

TECHNOSUP

Les FILIÈRES TECHNOLOGIQUES des ENSEIGNEMENTS SUPÉRIEURS



TRAITEMENT DU SIGNAL

Signaux temporels et spatiotemporels

Analyse des signaux, théorie de l'information,
traitement d'antenne, séparation aveugle de sources

Yannick DEVILLE

Professeur des universités
Université Paul Sabatier Toulouse



Chapitre 7

Position du problème

7.1 Système considéré

Le traitement d'antenne est une branche du traitement du signal, centrée sur une situation qui peut être définie de la manière suivante. On dispose d'un ensemble de capteurs, appelé « réseau de capteurs », « antenne réseau » ou « antenne » (voir Figure 7.1). Ces capteurs sont de même nature : on n'étudie pas ici le domaine de la fusion de données provenant de capteurs de types différents. Les capteurs considérés sont plongés dans un champ, qui peut être un champ acoustique, sismique ou électromagnétique : nous y reviendrons plus loin dans ce chapitre, en présentant divers domaines d'application des méthodes que nous allons tout d'abord définir. Ces capteurs reçoivent ainsi des ondes progressives provenant souvent de diverses sources. Ils sont situés à des emplacements différents et chacun d'eux convertit le champ au point qu'il occupe en un signal électrique. Ces capteurs réalisent ainsi une mesure spatiotemporelle du champ considéré, comme annoncé en Section 6.4.

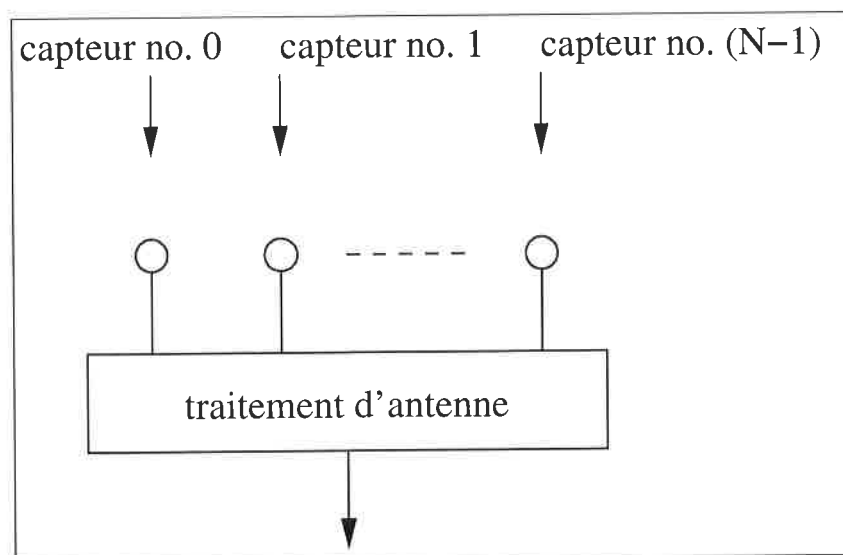


FIG. 7.1 – Réseau de capteurs (chaque capteur est représenté par un pictogramme en forme de cercle) et dispositif appliquant une méthode de traitement d'antenne aux signaux de capteurs.

Les signaux fournis par ces capteurs sont appliqués à un dispositif, qui combine ces signaux (voir Figure 7.1). Les méthodes utilisées dans ce dispositif sont appelées « méthodes de traitement d'antenne ». Le terme « antenne » est employé pour désigner le réseau de capteurs défini ci-dessus, mais aussi le système complet composé de ces capteurs et du dispositif de traitement qui combine les signaux fournis par ces capteurs.

7.2 Objectif

Le système défini ci-dessus exploite la structure des ondes progressives reçues par ses capteurs. Il peut ainsi réaliser différentes fonctionnalités, suivant la manière dont on combine les signaux issus de ces capteurs. Plusieurs fonctionnalités concernent l'extraction et la caractérisation des sources présentes :

1. le système peut fournir un ou plusieurs signaux de sortie. Il permet alors d'améliorer le « rapport signal/bruit »¹ par comparaison à celui obtenu à l'aide d'un unique capteur, voire de séparer complètement diverses composantes d'un signal (pour le type de signaux considéré dans cette Partie II de l'ouvrage).
2. Il permet de déterminer des caractéristiques d'un ou plusieurs signaux sources, en assurant par exemple les fonctions suivantes :
 - détection de présence de sources.
 - Exemple** Les radars et sonars servent à détecter des cibles ou obstacles.
 - Détermination du nombre de sources.
 - Estimation des positions géographiques des sources (direction, voire distance).
 - Estimation des vitesses des sources.
 - Estimation des spectres des sources.

Parmi les fonctionnalités définies ci-dessus, cet ouvrage concerne en particulier le rehaussement des signaux utiles et l'estimation des directions dans lesquelles se trouvent les sources par rapport au réseau de capteurs.

7.3 Méthodes actives et passives

On distingue deux cas, suivant l'origine des ondes reçues par l'antenne définie ci-dessus :

1. Traitement d'antenne actif

Un système actif émet une onde de forme connue et reçoit des échos renvoyés par les différents obstacles ou cibles présents dans le milieu.

Exemples : radar et sonar actifs.

2. Traitement d'antenne passif

Les systèmes passifs ne possèdent pas d'émetteur, mais détectent les émissions propres des cibles : ils réalisent une « écoute passive ». Dans ce cas, les signaux émis sont généralement inconnus.

Exemples :

- en électromagnétisme : radars passifs, écoute de transmissions ou de sources astronomiques,
- en acoustique : sonar passif (écoute du bruit propre rayonné par les navires).

7.4 Domaines d'application

Certaines applications des méthodes de traitement d'antenne ont été évoquées ci-dessus. On complète ici ce point, à l'aide d'un bref panorama d'applications typiques de ces approches, opérant en mode actif ou passif, et qui concernent trois domaines d'application majeurs de ces méthodes :

1. les applications en acoustique couvrent plusieurs sous-branches de ce domaine. En particulier :

(a) en acoustique sous-marine, les capteurs formant le réseau de capteurs de l'antenne sont des hydrophones. Ils sont inclus dans des systèmes sonars, qui donnent par exemple lieu aux applications suivantes :

- en mode actif : localisation de cibles (mines...), échosondage,
- en mode passif : localisation de mobiles (sous-marins...).

(b) L'acoustique aérienne met en jeu des réseaux de microphones. Elle concerne par exemple les applications suivantes :

¹Ce paramètre est calculé en divisant la puissance de la composante utile (ou « signal ») présente dans le signal complet considéré par la puissance de sa composante indésirable (ou « bruit »).

- en mode actif : surveillance (alarmes),
 - en mode passif : téléphones mains libres, sources de bruit industrielles.
2. Dans le domaine de la sismique et de la sismologie, les applications incluent :
- en mode actif : prospection pétrolière,
 - en mode passif : surveillance de séismes, d'explosions souterraines (essais nucléaires).
3. Enfin, en électromagnétisme, les méthodes de traitement d'antenne trouvent des applications telles que :
- en mode actif : radar de surveillance (pour la localisation d'avions, par exemple), télécommunications,
 - en mode passif : radar passif, télécommunications (écoute de transmissions), radio-astronomie.
- Exemple** Le radio-télescope « Very Large Array » (VLA) au Nouveau Mexique (Etats-Unis) est constitué de 27 réflecteurs paraboliques de 25 m. Ce réseau de capteurs forme un Y, dont deux branches ont une longueur égale à 21 km et la troisième branche mesure 19 km.

7.5 Conclusions et extensions

Dans ce chapitre, nous avons défini le problème qui fait l'objet de la Partie II de cet ouvrage. Nous avons aussi présenté un court panorama des applications associées, qui illustre la variété des configurations relevant du domaine du traitement d'antenne. Cette diversité concerne la nature des signaux traités, mais aussi la complexité et le coût des réseaux de capteurs mis en jeu (et des systèmes de traitement associés), qui vont typiquement de quelques microphones à un ensemble de télescopes !

Malgré cette diversité, un formalisme mathématique unique s'appliquant à bon nombre de ces configurations peut être développé moyennant quelques restrictions, consistant par exemple à se placer dans des conditions permettant de réduire le champ vectoriel électromagnétique à une forme scalaire, séparément pour chacune de ses composantes (voir Chapitre 8). Les chapitres 8 à 10 ont pour objectif de présenter ce formalisme générique et les méthodes de traitement d'antenne qui en découlent, sans se focaliser explicitement sur un des domaines d'application mentionnés ci-dessus.

Chapitre 8

Signaux spatiotemporels et antennes

Dans ce chapitre et les deux suivants, on suit la chaîne de transmission et de traitement définie au Chapitre 7, c.-à-d. on étudie successivement les signaux émis et reçus, les capteurs qui convertissent ces signaux et le dispositif de traitement d'antenne. Dans ce chapitre-ci, on introduit les notions de base de ce domaine.

8.1 Signaux spatiotemporels

8.1.1 Définition

Un signal spatiotemporel est un signal fonction de la position et du temps. En coordonnées cartésiennes, il est noté $s(x, y, z, t)$ ou $s(\vec{x}, t)$, où \vec{x} est le vecteur position, dont les composantes sont les coordonnées x, y, z relativement à un repère fixé.

8.1.2 Equation d'onde

Comme indiqué au chapitre précédent, le champ mesuré ici par les capteurs résulte d'ondes progressives. Il est donc fonction de la position et du temps, c.-à-d. il définit un signal spatiotemporel. De plus, il vérifie : (i) l'équation d'onde décrivant la physique de la propagation dans le milieu considéré, et (ii) des conditions aux limites qui dépendent de la configuration étudiée. On considère ici la propagation dans un milieu infini. On n'aura donc pas à prendre en compte de conditions aux limites.

En particulier, pour un champ scalaire $s(\vec{x}, t)$, l'équation d'onde prend la forme suivante dans les cas « simples » :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (8.1)$$

où c est une constante réelle égale à la vitesse de propagation dans le milieu considéré, qui est supposé homogène. Cette équation d'onde scalaire s'applique par exemple aux cas suivants :

- acoustique en milieu fluide sans viscosité,
- des cas importants¹ en électromagnétisme, pour lesquels chaque composante des champs électriques et magnétiques satisfait séparément l'équation ci-dessus.

Dans ces deux cas, la constante c représente donc respectivement la vitesse de propagation des ondes acoustiques ou électromagnétiques dans le milieu considéré.

8.1.3 Solutions particulières de l'équation d'onde

¹Ce résultat s'applique en particulier au cas suivant [9]. On considère un milieu homogène, à propriétés diélectriques, magnétiques et de conduction isotropes et linéaires, ce milieu étant sans charges vraies en volume. De plus, on se restreint à un milieu qui est soit le vide, soit un diélectrique sans pertes ohmiques ($\sigma = 0$).

