Fiche n°5 — l'algorithme de FROST

Nous avons vu que les deux précédentes antennes (antenne MV et antenne LCMV ou CAPON) répondent au problème général suivant :

$$(P'') \quad \begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{C}^M} \ \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} \\ s.c.q \quad \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{P} = \boldsymbol{f}^H \end{cases}$$

où l'on a regroupé un ensemble de K contraintes dans une seule matrice $\boldsymbol{P}$ de dimension $(M \times K)$ associée au vecteur $\boldsymbol{f}$ de dimension $(K \times 1)$ ce qui donne :

$$\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{P} = \boldsymbol{f}^H \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^H(\varphi_s)\boldsymbol{w} = \delta_0 \\ \mathbf{v}^H(\varphi_1)\boldsymbol{w} = \delta_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}^H(\varphi_{K-1})\boldsymbol{w} = \delta_{K-1} \end{cases}$$

avec la notation $\delta_i \in \{0,1\}$ pour $i = 0,1,\dots,K$ qui permet d'imposer une contrainte pour soit (a) éliminer la direction spatiale φ_i lorsque $\delta_i = 0$, ou soit (b) conserver la direction spatiale φ_i lorsque $\delta_i = 1$.

Considérons la fonction de Lagrange associée au problème (P'') donnée par :

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{P} - \boldsymbol{f}^H)\,\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\lambda}^h(\boldsymbol{P}^H \boldsymbol{w} - \boldsymbol{f})$$

où les 3 multiplicateurs de Lagrange sont regroupés au sein d'un même vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ de dimension 3×1. Nous pouvons alors imaginer de construire un algorithme du gradient qui minimiserait la fonction $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda})$ et donc la mise à jour des pondération de l'antenne serait donnée par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}[n+1] &= \boldsymbol{w}[n] - \mu\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda})|_{\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}[n]} \\ &= \boldsymbol{w}[n] - \mu\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}} \left(\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\lambda}^h(\boldsymbol{P}^H \boldsymbol{w} - \boldsymbol{f})\right) \end{aligned}$$

En insérant le gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\, \boldsymbol{L}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda}) = 2\,\boldsymbol{R}_x\ \boldsymbol{w}[n] + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda}$ de la fonction de Lagrange associée à (P), on obtient:

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{w}[n+1] = \boldsymbol{w}[n] - \mu\big(2\,\boldsymbol{R}_x\ \boldsymbol{w}[n] + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda}\big)} \qquad (1)$$

Pour déterminer la valeur des 3 multiplicateurs de Lagrange regroupés au sein du vecteur $\boldsymbol{\lambda}$, , nous prenons en compte le fait que, une fois mis à jour , le vecteur de pondération $\boldsymbol{w}[n+1]$ doit satisfaire à la contrainte égalité $\boldsymbol{P}^H \boldsymbol{w}[n+1] = \boldsymbol{f}^H$ ce qui conduit aux relations suivantes :

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P}^H\big[\boldsymbol{w}[n] - \mu\,\big(2\,\boldsymbol{R}_x\ \boldsymbol{w}[n] + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda}\big)\big] = \boldsymbol{f}^H \\ \Rightarrow \boldsymbol{P}^H\big(\boldsymbol{I} - 2\mu\,\boldsymbol{R}_x\big)\boldsymbol{w}[n] - \mu\,\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{f}^H \end{gathered}$$

On cherche à déterminer le vecteur $\boldsymbol{\lambda}$, aussi on va multiplier la relation précédente par l'inverse du facteur multiplicatif de $\boldsymbol{\lambda}$**,** soit par la matrice inverse $(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}$:

$$\begin{gathered} \Rightarrow (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H\big(\boldsymbol{I} - 2\mu\,\boldsymbol{R}_x\big)\boldsymbol{w}[n] - \mu\,\overbrace{(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})}^{\textit{matrice identité}}\,\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{f}^H \\ \Rightarrow \mu\,\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H\big(\boldsymbol{I} - 2\mu\,\boldsymbol{R}_x\big)\boldsymbol{w}[n] - (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{f}^H \end{gathered}$$

L'expression des multiplicateurs de Lagrange étant disponible, nous pouvons remplacer leurs valeurs dans l'expression (1) de mise à jour des pondérations, on obtient alors :

$$\begin{gathered} \boldsymbol{w}[n+1] = \boldsymbol{w}[n] - 2\mu\,\boldsymbol{R}_x\ \boldsymbol{w}[n] - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H\big(\boldsymbol{I} - 2\mu\,\boldsymbol{R}_x\big)\boldsymbol{w}[n] - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{f}^H \\ \Rightarrow \boldsymbol{w}[n+1] = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H)\boldsymbol{w}[n] - 2\mu(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H)\,\boldsymbol{R}_x\ \boldsymbol{w}[n] + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{f}^H \end{gathered}$$

en posant $\boxed{\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H}$ et de plus $\boxed{\boldsymbol{w}_{fixe} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{f}^H}$ on obtient la version finale de l'algorithme :

$$\boxed{\boldsymbol{w}[n+1] = \boldsymbol{Q}\,\big(\boldsymbol{w}[n] - 2\mu\,\boldsymbol{R}_x\ \boldsymbol{w}[n]\big) + \boldsymbol{w}_{fixe}} \qquad (2)$$

