

Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung

Serie 4

Maurice Althoff (FU 4745454)

Michael R. Jung (HU 502133)

Felix Völker (TU 331834)

13. November 2014

1 Aufgabe 15

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit $n \geq 2$ Knoten.

Zu zeigen: (1) \Rightarrow (2)

Wir nehmen an, dass D eine Arboreszenz ist (A1) und zerlegen die Aussage in zwei Teilbeweise.

Zu zeigen(Z1): D hat $n - 1$ Bögen.

Wir beweisen die Aussage per Widerspruch und nehmen an, dass D keine $n - 1$ Bögen besitzt (A2).

Somit gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $|A| < n - 1$

Da D genau n Knoten besitzt und es nur maximal $n - 2$ Bögen geben kann, ex. ein Knoten $u \in V$, der auf keinem Weg w mit maximaler Länge enthalten ist. Dies gilt, da ein Weg über alle Knoten mindestens $n - 1$ Kanten hätte. Daraus folgt, dass $\{uv, vu\} \cap A = \emptyset$ für alle $v \in V/\{u\}$ und somit kann D kein zusammenhängender Graph bzw. ein Baum, sowie keine Arboreszenz sein.

Widerspruch!

Fall 2: $|A| > n - 1$

Da D genau n Knoten besitzt und es mindestens n Bögen gibt. Nehmen wir an, dass aus allen Knoten eine Kante ausgehen, dann für einen beliebigen Knoten $v \in V$ gelten, dass n

Zu zeigen(Z2): D ist quasi-stark zusammenhängend.

Zu zeigen: (2) \Rightarrow (3)

Da D quasi-stark zusammenhängend ist, folgt dass für jedes Paar aus Knoten $u, v \in V$ ein Knoten w ex. , so dass es von w einen gerichteten Weg zu u und einen gerichteten Weg zu v gibt. Setzen wir nun $r = w$, so enthält D einen Knoten r , so dass es einen gerichteten (r, u) -Weg und einen gerichteten (r, v) -Weg in D gibt. Da u, v ein beliebes Paar aus Knoten ist, folgt dass es für jeden Knoten v' ein gerichteter (r, v') - Weg existiert.

Zu zeigen: (3) \Rightarrow (4)

Annahme(A1): D enthält einen Knoten r , so dass es in D für jeden anderen Knoten v genau

ein gerichteten (r, v) -Weg gibt.

Zu zeigen(Z1): D ist quasi-stark zusammenhängend.

Da A1 gilt, gibt es auch für ein beliebiges Paar von Knoten $u, v \in V$ einen gerichteten (r, u) -Weg und einen gerichteten (r, v) -Weg. Somit ist D nach Definition quasi-zusammenhängend. Zu zeigen(Z2): D besitzt einen Knoten r mit $\delta^-(r) = 0$ und erfüllt $\delta^-(v) = 1$ für alle $v \in V \setminus \{r\}$.

Da A1 gilt, muss r der Knoten, der zu allen anderen Knoten $v \in V$ einen gerichteten (r, v) -Weg besitzt, mit $\delta^-(r) = 0$ sein. Hätte r nämlich einen Innengrad größer 0, so gäbe es folgendermaßen einen Kreis in D (denn es ex. ein gerichteter Weg von r zu allen anderen Knoten v). Da deswegen auch mehr als ein gerichteten Weg von r zu den anderen Knoten v existieren kann, indem man mehrmals über den Knoten r läuft, entsteht ein Widerspruch zur Annahme A1. Zusätzlich müssen alle anderen Knoten $v \in V \setminus \{r\}$ den Innengrad 1 besitzen, da es nur genau einen gerichteten (r, v) -Weg gibt. Hätte ein Knoten $v' \in V \setminus \{r\}$ einen Innengrad von 0, so gäbe es keinen gerichteten (r, v') -Weg. Hätte v' einen Innengrad größer 1, sohieden gäbe es zwei vers

Zu zeigen: (4) \Rightarrow (5)

Zu zeigen: (5) \Rightarrow (1)

Da D genau n Knoten besitzt und damit $n - 1$ viele Knoten enthält, die einen Innengrad von 1 besitzen, muss D genau $n - 1$ Kanten besitzen. Hätte D mehr Kanten, so würde $\deg^-(r) > 0$ oder $\deg^-(v) > 1$ für einen Knoten $v \in V \setminus \{r\}$.

Hätte D weniger Kanten als $n - 1$ Kanten, so würde $\deg^-(v) = 0$ für einen Knoten $v \in V \setminus \{r\}$ gelten. Da D kreisfrei ist muss es somit einen Weg der Länge $n - 1$ geben, der über alle Knoten $v' \in V$ läuft (da sonst ein Knoten doppelt im Weg vorkommen und D somit einen Kreis enthalten würde). Daraus folgt, dass D zusammenhängend sein muss. Aus dieser Folgerung, der Annahme, dass D kreisfrei ist und für alle Knoten $v' \in V \setminus \{r\}$ $\deg^-(v') \leq 1$ gilt, folgt per Definition, dass D eine Arboreszenz ist.

2 Aufgabe 16

Eingabe: ein Graph $G = (V, E)$, $c \in E$ mit Kantengewichten $c(W) \forall e \in E$

Ausgabe: Wald $W \subseteq E$ mit max Gewicht $c(W)$

1. (Sortieren): Ist k die Anzahl der Kanten von G mit positivem Gewicht, so nummeriere diese k Kanten, so dass gilt $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \dots \geq c(e_k) > 0$.
2. Setze $W := \emptyset$.
3. FOR $i = 1$ TO k DO:
Falls $W \cup \{e_i\}$ keinen Kreis enthält, setze $W := W \cup \{e_i\}$
4. Gib W aus.

Induktionsannahme:

W_{i-1} ist ein maximaler Wald, der die ersten $i - 1$ vom Greedy-Max Algorithmus bestimmte Kanten e_1, \dots, e_{i-1} enthält.

Induktionsschritt: $i - 1 \rightarrow i$:

Zu zeigen, es gibt einen maximalen Wald W_i , der die vom Algorithmus ausgewählten Kanten $e_j \forall j \geq i$ enthält.

Der Algorithmus wählt die im i -ten Schritt die Kante e_i aus, für diese Kante muss gelten:

$c(e_1) \geq c(e_K) \forall e_K \notin W_{i-1}$, so dass $W_{i-1} \cup \{e_K\}$ keinen Kreis enthält.

Da W_{i-1} einen Wald ist, insbesondere $\forall e_K \in W_{i-1} \setminus \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$, d.h. für alle Kanten in W_{i-1} , die der Greedy Algorithmus noch nicht gewählt hat.

Füge nun diese Kante e_i zu W_{i-1} hinzu. Dann entsteht in W_{i-1} ein Kreis, da W_{i-1} bereits ein maximaler Wald war und durch hinzufügen einer Kante genau ein Kreis entsteht.

Entfernte aus diesem Kreis die Kante K , wobei $k \neq e_j \forall j \geq i$ ist. Diese Kante existiert in W_{i-1} , da der Greedy Max-Algorithmus sonst einen Kreis fabriziert hätte.

D.h. $W_i := (W_{i-1} \setminus \{k\}) \cup \{e_i\}$ ist ein Wald, der $e_j \forall j \geq i$ enthält und ausserdem maximal ist, da $c(e_i) \geq c(k)$.