Onde plane progressive monochromatique

Soit un signal spatio-temporel exponentiel complexe², défini par :

$$s(\vec{x}, t) = Ae^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \quad (8.2)$$

$$= Ae^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (8.3)$$

avec les constantes suivantes : A est une amplitude complexe, ω est une pulsation réelle, \vec{k} est un vecteur à composantes réelles (k_x, k_y, k_z), dont on verra plus bas la signification. En insérant (8.2) dans l'équation d'onde (8.1), on obtient :

$$k_x^2 s(\vec{x}, t) + k_y^2 s(\vec{x}, t) + k_z^2 s(\vec{x}, t) = \frac{\omega^2}{c^2} s(\vec{x}, t), \quad (8.4)$$

et donc :

$$||\vec{k}||^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (8.5)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$||\vec{k}|| = \frac{|\omega|}{c}. \quad (8.6)$$

Un signal de la forme (8.2) est donc solution de l'équation d'onde (8.1) si et seulement si il vérifie (8.6). Ce type de solution de l'équation d'onde est appelé onde plane progressive monochromatique³. $||\vec{k}||$ et \vec{k} sont respectivement appelés nombre d'onde et vecteur d'onde. Le vecteur \vec{k} définit la direction de propagation de l'onde. La période temporelle de l'onde est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8.7)$$

et la distance parcourue dans la direction de propagation par l'onde durant une période temporelle est la longueur d'onde λ , qui vérifie :

$$\lambda = \frac{2\pi}{||\vec{k}||}. \quad (8.8)$$

La quantité ω peut être qualifiée de « caractéristique fréquentielle temporelle », c.-à-d. de caractéristique définissant la fréquence (plus précisément la pulsation associée) de variation du signal (en un point) en fonction du temps. De la même façon, \vec{k} est une « caractéristique fréquentielle spatiale » :

- dans la direction de propagation, $||\vec{k}||$ est le nombre de cycles (en radians) que l'onde présente par unité de longueur : c'est la transposition du rôle que joue ω en temporel, comme le montre le parallélisme entre (8.7) et (8.8).
On notera que $||\vec{k}||$ « inclut un facteur 2π », c.-à-d. $||\vec{k}|| = \frac{2\pi}{\lambda}$, comme ω qui vérifie : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Par conséquent, $||\vec{k}||$ s'identifie à une pulsation et non à une fréquence. On sous-entendra cette nuance dans la suite de cet ouvrage et on qualifiera donc $||\vec{k}||$ de caractéristique *fréquentielle* (spatiale).
- Le contenu fréquentiel spatial des ondes doit être représenté par rapport à toutes les dimensions spatiales, c.-à-d. à l'aide d'un vecteur : \vec{k} joue ce rôle.

Le signal considéré ici peut aussi être exprimé comme fonction d'une seule variable, qui combine les variables spatiale et temporelle. En effet, d'après (8.3), on a :

$$s(\vec{x}, t) = Ae^{j\omega(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x})} \quad (8.9)$$

avec :

²Dans cette partie aussi, on note j « la » racine carrée complexe de -1.

³Pour une justification de cette appellation, voir par exemple [1] p. 13. En particulier, le terme « monochromatique » signifie « à une couleur » et rejoint les commentaires que nous avons fournis au Chapitre 2 à propos de l'appellation « coefficients spectraux » aussi employée pour les coefficients de Fourier : le signal observé ici en un unique point de l'espace est un signal temporel contenant une composante à une unique fréquence, associée à une unique couleur dans le cas de la lumière visible.

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{k}}{\omega} \quad (8.10)$$

On en déduit :

$$s(\vec{x}, t) = s'(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x}) \quad (8.11)$$

avec :

$$s'(u) = Ae^{j\omega u} \quad (8.12)$$

L'équation (8.11) permet donc de réexprimer le signal $s(\vec{x}, t)$ comme fonction de l'unique variable $(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x})$, qui lie l'espace et le temps. De plus, d'après (8.6) et (8.10), on a :

$$\|\vec{\alpha}\| = \frac{1}{c} \quad (8.13)$$

$\|\vec{\alpha}\|$ est donc l'inverse d'une vitesse. De ce fait, $\vec{\alpha}$ est parfois appelé vecteur de lenteur [1].

Onde plane progressive (non monochromatique)

Toute superposition⁴ de solutions de l'équation d'onde (8.1) est aussi solution de cette équation, car cette équation est linéaire. En particulier, on superpose ici les solutions exponentielles complexes vues ci-dessus, c.-à-d. les ondes planes progressives monochromatiques, ayant des pulsations caractéristiques ω différentes et se propageant dans la même direction définie par $\vec{\alpha} = c\vec{k}/\omega$. D'après (8.10), les valeurs de \vec{k} correspondantes diffèrent, mais seulement en norme, pas en direction.

On peut ainsi construire des superpositions discrètes (avec $\omega = n\omega_0$: séries de Fourier, voir Chapitre 2) ou continues (intégrales de Fourier) des solutions précédentes. Le nouveau type de solution de l'équation d'onde ainsi obtenu est appelé onde plane progressive. En particulier, les superpositions continues sont les signaux :

$$s(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x})} d\omega \quad (8.14)$$

On notera que ces signaux sont aussi des fonctions de l'unique variable $(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x})$, qui lie l'espace et le temps. On peut donc aussi les exprimer suivant :

$$s(\vec{x}, t) = s'(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x}) \quad (8.15)$$

La fonction s' est ici « arbitraire » (sous réserve que son intégrale de Fourier converge). La forme de l'onde considérée peut donc être quelconque.

La fonction s' est respectivement périodique ou apériodique, suivant que l'onde est obtenue par superposition discrète (avec $\omega = n\omega_0$) ou continue d'exponentielles complexes. Dans le cas d'une superposition continue, la représentation fréquentielle $S(\omega)$ de la fonction s' est donnée par la transformation de Fourier :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s'(u) e^{-j\omega u} du \quad (8.16)$$

Dans (8.14), on a considéré une transformation (inverse) de Fourier « temporelle » uniquement. En effet, on réalise une superposition « temporelle », non pas spatiale, c.-à-d. une superposition de signaux définis par (8.11)-(8.12) et correspondant à différentes valeurs de la « pulsation temporelle » ω mais au même vecteur $\vec{\alpha}$, donc à la même direction de propagation. C'est grâce à cette approche que le signal ainsi obtenu peut aussi s'écrire $s'(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x})$ (c.-à-d. fonction d'une seule variable) et est donc une onde plane, se propageant dans la direction définie par $\vec{\alpha}$. Au contraire, ci-dessous, on va considérer un cadre plus général, mettant en jeu des intégrales sur toutes les valeurs de \vec{k} et ω . On va ainsi définir une transformation de Fourier spatiotemporelle (inverse) et s'intéresser à des signaux qui ne sont pas nécessairement des ondes planes.

⁴Par « superposition », on entend ici « combinaison linéaire », comme en Section 2.3.

Le cas particulier des ondes planes est important pour la raison suivante. Les sources de signaux (par opposition aux sources de bruit) sont souvent ponctuelles et omnidirectionnelles, c.-à-d. elles rayonnent de l'énergie de la même façon dans toutes les directions. Leur rayonnement peut être modélisé par des ondes planes « en champ lointain », c.-à-d. à grande distance de ces sources (au contraire, elles génèrent des ondes sphériques en champ proche). Dans cet ouvrage, on considère seulement des configurations en champ lointain. On utilise donc largement le modèle d'ondes planes introduit ci-dessus.

8.2 Espace vecteur d'onde - pulsation temporelle

8.2.1 Transformation de Fourier des signaux spatiotemporels

Pour les signaux purement temporels, en plus de leur représentation temporelle, on définit une représentation fréquentielle duale à l'aide de la transformation de Fourier monodimensionnelle. L'expression de cette transformation et ses propriétés fondamentales ont été rappelées au Chapitre 2. Par extension, pour des signaux multidimensionnels, on définit une transformation de Fourier multidimensionnelle. En particulier, pour les signaux spatiotemporels qu'on vient d'introduire, on va maintenant définir une transformation de Fourier de dimension 4.

Ainsi, la transformée de Fourier d'un signal spatiotemporel $s(\vec{x}, t)$ « quelconque »⁵ (c.-à-d. pas nécessairement une onde plane) a pour expression :

$$S(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\vec{x}, t) e^{-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} d\vec{x} dt \quad (8.17)$$

où \vec{k} et ω sont les variables fréquentielles spatiale et temporelle, respectivement duales des variables \vec{x} et t . Il est sous-entendu dans l'expression (8.17) que la première intégrale, qui porte sur \vec{x} , est une intégrale triple. Ce type de notation est aussi utilisé dans la suite de cet ouvrage, pour les intégrations sur \vec{x} ou \vec{k} , comme par exemple dans (8.18).

Inversement, « tout » signal spatiotemporel s'exprime par la transformation de Fourier inverse :

$$s(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\vec{k}, \omega) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} d\vec{k} d\omega. \quad (8.18)$$

Le choix des signes des variables \vec{k} et ω dans les exponentielles intervenant dans (8.17) et (8.18) est une convention. On prend ici des signes différents parce qu'on s'intéresse aux ondes progressives [1].

L'expression (8.18) peut être interprétée de la manière suivante : « tout » signal spatiotemporel est la superposition d'une infinité d'ondes planes.

8.2.2 Filtrage dans l'espace vecteur d'onde - pulsation temporelle

On a rappelé au Chapitre 2 la notion de filtre relative aux signaux temporels, qui concerne les systèmes linéaires temporellement invariants (et continus). Cette notion s'étend aux signaux spatiotemporels. Ainsi, un filtre spatiotemporel est essentiellement un système de dimension 4, linéaire, invariant spatialement et temporellement. On peut alors montrer que les paramètres qui le caractérisent sont similaires à ceux du cas monodimensionnel. Ses principaux paramètres sont en effet les suivants :

- sa réponse impulsionnelle $h(\vec{x}, t)$ est égale à la sortie de ce filtre quand il reçoit en entrée l'impulsion spatiotemporelle de Dirac à l'origine, c.-à-d. $\delta(\vec{x})\delta(t)$.
Quand le filtre reçoit une entrée $s(\vec{x}, t)$ quelconque, sa sortie $y(\vec{x}, t)$ est définie par l'intégrale de convolution en dimension 4 :

$$y(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vec{x} - \vec{\xi}, t - \tau) s(\vec{\xi}, \tau) d\vec{\xi} d\tau. \quad (8.19)$$

⁵Pour des informations plus détaillées sur l'existence de la transformée de Fourier directe et inverse d'un signal, de manière générale ou en lien avec le contexte de ce chapitre, le lecteur pourra par exemple se référer à [1] (Chapitre 2) ou [5], en plus du Chapitre 2 du présent ouvrage.

s de signaux
c.-à-d. elles
nt peut être
sources (au
on considère
ondes planes

- La réponse fréquentielle $H(\vec{k}, \omega)$ du filtre est égale à la transformée de Fourier spatiotemporelle de $h(\vec{x}, t)$.
L'équation d'entrée/sortie (8.19) du filtre conduit alors à la relation suivante entre les spectres⁶ des signaux :

$$Y(\vec{k}, \omega) = S(\vec{k}, \omega)H(\vec{k}, \omega). \quad (8.20)$$

e, on définit
odimension-
appelées au
ormation de
ient d'intro-
(c.-à-d. pas

De tels filtres permettent en particulier de séparer des composantes d'un signal spatiotemporel en sélectionnant celles situées à certaines fréquences temporelles et/ou se propageant dans certaines directions, tout en filtrant le bruit et les sources d'interférences. En effet, on pourra tout d'abord réaliser des filtres présentant un gain $H(\vec{k}, \omega)$ conséquent uniquement dans une bande de pulsations temporelles ω correspondant à la bande couverte par le signal utile qu'on souhaite rehausser par rapport aux signaux émis par d'autres sources ponctuelles ou par des sources de bruit. De même, considérons des signaux solutions de l'équation d'onde introduite plus haut et correspondant à une valeur de ω fixée. Alors, $\|\vec{k}\|$ est fixée, d'après (8.6). Le seul degré de liberté sur \vec{k} est donc sa direction. Par conséquent, un filtre présentant un gain $H(\vec{k}, \omega)$ conséquent uniquement pour certaines valeurs de pulsation spatiale \vec{k} ne laissera passer que les signaux se propageant suivant les directions correspondantes. Il permettra ainsi de rehausser un signal utile se propageant suivant ces directions, par rapport aux signaux émis par d'autres sources ponctuelles dans d'autres directions ou par des sources de bruit. On va voir des algorithmes de traitement d'antenne qui réalisent de tels filtres dans la section ci-dessous, ainsi que dans les chapitres suivants de cet ouvrage.

