende Schwingung mit derselben Frequenz, wobei $A > 0$, $\omega > 0$, $A_1 > 0$ und $A_2 > 0$

$$y = y_1 + y_2 = A_1\cdot\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\cdot\sin(\omega t + \varphi_2) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi) \tag{5.44}$$

Die Berechnung der Schwingungsamplitude A und des Phasenwinkels φ erfolgt durch Übergang von der reellen zur komplexen Form, danach durch Addition der komplexen Amplituden und Elongationen und zum Schluss Rücktransformation aus der komplexen in die reelle Form.

$$y_1 = A_1\cdot\sin(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \underline{y}_1 = \underline{A}_1\cdot e^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \underline{A}_1 = A_1\cdot e^{\mathrm{j}\varphi_1} \tag{5.45}$$

$$y_2 = A_2\cdot\sin(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \underline{y}_2 = \underline{A}_2\cdot e^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \underline{A}_2 = A_2\cdot e^{\mathrm{j}\varphi_2} \tag{5.46}$$

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A\cdot e^{\mathrm{j}\varphi} \tag{5.47}$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A}\cdot e^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{A}\cdot e^{\mathrm{j}\omega t+\varphi} \tag{5.48}$$

$$y = y_1 + y_2 = \mathrm{Im}(\underline{y}) = \mathrm{Im}\left(\underline{A}\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(A\cdot e^{\mathrm{j}\omega t+\varphi}\right) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi) \tag{5.49}$$

(*i*) Überlagerung einer Sinusschwingung mit einer Kosinusschwingung: Letztere erst auf die Sinusform bringen.

(*ii*) Überlagerung zweier Kosinusschwingungen: Beide erst auf die Sinusform bringen oder die resultierende Schwingung ebenfalls als Kosinusschwingung darstellen, wobei bei der Rücktransformation der Realteil von $\underline{y} = A \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$ zu nehmen ist.

5.9 Anwendungen komplexer Zahlen in der Wechselstromtechnik

5.9.1 Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen sind wichtige Funktionen einer unabhängigen Zeitvariablen t in der Technik.

$$\boxed{h_{\text{sin}}(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) + x_0 = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0)) + x_0} \tag{5.50}$$

$$\boxed{h_{\text{cos}}(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + x_0 = A \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0)) + x_0} \tag{5.51}$$

(*a*) Sei A die Amplitude (maximale Auslenkung aus der Ruhelage)

(*b*) Sei x_0 der lineare Mittelwert (Verschiebung der Kurve in vertikaler Richtung)

(*c*) Sei ω die Kreisfrequenz der Schwingung (Anzahl Schwingungen in der Zeitspanne 2π)

(*d*) Sei f die Frequenz der Schwingung (Anzahl Schwingungen in der Zeitspanne 1). Es gilt $f = \omega/2\pi$

(*e*) Sei T der Periodendauer einer Schwingung (Zeitdauer bis sich die Schwingung wiederholt). Es gilt $T = 1/f = 2\pi/\omega$

(*f*) Sei φ_0 die Phasenverschiebung (Winkeloffset zum Zeitpunkt $t = 0$)

(*g*) Sei t_0 die zeitliche Verschiebung der Schwingung (Zeitpunkt für den Start der Grundschwingung Sinus oder Kosinus)

5.9.2 Harmonische Schwingungen und komplexe Zahlen

Denkt man sich ein rotierender Stab der Länge A, dessen eines Ende im Punkt $(0, x_0)$ befestigt ist, welcher mit eine rfesten Winkelgeschwindigkeit ω im gegenuhrzeigersinn rotiert und betrachtet man die Schattenlänge des Stabes wenn dieser von der linken Seite angestrahlt wird, so erhält man eine harmonische Schwingung.

Mit Hilfe der Exponentialform kann ein solcher rotierender Stab (in der Gauss'schen Zahlenebene) wie folgt beschrieben werden

$$\boxed{\begin{aligned} z_S(t) &= \sqrt{A^2 - (h_{\text{sin}}(t) - x_0)^2} + j \cdot h_{\text{sin}}(t) \\ &= jx_0 + Ae^{j(\omega t+\varphi_0)} \end{aligned}} \tag{5.52}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_C(t) &= -\sqrt{A^2 - (h_{\text{cos}}(t) - x_0)^2} + j \cdot h_{\text{cos}}(t) \\ &= jx_0 + Ae^{j(\omega t+\varphi_0)} \\ &= jx_0 + Ae^{j(\omega t+\varphi_0+\pi/2)} \end{aligned}} \tag{5.53}$$

Im weiteren betrachtet man harmonische Schwingungen ohne linearen Mittelwert.

$$\boxed{\begin{aligned} z_{S_0}(t) &= \sqrt{A^2 - h_{\text{sin}}^2(t)} + j \cdot h_{\text{sin}}(t) \\ &= A \cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)} \end{aligned}} \tag{5.54}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_{C_0}(t) &= -\sqrt{A^2 - h_{\text{cos}}^2(t)} + j \cdot h_{\text{cos}}(t) \\ &= A \cdot e^{j(\omega t+\varphi_0+\pi/2)} \end{aligned}} \tag{5.55}$$

Die Schattenlänge ist nun gleich dem Imaginärteil des rotierenden Stabes

$$\boxed{h_{\text{sin}}(t) = \text{Im}(z_{S_0}(t)) = \text{Im}\left(Ae^{j(\omega t+\varphi_0)}\right)} \tag{5.56}$$

$$\boxed{h_{\text{cos}}(t) = \text{Im}(z_{C_0}(t)) = \text{Im}\left(Ae^{j(\omega t+\varphi_0+\pi/2)}\right)} \tag{5.57}$$

Mit den Beziehungen $\text{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ und $\text{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2j}$ lassen sich die Schwingungen auch wie folgt beschreiben

$$\boxed{A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{z_{S_0}(t) - \overline{z_{S_0}(t)}}{2j} = \frac{A \cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)} - Ae^{-j(\omega t+\varphi_0)}}{2j}} \tag{5.58}$$

$$\boxed{A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{z_{C_0}(t) - \overline{z_{C_0}(t)}}{2j} = \frac{A \cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)} + Ae^{-j(\omega t+\varphi_0)}}{2}} \tag{5.59}$$

Die eingefügten rotierenden Zeiger sind eine äquivalente Beschreibungsform für die harmonischen Schwingung. Neben den rotierenden Zeigern arbeitet man auch häufig mit nicht rotierenden Zeigern. Dabei ist das Ziel, die Zeitabhängigkeit aus der Beschreibung zu eliminieren. Dazu kann z.B. die folgende Transformation verwendet werden.

$$\boxed{h_{\text{sin}}(t) \longrightarrow H_{\text{sin}} = z_{S_0}(t) \cdot e^{-j\omega t} = A \cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)} \cdot e^{-j\omega t} = A \cdot e^{j\varphi_0}} \tag{5.60}$$

$$\boxed{h_{\text{cos}}(t) \longrightarrow H_{\text{cos}} = z_{C_0}(t) \cdot e^{-j\omega t} = A \cdot e^{j\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}} \tag{5.61}$$

Bei dieserTransformation ist die neue Beschreibungsform nicht das Gleiche wie die ursprüngliche harmonische Schwingung. Das zeitabhängige Signal (Zeitbereich) wird durch die Transformation auf eine komplexe Zahl (nicht mehr zeitabhängig) transformiert. Man spricht von einer Beschreibung in der Modellwelt. Zu dieser Transformation gibt es auch eine Rücktransformation. Eine Anwendung dieser Transformation ist die **Überlagerung** gleichfrequenter harmonischer Schwingungen.

$$\boxed{h_{\text{sin}}(t) \longrightarrow H_{\text{sin}} = \text{Im}\left(H_{\text{sin}} e^{\text{j}\omega t}\right) = \text{Im}\left(A \cdot e^{\text{j}\varphi_0} e^{\text{j}\omega t}\right)} \tag{5.62}$$

$$\boxed{h_{\cos}(t) \longrightarrow H_{\cos} = \text{Im}\left(H_{\cos} e^{\text{j}\omega t}\right) = \text{Im}\left(A \cdot e^{\text{j}\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{\text{j}\omega t}\right)} \tag{5.63}$$

In der Elektrotechnik wird die Transformation in den Bildbereich wie folgt definiert. Ein Signal $s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ wird wie folgt als komplexe Schwingung definiert

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{s}(t) &= A \cdot \left[\cos(\omega t + \varphi_0) + \text{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)\right] \\ &= A \cdot e^{\text{j}(\omega t + \varphi_0)} \end{aligned}} \tag{5.64}$$

Mathematisch kann dies wie folgt angegeben werden

$$\boxed{s(t) \longrightarrow \underline{s}(t) = s(t) + \text{j} \cdot \sqrt{A^2 - s^2(t)}} \tag{5.65}$$

$$\boxed{\underline{s}(t) \longrightarrow s(t) = \text{Re}\left(\underline{s}(t)\right)} \tag{5.66}$$

Im Weiteren wird die Zeitabhängigkeit eliminiert, gleichzeitig wird noch die Zeigerlänge vom Amplitudenwert auf den Effektivwert normiert

$$\boxed{s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow \underline{S} = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{\text{j} \cdot \varphi_0}} \tag{5.67}$$

$$\boxed{s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \rightarrow \underline{S} = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{\text{j} \cdot \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)}} \tag{5.68}$$

5.9.3 Elektrotechnische Grundkenntnisse

Bei elektrischen Schaltungen interessiert man sich oft für die Spannung über den Bauteilen, den Strom in den Bauteilen und die Leistung die ein Bauteil bezieht. Dabei unterscheidet man verschiedene Situationen wie Gleichstrom- und Wechselstromtechnik und verschiedene Betrachtungsweisen wie Einschaltvorgänge oder Grössen bei eingeschwungenem stationären Zustand.

Gesetze für Gleichstromtechnik

Ohm'sche Gesetz: Fliesst durch einen ohmschen Widerstand der Strom I, so misst man über dem Widerstand eine zum Strom proportionale Spannung U. Der Proportionalitätsfaktor R nennt man Widerstand

$$\boxed{U = R \cdot I} \tag{5.69}$$

Maschenregel: In einer geschlossenen Masche ist die Summe der Spannungsabfälle gleich der Summe der Quellspannungen.

$$\boxed{\sum U_q = \sum U_{ab}} \tag{5.70}$$

Knotenregel: Die Summe aller Ströme in einem Knoten ist gleich Null.

$$\boxed{\sum I_k = 0} \tag{5.71}$$

Serienschaltung: In Serie geschaltete Widerstände können durch einen Ersatzwiderstand ersetzt werden. DAbei ist der Widerstand das Ersatzwiderstandes gleich der Summe der einzelnen Widerstände.

$$\boxed{R_{\text{ers}} = \sum R_k} \tag{5.72}$$

Parallelschaltung: Parallel geschaltete Widerstände können durch einen Ersatzwiderstand ersetzt werden. Dabei ist der Widerstand des Ersatzwiderstandes gleich dem Kehrwert der Summe der Kehrwerte der einzelnen Widerstände.

$$\boxed{R_{\text{par}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_k}}} \tag{5.73}$$

Gesetze für Spule und Kondensator

Spule-Induktivität: Der Spannungsabfall an einer Spule ist proportional zur Stromänderung. Der Faktor L nennt man Induktivität der Spule.

$$\boxed{u_L(t) = L \cdot \frac{\text{d}}{\text{d}t}\left[i(t)\right]} \tag{5.74}$$

Kondensator-Kapazität: Der Spannungsabfall an einem Kondensator ist proportional zur gespeicherten Ladung Q. Die gespeicherte Ladung ist gleich dem Integral des Stromes nach der Zeit. Der Faktor C nennt man Kapazität des Kondensators.

$$\boxed{u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\ \text{d}t} \tag{5.75}$$

5.9.4 Berechnung mit Differentialgleichungen

Spule, Widerstand, Gleichspannungsquelle: Eine Spule und einen ohmschen Widerstand werden in Serie an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen und den Strom und die Spannungsabfälle an den beiden Bauteilen bestimmt. In der gegebenen Schaltung liegt eine geschlossene Masche vor und daher ist die Summe der Spannungsabfälle gleich der Summe der Quellspannungen. Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\boxed{u_R(t) + u_L(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[i(t)\Big] = U_q} \tag{5.76}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{U_q}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)} \tag{5.77}$$

$$\boxed{u_R(t) = U_q\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)} \tag{5.78}$$

$$\boxed{u_L(t) = U_q\left(e^{-\frac{Rt}{L}}\right)} \tag{5.79}$$

Liegt eine Gleichspannung an einer Schaltung, so berechnet man mit der Differentialgleichung das Einschaltverhalten, d.h. den Übergang von einem stationären Zustand zu einem neuen stationären Zustand. So hat man vor dem Einschalten keinen Stromfluss und nachdem Einschalten steigt der Strom und nähert sich einem Endwert und ist nachher wieder konstant. Analoges Verhalten zeigen die Spannungen. Der eigentliche Einschaltvorgang nennt man auch das transiente Verhalten.

Spule, Widerstand, Wechselspannungsquelle: Eine Spule und einen ohmschen Widerstand in Serie an eine Wechselspannungsquelle wird angeschlossen und den Strom und die Spannungsbfälle an den beiden Bauteilen bestimmt. In der gegebene Schaltung liegt eine geschlossene Masche vor und daher ist die Summe der Spannungsabfälle gleich der Summe der Quellspannungen.

$$\boxed{u_R(t) + u_L(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[i(t)\Big] = u_q(t) = \hat{U}\sin(\omega t)} \tag{5.80}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{\hat{U}}{R^2 + (\omega L)^2}\left(\omega L e^{-\frac{Rt}{L}} - \omega L\cos(\omega t) + R\sin(\omega t)\right)} \tag{5.81}$$

$$\boxed{u_R(t) = \frac{\hat{U}R}{R^2 + (\omega L)^2}\left(\omega L e^{-\frac{Rt}{L}} - \omega L\cos(\omega t) + R\sin(\omega t)\right)} \tag{5.82}$$

$$\boxed{u_L(t) = \frac{\hat{U}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\left(-R e^{-\frac{Rt}{L}} + \omega L\sin(\omega t) + R\cos(\omega t)\right)} \tag{5.83}$$

Hier erkennt man einen Einschaltvorgang. Betrachtet man den Strom in der Schaltung, so hat man zwei Summanden. Der erste Suzmmand beschreibt eine armonische Schwingung und der zweite Summand zeigt exponentielles Verhalten. Die Schwingung ist nicht zeitabhängig (konstante Amplitude und Kreisfrequenz) und beschreibt das Verhalten der Schaltung nachdem der Einschaltvorgang abgeschlossen ist (partikuläre Lösung der inhomogenen DGL). Diese Schwingung nennt man auch das stationäre Verhalten der Schaltung. Das zweite Signal ist zeitabhängig und beschreibt den Übergang zwischen den stationären Zuständen (transientes verhalten der Schaltung - partikuläre Lösung der homogenen DGL).

5.9.5 Stationäres Verhalten einer Spule (Induktivität)

Spule, Wechselspannungsquelle: An eine Spule legt man eine Wechselspannung an und will daraus den Stromfluss in der Spule untersuchen. Das Verhältnis der Amplituden zwischen Spannung und Strom ist konstant und gleich $\frac{U_L}{I_L} = X_L = \omega L$. Der Strom eilt der Spannung um eine Viertelperiode nach.

$$\boxed{u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[i(t)\Big] = \hat{U}\sin(\omega t) = u_q(t)} \tag{5.84}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int \hat{U}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\hat{U}}{\omega L}\cos(\omega t)} \tag{5.85}$$

5.9.6 Stationäres Verhalten einer Spule (Kapazität)

Kondensator, Wechselspannungsquelle: An einen Kondensator legt man eine Wechselspannung an und will den Stromfluss im Kondensator untersuchen. Das Verhältnis der Amplituden zwischen Spannung und Strom ist konstant und gleich $\frac{u_C}{I_C} = X_C = \frac{1}{\omega C}$. Der Strom eilt der Spannung um eine Viertelperiode vor.

$$\boxed{u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t = \hat{U}\sin(\omega t) = u_q(t)} \tag{5.86}$$

$$\boxed{i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[u_C\Big](t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\hat{U}\sin(\omega t)\Big] = \omega C\hat{U}\cos(\omega t)} \tag{5.87}$$

5.9.7 Berechnung mit komplexen Zahlen - Bildbereich

In diesem Abschnitt werden nur stationären Signale (Vernachlässigung des Einschaltenverhaltens, d.h. der transiente Vorgang) bei Schaltungen die an einer Wechselspannung angeschlossen. Anstelle der Berechnung mittels Differentialgleichungen arbeitet man mit einer Modellwelt für die Grössen und Signale. Da man weisst, dass alle Signale (Ströme und Spannungen) ebenfalls Wechselgrössen (mit der gleichen Kreisfrequenz wie die Quelle) sind, kann man in einer Modellwelt arbeiten, in der die Zeit nicht mehr vorkommt. um eine Wechselgrösse (harmonische Schwingung) zu beschreiben sind drei Angaben von Bedeutung: Amplitude und Schwingung, Kreisfrequenz der Schwingung und Anfangsphase der Schwingung.

Da die Kreisfrequenz aller Signale gleich ist, muss man diese Grösse nicht in der Modellwelt mitführen. um die restlichen beiden Grössen zu beschreiben wählt man nun komplexe Zahlen für die Modellwelt. Eine komplexe Zahl in goniometrischer oder exponentieller Darstellung beinhaltet die beiden Informationen, Betrag und Argument. Nun kann man ein Signal wie folgt durch eine komplexe zahl bzw. einen Zeiger beschreiben.

$$\boxed{s\left(t\right) = \hat{A}\cos\left(\omega t + \varphi\right) \rightarrow \underline{S} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{j}\varphi}} \tag{5.88}$$

$$\boxed{s\left(t\right) = \hat{A}\sin\left(\omega t + \varphi\right) \rightarrow \underline{S} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{j}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}} \tag{5.89}$$

Der Elektrotechniker arbeitet meist nicht mit den Amplituden sondern mit den Effektivwerten. Bei harmonischen Signalen ist die Amplitude des Signals um den Faktor $\sqrt{2}$ grösser als der Effektivwert.

