Fiche n°4 — Troisième optimisation : le filtre de CAPON

Une troisième optimisation du diagramme d'antenne peut être envisagée en prolongement de la méthode du filtre à minimum de variance vue précédemment. On se place dans exactement les mêmes conditions et hypothèses que celles de la Fiche n°3 . Nous avons alors établi que le signal en sortie de traitement d'antenne était donné par :

$$y(n) = \boldsymbol{w}^H \tilde{\boldsymbol{s}}(n) + \boldsymbol{w}^H \left(\tilde{\boldsymbol{i}}^{(1)}(n) + \tilde{\boldsymbol{i}}^{(2)}(n) + \tilde{\boldsymbol{b}}(n) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La puissance du signal en sortie est alors donnée (en supposant indépendance entre $\boldsymbol{s}(n), \boldsymbol{i}^{(1)}(n), \boldsymbol{i}^{(2)}(n)$ et $\boldsymbol{b}(n)$ et également en supposant que ces signaux sont centrés) par :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 = \mathbb{E}(|y(n)|^2) &= \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R_s} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R_{i+b}} \boldsymbol{w} \\ &= M\, \mathbb{E}(|\tilde{s}_1(n)|^2)\, \boldsymbol{w}^H \mathbf{v}(\varphi_s) \mathbf{v}^H(\varphi_s) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R_{i+b}}\, \boldsymbol{w} \quad car \;\; \tilde{\boldsymbol{s}}(n) = \sqrt{M}\, \tilde{s}_1(n)\, \mathbf{v}(\varphi_s) \end{aligned}$$

avec la notation suivante : $(\tilde{\boldsymbol{i}} + \tilde{\boldsymbol{b}})(n) = \tilde{\boldsymbol{i}}^{(1)}(n) + \tilde{\boldsymbol{i}}^{(2)}(n) + \tilde{\boldsymbol{b}}(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Les quantités $\boldsymbol{R_s}$ et $\boldsymbol{R_{i+b}}$ désignent, respectivement, les matrices de corrélation spatiale du signal utile et des signaux interférents et du bruit. Une manière d'optimiser le traitement d'antenne consiste alors à minimiser la puissance engendrée par les bruits et les interférents soit donc à considérer le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^M} \; \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}\, \boldsymbol{w} \\ s.c.q \quad \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s) \boldsymbol{w} = 1 \end{cases}$$

mais en imposant de plus 2 autres contraintes égalités supplémentaires (nullité de la réponse $C(\varphi)$ de l'antenne dans les directions des interférents) car on suppose que les directions des signaux interférents sont connues :

$$\begin{cases} C(\varphi_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_1) \boldsymbol{w} = 0 \\ C(\varphi_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_1) \boldsymbol{w} = 0 \end{cases}$$

Le problème global est donc équivalent à :

$$(P') \quad \begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^M} \; \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}\, \boldsymbol{w} \\ s.c.q \quad \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{P} \; = \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{H}} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{P} = (\mathbf{v}(\varphi_s) \quad \mathbf{v}(\varphi_1) \quad \mathbf{v}(\varphi_2))$ désigne une matrice de dimention $M \times 3$ et $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ désigne le vecteur de contraintes de dimension 3×1. La solution à ce problème est couramment appelée **filtre de CAPON** ou bien encore **solution LCMV** (pour *Linear Constrained Minimum Variance*), ou bien encore **solution MVDR** (Minimum Variance Distortionless Response).

Exercice personnel 5.1.

En utilisant les notions vues en cours d'optimisation sur la minimisation sous contraintes égalités (technique d'optimisation de Lagrange) solutionner le problème (P'), et montrer que la solution optimale de l'antenne de CAPON est donnée par:

$$\boldsymbol{w}_{CAPON} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}^{-1}\, \boldsymbol{P}\; (\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{H}}\, \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}^{-1}\, \boldsymbol{P})^{-1} \boldsymbol{f}$$

Note pour l'obtention de l'expression analytique de $\boldsymbol{w}_{CAPON}$: Pour appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on cherche s'il existe $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\nabla_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda}}\, L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{w}}\, L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\, L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Avec :

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R}_{\,\boldsymbol{i+b}}\,\boldsymbol{w} + \lambda_1(\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\boldsymbol{w}-1) + \lambda_2(\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_1)\boldsymbol{w}) + \lambda_3(\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_2)\boldsymbol{w}) \\
&= \underbrace{\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R}_{\,\boldsymbol{i+b}}\,\boldsymbol{w}}_{dimension\ 1\times 1} + \underbrace{(\boldsymbol{w^H P} - \boldsymbol{f^H})}_{\boldsymbol{dimension\ 1\times 3}}\ \boldsymbol{\lambda} \\
&= \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R}_{\,\boldsymbol{i+b}}\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\lambda^h}(\boldsymbol{P^H w} - \boldsymbol{f})
\end{aligned}
$$

où les 3 multiplicateurs de Lagrange sont regroupés au sein d'un même vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ de dimension 3×1.Pour trouver les conditions au 1er ordre, il vous faudra donc calculer les gradients $\nabla_{\boldsymbol{w}}\, L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda})$ et $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\, L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda})$ en suivant les règles de dérivation qui ont été précisées dans la fiche n°3.

Exercice personnel 5.2.

