

# Technologie de l'information et codage

## TP: Codage de source et optimisation de la capacité du canal

### Master SISEA

18 décembre 2016

Mauricio Caceres

Enseignant : Claude Cariou



# ENSSAT

L A N N I O N

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Objectif . . . . .	2
1.1.1	Definitions . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Implémentation en MATLAB®</b>	<b>4</b>
2.1	Génération d'une séquence binaire . . . . .	4
2.2	Simulation du canal asymétrique . . . . .	4
2.3	Estimation de l'information mutuelle . . . . .	6
2.3.1	Estimation de probabilités sur l'entrée et la sortie . . . . .	6
2.3.2	Estimation de probabilités conditionnelles . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Analyses et conclusions</b>	<b>9</b>
3.1	Courbes et données obtenues . . . . .	9
3.2	Conclusion . . . . .	11

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Objectif

L'objectif de ce TP est de vérifier expérimentalement la théorie de Shannon en utilisant les outils de la théorie de l'information (entropie, information mutuelle). Plus précisément, il s'agira d'optimiser le couple source-canal : considérant un canal binaire non symétrique.

Il faudra déterminer (théoriquement et expérimentalement) les conditions optimales d'utilisation de ce canal, c'est-à-dire trouver la distribution de probabilité des symboles d'entrée maximisant l'information mutuelle entre l'entrée et la sortie.

#### 1.1.1 Definitions

**Canal** Un canal discret sans mémoire est un modèle statistique comportant une entrée  $X$  (variable aléatoire) et une sortie  $Y$  (variable aléatoire), qui est une version bruitée de  $X$ .

La source émet un symbole issu de l'alphabet par exemple  $A$

$$A = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}\} \quad (1.1)$$

La sortie du canal discret sans mémoire est un symbole issu de l'alphabet que nous appellerons  $B$

$$B = \{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}\} \quad (1.2)$$

Chaque un des éléments de l'ensemble

**Canal binaire non symétrique** Le canal est caractérisé par ses probabilités de transition. Dans un canal non symétrique les probabilités de transition ne sont pas égales.

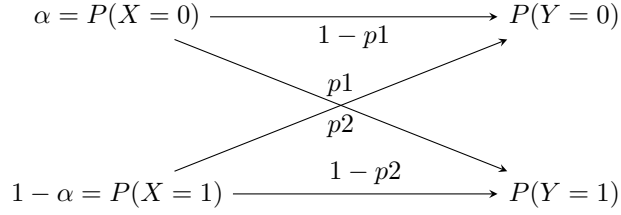


Figure 1.1: schéma du transition du canal

**Information mutuelle** L'information gagnée sur l'observation d'un évènement est à cause de que existe une certaine quantité de surprise un niveau d'incertitude. On utilise cette concept et la notion d'entropie pour comprendre comment est définie l'information mutuelle.

$H(X)$  est l'incertitude sur l'entrée avant l'observation de la sortie.  $H(X|Y)$

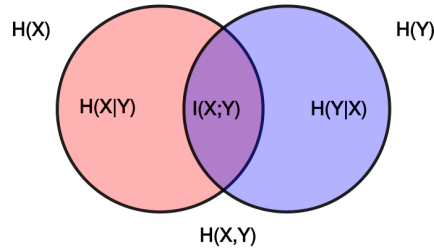


Figure 1.2: Entropies individuelles ( $H(X), H(Y)$ ), jointes ( $H(X, Y)$ ), d'une couple ( $X, Y$ ), avec l'information mutuelle  $I(X; Y)$ .

est l'incertitude sur l'entrée après l'observation de la sortie. Si même  $H(X) - H(X|Y)$  représente l'incertitude sur l'entrée résolue par l'observation de la sortie, ce qui est défini comme information mutuelle.

**Capacité du canal** la capacité d'un canal discret sans mémoire est le maximum de l'information mutuelle  $I(A, B)$  moyenne obtenu pour l'ensemble des symboles émis, la maximisation étant opérée sur toutes les distributions a priori possibles  $\{p(x_j)\}$  sur  $A$ .

$$C = \max I(A, B) \quad (1.3)$$

Sous les contraintes

$$p(x_j) \geq 0; \forall j \quad \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j) = 1 \quad (1.4)$$

## Chapter 2

# Implémentation en MATLAB®

### 2.1 Génération d'une séquence binaire

Pour effectuer la simulation du canal nous avons besoin d'avoir une séquence aléatoire de un alphabet binaire. Dans la Fig. ?? on voit bien que la probabilité de que  $P(X = 0)$  est défini comme un  $\alpha$  qui sera notre paramètre. On pourra générer un séquence de tout zéros pour un  $\alpha = 1$  et une séquence de toutes un pour  $\alpha = 0$ . Dans le code 2.1 nous avons utilisé la fonction **randsrc** ou on désigne l'alphabet à utiliser et la probabilité de chaque éléments.