8.3 Antenne

Le terme « antenne » est ici pris dans ses deux sens définis au Chapitre 7. En effet, on présente ci-dessous les notions de base et notations concernant : (i) le réseau de capteurs et (ii) un type particulier d'antenne au sens du système complet (capteurs + traitement). Plus précisément, on introduit ici le système le plus simple qu'on peut construire à partir d'un réseau de capteurs et on calcule sa réponse à un signal simple, c.-à-d. à une onde plane non bruitée. Cette étude permet d'introduire des principes qui sont largement utilisés dans le domaine du traitement d'antenne.

8.3.1 Capteurs et signaux associés

Réseau de capteurs

On considère le réseau représenté en Figure 8.1. Il est formé de N capteurs ponctuels, repérés par un indice i variant de 0 à $N - 1$. Pour simplifier l'étude, on se limite pour l'instant au cas où les capteurs vérifient les propriétés suivantes :

- ils sont identiques et ont un comportement linéaire.
- Ils sont omnidirectionnels, c.-à-d. la réponse de chacun d'eux est indépendante de la direction de l'onde qu'il reçoit. Cette réponse est aussi indépendante de la pulsation ω . Chaque capteur a donc un gain constant, qu'on prend ici égal à 1 uniquement afin d'alléger la présentation. Il y a alors égalité entre la valeur de l'onde reçue par un capteur à un instant quelconque et la valeur du signal fourni par ce capteur à cet instant⁷.
- Ils sont alignés sur un axe, noté OX. L'antenne est alors dite linéaire.
- Ils sont équidistants. On note d la distance séparant deux capteurs adjacents. Leurs abscisses sur l'axe OX sont 0, d , \dots $(N - 1)d$, respectivement pour les capteurs d'indices 0, 1, \dots $(N - 1)$.

⁶On considère ici les spectres, tels que $S(\vec{k}, \omega)$, dans l'espace vecteur d'onde - pulsation temporelle, ou espace (\vec{k}, ω) . Ceci généralise la notion de spectre monodimensionnel associé à la seule variable ω , que nous avons définie au Chapitre 2 pour les signaux temporels.

⁷On sous-entend ici le fait que les grandeurs physiques associées au champ et au signal de capteur considéré peuvent être de natures différentes et donc exprimées avec des unités différentes : on considère ici les grandeurs sans dimension associées, en lien avec les commentaires qu'on a faits au Chapitre 2 sur les unités des signaux.

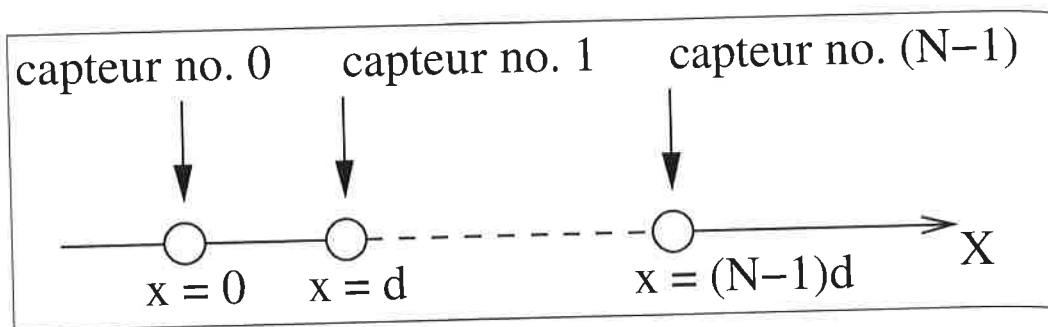


FIG. 8.1 - Réseau de capteurs équidistants.

Signal reçu

Chaque signal temporel fourni par un capteur d'indice i est noté $r_i(t)$. Au total, le vecteur signal fourni par les capteurs de l'antenne a pour expression dans le domaine temporel :

$$r(t) = [r_0(t), r_1(t), \dots, r_{N-1}(t)]^T, \quad (8.21)$$

comme indiqué en Figure 8.2. Le symbole T dans l'équation (8.21) représente la transposition. $r(t)$ est donc un vecteur colonne. Ici, on considère uniquement le cas particulier où le signal reçu est une onde plane, se propageant dans un milieu homogène de vitesse de propagation c , suivant la direction θ par rapport à l'axe OX. On a alors :

$$r(t) = [r_0(t), r_0(t + \tau), \dots, r_0(t + (N-1)\tau)]^T \quad (8.22)$$

avec

$$\tau = \frac{d \cos \theta}{c} \quad (8.23)$$

où τ est le décalage temporel entre les signaux fournis par deux capteurs adjacents. Ce décalage est lié à la propagation de l'onde plane reçue.

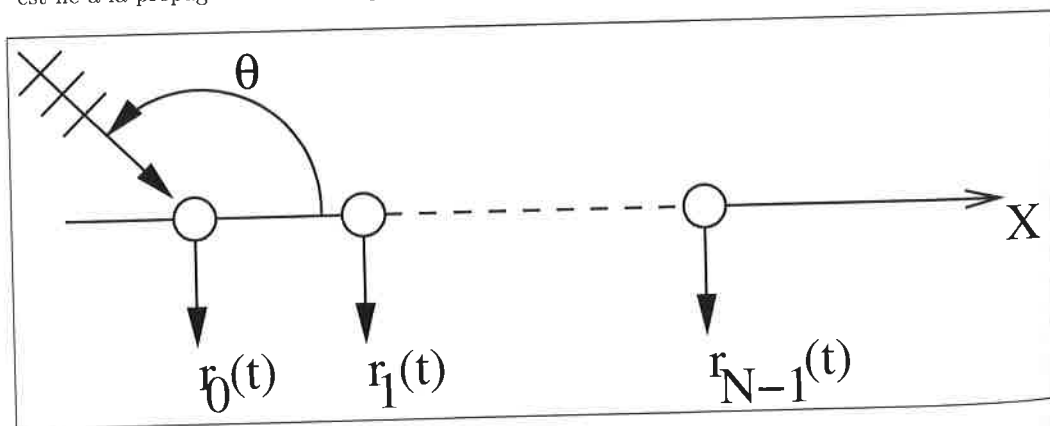


FIG. 8.2 - Onde plane reçue par l'antenne et signaux issus des capteurs.

■ — Démonstration de (8.22)-(8.23)

On a vu en Section 8.1.3 qu'une onde plane se propageant suivant la direction θ peut se mettre sous la forme

$$s(\vec{x}, t) = s'(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x}), \quad (8.24)$$

où $\vec{\alpha}$ est orienté suivant la direction de propagation et vérifie

$$\|\vec{\alpha}\| = \frac{1}{c}. \quad (8.25)$$

Pour tout point situé à une abscisse x sur l'axe OX, on a

$$\vec{x} = x\vec{u}_x, \quad (8.26)$$

où \vec{u}_x est le vecteur directeur normé de OX. On a donc (voir Figure 8.3) :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{x} = \|\vec{\alpha}\| x \cos(\theta + \pi) \quad (8.27)$$

et donc d'après (8.25) :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{x} = -\frac{x}{c} \cos \theta. \quad (8.28)$$

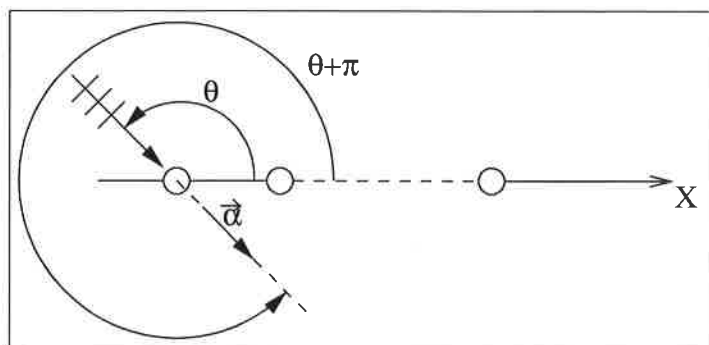


FIG. 8.3 - Onde plane reçue par l'antenne et vecteur $\vec{\alpha}$.

D'après (8.24), le signal en un tel point vaut donc :

$$s(\vec{x}, t) = s' \left(t + \frac{x \cos \theta}{c} \right). \quad (8.29)$$

En particulier, chaque capteur d'indice i est sur l'axe OX et a pour abscisse $x = id$. Il fournit donc le signal

$$s(\vec{x}, t) = s' \left(t + \frac{id \cos \theta}{c} \right). \quad (8.30)$$

Le vecteur signal défini par (8.21) prend alors bien la forme (8.22) et le décalage temporel entre deux capteurs adjacents vaut :

$$\tau = \frac{d \cos \theta}{c}. \quad (8.31)$$

On en déduit alors la représentation fréquentielle du vecteur signal $r(t)$ en déterminant sa transformée de Fourier⁸. Pour cela, rappelons tout d'abord une propriété de la transformation de Fourier d'un signal (scalaire), que nous utiliserons largement dans cette Partie II de l'ouvrage : un décalage temporel fixe t_0 appliqué à un signal temporel $x(t)$ se traduit dans le domaine fréquentiel par un facteur de phase $e^{j\omega t_0}$ sur la représentation fréquentielle de ce signal, c.-à-d. :

$$\mathcal{F}[x(t + t_0)] = e^{j\omega t_0} \mathcal{F}[x(t)]. \quad (8.32)$$

⁸Dans tout ce qui suit, il est sous-entendu qu'en pratique on utilise la transformée de Fourier d'une *tranche temporelle bornée* des signaux considérés, c.-à-d. d'une version de ces signaux « tronquée » ou « fenêtrée » suivant le même principe que dans l'équation (2.122), mais en retenant ici la portion des signaux considérés sur un intervalle de temps qui n'est pas centré sur $t = 0$. Le lecteur pourra par exemple se reporter à [1] p. 133 pour plus de détails sur ce point.

Le lecteur pourra établir cette propriété à partir de (2.8) à titre d'exercice. Par conséquent, le vecteur signal $r(t)$ considéré ici a pour transformée de Fourier :

$$r(\omega) = \mathcal{F}[r(t)] \quad (8.33)$$

$$= [\mathcal{F}[r_0(t)], \mathcal{F}[r_0(t + \tau)], \dots, \mathcal{F}[r_0(t + (N-1)\tau)]]^T \quad (8.34)$$

$$= [r_0(\omega), r_0(\omega)e^{j\omega\tau}, \dots, r_0(\omega)e^{j(N-1)\omega\tau}]^T \quad (8.35)$$

avec d'après (8.23) :

$$\omega\tau = \frac{\omega}{c}d \cos \theta. \quad (8.36)$$

Pour alléger les notations on peut associer, à la variable de pulsation ω initiale, la variable suivante :

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (8.37)$$

L'équation (8.36) devient alors

$$\omega\tau = kd \cos \theta, \quad (8.38)$$

ce qui permet de réécrire (8.35) sous la forme :

$$r(\omega) = [r_0(\omega), r_0(\omega)e^{jkd \cos \theta}, \dots, r_0(\omega)e^{j(N-1)kd \cos \theta}]^T. \quad (8.39)$$

En particulier, en appliquant (8.39) au cas où $r_0(\omega) = 1$, on obtient l'expression du vecteur signal reçu d'amplitude unité, toujours pour une onde plane se propageant suivant la direction θ et pour le type de réseau de capteurs considéré ici. Ce vecteur signal d'amplitude unité est noté $u(\theta)$, en sous-entendant dans cette notation la dépendance de ce vecteur par rapport à ω (ou k), tandis qu'on se focalise sur sa dépendance par rapport à θ . Ce vecteur $u(\theta)$ a donc pour expression :

$$u(\theta) = [1, e^{jkd \cos \theta}, \dots, e^{j(N-1)kd \cos \theta}]^T. \quad (8.40)$$

Ce vecteur $u(\theta)$ peut aussi être appréhendé de la manière suivante, pour une valeur quelconque de $r_0(\omega)$. D'après (8.39), dans le domaine fréquentiel, chaque signal fourni par l'un des capteurs est ici égal au produit du signal fourni par le capteur d'indice 0 (placé à l'origine) et d'un facteur complexe. Le vecteur $u(\theta)$ est alors composé de ces facteurs complexes, comme le montre (8.40).

