Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 2

Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

29. Oktober 2014

Aufgabe 5

a)

$$
\begin{aligned}
x_1 &\ldots \text{Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ A} \\
x_2 &\ldots \text{Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ B} \\
x_3 &\ldots \text{Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ C}
\end{aligned}
$$

$$
c := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \; b := \begin{pmatrix} 5000 \\ 11000 \\ 8000 \end{pmatrix} \; x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{LP } P: \; \max c^T x & \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \\
Ax &\leq b \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

ausgeschrieben:

$$
\begin{aligned}
&\max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 && \text{unter den Nebenbedingungen} \\
&2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 5000 && (y_1) \\
&4x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 11000 && (y_2) \\
&3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8000 && (y_3) \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
D: \; \min b^T y & \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \\
A^T y &\geq c \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \min\ & 5000y_1 + 11000y_2 + 8000y_3 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \\ & 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ & 3y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 4 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c)
- Erster Versuch in P:
  Möglichst viel von Müsli A, da dieses den meisten Gewinn bringt. Ein zulässiger Vektor wäre $x^1 := \begin{pmatrix} 2500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gewinn wäre $c^T x^1 = 12500$.
- Erster Versuch in D:
  Wir wissen bereits, dass 12500 eine untere Schranke ist, um möglichst nah heranzukommen muss y_2 möglichst klein sein. Hier sieht man nun, dass $y^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein zulässiger Vektor ist. Zielfunktion: $b^T y^1 = 13000$.
  Wir wissen also nun: Das Optimum liegt in $[12500, 13000]$.
- Zweiter Versuch in P:
  Da Nüsse knapp sind und Müsli B viel davon verbraucht versuchen wir x_1 groß zu lassen, und ein wenig Müsli C dazu zu nehmen. Da auch Rosinen knapp sind versuchen wir y_1 und y_3 möglichst genau zu treffen. Wenn wir das Gleichungssystem

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 8000 \end{pmatrix}$$

  lösen, so erhalten wir $x_1^2 = 2000, x_3^2 = 1000$ Da $(2000, 0, 1000)^T$ zulässig ist versuchen wir diesen. Gewinn: $c^T x^2 = 13000$. Nun wir wissen wir wegen $b^T y^1 = 13000$, dass dies optimal ist.

Aufgabe 6

a)
- $\{x \in \mathbb{R}^n | \forall 1 \leq i \leq n : x_i \leq 1 \wedge -x_i \leq 1\}$
- Setze $I := \{1, \ldots, n\}$.
  $\left\{ x \in \mathbb{R}^n | \forall S \subseteq I : \left(\sum\limits_{i \in S} x_i - \sum\limits_{i \in I \setminus S} x_i \right) \leq 1 \right\}$
-

Aufgabe 7

Aufgabe 8