Impendanz eines Widerstandes

Stom und Spannung an einem Widerstand sind in Phase und das Verhältnis zwischen Strom und Spannung ist durch den Widerstandswert gegeben. Daher definiert man die Impendanz wie folgt:

$$\boxed{Z_R = R \Longrightarrow U_R = Z_R \cdot I_R} \tag{5.90}$$

Impendanz einer Spule

Die Spannung eilt in einer Spule dem Strom um eine Viertelperiode vor und das Verhältnis zwischen Strom und Spannung ist durch $X_L = \omega L$ gegeben. Daher definiert man die Impendanz wie folgt:

$$\boxed{\underline{Z_L} = \mathrm{j}\omega L \longrightarrow \underline{U_L} = \underline{Z_L} \cdot \underline{I_L}} \tag{5.91}$$

Impendanz eines Kondensators

Die Spannung eilt in einem Kondensator dem Strom um eine Viertelperiode nach und das Verhältnis zwischen Strom und Spannung ist durch $X_C = \frac{1}{\omega C}$ gegeben. Daher definiert man die Impendanz wie folgt:

$$\boxed{\underline{Z_C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \Longrightarrow \underline{U_C} = \underline{Z_C} \cdot \underline{I_C}} \tag{5.92}$$

Wechselstromschaltung

Nun können Wechselstromschaltungen in der Modellwelt analog zu Gleichspannungsschaltungen berechnet werden. Die Serieschaltung einer Spule mit einem Widerstand, welche an eine Wechselquelle angeschlossen sind

$$\boxed{u_q\left(t\right) = \hat{U}\cos\left(\omega t\right) \longrightarrow U_q = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}} \tag{5.93}$$

$$\boxed{\underline{Z_R} = R} \quad \boxed{\underline{Z_L} = \mathrm{j}\omega L} \quad \boxed{\underline{Z_{\text{ers}}} = \underline{Z_R} + \underline{Z_L} = R + \mathrm{j}\omega L} \tag{5.94}$$

$$\boxed{i\left(t\right) = \sqrt{2}\left|\underline{I}\right|\cos\left(\omega t + \arg\left(\underline{I}\right)\right) \longrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U_q}}{\underline{Z_{\text{ers}}}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}\frac{R - \mathrm{j}\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{5.95}$$

$$\boxed{u_R\left(t\right) = \sqrt{2}\left|\underline{U_R}\right|\cos\left(\omega t + \arg\left(\underline{U_R}\right)\right) \longrightarrow \underline{U_R} = \underline{I} \cdot \underline{Z_R} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}\frac{R^2 - \mathrm{j}\omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{5.96}$$

$$\boxed{u_L\left(t\right) = \sqrt{2}\left|\underline{U_L}\right|\cos\left(\omega t + \arg\left(\underline{U_L}\right)\right) \longrightarrow \underline{U_L} = \underline{I} \cdot \underline{Z_L} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}\frac{R\omega^2 L^2 + \mathrm{j}\omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{5.97}$$

Sind somit Signale und Grössen gegeben, so müssen sie in eine komplexe Form transformiert werden. Das Problem kann mittels Algebra der komplexen Zahlen gelöst werden.

6 LINEARE ALGEBRA UND GEOMETRIE

6.1 Vektordefinition

Vektoren kommen in der Kinematik udn Statik, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Kraft, elektrische und magnetische Feldstärke vor.

Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums, also ein Objekt, das zu anderen Vektoren addiert und mit Skalaren multipliziert werden kann. Vektoren beschreiben Parallelverschiebungen in der Ebene oder im Raum. Vektoren werden durch Pfeile, der einen Urbildpunkt mit seinem Bildpunkt verbindet, dargestellt werden. In der Ebene werden Vektoren durch Zahlenpaare und im Raum durch Tripel bzw. Spaltenvektoren dargestellt. Im mehrdimensionalen Räume spricht man von Vektoren mit n-Tupel reeller Zahlen.

Vektoren haben einen Betrag und eine Richtung. Sie bezeichnen Punkte im Raum durch Bezugspunkte wie den Ursprung O.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} OB_x - OA_x \\ OB_y - OA_y \\ OB_z - OA_z \end{pmatrix}} \tag{6.1}$$

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(OB_x - OA_x)^2 + (OB_y - OA_y)^2 + (OB_z - OA_z)^2}} \tag{6.2}$$

Zwei Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ werden addiert, indem

$$\boxed{\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}} \tag{6.3}$$

$\overrightarrow{OB}$ parallel verschoben wird bis sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt vom Vektor $\overrightarrow{OA}$ zusammenfällt. Der Summenvektor geht vom Anfangspunkt von $\overrightarrow{OA}$ bis zum Endpunkt von $\overrightarrow{OB}$.

Der Differenz-Vektor ist die Summe von $\overrightarrow{OA}$ und $-\overrightarrow{OB}$

$$\boxed{\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}} \tag{6.4}$$

Zu jedem Vektor $\overrightarrow{OA}$ gibt es einen Gegenvektor $-\overrightarrow{OA}$. Er besitzt den gleichen Betrag aber die entgegengesetzte Richtung.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \left(-\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{O}} \tag{6.5}$$

Durch die Multiplikation von $\overrightarrow{OA}$ mit einer reellen Zahl λ entsteht ein neuer Vektor mit Betrag und Richtung. Für $\lambda > 0$ ist er parallel und für $\lambda < 0$ antiparallel zu $\overrightarrow{OA}$ gerichtet

$$\boxed{\lambda\overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}} \tag{6.6}$$

Ein Normalenvektor hat die Länge 1 und heisst deshalb normiert.

$$\boxed{\overrightarrow{n}_{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{n}'_{\overrightarrow{OA}}}{\left|\overrightarrow{n}'_{\overrightarrow{OA}}\right|}} \quad \boxed{\overrightarrow{n}'_{OA} = \begin{pmatrix} -OA_y \\ OA_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OA_y \\ -OA_x \end{pmatrix}} \tag{6.7}$$

6.2 Vektorräume

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation. Seien $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ beliebige Elemente des Vektorraums V mit λ, $\mu \in \mathbb{R}$, es gilt

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}, \quad \text{mit } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \in V} \tag{6.8}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{OA}} \quad \boxed{\overrightarrow{OA} \cdot 1 = \overrightarrow{OA}} \tag{6.9}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \left(-\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OA}} \tag{6.10}$$

$$\boxed{\lambda \cdot \left(\mu \cdot \overrightarrow{OA}\right) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{OA}} \tag{6.11}$$

$$\boxed{\lambda \cdot \left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}, \quad \text{mit } \lambda \cdot \overrightarrow{OA} \in V} \tag{6.12}$$

$$\boxed{(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{OA}} \tag{6.13}$$

6.3 Beziehungen von Vektoren

Die Menge von Vektoren heisst linear abhängig genau dann, wenn die Gleichung eine Lösung mit $\lambda_i \neq 0$ für mindestens einen Koeffizienten gilt

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{OA}_1 + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{OA}_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{OA}_i = \overrightarrow{O}, \quad \lambda_i \in < mathbbR} \tag{6.14}$$

Zwei Vektoren sind kollinear, wenn es eine Zahl λ gibt, so dass

$$\boxed{\overrightarrow{OA}_1 - \lambda \cdot \overrightarrow{OA}_2 = \overrightarrow{O}} \tag{6.15}$$

Somit bilden eine Linearkombination und sind linear abhängig. Diese Vektoren liegen auf einer Geraden, zeigen in dieselbe Richtung und haben verschiedene Längen. Die Kollinearirär wird bei der Lagebeziehung mehreren Geraden durchgeführt.

Drei Vektoren sind komplenar, wenn die Vektoren auf einer Ebene liegen und eine Vektorenkette schliessen., die zum Nullpunkt hinführt. Einer der drei Vektoren lässt sich also als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen. Somit sind sie linear abhängig. Dioe Komplanaitätwird für die Lagebeziehung zwischen Geraden oder Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene verwendet.

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{OA}_1 + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OA}_2 + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{OA}_3 = \overrightarrow{O}} \tag{6.16}$$

Linear unabhängige Vektoren haben keine spezielle Lage zueinander. Zwei linear unabhängige Vektoren spannen eine Fläche auf. Drei linear unabhängige Vektoren spannen ein Hypervolumen auf. Wenn man entlang von jedem Vektor geht, kommt man nie wieder zum Ursprung zurück, ausser wenn man alle Schrittlängen auf null setzt.

Aus zwei Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ lässt sich den Mittelpunkt wie folgt bestimmen

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)} \tag{6.17}$$

Aus drei Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ die ein Dreieck bilden, lautet den zugehörigen Schwerpunkt

$$\boxed{\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)} \tag{6.18}$$

Bilden $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ ein gleichschenkliges Dreieck. Den Flächeninhalt lautet

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_c C}\right|} \tag{6.19}$$

Um die Orthogonalität eines Vektors zu überprüfen, wird dieser Vektor mit seinen zugehörigen senkrechten Komponenten skalar multipliziert und dies ergibt null

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA}^{\perp} = 0} \tag{6.20}$$

6.4 Trigonometrie

Unter dem Bogenmass x versteht man die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis

$$\boxed{\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}} \tag{6.21}$$

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Komponenten x und y den Winkel φ zu. Dabei sind $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0^\circ & (Q_1 \text{ und } Q_4) \\ 180^\circ & (Q_2 \text{ und } Q_3) \end{cases}} \tag{6.22}$$

Die Arkussinus-Funktion ordnet der Komponente y und dem Radius r den Winkel φ zu. Dabei sind $r, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) & (Q_1 \text{ und } Q_4) \\ 180^\circ - \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) & (Q_2 \text{ und } Q_3) \end{cases}} \tag{6.23}$$

Die Arkuskosinus-Funktion ordnet der Komponente x und dem Radius r den Winkel φ zu. Dabei sind $r, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & (Q_1 \text{ und } Q_2) \\ 360^\circ - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & (Q_3 \text{ und } Q_3) \end{cases}} \tag{6.24}$$

Somit lassen sich die Polarkoordinaten definieren

$$\boxed{\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}} \quad \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0^\circ & (Q_1 \text{ und } Q_4) \\ 180^\circ & (Q_2 \text{ und } Q_3) \end{cases}} \tag{6.25}$$

6.5 Das Skalarprodukt

Für $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$, die den Winkel φ einschliessen, ist das Skalarprodukt folgendermassen definert

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos(\varphi)} \tag{6.26}$$

und entspricht die Länge des Schattens von $\overrightarrow{OB}$ auf $\overrightarrow{OA}$. Zu den Eigenschaften des Skalarproduktes zählen

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA}} \tag{6.27}$$

$$\boxed{\left(\lambda \cdot \overrightarrow{OA}\right) \bullet \overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}\right)} \tag{6.28}$$

$$\boxed{\left(\lambda \cdot \overrightarrow{OA}\right) \bullet \left(\mu \cdot \overrightarrow{OB}\right) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \left(\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}\right)} \tag{6.29}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \bullet \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}} \tag{6.30}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA} = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 \cdot \cos(0) = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2} \tag{6.31}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}\right| \leq \left|\overrightarrow{OB}\right|, \quad (\text{Kathete} \leq \text{Hypothenuse})} \tag{6.32}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}, \quad (\text{Orthogonalität})} \tag{6.33}$$

Das Skalarprodukt einer Orthogonalbasis in $\mathbb{R}^n$ lautet

$$\begin{pmatrix} OA_1 \\ OA_2 \\ \vdots \\ OA_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} OB_1 \\ OB_2 \\ \vdots \\ OB_n \end{pmatrix} = (OA_1 \cdot OB_1) \cdot (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1) + \ldots + (OA_n \cdot OB_n) \cdot (\vec{e}_n \bullet \vec{e}_n) = (OA_1 \cdot OB_1) + \ldots + (OA_n \cdot OB_n) = \sum_{i=1}^{n} OA_i \cdot OB_i \tag{6.34}$$

Der Winkel zwischen Vektoren lautet

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|}\right) \tag{6.35}$$

Die orthogonale Projektion von $\overrightarrow{OB}$ auf die durch den Vektor $\overrightarrow{OA}$ gegebene Richtung ist der Vektor $\overrightarrow{OB}_{\overrightarrow{OA}} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ mit

$$k = \frac{\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2} \tag{6.36}$$

Die Projektion von $\overrightarrow{OB}$ auf $\overrightarrow{OA}$ steht parallel zu $\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OB}_{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2} \cdot \overrightarrow{OA} = \underbrace{\left(\overrightarrow{OB} \bullet \frac{\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}\right)}_{\text{Schattenlänge}} \cdot \underbrace{\frac{\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}}_{\text{normierte Richtung}} \tag{6.37}$$

Das Lot von $\overrightarrow{OB}$ auf $\overrightarrow{OA}$ steht senkrecht zu $\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}_{\overrightarrow{OA}} \tag{6.38}$$

Aus diesem Grund erzeugt es sich beispielsweise die Projektion eines Punktes auf einer Geraden durch den Ursprung (Lot).

$$\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OP} - \left(\overrightarrow{OP} \bullet \vec{n}\right) \cdot \vec{n} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{n}'}{\left|\vec{n}'\right|} \tag{6.39}$$

und die Spiegelung eines Punktes auf einer Geraden durch den Ursprung

$$\overrightarrow{OP}'' = \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \left(\overrightarrow{OP} \bullet \vec{n}\right) \cdot \vec{n} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{n}'}{\left|\vec{n}'\right|} \tag{6.40}$$

6.6 Das Spatprodukt

Betrachte man drei Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$. Das Parallelepiped aufgespannt durch die drei Vektoren nennt man Spat. Für die Vektoren heisst die Zahl Spatprodukt.

$$\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA} \bullet \left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) \tag{6.41}$$

Der Vektor $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$ ist senkrecht auf das Parallelogram aufgespannt durch $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$. Die Fläche des Parallelograms ist $\left|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right|$.

Durch das Skalarprodukt wird der Schatten von $\overrightarrow{OA}$ auf $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$ berechnet

$$\overrightarrow{OA} \bullet \left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) = \cos(\varphi) \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right| \tag{6.42}$$

Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen des Spats. Dies ist genau die Höhe des Körpers aufgespannt durch die Vektoren und wird mit der Grundfläche multipliziert.

Das Volumen des Spats ist unabhängig von der Reihenfolge. Nur das Vorzeichen kann eventuell ändern, wenn die Reihenfolge vertauscht wird.

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \left[\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = \left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right] \tag{6.43}$$

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = -\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right] \tag{6.44}$$

Falls das Volumen des Spats bzw. der Betrag des Spatprodukts null ist, sind die Vektoren linear abhängig und liegen auf einer Ebene.

6.7 Die Gerade

Die Parameterdarstellung der Gerade, mit $\overrightarrow{OA}$ als Bezugspunkt und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor mit $\lambda \in \mathbb{R}$ als Parameter, lautet

$$\boxed{g : \vec{r} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}} \tag{6.45}$$

Die Hessesche Normalform der Gerade, mit $\overrightarrow{OA}$ als Bezugspunkt und $\vec{n}_E$ als Normalensvektor der Geraden, lautet

$$\boxed{\left(\vec{r} - \overrightarrow{OA}\right) \bullet \vec{n}_E = 0} \tag{6.46}$$

Die Koordinatenform der Gerade, mit n_i Komponenten des Normalenvektors $\vec{n}_E$ zur Richtungsvektor der Gerade, wobei diese Form zweidimensionell ist, lautet

$$\boxed{n_x \cdot x + n_y \cdot y + d = 0} \tag{6.47}$$

Von der parameterform in die Hessesche Normalenform der Gerade muss man aus dem Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Gerade den Normalenvektor $\vec{n}_E$ erzeugen.

Von der hessesche Normalenform im Koordinatenform muss man das Skalarprodukt und Terme berechnen.

Aus dem Koordinatenform in die Hessesche Normalenform muss aus den Koeffizienten den $\vec{n}_E$ auslesen. $\overrightarrow{OA}$ generieren durch die Wahl einer Koordinate und die andere mit der Koordinatengleichung berehcnen.

6.8 Die Ebene

Die Parameterdarstellung der Ebene, wobei $\overrightarrow{OA}$ der Bezugspunkt und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ die Richtungsvektoren mit λ, $\mu \in \mathbb{R}$ als Parametern, ausserdem die Richtungsvektoren müssen nicht unbedingt zueinander senkrecht bzw. nciht kollinear liegen, lautet

$$\boxed{E : \vec{r} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}} \tag{6.48}$$

Für die Ebene definiert man den Normalenvektor $\vec{n}'_E$ und den Ortsvektor des Bezugspunktes$\overrightarrow{OA}$. Somit wird die Normalenform der Ebene erzeugt.

$$\boxed{\left(\vec{r} - \overrightarrow{OA}\right) \bullet \vec{n}'_E = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OA}\right] \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 0} \tag{6.49}$$

Die Ebene E ist definiert durch den normierten Normalenvektor $\vec{n}_E$ und den Bezugspunkt $\overrightarrow{OA}$. Somit wird die Hessesche Normalenform erzeugt.

$$\boxed{\left(\vec{r} - \overrightarrow{OA}\right) \bullet \frac{\vec{n}'_E}{\left|\vec{n}'_E\right|} = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OA}\right] \bullet \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = 0} \tag{6.50}$$

Die Ebene ist definiert durch die vier Parameter n'_1, n'_2, n'_3 und n'_4 und es gilt $(n'_1)^2 + (n'_2)^2 + (n'_3)^2 = 1$. Der Wert $|n'_4|$ ist der Abstand zum Ursprung. Für den allgemeinen Punkt $\vec{r}$ in der Ebene gilt

$$\boxed{E : n'_1 \cdot x + n'_2 \cdot y + n'_3 \cdot z + n'_4 = 0} \tag{6.51}$$

Die Achsenabschnittsform der Ebene lautet

$$\boxed{E : \frac{1}{c_1} x + \frac{1}{c_2} y + \frac{1}{c_3} z - 1 = 0} \quad \boxed{c_i = \frac{-n'_4}{n'_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3} \tag{6.52}$$

Von der Koordinatenform in die Parameterform erfinde man drei Vektoren und erzeugt man daraus ein Bezugspunkt und zwei Richtungsvektoren.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n'_4/n'_3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -n'_4/n'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -n'_4/n'_2 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{6.53}$$

Von der Koordinatenform in die Normalenform erfinde man einen Bezugspunkt und aus den Konstanten n'_i deb Normalenvektor. Mit diesen Informationen kann man die Normalenform und die Hessesche Normalenform der Ebene erzeugen.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n'_4/n'_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}'_E = \begin{pmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{pmatrix}} \tag{6.54}$$

Von der Parameterform in die Koordinatenform berechnet man aus den Richtungsvektoren den Normalenvektor. Die Komponenten des Normalenvektors $\vec{n}'_E$ und das Einsetzen des Bezugspunktes $\overrightarrow{OA}$ erzeugt die Koordinatenform der Ebene.