■ ——— Commentaires sur les notations

Les quantités ω et $k = \frac{\omega}{c}$ sont ici des *variables*, associées à l'argument de la transformée de Fourier, qui définit le spectre complet du vecteur signal $r(t)$ considéré. Au contraire, en Section 8.1.3, on a notamment considéré le cas d'une onde plane progressive monochromatique. Une telle onde a une pulsation caractéristique *constante*, qu'on notait ω en Section 8.1.3 et qu'on notera ω_0 dans la suite de ce chapitre, pour éviter toute confusion avec la *variable* de Fourier ω . De même, en Section 8.1.3, on a noté $||\vec{k}||$ le nombre d'onde d'une onde plane progressive monochromatique qui, pour une onde donnée, est une *constante* souvent notée k dans la littérature. Dans la suite de ce chapitre, on notera $||\vec{k}_0||$ ou k_0 ce nombre d'onde d'une onde plane progressive monochromatique donnée. D'après (8.6), il a pour expression :

$$||\vec{k}_0|| = k_0 = \frac{|\omega_0|}{c}. \quad (8.41)$$

Cette constante (positive) k_0 ne doit pas être confondue avec la variable (positive ou négative) $k = \frac{\omega}{c}$, que nous avons introduite ci-dessus.

Les deux types de quantités considérés ici, c.-à-d. (ω_0, k_0) d'une part et (ω, k) d'autre part, sont malgré tout « liés » de la manière suivante. Quand on considère le cas où l'antenne reçoit une onde plane progressive monochromatique à la pulsation ω_0 et de nombre d'onde k_0 , on étudie souvent la valeur du spectre du vecteur signal $r(t)$ obtenue pour $\omega = \omega_0$, avec donc $|k| = k_0$.

Par ailleurs, les notations relatives aux signaux et à leur transformée de Fourier méritent les commentaires suivants. Quand on considère un *unique* signal temporel, on distingue souvent les représentations temporelle et fréquentielle de ce signal à la fois par la notation utilisée pour la fonction définie par ce signal (lettre minuscule en temporel, majuscule en fréquentiel) et par l'argument de cette fonction (t en temporel, ω en fréquentiel). Nous avons employé cette convention en Partie I : voir par exemple les notations $x(t)$ d'une part, et $X(\omega)$ ou $X(\omega)$ d'autre part, utilisées dans l'Equation (2.8) et la Section 2.2.4. Au début de cette Partie II, nous avons utilisé la version de cette convention étendue à un *unique* signal spatiotemporel : voir $s(\vec{x}, t)$ et $S(\vec{k}, \omega)$ dans (8.17). En revanche, dans la suite de cette Partie II, nous aurons en plus recours à des *vecteurs* et *matrices* de signaux temporels. Dans cette portion de l'ouvrage, nous nous conformerons donc à l'usage qui consiste à noter les signaux (scalaires) ou vecteurs de signaux avec des lettres minuscules, et les matrices avec des lettres majuscules⁹, que ce soit dans les domaines temporel ou fréquentiel. Le fait qu'on considère la version temporelle ou fréquentielle d'un signal (ou ensemble de signaux) en un point donné de la présentation transparaîtra donc uniquement dans l'argument (t ou ω) de ce signal. Nous venons de commencer à utiliser cette convention ci-dessus, en notant $r(t)$ le vecteur signal reçu exprimé dans le domaine temporel et $r(\omega)$ sa transformée de Fourier, et de même pour le signal (scalaire) noté $r_0(t)$ ou $r_0(\omega)$. ■

8.3.2 Antenne à sommation pure : structure et expression de la sortie

On a vu qu'une antenne est constituée d'un ensemble de capteurs, dont on combine souvent tous les signaux pour obtenir une sortie. On considère ici la combinaison des signaux de capteurs la plus simple, c.-à-d. le cas où la sortie de l'antenne est la somme des signaux de capteurs : voir Figure 8.4. On peut donc appeler ce système « antenne à sommation pure », en particulier par opposition à la méthode de traitement d'antenne « à retard et sommation », qu'on verra plus loin.

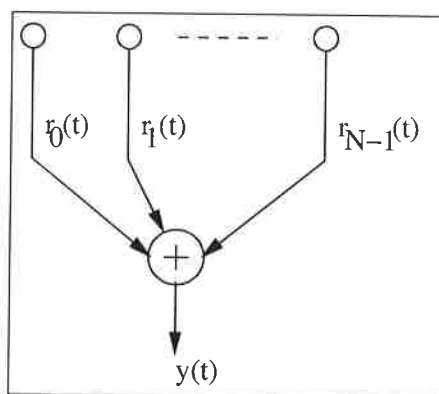


FIG. 8.4 – Antenne à sommation pure.

Pour une onde plane provenant de la direction θ , l'antenne étudiée ici fournit la sortie suivante dans le domaine fréquentiel, en notant $r_i(\omega) = \mathcal{F}[r_i(t)]$:

$$y(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} r_i(\omega) \quad (8.42)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} r_0(\omega) e^{j i k d \cos \theta} \quad (8.43)$$

$$= r_0(\omega) \sum_{i=0}^{N-1} (e^{j k d \cos \theta})^i \quad (8.44)$$

⁹Certains paramètres scalaires seront aussi notés avec des lettres majuscules.

d'où, après calculs :

$$y(\omega) = r_0(\omega) e^{j \frac{N-1}{2} k d \cos \theta} \frac{\sin \left(\frac{N}{2} k d \cos \theta \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} k d \cos \theta \right)}. \quad (8.45)$$

■ ——— Démonstration de (8.45)

D'après (8.44), $y(\omega)/r_0(\omega)$ est la somme partielle d'une série géométrique de raison

$$q = e^{j k d \cos \theta}, \quad (8.46)$$

c'est-à-dire :

$$y(\omega) = r_0(\omega) \sum_{i=0}^{N-1} q^i. \quad (8.47)$$

Si $q \neq 1$, on a donc

$$y(\omega) = r_0(\omega) \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (8.48)$$

$$= r_0(\omega) \frac{1 - e^{j N k d \cos \theta}}{1 - e^{j k d \cos \theta}}. \quad (8.49)$$

On factorise, séparément au numérateur et au dénominateur de (8.49), une exponentielle complexe ayant pour phase la moitié de la phase apparaissant dans (8.49). On obtient ainsi :

$$y(\omega) = r_0(\omega) \frac{e^{j \frac{N}{2} k d \cos \theta} \left[e^{-j \frac{N}{2} k d \cos \theta} - e^{j \frac{N}{2} k d \cos \theta} \right]}{e^{j \frac{1}{2} k d \cos \theta} \left[e^{-j \frac{1}{2} k d \cos \theta} - e^{j \frac{1}{2} k d \cos \theta} \right]} \quad (8.50)$$

$$= r_0(\omega) e^{j \frac{N-1}{2} k d \cos \theta} \times \frac{-2j \sin \left(\frac{N}{2} k d \cos \theta \right)}{-2j \sin \left(\frac{1}{2} k d \cos \theta \right)}, \quad (8.51)$$

d'où, après simplification des facteurs $-2j$, l'expression (8.45).

Il reste à examiner le cas $q = 1$, qui correspond à toutes les directions de propagation θ telles que

$$k d \cos \theta = 2n\pi, \quad (8.52)$$

avec n entier. Dans ce cas, (8.47) donne directement

$$y(\omega) = r_0(\omega) N. \quad (8.53)$$

On notera que la condition (8.52) inclut en particulier le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$, qui correspond à $n = 0$.

L'expression (8.53) peut aussi être obtenue à partir de (8.45), à l'aide d'un prolongement par continuité ou développement au premier ordre. Ainsi, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et donc $\cos \theta = 0$, l'expression (8.45) conduit à une forme indéterminée car les sinus présents à son numérateur et son dénominateur s'annulent. Mais, au voisinage de ce point, on peut utiliser pour ces deux sinus l'approximation $\sin x \simeq x$. L'expression (8.45) se réduit alors à (8.53). ■

8.3.3 Directivité

Définition

On continue à étudier le cas où l'antenne reçoit une onde plane provenant de la direction θ . L'effet du traitement réalisé par l'antenne considérée est défini par le lien qui existe entre la sortie¹⁰

¹⁰ Afin d'alléger les notations, la dépendance de cette sortie par rapport à θ est sous-entendue dans la notation $y(\omega)$. En revanche, cette dépendance est explicitée dans la notation $\Phi_X(\omega, \theta)$ de la fonction déduite de $y(\omega)$ dans (8.54), car on va étudier en détail les variations de cette fonction $\Phi_X(\omega, \theta)$ en fonction de θ .

$y(\omega)$ de l'antenne complète et le signal $r_0(\omega)$ que fournirait l'unique capteur d'indice 0. Ce lien peut être mesuré en amplitude (c.-à-d. en module) par la fonction :

$$\Phi_X(\omega, \theta) = \left| \frac{y(\omega)}{r_0(\omega)} \right| \quad (8.54)$$

ou par une de ses variantes, c.-à-d. par la fonction définie dans (8.54) élevée au carré et/ou divisée par sa valeur maximale. Cette fonction, ou le rapport complexe $y(\omega)/r_0(\omega)$ (éventuellement normalisés en amplitude), sont parfois appelés « gain de l'antenne ».

La fonction $\Phi_X(\omega, \theta)$ caractérise la directivité de l'antenne. En effet, à toute pulsation ω donnée, ses variations en fonction de θ définissent la dépendance de l'amplitude de la sortie de l'antenne (rapportée à $|r_0(\omega)|$) par rapport à la direction de propagation θ de l'onde plane reçue, cette direction étant repérée par rapport à l'axe OX. Cette définition de la fonction de directivité $\Phi_X(\omega, \theta)$ s'applique à une large classe d'antennes. Compte tenu de (8.45), elle conduit pour l'antenne particulière considérée ici à :

$$\Phi_X(\omega, \theta) = \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \cos \theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd \cos \theta\right)} \right| \quad (8.55)$$

La dépendance du terme de droite de (8.55) par rapport à ω est implicitement contenue dans k , qui est lié par (8.37) à la pulsation ω .

On repère ci-dessous la direction de propagation de l'onde par rapport à la direction normale à l'axe de l'antenne, c.-à-d. l'axe OY (voir Figure 8.5). On pose donc :

$$\psi = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (8.56)$$

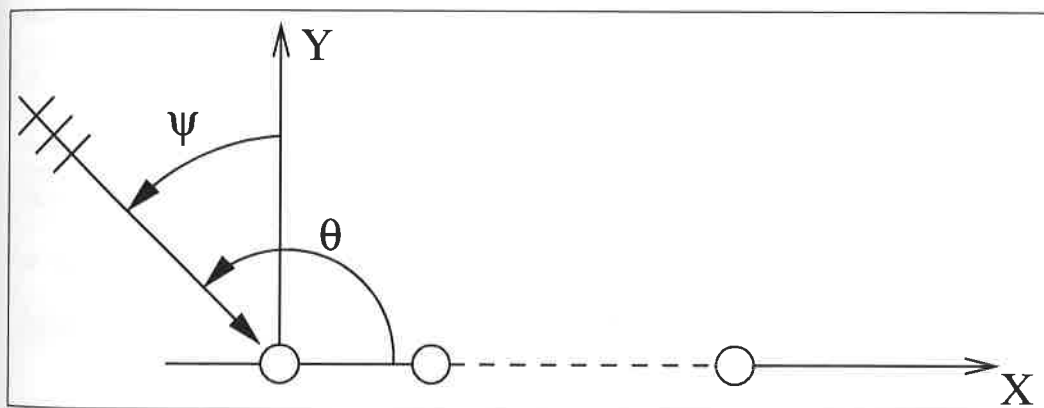


FIG. 8.5 – Onde plane reçue par l'antenne : direction repérée par rapport aux axes OX et OY.

