Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 4

Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

27. November 2014

1 Aufgabe13

Tiefensuche:

```
DFS(node, goal)
{
  if (node == goal) {
    return node;
  } else
  {
    stack := expand (node)
    while (stack is not empty)
    {
      node' := pop(stack);
      DFS(node', goal);
    }
  }
}
```

In der Tiefensuche werden in jedem Iterationsschritt alle benachbarten Knoten besucht und da in einer Clique alle Knoten benachbart sind werden diese in einem Weg von einem Blatt zur Wurzel gespeichert.

2 Aufgabe 15

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit $n \geq 2$ Knoten.
Zu zeigen: (1) $\Rightarrow$ (2)
Wir nehmen an, dass D eine Arboreszenz ist(A1) und zerlegen die Aussage in zwei Teilbeweise.

Zu zeigen(Z1): D hat $n - 1$ Bögen.
Wir beweisen die Aussage per Widerspruch und nehmen an, dass D keine $n-1$ Bögen besitzt(A2).
Somit gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $|A| < n - 1$

Da D genau n Knoten besitzt und es nur maximal $n-2$ Bögen geben kann, ex. ein Knoten $u \in V$, der auf keinem Weg w mit maximaler Länge enthalten ist. Dies gilt, da ein Weg über alle Knoten mindestens $n-1$ Kanten hätte. Daraus folgt, dass $\{uv, vu\} \cap A = \emptyset$ für alle $v \in V/\{u\}$ und somit kann D kein zusammenhängender Graph bzw. ein Baum, sowie keine Arboreszenz sein. **Widerspruch!**

Fall 2: $|A| > n-1$

Da D genau n Knoten besitzt und es mindestens n Bögen gibt. Nehmen wir an, dass aus allen Knoten eine Kante ausgehen, dann für einen beliebigen Knoten $v \in V$ gelten, dass n
Zu zeigen(Z2): D ist quasi-stark zusammenhängend.

Zu ze
Zu zeigen: (2) $\Rightarrow$ (3)
Annahme(A1): D hat $n-1$ Bögen und ist quasi-stark zusammenhängend.
Zu zeigen: D enthält einen Knoten r, so dass es in D für jeden Knoten v genau einen gerichteten r,v-Weg gibt. Da A1 gilt, folgt dass für jedes Paar aus Knoten $u, v \in V$ ein Knoten w ex. , so dass es von w einen gerichteten Weg zu u und einen gerichteten Weg zu v gibt. Setzen wir nun $r = w$, so enthält D einen Knoten r, so dass es einen gerichteten (r, u)-Weg und einen gerichteten (r, v)-Weg in D gibt. Da u, v ein beliebes Paar aus Knoten ist, folgt dass für jeden Knoten v' ein gerichteter (r, v')- Weg existiert.
Zusätzlich gilt, dass r eine Kante, bzw. einen gerichteten Weg zu allen anderen $n-1$ Knoten besitzt. Das heißt es muss min. $n-1$ Kanten geben, die r mit den anderen Knoten v direkt oder über einen Weg verbinden, da sonst kein (r, v)-Weg existieren würde. Da per A1 gilt, dass D genau $n-1$ Knoten hat, kann nur genau ein gerichteter Weg existieren. DIes ist der Fall, da für jeden neuen Weg eine zusätzlich Kante benötigt werden würde, also mindestens n viele Kanten. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zur Annahme A1. Somit gilt die Aussage.

Zu zeigen: (3) $\Rightarrow$ (4)

Annahme(A1): Denthält einen Knoten r, so dass es in D für jeden anderen Knoten v genau ein gerichteten (r, v)-Weg gibt.
Zu zeigen(Z1): D ist quasi-stark zusammenhängend.
Da A1 gilt, gibt es auch für ein beliebiges Paar von Knoten $u, v \in V$ einen gerichteten (r, u)-Weg und einen gerichteten (r, v)-Weg. Somit ist D nach Definition quasi-zusammenhängend. Zu zeigen(Z2): D besitzt einen Knoten r mit $\delta^-(r) = 0$ und erfüllt $\delta^-(v) = 1$ für alle $v \in V$
$\{r\}$.
Da A1 gilt, muss r der Knoten, der zu allen anderen Knoten $v \in V$ einen gerichteten (r, v)-Weg besitzt, mit $\delta^-(r) = 0$ sein. Hätte r nämlich einen Innengrad größer 0, so gäbe es folgendermaßen einen Kreis in D(denn es ex. ein gerichteter Weg von r zu allen anderen Knoten v). Da deswegen auch mehr als ein gerichteten Weg von r zu den anderen Knoten v existieren kann, indem man mehrmals über den Knoten r läuft, entsteht ein Widerspruch zur Annahme A1.
Zusätzlich müssen alle anderen Knoten $v \in V$
$\{r\}$ den Innengrad 1 besitzen, da es nur genau einen gerichteten (r, v)-Weg gibt. Hätte ein Knoten $v' \in V$
$\{r\}$ einen Innengrad von 0, so gäbe es keinen gerichteten (r, v')-Weg. Hätte v' einen Innengrad größer 1, so gäbe es zwei verschiedene (r, v')-Wege, da r einen gerichteten Weg zu allen anderen Knoten besitzt. Beide Fälle stehen im Widerspruch zur Annahme. Somit gilt die Aussage.

