Fiche n°3 — Deuxième optimisation : le filtre à minimum de variance

Une seconde optimisation du diagramme d'antenne peut être effectuée. On considère (cf. Fiche n°1) que la source utile, placée en champ lointain (donc onde plane), est captée par chaque élément de l'antenne avec un angle d'incidence de φ_s (qui sera notée `Phis` dans le programme ©Matlab). Par ailleurs, deux signaux interférents I_1 et I_2 peuvent également être définis, chacun ayant une direction d'arrivée propre φ_1 et φ_2 (qui seront notées `Phi1` et `Phi2` dans le programme ©Matlab).Le signal reçu sur le capteur numéro m peut alors s'écrire :

$$x_m(n) = s_m(n) + i_m^{(1)}(n) + i_m^{(2)}(n) + b_m(n), \quad m = 1,2,\ldots,M \ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}$$

Ce qui équivaut à l'expression suivante en utilisant une notation vectorielle (représenté en gras) :

$$\boldsymbol{x}(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_M(n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{s}(n) + \boldsymbol{i}^{(1)}(n) + \boldsymbol{i}^{(2)}(n) + \boldsymbol{b}(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La sortie d'antenne (qui s'effectue sur l'enveloppe complexe $\tilde{\boldsymbol{x}}(n)$ du signal reçu $\boldsymbol{x}(n)$) est alors donnée par :

$$y(n) = \boldsymbol{w}^H \tilde{\boldsymbol{x}}(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ce qui conduit à :

$$y(n) = \boldsymbol{w}^H \tilde{\boldsymbol{s}}(n) + \boldsymbol{w}^H \left(\tilde{\boldsymbol{i}}^{(1)}(n) + \tilde{\boldsymbol{i}}^{(2)}(n) + \tilde{\boldsymbol{b}}(n) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La puissance du signal en sortie est alors donnée (en supposant indépendance entre $\boldsymbol{s}(n), \boldsymbol{i}^{(1)}(n), \boldsymbol{i}^{(2)}(n)$ et $\boldsymbol{b}(n)$ et également en supposant que ces signaux sont centrés) par :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 = \mathbb{E}(|y(n)|^2) &= \mathbb{E}(\boldsymbol{w}^H \tilde{\boldsymbol{s}}(n) \tilde{\boldsymbol{s}}^H(n) \boldsymbol{w}) + \mathbb{E}(\boldsymbol{w}^H (\tilde{\boldsymbol{i}} + \tilde{\boldsymbol{b}})(\tilde{\boldsymbol{i}} + \tilde{\boldsymbol{b}})^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{w}), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &= \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R_s} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R_{i+b}} \boldsymbol{w} \\ &= M\ \mathbb{E}(|\tilde{s}_1(n)|^2)\ \boldsymbol{w}^H \mathbf{v}(\varphi_s) \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R_{i+b}}\, \boldsymbol{w} \quad car \ \ \tilde{\boldsymbol{s}}(n) = \sqrt{M}\, \tilde{s}_1(n)\, \mathbf{v}(\varphi_s) \end{aligned}$$

Avec la notation suivante : $(\tilde{\boldsymbol{i}} + \tilde{\boldsymbol{b}})(n) = \tilde{\boldsymbol{i}}^{(1)}(n) + \tilde{\boldsymbol{i}}^{(2)}(n) + \tilde{\boldsymbol{b}}(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Les quantités $\boldsymbol{R_s}$ et $\boldsymbol{R_{i+b}}$ désignent, respectivement, les matrices de corrélation spatiale du signal utile et des signaux interférents et du bruit. Une manière d'optimiser le traitement d'antenne consiste alors à minimiser la puissance engendrée par les bruits et les interférents. soit donc à considérer le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^M} \ \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R_{i+b}}\, \boldsymbol{w} \\ s.c.q \quad \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s) \boldsymbol{w} = 1 \end{cases}$$

Une contrainte additionnelle est ajoutée au problème pour éviter que la solution ne conduise à des poids de norme infinie. On contraint alors le « pointage » de l'antenne dans la direction du signal de manière à ce que la puissance de signal utile en sortie d'antenne soit égale à celle du signal utile en entrée sur l'un des éléments de l'antenne soit :

$$\boldsymbol{w}^H \mathbf{v}(\varphi_s) \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s) \boldsymbol{w} = \mathbf{1} \Leftrightarrow |\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s) \boldsymbol{w}|^2 = \mathbf{1} \Leftrightarrow |\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s) \boldsymbol{w}| = \mathbf{1}$$

et de plus on impose qu'il n'y ait pas de rotation de phase dans la direction du signal utile soit $C(\varphi_s) = \mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s) \boldsymbol{w} = \mathbf{1}$.