On a alors :

$$\cos \theta = \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \psi \quad (8.57)$$

et la fonction (8.55) définissant la directivité de l'antenne devient ainsi :

$$\Phi_Y(\omega, \psi) = \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kd \sin \psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd \sin \psi\right)} \right| \quad (8.58)$$

Illustration

La courbe représentant les variations de $\Phi_Y(\omega, \psi)$ en fonction de la direction de propagation ψ (ou les variations de Φ_X en fonction de θ) est appelée « diagramme de directivité » de l'antenne,

ou « diagramme de rayonnement » de cette antenne, à la pulsation ω considérée. Deux diagrammes de ce type sont représentés en coordonnées cartésiennes en Figure 8.6. Ils correspondent au cas où on choisit d et ω (donc k d'après (8.37)) tels que $kd = 4\pi$ et où on considère successivement deux valeurs du nombre N de capteurs de l'antenne : $N = 4$ en Figure 8.6 (a) et $N = 10$ en Figure 8.6 (b).

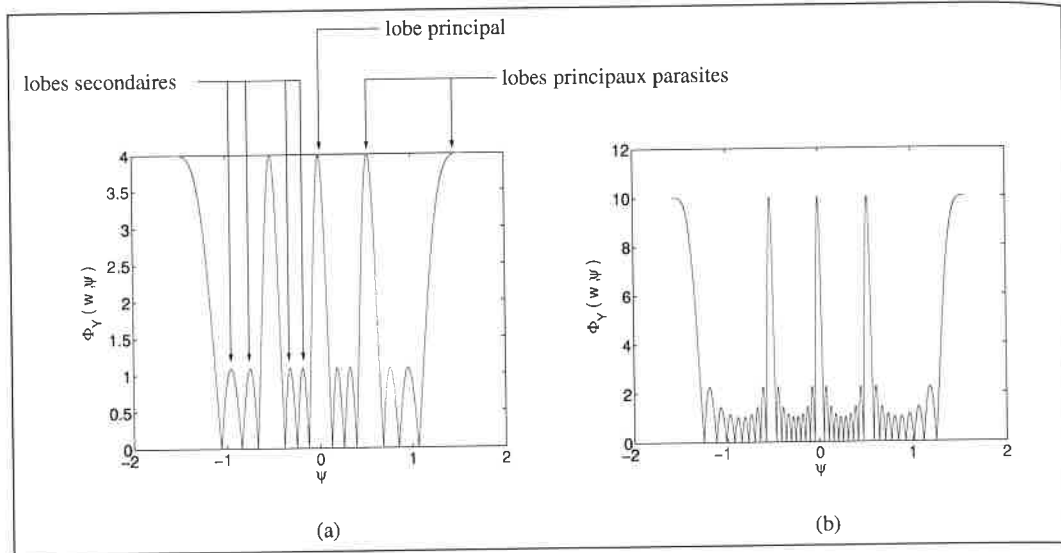


FIG. 8.6 – Diagrammes de directivité de l'antenne à sommation pure en coordonnées cartésiennes. Conditions : (i) $kd = 4\pi$, (ii) $N = 4$ en Figure (a) et $N = 10$ en Figure (b). L'angle ψ définissant la direction de propagation est exprimé en radians et varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Cette figure fait apparaître les phénomènes suivants :

1. la fonction $\Phi_Y(\omega, \psi)$ est maximale pour $\psi = 0$ et son maximum vaut N . Les valeurs de ψ situées de part et d'autre de $\psi = 0$, jusqu'aux premières valeurs pour lesquelles $\Phi_Y(\omega, \psi)$ s'annule, correspondent au « lobe principal » (désiré) du diagramme de directivité de l'antenne¹¹.

D'après (8.58), les angles correspondant aux limites du lobe principal sont définis par la condition

$$\frac{N}{2}kd \sin \psi = \pm \pi. \quad (8.59)$$

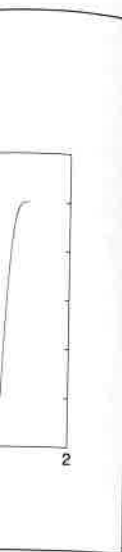
Ils ont donc pour expression :

$$\psi = \pm \arcsin \left(\frac{2\pi}{Nkd} \right). \quad (8.60)$$

La largeur angulaire du lobe principal vaut donc $2 \arcsin \left(\frac{2\pi}{Nkd} \right)$. Il en résulte que cette largeur diminue quand N augmente, pour k et d fixés : plus le nombre de capteurs de l'antenne est élevé, plus elle devient sélective, c.-à-d. elle ne laisse passer avec un niveau conséquent que les signaux qui proviennent de directions couvrant un domaine étroit. De même, la largeur du lobe principal diminue quand la distance d entre capteurs augmente, pour N et k fixés. Enfin, l'expression de la largeur angulaire du lobe principal déterminée ci-dessus permet aussi d'étudier les variations de la sélectivité de l'antenne en fonction de la pulsation ω considérée : si ω augmente, k augmente aussi d'après (8.37), donc la largeur de lobe égale à $2 \arcsin \left(\frac{2\pi}{Nkd} \right)$ diminue. Au total, cette largeur de lobe est définie par la valeur

¹¹On peut aussi définir les limites de ce lobe, non pas par les angles ψ pour lesquels $\Phi_Y(\omega, \psi)$ s'annule, mais par les angles pour lesquels $\Phi_Y(\omega, \psi)$ présente une atténuation donnée par rapport à sa valeur maximale dans ce lobe, par exemple une atténuation de 3 dB [3].

diagrammes
nt au cas où
ement deux
a Figure 8.6



rtésiennes.
définissant

leurs de ψ
Φ_Y(ω, ψ)
té de l'an-

nis par la

(8.59)

(8.60)

que cette
pteurs de
un niveau
étroit. De
ugmente,
éterminée
tion de la
argeur de
la valeur

e, mais par
ns ce lobe,

de Nkd et ses variations peuvent être analysées en fonction de chacune des trois quantités N , k et d . La Figure 8.6 illustre ce phénomène en représentant le diagramme de directivité pour deux valeurs de Nkd . Une gamme plus large de valeurs est considérée plus loin dans ce chapitre en Figure 8.9 page 163, rendant ainsi plus visible cette évolution non seulement du lobe principal, mais aussi de l'ensemble du diagramme de directivité, en fonction de N , k et d .

Compte tenu de sa sélectivité définie ci-dessus, l'antenne est capable de laisser passer une onde se propageant dans une direction, tout en éliminant une autre onde se propageant dans une direction légèrement différente. Elle permet aussi de déterminer la direction d'une source¹². La précision avec laquelle cette direction est obtenue définit la « résolution angulaire » de l'antenne, qui est directement liée à la largeur de son lobe principal¹³.

2. Dans les cas considérés ici, la fonction $\Phi_Y(\omega, \psi)$ atteint aussi cette valeur maximale égale à N pour d'autres valeurs de ψ , nettement plus éloignées de $\psi = 0$. Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, ceci constitue un phénomène indésirable qu'on cherchera donc à éviter, en ayant recours à d'autres valeurs de paramètres que celles choisies ci-dessus. Les autres intervalles de ψ , dans lesquels la fonction $\Phi_Y(\omega, \psi)$ atteint la valeur maximale égale à N et qui sont limités par des valeurs de ψ pour lesquelles $\Phi_Y(\omega, \psi)$ s'annule, correspondent donc aux « lobes principaux parasites » du diagramme de directivité, par opposition au lobe principal désiré défini ci-dessus.
3. Entre ces lobes principaux désiré et parasites, la fonction $\Phi_Y(\omega, \psi)$ présente divers « lobes secondaires », limités par des angles ψ pour lesquels elle s'annule. Sur chaque lobe secondaire, cette fonction atteint une valeur maximale moins élevée que dans le lobe principal.

Etude analytique

On va maintenant justifier plus en détail les propriétés des diagrammes de directivité tels que ceux présentés ci-dessus, grâce à une étude analytique des variations de $\Phi_Y(\omega, \psi)$ en fonction de ψ , pour ω et donc k donnés. On peut associer à l'angle ψ la variable

$$v = \frac{1}{2}kd \sin \psi. \quad (8.61)$$

D'après (8.58), la fonction $\Phi_Y(\omega, \psi)$ peut alors être considérée comme une fonction de v , et exprimée suivant :

$$\Phi_Y(v) = \left| \frac{\sin(Nv)}{\sin(v)} \right|. \quad (8.62)$$

C'est donc une fonction périodique, de période π , par rapport à la variable v . Il suffit donc d'étudier ses variations pour

$$v \in [0, \pi]. \quad (8.63)$$

Du point de vue de ψ , la condition (8.63) correspond à

$$\psi \in [0, \psi_{max}], \quad (8.64)$$

où ψ_{max} est défini comme étant le plus petit angle positif tel que

$$\frac{1}{2}kd \sin \psi_{max} = \pi \quad (8.65)$$

sous réserve qu'il existe un tel angle. L'existence d'un tel angle n'est en effet pas garantie : quand ψ varie, la quantité $v = \frac{1}{2}kd \sin \psi$ varie dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}kd, \frac{1}{2}kd]$. Donc si

$$\frac{1}{2}kd < \pi \quad (8.66)$$

¹²Pour le type simple d'antenne considéré à ce stade, cette direction de source est obtenue en faisant varier l'orientation du réseau de capteurs de l'antenne et en déterminant l'orientation pour laquelle l'amplitude du signal en sortie d'antenne est maximale. La source est alors dans la direction $\psi = 0$ par rapport à l'antenne, sous réserve de considérer des conditions telles que le repliement défini en Section 8.3.4 ne se produise pas.

¹³Pour plus de détails sur les notions de résolution, le lecteur pourra par exemple se référer à [1].

aucun angle ne vérifie la condition (8.65). Nous supposons ici qu'il existe ψ_{max} tel que cette condition (8.65) soit vérifiée. Nous reviendrons plus en détail sur des conditions de ce type dans la suite de ce chapitre.

Considérons tout d'abord les extrémités du domaine défini par (8.64). Pour $\psi = 0$ et donc $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\Phi_V(v) = N$ d'après (8.53) et (8.54). Cette valeur est la valeur maximale de $\Phi_V(v)$, comme on va le voir, et $\psi = 0$ correspond au centre du lobe principal (désiré) du diagramme de directivité. De même, pour $\psi = \psi_{max}$, on a $\Phi_V(v) = N$ compte tenu de la périodicité de $\Phi_V(v)$. La direction ψ_{max} correspond au centre du premier lobe principal parasite du diagramme de directivité. Il nous reste alors à étudier les variations de $\Phi_V(v)$ pour

$$0 < \psi < \psi_{max} \quad (8.67)$$

et donc

$$0 < v < \pi. \quad (8.68)$$

Sur ce domaine, le dénominateur de $\Phi_V(v)$ ne s'annule jamais d'après (8.62). Par ailleurs, quand v varie de 0 à π exclus, l'argument Nv , apparaissant dans le numérateur de $\Phi_V(v)$ dans (8.62), varie de 0 à $N\pi$ exclus. La fonction $\Phi_V(v)$ présente donc $(N-1)$ zéros, qui correspondent aux angles ψ et aux valeurs associées de v telles que

$$Nv = n\pi \quad (8.69)$$

où n est un entier compris entre 1 et $(N-1)$. Entre ces zéros, la fonction $\Phi_V(v)$ passe par des maxima, dont on pourrait étudier les amplitudes et montrer qu'elles sont moins élevées que $\Phi_V(0) = \Phi_V(\pi) = N$. Ces directions de propagation situées entre deux zéros de $\Phi_V(v)$ correspondent aux lobes secondaires du diagramme de directivité.

