Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 2

Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

31. Oktober 2014

Aufgabe 5

a)

$$
\begin{aligned}
x_1 &\ldots \text{Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ A}\\
x_2 &\ldots \text{Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ B}\\
x_3 &\ldots \text{Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ C}
\end{aligned}
$$

$$
c := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \; b := \begin{pmatrix} 5000 \\ 11000 \\ 8000 \end{pmatrix} \; x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{LP } P: \; \max c^T x \qquad & \text{unter den Nebenbedingungen}\\
Ax \leq b &\\
x \geq 0 &
\end{aligned}
$$

ausgeschrieben:

$$
\begin{aligned}
\max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \qquad & \text{unter den Nebenbedingungen} \\
2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 5000 & \qquad (y_1)\\
4x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 11000 & \qquad (y_2)\\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8000 & \qquad (y_3)\\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
D: \; \min b^T y \qquad & \text{unter den Nebenbedingungen}\\
A^T y \geq c &\\
y \geq 0 &
\end{aligned}
$$

ausgeschrieben:

$$\min\ 5000y_1 + 11000y_2 + 8000y_3 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen}$$
$$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5$$
$$3y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 4$$
$$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

c) Bevor wir versuchen möglichst gute Schranken für unseren Zielfunktionswert zu liefern, sei gesagt, dass jeder zulässige Vektor in P uns eine untere Schranke und jeder zulässige Vektor in D uns eine obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert liefert.

- Erster Versuch in P:
  Wir nehmen möglichst viel von Müsli A, da dieses den meisten Gewinn bringt. Ein zulässiger Vektor wäre $x^1 := \begin{pmatrix} 2500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gewinn wäre $c^T x^1 = 12500$.
- Erster Versuch in D:
  Wir wissen bereits, dass 12500 eine untere Schranke ist, um möglichst nah heranzukommen muss y_2 möglichst klein sein. Hier sieht man nun, dass $y^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein zulässiger Vektor ist. Zielfunktion: $b^T y^1 = 13000$.
  Wir wissen also nun: Das Optimum liegt in $[12500, 13000]$.
- Zweiter Versuch in P:
  Da Nüsse knapp sind und Müsli B viel davon verbraucht, versuchen wir x_1 groß zu lassen, und ein wenig Müsli C dazu zu nehmen. Da auch Rosinen knapp sind versuchen wir y_1 und y_3 möglichst genau zu treffen. Wenn wir das Gleichungssystem

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 8000 \end{pmatrix}$$

  lösen, so erhalten wir $x_1^2 = 2000, x_3^2 = 1000$. Da $(2000, 0, 1000)^T$ zulässig ist versuchen wir diesen. Gewinn: $c^T x^2 = 13000$. Nun wir wissen wir wegen $b^T y^1 = 13000$, dass dies optimal ist.

Aufgabe 6

a)
- $\{x \in \mathbb{R}^n | \forall 1 \leq i \leq n : x_i \leq 1 \land -x_i \leq 1\}$
- Setze $I := \{1, \dots, n\}$.
  $$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall S \subseteq I : \left(\sum_{i \in S} x_i - \sum_{i \in I \setminus S} x_i \right) \leq 1 \right\}$$

b) Setze $c' := \begin{pmatrix} c \\ c_0 \end{pmatrix}, d' := \begin{pmatrix} d \\ d_0 \end{pmatrix}$, dann kann man das Problem zunächst umschreiben für $x' \in \mathbb{K}^{n+1}$ zu:

$$\min \max \{c'^T x', d'^T x'\}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}}_{=:A'} x' \geq \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:b'}$$

Mit der erweiterten Ungleichung wird sichergestellt, dass $x'_{n+1} = 1$ ist, und somit die „Zielfunktionen“ wieder die gleichen sind.
Als nächstes nutzen wir die Gleichheit $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ und erhalten:

$$\min \left(\frac{(c' + d')^T x' + |(c' - d')^T x'|}{2} \right)$$
$$A'x' \geq b'$$

