Fourierreihe

Maurice Preußner, 05.11.2016

Fourierreihe

Fourierreihe einer periodischen Funktion, die Periode entspricht T, es gilt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{T} \cdot k}_{\omega_0 \cdot k} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right)\right) \tag{1}$$

Reelle Fourierkoeffizienten

Auf den Faktor $\frac{2}{T}$ wird unten eingegangen

$$\boldsymbol{a_k} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right)\, dt \tag{2}$$

$$\boldsymbol{b_k} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right)\, dt \tag{3}$$

Fourierkoeffizienten für gerade/ungerade Funktionen

Für gerade Funktionen mit der Periode T gilt:

$$\boldsymbol{a_k} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right) \qquad \boldsymbol{b_k} = 0 \tag{4}$$

Für ungerade Funktionen mit der Periode T gilt:

$$\boldsymbol{a_k} = 0 \qquad \boldsymbol{b_k} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right) \tag{5}$$

Warum ist a_k für gerade Funktionen null?

Die Berechnung der Grundschwingung b_1 einer geraden Sinusfunktion $f(t) = \sin(2\pi t)$ sieht folgendermaßen aus:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(2\pi t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right)\, dt \tag{6}$$

Für die Periode und den Faktor k (vielfaches der Grundfrequenz) gilt: $T = 1$ und $k = 1$. Die Integration wird mithilfe der partiellen Integration vorgenommen: $\int u'v\; dx = [uv] - \int uv'$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(2\pi t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right)\, dt = \int_0^1 \underbrace{\sin(2\pi t)}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(2\pi t)}_{v}\; dt \tag{7}$$

$$\int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \cos(2\pi t)\; dt = \left[\underbrace{-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)}_{u} \cdot \underbrace{\cos(2\pi t)}_{v}\right]_0^1 \tag{8}$$

$$- \int_0^1 \underbrace{\cancel{-\frac{1}{2\pi}}\cos(2\pi t)}_{u} \cdot \underbrace{(\cancel{-2\pi}\sin(2\pi t))}_{v'}\; dx$$

$$\underbrace{2\int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \cos(2\pi t)\; dt}_{2a_k} = \cdot \left[-\frac{1}{2\pi} \cdot \cos^2(2\pi t)\right]_0^1 \tag{9}$$

$$a_k = -\frac{1}{4\pi} \cdot \left[\cos^2(2\pi t)\right]_0^1 = 0 \tag{10}$$

Dieser Zusammenhang gilt für alle Frequenzanteile $\omega = k \cdot \omega_0$, b_k ist für gerade Funktionen stets null.

komplexe Fourierreihe

Fourierreihe einer periodischen Funktion, die Periode entspricht T, es gilt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t} \tag{11}$$

Komplexer Fourierkoeffizient

$$\boldsymbol{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t} \tag{12}$$

Conclusions

- Joint formulation of LP and QP relaxation → LPQP.
- LPQP solved by a message-passing algorithm for modified unary potentials.
- Get a smooth objective for free. Key to fast convergence.
- Competitive results in terms of MAP state found.

Warum der Faktor $\frac{2}{T}$?

Der Faktor $\frac{2}{T}$ ist notwendig um für die Einzelschwingungen betragsmäßig korrekte Amplituden a_k und b_k zu erhalten.

Um diesen Zusammenhang zu erfassen wird von der Funktion $f(t) = \sin(2\pi t)$ ausgegangen. Die Fourierreihe dieser Funktion besteht aus der Grundschwingung mit einer Frequenz von $f_0 = 1\,\text{Hz}$ und einer Amplitude von $a_1 = 1$.

$$a_1 = 1 = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(2\pi t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 1 \cdot t\right)\, dt \tag{13}$$

...