Von der Parameterform in die Normalenform erzeugt man den Normalenvektor aus den Richtungsvektoren. Mit den Bezugspunkt und den Normalenvektor erzeugt man die Normalenform der Ebene.

Von der Normalenform in die Koordinatenform multipliziert man alles aus und so wird die gewnschte Form erzeugt.

Von der Normalenform in die Parameterform erhält man, indem man die Normalenform in die Koordinatenform umwandelt ud dann diese in die Parameterform.

6.9 Abstände

Der Abstand eines Punktes $\overrightarrow{OP}$ zur Gerade $g : \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ erhält man aus der Berechnung der Fläche des Parallelograms.

$$\boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left|\frac{\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) \bullet \vec{n}'}{\left|\vec{n}'\right|}\right|} \tag{6.55}$$

Für die Berechnung des Fusspunktes eines Punktes $\overrightarrow{OP}$ auf einer Gerade $g : \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ sei den Fusspunkt $\overrightarrow{OF}$ gegeben. Man zerlegt den Vektor $\overrightarrow{AP}$ erstens in einer parallelen Komponente mit Betrag $\left|\overrightarrow{AF}\right|$ und Richtung $\overrightarrow{AB}$ und zweitens in eine senkrechte Komponente mit Betrag $\left|\overrightarrow{FP}\right|$ mit Richtung senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$.

Die Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ und Fusspunkt lauten

$$\boxed{\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OA} + \left[\overrightarrow{AP} \bullet \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right] \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}} \tag{6.56}$$

Das Lot ist der Vektor zwischen dem Punkt $\overrightarrow{OP}$ und der Fusspunkt $\overrightarrow{OF}$

$$\boxed{\vec{h}_{\overrightarrow{OP}} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}} \tag{6.57}$$

Der Abstand des Fusspunktes zum Punkt $\overrightarrow{OP}$ übereinstimmt mit dem Abstand Punkt-Gerade

$$\boxed{d = \left|\vec{h}_{\overrightarrow{OP}}\right|} \tag{6.58}$$

Der Abstand eines Punktes $\overrightarrow{OP}$ von der Ebene E in Parameterdarstellung lautet

$$\boxed{d = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) \bullet \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) \bullet \vec{n}_E} \tag{6.59}$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) \bullet \vec{n}_E - d = 0} \tag{6.60}$$

Die Punkte $\overrightarrow{OP}$ auf der Ebene E kann man berechnen, indem $d = 0$, so wird die Hessesche Form der Ebene erzeugt.

Für die Projektion eines Punktes an einer Ebene wird der Punkt $\overrightarrow{OP}$ durch $\overrightarrow{OP}'$ auf die Ebene E mit Bezugspunkt $\overrightarrow{OC}$ projiziert.

$$\boxed{\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OP} - \left(\overrightarrow{CP} \bullet \vec{n}_E\right) \cdot \vec{n}_E} \tag{6.61}$$

Durch $\overrightarrow{OP}''$ wird der Punkt $\overrightarrow{OP}$ an der Ebene mit Bezugspunkt $\overrightarrow{OC}$ gespiegelt.

$$\boxed{\overrightarrow{OP}'' = \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \left(\overrightarrow{CP} \bullet \vec{n}_E\right) \cdot \vec{n}_E} \tag{6.62}$$

6.10 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus m linearen Gleichungen und n Unbekannte.

$$\boxed{\left|\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right|} \tag{6.63}$$

Das System heisst homogen (Ebenen gehen durch $\vec{O}$), wenn alle $b_i = 0$, anderenfalls inhomogen (Ebenen nicht durch $\vec{O}$).

Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung, so nennt man inkonsistenz (zwei Ebenen schneiden sich in einer Gerade, diese Gerade ist parallel zu einer andere Gerade). Hat das lineare Gleichungssytem eine oder unendlich viele Lösungen, so nennt man konsistent (drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt oder gehen durch eine Gerade).

Die Matrix A heisst Koeffizientenmatrix und wird durch elementare Zeilenoperationen oder linear Kombinationen umgeformt. Die erweiterte Koeffizientenmatrix $B = \left(A|\vec{b}\right)$ stellt eine Beziehung mit dem Spaltenvektor $\vec{b}$

Durch elementare Zeilenoperationen (Zeilenvertauschung, Multiplikation einer Zeile mit einer konstanten ungleich null und Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile) wird das lineare Gleichungssystemin Zeilenstufenform vermwandelt. Hieraus bestimmt man die Unbekannten des linearen Gleichungssystems durch Rückwärtseinsetzen oder durch die Cramersche Regel, wobei zwei Arten von Variablen auftreten: Die abhängige Variable, welche durch Pivotstellen bestimmt wird und die freie Variablen, also die Restlichen.

Um die lineare Abhängigkeit einer Matrix A eines linearen Gleichungssystems zu prüfen, transponiert man die Matrix A und bringt sie durch Gauss-Eliminations-verfahren auf Zeilenstufenform.

Hat es eine Nullzeile, so ist das System linear abhängig, sonst linear unabhängig.

Die Anzahl r von Zeilen verschieden von null ist eindeutig bestimmt. In jeder Zeile stehen links vor dem Pivotelement nur Null-Elementen, ebenso in den Spalten unter dem Pivotelement. Liest man von oben nach unten, so rückt die Pivotposition pro Zeile um mindestens eine Stelle nach rechts. Folgende Eigenschaften des Rangs $r(A)$ einer Matrix A sind

(i) Der Rang ist die Anzahl der Zeilen ungleich null in der Zeilenstufenform.

(ii) Der Rang ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten von A.

(iii) Der Rang ist die Ordnung der grössten Unterdeterminante verschieden von Null der Matrix A

(iv) $r\left(A \odot B\right) \leq \min\left[r\left(A\right), r\left(B\right)\right]$

(v) $r\left(A \odot A^T\right) = r\left(A^T \odot A\right) = r\left(A\right)$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe seiner Diagonalelemente. Den Eigenschaften mit $x_i \in \mathbb{R}$ der Spur gehören dabei

$$\boxed{\text{Spur}\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}} \tag{6.64}$$

(i) $\text{Spur}\left(x_1 \cdot A + x_2 \cdot B\right) = x_1 \cdot \text{Spur}\left(A\right) + x_2 \cdot \text{Spur}\left(B\right)$

(ii) $\text{Spur}\left(A \odot B\right) = \text{Spur}\left(B \odot A\right)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

(iii) $\text{Spur}\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, ($\lambda_i$ sind die Eigenwerte von A)

Für den Fall der unendlich viele Lösungen ist die Anzahl an freie variablen, wobei n die Anzahl an Unbekannten und $r(A)$ der Rang der Matrix A, also die Anzahl an nciht Nullzeilen nach Gauss-Elimination.

$$\boxed{\text{Anzahl an freie variablen} = n - r(A)} \tag{6.65}$$

Die Anzahl an Lösungen eines homogenen Systems ist abhängig von der Anzahl an linearen Gleichungen m und der Anzahl an Unbekannten n.

$$\boxed{\begin{array}{l} n < m \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r(A) = n \Rightarrow \text{eine Lösung} \\ r(A) < n \Rightarrow \infty \text{ - Lösungen} \end{array}\right\} \\[2ex] n = m \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r(A) = n \text{ und } \det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{eine Lösung} \\ r(A) < n \text{ und } \det(A) = 0 \Rightarrow \infty \text{ - Lösungen} \end{array}\right\} \\[2ex] n > m \Rightarrow \infty \text{ - Lösungen} \end{array}} \tag{6.66}$$

Die Anzahl an Lösungen eines inhomogenen Systems ist abhängig von der Anzahl an linearen Gleichungen m und der Anzahl an Unbekannten n.

$$\boxed{\begin{array}{l} n < m \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r(A) < r(B) \Rightarrow \text{keine Lösung} \\ r(A) = r(B) = n \Rightarrow \text{ eine Lösung} \\ r(A) = r(B) < n \Rightarrow \infty \text{ - Lösungen} \end{array}\right\} \\[2ex] n = m \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r(A) = r(B) = n \text{ und } \det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{eine Lösung} \\ r(A) < r(B) \Rightarrow \text{ keine Lösung} \\ r(A) = r(B) < n \Rightarrow \infty \text{ - Lösungen} \end{array}\right\} \\[2ex] n > m \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r(A) < r(B) \Rightarrow \text{keine Lösung} \\ r(A) = r(B) \Rightarrow \infty \text{ - Lösungen} \end{array}\right\} \end{array}} \tag{6.67}$$

Hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, dann bleibt für alle $\vec{x}$ ein Defekt.

$$\boxed{\vec{d} = A \odot \vec{x} - \vec{b}} \tag{6.68}$$

Wird für ein $\vec{x}$ die mittlere quadratische Abweichung minimal

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + 2 + \epsilon_n^2\right)} = \frac{1}{m} \cdot \left|A \odot \vec{x} - \vec{b}\right|} \tag{6.69}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \epsilon_1 & = & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n - b_1 \\ & = & \ldots \\ \epsilon_m & = & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n - b_m \end{array}\right\}} \tag{6.70}$$

so nennt man $\vec{x}$ eine im quadratischen Mittel beste Lösung. Die Gauss-Normalgleichung hat für jedes A und $\vec{b}$ stets eine Lösung. Die Gauss-Normalgleichung lautet

$$\boxed{A^T \odot A \odot \vec{x} = A^T \odot \vec{b}} \tag{6.71}$$

6.11 Matrizen

Ein Spaltenvektor ist eine Anordnung von Elementen in einer Spalte.

$$\boxed{\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad a_{mi} \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N}} \tag{6.72}$$

Ein Zeilenvektor ist eine Anordnung von ELementen in einer Zeile

$$\boxed{\vec{a}_i^T = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad a_{ni} \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N}} \tag{6.73}$$

Das Matrix-Produkt aus einem Spalten- und einem Zeilenvektor ergibt

$$\boxed{\vec{a}_i \odot \vec{a}_i^T = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2} \tag{6.74}$$

Die Länge eines Spaltenvektors entspricht

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^T \odot \vec{a}} = \sqrt{a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2}} \tag{6.75}$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist eine rechteeckige Tabelle mit Zahlen angeordnet in m Zeilen und n Spalten

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \tag{6.76}$$

Aus der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird eine Matrix der Form $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ erzeugt. Diese Matrix ist die Transponierte Matrix A^T von A. Folgende Eigenschaften sind

$$\boxed{A^T = \left(a^T\right)_{mn} = (a)_{nm}} \tag{6.77}$$

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(A \odot B)^T = B^T \odot A^T$

(iii) $\left(A^T\right)^T = A$

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst quadratische Matrix, wenn die Anzahl an Spalten und der an Zeilen übereinstimmt.

Eine Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix falls alle Elemente ausserhalb der Diagonale gleich null sind

$$\boxed{D = \text{diag}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0,\, i < j} \tag{6.78}$$

Eine Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix mit Eins-Elementen.

$$\boxed{I = \text{diag}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{für} \quad \begin{matrix} a_{ij} = 1,\, i = j \\ a_{ij} = 0,\, i \neq j \end{matrix}} \tag{6.79}$$

Eine untere Dreiecksmatrix besitzt Null-Elemente oberhalb der Diagonale ($a_{ij} = 0$ für $i < j$). Eine obere Dreiecksmatrix besitzt Nul-Elemente oberhalb der Diagonale.

Eine Matrix heisst symmetrisch, falls

$$\boxed{A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{für alle } i,\, j} \tag{6.80}$$

Eine Matrix heisst antisymmetrisch, falls

$$\boxed{A = -A^T \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \quad \text{für alle } i,\, j, \text{ sonst } 0 \text{ für } i = j} \tag{6.81}$$

Eine quadratische Matrix A heisst Exponentialmatrix für

$$\boxed{e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n} \tag{6.82}$$

(i) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, falls $A \cdot B = B \cdot A$

(ii) $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x \cdot A} = A \cdot e^{x \cdot A}$

Eine quadratische Matrix A heisst orthogonal wenn

$$\boxed{A^T \odot A = I} \quad \boxed{A^T = A^{-1}} \tag{6.83}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Es existiert eine Matrix A^{-1} mit $\det(A) \neq 0$, wobei die Zeilen/Spalten von A linear unabhängig sind. Die Matrix A nennt man invertierbar und die Matrix A^{-1} die Inverse von A

$$\boxed{A \odot A^{-1} = A^{-1} \odot A = I} \tag{6.84}$$

(i) $(A \odot B)^{-1} = B^{-1} \odot A^{-1}$

(ii) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

(iii) $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \odot A}_{I} \odot \vec{x} = \vec{x} = A^{-1} \odot \vec{b}$

(iv) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

(v) $A^{-1} = A^T$, wobei A ist orthogonal

Die inverse Matrix einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ lautet

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}} \tag{6.85}$$

Mit elementaren Zeilenumformungen lässt sich die Inverse Matrix durch das Gauss-Jordan-Verfahren oder die Jacobi-Methode berechnen

$$\boxed{\left(A\middle|I\right) = \left(I\middle|A^{-1}\right)} \tag{6.86}$$

Sei eine Matrix C bestehen aus Untermatrizen $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $B \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Die Inverse Matrix C^{-1} lautet

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}^{-1}} \tag{6.87}$$

6.12 Matrixalgebra

Zwei Matrizen A und B können addiert bzw. subtrahiert werden, wenn beide Matrizen die geiche Anzahl an Zeilen/Spalten besitzen

$$\boxed{C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad i,j \in \mathbb{N}} \tag{6.88}$$

(i) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(ii) $A+O = O+A = A$

(iii) $A+(-A) = (-A)+A = O$

(iv) $A+B = B+A$

Zwei Matrizen A und B können mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Es gilt

$$\boxed{C = \lambda \cdot A \Rightarrow c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \quad i,j \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}} \tag{6.89}$$

(i) $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

(ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

(iii) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$

(iv) $1 \cdot A = A$

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann mit einem Spaltenvektor $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ multipliziert werden und es wird einen Vektor $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ erzeugt. Es gilt

$$\boxed{\overrightarrow{b} = A \odot \overrightarrow{x} = x_1 \cdot \overrightarrow{a}_1 + x_2 \cdot \overrightarrow{a}_2 + \ldots + x_n \cdot \overrightarrow{a}_m} \tag{6.90}$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann mit eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ multipliziert werden und es wird eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$ erzeugt. Die Anzahl an Spalten von A muss mit den Anzahl an Zeilen von B übereinstimmen. Es gelten ausserdem folgende Eigenschaften

$$\boxed{\begin{aligned} C &= A \odot B \Rightarrow c_{mp} = a_{mn} \cdot b_{np} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{np} \\ &= A \odot \left(\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2 \quad \ldots \quad \overrightarrow{b}_p\right) \\ &= \left(A \odot \overrightarrow{b}_1 \quad A \odot \overrightarrow{b}_2 \quad \ldots \quad A \odot \overrightarrow{b}_p\right) \end{aligned}} \tag{6.91}$$

(i) $I \odot A = A \odot I = A$

(ii) $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$

(iii) $A \odot (B+C) = A \odot B + A \odot C$

(iv) $A \odot B \neq B \odot A$

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zwei Matrizen in Funktion von x. Es gelten folgende Eigenschaften

(i) $A'(x) = \left(a'_{ij}(x)\right)$

(ii) $(A(x) + B(x))' = A'(x) + B'(x)$

(iii) $(A(x) \odot B(x))' = A(x) \odot B'(x) + A'(x) \odot B(x)$

(iv) $\left(A^2(x)\right)' = A(x) \odot A'(x) + A'(x) \odot A(x)$

(v) $\left(A^{-1}(x)\right)' = -A^{-1}(x) \odot A'(x) \odot A^{-1}(x)$

6.13 Determinanten

Die Determinante einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnet den Flächeninhalt eines Parallelograms aufgespannt durch die Vektoren

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \tag{6.92}$$

Die Determinante einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ benutzt die Berechnung von Untermatrizen. Die Matrix A_{ik} ist die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix und entsteht durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte.

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{k=1,\, i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}} \tag{6.93}$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}} \tag{6.94}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}} \tag{6.95}$$

Wenn man eine Kante des Paralllograms um den Faktor λ verlängert, muss die Fläche des Parallelograms (Determinante) um diesen Faktor anwachsen. Man nennt dies die Homogenität der Determinante.

Wenn eine Fläche aufgespannt durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} + \vec{c}$, dann muss sich aus geometrischen Gründen die Gesamtfläche zusammensetzen aus dem kleinen Flächen aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$ und man nennt dies die Additivität der Determinante.

Die Linearität der Determinante gilt, wenn die Homogenität und die Additivität der Determinante gelten.

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} \tag{6.96}$$

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}} \tag{6.97}$$

Die Linearität dreier Vektoren einer Matrix gehört der Linearität des Spatproduktes

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} \lambda\vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}} \tag{6.98}$$

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} \vec{a} + \vec{d} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vec{d} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}} \tag{6.99}$$

Folgende sind Eigenschaften der Determinante im allgemeinen Sinne

(i) Werden alle Elemente einer Zeile/Spalte mit einer Konstanten λ multipliziert, dann multipliziert sich die Determinante mit $1/\lambda$

(ii) Vertauschung zweier Zeilen/Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.

(iii) Die Determinante ändert sich nicht, wenn das Vielfache einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte addiert wird.

(iv) Die Determinante ist Null, wenn entweder alle Elemente einer Zeile/Spalte Null sind oder zwei Zeilen/Spalten identisch sind.

(v) $\det(A^T) = \det(A)$

(vi) $\det(A \odot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(vii) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$(viii)$ $\det(I) = 1$

(ix) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

6.14 Transformationen von Basen

Die Vektoren $\vec{e}_{b,i}$ heissen Basisvektoren des Vektorraumes V, falls diese linear unabhängig sind und jeder Vektor V als Linearkombination von den Basisvektoren geschrieben werden kann.

Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums V heisst Dimension von V.