<u>Exercice personnel 4.1</u>.

En utilisant les notions vues en cours d'optimisation sur la minimisation sous contraintes égalités (technique d'optimisation de Lagrange) solutionner le problème (*P*), et montrer que la solution optimale à minimum de variance (MV) est donnée par :

$$\boldsymbol{w}_{MV} = \frac{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}^{-1}\ \mathbf{v}(\varphi_s)}{\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_s)\ \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}^{-1}\ \mathbf{v}(\varphi_s)}$$

On observe que, lorsque les interférents et les bruits ne sont pas corrélés spatialement entre les différents éléments individuels de l'antenne, alors $\boldsymbol{R_{i+b}} = \sigma_{i+b}^2\, \boldsymbol{I}_M$ et donc, comme $\|\mathbf{v}(\varphi_s)\| = 1$ par construction, alors $\boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{w}_{fa}$.

Rappel : on rappelle quelques propriétés de différentiabilité au 1er ordre d'une fonction $g(z,z^*)$ de la variable complexe $z = x + iy$. On a alors :

$$\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right) \quad et \quad \frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)$$

Dans le cas vectoriel, nous avons les propriétés suivantes :

Pour $\left| \begin{array}{l} f: \ \mathbb{C}^N \to \mathbb{C} \\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \longmapsto f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}^*) \end{array} \right.$ alors on a le gradient $\nabla_{\boldsymbol{w}} f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}^*) = \begin{pmatrix} \partial f_1(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}^*)/\partial w_1 \\ \vdots \\ \partial f_M(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}^*)/\partial w_N \end{pmatrix}$

On a alors les relations suivantes :

- $\forall a \in \mathbb{C}^n, \forall h \in \mathbb{C}^n,$ $\quad \lim\limits_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{a}^H(\boldsymbol{w}+t\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{a}^H\boldsymbol{w}}{t} = \boldsymbol{a}^H\boldsymbol{h} \Rightarrow \boxed{\nabla_{\boldsymbol{w}}\,(\boldsymbol{a}^H\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{a}^*}$
- $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \forall h \in \mathbb{C}^n,$ $\quad \lim\limits_{t\to 0} \frac{(\boldsymbol{w}+t\boldsymbol{h})^H\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{w}+t\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{w}}{t} = \boldsymbol{w}^H(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^H)\ \boldsymbol{h} \Rightarrow \boxed{\nabla_w(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{A}^*)\ \boldsymbol{w}^*}$

Exercice personnel 4.2.

En considérant une antenne constituée de M = 16 capteurs avec une distance inter-capteur égale à $d = \lambda/2$:

a. Calculer le vecteur de pondérations optimales $\boldsymbol{w}_{MV}$ permettant de pointer l'antenne dans la direction $\varphi_s = \pi/5$ pour une configuration donnée du bruits et des interférents (`Phi1,Phi2,RSB,RSI1,et RSI2`). Pour cela on se servira des explications données ci-après pour calculer la matrice d'intercorrélation spatiale $\boldsymbol{R}_{\,\boldsymbol{i+b}}$.
b. Tracer le diagramme de directivité de l'antenne ainsi constituée en traçant la courbe $|C(\varphi)|$ (exprimé en dB) en fonction de l'angle d'incidence de l'onde $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. La tracer également en coordonnées polaires à l'aide du programme ©Matlab **TracePolar.m** qui vous a été transmis.
c. Générer à l'aide du programme **GeneSignaux** les signaux reçus sur l'ensemble des capteurs en considérant que le signal utile provient de la direction $\varphi_s = \pi/5$. Vérifier le bon comportement de l'antenne à minimum de variance $\boldsymbol{w}_{MV}$ en effectuant la sommation pondérée des différentes voies et en comparant les diagrammes de l'œil des signaux en entrée et en sortie de l'antenne.
d. Comparer les résultats obtenus avec l'antenne à minimum de variance $\boldsymbol{w}_{MV}$ par rapport au filtre spatial adapté $\boldsymbol{w}_{fa}$
   - Dans le cas non bruité (RSB=`300dB`) et sans interférents (`RSI1 et RSI2=300dB`)
   - Dans le cas bruité (RSB=`7dB`) et sans interférents (`RSI1 et RSI2=300dB`)
   - pour différentes valeurs des rapports (`RSI1et RSI2`) en les faisant évoluer de 300 dB à -2/-3 dB

e. Faire varier la position angulaire d'un interférent en le faisant se rapprocher de la source utile (soit $\varphi_1 \to \varphi_s$) et observer le comportement de l'antenne dans ce cas limite. Augmenter le nombre d'éléments individuels de l'antenne constitue-t-il **une solution au problème ?**