Aufgabe 7

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c_e \geq 0$ für alle $e \in E$. Wir konstruieren einen Graphen G' ähnlich wie im Skript S.45 und nehmen an, dass $V = \{v_1, ..., v_n\}$ gilt:

1. Die Graphen $G_1 = (U, E_1)$ mit $U := \{u_1, ..., u_n\}$ und $G_2 = (W, E_2)$ mit $W := \{w_1, ..., w_n\}$ seien knotendisjunkte isomorphe Bilder von G, so dass die Abbildungen $v_i \mapsto u_i$ und $v_i \mapsto w_i$, $i = 1, ..., n$ Isomorphismen sind.

2. Aus G_2 entfernen wir das Bild des Knoten u, dann verbinden wir die übrigen Knoten $w_i \in W - \{v\}$ mit ihren isomorphen Bildern $u_i \in U - \{v\}$ durch eine Kante $u_i w_i$ mit dem Gewicht $c(u_i, w_i) = 0$. Die Kanten von G_1 und $G_2 - u$ enthalten das Gewicht ihrer Urbildkanten.

3. G' entsteht durch die Vereinigung von G_1 und $G_2 - \{u\}$ unter Hinzufügung der Kanten $u_i w_i$.

4. Zusätzlich fügen wir G' einen Knoten v' hinzu, der nur mit dem Bild des Zielknoten v in G_1 verbunden ist. Diese Kante hat Gewicht 0.

Zu zeigen: Ein perfektes Matching minimalen Gewichts in G' führt zu einem kürzesten $[u, v]$-Weg gerader Länge in G.

Beweis. Zeigen wir zunächst, das G' genau dann ein perfektes Matching enthält, wenn G einen $[u, v]$-Weg gerader Länge enthält.

$\Leftarrow$ Wählen wir zu einem $[u = x_0, e_1, x_1, \ldots, a_n, x_n = v]$-Weg gerader Länge in G (d.h. $2|n$) folgende Kanten in G':
Für alle geraden $i \leq n$ wähle die zu e_i korrespondierende Kante in G_2.
Für alle geraden $i \leq< n$ wähle die zu e_i korrespondierende Kante in G_1.
Zusätzlich wähle die Kanten $u_i w_i$ für alle Knoten die nicht auf unserem Pfad liegen und die Kante $v_{G_1} v'$ in G_1, da ja nur v_{G_2} durch den Pfad gematcht wurde. Dies liefert uns ein perfektes Matching in G'.

$\Rightarrow$ Sei $M \subseteq E'$ ein perfektes Matching in G'. Es gilt:
$\Rightarrow v_{G_1} v' \in M$, da v' nicht anders gematcht werden kann.
$\Rightarrow v_{G_2}$ wird durch eine Kante $w v_{G_2} \in E_2$ gematcht, da v_{G_1} bereits gematcht wurde. Dies setzt sich nun solange fort bis wir nach u_{G_1} gelangen, denn dies ist der einzige Knoten, der kein Bild im anderen Graphen hat und somit das Verfahren ein Ende findet. Man erkennt nun, dass wir eine ohne die Kante $v_{G_1} v'$ eine gerade Anzahl von Kanten besucht haben, die zu einem $[u, v]$-Weg in G gerader Länge korrespondieren.

□

Bleibt zu zeigen, dass ein perfektes Matching minimalen Gewichts in G' eine kürzesten $[u, v]$-Weg in G gerader Länge liefert. Dies zeigen wir per Widerspruch.

Beweis. Sei M ein perfektes Matching minimalen Gewichts in G'. Angenommen der im zweiten Teil des obigen Beweises gefundene $[u, v]$-Weg W in G gerader Länge ist kein kürzester $[u, v]$-Weg gerader Länge. Sei W' ein eben solcher. Das Gewicht von M ist mindestens so groß wie das von W (da die Kantengewichte nichtnegativ sind), aber das Gewicht von W' ist kleiner. Nach dem ersten

Schritt unseres Beweises lässt sich nun aber auch ein perfektes Matching M' in G' finden, dessen Gewicht genau dem von M' entspricht (denn alle anderen Kanten haben Gewicht 0). Somit war M kein perfektes Matching minimalen Gewichts in G'. $\lightning$ $\square$

Aufgabe 8

Bemerkung: Die Aussage ist so nicht ganz richtig, da in 2. und 3. nicht gefordert wird, dass es von jedem Knoten mit einem (Eingangs-)Grad größer Null auch ein (nicht unbedingt gerichteter) Weg zu jedem anderen Knoten mit einem (Eingangs-)Grad größer Null existiert. Diese Eigenschaft nennen wir (E).