Listing 2.1: Code générateur de séquence binaire aléatoire

```
help randsrc
%[...]
% If ALPHABET is a two-row matrix, the first row defines the
% Matrix possible outputs (as above). The second row of ALPHABET
% specifies the probability for each corresponding element. The
% elements of the second row must sum to one.
%[...]
alphabet = [0 1 ; alpha 1-alpha];
S=randsrc(1,N,alphabet);
```

### 2.2 Simulation du canal asymétrique

En suivant le schéma de la Fig.2.1 on a pu coder la simulation comme est montré dans le code 2.2.

Sachant que le canal est caractérisé pour les probabilités de transition  $P(Y = 1|X = 0) = p_1$   $P(Y = 0|X = 1) = p_2$  l'idée de l'implémentation est évaluer à chaque fois le contenu de  $X$  la séquence aléatoire d'entrée et selon sa valeur

est 1 ou 0 on va générer un séquence aléatoire (d'un élément) avec un probabilité pour 0 et 1 donnée pour soit  $p1$  ou bien  $p2$ . Il peut avoir de problèmes si on désigne de manière incorrecte les probabilités.

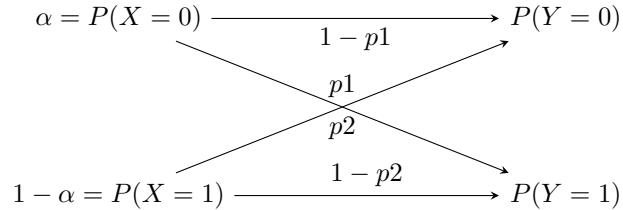


Figure 2.1: canal BNS

Listing 2.2: Code pour les probabilité de transition  $P(Y = 1|X = 0) = p1$   
 $P(Y = 0|X = 1) = p2$

```
% version en utilisant meme fonction seqbinaire
for i = 1:length(X)
    if(X(i) == 0) %en sachant X=0
        Y(i) = seqbinaire(1,1-p1); % proba de element 0 de
            l'alphabet donc 1-p1
    else %en sachant X=1
        Y(i) = seqbinaire(1,p2);
    end
end
end
```

La version implementé dans le code 2.2 a pris beaucoup de temps de simulation. Pour soigner cette problème l'utilisation du code 2.3 qui fait pas à pas l'affectation des valeurs selon les probabilités données. Le temps de simulation a été réduit considérablement

Listing 2.3: Code

```
for i = 1:length(X)
if(X(i) == 0) %en sachant X=0
if rand() < p1
Y(i) = 1; % p(Y=1|X=0)=p1
else
Y(i) = 0; %sinon Y = 0 avec proba = 1-p1
end
else %en sachant X=1
if rand() < p2
Y(i) = 0; % p(Y=0|X=1)=p2
else
Y(i) = 1; %sinon Y = 1 avec proba = 1-p2
end
end
end
end
```

## 2.3 Estimation de l'information mutuelle

On connaît la définition de l'information mutuelle

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X); \quad (2.1)$$

La stratégie est calculer les entropies séparément. D'abord l'entropie de la sortie  $Y$

$$H(Y) = -P(Y = 0)\log(P(Y = 0)) - P(Y = 1)\log(P(Y = 1)) \quad (2.2)$$

Et ensuite l'entropie conditionnelle

$$\begin{aligned} H(Y|X) = & (-P(Y = 0|X = 0)\log_2(P(Y = 0|X = 0)) - \\ & P(Y = 1|X = 0)\log_2(P(Y = 1|X = 0)))P(X = 0) \\ & + (-P(Y = 0|X = 1)\log_2(P(Y = 0|X = 1)) - \\ & P(Y = 1|X = 1)\log_2(P(Y = 1|X = 1)))P(X = 1); \end{aligned} \quad (2.3)$$

On voit bien que il faut avoir la valeur de tous les probabilités pour effectuer le calcul. Donc on va les estimer dans la section suivante (2.3.1).

### 2.3.1 Estimation de probabilités sur l'entrée et la sortie

En utilisant la équation suivante on peut estimer la valeur des probabilités. Ces valeurs de probabilité seront utilisés pour le calcul de l'information mutuelle expérimentale

$$P(Y = 0) \approx 1/N \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{y_n=0} \quad (2.4)$$

Pour notre cas on fait la somme des occurrences de numéro 1 et ensuite on calcule la probabilité complémentaire.

$$P(Y = 1) \approx 1/N \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{y_n=1} \quad P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) \quad (2.5)$$

$$P(X = 1) \approx 1/N \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{x_n=1} \quad P(X = 0) = 1 - P(X = 1) \quad (2.6)$$

En utilisant la fonction `find` de Matlab on peut trouver les éléments non nuls dedans un vecteur. Dans le code 2.4 on voit l'implémentation d'une fonction qui fait tout le travail.

Listing 2.4: Code

```
function [IXY]=info_mutuelle(X,Y)
% Fonction pour Estimation I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X);
%% Variables
N = length(X);
NY = length(Y);

%% Estimation de P(X = 0) et P(X = 1)
NXones = length(find(X));
NXzeros = N - NXones ;
PX1 = NXones/N; %find cherche les elements non nuls
PX0 = 1 - PX1;

%% Estimation de P(Y = 0) et P(Y = 1)
NYones = length(find(Y));
NYzeros = N - NYones;
PY1 = NYones/NY;
PY0 = 1 - PY1;
...
...
```

### 2.3.2 Estimation de probabilités conditionnelles

Avec la même notion de probabilités estime on calcule les probabilités conditionnelles.

$$P(Y = 1|X = 0) \approx 1/N_{x_n=0} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{y_n=1, x_n=0} \quad (2.7)$$

$$P(Y = 1|X = 1) \approx 1/N_{x_n=1} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{y_n=1, x_n=1} \quad (2.8)$$

Listing 2.5: Code

```
for i = 1:N
%% Estimation de P(Y = 0|X = 0) et P(Y = 0|X = 1)
if Y(i)==0 && X(i)== 0
    PY0X0 = PY0X0 +1; %% count P(Y = 0|X = 0)
elseif Y(i)==0 && X(i)==1
    PY0X1 = PY0X1+1; % count P(Y = 0|X = 1)
%% Estimation de P(Y = 1X = 0) et P(Y = 1|X = 1)
elseif Y(i)==1 && X(i) == 0
    PY1X0 = PY1X0 +1; %count for P(Y = 1X = 0)
elseif Y(i)==1 && X(i) == 1
    PY1X1 =PY1X1 + 1; %count for P(Y = 1|X = 1)
end
end
```



```
%utiliser bayes
PY1X1 = PY1X1/NXones;
PY1X0 = PY1X0/NXzeros;
PY0X1 = PY0X1/NXones;
PY0X0 = PY0X0/NXzeros;
...
...
```

En ayant maintenant tous les valeurs on pourra effectuer le calcul avec les équations ,2.2,2.3. On peut passer a l'étape suivante.

## Chapter 3

# Analyses et conclusions

### 3.1 Courbes et données obtenues

La trace de la fonction  $I(X,Y) = f(\alpha)$  est donnée dans la Fig. 3.1 Avec les paramètres donnés pour  $p1 = 0.1$  et  $p2 = 0.2$  et une discrétisation avec 200 points sur l'échelle d'alpha.

Dans cette figure on verra aussi que les deux courbes se superposent assez bien. Le début et fin de la courbe en 0 et un bon signal de que elle est correcte.

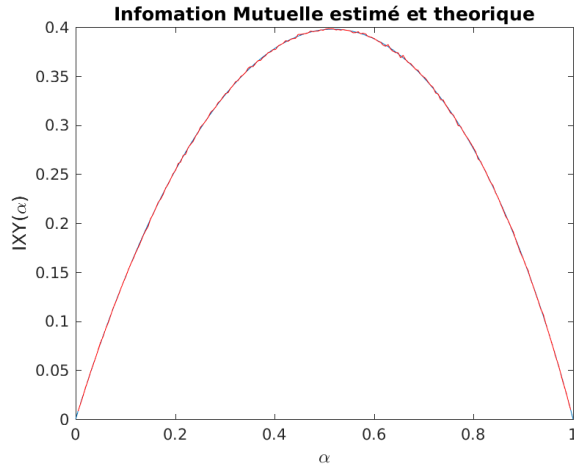


Figure 3.1

Dans la figure 3.2 la courbe montre l'erreur avec un facteur d'échelle de 30 (pour le voir mieux, parce que l'erreur est petit) entre chaque courbe la théorique et l'expérimentale. L'effet de que les courbes sont presque identiques est que on a une séquence X d'entrée très longue ( $N = 10^6$ ) et cela fait que la estimation soit très précise.

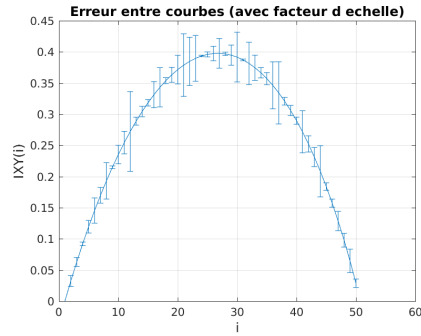


Figure 3.2

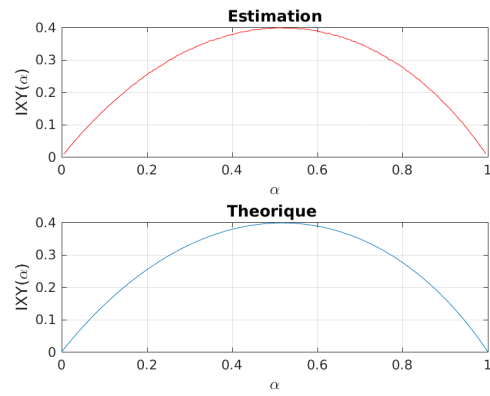


Figure 3.3

Listing 3.1: Code calcul de capacite du canal

```
Capacite_experimental = max(IXY)

A1 = -p1*log2(p1) - (1-p1)*log2(1-p1)
A2 = -p2*log2(p2) - (1-p2)*log2(1-p2)

%%Calcul de alpha optimale theorique
L = 2^((A1-A2)/(1-p1-p2))
alphaopt = (1-p2*(1+L))/((1-p1-p2)*(1+L))

%%calcul de la capacite
K = alphaopt*(1-p1)+(1-alphaopt)*p2
HBm = -K*log2(K)-(1-K)*log2(1-K)
HABm = A1*alphaopt+A2*(1-alphaopt)
Capacite_theorique = HBm - HABm
```

## 3.2 Conclusion

Les résultats trouvés sont très satisfaisant les valeur sont identiques pour la dernière simulation. L'equation utilisé pour le calcul de  $\alpha_{opt}$  est la suivante

$$\alpha_{opt} = \frac{1 - p2(1 + L)}{(1 - p1 - p2)(1 + L)} \quad (3.1)$$

$$L = 2^{\frac{A1 - A2}{1 - p1 - p2}} \quad (3.2)$$

Le  $\alpha_{exp} = 0.5176$  trouvé à l'indice 104 du vecteur de information mutuelle est le  $\alpha_{theorique} = 0.5176$  aussi.

Listing 3.2: Resultats

```
Capacite_experimental =
0.3978

>> alpha(104) % trouve a l indice 104

ans = 0.5176

alphaopt = 0.5176

Capacite_theorique = 0.3978
```

La capacité expérimental du canal calculé comme le maximum de la information mutuelle  $C_{exp} = 0.3978$  et  $C_{theorique} = 0.3978$

Dans la figure Fig3.5 comment les résultat de la simulation changent avec une

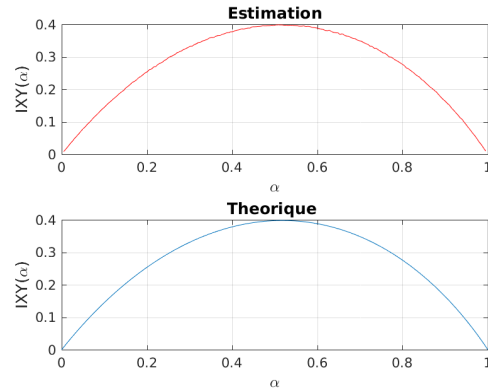


Figure 3.4

longueur de séquence plus petit ( $1e4$ ). Il y a plus d'erreur dans l'estimation.

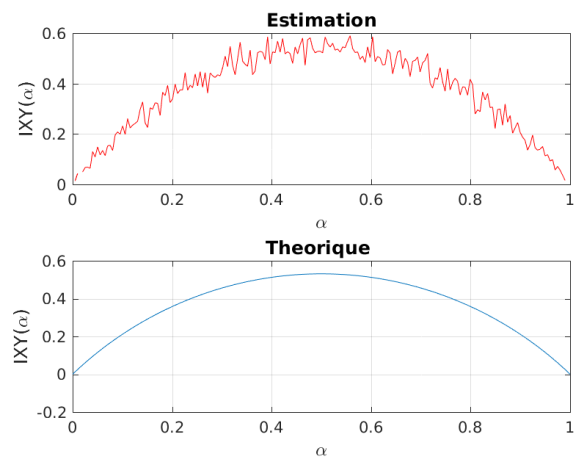


Figure 3.5