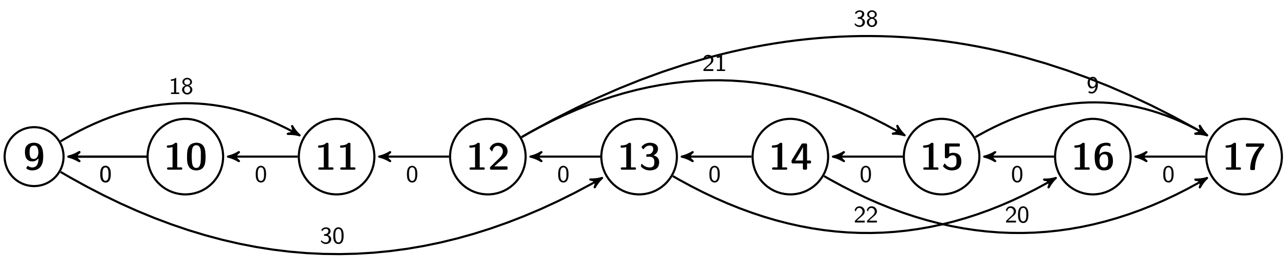
Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 5

Sven-Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

21. November 2014

1 Aufgabe 18

Wir modellieren die Stunden als Knoten und die Kosten als Kanten, um einen zusammenhängenden Graphen zu erhalten müssen wir Kanten mit keinen Kosten einfühgen die von jeder Stunde auf die vorherige Stunde zeigen. Dadurch erhalten wir diesen Digraph:



Die Lösung des Problems ist der kürzeste Pfad von Knoten 9 nach 17.
Um den kürzesten Weg zu ermitteln wird Dijkstra-Algorithmus aus der Vorlesung verwendet:

Step	$\neg$Visit	Visit	C	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
0	$\{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$	$\{\emptyset\}$		$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	Init
1	$\{10,11,12,13,14,15,16,17\}$	$\{9\}$	9		$(\infty,-)$	$(18,9)$	$(\infty,-)$	$(30,9)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	
2	$\{10,12,13,14,15,16,17\}$	$\{9,11\}$	11		$(18,10)$		$(\infty,-)$	$(30,9)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	
3	$\{12,13,14,15,16,17\}$	$\{9,11,10\}$	10				$(\infty,-)$	$(30,9)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	Dead End
4	$\{12,14,15,16,17\}$	$\{9,11,10,13\}$	13				$(30,13)$		$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	
5	$\{14,15,16,17\}$	$\{9,11,10,13,12\}$	12						$(\infty,-)$	$(51,12)$	$(\infty,-)$	$(68,12)$	
6	$\{14,16,17\}$	$\{9,11,10,13,12,15\}$	15						$(51,13)$		$(\infty,-)$	$(60,13)$	
7	$\{16,17\}$	$\{9,11,10,13,12,15,14\}$	14								$(\infty,-)$	$(60,13)$	Dead End

Ergebnis:

Die kürzeste Strecke ist $\{9-13, 12-15, 15-17\}$ mit kosten von 60.

2 Aufgabe 19

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Gewichten $c_a \in \mathbb{R}$, $c_a \geq 0$ für jeden Bogen $a \in A$.
Sei $s \in V$ und $A_T die Menge der Bögen in T.$

Zu zeigen: T ist ein Kürzester-Wege-Baum von $s \Leftrightarrow \forall (u, v) \in A \setminus A_T . d_T(s, u) + c(u, v) \geq d_T(s, v)$

Wir beweisen die beiden Implikationen.
Zu zeigen(Z1): T ist ein Kürzester-Wege-Baum von $s \Rightarrow \forall (u,v) \in A \setminus A_T . d_T(s,u) + c(u,v) \geq d_T(s,v)$
Wir beweisen Z1 per Kontraposition.

$$\begin{aligned}
&\exists (u,v) \in A \setminus A_T : d_T(s,u) + c(u,v) < d_T(s,v) \\
\Rightarrow &Es\ ex.\ ein\ (s,v) - Weg\ w = (s, ..., u, (u,v), v)\ in\ D,\ so\ dass \\
&w\ ein\ kürzerer\ Weg\ ist\ als\ der\ (s,v) - Weg\ in\ T \\
\Rightarrow &T\ enthält\ nicht\ den\ kürzesten\ (s,v) - Weg \\
\Rightarrow &T\ ist\ kein\ Kürzester - Wege - Baum\ von\ s
\end{aligned}$$

Da wir die Kontraposition gezeigt haben, gilt auch Z1.

Zu zeigen: $\forall (u,v) \in A \setminus A_T . d_T(s,u) + c(u,v) \geq d_T(s,v) \Rightarrow T$ ist ein Kürzester-Wege-Baum von s

$$\begin{aligned}
&\forall (u,v) \in A \setminus A_T . d_T(s,u) + c(u,v) \geq d_T(s,v) \\
\Rightarrow &Alle\ (s,v) - Wege\ w = (s, ..., u, (u,v), v)\ in\ D\ haben\ mindestens \\
&die\ gleiche\ Länge\ wie\ der\ (s,v) - Weg\ in\ T \\
\Rightarrow &Der\ (s,v) - Weg\ in\ T\ ist\ der\ kürzeste\ Weg\ in\ D \\
\Rightarrow &T\ ist\ ein\ Kürzester - Wege - Baum\ von\ s
\end{aligned}$$

Da wir die beiden Implikationen bewiesen haben, gilt die ursprüngliche Aussage.

3 Aufgabe 20

a)

$$\begin{aligned}
&c'(v,w) = c(v,w) - f(v,t) + f(w,t)| + f(v,t) && (1) \\
\Rightarrow &c'(v,w) + f(v,t) = c(v,w) + f(w,t) && (2) \\
\xRightarrow{Dr-Ungl} &c'(v,w) + f(v,t) \geq f(v,t)| - f(v,t) && (3) \\
\Rightarrow &c'(v,w) \geq 0 && (4)
\end{aligned}$$

b) Dieses Verfahren hat Vorteile für den Dijkstra-Algorithmus, da er so auch für negeative Gewichtete Digraphen verwendet werden kann.