Seien OA_i sind die Komponenten der Basisvektoren des Vektorraums V gegeben.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = OA_1 \cdot \vec{e}_{b,1} + OA_2 \cdot \vec{e}_{b,2} + \ldots + OA_n \cdot \vec{e}_{b,n} = \sum_{i=1}^{n} OA_i \cdot \vec{e}_i} \tag{6.100}$$

Die Vektoren $\vec{e}_i$ heissen Standard-Basis, auch kartesische Basis oder kartesisches Koordinatensystem.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = OA_1 \cdot \vec{e}_1 + OA_2 \cdot \vec{e}_2 + OA_3 \cdot \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} OA_i \cdot \vec{e}_i} \tag{6.101}$$

Eine Basis heisst normiert, wenn die Basisvektoren die Länge 1 haben.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und enthält die Basisvektoren in den Spalten

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}_1 & \overrightarrow{OA}_2 & \dots & \overrightarrow{OA}_n \end{pmatrix}} \tag{6.102}$$

Ein Vektor $\overrightarrow{OA}$ kann auf eine andere Basis ausgedrückt werden

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OF}_1 + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OF}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{OF}_n} \tag{6.103}$$

Sei A und B zwei Matrizen zweier Basen. Seien $\vec{x}^A$ die Koordinaten bezüglich A und $\vec{x}^B$ die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich B. Jeder Vektor kann durch die Transformationsmatrix T ausgedrückt werden. Es gilt dann

$$\boxed{\vec{x}^B = T \odot \vec{x}^A} \quad \boxed{T = B^{-1} \odot A} \quad \boxed{\overrightarrow{OB}_n = T \odot \overrightarrow{OA}_n} \tag{6.104}$$

Ist die Basis sowohl orthogonal wie auch normiert, heisst sie Orthonormalbasis und die Vektoren sind linear unabhängig. Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis von vektoren mit $\overrightarrow{OA}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ in die Orthonormal-Basis mit $\overrightarrow{OB}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ kann der Vektor $\overrightarrow{OA}$ in die neue Komponenten umgewandelt werden.

$$\boxed{\overrightarrow{OA}_i = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OB}_1 + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OB}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{OB}_n} \quad \boxed{\lambda_i = \overrightarrow{OA}_i \bullet \overrightarrow{OB}_i} \tag{6.105}$$

Sei B die Matrix eomer Orthonormalbasis aus den $\overrightarrow{OB}_i$ orthonormierten Vektoren. Seien $\overrightarrow{OA}_i$ die Koordianten von der Vektoren in der Standardbasis. Die Koordinaten aller Vektoren $\overrightarrow{OB}_i$ ergeben sich ausserdem aus

$$\boxed{\overrightarrow{OB}_i = T \odot \overrightarrow{OA}_i} \quad \boxed{T = B^{-1} \odot A = B^T \odot A = B^T} \tag{6.106}$$

Die Basisvektoren heisst orthogonale Basis, wenn die Basisvektoren rechtwinklig zueinander sind. Ihr Skalarprodukt ist null. Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis von vektoren $\overrightarrow{OA}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ in die Orthogonal-basis mit $\overrightarrow{OB}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ kann der Vektor $\overrightarrow{OA}$ in die neue Komponenten umgewandelt werden.

$$\boxed{\overrightarrow{OA}_i = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OB}_1 + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OB}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{OB}_n} \quad \boxed{\lambda_i = \frac{\overrightarrow{OA}_i \bullet \overrightarrow{OB}_i}{\left|\overrightarrow{OB}_i\right|^2}} \tag{6.107}$$

Seien A und B Basismatrizen. Bezüglich A hat die lineare Abbildung L die Darstellung $L\left(\vec{x}_A\right) = M \cdot \vec{x}$ und bezüglich der Basis B die Darstellung $L\left(\vec{x}_B\right) = K \cdot \vec{x}$, so gilt

$$\boxed{K = T \odot M \odot T^{-1}} \quad \boxed{T = B^{-1} \odot A} \tag{6.108}$$

6.15 Diskrete Fouriertransformationen

Die Amplituden von Teilschwingungen heissen Fourier-Koeffizienten und sind a_0, a_1, a_2, b_1 und b_2 für Stützstellen $\vec{t}$ und zugehörige Funktionswerte $\vec{f}\left(\vec{t}\right)$ einer gegebenen Funktion. Die Menge aller Fourier-Koeffizienten einer Schwingung bezeichnet man als ihr Fourier-Spektrum, diskret gelten die Vektoren $\vec{c}_i$ und kontinuerlich die trigonometrischen Funktionen. Die Koeffizienten gehören zur Funktion.

$$\boxed{\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/3 \\ 2\pi/3 \\ \pi \\ 4\pi/3 \\ 5\pi/3 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\pi/3) \\ f(2\pi/3) \\ f(\pi) \\ f(4\pi/3) \\ f(5\pi/3) \end{pmatrix}} \tag{6.109}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{f}\left(\vec{t}\right) = {} & a_0 \overbrace{\cos\left(0\,\vec{t}\right)}^{\vec{c}_0=1} + a_1 \overbrace{\cos\left(1\,\vec{t}\right)}^{\vec{c}_1=\cos(t)} + a_2 \overbrace{\cos\left(2\,\vec{t}\right)}^{\vec{c}_2=\cos(2t)} + a_3 \overbrace{\cos\left(3\,\vec{t}\right)}^{\vec{c}_3=\cos(3t)} + \\ & + b_1 \underbrace{\sin\left(1\,\vec{t}\right)}_{\vec{s}_1=\sin(t)} + b_2 \underbrace{\sin\left(2\,\vec{t}\right)}_{\vec{s}_2=\sin(2t)} \end{aligned}} \tag{6.110}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} & \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} & \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \end{matrix}} \tag{6.111}$$

$$\boxed{a_i = \frac{\vec{f} \odot \vec{c}_i}{\left|\vec{c}_i\right|^2}} \quad \boxed{b_i = \frac{\vec{f} \odot \vec{s_i}}{\left|\vec{s}_i\right|^2}} \tag{6.112}$$

Die periodische Funktionen auf einem Intervall $[0, T]$ ergeben sich die Cosinus- und Sinus-Listen mit der Winkelfrequenz

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{6.113}$$

Die Abtastewerte an den Stellen $t_k = k\frac{T}{N}$ für $k = 0$ bis $N-1$

$$\boxed{\vec{c}_j = \begin{pmatrix} \cos(t_0 \cdot j \cdot \omega) \\ \vdots \\ \cos(t_{N-1} \cdot j \cdot \omega) \end{pmatrix}} \quad \boxed{\vec{s}_j = \begin{pmatrix} \sin(t_0 \cdot j \cdot \omega) \\ \vdots \\ \sin(t_{N-1} \cdot j \cdot \omega) \end{pmatrix}} \tag{6.114}$$

Es sei N gerade und $n = N/2$. Die $n+1$ Cosinus-Listen $\vec{c}_0, \ldots, \vec{c}_n$ und die $n-1$ Sinus-Listen $\vec{s}_0, \ldots, \vec{s}_{n-1}$ bilden eine orthogonale Basis des Vektorraums aller N-Listen. Die Basisvektoren haben die Dimension V.

Es sei N ungerade und $n = (N-1)/2$. Die $n+1$ Cosinus-Listen $\vec{c}_0, \ldots, \vec{c}_n$ und die $n-1$ Sinus-Listen $\vec{s}_0, \ldots, \vec{s}_n$ bilden eine orthogonale Basis des Vektorraums aller N-Listen. Die Basisvektoren haben die Dimension V.

6.16 RCL-Netzwerke mit Wechselstrom

Feste Einschaltevorgang nennt man stationär. Das Verhalten um den Zeitpunkt herum, wo die Wechselspannung ein- oder ausgeschaltet wird, heisst transient.

RCL-Netzwerke mit linearen Elementen, die mit einer festen Wechselspannung der Frequenz ν oder Winkelfrewuenz ω betrieben werden

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{6.115}$$

Die Wechselspannung lautet

$$\boxed{u_Q(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega \cdot t)} \tag{6.116}$$

$$\boxed{\vec{u}_Q = \begin{pmatrix} \hat{u}\cos\left(\omega \cdot \vec{t}\right) \\ \hat{u} \cdot \sin\left(\omega \cdot \vec{t}\right) \end{pmatrix}} \tag{6.117}$$

Lineare Netzwerke, die mit einer Wechselspannung der Frequenz $< omega$ betrieben werden, werden nach kurzer Zeit mit der frequenz ω schwingen. Die transiente Lösung fällt schnell exponentiell ab und es bleibt die stationäre Lösung bestehen. Da in der stationären Lösung Strom und Spannung mit Frequenz ω schwingen, führt man für beide die Basis $\vec{e}_1 = \cos(\omega \cdot t)$ und $\vec{e}_e = \sin(\omega \cdot t)$.

Man will die Spannungsabfall an den linearen Elementen betrachten. Man kann die Kirchhoff'sche Maschenregel anwenden um den Wechselstrom zu beschreiben, also die Summe aller Spannungen über jede geschlossene Masche muss null sein. Dabei sind $u_i(t)$ die Spannungen an den jeweiligen Elementen und $u_q(t)$.

$$\boxed{\sum_i u_i - u_q = 0} \tag{6.118}$$

Eine Kapazität C ist proportional zur angelegten Spannung u. Um den Strom in Verbindung mit der Spannung zu bringen, leitet man auf beide Seiten nach der Zeiten ab. Die zeitliche Änderung des Spannungsabfalls und die zeitliche Spannung sind ausserdem

$$\boxed{q(t) = C \cdot u(t)} \quad \boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}}_{i(t)} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} \cdot u(t)}_{0} + C \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}} \tag{6.119}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i(t)}{C}} \quad \boxed{u(t) = \int_\infty^t \frac{i(\tau)}{C}\mathrm{d}\tau} \tag{6.120}$$

Mit der Basis $\vec{e}_1 = \cos(\omega t)$ und $\vec{e}_2 = \sin(\omega t)$ entsteht die Impendanz und der Leitwert des der Kapazität

$$\boxed{Z_C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega C} \\ \frac{1}{\omega C} & 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{G_C = (Z_C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega C \\ \omega C & 0 \end{pmatrix}} \tag{6.121}$$

Aus einem Ohmschen Widerstand fällt folgende Spannung ab

$$\boxed{u(t) = R \cdot i(t)} \tag{6.122}$$

Mit der Basis $\vec{e}_1 = \cos(\omega t)$ und $\vec{e}_2 = \sin(\omega t)$ entsteht die Impendanz und der Leitwert des Widerstandes

$$\boxed{Z_R = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}} \quad \boxed{G_R = (Z_R)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}} \tag{6.123}$$

Aus einem Ohmschen Widerstand fällt folgenden Strom, wobei G der Leitwert ist, ab

$$\boxed{i(t) = G \cdot u(t)} \tag{6.124}$$

An einer Induktivität fällt folgende Spannung ab

$$\boxed{u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t)} \tag{6.125}$$

Mit der Basis $\vec{e}_1 = \cos(\omega t)$ und $\vec{e}_2 = \sin(\omega t)$ entsteht die Impendanz und der Leitwert der Induktivität

$$\boxed{Z_L = \begin{pmatrix} 0 & \omega L \\ -\omega L & 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{G_L = (Z_L)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega L} \\ \frac{1}{\omega L} & 0 \end{pmatrix}} \tag{6.126}$$

Die Gesamt Impendanz eines Netzwerkes entsteht durch Maschenregel, um die Impendanz einer Serienschaltung von zwei Impendanzen zu berechnen. Die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ in einer Serienschaltung sind gleich. Das heisst die Widerstände können addiert werden und analog mit den Impendanzen weiter berechnen

$$R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) = (R_1 + R_2) \cdot i(t) - u_Q(t) = 0 \tag{6.127}$$

$$\boxed{\vec{u}_Q = (Z_1 + Z_2) \cdot \vec{i}(t), \quad \text{(Serie)}} \tag{6.128}$$

$$\boxed{\vec{u}_Q = \left(Z_1^{-1} + Z_2^{-1}\right)^{-1} \cdot i(t) = (G_1 + G_2)^{-1} \cdot \vec{i}(t), \quad \text{(Parallel)}} \tag{6.129}$$

Eine Kapazität C und eine Induktivität L in Serienkreis mit einer Wechselspannung $u_Q(t)$ sei gegeben. Es ergibt sich aus dem Maschenregel

$$\begin{aligned}
u_C + u_L - u_Q(t) &= 0 \\
(Z_C + Z_L) \odot \vec{i}(t) &= \vec{u}_Q(t) \\
\vec{i}(t) &= (Z_C + Z_L)^{-1} \odot \vec{u}_Q(t) \\
\vec{i}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega C} + \omega L \\ \frac{1}{\omega C} - \omega L & 0 \end{pmatrix}^{-1} \odot \vec{u}_Q(t)
\end{aligned}$$

Der Phasenwinkel bei Cosinus entsteht falls

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= -\arctan(b/a) + \begin{cases} +\pi, & (a < 0) \\ +0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \tau &= \omega t \end{aligned}} \tag{6.130}$$

$$\boxed{a \cdot \cos(\tau) + b \cdot \sin(\tau) = A \cdot \cos(\tau + \varphi)} \tag{6.131}$$

Der Phasenwinkel bei Sinus entsteht falls

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \arctan(a/b) + \begin{cases} +\pi, & (b < 0) \\ +0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \tau &= \omega t \end{aligned}} \tag{6.132}$$

$$\boxed{a \cdot \cos(\tau) + b \cdot \sin(\tau) = A \cdot \sin(\tau + \varphi)} \tag{6.133}$$

6.17 Funktionen und Transformationen

Die Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann wie folgt transformiert werden

$$\boxed{-f(x) := \text{ Spiegelung an der } x\text{-Achse}} \tag{6.134}$$

$$\boxed{f(-x) := \text{ Spiegelung an der } y\text{-Achse}} \tag{6.135}$$

$$\boxed{f(x) + c := \text{ Verschiebung in positive } y\text{-Achse}} \tag{6.136}$$

$$\boxed{f(x) - c := \text{ Verschiebung in negative } y\text{-Achse}} \tag{6.137}$$

$$\boxed{f(x - c) := \text{ Verschiebung in positive } x\text{-Achse}} \tag{6.138}$$

$$\boxed{f(x + c) := \text{ Verschiebung in negative } x\text{-Achse}} \tag{6.139}$$

$$\boxed{f(c \cdot x) := \text{ Stauchung in } x\text{-Richtung mit } (a > 1)} \tag{6.140}$$

$$\boxed{f(c \cdot x) := \text{ Streckung in } x\text{-Richtung mit } (0 < a < 1)} \tag{6.141}$$

$$\boxed{c \cdot f(x) := \text{ Streckung in } y\text{-Richtung mit } (a > 1)} \tag{6.142}$$

$$\boxed{c \cdot f(x) := \text{ Stauchung in } y\text{-Richtung mit } (0 < a < 1)} \tag{6.143}$$

7 FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN

7.1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung

7.1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen

Unter einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x; y)$ aus einer Menge D genau ein Element z aus einer Menge W zuordnet. Symbolische Schreibweise: $z = f(x; y)$.

Seien x, y die unabhängige Variable, z die abhängige Variable, D der Definitionsbereich und W der Wertebereich der Funktion.

Eine Funktion von n unabhängige Variablen lautet

$$\boxed{y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)} \tag{7.1}$$

7.1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen

Analytische Darstellung

Die Funktion wird explizit durch eine Funktionsgleichung dargestellt.

$$\boxed{z = f(x; y)} \tag{7.2}$$

Die Funktion wird implizit durch eine Funktionsgleichung dargestellt.

$$\boxed{F(x; y; z) = 0} \tag{7.3}$$

Graphische Darstellung

Die Variablen x, y und z einer Funktion $z = f(x; y)$ werden als rechtwinklige oder kartesische Koordinaten eines Raumpunktes P gedeutet: $P(x; y; z)$. Der Funktionswert $z = f(x; y)$ ist dabei die Höhenkoordinate der zugeordneten Bildpunktes. Man erhält als Bild der Funktion eine über dem Definitionsbereich liegende Fläche.

Die Schnittkurvendiagramme einer Funktion $z = f(x; y)$ erhält man durch Schnitte der zugehörigen Bildfläche mit Ebenen, die parallel zu einer der drei koordinatenebenen verlaufen. Die Schnittkurven werden noch in die jeweilige Koordinatenebene projiziert und repräsentieren einparametrige Kurvenscharen. Ihre Gleichungen erhält man aus der Funktionsgleichung $z = f(x; y)$, indem man der Reihe nach jeweils eine der drei Variablen als Parameter betrachtet. In den naturwissenschaftlich-technischer Anwendungen werden die Schnittkurvendiagramme als Kennlinienfelder bezeichnet.

Das Höhenliniendiagramm ist ein spezielles Schnittkurvendiagramm mit der Höhenkoordinate z als Kurvenparameter

$$\boxed{f(x; y) = c} \tag{7.4}$$

7.1.3 Ebenen im Raum

Ebenen

Die Bildfläche einer linearen Funktion ist eine Ebene

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \tag{7.5}$$

Koordinatenebenen

Die xy-Ebene ist $z = 0$. Die xz-Ebene ist $y = 0$. Die yz-Ebene ist $x = 0$.

Parallelebenen

Eine Ebene parallel zur xy-Ebene lautet: $z = a$. Eine Ebene parallel zur xz-Ebene lautet: $y = a$. Eine Ebene parallel zur yz-Ebene lautet: $x = a$

7.1.4 Rotationsflächen

Gleichung einer Rotationsfläche

Eine Rotationsfläche entsteht durch Drehung einer ebenen Kurve $z = f(x)$ um die z-Achse für $a \leq r \leq b$. Diese Rotationsfläche lautet in zylindrische und kartesische Koordinaten

$$\boxed{z = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)} \tag{7.6}$$

Spezielle Rotationsfläche

Kugel: Obere bzw. untere Halbkugel in kartesische bzw. Zylinderkoordinaten $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ bzw. $z = \pm\sqrt{R^2 - r^2}$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2} \quad \boxed{r^2 + z^2 = R^2} \tag{7.7}$$

Kreiskegel: Folgende Gleichungen beschreiben einen Doppelkegel. Für $z \geq 0$ erhält man den Mantel des gezeichneten Kegels mit der Funktionsgleichung $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\boxed{x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2} \quad \boxed{z = \frac{H}{R} r} \tag{7.8}$$

Kreiszylinder: Sei $z \in \mathbb{R}$ die Höhenkoordinate

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} \quad \boxed{r = R} \tag{7.9}$$

Ellipsoid: Durch Auflösen nach z erhält man zwei Funktionen.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \tag{7.10}$$

7.1.5 Schnittkurvendiagramme

Die Struktur einer Funktion $z = f(x; y)$ kann durch Schnittkurven- pder Schnittliniendiagramme durch ebene Schnitte der zugehörigen Bildfläche dargestellt. Schnittebenen werden parallel zu einer der drei Koordinatenebenen gewählt. Das Schnittliniendiagramm ist das Höhenliniendiagramm, bei dem alle auf der Fläche $z = f(x; y)$ gelegenen Punkte gleicher Höhe $z = c$ zu einer Flächekurve zusammengefasst werden.