Nous avons jusqu'ici considéré la représentation du diagramme de directivité en coordonnées cartésiennes (voir Figure 8.6). Une représentation de ce diagramme en coordonnées polaires peut aussi être utilisée. Cette dernière a l'avantage de faire apparaître de manière plus parlante sur le plan géométrique les directions de propagation dans lesquelles l'antenne présente un gain élevé, comme l'illustre la Figure 8.7. En revanche, les représentations en coordonnées cartésiennes telles que celle fournie en Figure 8.6 permettent de mieux appréhender les parties du diagramme de directivité où le gain est faible et donc l'allure des lobes secondaires. Ces deux avantages peuvent être obtenus conjointement en ayant recours à une représentation « log-polaire ». Cette représentation et d'autres variantes sont présentées plus en détail dans l'annexe de ce chapitre.

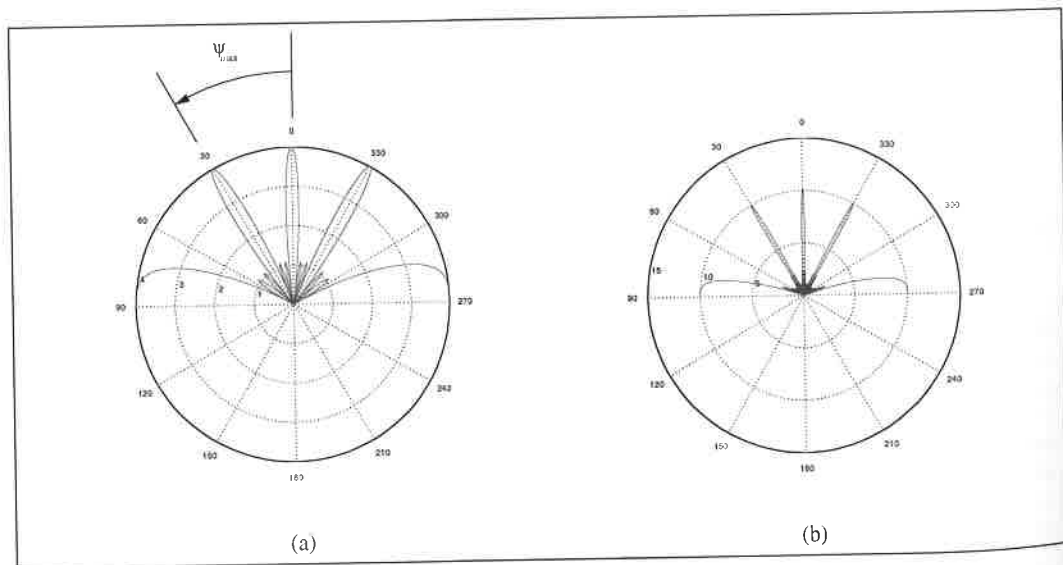


FIG. 8.7 - Diagrammes de directivité de l'antenne à sommation pure en coordonnées polaires. Conditions : (i) $kd = 4\pi$, (ii) $N = 4$ en Figure (a) et $N = 10$ en Figure (b). L'angle ψ définissant la direction de propagation est exprimé en degrés et varie de -90 à 90 (soit $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ radians).

8.3.4 Échantillonnage spatial et repliement

Les capteurs constituant l'antenne réalisent un échantillonnage¹⁴ spatial du champ $s(\vec{x}, t)$. En effet, tout capteur situé à l'abscisse x sur l'axe OX correspond, comme nous l'avons vu, à $\vec{x} = x\vec{u}_x$ et fournit donc le signal $s(x\vec{u}_x, t)$, fonction de x et de t . L'antenne complète considérée ici est constituée de capteurs d'indices entiers i , occupant des positions spatiales discrètes d'abscisses $x = id$ et en nombre fini, c.-à-d. correspondant à $i \in [0, N-1]$. A tout instant t , cette antenne définit donc un ensemble d'échantillons (c.-à-d. une « suite spatiale » d'échantillons, à la différence de la suite temporelle d'échantillons fournie par l'échantillonnage temporel usuel). Ces échantillons correspondent aux entiers i variant de $-\infty$ à $+\infty$ et ont pour valeurs :

$$\begin{cases} r_i(t) = s(id\vec{u}_x, t) & \text{si } i \in [0, N-1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.70)$$

Cet échantillonnage est ici périodique car les capteurs sont équidistants. La période spatiale d'échantillonnage est égale à la distance d entre capteurs adjacents. La fréquence spatiale d'échantillonnage est donc $1/d$ (et la pulsation associée vaut ainsi $2\pi/d$). Le Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist s'applique à l'échantillonnage de fonctions dépendant de tout type de variable (c.-à-d. pas seulement temporelles), en particulier d'une variable spatiale, comme c'est le cas ici. Il indique alors que, pour éviter tout phénomène de repliement, la fréquence spatiale d'échantillonnage doit être supérieure ou égale au double de la plus grande fréquence spatiale du signal traité (et cette condition se transpose directement aux pulsations correspondantes). La forme explicite de la condition ainsi obtenue dépend ici de l'onde reçue :

1. considérons d'abord le cas d'ondes planes progressives monochromatiques correspondant à une unique pulsation temporelle ω_0 .

Dans un tout premier temps, considérons une telle onde, correspondant de plus à une unique direction θ par rapport à l'axe OX. Le vecteur d'onde \vec{k}_0 est alors complètement défini puisque : (i) sa norme est fixée par (8.6) et (ii) sa direction est la même que la direction de propagation, c.-à-d. que l'angle entre l'axe OX et \vec{k}_0 vaut : $\theta + \pi$ (voir Figure 8.3, en tenant compte du fait que \vec{k}_0 et $\vec{\alpha}_0$ ont la même direction). Ces conditions fixent aussi la longueur d'onde λ_0 de l'onde considérée puisque, d'après (8.8) et (8.41), on a :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} \quad (8.71)$$

$$= \frac{2\pi c}{|\omega_0|} \quad (8.72)$$

D'après (8.3), cette onde a pour expression :

$$s(\vec{x}, t) = Ae^{j(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{x})}. \quad (8.73)$$

En tout point d'abscisse x de l'axe OX, correspondant à $\vec{x} = x\vec{u}_x$, on a (voir Figure 8.3) :

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{x} = ||\vec{k}_0|| x \cos(\theta + \pi) \quad (8.74)$$

$$= -[k_0 \cos \theta] x. \quad (8.75)$$

En ce point, le champ considéré a donc pour valeur :

$$s(\vec{x}, t) = Ae^{j(\omega_0 t + [k_0 \cos \theta] x)}. \quad (8.76)$$

A tout instant t donné, la restriction du champ à l'axe OX définit donc une fonction périodique de x , dont la pulsation spatiale vaut $k_0 \cos \theta$, et dont la fréquence spatiale vaut donc $(k_0 \cos \theta)/(2\pi) = (\cos \theta)/\lambda_0$.

On considère maintenant une onde qui est la superposition d'ondes planes progressives monochromatiques ayant toutes la même pulsation ω_0 et des directions θ quelconques. Les

¹⁴Dans cet ouvrage, nous ne considérons que très ponctuellement les signaux échantillonnés. Nous utilisons donc sans les détailler les résultats généraux de la théorie de l'échantillonnage, qui est généralement présentée pour des signaux fonctions du temps. Pour plus de détails sur le domaine de l'échantillonnage temporel, le lecteur pourra se référer à des ouvrages tels que [6] (Chap. 1), [7] (Chap. 1) ou [8] (Chap. 8).

fréquences spatiales des restrictions de ces composantes à l'axe OX valent $(\cos \theta)/\lambda_0$ d'après ce qui précède et couvrent donc la bande $[-\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_0}]$. La condition de non repliement rappelée plus haut s'écrit donc ici :

$$\frac{1}{d} \geq \frac{2}{\lambda_0} \quad (8.77)$$

soit :

$$d \leq \frac{\lambda_0}{2} \quad (8.78)$$

2. Etudions maintenant le cas d'une onde pouvant comporter des composantes dans n'importe quelle direction de propagation et dont le spectre temporel est borné, c.-à-d. qui ne comporte des composantes que pour des pulsations caractéristiques ω_0 telles que $|\omega_0| \leq \omega_{max}$. D'après (8.72), les longueurs d'onde de ces composantes vérifient donc la condition :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{|\omega_0|} \geq \lambda_{min} = \frac{2\pi c}{\omega_{max}} \quad (8.79)$$

Les fréquences spatiales des restrictions à l'axe OX des composantes de cette onde couvrent donc la bande $[-\frac{1}{\lambda_{min}}, \frac{1}{\lambda_{min}}]$. La condition de non repliement devient donc ici :

$$\frac{1}{d} \geq \frac{2}{\lambda_{min}} \quad (8.80)$$

soit :

$$d \leq \frac{\lambda_{min}}{2} = \frac{\pi c}{\omega_{max}} \quad (8.81)$$

ou encore

$$\omega_{max} \leq \frac{\pi c}{d} \quad (8.82)$$

Une antenne donnée, dont les capteurs sont espacés d'une distance d fixée, n'est donc utilisable sans repliement qu'à des pulsations temporelles inférieures ou égales à $\pi c/d$. Inversement, si on veut utiliser une antenne sans repliement dans une bande de pulsations temporelles donnée, cela impose la distance maximale acceptable entre capteurs, définie par (8.81).

La condition d'échantillonnage spatial sans repliement peut aussi être justifiée et interprétée dans l'optique du diagramme de directivité de l'antenne, comme le montre l'encadré ci-dessous.

■ ——— Echantillonnage spatial sans repliement et directivité

On considère le cas d'ondes planes progressives monochromatiques de même pulsation temporelle ω_0 positive, donc de même nombre d'onde $k_0 = \omega_0/c$, et ayant des directions θ quelconques. On étudie la fonction de directivité Φ_X , définie en (8.55), à une pulsation ω égale à la pulsation caractéristique ω_0 des ondes considérées. On a alors $k = k_0$, compte tenu de (8.37), (8.41) et $\omega_0 > 0$. L'argument $\frac{1}{2}kd \cos \theta$ au dénominateur de l'expression (8.55) de la fonction de directivité Φ_X couvre donc l'intervalle $I_1 = [-\frac{1}{2}k_0 d, \frac{1}{2}k_0 d]$ quand θ varie. Or, comme cela a été vu en étudiant l'expression (8.62), la fonction Φ_X est périodique, de période π par rapport à l'expression $v = \frac{1}{2}kd \cos \theta$. La fonction Φ_X parcourt donc sa période quand l'expression $\frac{1}{2}kd \cos \theta$ varie dans l'intervalle $I_2 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il s'ensuit que si (et seulement si) l'intervalle I_1 est plus large que l'intervalle I_2 , certaines ondes qui induisent des pulsations spatiales $k_0 \cos \theta$ différentes sur l'axe OX conduisent à la même valeur de Φ_X et sont donc indiscernables, c.-à-d. qu'il y a un repliement spatial. La condition de non repliement est donc :

$$I_1 \subset I_2 \quad (8.83)$$

soit :

$$\frac{1}{2}k_0d \leq \frac{\pi}{2} \quad (8.84)$$

c.-à-d. :

$$d \leq \frac{\pi}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (8.85)$$

On retrouve bien ainsi la condition (8.78), qu'on avait établie plus haut sans considérer la fonction Φ_X .