Lemma: Jeder geschlossene Pfad in einem Digraphen ist eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise.

Beweis. Sei $(v_0, v_1, \ldots, v_n = v_0)$ ein geschlossener Pfad.
Beweis per Induktion über die Länge n des Pfades:
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ und $n = 1$ ist nichts zu zeigen, da hier keine Kante doppelt auftreten kann.
Induktionsvoraussetzung:
Für alle geschlossenen Pfade der Länge $\leq n$ gilt, dass sie eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise sind.
Induktionsbehauptung:
Für alle geschlossenen Pfade der Länge $n+1$ gilt, dass sie eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise sind.
Induktionsschritt:

Fall 1: Die Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_n$ sind alle paarweise verschieden.
In diesem Fall ist nichts zu zeigen, da dann $(v_0, v_1, \ldots, v_{n+1} = v_0)$ ein gerichteter Kreis ist und somit eine „Vereinigung"bogendisjunkter Kreise.

Fall 2: Es existieren zwei Indizes $i < j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $v_i = v_j$.
Dann sind $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_{n+1})$ und $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ zwei untereinander bogendisjunkte, geschlossene Pfade. Diese haben jeweils eine Länge $\leq n$ und sind somit nach Induktionsvoraussetzung eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise. Insgesamt ist also auch $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise.

$\square$

1. $\Rightarrow$ 2. : D enthält einen geschlossenen Pfad der alle Bögen aus A benutzt. (E) gilt also trivialerweise. Außerdem folgt nach obigem Lemma, dass A eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise ist. ✓

2. $\Rightarrow$ 3. : (E) gilt natürlich weiterhin. Betrachte $v \in V$ mit $|\delta^-(v)| = k$.
Da A eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise ist, liegt v auf genau k bogendisjunkten Kreisen. Folglich existiert zu jeder eingehenden auch eine jeweils verschiedene ausgehende Kante und es gilt somit $|\delta^+(v)| = k$. ✓

3. $\Rightarrow$ 1. : Sei $v_0 \in V$ mit $|\delta^+(v_0)| > 0$. (Falls kein solcher Knoten existiert, ist nichts zu zeigen.)
Sei $a_1 = (v_0, v_1)$. Da $|\delta^+(v_1)| = |\delta^-(v_1)|$ finden wir (falls $v_0 \neq v_1$) einen bisher noch nicht besuchten Bogen $a_2 = (v_1, v_2)$. Dies können wir solange fortsetzen, bis wir wieder in v_0 ankommen und dieser keine noch nicht besucht ausgehende Kante hat. Das gilt, weil für alle $v \in V$ gilt: $|\delta^+(v)| = |\delta^-(v)|$. Falls $(v_0, a_1, v_1, \ldots, a_n, v_n = v_0)$ noch nicht alle Bögen enthält, so gibt es wegen (E) einen Index $1 < i < n$, für den gilt, dass v_i noch einen nicht besuchten ausgehenden Bogen besitzt. Nun können wir das Verfahren von oben mit $v'_0 = v_i$ wiederholen. Dann ist $(v_0, a_0, v_1, \ldots, v_i = v'_0, a'_1, v'_1, \ldots, v'_{n'} = v_i, a_{i+1}, \ldots, v_n)$ ein geschlossener Pfad. Den letzten Schritt können wir wegen (E) solange wiederholen, bis wir jeden Bogen genau einmal besucht haben. Also gilt: D ist *eulersch*.