Cependant cette équation de mise à jour itérative des coefficients de l'antenne nécessite la connaissance de la matrice $\boldsymbol{R}_x = \mathbb{E}(\boldsymbol{x}[n]\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{H}}[n])$ d'autocorrélation spatiale. Aussi, pour simplifier son estimation, on utilise une approximation stochastique de cette matrice, soit $\boldsymbol{R}_x \cong \boldsymbol{x}[n]\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{H}}[n]$ ce qui nous donne ***l'algorithme de FROST***

$$\boldsymbol{w}[n+1] = \boldsymbol{Q}\ \left(\boldsymbol{w}[n] - 2\mu\, \boldsymbol{x}[n]\, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{H}}[n]\, \boldsymbol{w}[n]\right) + \boldsymbol{w}_{fixe}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{w}[n+1] = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{w}[n] - 2\mu\, \boldsymbol{x}[n] y^*[n]\ ) + \boldsymbol{w}_{fixe}} \qquad (3)$$

car nous avons le signal en sortie de traitement d'antenne donné par : $y[n] = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}}[n]\, \boldsymbol{x}[n] \Rightarrow y^*[n] = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{H}}[n]\, \boldsymbol{w}[n]$.

Exercice personnel 6.1.

Générer les signaux reçus sur les différents capteurs (disponibles dans la matrice `Sig`) à l'aide de l'algorithme GeneSignaux.m. Choisir la configuration suivante : $\varphi_s = 20°$, $\varphi_1 = -60°$ et $\varphi_2 = 65°$ concernant la direction du signal utile et celles des interférents mais on travaillera avec les rapports de puissances $RSB = -10dB, RSI1 = 2dB$ et $RSI2 = 2dB$.

Dans le cas où l'on utilise qu'une seule contrainte (c'est-à-dire $K = 1$): $\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{H}} \Leftrightarrow \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\boldsymbol{w} = 1$, soit donc $\boldsymbol{f} = [1]$ dans votre algorithme, effectuer les opération suivantes :

1- A partir de ces signaux, effectuer le traitement d'antenne à chaque instant n en utilisant la mise à jour adaptative des coefficients $(\boldsymbol{w}[n])_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la relation (3) précédente.

a) Calculer hors de la boucle principale les paramètres constants : le vecteur $\boldsymbol{w}_{fixe}$ et la matrice $\boldsymbol{Q}$
b) Puis réaliser la boucle principale de traitement **for** … **end** sur tous les échantillons reçus
c) Calculer à chaque itération la sortie d'antenne $y[n]$ puis mettre à jour les coefficients $\boldsymbol{w}[n]$

On choisira un pas d'adaptation $\mu = 0.003$ (ou alors diminuer sa valeur si l'algorithme diverge) pour la mise à jour des coefficients dans l'équation (3).

2- Tous les 200 échantillons, vous ferez un affichage dynamique **du diagramme de directivité** de l'antenne ainsi constituée en traçant la courbe $|C(\varphi)| = |\mathbf{w}^H[n]\ \mathbf{V}(\varphi)|$ (exprimé en dB) en fonction de l'angle d'incidence de l'onde $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. On effectuera ces affichages sur une même figure en faisant attention à conserver toujours la même dynamique abscisse/ordonnée en appliquant la commande suivante :

```
>> xmin=90 ; xmax=90 ; ymin=-70 ; ymax=0
>> axis([xmin  xmax ymin ymax])
```

3- tous les 200 échantillons, sur une autre figure, vous pourrez également afficher dynamiquement **le diagramme de l'œil** obtenu à partir du signal $y[n]$ obtenu en sortie d'antenne mais en considérant un affichage du diagramme de l'œil des seuls échantillons $n \in [\![1 + (i-1) \times 200, i \times 200]\!]$. Par contre, il ne sera pas possible d'utiliser la fonction `eyediagram` car elle ouvre une nouvelle fenêtre à chaque appel, aussi on procèdera de la manière suivante suivant la valeur du facteur de sur-échantillonnage SurEch:

```
>> figure(80)
>> XX = reshape(y200,fix(100/SurEch),2*SurEch) ;
>> subplot(211) ; plot(real(XX) ; hold off ;
>> subplot(212) ; plot(imag(XX) ; hold off ;
```

(Ici `y200` correspond aux 200 échantillons du signal $\{y(n) :\ n \in [\![1 + (i-1) \times 200, i \times 200]\!]\}$

Exercice personnel 6.2.

Dans les mêmes conditions que précédemment : $\varphi_s = 20°$, $\varphi_1 = -60°$ et $\varphi_2 = 65°$ et avec les rapports de puissances $RSB = -10dB, RSI1 = 2dB$ et $RSI2 = 2dB$, considérer le cas où l'on impose trois contraintes (c'est-à-dire $K = 2$):

$$\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{f}^H \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\boldsymbol{w} = 1 \\ \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_1)\boldsymbol{w} = 0.01 \\ \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_2)\boldsymbol{w} = 0.01 \end{cases}$$