Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 2

Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

31. Oktober 2014

Aufgabe 5

a)

$x_1 \ldots$ Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ A
$x_2 \ldots$ Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ B
$x_3 \ldots$ Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ C

$$c := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \; b := \begin{pmatrix} 5000 \\ 11000 \\ 8000 \end{pmatrix} \; x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{LP } P: \; \max c^T x \qquad & \text{unter den Nebenbedingungen} \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{aligned}$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} &\max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 && \text{unter den Nebenbedingungen} \\ &2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 5000 && (y_1) \\ &4x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 11000 && (y_2) \\ &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8000 && (y_3) \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D: \; \min b^T y \qquad & \text{unter den Nebenbedingungen} \\ A^T y \geq c & \\ y \geq 0 & \end{aligned}$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} &\min\ 5000y_1 + 11000y_2 + 8000y_3 && \text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ &\quad 3y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 4 \\ &\quad 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ &\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c)
- Erster Versuch in P:
  Wir nehmen möglichst viel von Müsli A, da dieses den meisten Gewinn bringt. Ein zulässiger Vektor wäre $x^1 := \begin{pmatrix} 2500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gewinn wäre $c^T x^1 = 12500$.
- Erster Versuch in D:
  Wir wissen bereits, dass 12500 eine untere Schranke ist, um möglichst nah heranzukommen muss y_2 möglichst klein sein. Hier sieht man nun, dass $y^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein zulässiger Vektor ist. Zielfunktion: $b^T y^1 = 13000$.
  Wir wissen also nun: Das Optimum liegt in $[12500, 13000]$.
- Zweiter Versuch in P:
  Da Nüsse knapp sind und Müsli B viel davon verbraucht, versuchen wir x_1 groß zu lassen, und ein wenig Müsli C dazu zu nehmen. Da auch Rosinen knapp sind versuchen wir y_1 und y_3 möglichst genau zu treffen. Wenn wir das Gleichungssystem

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 8000 \end{pmatrix}$$

  lösen, so erhalten wir $x_1^2 = 2000, x_3^2 = 1000$. Da $(2000, 0, 1000)^T$ zulässig ist versuchen wir diesen. Gewinn: $c^T x^2 = 13000$. Nun wir wissen wir wegen $b^T y^1 = 13000$, dass dies optimal ist.

Aufgabe 6

a)
- $\{x \in \mathbb{R}^n | \forall 1 \leq i \leq n : x_i \leq 1 \wedge -x_i \leq 1\}$
- Setze $I := \{1, \ldots, n\}$.
  $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \forall S \subseteq I : \left(\sum_{i \in S} x_i - \sum_{i \in I \setminus S} x_i \right) \leq 1 \right\}$

b) Setze $c' := \begin{pmatrix} c \\ c_0 \end{pmatrix}, d' := \begin{pmatrix} d \\ d_0 \end{pmatrix}$, dann kann man das Problem zunächst umschreiben für $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ zu:

$$\min \max \{c'^T x', d'^T x'\}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}}_{=:A'} x' \geq \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:b'}$$

Mit der erweiterten Ungleichung wird sichergestellt, dass $x'_{n+1} = 1$ ist, und somit die „Zielfunktionen“ wieder die gleichen sind.

Als nächstes nutzen wir die Gleichheit $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}&\min\left((c'+d')^T x' + |(c'-d')^T x'|\right)\\ &A'x' \geq b'\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Aufgabe 8

Bemerkung: Die Aussage ist so nicht ganz richtig, da in 2. und 3. nicht gefordert wird, dass es von jedem Knoten mit einem (Eingangs-)Grad größer Null auch ein (nicht unbedingt gerichteter) Weg zu jedem anderen Knoten mit einem Eingangs-)Grad größer Null existiert. Diese Eigenschaft nennen wir (E).

Lemma: Jeder geschlossene Pfad in einem Digraphen ist eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise.

Beweis. Sei $(v_0, v_1, \ldots, v_n = v_0)$ ein geschlossener Pfad.
Beweis per Induktion über die Länge n des Pfades:
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ und $n = 1$ ist nichts zu zeigen, da hier keine Kante doppelt auftreten kann.
Induktionsvoraussetzung:
Für alle geschlossenen Pfade der Länge $\leq n$ gilt, dass sie eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise sind.
Induktionsbehauptung:
Für alle geschlossenen Pfade der Länge $n+1$ gilt, dass sie eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise sind.
Induktionsschritt:

Fall 1: Die Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_n$ sind alle paarweise verschieden.
In diesem Fall ist nichts zu zeigen, da dann $(v_0, v_1, \ldots, v_{n+1} = v_0)$ ein gerichteter Kreis ist und somit eine „Vereinigung"bogendisjunkter Kreise.

Fall 2: Es existieren zwei Indizes $i < j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $v_i = v_j$.
Dann sind $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_{n+1})$ und $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ zwei untereinander bogendisjunkte, geschlossene Pfade. Diese haben jeweils eine Länge $\leq n$ und sind somit nach Induktionsvoraussetzung eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise. Insgesamt ist also auch $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise.

□

1. ⇒ 2. : D enthält einen geschlossenen Pfad der alle Bögen aus A benutzt. (E) gilt also trivialerweise. Außerdem folgt nach obigem Lemma, dass A eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise ist. ✓

2. ⇒ 3. : (E) gilt natürlich weiterhin. Betrachte $v \in V$ mit $|\delta^-(v)| = k$.
Da A eine Vereinigung bogendisjunkter Kreise ist, liegt v auf genau k bogendisjunkten Kreisen. Folglich existiert zu jeder eingehenden auch eine jeweils verschiedene ausgehende Kante und es gilt somit $|\delta^+(v)| = k$. ✓

3. ⇒ 1. : Sei $v_0 \in V$ mit $|\delta^+(v_0)| > 0$. (Falls kein solcher Knoten existiert, ist nichts zu zeigen.)
Sei $a_1 = (v_0, v_1)$. Da $|\delta^+(v_1)| = |\delta^-(v_1)|$ finden wir (falls $v_0 \neq v_1$) einen bisher noch nicht besuchten Bogen $a_2 = (v_1, v_2)$. Dies können wir solange fortsetzen, bis wir wieder in v_0 ankommen und dieser keine noch nicht besucht ausgehende Kante hat. Das gilt weil für alle $v \in V$ gilt: $|\delta^+(v)| = |\delta^-(v)|$. Falls $(v_0, a_1, v_1, \ldots, a_n, v_n = v_0)$ noch nicht alle Bögen enthält, so gibt es wegen (E) einen Index $1 < i < n$, für den gilt, dass v_i noch einen nicht besuchten ausgehenden Bogen besitzt. Nun können wir das Verfahren von oben mit $v'_0 = v_i$ wiederholen.

Dann ist $(v_0, a_0, v_1, \ldots, v_i = v'_0, a'_1, v'_1, \ldots, v'_{n'} = v_i, a_{i+1}, \ldots, v_n)$ ein geschlossener Pfad. Den letzten Schritt können wir wegen (E) solange wiederholen, bis wir jeden Bogen genau einmal besucht haben. Also gilt: D ist *eulersch*.