Cette analyse a la signification suivante du point de vue des directions de propagation des ondes. On repère ici les directions de propagation par l'angle ψ par rapport à la direction normale à l'axe de l'antenne, c.-à-d. l'axe OY. On considère donc la fonction de directivité sous la forme (8.58). Quand la direction de propagation s'écarte de l'axe OY, avec $\psi > 0$, l'argument $v = \frac{1}{2}kd \sin \psi$ du dénominateur de la fonction Φ_Y augmente. D'après ce qui précède, le phénomène de repliement apparaît quand ψ devient tel que $\frac{1}{2}kd \sin \psi$ (avec ici $k = k_0$) dépasse la borne supérieure de l'intervalle I_2 associé aux fonctions Φ_X et Φ_Y , c.-à-d. quand $\psi > \psi_l$, où ψ_l est la direction de propagation pour laquelle cette borne de I_2 est atteinte. Cette direction ψ_l est donc définie par :

$$\frac{1}{2}k_0d \sin \psi_l = \frac{\pi}{2} \quad (8.86)$$

soit :

$$\sin \psi_l = \frac{\pi}{k_0d}. \quad (8.87)$$

On note au passage que, comme on a nécessairement $\sin \psi_l \leq 1$, (8.87) a pour conséquence que cet angle ψ_l et donc le phénomène de repliement n'existent que si :

$$\frac{\pi}{k_0d} \leq 1 \quad (8.88)$$

ou inversement, il n'y a pas de repliement si et seulement si le produit k_0d est inférieur à la valeur limite :

$$\boxed{k_0d = \pi}. \quad (8.89)$$

On retrouve ainsi la condition (8.84) obtenue plus haut.

Considérons alors un scénario dans lequel k_0d est initialement supérieur à la limite définie par (8.89). Dans ce cas, le repliement se produit, avec ψ_l défini par (8.87). Supposons qu'on réduise ensuite k_0d . D'après (8.87), ψ_l augmente alors. Le cas limite d'existence de repliement est celui où k_0d diminue ainsi jusqu'à atteindre la condition (8.89). D'après (8.87), on a alors $\sin \psi_l = 1$, c.-à-d. $\psi_l = \frac{\pi}{2}$, soit une onde se propageant suivant l'axe OX. L'évolution du diagramme de directivité durant tout ce processus de diminution de k_0d est illustrée en Figure 8.8, à l'aide de représentations en coordonnées polaires. Les représentations correspondantes en coordonnées cartésiennes sont fournies en Figure 8.9. Insistons sur le fait que les configurations qu'on souhaite obtenir sont celles où aucun repliement ne se produit. Ce cas correspond, parmi toutes les situations considérées en Figures 8.8. et 8.9, aux diagrammes de la ligne du bas de ces figures. En effet, pour ces diagrammes, la condition (8.89) est vérifiée et l'antenne opère donc juste à la limite du cas d'absence de repliement. Par ailleurs, dans le cas $k_0d \in]\pi, 2\pi[$, le repliement se produit, mais le diagramme de directivité ne contient pas de lobe principal parasite complet.

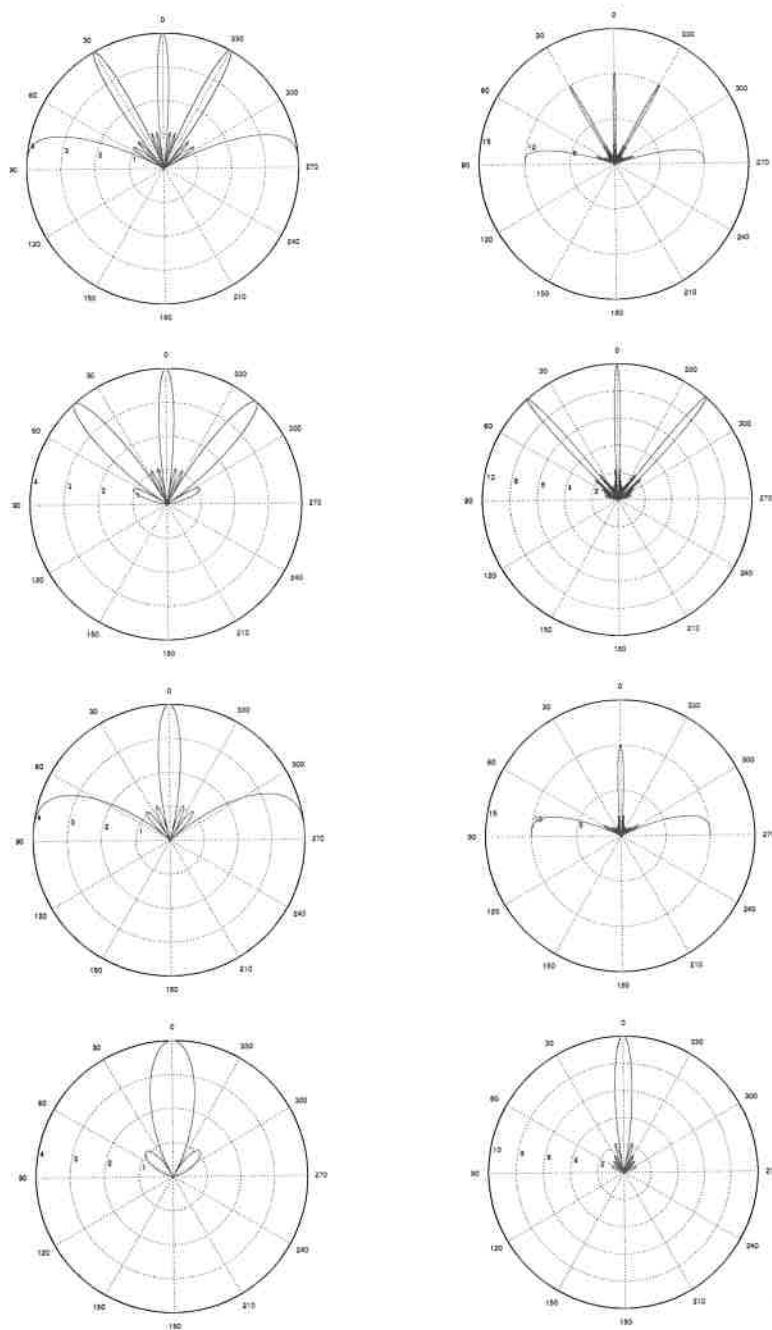


FIG. 8.8 - Diagrammes de directivité de l'antenne à sommation pure en coordonnées polaires. Conditions : (i) $k_0 d = 4\pi$ pour la ligne du haut, $k_0 d = 3\pi$ pour celle en-dessous, $k_0 d = 2\pi$ pour celle encore en-dessous, $k_0 d = \pi$ (c.-à-d. $d = \frac{\lambda_0}{2}$) pour la ligne du bas, (ii) $N = 4$ en colonne de gauche et $N = 10$ en colonne de droite. L'angle ψ définissant la direction de propagation est exprimé en degrés et varie de -90 à 90 (soit $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ radians).

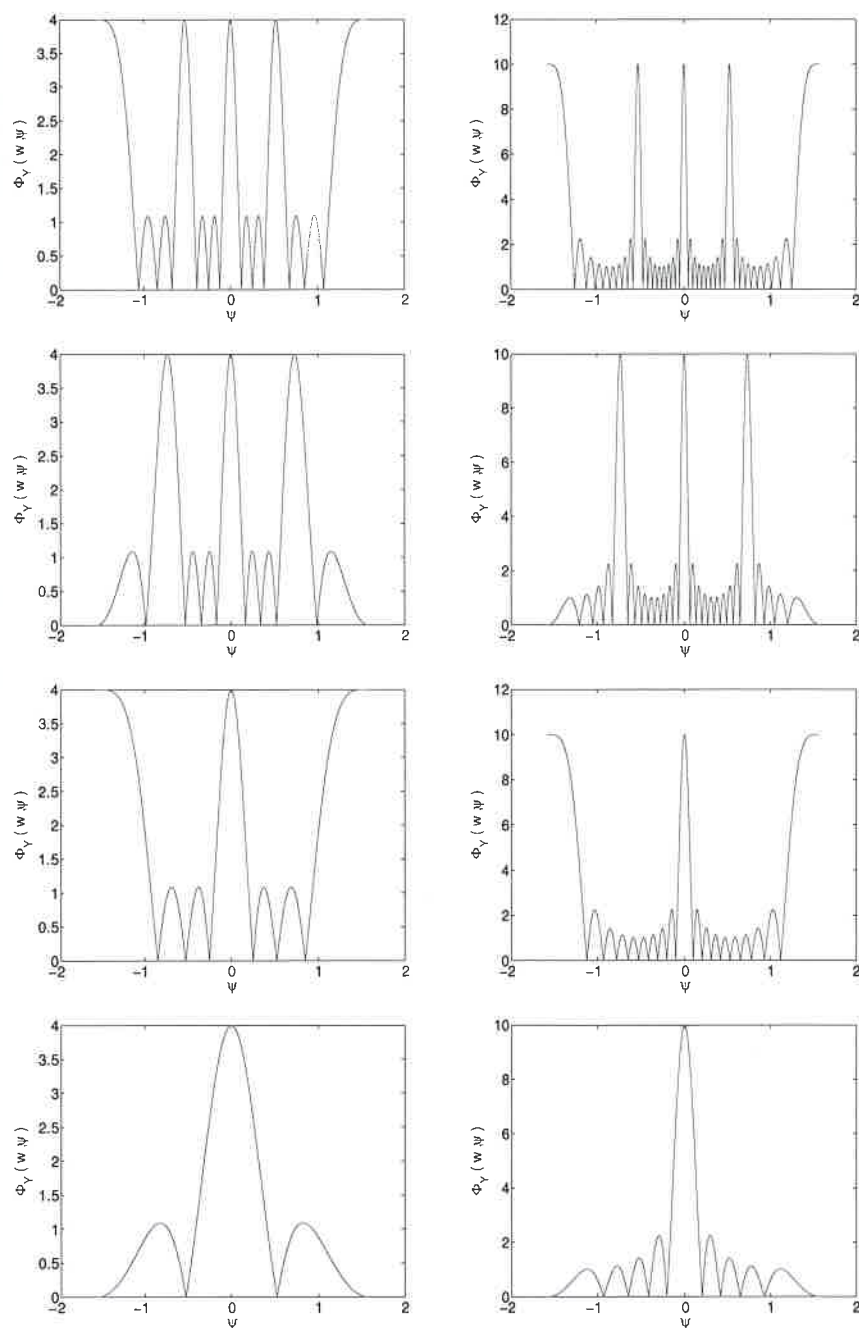


FIG. 8.9 – Diagrammes de directivité de l'antenne à sommation pure en coordonnées cartésiennes. Conditions : (i) $k_0d = 4\pi$ pour la ligne du haut, $k_0d = 3\pi$ pour celle en-dessous, $k_0d = 2\pi$ pour celle encore en-dessous, $k_0d = \pi$ (c.-à-d. $d = \frac{\lambda_0}{2}$) pour la ligne du bas, (ii) $N = 4$ en colonne de gauche et $N = 10$ en colonne de droite. L'angle ψ définissant la direction de propagation est exprimé en radians et varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