Diese Kurve lässt sich auch als Schnitt der Fläche $z = f(x; y)$ mit der zur x, y-Ebene parallelen Ebene $z = c$ auffassen. Die Höhenlinien einer Funktion genügen folgender impliziten Kurvengleichung

$$\boxed{z = f(x; y) = \text{const.} = c} \tag{7.11}$$

Die Höhenlinien repräsentieren eine einparametrige Kurvenschar mit der Höhenkoordinate $z = c$ als Parameter. Zu jedem zulässigen Parameterwert gehört dabei genau eine Höhenlinie. Die Höhenlinie sind die Projektionen der Linien gleicher Höhe in die x, y-Koordinatenebene.

Folgene Schnittkurvendiagramme der Funktion $z = f(x; y)$ ergeben sich durch Schnitte der zugehörigen Bildfläche mit Ebenen parallel zu einer der drei Koordinatenebenen:

- Schnitte parallel zur x, y-Ebene: $z = f(x; y) = \text{const.} = c$
- Schnitte parallel zur y, z-Ebene: $z = f(x = c; y)$
- Schnitte parallel zur x, z-Ebene: $z = f(x; y = c)$

Die Schnittkurvendiagramme repräsentieren somit einparametrige Kurvenscharen. IHre Gleichungen erhält man aus der Funktionsgleichung $z = (x; y)$, indem man der Reihe nach eine der drei Variablen festhält, d.h. als Parameter betrachtet. Das Höhenliniendiagramm ist ein spezielles Schnittkurvendiagramm mit der Höhenkoordinate z als Kurvenparameter. In den physikalisch-technisch Anwendungen wird das Schnittliniendiagramm einer Funktion meist als **Kennlinienfeld** bezeichnet.

7.2 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion lassen sich sinngemäss auch für Funktionen von mehreren Variablen übertragen. Mit dem Grenzwert einer Funktion $z = f(x; y)$ an der Stelle $(x_0; y_0)$ lässt sich das Verhalten der Funktion untersuchen, wenn man sich dieser Stelle beliebig nähert. Wr gehen dabei davon aus, dass die Funktion in einer gewissen Umgebung von $(x_0; y_0)$ definiert ist, eventuell mit Ausnahme dieser Stelle selbst. Diese Funktion hat dann definitionsgemäss an der Stelle $(x_0; y_0)$ den **Grenzwert** g, wenn sich die Funktionswerte $f(x; y)$ beim Grenzübergang dem Wert g beliebig nähern.

$$\boxed{\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = g} \tag{7.12}$$

Aus $(x; y) \to (x_0; y_0)$ folgt stets $f(x; y) \to g$, und zwar unabhängig vom eingeschlagenen Weg für jede Folge von Zahlenpaaren $(x; y)$, die sich beliebig der Stelle $(x_0; y_0)$ nähern. Eine Funktion $f(x; y)$ kann auch in einer Definitionslücke $(x_0; y_0)$ einen Grenzwert haben, obwohl sie dort nicht definiert ist. Anschauliche Deutung des Grenzwertes auf der Bildfläche von $z = f(x; y)$: bewegt man sich auf dieser Fläche in Richtung der Stelle $(x_0; y_0)$, so unterscheidet sich die erreichte Höhe immer weniger vom Grenzwert g.

Eine in $(x_0; y_0)$ und einer gewissen Umgebung von $(x_0; y_0)$ definierte Funktion $z = f(x; y)$ heisst an der Stelle $(x_0; y_0)$ **stetig**, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt.

$$\boxed{\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = f(x_0; y_0)} \tag{7.13}$$

Die Stetigkeit an einer bestimmten Stelle setzt voraus, dass die Funktion dort auch definiert ist. Ferner muss der Grenzwert an dieser Stelle existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen. Eine Funktion $z = f(x; y)$ heisst dagegen an der Stelle $(x_0; y_0)$ **unstetig**, wenn $f(x_0; y_0)$ nicht vorhanden ist oder $f(x_0; y_0)$ vom Grenzwert verschieden ist oder dieser nicht existiert. Eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist, wird als stetige Funktion bezeichnet.

7.3 Partielle Differentiation

7.3.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Die Ableitung einer Funktion von einer Variable an der Stelle x_P wird durch den Grenzwert definiert und lässt sich als Steigung m der im Punkt $P = (x_P; y_P)$ errichteten Kurventangente deuten

$$\boxed{\begin{aligned} m_{\text{Tan},P} = \tan(\alpha) &= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{x_Q\to x_P} \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} \\ &= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x_P + \triangle x) - f(x_P)}{\triangle x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x_P)\Big] = f'(x_P) \end{aligned}} \tag{7.14}$$

Analoge Überlegungen führen bei einer Funktion von zwei Variablen, die sich bildlich als Fläche im Raum darstellen lässt, zum Begriff der partiellen Ableitung einer Funktion. Man geht von einem Punkt $P = (x_P; y_P; z_P)$ auf einer Fläche $z = f(x; y)$ aus. Durch diesen Flächenpunkt legt man zwei Schnittebenen, die parallel zur x, z- bzw. y, z-Koordinatenebene verlaufen. Als Schnittkurven erhält man dann zwei Flächenkurven K_1 und K_2, mit denen man sich jetzt näher befassen wird.

Die auf der Schnittkurve K_1 gelegenen Punkte stimmen in ihrer y-Koordinate miteinander überein: $y = y_P$. Die Höhenkoordinate z dieser Punkte hängt somit nur von der Variablen x, d.h. der x-Koordinate ab. Diese Funktionsgleichung der Schnittkurve K_1 lautet daher

$$\boxed{K_1: \quad z = f(x; y_P) = g(x)} \tag{7.15}$$

Das Steigungsverhalten dieser Kurve lässt sich besser untersuchen, wenn man die Kurve in die x, z-Ebene projiziert. Dabei wird die Gestalt der Kurve in kleinster Weise verändert. Für die Steigung m_x, der in P errichteten Kurventangente gilt dann definitionsgemäss

$$\boxed{m_x = \tan(\alpha) = g'(x_P) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{g(x_P + \triangle x) - g(x_P)}{\triangle x}} \tag{7.16}$$

Beachtet man dabei noch, dass $g(x) = f(x; y_P)$ ist, so kann man diesen Grenzwert auch wie folgt schreiben

$$\boxed{m_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_P + \triangle x) - f(x_P; y_P)}{\triangle x}} \tag{7.17}$$

Die erste partielle Ableitung nach x an der Stelle (x_P, y_P) erfolgt durch Betrachtung der y-Variable als Parameter und wird durch das Symbol $f_x(x_P, y_P)$ oder $z_x(x_P, y_P)$ oder $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ gekennzeichnet.

Analog für die Schnittkurve K_2 gilt

$$\boxed{K_2: \quad z = f(x_P; y) = h(y)} \tag{7.18}$$

$$\boxed{m_y = \tan(\beta) = h'(y_P) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{h(y_P + \triangle y) - h(y_P)}{\triangle y}} \tag{7.19}$$

$$\boxed{m_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_P; y_P + \triangle y) - f(x_P; y_P)}{\triangle y}} \tag{7.20}$$

Die erste partielle Ableitung nach y an der Stelle $(x_P; y_P)$ erfolgt durch Betrachtung der x-Variable als Parameter und wird durch das Symbol $f_y(x_P; y_P)$ oder $z_y(x_P; y_P)$ oder $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ gekennzeichnet.

Unter der partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Funktion $z = f(x; y)$ an der Stelle $(x; y)$ werden die folgenden Grenzwerte verstanden

$$\boxed{f_x(x; y) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x; y) - f(x; y)}{\triangle x}} \quad \boxed{f_y(x; y) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x; y + \triangle y) - f(x; y)}{\triangle y}} \tag{7.21}$$

Die partielle Ableitung $f_x(x_P; y_P)$ bzw. $f_y(x_P; y_P)$ ist der **Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt** P in der positiven x bzw. y-Richtung.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x; y)\Big] = f_x(x; y)} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x; y)\Big] = f_y(x; y)} \tag{7.22}$$

7.3.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Partielle Ableitungen höherer Ordnung lassen sich auch in Form partieller Differentialquotienten darstellen. So lautet beispielsweose die Schreibweise für partielle Differentialquotienten 2. Ordnung

$$\boxed{f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x; y)\Big]\right) = \frac{\partial^2}{\partial x}\Big[f(x; y)\Big]} \quad \boxed{f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x; y)\Big]\right) = \frac{\partial^2}{\partial y}\Big[f(x; y)\Big]} \tag{7.23}$$

$$\boxed{f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x; y)\Big]\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big[f(x; y)\Big]} \quad \boxed{f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x; y)\Big]\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Big[f(x; y)\Big]} \tag{7.24}$$

Unter bestimmten Voraussetzungen, auf die man im Rahmen dieser Darstellung nur flüchtig eingehen kann, ist bei den gemischten partiellen Ableitungen die Reihenfolge der Differentiationen vertauschbar. Sind nämlich die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetige Funktionen, so gilt der folgende **Satz von Schwarz**.

$$\boxed{f_{xy} = f_{yx}} \quad \boxed{f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}} \quad \boxed{f_{yxx} = f_{xyy} = f_{yxy}} \tag{7.25}$$

Bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetige Funktionen sind.

7.3.3 Differentiation nach einem Parameter - Verallgemeinerte Kettenregel

Man betrachte Funktionen von zwei oder mehreren unabhängigen Variablen, die selbst noch von einem Parameter $t_1 \leq t \leq t_2$ abhängen. Insbesondere interessiert man sich für die Ableitungen dieser Funktionen nach dem Parameter.

$$\boxed{z = f\Big(x(t), y(t)\Big)} \tag{7.26}$$

Diese Funktion wird als eine zusammengesetzte, verkettete oder mittelbare Funktion dieses Parameters bezeichnet. Ihre Ableitung erhält man nach der folgenden, als **Kettenregel** bezeichnetes Vorschrift.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} \tag{7.27}$$

7.3.4 Das totale Differential einer Funktion

Die Rolle, die die Kurventangente bei einer Funktion von einer Variablen spielt, übernimmt bei einer Funktion $z = f(x; y)$ von zwei Variablen die sogenannte **Tangentialebene**. Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt $P = (x_P; y_P; z_P)$ an die Bildfläche von $z = f(x; y)$ angelegten Tangenten. In der unmittelbaren Umgebung ihres Berührungspunktes P besitzen Fläche und Tangentialebene im Allgemeinen keinen weiteren gemeinsamen Punkt.

Die Funktionsgleichung dieser Tangentialebene lautet

$$\boxed{z = ax + by + c} \tag{7.28}$$

Die unbekannten Koeffizienten bestimmt man aus den bekannten Eigenschaften der Tangentialebene. So besitzen Fläche und Tangentialebene im Berührungspunkt P den gleichen Anstieg. Dies bedeutet, dass dort die ersten partiellen Ableitungen übereinstimmen müssen. Die partiellen Ableitungen der linearen Funktion sind $f_x(x_P; y_P) = a$ und $f_y(x_P; y_P) = b$. Da P ein gemeinsamer Punkt von Fläche und Tangentialebene ist, so erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von P in die Gleichung der Tangentialebene den Parameter $c = z_P - ax_P - by_P$.

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x; y)$ im Flächenpunkt P mit $z_P = f(x_P; y_P)$ lautet in symmetrischer Schreibweise

$$\boxed{z = \underbrace{f_x(x_P; y_P)}_{a} \cdot x + \underbrace{f_y(x_P; y_P)}_{b} \cdot y + \underbrace{z_P - \underbrace{f_x(x_P; y_P)}_{a} \cdot x_P - \underbrace{f_y(x_P; y_P)}_{b} \cdot y_P}_{c}} \tag{7.29}$$

Die **Gleichung der Tangentialebene** an die Fläche $z = f(x; y)$ im Flächenpunkt $P = (x_P; y_P; z_P)$ mit $z_P = f(x_P; y_P)$ lautet

$$\boxed{z = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x_P; y_P)\Big] \cdot (x - x_P) + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x_P; y_P)\Big] \cdot (y - y_P) + z_P} \tag{7.30}$$

Durch das totale Differential kann man Probleme lösen wie die Linearisierung einer Funktion bzw. eines Kennlinienfeldes, implizite Differentiation und Fehlerfortpflanzung lösen. Dabei betrachtet man eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen $z = f(x; y)$ aus auf der sich eine punktförmige Masse P befindet.

Die Problemstellung lautet dann welche Änderung erfährt die Höhenkoordinate z des Massenpunktes bei einer Verschiebung auf der Fläche selbst oder auf der zugehörigen Tangentialebene.

Verschiebung des Massenpunktes auf der Fläche

Bezogen auf den Ausgangspunkt P bezeichnet man die Reihe nach mit $\triangle x$, $\triangle y$ und $\triangle z$. Die Masse wird nun so auf der Fläche verschoben, dass sich seine beiden unabhängigen Koordinaten x und y um $\triangle x$ bzw. $\triangle y$ ändern. Dabei ändert sich die Höhenkoordinate z, d.h. der Funktionswert um

$$\boxed{\triangle z = f(x_P + \triangle x; y_P + \triangle y) - f(x_P; y_P)} \tag{7.31}$$

Diese Grösse beschreibt den Zuwachs der Höhenkoordinate und damit des Funktionswertes bei einer Verschiebung auf der Fläche. Der Massenpunkt ist dabei vom Punkt P in den Punkt Q gewandert.

$$\boxed{P = (x_P; y_P; z_P) \Longrightarrow Q = (x_P + \triangle x; y_P + \triangle y; z_P + \triangle z)} \tag{7.32}$$

Verschiebung des Massenpunktes auf der Tangtentialebene

Die mit einer Verschiebung der Masse auf der Tangentialebene verbundenen Koordinatenänderungen bezeichnet man jetzt der Reihe nach mit $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$. Dabei soll der Massenpunkt so auf der Tangentialebene verschoben werden, dass sich seine beiden unabhängigen Koordinaten wiederum um $\triangle x$ bzw. $\triangle y$ ändern.

Die Änderung der Höhenkoordinate des Massenpunktes lässt sich dann leicht aus der Funktionsgleichung der Tangentialebene berechnen. So setzt man

$$\boxed{x - x_P = \mathrm{d}x} \quad \boxed{y - y_P = \mathrm{d}y} \quad \boxed{z - z_P = \mathrm{d}z} \tag{7.33}$$

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x_P; y_P)\Big] \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x_P; y_P)\Big] \cdot \mathrm{d}y} \tag{7.34}$$

Diese Grösse beschreibt den Zuwachs der Höhenkoordinate z bei einer Verschiebung auf der Tangentialebene. Der Massenpunkt ist dabei vom Ausgangspunkt P in den Punkt Q' gewandert, der zwar auf der Tangentialebene, im Allgemeinen aber nicht auf der Fläche liegt

$$\boxed{P = (x_P; y_P; z_P) \Longrightarrow Q' = (x_P + \mathrm{d}x; y_P + \mathrm{d}y; z_P + \mathrm{d}z)} \tag{7.35}$$

Es ist somit $\triangle x = \mathrm{d}x$ und $\triangle y = \mathrm{d}y$ aber $\triangle z \neq \mathrm{d}z$. Bei geringfügigen Verschiebungen, d.h. für kleine Werte von $\triangle x = \mathrm{d}x$ und $\triangle y = \mathrm{d}y$ gilt dann näherungsweise

$$\boxed{\triangle z \approx \mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x_P; y_P)\Big] \cdot \triangle x + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x_P; y_P)\Big] \cdot \triangle y} \tag{7.36}$$

Man darf unter diesen Voraussetzungen die Fläche $z = f(x; y)$ in der unmittelbaren Umgebung des Berührungspunktes P durch die zugehörige Tangentialebene ersetzen. Diese Näherung wird in der Linearisierung von Funktionen und Kennlinienfeldern und bei der Fehlerfortpflanzung in Gebrauch gemacht.

Unter dem **totalen Differential einer Funktion** $z = f(x; y)$ von zwei unabhängigen Variablen wird folgender lineare Differentialausdruck verstanden.

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x; y)\Big] \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x; y)\Big] \cdot \mathrm{d}y} \tag{7.37}$$

Das totale Differential einer Funktion $z = f(x;y)$ beschreibt die Änderung der Höhenkoordinate bzw. des Funktionswertes z auf der im Berührungspunkt P errichteten Tangentialebene. Dabei sind die Differentiale $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangentialebene.

7.3.5 Anwendungen

Implizite Differentiation

Hiermit werden ausgehend von impliziten Funktionen der Form $F(x;y) = 0$ ausgegangen und die durch diese Gleichung definierte Kurve als Schnittlinie der Fläche $z = F(x;y)$ mit der x-, y-Ebene $z = 0$ aufgefasst. Die Kurve $F(x;y) = 0$ ist die **Schnittkante** der Fläche $z = F(x;y)$ mit der x, y-Ebene $z = 0$.

Unter bestimmten Voraussetzungen ist es dann möglich, den Kurvenanstieg durch die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $z = F(x;y)$ auszudrücken. Zu diesem Zweck bildet man das totale Differential der Funktion $z = F(x;y)$

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}\Big[F(x;y)\Big]\cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\Big[F(x;y)\Big]\cdot \mathrm{d}y} \tag{7.38}$$

Für die Punkte der **Schnittpunkte** ist $z = 0$ und somit auch $\mathrm{d}z = 0$. Dann folgen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\Big[F(x;y)\Big]\cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\Big[F(x;y)\Big]\cdot \mathrm{d}y = 0} \tag{7.39}$$

Teilt man das Polynom durch $\mathrm{d}x$ und durch Auflösen erhält man

$$\boxed{\frac{-\frac{\partial}{\partial x}\Big[F(x;y)\Big]}{\frac{\partial}{\partial y}\Big[F(x;y)\Big]} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\Big[F(x;y)\Big] \neq 0\right)} \tag{7.40}$$

Der Anstieg einer in der impliziten Form $F(x;y) = 0$ dargestellten Funktionskurve im Kurvenpunkt $P = (x_P;y_P)$ lässt sich mit Hilfe der partiellen Fifferentiation bestimmen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_P;y_P) = \frac{-\frac{\partial}{\partial x}\Big[F(x_P;y_P)\Big]}{\frac{\partial}{\partial y}\Big[F(x_P;y_P)\Big]}} \tag{7.41}$$

Linearisierung einer Funktion

Eine nichtlineare Funktion $y = f(x)$ lässt sich in einer Umgebung eines Punktes $P = (x_P;y_P)$ durch eine lineare Funktion bzw. durch eine Kurventangente annähern. Eine Funktion $z = f(x;y)$ von zwei unabhängigen Variablen lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen in der unmittelbaren Umgebung eines Flächenpunktes $P = (x_P;y_P;z_P)$ linearisieren bzw. durch eine lineare Funktion vom Typ $z = ax + by + cz$ näherungsweise ersetzt werden. Als Ersatzfunktion wählt man die Tangentialebene in P. Der Punkt P wird in naturwissenschatlich-technischen Bereich als **Arbeitspunkt** bekannt.

