

Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung

Serie 1

Sven-Maurice Althoff (FU 4745454)

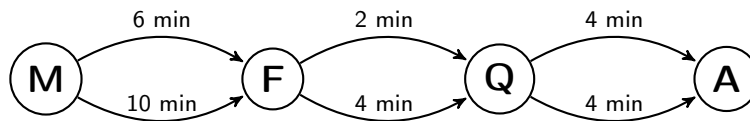
Michael R. Jung (HU 502133)

Felix Völker ()

24. Oktober 2014

Aufgabe 1

	Montagehalle(4)	Fertigung(4)	Qualitätskontrolle(2)	Preis
Turamichele	6 min	2 min	4 min	50 Euro
Jim Knopf	10 min	4 min	4 min	60 Euro
Arbeitszeit	45 min/h	50 min/h	50min/h	



Kosten: $max 6f_{MPT} + 2f_{FQT} + 4f_{QAT} + 10f_{MPJ} + 4f_{FQJ} + 4f_{QAJ}$

Variablen:

$$0 \leq f_{MPT} \leq 4; 0 \leq f_{MPJ} \leq 4$$

$$0 \leq f_{FQT} \leq 4; 0 \leq f_{FQJ} \leq 4$$

$$0 \leq f_{QAT} \leq 2; 0 \leq f_{QAJ} \leq 2$$

$$6f_{MPT} + 10f_{MPJ} \leq 45min$$

$$2f_{FQT} + 4f_{FQJ} \leq 50min$$

$$4f_{QAT} + 4f_{QAJ} \leq 50min$$

Aufgabe 2

Formulierung unter Zuhilfenahme der Graphentheorie:

Z.z.: Für alle Graphen $G = (V, E)$ Graph mit $|V| \geq 6$ gilt: $\exists V' \subset V : G[V'] \cong K_3 \vee G[V] \cong \overline{K_3}$.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 6$.

Betrachte einen Knoten v und 5 weitere Knoten x_1, \dots, x_5 . Unter diesen ist er entweder mit mindestens dreien benachbart oder mit mindestens dreien nicht benachbart.

Fall 1: v ist mit drei Knoten benachbart (o.B.d.A. seien dies x_1, x_2, x_3):

Entweder existiert unter diesen mindestens eine Kante (o.B.d.A. $\{x_1, x_2\}$), dann ist $G[\{v, x_1, x_2\}] \cong K_3$ oder unter diesen existiert überhaupt keine Kante, dann gilt aber $G[\{x_1, x_2, x_3\}] \cong \overline{K_3}$. ✓

Fall 2: v ist mit drei Knoten nicht benachbart (o.B.d.A. seien dies x_1, x_2, x_3):

Entweder existiert unter diesen mindestens eine Kante nicht (o.B.d.A. $\{x_1, x_2\}$), dann ist $G[\{v, x_1, x_2\}] \cong \overline{K_3}$ oder unter diesen existieren alle Kanten, dann gilt aber $G[\{x_1, x_2, x_3\}] \cong K_3$. ✓

□

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Es genügt zu zeigen:

G ist nicht zusammenhängend $\Rightarrow \overline{G}$ ist zusammenhängend.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein unzusammenhängender Graph mit den Zusammenhangskomponenten $K_1, \dots, K_p \subseteq V$, $\bigcup_{i=1}^p K_i = V$. Seien $x, y \in V$ beliebig.

Fall 1: Es existieren $i \neq j \in \{1, \dots, p\}$ mit $x \in K_i \wedge y \in K_j$:

Nun gilt: $\{x, y\} \notin E \Rightarrow \{x, y\} \in E(\overline{G}) =: \overline{E}$. ✓

Fall 2: Es existieren $z \in V, i \neq j \in \{1, \dots, p\}$ mit $x, y \in K_i \wedge z \in K_j$ (da G nicht zusammenhängend ist muss es Knoten in anderen Komponenten geben):

$\Rightarrow \{x, z\}, \{y, z\} \notin E \Rightarrow \{x, z\}, \{y, z\} \in \overline{E} \Rightarrow$ Der Weg (x, z, y) existiert in \overline{G} . ✓

Da dies für je zwei Knoten in V gilt, ist \overline{G} zusammenhängend. □

Aufgabe 4

a) Die Aussage $\text{cone}(S \cup T) = \text{cone}(S) + \text{cone}(T)$ ist korrekt.