La Figure 8.9 illustre enfin la notion de « région visible » du diagramme de directivité. En effet, comme nous l'avons indiqué plus haut, la fonction de directivité Φ_X considérée ici est périodique par rapport à l'expression $\frac{1}{2}k_0d \cos \theta$. Ce comportement périodique transparaît en Figure 8.9 (où la variable choisie comme abscisse n'est pas le cosinus d'angle, $\cos \theta$, mentionné ci-dessus, mais l'angle lui-même, mesuré de plus par rapport à l'axe OY, c.-à-d. ψ). En outre, quand θ varie, l'expression $\frac{1}{2}k_0d \cos \theta$ ne varie que dans un domaine borné. Ce domaine peut correspondre à plusieurs périodes de Φ_X , ou une unique période, voire une fraction de période, comme l'illustre encore la Figure 8.9. En définitive, pour des valeurs données de k_0 et d , seule une portion de la courbe de variations de la fonction Φ_X est effectivement atteinte quand θ varie, définissant ainsi la région visible de ce diagramme de directivité dans les conditions considérées. ■

8.3.5 Synthèse des propriétés de l'antenne

Les propriétés de l'antenne particulière considérée ci-dessus peuvent être résumées de la manière suivante :

- dans le cas général (c.-à-d. pour ω , N et d quelconques), l'antenne présente une directivité, c.-à-d. la valeur de sa fonction Φ_X dépend nettement de la direction de l'onde reçue.
- De plus, elle a une direction privilégiée, c.-à-d. cette fonction Φ_X est toujours maximale pour la direction de propagation normale à l'antenne, qui correspond au lobe principal (désiré) du diagramme de directivité. L'antenne permet ainsi de rehausser un signal utile par rapport à des signaux indésirables, comme annoncé plus haut, à condition que seul ce signal utile se propage suivant une direction voisine de la normale à l'antenne.
- L'antenne peut aussi avoir des lobes principaux parasites (à distinguer des lobes secondaires), correspondant à des directions de propagation autres que la normale à l'antenne pour lesquelles Φ_X présente la même valeur que pour cette direction normale. Cette situation doit être évitée, par un choix adéquat de la fréquence d'échantillonnage spatial (c.-à-d. de la distance entre capteurs) et/ou de la bande de fréquences temporelles couverte par les signaux à traiter. En effet, quand cette situation se produit, des signaux provenant de directions associées aux lobes principaux parasites ne sont pas discernables de signaux correspondant au lobe principal.
- Au-delà de la contrainte imposée ci-dessus, la condition de non repliement spatial doit être vérifiée afin que des signaux provenant de directions quelconques différentes soient discernables.

8.4 Conclusions et extensions

Dans ce chapitre, nous avons introduit les concepts et notations de base relatifs aux signaux spatiotemporels et aux antennes qui permettent de traiter ces signaux, en étudiant en particulier l'antenne la plus simple envisageable. Un des points majeurs ainsi mis en évidence est la directivité d'une antenne constituée d'un ensemble de capteurs, c.-à-d. le fait que la valeur de sa fonction de directivité dépend de la direction de l'onde plane reçue. Pour l'antenne à sommation pure considérée ici, on a vu que la direction pour laquelle cette fonction atteint son maximum est fixée et égale à la normale à l'axe contenant les capteurs. On obtiendra des propriétés plus riches sur ce plan au chapitre suivant.

8.5 Annexe : autres représentations de la directivité

Dans ce chapitre, nous avons introduit diverses représentations graphiques relatives à la fonction de directivité d'une antenne. Comme nous l'avons mentionné, la représentation polaire a l'avantage de faciliter la visualisation des directions où le gain de l'antenne est élevé, mais l'inconvénient de rendre peu lisibles les portions du diagramme de directivité où ce gain d'antenne est faible.

En dehors du contexte du traitement d'antenne, une solution classiquement employée pour mieux appréhender les zones de courbes à faible gain consiste à utiliser une échelle de type logarithmique pour l'axe associé à ce gain. En particulier, on représente souvent la valeur de ce gain

exprimée en décibels (dB). Pour un gain en amplitude, cette valeur en dB est égale à 20 fois le logarithme de ce gain. On peut envisager d'appliquer cette approche aux représentations polaires de la fonction de directivité utilisées dans ce chapitre. Cela conduit à une représentation log-polaire, dans laquelle on représente le « rayon » égal à la valeur en dB du gain de l'antenne, en fonction de l'angle associé à la direction de propagation. Cette approche demande cependant quelques précautions. En effet, ce gain en dB ne peut pas être utilisé directement car il peut être négatif, alors que la variable de « rayon » à utiliser dans cette représentation polaire doit rester positive. Une solution simple à ce problème peut être obtenue de la manière suivante. On commence par normaliser le gain d'antenne par une valeur qu'on se donne comme valeur de référence et qui est notée Φ_{ref} ci-dessous. En d'autres termes, on ne considère plus la fonction $\Phi_Y(\omega, \psi)$ elle-même, mais la fonction

$$\Phi'_Y(\omega, \psi) = \frac{\Phi_Y(\omega, \psi)}{\Phi_{ref}}. \quad (8.90)$$

De plus, on réalise un seuillage de $\Phi'_Y(\omega, \psi)$, en remplaçant toutes ses valeurs inférieures à 1 par la valeur 1 (autrement dit, on « ignore » les valeurs de $\Phi_Y(\omega, \psi)$ inférieures à Φ_{ref}). On représente alors en coordonnées polaires standard les variations de la fonction $\Phi'_Y(\omega, \psi)$ seuillée exprimée en dB, c.-à-d. de $20 \log[\Phi'_Y(\omega, \psi)]$. La courbe ainsi obtenue constitue la représentation log-polaire de la fonction $\Phi_Y(\omega, \psi)$ seuillée.

Ainsi, on remplit bien la condition de positivité du rayon de cette représentation polaire : puisque le seuillage de $\Phi'_Y(\omega, \psi)$ conduit à des valeurs toujours supérieures ou égales à 1, les valeurs en dB correspondantes sont toujours positives ou nulles. La valeur d'amplitude 0 dB sur un tel diagramme log-polaire est atteinte pour tous les angles pour lesquels $\Phi_Y(\omega, \psi) \leq \Phi_{ref}$. De plus, le choix de la valeur de Φ_{ref} permet d'ajuster la dynamique de cette représentation. Ainsi par exemple, on peut choisir

$$\Phi_{ref} = N \times 10^{-m}, \quad (8.91)$$

où N est comme précédemment le nombre de capteurs de l'antenne et m est un nombre dont nous allons montrer l'influence. Nous avons indiqué dans ce chapitre que la valeur maximale du gain d'antenne $\Phi_Y(\omega, \psi)$ est égale à N . D'après (8.90) et (8.91), la valeur maximale de $20 \log[\Phi'_Y(\omega, \psi)]$ est alors égale à $20 \times m$. Ainsi par exemple, pour $m = 2$, la représentation log-polaire que nous venons de définir couvre une dynamique qui s'étend de 0 dB à 40 dB. Des exemples représentatifs de ce cas sont fournis en Figure 8.10. Le lecteur pourra vérifier que les lobes secondaires, c.-à-d. les zones angulaires où le gain de l'antenne est faible, sont mieux visibles sur cette figure que sur les représentations polaires correspondant aux mêmes conditions fournies plus haut dans ce chapitre (voir en particulier Figure 8.8). Dans la littérature, des représentations log-polaires de diagrammes de directivité sont disponibles dans des ouvrages tels que [4] p. 42¹⁵.

Nous venons de considérer une échelle logarithmique de gain dans le cadre d'une représentation polaire, pour les raisons indiquées ci-dessus. Ce type d'échelle peut aussi être utilisé dans une représentation cartésienne du diagramme de directivité. On trace alors en coordonnées cartésiennes le gain d'antenne exprimé en dB en fonction de la direction de propagation. Cela conduit à des formes de lobes un peu modifiées par rapport à celles que nous avons fournies dans ce chapitre, où nous considérons une échelle linéaire pour le gain d'antenne.

Le lecteur qui souhaiterait exploiter ou comparer des diagrammes de directivité de la littérature devra donc être attentif aux variables utilisées dans les représentations considérées, car ces variables ont une influence sur la forme de ces diagrammes et sur leurs parties qui sont mises en relief.

¹⁵ Dans la figure de [4], la valeur de gain prise comme référence pour définir les graduations relatives au gain d'antenne en dB est la valeur maximale de ce gain, au lieu de sa valeur minimale égale à Φ_{ref} que nous avons considérée ci-dessus. Le principe de l'approche reste néanmoins inchangé.

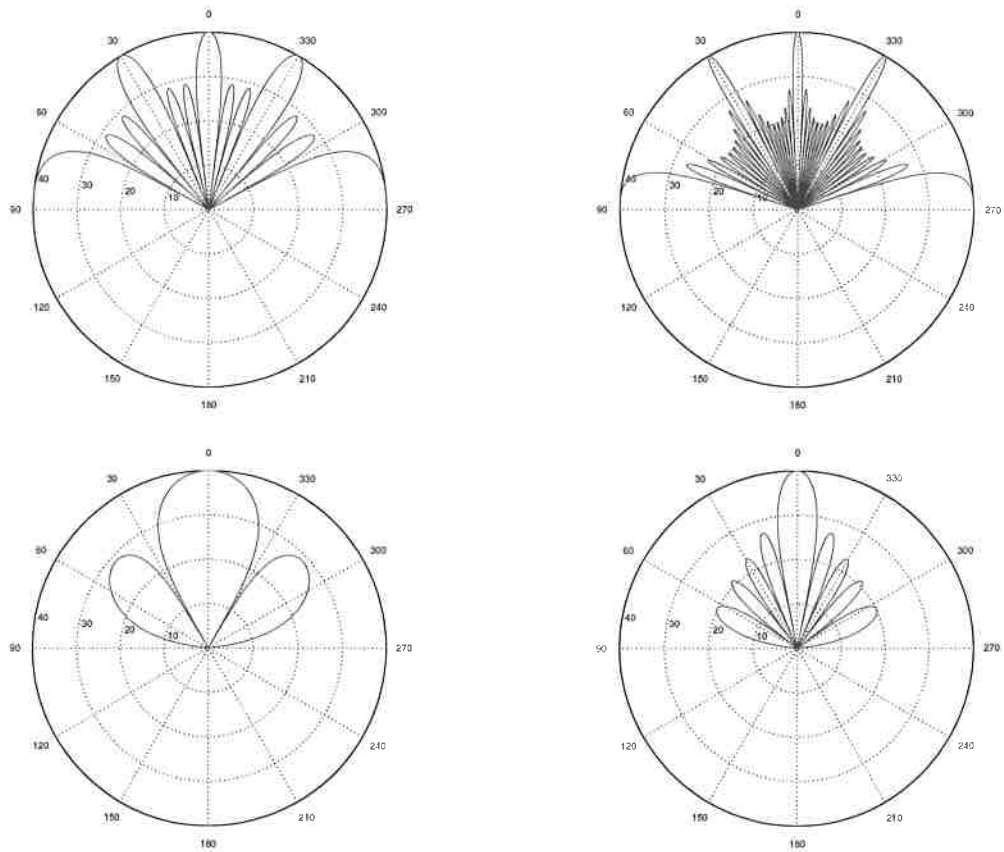


FIG. 8.10 – Diagrammes de directivité de l'antenne à sommation pure en coordonnées log-polaires (voir texte). Conditions : (i) $kd = 4\pi$ pour la ligne du haut et $kd = \pi$ pour la ligne du bas, (ii) $N = 4$ en colonne de gauche et $N = 10$ en colonne de droite. L'angle ψ définissant la direction de propagation est exprimé en degrés et varie de -90 à 90 (soit $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ radians).