Linearisierung einer Funktion $z = f(x;y)$ bedeutet also, dass man die gekrümmte Bildfläche von $z = f(x;y)$ in der unmittelbaren Umgebung des Arbeitspunktes P durch die dortige Tangentialebene ersetzt werden kann. Die nichtlineare Funktion $z = f(x;y)$ wird durch die **Tangentialebene** bzw. durch das **totale Differential** angenähert, wobei $\triangle x$, $\triangle y$ und $\triangle z$ die Abweichungen eines beliebigen Flächenpunktes gegenüber dem Arbeitspunkt P sind.

$$\boxed{\begin{aligned} z - z_P &= \frac{\partial}{\partial x}(x_P;y_p)\cdot(x - x_P) + \frac{\partial}{\partial y}(x_P;y_P)\cdot(y - y_P) \\ \triangle z &= \frac{\partial}{\partial x}(x_P;y_p)\cdot\triangle x + \frac{\partial}{\partial y}(x_P;y_P)\cdot\triangle y \\ \underbrace{\triangle z}_{w} &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P}_{a}\cdot\underbrace{\triangle x}_{u} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P}_{b}\cdot\underbrace{\triangle y}_{v} \end{aligned}} \tag{7.42}$$

In der Automation sind u, v und w die Abweichungen gegenüber dem Arbeitspunkt P, d.h. P ist Koordinatenursprung des neuen Koordinatensystems, also die Relativkoordinaten, während a und b die Werte der beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung im Arbeitspunkt P.

Eine Funktion von n unabhängigen Variablen lässt sich linearisieren. In der unmittelbaren Umgebung des Arbeitspunktes P kann die Funktion $y = f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ näherungsweise durch das **totale Differential** ersetzt werden. Die Grössen $\triangle x_i$ sind die Änderungen der unabhängigen Variablen bezogen auf den Arbeitspunkt.

$$\boxed{\triangle y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P\triangle x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P\triangle x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_P\triangle x_n} \tag{7.43}$$

Relative oder lokale Extremwerte

Eine Funktion $z = f(x;y)$ besitzt an der Stelle $(x_P;y_P)$ ein **relatives Maximum** bzw. **relatives Minimum**, wenn in einer gewissen Umgebung von $(x_P;y_P)$ stets gilt

$$\boxed{f(x_P;y_P) > f(x;y)} \quad \boxed{f(x_P;y_P) < f(x;y)} \tag{7.44}$$

Die relativen Maxima und Minima einer Funktion werden unter dem Sammelbegriff “Relative Extremwerte” zusammengefasst. Die den Extremwerten entsprechenden Flächenpunkte heissen **Hoch-** bzw- **Tiefpunkte**. Ein relativer Extremwert wird auch als lokaler Extremwert bezeichnet, da die extreme Lage meist nur in der unmittelbaren Umgebung, also im lokalen Bereich zutrifft. Ist die

Ungleichung an jeder Stelle $(x;y)$ des Definitionsbereiches von $z = f(x;y)$ erfüllt, so liegt an der Stelle $(x_P;y_P)$ ein **absolutes Maximum** bzw. **absolutes Minimum** vor.

In einem relativen Extremum $(x_P;y_P)$ der Funktion $z = f(x;y)$ besitzt die zugehörige Bildfläche stets eine zur x, y-Ebene parallele Tangentialebene. Folgende Bedingungen sind **notwendige Voraussetzungen** für die Existenz eines relativen Extremwertes an der Stelle $(x_P;y_P)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_P;y_P) = 0} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_P;y_P) = 0} \tag{7.45}$$

Eine Funktion $z = f(x;y)$ besitzt an der Stelle $(x_P;y_P)$ mit Sicherheit einen relativen Extremwert, wenn folgenden **hinreichenden Voraussetzungen** erfüllt sind

$$\boxed{\triangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_P;y_P) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_P;y_P) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_P;y_P) > 0} \tag{7.46}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_P;y_P)$ entscheidet dann über die Art des Extremwertes

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_P;y_P) < 0 \Longrightarrow \text{Relatives Maximum}} \tag{7.47}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_P;y_P) > 0 \Longrightarrow \text{Relatives Minimum}} \tag{7.48}$$

Für $\triangle = 0$ liegt kein Extremwert, sondern ein Sattelpunkt liegt vor. Für $\triangle = 0$ versagt das Kriterium, d.h. an der Stelle $(x_P;y_P)$ kann nicht darüber diskutiert werden, ob es sich dabei um einen relativen Extremwert handelt oder nicht.

Lagrangesches Multiplikatorverfahren zur Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen

Die Extremwerte einer Funktion $z = f(x;y)$, deren unabhängige Variable x und y einer Nebenbedingung $\varphi(x;y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens schrittweise wie folgt bestimmen.

Aus der Funktionsgleichung $z = f(x;y)$ und der Nebenbedingung $\varphi(x;y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion gebildet. Der noch unbekannte Faktor λ heisst **Lagrangescher Multiplikator**.

$$\boxed{F(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y)} \tag{7.49}$$

Dann werden die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\Big[F(x;y)\Big] &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x;y)\Big] + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Big[\varphi(x;y)\Big] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\Big[F(x;y)\Big] &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x;y)\Big] + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial y}\Big[\varphi(x;y)\Big] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\Big[F(x;y)\Big] &= \varphi(x;y) &= 0 \end{aligned}} \tag{7.50}$$

Der Lagrangeschen Multiplikator λ ist eine Hilfsgrösse und daher meist ohne nähere Bedeutung. Er sollte daher möglichst früh aus den Rechnungen eliminiert werden. Die obigen Bedingungen sind nicht hinreichend für die Existenz eines Extremwertes unter der Nebenbedingung $\varphi(x;y) = 0$.

Für Funktionen von n Variablen x_1, x_2, $\ldots$, x_n mit m Nebenbedingungen mit $(m < n)$ bildet man die Hilfsfunktion

$$\boxed{F(x_1;\ldots;x_n;\lambda_1;\ldots;\lambda_m) = f(x_1;\ldots;x_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi_i(x_1;\ldots;x_n)} \tag{7.51}$$

und setzt man die $(n+m)$ partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktion der Reihe nach gleich Null

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[F(x_1;\ldots;x_n;\lambda_1;\ldots;\lambda_m)\Big] = 0} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\Big[F(x_1;\ldots;x_n;\lambda_1;\ldots;\lambda_m)\Big] = 0} \tag{7.52}$$

Aus diesen $(n+m)$ Gleichungen lassen sich dann die $(n+m)$ Unbekannten x_1, x_2, $\ldots$, x_n, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m berechnen.

Lineare Fortpflanzung - Direkte Messung

Das Messergebnis einer aus n Meswerten bestehenden Messreihe x_1, x_2, $\ldots$, x_n wird in folgender Form ausgedrückt

$$\boxed{x = \overline{x} \pm \triangle x} \quad \boxed{\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \boxed{\triangle x = s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}} \tag{7.53}$$

wobei $\overline{x}$ das arithmetische Mittel der n Einzelwerte, $s_{\overline{x}}$ die Standardabweichung des Mittelwertes und $\triangle x$ die **Messunsicherheit** der Grösse x. Die auftretende Summe $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ heisst Summe der **Abweichungsquadrate**.

Lineare Fortpflanzung - Indirekte Messung

Das Messergebnis zweier direkt gemessener Grössen x und y liege in der Form

$$\boxed{x = \overline{x} \pm \triangle x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}}} \quad \boxed{y = \overline{y} \pm \triangle y = \overline{y} \pm s_{\overline{y}}} \tag{7.54}$$

Dabei sind $\overline{x}$ und $\overline{y}$ die arithmetischen Mittelwerte und $\triangle x$ und $\triangle y$ die Messunsicherheiten der beiden Grössen, für die man in diesem Zusammenhang meist die Standardabweichung $s_{\overline{x}}$ und $s_{\overline{y}}$ der beide Mittelwerte heranzieht.

Die von den direkten Messgrössen x und y abhängige indirekte Messgrösse $z = f(x;y)$ besitzt dann den Mittelwert

$$\boxed{\overline{z} = f(\overline{x};\overline{y})} \tag{7.55}$$

Mit Hilfe des totalen Differentials der Funktion gelingt es dann, ein sogenannter Fehlerfortpflanzungsgesetz herzuleiten, d.h. eine Beziehung, die darüber Aufschluss gibt, wie sich die Messunsicherheiten $\triangle x$ und $\triangle y$ der beiden unabhängigen Messgrössen x und y auf die Messunsicherheit $\triangle z$ der abhängigen Grösse $z = f(x;y)$ auswirken. Zu diesem Zweck bildet man das totale Differential der Funktion $z = f(x;y)$ an der Stelle $x = \overline{x}$ und $y = \overline{y}$

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x};\overline{y})\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x};\overline{y})\, \mathrm{d}y} \tag{7.56}$$

Die Differentiale dx und dy deuten als Messunsicherheiten $\triangle x$ und $\triangle y$ der beiden unabhängigem Messgrössen x und y. Das totale Differential dz liefert einen Näherungswert für die Messunsicherheit $\triangle z$.

$$\boxed{\triangle z_{\text{max}} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x};\overline{y})\, \triangle x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x};\overline{y})\, \triangle y\right|} \tag{7.57}$$

Das Messergebnis für die indirekte Messgrösse $z = f(x;y)$ wird dann in der Form

$$\boxed{z = \overline{z} \pm \triangle z_{\text{max}}} \tag{7.58}$$

7.4 Doppelintegrale

Ein Mehrfachintegral besteht aush mehreren nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen. Legt man ein Koordinatensystem zugrunde, das sich der Symmetrie des Problems in besonders günstiger Weise anpasst, so verainfacht sich die Berechnung der Integrale oft erheblich. Bei ebenen Problemen mit Kreissymmetrie etwa wird man daher vorzugsweise **Polarkoordinaten**, bei rotationssymmetrischen Problemen zweckmässigerweise **Zylinderkoordinaten** verwenden.

Der Begriff des Doppelintegrals lässt sich anhand eines geometrischen Problems einführen. Sei $z = f(x;y)$ im Bereich (A) eine definierte und stetige Funktion mit $f(x;y) \geq 0$. Sein Boden besteht aus dem Bereich (A) und die Mantellinien verlaufen parallel zur z-Achse. Man ist hier für das Volumen V interessiert.

Der Bereich (A) wird in n Teilbereiche it den Flächeninalten $\triangle A_i$ zerlegt. Der Zylinder selbst erfällt dabei in eine leich grosse Anzahl von Röhren. Betrachte man den k-ten Rohr mit flachen Boden $\triangle A_k$ und gekrümmter Deckel als Funktion $z = f(x;y)$. Das Volumen diesen Rohr stimmt dann mit dem Volumen einer Säule überein, die über der gleichen Grundfläche errichtet wird und deren Höhe durch die Höhenkoordinate $z_k = f(x_k;y_k)$ des Flächenpunktes $P_k = (x_k;y_k)$ gegeben ist.

$$\boxed{\triangle V_k \approx (\triangle A_k)\, z_k = z_k \triangle A_k = f(x_k;y_k)\, \triangle A_k} \tag{7.59}$$

Dieser Näherungswert lässt sich noch verbessern, wenn man in geeigneter Weise die Anzahl der Röhren vergrössert. Die Anzahl der Teilbereiche n wachsen unbegrenzt $(n \to \infty)$, wobei gleichzeitig der Durchmesser eines jeden Teilbereiches gegen Null streben soll. Bei diesem Grenzübergang strebt die Summe gegen einen Grenzwert über den Bereich (A).

Bei diesem Grenzübergang strebt die Summe gegen einen Bereich (A) oder kurz **Doppelintegral**, **Flächenintegral** oder **2-dimensionales Gebietsintegral** und darf als Volumen V des Körpers interpretiert werden. Hier sind x und y die Integrationsvariablen, $f(x;y)$ die Integrandfunktion oder der Integrand, dA das Flächendifferential oder Flächenelement und (A) der Integrationsbereich.

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle A_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_K)\, \triangle A_k} \tag{7.60}$$

7.4.1 Doppelintegral in kartesische Koordinaten

Die Berechnung des Doppelintegrals wird in kartesische Koordinaten betrachtet. Ein Integrationsbereich lässt sich durch die Ungleichungen

$$\boxed{f_u(x) \leq y \leq f_o(x)\,, \quad a \leq x \leq b} \tag{7.61}$$

wobei $f_u(x)$ die untere und $f_o(x)$ die obere Randkurve ist und die seitlichen Begrenzungen aus zwei Parallelen zur y-Achsen mit den Funktionsgleichungen $x = a$ und $x = b$ bestehen. Das Flächenelement dA besitzt in der kartesischen Darstellung die geometrische Form eines achsenparallelen Rechtecks mit den infinitesimal kleinen Seitenlängen dx und dy. Somit gilt

$$\boxed{\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x} \tag{7.62}$$

Über den Flächenelement liegt eine quaderförmige Säule mit dem infinitesimal kleinen Rauminhalt. Das Volumen V des Zylinders berechnet man schrittweise durch Summation der Säulenvolumina.

$$\boxed{\mathrm{d}V = z\, \mathrm{d}A = f(x;y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = f(x;y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x} \tag{7.63}$$

Die Berechnung des Doppelintegrals erfolgt durch zwei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen.

Innere Integration: Die Variable x wird zunächst als eine Art Konstante betrachtet und die Funktion $f(x;y)$ unter Verwendung der für gewöhnliche Integrale gültigen Regeln nach der Variablen y integriert. In die ermittelte Stammfunktion setzt man dann für y die Integrationsgrenzen $f_o(x)$ bzw. $f_u(x)$ ein und bildet die entsprechende Differenz.

Äussere Integration: Die als Ergebnis der inneren Integration erhaltene, nur noch von der Variablen x abhängige Funktion wird nun in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ integriert.

$$\boxed{V = \iint_{(A)} f(x;y)\,\mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \mathrm{d}V_{\text{Scheibe}} = \underbrace{\int_{x=a}^{b} \underbrace{\left(\int_{y=f_a(x)}^{f_o(x)} f(x;y)\,\mathrm{d}y\right)}_{\text{inneres Integral}} \mathrm{d}x}_{\text{äusseres Integral}}} \tag{7.64}$$

im Allgemeinen gilt: bei einer Vertauschung der Integrationsreihenfolge müssen die Integrationsgrenzen jeweils neu bestimmt werden.

7.4.2 Doppelintegral in Polarkoordinaten

Die Berechnung des Doppelintegrals vereinfacht sich, wenn man an Stelle der kartesischen Koordinaten x und y die Polarkoordinaten r und φ verwendet. Zwischen ihnen besteht dabei der folgende Zusammenhang

$$\boxed{x = r \cdot \cos(\varphi)} \quad \boxed{y = r \cdot \sin(\varphi)} \quad \boxed{r \geq 0} \quad \boxed{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \tag{7.65}$$

Die Gleichung einer Kurve lautet in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ oder $r = r(\varphi)$. Eine von zwei Variablen x und y abhängige Funktion $z = f(x;y)$ geht bei der **Koordinatentransformation** in die von r und φ abhängige Funktion über

$$\boxed{z = f(x;y) = f(r\cos(\varphi); r\sin(\varphi)) = F(r;\varphi)} \tag{7.66}$$

Die bei Doppelintegralen in Polarkoordinatendarstellung auftretenden Integrationsbereiche (A) besitzt die Gestalt zwei Strahlen $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ sowie einer inneren Kurve $r = r_i(\varphi)$ und einer äusseren Kurve $r = r_a(\varphi)$ begrenzt und lassen sich durch die Ungleichungen beschreiben

$$\boxed{r_i(\varphi) \leq r \leq r_a(\varphi)} \quad \boxed{\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2} \tag{7.67}$$

Das Flächenelement $\mathrm{d}A$ wird in der Polarkoordinaten von zwei infinitesimal benachbarten Kreisen mit den Radien r und $r + \mathrm{d}r$ und zwei infinitesimal benachbarten Strahlen mit den Polarwinkeln φ und $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ berandet. Dabei gilt

$$\boxed{\mathrm{d}A = (r\,\mathrm{d}\varphi)\,\mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.68}$$

Das Doppelintegral besitzt somit in Polarkoordinaten das folgende Aussehen und die Berechnung erfolgt wiederum von innen nach aussen, zuerst radial zwischen den Randkurven $r = r_i(\varphi)$ und $r = r_a(\varphi)$ integriert und anschliessend in Winkelrichtung $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$. Wird die Reihenfolge der Integrationen geändert, dann müssen auch die Integrationsgrenzen neu bestimmt werden.

$$\boxed{\iint_{(A)} f(x;y)\,\mathrm{d}A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r\cdot\cos(\varphi); r\cdot\sin(\varphi)) \cdot \underbrace{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}A}} \tag{7.69}$$

7.4.3 Anwendungen der Doppelintegrale

Flächeninhalt

Der Flächeninhalt A eines Normalbereichs (A) lässtsich nach dem Baukastenprinzip aus infinitesimal kleinen rechteckigen Flächenelementen vom Flächeninhalt $\mathrm{d}A = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ zusammensetzen. Man betrachte einen in der Fläche liegenden und zur y-Achse parallelen Streifen der Breite $\mathrm{d}x$. Der Flächeninhalt eines Streifens erhält man, indem man den Flächeninhalt sämtlicher im Streifen gelegener Flächenelemente aufsummiert. Die Summation der Flächenelemente bedeutet eine Integration in der y-Richtung zwischen der unteren Grenze $y = f_u(x)$ und der oberen Grneze $y = f_o(x)$. Der Flächeninhalt eines solchen infinitesimal schmalen Streifens beträgt

$$\boxed{\mathrm{d}A_{\text{Streifen}} = \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \mathrm{d}A = \left(\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x} \tag{7.70}$$

Jetzt summieren über sämtliche Streifenelemente $x = a$ und $x = b$. Der Flächeninhalt in **kartesische Koordinaten** A lautet

$$\boxed{A = \iint_{(A)} \mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \mathrm{d}A_{\text{Streifen}} = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.71}$$

Bei Verwendung von **Polarkoordinaten** lautet

$$\boxed{A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r=r_a(\varphi)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.72}$$

Schwerpunkt einer homogenen Fläche

Für die Schwerpunktskoordinaten x_S und y_S einer homogenen ebenen Fläche vom Flächenihalt A bei Verwendung kartesischer Koordinaten ist für das Flächenelement $\mathrm{d}A = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ zu setzen, bei Verwendung von Polarkoordinaten setzt man $x = r\cdot\cos(\varphi)$, $y = r\cdot\sin(\varphi)$ und $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

$$\boxed{x_S = \frac{1}{A}\iint_{(A)} x\,\mathrm{d}A} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{A}\iint_{(A)} y\,\mathrm{d}A} \tag{7.73}$$

Für **kartesische Koordinaten** lauten die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\boxed{x_S = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{b}\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{b}\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.74}$$

Für **Polarkoordinaten** lauten die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\boxed{x_S = \frac{1}{A}\int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2\cdot\cos(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{A}\int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2\cdot\sin(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.75}$$

Flächenmomente

Flächenmomente sind Grössen, die im Zusammenhang mit Biegeproblemen bei Balken und Trägern auftreten. Dabei wird noch zwischen axialen oder äquatorialen und polaren Flächenmomenten unterschieden. Bei einem axialen Flächenmoment liegt die Bezugsachse in der Flächenebene, während sie bei einem polaren Flächenmoment senkrecht zur Flächenebene orientiert ist.

$$\boxed{\mathrm{d}I_x = y^2\,\mathrm{d}A} \tag{7.76}$$

Man behandle zunächst die auf die Koordinatenachsen bezogenen Flächenmomente. Definitionsgemäss wird dabei die infinitesiml kleine Grösse als axiales Flächenelement von $\mathrm{d}A$ bezüglich der x-Achse bezeichnet. Sie ist das Produkt aus dem Flächenelement $\mathrm{d}A$ und dem Quadrat des Abstandes, den dieses Flächenelemtn von der x-Achse besitzt.