Beweis.

$$\begin{aligned}
& x \in \text{cone}(S \cup T) \\
& \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \in \mathbb{K}, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_n \in T : \\
& \quad x = \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i \\
& \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \in \mathbb{K}, s_1, \dots, s_k, s' \in S, t_1, \dots, t_n, t' \in T : \\
& \quad x = s' + t' \wedge s' = \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i \wedge t' = \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i \\
& \Leftrightarrow \exists s' \in \text{cone}(S), t' \in \text{cone}(T) : x = s' + t' \\
& \Leftrightarrow x \in \text{cone}(S) + \text{cone}(T)
\end{aligned}$$

□

b) Die Aussage $\text{aff}(S \cup T) = \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$ ist inkorrekt.

Gegenbeispiel. Seien $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dann ist $\text{aff}(S) = S, \text{aff}(T) = T, \text{aff}(S) + \text{aff}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

aber $\text{aff}(S \cup T) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{K} \right\}$.

□

c) Die Aussage $\text{aff}(S + T) = \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$ ist korrekt.

Beweis. „ \subseteq ”

Sei $x \in \text{aff}(S + T)$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^k$ mit $\lambda^T \mathbf{1} = 1, x_1, \dots, x_k \in S + T :$

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$$

Def. $\xRightarrow{S+T} \exists k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^k$ mit $\lambda^T \mathbf{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_k \in T :$

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i (s_i + t_i)$$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^k$ mit $\lambda^T \mathbf{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_k \in T :$

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^k \lambda_i t_i$$

Def. $\xRightarrow{\text{aff}} \exists s' \in \text{aff}(S), t' \in \text{aff}(T) : x = s' + t'$

$\Rightarrow x \in \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$

„ \supseteq ”

Sei $x \in \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$

$\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{K}^k, \beta \in \mathbb{K}^l$ mit $\alpha^T \mathbf{1} = 1, \beta^T \mathbf{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_l \in T :$

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i + \sum_{i=1}^l \beta_i t_i$$

Sei o.B.d.A. $k = l$ ($k < l \Rightarrow \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_l = 0, s_{k+1} = \dots = s_l = s_k, k > l$ analog).

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}^k$ mit $\alpha^T \mathbf{1} = 1, \beta^T \mathbf{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_k \in T :$

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i + \sum_{i=1}^k \beta_i t_i$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(-\frac{1}{k}(s_i + t_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_i + \beta_j}{k}(s_i + t_j)}_{\text{insges.: } \sum_{m=1}^k (\alpha_m + \frac{1}{k})s_m + (\beta_m + \frac{1}{k})t_m} \right)$$

Setze $u_{i,j} := s_i + t_j \in S + T$, $\gamma_{i,j} := \frac{\alpha_i + \beta_j}{k}$, $\delta_i = -\frac{1}{k}' \in \mathbb{K}$, wobei gilt:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \gamma_{i,j} + \sum_{i=1}^k \delta_i = \sum_{i=1}^k \left(\alpha_i + \frac{1}{k} \right) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

Es gilt also:

$$x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \gamma_{i,j} u_{i,j} + \sum_{i=1}^k \delta_i u_{i,i}$$

und dies ist eine affine Kombination aus $S + T$.

□

d) Die Aussage $\text{conv}(S \cup T) = \text{conv}(S) + \text{conv}(T)$ ist inkorrekt.

Gegenbeispiel. Seien $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dann ist $\text{conv}(S) = S$, $\text{conv}(T) = T$, $\text{conv}(S) + \text{conv}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

aber $\text{conv}(S \cup T) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{K} \cap [0, 1] \right\}$.

□