Calcul de la matrice d'intercorrélation spatiale

Par définition de cette matrice, on a $\boldsymbol{R}_{\,\boldsymbol{i+b}} = \mathbb{E}\left((\tilde{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{\boldsymbol{b}})(\tilde{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{\boldsymbol{b}})^{\boldsymbol{H}}\right)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, (\tilde{\boldsymbol{\imath}} + \tilde{\boldsymbol{b}})(n) = \tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(1)}(n) + \tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(2)}(n) + \tilde{\boldsymbol{b}}(n)$.

On suppose que les signaux interférents et les bruits sont indépendants (et sont des processus aléatoires centrés), ec qui conduit à :

$$\boldsymbol{R}_{\,\boldsymbol{i+b}} = \mathbb{E}\big(\tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(1)}(n)\tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(1)}(n)^{\boldsymbol{H}} + \tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(2)}(n)\tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(2)}(n)^{\boldsymbol{H}} + \tilde{\boldsymbol{b}}(n)\tilde{\boldsymbol{b}}(n)^{\boldsymbol{H}}\big)$$

Les bruits sont supposés provenir d'un *champ diffus* (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'une direction spatiale privilégiée pour ces signaux) si bien que la matrice de corrélation spatiale des bruits est donnée par

$$\boldsymbol{R}_{\,\boldsymbol{bb}} = \mathbb{E}\big(\tilde{\boldsymbol{b}}(n)\tilde{\boldsymbol{b}}(n)^{\boldsymbol{H}}\big) = \sigma_b^2\,\boldsymbol{I}_M$$

Au contraire, en ce qui concerne les signaux interférents, nous allons les considérer provenant d'*ondes cohérentes* (https://fr.wikipedia.org/wiki/Cohérence_(physique)) c'est-à-dire qu'il existe une direction privilégiée donc nous obtenons les relations suivantes (déjà étables pour le signal utile provenant la direction φ_s) :

$$\tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(1)}(n) = \sqrt{M}\, i_1^{(1)}(n)\,\mathbf{v}(\varphi_1) \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\imath}}^{(2)}(n) = \sqrt{M}\, i_1^{(2)}(n)\,\mathbf{v}(\varphi_2)$$

où $i_1^{(1)}(n)$ et $i_1^{(2)}(n)$ représentent les composantes interférentes n°1 et 2 au sein du signal présent sur le capteur n°1.

Ces relations conduisent à : $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i_1 i_1}} = M\,\sigma_{i_1}^2\,\mathbf{v}(\varphi_1)\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_1)$ et : $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i_2 i_2}} = M\,\sigma_{i_2}^2\,\mathbf{v}(\varphi_2)\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_2)$, et donc nous obtenons :

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}} = M\,\sigma_{i_1}^2\,\mathbf{v}(\varphi_1)\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_1) + M\,\sigma_{i_2}^2\,\mathbf{v}(\varphi_2)\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}(\varphi_2) + \sigma_b^2\,\boldsymbol{I}_M$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}}{\sigma_S^2} = M\,\frac{\sigma_{i_1}^2}{\sigma_S^2}\,\mathbf{v}\big(\varphi_1\big)\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}\big(\varphi_1\big) + M\,\frac{\sigma_{i_2}^2}{\sigma_S^2}\,\mathbf{v}\big(\varphi_2\big)\mathbf{v}^{\boldsymbol{H}}\big(\varphi_2\big) + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_S^2}\,\boldsymbol{I}_M}$$

Nous pouvons donc exprimer cette relation en fonction des différents rapports de puissance à notre disposition :

$RSI1 = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_{i_1}^2}$, $RSI2 = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_{i_2}^2}$ et $RSB = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_b^2}$. Il suffit ensuite d'insérer l'inverse de ces dernières expressions dans celle de la matrice $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}$ d'intercorrélation spatiale des interférents et bruits par la matrice pondérée $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i+b}}/\sigma_S^2$ (le terme σ_S^2 se simplifie entre numérateur et dénominateur) dans l'équation de la solution à minimum de variance $\boldsymbol{w}_{MV}$.