Durch Integration über die Gesamtfläche A erhält man hieraus das axiale Flächenmoment I_x der Fläche A bezüglich der x-Achse

$$\boxed{I_x = \int_{(A)} \mathrm{d}I_x = \iint_{(A)} y^2\,\mathrm{d}A} \tag{7.77}$$

Analog wird das axiale Flächenmoment I_y der Fläche A bezüglich der y-Achse als Bezugsachse definiert. Ausgehend von dem Beitrag $\mathrm{d}I_y = x^2\,\mathrm{d}A$ eines Flächenelements $\mathrm{d}A$ erhält man durch Integration das Flächenmoment der Gesamtfläche

$$\boxed{I_y = \iint_{(A)} \mathrm{d}I_y = \iint_{(A)} x^2\,\mathrm{d}A} \tag{7.78}$$

Unter dem **polaren Flächenmoment** I_p einer Fläche A, bezogen auf eine durch den Koordinatenursprung senkrecht zur Flächenebene verlaufende Bezugsachse (z-Achse), wird die wie folgt definierte Grösse verstanden wobei $\mathrm{d}I_p = r^2\,\mathrm{d}A$

$$\boxed{I_p = \iint_{(A)} \mathrm{d}I_p = \iint_{(A)} r^2\,\mathrm{d}A} \tag{7.79}$$

Wegen des Satzes von Pythagoras besteht zwischen den beiden axialen und dem polaren Flächenmoment stets die Beziehung

$$\boxed{I_p = I_x + I_y} \tag{7.80}$$

So gelten in **kartesische Koordinaten**

$$\boxed{I_x = \int_{x=a}^{b}\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \quad \boxed{I_y = \int_{x=a}^{b}\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.81}$$

$$\boxed{I_p = \int_{x=a}^{b}\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.82}$$

und in **Polarkoordinaten**

$$\boxed{I_x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r=r_i(x)}^{r_a(\varphi)} r^3\cdot\sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \quad \boxed{I_y = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r=r_i(x)}^{r_a(\varphi)} r^3\cdot\cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.83}$$

$$\boxed{I_p = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r=r_i(x)}^{r_a(\varphi)} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.84}$$

7.5 Dreifachintegrale

Die Integration einer Funtion von drei unabhängigen Variablen hat keine geometrische Interpretation.Sei $u = f(x;y;z)$ eine im räumlichen Bereich (V) definierte und stetige Funktion. Den Bereich unterteilt man zunächst in n Teilbereiche. Mit dem k-ten Teilbereich vom Volumen $\triangle V_k$ wird man sich eingehender befassen. In diesem Teilbereich wählt man einen beliebigen Punkt $P_k = (x_k; y_K; z_k)$ aus, berechnet an dieser Stelle den Funktionswert $u_k = f(x_k; y_k; z_k)$ und bildet schliesslich das Produkt aus Funktionswert und Volumen: $f(x_k; y_k; z_k)\cdot\triangle V_k$.

Die Summe aller dieser Produkte wird Zwischensumme Z_n genannt

$$\boxed{Z_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k; z_k)\,\triangle V_k} \tag{7.85}$$

Man lässt die Anzahl n der Teilbereiche unbegrenzt wachsen ($n\to\infty$), wobei gleichzeitig der Durchmesser eines jeden Teilbereiches gegen Null gehen soll.

$$\boxed{\iiint_{(V)} f(x;y;z)\,\mathrm{d}V = \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k; z_k)\,\triangle V_k} \tag{7.86}$$

Bei diesem Grenzübergang strebt die Zwischensumme Z_n gegen einen Grenzwert, der als **3-dimensionales Bereichsintegral** von $f(x;y;z)$ über (V) oder **Dreifachintegral** bezeichnet wird, wobei x, y und z die Integrationsvariablen, $f(x;y;z)$ die Integrandfunktion, $\mathrm{d}V$ das Volumendifferential oder Volumenelement und (V) der räumlicher Integrationsbereich oder Körper.

7.5.1 Dreifachintegral in kartesische Koordinaten

Der Berechnung eines Dreifachintegrals legt man zunächst ein kartesisches Koordinatensystem und einen zylinderischen Integrationsbereich (V) zugrunde, der unten durch eine Fläche $z = z_u(x; y)$ und oben durch eine Fläche $z = z_o(x; y)$ begrenzt wird. Die Projektion dieser Begrenzungsflächen in die x, y-Ebene führt zu einem Bereich (A), der durch die Kurven $y = f_u(x)$ und $y = f_o(x)$ sowie die Parallelen $x = a$ und $x = b$ berandet wird.

Der zylindrische Integrationsbereich (V) kann somit durch die Ungleichungen beschrieben werden

$$\boxed{z_u(x; y) \leq z \leq z_o(x; y)} \quad \boxed{f_u(x) \leq y \leq f_o(x)} \quad \boxed{a \leq x \leq b} \tag{7.87}$$

Das Volumenelement $\mathrm{d}V$ besitzt in der kartesischen Darstellung die geometrische Form eines Quaders mit den infinitesimal kleinen Seitenlängen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$. Ein Dreifachintegral lässt sich durch drei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen durchführen

$$\boxed{\iiint_{(V)} f(x; y; z)\, \mathrm{d}V = \underbrace{\int_{x=a}^{b} \underbrace{\left(\int_{y=f_a(x)}^{f_o(x)} \underbrace{\left(\int_{y=f_a(x)}^{f_o(x)} \mathrm{d}y \right)}_{\text{Integration 1}} \mathrm{d}y \right)}_{\text{Integration 2}} \mathrm{d}x}_{\text{Integration 3}}} \tag{7.88}$$

Dabei wird wie bei den Doppelintegralen von innen nach aussen integriert. Die Integrationsreihenfolge ist nur dann vertauschbar, wenn sämtliche Integrationsgrenzen konstant sind. Bei der Vertauschung der Integrationsreihenfolge müssen die Integrationsgrenzen neu bestimmt werden.

7.5.2 Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten

In technischen Anwendungen treten häufig Körper mit Rotationssymmetrie auf. Zu ihrer Beschreibung verwendet man zweckmässigerweise Zylinderkoordinaten $(r; \varphi; z)$, die sich der Symmetrie des Körpers in besonderem Masse anpassen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von symmetriegerechten Koordinaten. Auch die Berechnung eines Dreifachintegrals lässt sich in zahlreichen Fällen bei Verwendung von Zylinderkoordinaten erheblich vereinfachen.

Sei $P = (x; y; z)$ ein beliebiger Punkt des kartesischen Raumes, $P' = (x; y)$ der durch senkrechte Projektion von P in die x, y-Ebene erhaltene Bildpunkt. Die Lage von P' kann man auch durch die Polarkoordinaten r und φ beschreiben. Sie bestimmen zugleich zusammen mit der Höhenkoordinate z in eindeutiger Weise die Lage des Raumpunktes P. Die drei Koordinaten r, φ und z werden als Zylinderkoordinaten von P bezeichnet.

Zwischen den kartesischen Koordinate und den Zylinderkoordinaten bestehen dabei die folgenden Umrechnungen

$$\boxed{x = r \cdot \cos(\varphi)} \quad \boxed{y = r \cdot \sin(\varphi)} \quad \boxed{z = z} \tag{7.89}$$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \boxed{\tan(\varphi) = \frac{y}{x}} \quad \boxed{z = z} \tag{7.90}$$

Das Volumenelement $\mathrm{d}V$ besitzt in Zylinderkoordinaten die Form

$$\boxed{\mathrm{d}V = (\mathrm{d}A)\,\mathrm{d}z = (r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi)\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.91}$$

Für ein Dreifachintegral erhält man dann in Zylinderkoordinaten die Darstellung

$$\boxed{\iiint_{(V)} f(x; y; z)\, \mathrm{d}V = \iiint_{(V)} f(r \cdot \cos(\varphi); r \cdot \sin(\varphi); z) \cdot \underbrace{r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}V}} \tag{7.92}$$

Die Mantelfläche eines rotationssymmetrischen Körpers entsteht durch Drehung einer Kurve $z = f(x)$ und die z-Achse, die damitauch zugleich Symmetrieachse ist. Bei der Rotation wird aus der kartesischen Koordinate x die Zylinderkoordinate r und die Kurvengleichung $z = f(x)$ geht dabei in die Funktionsgleichung $z = f(r)$ der Rotationsfläche $(x \to r)$ über.

7.5.3 Anwendungen des Dreifachintegrals

Volumen und Masse eines Körpers

Das Volumen eines zylindrischen Körpers mit Grundfläche $z = z_u(x; y)$ und Deckelfläche $z = z_o(x)$ kann man durch ein Dreifachintegral berechnen. Durch Projektion des Zylinders in die x, y-Ebene erhält man den Normalbereich (A) durch die Kurven $y_u = f_u(x)$ und $y = f_o(x)$ sowie die Parallelen $x = a$ und $x = b$.

$$\boxed{V = \iiint_{(V)} \mathrm{d}V = \iiint_{(V)} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.93}$$

Betrachte man nun ein infinitesimal kleines, im Körper gelegenes Volumenelement $\mathrm{d}V$. Es besitzt in einem karteischen Koordinatensystem bekanntlich die Gestalt eines achsenparallelen Quaders mit den Kantenlängen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$. Sein Volumen beträgt $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Volumen einer Säule: Betrachte man eine zur z-Achse parallele Säule mit der infinitesimal kleiinen Querschnittsfläche $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, indem Volumenelement über Volumenelement gesetzt wird, bis man an die beiden Begrenzungsflächen des Körpers stösst. Das Volumen dieser Säule erhält man durch Summation sämtlicher in der Säule gelegener Volumenelemente, d.h. durch Integration der Volumenelemente $\mathrm{d}V$ in der z-Richtung zwischen den Grenzen $z = z_u(x; y)$ und $z = z_o(x; y)$. Das infinitesimal kleine Säulenvolumen beträgt

$$\boxed{\mathrm{d}V_{\text{Säule}} = \int_{z=z_u()}^{z=z_o()} \mathrm{d}V = \left(\int_{z=z_u(x;y)}^{z=z_o(x;y)} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.94}$$

Volumen einer Scheibe: Legt man zur y-Richtung Säule an Säule, bis man an die Randkurven $y = f_u(x)$ bzw. $y = f_o(x)$ des Bereiches (A) in der x, y-Ebene stossen und erhält eine Volumenschicht der Breite oder Dicke $\mathrm{d}x$. Das Volumen $\mathrm{d}V_{\text{Scheibe}}$ dieser infinitesimal dünnen Scheibe ergibt sich dann durch Summation der Säulenvolumina, d.h. durch INtegration der Säulenvolumina $\mathrm{d}V_{\text{Säule}}$ in der y-Richtung zwischen den Grenzen $y = f_u(x)$ und $y = f_o(x)$.

$$\boxed{\mathrm{d}V_{\text{Säule}} = \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \mathrm{d}V_{\text{Säule}} = \left(\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \left(\int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x} \tag{7.95}$$

Volumen des Zylinders: Es wird in der x-Richtung Scheibe an Scheibe gelegt, bis der zylindrische Körper vollständig ausgefüllt ist. Das Zylindervolumen V erhält man dann durch Summation über die Volumina sämtlicher Scheiben, d.h. durch Integration in der x-Richtung zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$. Es gilt

$$\boxed{V = \iiint_{(V)} \mathrm{d}V = \int_{x=a}^{b} \mathrm{d}V_{\text{Scheibe}} = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.96}$$

Schwerpunkt eines Körpers

Die Berechnung des Schwerpunktes eines homogenen Körpers für die Schwerpunktkoordinaten x_S, y_S und z_S berechnet sich wie folgt

$$\boxed{x_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} x\,\mathrm{d}V} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} y\,\mathrm{d}V} \quad \boxed{z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} z\,\mathrm{d}V} \tag{7.97}$$

Somit handelt es sich um Dreifachintegrale. Die Schwerpunktkoordinaten in **kartesischen Koordinaten** sind

$$\boxed{x_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.98}$$

$$\boxed{y_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.99}$$

$$\boxed{z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.100}$$

Bei einem rotationssymmetrischen Körper liegt der Schwerpunkt S auf der Rotationsachse. Legt man das Koordinatensystem so, dass die Rotationsachse in die z-Achse fällt, dann gilt in der **Zylinderkoordinaten**

$$\boxed{x_S = 0} \quad \boxed{y_S = 0} \quad \boxed{z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.101}$$

Massenträgheitsmomente

Das Massenträgheitsmoment ist eine von der Masse und der räumliche Verteilung um die Drehachse physikalische Grösse. Definitionsgemäss liefert ein Massenelement $\mathrm{d}m$ des Körpers den infinitesimalen kleinen Beitrag zum Massenträgheitsmoment J des Gesamtkörpers, bezogen auf eine bestimmte Achse A, wobei r_A der senkrechte Abstand des Massen- bzw. Volumenelementes von der Bezugsachse A, ρ die konstante Dichte des Körpers mit $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$

$$\boxed{\mathrm{d}J = r_A^2\,\mathrm{d}m = r_A^2\,(\rho\,\mathrm{d}V) = \rho\,r_A^2\,\mathrm{d}V} \tag{7.102}$$

Für das Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers erhält man dann durch Aufsummieren, d.h. Integration der Gleichung folgende Integralformel

$$\boxed{J = \rho \cdot \iiint_{(V)} r_A^2\,\mathrm{d}V} \tag{7.103}$$

In **kartesischen Koordinaten**

$$\boxed{J = \rho \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \tag{7.104}$$

In **Zylinderkoordinaten** bezogen auf die Rotationsachse bzw. z-Achse

$$\boxed{J_z = \rho \cdot \iiint_{(V)} r^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.105}$$

8 GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

8.1 Grundbegriffe

8.1.1 Ein einführendes Beispiel

Ein Körper unter Einfluss der Schwerkraft erfährt in der Nähe der Erdoberfläche die konstante Erdbeschleunigung $a = -g$. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Bewegung lautet

$$\boxed{a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) - g} \tag{8.1}$$

Diese Gleichung enthält die 2. Ableitung einer unbekannten Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$. Gleichungen dieser Art werden in der Mathematik als Differentialgleichungen bezeichnet. Die Lösung der Differentialgleichung ist eine Funktion, nämlich die Weg-Zeit-Funktion der Fallbewegung und entsteht durch zweimal integrieren mit zwei unbekannten Parameter, welche mit einer physikalischen Nebenbedingung wie Anfangshöhe bzw. Anfangsgeschwindigkeit bestimmt werden können.

$$\boxed{v(t) = \int a(t)\ \mathrm{d}t = -\int g\,\mathrm{d}t = -gt + C_1} \quad \boxed{v(0) = C_1 = v_0} \tag{8.2}$$

$$\boxed{s(t) = \int v(t)\ \mathrm{d}t = \int (-gt + C_1)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2} \quad \boxed{s(0) = C_2 = s_0} \tag{8.3}$$

Die **allgemeine Löeung** geht dann in die spezielle, den physikalischen ANfangsbedingungen angepasste Lösung über, die auch als **partikuläre Lösung** der Differentialgleichung bezeichnet wird.

$$\boxed{s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t + s_0 \quad (t \geq 0)} \tag{8.4}$$

8.1.2 Definition einer gewöhnliche Differentialgleichung

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung** n-ter Ordnung enthält als höchste Ableitung die n-te Ableitung der unbekannten Funktion $y = y(x)$, kann aber auch Ableitungen niedrigerer Ordnung sowie die Funktion $y = y(x)$ und deren unabhängige Variable x enthalten. Sie ist in der impliziten Form oder falls diese Gleichung nach der höchsten Ableitung auflösbar ist in der expliziren Form

$$\boxed{F(x; y; y'; y''; \dots) = 0} \quad \boxed{y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots)} \tag{8.5}$$

Neben den gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es noch die partiellen Differentialgleichungen. Sie enthalten **partiellen Ableitungen** einer unbekannten Funktion von mehreren Variablen.

8.1.3 Lösungen einer Differentialgleichung

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen der Differentialgleichung identisch erfüllt. Man unterscheidet zwischen der allgemeinen Lösung und der speziellen oder partikulären Lösung. Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängige Parameter. Eine partikuläre Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund zusätzlicher Bedingungen den n Parametern feste Werte zuweist. Dies kann durch Anfangsbedingungen oder Randbedingungen geschehen.

