Technologie de l'information et codage

TP:
Codage de source et optimisation de la capacité du canal

Master SISEA

18 décembre 2016

Mauricio Caceres

Enseignant : Claude Cariou

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ENSSAT LANNION

Contents

Chapter 1

Introduction

1.1 Objectif

L'objectif de ce TP est de vérifier expérimentalement la théorie de Shannon en utilisant les outils de la théorie de l'information (entropie, information mutuelle). Plus précisément, il s'agira d'optimiser le couple source-canal : considérant un canal binaire non symétrique.
Il faudra déterminer **(théoriquement et expérimentalement)** les conditions optimales d'utilisation de ce canal, c'est-à-dire trouver la distribution de probabilité des symboles d'entrée maximisant l'information mutuelle entre l'entrée et la sortie.

1.1.1 Definitions

Canal Un canal discret sans mémoire est un modèle statistique comportant une entrée X (variable aléatoire) et une sortie Y (variable aléatoire), qui est une version bruitée de X.

La source émet un symbole issu de l'alphabet par exemple A

$$A = \{x_0, x_1, ..., x_{j-1}\} \tag{1.1}$$

La sortie du canal discret sans mémoire est un symbole issu de l'alphabet que nous appellerons B

$$B = \{y_0, y_1, ..., y_{i-1}\} \tag{1.2}$$

Chaque un des éléments de l'ensemblez

Canal binaire non symétrique Le canal est caractérisé par ses probabilités de transition. Dans un canal no symétrique les probabilités de transition ne sont pas égales.

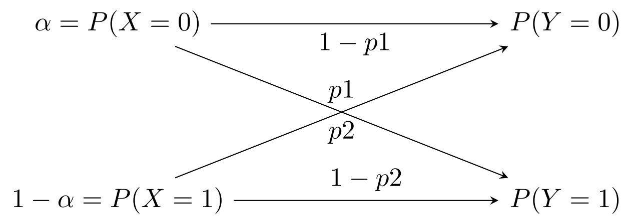

Figure 1.1: schèma du transition du canal

Information mutuelle L'information gagnée sur l'observation d'un évènement est à cause de que existe une certaine quantité de surprise un niveau d'incertitude. On utilise cette concept et la notion d'entropie pour comprendre comment est définie l'information mutuelle.
$H(X)$ est l'incertitude sur l'entrée avant l'observation de la sortie. $H(X|Y)$

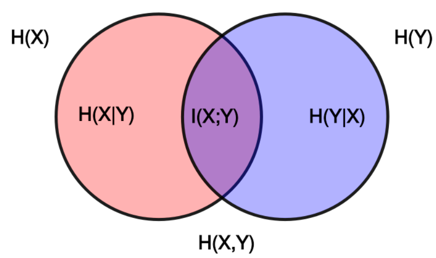

Figure 1.2: Entropies individuelles (H(X),H(Y)),
jointes (H(X,Y)), d'une couple (X, Y),
avec l'information mutuelle I(X; Y).

est l'incertitude sur l'entrée après l'observation de la sortie. Si même $H(X)$–$H(X|Y)$ représente l'incertitude sur l'entrée résolue par l'observation de la sortie, ce qui est défini comme information mutuelle.

Capacité du canal la capacité d'un canal discret sans mémoire est le maximum de l'information mutuelle I(A, B) moyenne obtenu pour l'ensemble des symboles émis, la maximisation étant opérée sur toutes les distributions a priori possibles $\{p(xj)\}$ sur A.

$$C = maxI(A, B) \tag{1.3}$$

Sous les cointraintes

$$p(x_j) \geq 0; \forall j \qquad \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j) = 1 \tag{1.4}$$

Chapter 2

Implémentation en MATLAB®

2.1 Génération d'une séquence binaire

Pour effectuer la simulation du canal nous avons besoin d'avoir une séquence aléatoire de un alphabet binaire. Dans la Fig. ?? on voit bien que la probabilité de que $P(X = 0)$ est défini comme un α qui sera notre paramètre. On pourra générer un séquence de tout zéros pour un $\alpha = 1$ et uns séquence de toutes un pour $\alpha = 0$ Dans le code 2.1 nous avons utilisé la fonction `randsrc` ou on désigne l'alphabet à utiliser et la probabilité de chaque éléments.

Listing 2.1: Code générateur de séquence bynaire aléatoire

```
help randsrc
%[...]
% If ALPHABET is a two-row matrix, the first row defines the
% Matrix  possible outputs (as above).  The second row of ALPHABET
% specifies the probability for each corresponding element.  The
% elements of the second row must sum to one.
%[...]
alphabet = [0 1 ; alpha 1-alpha];
S=randsrc(1,N,alphabet);
```

2.2 Simulation du canal asymétrique

En suivant le schèma de la Fig.2.1 on a pu coder la simulation comme est montre dans le code 2.2.
Sachant que le canal est caractérise pour les probabilités de transition $P(Y = 1|X = 0) = p1$ $P(Y = 0|X = 1) = p2$ l'idée de l'implementation est évaluer a chaque fois le contenu de X la séquence aléatoire d'entrée et selon si sa valeur

est 1 ou 0 on va générer un séquence aléatoire (d'un élément) avec un probabilité pour 0 et 1 donnée pour soit $p1$ ou bien $p2$. Il peut avoir de problèmes si on désigne de manière incorrecte les probabilités.

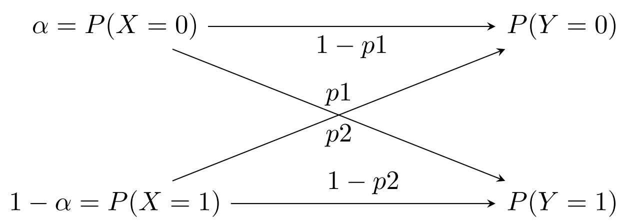

Figure 2.1: canal BNS

Listing 2.2: Code pour les probabilite de transition $P(Y = 1|X = 0) = p1$ $P(Y = 0|X = 1) = p2$

```
%% version en utilisant meme function seqbinaire
     for i = 1:length(X)
         if(X(i) == 0) %en sachant X=0
                Y(i) =  seqbinaire(1,1-p1); % proba de element 0 de
                     l'alphabet donc 1-p1
         else              %en sachant X=1
                Y(i) =  seqbinaire(1,p2);
         end
     end
```

La version implementé dans le code 2.2 a pris beacoup de temps de simulation. Pour soigner cette problème l'utilisation du code 2.3 qui fait pas à pas l'affectation des valeurs selon les probabilités données. Le temps de simulation a été réduit considérablement

Listing 2.3: Code

```
    for i = 1:length(X)
if(X(i) == 0) %en sachant X=0
if rand()< p1
Y(i) = 1;  % p(Y=1|X=0)=p1
else
Y(i) = 0; %sinon Y = 0 avec proba = 1-p1
end
else              %en sachant X=1
if rand()< p2
Y(i) = 0; % p(Y=0|X=1)=p2
else
Y(i) = 1; %sinon Y = 0 avec proba = 1-p2
end
end
end
```

2.3 Estimation de l'information mutuelle

On connait la définition de l'information mutuelle

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X); \tag{2.1}$$

La stratégie est calculer les entropies séparément. D'abord l'entropie de la sortie Y

$$H(Y) = -P(Y=0)log(P(Y=0)) - P(Y=1)log(P(Y=1)) \tag{2.2}$$

Et ensuite l'entropie conditionnelle

$$\begin{aligned} H(Y|X) = (-P(Y=0|X=0)log2(P(Y=0|X=0)) - \\ P(Y=1|X=0)log2(P(Y=1|X=0)))P(X=0) \\ +(-P(Y=0|X=1)log2(P(Y=0|X=1)) - \\ P(Y=1|X=1) * log2(P(Y=1|X=1)))(P=X1); \end{aligned} \tag{2.3}$$

On voit bien que il faut avoir la valeur de tous les probabilités pour effecteur le calcul. Donc on va les estimer dans la section suivante (2.3.1).

2.3.1 Estimation de probabilités sur l'entrée et la sortie

En utilisant la équation suivante on peut estimer la valeur des probabilités. Ces valeurs de probabilité seront utilisés pour le calcul de l'information mutuelle expérimentale

$$P(Y=0) \approx 1/N \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{y_n=0} \tag{2.4}$$

Pour notre cas on fait la somme des occurrences de numéro 1 et ensuite on calcule la probabilité complémentaire.

$$P(Y=1) \approx 1/N \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{y_n=1} \qquad P(Y=0) = 1 - P(Y=1) \tag{2.5}$$

$$P(X=1) \approx 1/N \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{x_n=1} \qquad P(X=0) = 1 - P(X=1) \tag{2.6}$$

En utilisant la fonction `find` de Matlab on peut trouver les éléments non nuls dedans un vecteur. Dans le code 2.4 on voit l'implémentation d'une fonction qui fait tout le travail.

Listing 2.4: Code

```
function [IXY]=info_mutuelle(X,Y)
%  Fonction pour  Estimation   I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X);
%% Variables
N = length(X);
NY = length(Y);

%% Estimation de P(X = 0) et P(X = 1)
NXones = length(find(X));
NXzeros = N - NXones ;
PX1 = NXones/N; %find cherche les elements non nuls
PX0 = 1 - PX1;

%% Estimation de P(Y = 0) et P(Y = 1)
NYones =  length(find(Y));
NYzeros =  N - NYones;
PY1 = NYones/NY;
PY0 = 1 - PY1;
...
...
```

2.3.2 Estimation de probabilités conditionnelles

Avec la même notion de probabilités estime on calcule les probabilites conditionneles.

$$P(Y = 1|X = 0) \approx 1/N_{x_n=0} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{y_n=1,x_n=0} \tag{2.7}$$

$$P(Y = 1|X = 1) \approx 1/N_{x_n=1} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{y_n=1,x_n=1} \tag{2.8}$$

Listing 2.5: Code

```

for i = 1:N
%% Estimation de P(Y = 0|X = 0) et P(Y = 0|X = 1)
if Y(i)==0 && X(i)== 0
                PY0X0 =  PY0X0 +1;  %% count P(Y = 0|X = 0)
        elseif Y(i)==0 && X(i)==1
                PY0X1 = PY0X1+1;    % count P(Y = 0|X = 1
        %% Estimation de P(Y = 1X = 0) et P(Y = 1|X = 1)
        elseif Y(i)==1 && X(i) == 0
                PY1X0 =  PY1X0 +1;   %count for P(Y = 1X = 0)
        elseif Y(i)==1 && X(i) == 1
                PY1X1 =PY1X1 + 1;   %count for P(Y = 1|X = 1)
        end
end
```

```
%utiliser bayes
PY1X1 = PY1X1/NXones;
PY1X0 = PY1X0/NXzeros;
PY0X1 = PY0X1/NXones;
PY0X0 = PY0X0/NXzeros;
...
...
```

En ayant maintenant tous les valeurs on pourra effecteur le calcul avec les équations ,2.2,2.3. On peut passer a l'étape suivante.

Chapter 3

Analyses et conclusions

3.1 Courbes et données obtenues

La trace de la fonction $I(X, Y) = f(\alpha)$ est donnée dans la Fig. 3.1 Avec les paramètres données pour $p1 = 0.1$ et $p2 = 0.2$ et une discrétisation avec 200 points sur l'échelle d'alpha.
Dans cette figure on verra aussi que les deux courbes se superposes assez bien. Le début et fin de la coube en 0 et un bonne signal de que elle est correcte.

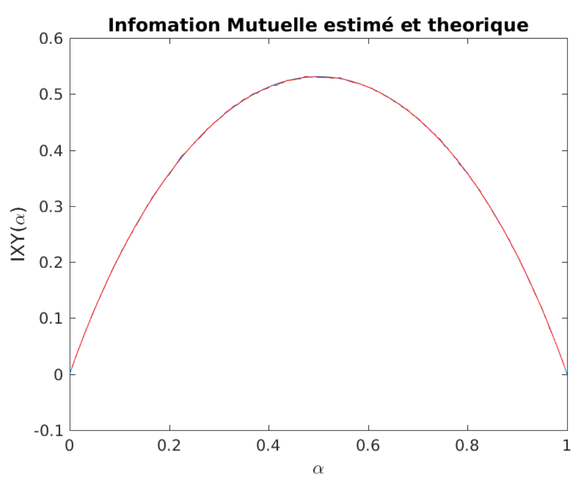

Figure 3.1

Dans la figure 3.2 la courbe montre l'erreur avec un facteur d'échelle de 30 (pour le voir mieux, parce que l'erreur est petit) entre chaque courbe la théorique et l'expérimentale

L'effet de que les courbes sont presque identiques est que on a une séquence X d'entrée très longue ($N = 10e6$) et cela fait que la estimation soit très précise

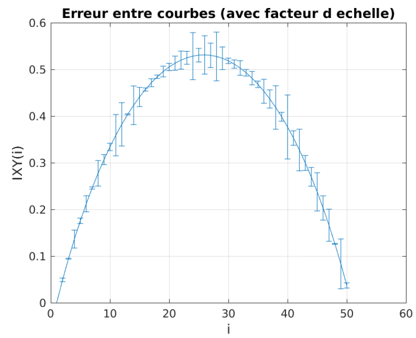

Figure 3.2

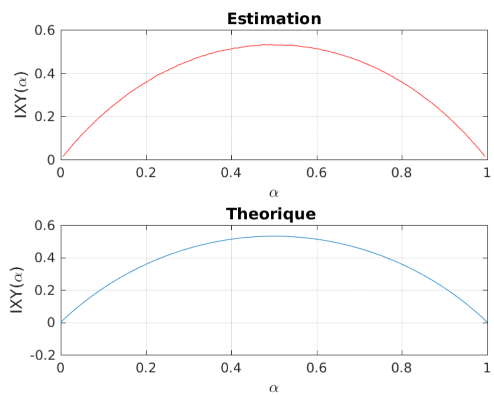

Figure 3.3

3.2 Conclusion

Une autre méthode de simulation en utilisant des masques binaire a été implémente qui améliore beaucoup la vitesse de la simulation, mais malheureusement ne donne pas de bonnes valeur parce que elle est mal conçu. Un tâche pour améliorer le code pourra être bien implémenter cette solution.

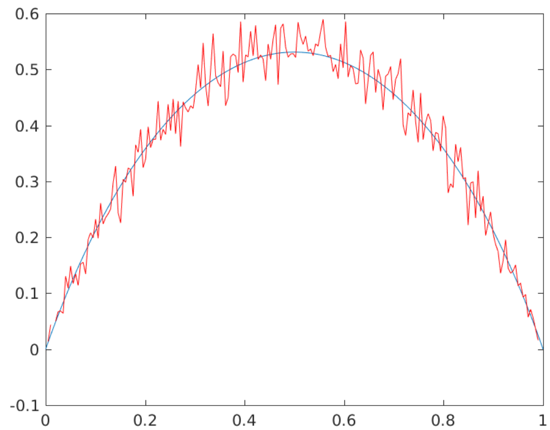

Figure 3.4

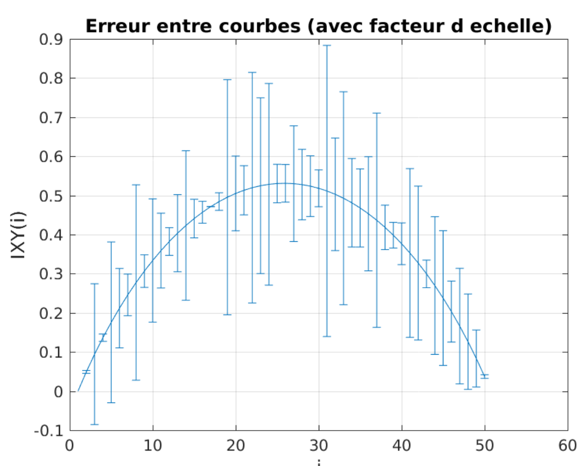

Figure 3.5

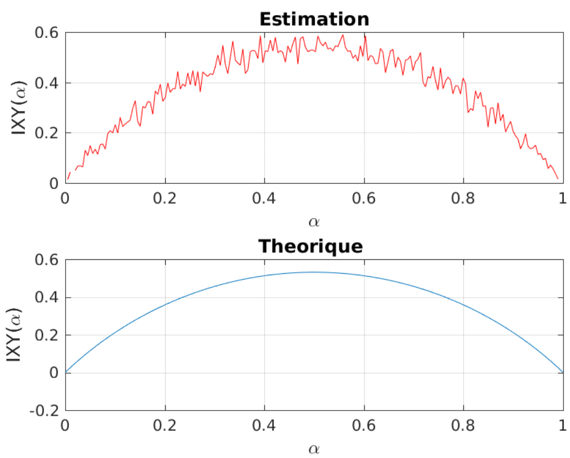

Figure 3.6