Zu zeigen: (4) $\Rightarrow$ (5)
Annahme(A1): D ist quasi-stark zusammenhängend, besitzt einen Knoten r mit $\delta^-(r) = 0$ und erfüllt $\delta^-(v) = 1$ für alle $v \in V$
$\{r\}$.

Zu zeigen: D enthält keinen Kreis, einen Knoten r mit $\delta^{-}(r) = 0$ und erfüllt $\delta^{-}(v) = 1$ für alle $v \in V$
$\{r\}$.

Da A1 gilt, gibt es für zwei bel. Paare von Knoten $u, v \in V$, einen Knoten r, so dass es einen gerichteten (r, u)-Weg und einen gerichteten (r, v)- Weg gibt. r muss dabei den Innengrad 0 besitzen, da sonst ein bel. Knoten $v' \in V$ den Innengrad 0 hätte, aber dann kein gerichteter (r, v')-Weg existieren würde. Dies würde der Annahme widersprechen. Somit müssen alle Knoten v den Innengrad 1 besitzen. Zusätzlich gilt, dass r kein Koten einer Kante in einem Kreis sein kann, da sonst r einen Innengrad größer 0 hätte. Für alle anderen Knoten v gilt, dass es einen gerichteten (r, v)-Weg gibt und somit diese Knoten nicht Teil einer Kanten in einem Kreis wären. Dies ist der Fall da diese Knoten sonst einen Innengrad größer 1 hätten(da der gerichtete (r, v)-Weg bereits eine eingehende Kante in v erfordert). Somit kann kein Knoten Teil einer Kante in einem Kreis sein und folgendermaßen kann kein Kreis existieren. Somit gilt die Aussage.

Zu zeigen: (5) $\Rightarrow$ (1)

Da D genau n Knoten besitzt und damit $n - 1$ viele Knoten enthält, die einen Innengrad von 1 besitzen, muss D genau $n - 1$ Kanten besitzen. Hätte D mehr Kanten, so würde $deg^{-}(r) > 0$ oder $deg^{-}(v) > 1$ für einen Knoten $v \in V$
$\{r\}$. Hätte D weniger Kanten als $n - 1$ Kanten, so würde $deg^{-}(v) = 0$ für einen Knoten $v \in V$
$\{r\}$ gelten. Da D kreisfrei ist muss es somit einen Weg der Länge $n-1$ geben, der über alle Knoten $v' \in V$ läuft(da sonst ein Knoten doppelt im Weg vorkommen und D somit einen Kreis enthalten würde). Daraus folgt, dass D zusammenhängend sein muss. Aus dieser Folgerung, der Annahme, dass D kreisfrei ist und für alle Knoten $v' \in V$ $deg^{-}(v') \leq 1$ gilt, folgt per Definition, dass D eine Arboreszenz ist.

3 Aufgabe 16

Eingabe: ein Graph $G = (V, E), c \in E$ mit Kantengewichten $c(W) \forall e \in E$
Ausgabe: Wald $W \subseteq E$ mit max Gewicht $c(W)$

1. (Sortieren): Ist k die Anzahl der Kanten von G mit positivem Gewicht, so numeriere diese k Kanten, so dass gilt $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \ldots \geq c(e_k) > 0$.

2. Setze $W := \emptyset$.

3. FOR $i = 1$ TO k DO:
   Falls $W \cup \{e_i\}$ keinen Kreis enthält, setze $W := W \cup \{e_i\}$

4. Gib W aus.

Induktionsannahme:
W_{i-1} ist ein maximaler Wald, der die ersten $i-1$ vom Greedy-Max Algorithmus bestimmte Kanten $e_1, ..., e_{i-1}$ enthält.
Induktionsschritt: $i - 1 \rightarrow i$:
Zu seigen, es gibt einen maximalen Wald W_i, der die vom Algorithmus ausgewählten Kanten $e_j \forall j \geq i$ enthält.
Der Algorithmus wählt die im i-ten Schritt die Kante e_i aus, für diese Kante muss gelten:
$c(e_1) \geq c(e_K) \forall \notin W_{i-1}$, so dass $W_{i-1} \cup \{e_K\}$ keinen Kreis enthält.
Da W_{i-1} einen Wald ist, insbesondere $\forall e_K \in W_{i-1} \setminus \{e_1, ..., e_{i-1}\}$, d.h. für alle Kanten in W_{i-1}, die der Greedy Algorithmus noch nicht gewählt hat.
Füge nun diese Kante e_i zu W_{i-1} hinzu. Dann entsteht in W_{i-1} ein Kreis, da W_{i-1} bereits ein

maximaler Wald war und durch hinzufügen einer Kante genau ein Kreis entsteht.
Entfernte aus diesem Kreis die Kante K, wobei $k \neq e_j \forall j \geq i$ ist. Diese Kante existiert in W_{i-1}, da der Greedy Max-Algorithmus sonst einen Kreis fabriziert hätte.
D.h. $W_i := (W_{i-1} \setminus \{k\}) \cup \{e_i\}$ ist ein Wald, der $e_j \forall j \geq i$ enthält und ausserdem maximal ist, da $c(e_i) \geq c(k)$.