Die Anzahl der unabhängigen Parameter in der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung ist durch die Ordnung der Differentialgleichung bestimmt. Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung enthält somit einen Parameter, die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung genau zwei unabhängige Parameter.

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung repräsentiert eine Kurvenschar mit n Parametern. Für jede spezielle Parameterwahl erhält man eine Lösungskurve. Die Lösungen einer Differentialgleichung werden als Integrale bezeichnet.

8.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

8.2.1 Geometrische Betrachtung

Die Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ besitze die Eigenschaft, dass durch jeden Punkt des Definitionsbereiches von $f(x; y)$ genau eine Lösungskurve verlaufe. $P_0 = (x_0; y_0)$ ist ein solcher Punkt und $y = y(x)$ die durch den Punkt P_0 gehende Lösungskurve.

Die Steigung $m = \tan(\alpha)$ der Kurventangejte P_0 kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden: Aus der Funktionsgleichung $y = y(x)$ der Lösungskurve durch Differentiation nach der Variablen x: $m = y'(x_0)$ und aus der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ selbst, indem man in diese Gleichung die Koordinaten des Punktes P_0 einsetzt: $m = f(x_0; y_0)$. Somit gilt

$$\boxed{m = y'(x_0) = f(x_0; y_0)} \tag{8.6}$$

Der Anstieg der Lösungskurve durch den Punkt P_0 kann somit direkt aus der Differentialgleichung berechnet werden, die Funktionsgleichung der Lösungskurve wird dabei überhaupt nicht benötigt. Durch die Differentiagleichung der Funktion $f(x; y)$ wird nämlich jedem Punkt $P = (x; y)$ aus dem Definitionsbereich der Funktion $f(x; y)$ ein Richtungs- oder Steigungswert zugeordnet. Er gibt den Anstieg der durch P gehenden Lösungskurve in diesem Punkt an.

Die Richtung der Kurventangente in P kennzeichnet man graphisch durch eine kleine, in der Tangente liegende Strecke, die als Linien- oder Richtungselement bezeichnet wird. Das dem Punkt $P = (x; y)$ zugeordnete Linienelement ist demnach durch die Angabe der beiden Koordinaten x, y

und des Steigungsswertes $m = f(x; y)$ eindeutig bestimmt. Die Gesamtheit der Linienelemente bildet das Richtungsfeld der Differentialgleichung, aus dem sich ein erster, grober Überblick über den Verlauf der Lösungskurven gewinnen lässt. Eine Lösungskurve muss dabei in jedem ihrer Punkte die durch das Richtungsfeld vorgegebene Steigung aufweisen.

Bei der Konstruktion von Näherungskurven erweisen sich die sogenannten Isoklinen als sehr hilfreich. Unter einer Isokline versteht man dabei die Verbindungslinie aller Punkte, deren zugehörige Linienelemente in die gleiche Richtung zeigen, d.h. zueinande rparallel sind. Die Isoklinen der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ sind daher durch folgende Gleichung definiert

$$\boxed{f(x; y) = \text{const.}} \tag{8.7}$$

Im Richtungsfeld der Differentialgleichung konstruiert man nun Kurven, die in ihren Schnittpunkten mit den Isoklinen den gleichen Anstieg besitzen wie die dortigen Linienelemente. In einem Schnittpunkt verlaufen somit Kurventangente und Linienelement parallel, d.h. das Linienelement fällt in die dortige Kurventangente. Kurven mit dieser Eigenschaft sind dann Näherungen für die tatsächlichen Lösungskurven.

8.2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(x)} \tag{8.8}$$

heisst separabel und lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Dabei wird die Differentialgleichung zunächst wie folgt, wobei $g(y) \neq 0$ umgestellt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\ \mathrm{d}x} \tag{8.9}$$

Die linke Seite der Gleichung enthält nur noch die Variable $y$und deren Differential dy, die rechte Seite dagegen nur noch die Variable x und deren Differential dx. Die Variablen wurden somit getrennt und beide Seiten integriert.

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\ \mathrm{d}x} \tag{8.10}$$

Die dann in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegende Lösung wird nach der Variablen y aufgelöst, was in den meisten Fällen möglich ist und man erhält die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ in der expliziten Form $y = y(x)$. Die Lösungen der Gleichung $g(y) = 0$ sind vom Typ $y = \text{const.} = a$ und zugleich dauch Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$.

8.2.3 Differentialgleichungen durch Substitution

In einigen Fällen ist es möglich, eine expliziten Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x; y)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine separable Differentialgleichung 1. Ordnung zurückzuführen, die dann durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

Eine Differentialgleichung von diesem Typ lässt sich durch die lineare Substitution lösen

$$\boxed{u = ax + by + c} \tag{8.11}$$

Dabei sind y und u als Funktionen von x zu betrachten. Berücksichtigt man noch, dass $y' = f(u)$ ist, so folgt hieraus die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + b \cdot f(u)} \tag{8.12}$$

Differentialgleichungen vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Eine Differentialgleichung von diesem Typ wird durch die Substitution gelöst

$$\boxed{u = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = x \cdot u} \tag{8.13}$$

Man differenziert diese Gleichung nach x und erhält

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}} \tag{8.14}$$

wobei y und u Funktionen von x sind. Da $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ ist, geht die Differentialgleichung schliesslich in die separable Differentialgleichung über, die ebenfalls durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Anschluessen folgt die Rücksubstitution und Auflösen nach y.

$$\boxed{u + x \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u) - u}{x}} \tag{8.15}$$

8.2.4 Exakte Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{g(x;y)}{h(x;y)}} \tag{8.16}$$

heisst **exakt** oder vollständig, wenn sie folgende Bedingung erfüllt

$$\boxed{\frac{\partial g(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x;y)}{\partial x}} \tag{8.17}$$

Die linke Seite der Gleichung ist dann das **totale Differential** einer unbekannten Funktion $u(x;y)$. Es gilt

$$\boxed{\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = h(x;y)\,\mathrm{d}x + g(x;y)\,\mathrm{d}y = 0} \tag{8.18}$$

Die Faktorfunktionen $g(x;y)$ und $h(x;y)$ in der exakten Differentialgleichung sind also die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $u(x;y)$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = g(x;y)} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = h(x;y)} \tag{8.19}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet dann in impliziter Form $u(x;y) = \text{const} = C$. Die Funktion $u(x;y)$ lässt sich aus den Gleichungen bestimmen. Die erste der beiden Gleichungen wird bezüglich der Variablen x integriert, wobei zu beachten ist, dass die Integrationskonstante K noch von y abhängen

$$\boxed{u = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \int g(x;y)\,\mathrm{d}x + K(y)} \tag{8.20}$$

Wenn man diese Funktion nach der Variable y partiell ableitet, erhält man die Faktorfunktion $h(x;y)$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int g(x;y)\,\mathrm{d}x + K(y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\int g(x;y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}K(y) \\ &= \int \frac{\partial g(x;y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x + K'(y) = h(x;y) \end{aligned}} \tag{8.21}$$

Aufgelöst nach $K'(y)$ und durch Integration erhält man die gesuchte Funktion $K(y)$. Damit ist auch $u(x;y)$ und die allgemeine Lösung der exakten Differentialgleichung bekannt.

8.2.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst **linear**, wenn sie in folgender Form darstellbar ist

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = g(x)} \tag{8.22}$$

Die Funktion $g(x)$ wird als **Störfunktion** bezeichnet. Ist $g(x) = 0$, so heisst die lineare Fifferentialgleichung **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

Eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = 0} \tag{8.23}$$

lässt sich durch Trennung der Variablen wie folgt lösen. Zunächst trennt man die beiden Variablen

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\ \ln\left|y\right| &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x + \ln\left|C\right| \\ y &= e^{C}\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (C\in\mathbb{R}) \end{aligned}} \tag{8.24}$$

Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = g(x)} \tag{8.25}$$

lässt sich wie folgt durch Variation der Konstanten lösen. Zunächst wird die zugehörige homogene Differentialgleichung durch Trennung der Variablen gelöst. Dies führt zu der allgemeinen Lösung. Die Integrationskonstante K wird durch eine noch unbekannte Funktion $K(x)$ ersetzt.

$$\boxed{y_0 = K\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} \quad \boxed{y = K(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} \tag{8.26}$$

Die inhomogene Differentialgleichung wird durch die 1. Ableitung unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel gelöst

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K(x)\right]\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - K(x)\cdot f(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}} \tag{8.27}$$

Man setzt für die für y und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ gefundenen Funktionsterme in die inhomogene Differentialgleichung ein

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K(x)\right]\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - K(x)\cdot f(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} + f(x)\cdot\underbrace{K(x)\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}}_{y} = g(x) \tag{8.28}$$

Somit erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K(x)\right]\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[K(x)\right] = g(x)\cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{8.29}$$

Durch Integration erfolgt

$$K(x) = \int g(x)\cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C \tag{8.30}$$

Diesen Ausdruck setzt man für die Faktorfunktion $K(x)$ des Lösungsansatzes ein und erhält dann die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y = \underbrace{\left[\int g(x)\cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]}_{K(x)}\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{8.31}$$

Durch die Bezeichnung "Variation der Konstantenßoll zum Ausdruck gebracht werden, dass die Integrationskonstante K "variiert", d.h. durch eine Funktion $K(x)$ ersetzt wird.

Integration der inhomogenen Differentialgleichung durch Aufsuchen einer partikulären Lösung

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = g(x) \tag{8.32}$$

ist als Summe aus der allgemeinen Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\cdot y = 0 \tag{8.33}$$

und einer beliebigen partikulären Lösung $y_p = y_p(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung darstellbar

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) \qquad y_0 = C\cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} \quad (C\in\mathbb{R}) \tag{8.34}$$

Auch lineare Differentialgleichung 2. und höherer Ordnung besitzen diese Eigenschaft. Der Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung y_p hängt noch sowohl vom Typ der Koeffizientenfunktion $f(x)$ als auch vom Typ der Störfunktion $g(x)$ ab. Man muss sich für einen speziellen Funktionstyp entscheiden und dann versuchen, die im Ansatz y_p enthaltenen Parameter so zu bestimmen, dass diese Funktion der inhomogenen Differentialgleichung genügt. Der partikuläre Lösungsansatz y_p wird in die ursprüngliche lineare Differentialgleichung eingesetzt und die Parameter ausgerechnet.

8.2.6 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In den Anwendungen spielen lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten iene besondere Rolle. Sie sind vom Typ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = g(x) \tag{8.35}$$

Die zugehörige homogene Gleichung enthält nur konstante Koeffizienten und wird durch Trennung der Variablen oder durch den Exponentialansatz gelöst.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0 \qquad y_0 = C\cdot e^{\lambda x} \qquad y_0' = \lambda\cdot C\cdot e^{\lambda x} \tag{8.36}$$

Mit diesem Ansatz geht man in die homogene Differentialgleichung ein und erhält eine Bestimmungsgleichung für den Parameter λ

$$y_0' + ay_0 = \lambda\cdot C\cdot e^{\lambda x} + a\cdot C\cdot e^{\lambda x} = \underbrace{(\lambda + a)}_{0}\cdot C\cdot e^{\lambda x} = 0 \Longrightarrow \lambda = -a \tag{8.37}$$

Die homogene Differentialgleichung $y' + ay = 0$ besitzt also die allgemeine Lösung

$$y_0 = C\cdot e^{-ax} \quad (C\in\mathbb{R}) \tag{8.38}$$

Folgende Tabelle zeigt die Lösungsansätze y_p für einige in den Anwendungen besonders häufig auftretende Störfunktionen

Störfunktion $g(x)$	**Lösungsansatz** $y_p(x)$
Konstante Funktion	$y_p = c_0$
Lineare Funktion	$y_p = c_1 x + c_0$
Quadratische Funktion	$y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
Polynomfunktion vom Grade n	$y_p = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$
$g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$ $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$ $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
$g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} \text{ für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} \text{ für } b = -a \end{cases}$

Tab. 8.1: Lösungsansatz für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die im Lösungsansatz y_p enthaltenen Parameter sind so zu bestimmen, dass die Funktion eine partikuläre Lösung der vorgegebenen inhomogenen Differentialgleichung darstellt. Bei einem richtig gewählten Ansatz stösst man stets auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem für die im Lösungsansatz enthaltenen Stellparameter.

Die Störfunktion $g(x)$ ist eine Summe aus mehreren Störgliedern, somit werden die Lösungsansätze für die einzelnen Glieder addiert. Die Störfunktion $g(x)$ ist ein Produkt aus mehreren Störgliedern, somit werden die einzelnen Gliedern multipliziert.

8.3 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

8.3.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = g(x)} \tag{8.39}$$

heisst lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $(a, b \in \mathbb{R})$. Die Funktion $g(x)$ wird als Störfunktion oder Störglied bezeichnet. Fehlt das Störglied, so heisst die lineare Differentialgleichung homogen, sonst inhomogen.

8.3.2 Allgemeine Eigenschaft der homogenen linearen Differentialgleichung

Eine homogene lineare Differentialgleichung vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0} \tag{8.40}$$

besitzt folgende Eigenschaften

- Ist $y_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist auch die mit einer beliebigen Konstanten C multiplizierte Funktion eine Lösung der Differentialgleichung $(C \in \mathbb{R})$

$$\boxed{y(x) = C \cdot y_1(x)} \quad \boxed{y'(x) = C \cdot y_1'(x)} \quad \boxed{y''(x) = C \cdot y_1''(x)} \tag{8.41}$$

- Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung, so ist auch die aus ihnen gebildete Linearkombination eine Lösung der Differentialgleichung $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)} \quad \boxed{y'(x) = C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x)} \tag{8.42}$$

$$\boxed{y''(x) = C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x)} \tag{8.43}$$

- Ist $y(x)$ eine komplexwertige Lösung der Differentialgleichung, so sind auch Realteil $u(x)$ und Imaginärteil $v(x)$ reelle Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y(x) = u(x) + \mathrm{j} \cdot v(x)} \quad \boxed{y'(x) = u'(x) + \mathrm{j} \cdot v'(x)} \quad \boxed{y''(x) = u''(x) + \mathrm{j} \cdot v''(x)} \tag{8.44}$$

Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0} \tag{8.45}$$

werden als Basisfunktionen oder Basislösungen der Differentialgleichung bezeichnet, wenn die aus ihnen gebildete sog. **Wronski-Determinante** von Null verschieden ist

$$\boxed{W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \tag{8.46}$$

Die Wronski-Determinante ist eine 2-reihige Determinante. Sie enthält in der 1. Zeile die beiden Lösungsfunktionen y_1 und y_2 und in der 2. Zeile deren Ableitungen y_1' und y_2'. Man beachte, dass der Wert der Wronski-Determinante noch von der Variablen x abhängt. Es genügt zu zeigen, dass die Wronski-Determinante an einer Stelle x_0 vom Null verschieden ist.

Zwei Basislösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der homogenen Differentialgleichung werden auch als linear unabhängige Lösungen bezeichnet. Verschwindet dagegen die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1 und y_2, so werden die Lösungen als linear abhängig bezeichnet.

Die Konstanten im Lösungsansatz müssen eindeutig aus Anfangsbedingungen bestimmbar sein. Mit den Anfangsbedingungen erhält man ein lineares Gleichungssystem. Das System hat genau eine Lösung, wenn die Wronski-Determinante an der Stelle x_0 von Null verschieden ist.

8.3.3 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

Eine Fundamentalbasis der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0} \tag{8.47}$$

lässt sich durch einen Lösungsansatz in Form einer Exponentialfunktion mit Parameter λ vom Typ

$$\boxed{y = e^{\lambda x}} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda \cdot e^{\lambda x}} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}} \tag{8.48}$$

Eingesetzt in die lineare Differentialgleichung erhält man die charakteristische Gleichung der homogenen Gleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + a\lambda \cdot e^{\lambda x} + b \cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) = 0} \tag{8.49}$$

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0} \quad \boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \tag{8.50}$$

Die Diskriminante $a^2 - 4b$ entscheidet dabei über die Art der Lösungen

- Fall $a^2 - 4b < 0$: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\boxed{y_1 = e^{\lambda_1 x}} \quad \boxed{y_2 = e^{\lambda_2 x}} \quad \boxed{y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}} \tag{8.51}$$

- Fall $a^2 - 4b < 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = c$

$$\boxed{y_1 = e^{cx}} \quad \boxed{y_2 = x \cdot e^{cx}} \quad \boxed{y = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{cx}} \tag{8.52}$$

- Fall $a^2 - 4b > 0$: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{j}\omega$

$$\boxed{y_1 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x)} \quad \boxed{y_2 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x)} \quad \boxed{y = e^{\alpha x} \cdot \left[C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)\right]} \tag{8.53}$$

Die charakteristische Gleichung hat dieselben Koeffizienten wie die homogene Differentialgleichung.

8.3.4 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = g(x)} \tag{8.54}$$

ist als Summe aus der allgemeinen Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0} \tag{8.55}$$

und einer beliebigen partikulären Lösung $y_p = y_p(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x)} \tag{8.56}$$

Störfunktion $g(x)$	**Lösungsansatz** $y_p(x)$
$g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & \text{für } b \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) & \text{für } a \neq 0 \text{ und } b = 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & \text{für } a = b = 0 \end{cases}$
$g(x) = e^{cx}$	$y_p = \begin{cases} A \cdot e^{cx} & \text{für } c \text{ keine Lösung der ch. Gleichung} \\ Ax \cdot e^{cx} & \text{für } c \text{ eindeutige Lösung der ch. Gleichung} \\ Ax^2 \cdot e^{cx} & \text{für } c \text{ doppelte Lösung der ch. Gleichung} \end{cases}$
$g(x) = \sin(\beta x) + \cos(\beta x)$	$y_p = \begin{cases} A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x) & \text{für j}\beta \text{ keine Lösung} \\ C \cdot \sin(\beta x + \varphi) & \text{für j}\beta \text{ keine Lösung} \end{cases}$ $y_p = \begin{cases} x \cdot \left[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)\right] & \text{für j}\beta \text{ eindeutige Lösung} \\ C \cdot x \cdot \sin(\beta x + \varphi) & \text{für j}\beta \text{ eindeutige Lösung} \end{cases}$
$g(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ $g(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$	Für jβ keine Lösung $y_p = e^{cx} \cdot \left[Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)\right]$ Für jβ eindeutige Lösung $y_p = x \cdot e^{cx} \cdot \left[Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)\right]$

Tab. 8.2: Lösungsansatz für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten