Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 6

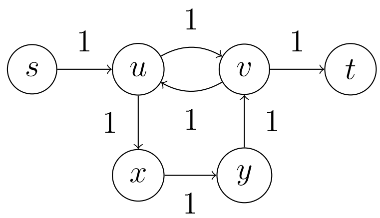
Sven-Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

27. November 2014

Aufgabe 20

Aufgabe 21

a) Diese Aussage ist falsch. Betrachte folgendes Gegenbeispiel:

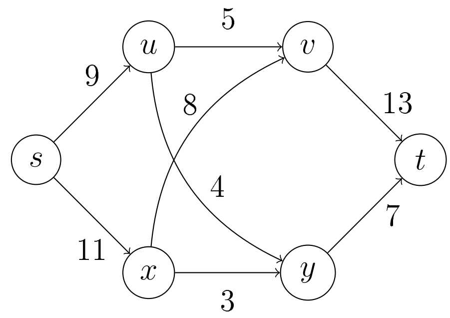


Hier können wir alle Bögen saturieren (d.h. $x_a = c_a \, \forall a \in A$) und erhalten einen maximalen Fluss. Insbesondere ist aber $x_{uv} = x_{vu} = 1$.

b) Diese Aussage ist wahr. Seien ein Netzwerk $((V, A), c, s, t)$ und ein maximaler Fluss $x_a, a \in A$ gegeben. Seien $u, v \in V$ mit $x_{uv} \neq 0 \neq x_{vu}$. O.B.d.A. sei $x_{uv} \geq x_{vu}$ (sonst vertausche u und v). Dann ist auch $x'_a, a \in A$ ein maximaler Fluss mit $x'_a = x_a \, \forall a \in A \setminus \{(u, v), (v, u)\}$ und $x'_{uv} = x_{uv} - x_{vu}, x'_{v,u} = 0$.
Man sieht, dass für jeden Knoten v gilt: $\sum\limits_{a \in \delta^+(v)} x'_a - \sum\limits_{a \in \delta^-(v)} x'_a = \sum\limits_{a \in \delta^+(v)} x_a - \sum\limits_{a \in \delta^-(v)} x_a$.
Dies gilt, da sich für alle Knoten außer u und v nichts ändert und für diese beiden

sich beide Summen um den gleichen Betrag ändern. Außerdem bleibt der Fluss auch maximal, da sich die Bilanz auch für s nicht geändert hat. Dieses Verfahren kann man sooft wiederholen, bis die geforderte Bedingung für alle Knotenpaare erfüllt ist, da zwei solche Veränderungen sich gegenseitig nicht beeinflussen.

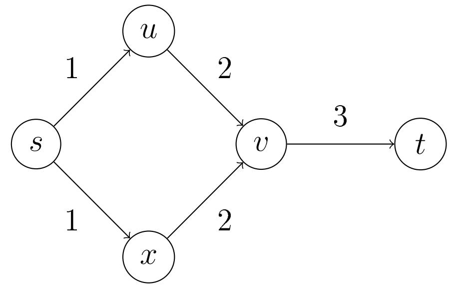
c) Diese Aussage ist falsch. Betrachte folgendes Gegenbeispiel:



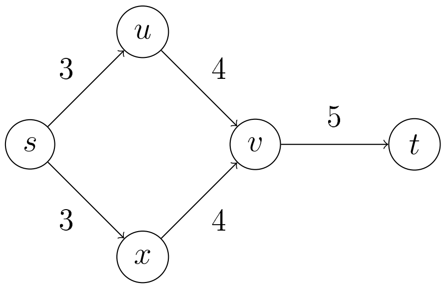
Hier sind alle Kapazitäten paarweise verschieden, aber sowohl $B := \delta(\{s\})$ als auch $C := \delta(\{s, u, x\})$ minimale (s,t)-Schnitte mit $c(B) = c(C) = 20$. Minimal sind sie, denn es existiert ein Fluss $f_a, a \in A$ mit $f_a = c_a \, \forall a \in A$ und Wert 20. Im Übrigen ist hier sogar jeder (s,t)-Schnitt minimal.

d) Diese Aussage ist wahr. Sei $B \subseteq$ ein beliebiger (s,t)-Schnitt und $c'_a = \lambda c_a \, \forall a \in A$. Dann ist nach der Veränderung $c'(B) = \sum\limits_{a \in B} c'_a = \sum\limits_{a \in B} \lambda c_a = \lambda \sum\limits_{a \in B} c_a$. Nun ist klar, dass ein minimaler Schnitt auch minimal bleibt, da für beliebige (s,t)-Schnitte S_1, S_2 mit $c(S_1) \leq c(S_2)$ gilt: $c'(S_1) \leq c'(S_1) \iff \lambda c(S_1) \leq \lambda c(S_2) \overset{\lambda > 0}{\iff} c(S_1) \leq c(S_2)$.

e) Diese Aussage ist falsch. Betrachte folgendes Gegenbeispiel:



Hier wäre $B := \delta(s)$ ein minimaler (s,t)-Schnitt mit $c(B) = 2$. Erhöhen wir aber jede Kapazität um 2, so erhalten wir folgendes Netzwerk:



Hier ist nun $\delta(s)$ kein minimaler (s,t)-Schnitt mehr, denn $c(\delta(s)) = 6$, aber $c(\delta(\{s,u,x,v\})) = 5$.
Das Problem bei dieser Veränderung ist, dass ein (s,t)-Schnitt in der Anzahl der beteiligten Kanten skaliert wird.

Aufgabe 22

Aufgabe 23