Refaire les même évaluations que celles de l'exercice 4.2 mais en comparant maintenant $\boldsymbol{w}_{CAPON}$ **et** $\boldsymbol{w}_{MV}$.

Remarque 1 : Si l'on observe l'expression de la variance du signal disponible en sortie de traitement d'antenne, nous avons (cf. ci-dessus) :

$$\sigma_y^2 = \mathbb{E}(|y(n)|^2) = \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_s w} + \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_{i+b}w} = \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_x w}$$

$\boldsymbol{R_x} = \boldsymbol{R_s} + \boldsymbol{R_{i+b}}$ désigne la matrice de corrélation spatiale des signaux disponibles en entrée sur les différents éléments de l'antenne. Ainsi, minimiser $\{\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_{i+b}w}\ \ s.c.q\ \ \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\boldsymbol{w}=1\}$ est équivalent à la minimisation de $\{\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_x w}\ \ s.c.q\ \ \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\boldsymbol{w}=1\}$ puisque la contrainte $\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\boldsymbol{w}=1$ va assurer que l'ajout du terme $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_s w}$ soit transparent et donc le signal utile ne sera pas supprimé par le traitement d'antenne. Ceci est logique puisque nous avions établi également que :

$$\sigma_y^2 = M\ \mathbb{E}(|\tilde{s}_1(n)|^2)\ \underbrace{\boldsymbol{w}^H\mathbf{v}(\varphi_s)}_{=1}\ \underbrace{\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\boldsymbol{w}}_{=1\ \text{à l'optimal}} + \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_{i+b}}\,\boldsymbol{w}$$

Donc à l'optimal, σ_y^2 ne dépend pas du terme $\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_s w}$. En conséquence, la solution de CAPON peut encore s'écrire suivant

$$\boxed{\boldsymbol{w}_{CAPON} = \boldsymbol{R_x^{-1}P}\ \ (\boldsymbol{P^H}\ \boldsymbol{R_x^{-1}P})^{-1}\boldsymbol{f}}$$

Remarque 2 : En insérant cette solution au sein de l'expression de la puissance de bruit en sortie d'antenne et en notant que $\boldsymbol{R_x^H} = \boldsymbol{R_x} \Leftrightarrow (\boldsymbol{R_x^H})^{-1} = (\boldsymbol{R_x})^{-1}$ alors on obtient :

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 = \mathbb{E}(|y(n)|^2) = \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R_x w} &= \boldsymbol{f}^H(\boldsymbol{P^H}\ \boldsymbol{R_x^{-1}P})^{-1}\boldsymbol{P^H R_x^{-1} R_x R_x^{-1} P}\ \ (\boldsymbol{P^H}\ \boldsymbol{R_x^{-1}P})^{-1}\boldsymbol{f} \\
&= \boldsymbol{f}^H(\boldsymbol{P^H}\ \boldsymbol{R_x^{-1}P})^{-1}\boldsymbol{f}
\end{aligned}
$$

Considérons le cas où l'on supprime les 2 contraintes additionnelles $C(\varphi_1)=0$ et $C(\varphi_2)=0$ de nullité de la réponse de l'antenne. Nous avons alors le vecteur $\boldsymbol{f}=1$ et la matrice $\boldsymbol{P}=\mathbf{v}(\varphi)$. En faisant varier l'angle de « pointage » φ dans $]-\pi,+\pi[$, nous effectuons alors un balayage électronique et la puissance σ_y^2 va également varier en fonction φ. Nous obtenons alors l'estimateur des DOA (Direction Of Arrival) par la méthode de minimum de variance qui permet d'estimer automatiquement quelles sont les directions principales d'arrivées des ondes sur l'antenne. Cet estimateur est encore appelé *pseudo-spectre de CAPON* et est donné par:

$$\sigma_y^2(\varphi) = \left(\mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi})^{\boldsymbol{H}}\ \boldsymbol{R_x^{-1}}\mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi})\right)^{-1}$$

D'un point de vue expérimental, la matrice $\boldsymbol{R_x}$ est inconnue en pratique mais il suffit de la replacer par son estimée obtenue à l'aide des statistiques temporelles (ergodicité), soit :

$$\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{H}}(k)$$

Cette méthode est très performante puisqu'elle permet de séparer des directions même lorsque celles-ci sont proches les unes des autres.

Exercice personnel 5.3.

Générer des signaux sur les différents capteurs à l'aide de GeneSignaux.m. Choisir librement votre configuration concernant la direction du signal utile et celles des interférents ainsi que les différents rapports de puissances RSB, $RSI1$ et $RSI2$.

(a) Estimer la matrice d'auto-corrélation spatiale $\boldsymbol{\widehat{R}_x}$ à partir des signaux reçus sur les différents éléments de l'antenne.
(b) Faire un balayage électronique en faisant une boucle for…end sur tous les angles $\varphi \in \left]-\pi, +\pi\right[$, puis à l'intérieur de cette boucle pour chaque valeur de l'angle φ :
   - calculer le vecteur de pointage $\mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi})$, puis…
   - calculer le pseudo-spectre $\sigma_y^2(\varphi)$
(c) tracer l'allure de la courbe donnant le pseudo-spectre $\sigma_y^2(\varphi)$ en fonction de s $\varphi \in \left]-\pi, +\pi\right[$.
