Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 1

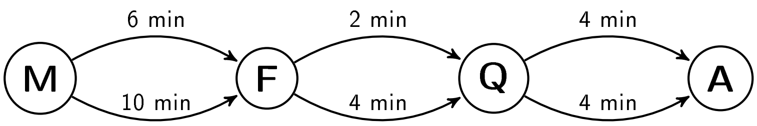
Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

24. Oktober 2014

Aufgabe 1

a)

	Montagehalle(4)	Fertigung(4)	Qualitätskontrolle(2)	Preis
Turamichele	6 min	2 min	4 min	50 Euro
Jim Knopf	10 min	4 min	4 min	60 Euro
Arbeitszeit	45 min/h	50 min/h	50min/h	



Kosten: $max 6f_{MPT} + 2f_{FQT} + 4f_{QAT} + 10f_{MPJ} + 4f_{FQJ} + 4f_{QAJ}$
Variablen:
$0 \leq f_{MPT} \leq 4$; $0 \leq f_{MPJ} \leq 4$
$0 \leq f_{FQT} \leq 4$; $0 \leq f_{FQJ} \leq 4$
$0 \leq f_{QAT} \leq 2$; $0 \leq f_{QAJ} \leq 2$
$6f_{MFT} + 10f_{MFJ} \leq 45min$
$2f_{FQT} + 4f_{FQJ} \leq 50min$
$4f_{QAT} + 4f_{QAJ} \leq 50min$

Aufgabe 2

Formulierung unter Zuhilfenahme der Graphentheorie:
Z.z.: Für alle Graphen $G = (V, E)$ Graph mit $|V| \geq 6$ gilt: $\exists V' \subset V : G[V'] \cong K_3 \vee G[V] \cong \overline{K_3}$.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 6$.
Betrachte einen Knoten v und 5 weitere Knoten $x_1, \ldots, x_5$. Unter diesen ist er entweder mit mindestens dreien benachbart oder mit mindestens dreien nicht benachbart.

Fall 1: v ist mit drei Knoten benachbart (o.B.d.A. seien dies x_1, x_2, x_3):
Entweder existiert unter diesen mindestens eine Kante (o.B.d.A. $\{x_1, x_2\}$), dann ist $G[\{v, x_1, x_2\}] \cong K_3$ oder unter diesen existiert überhaupt keine Kante, dann gilt aber $G[\{x_1, x_2, x_3\}] \cong \overline{K_3}$. ✓

Fall 2: v ist mit drei Knoten nicht benachbart (o.B.d.A. seien dies x_1, x_2, x_3):
Entweder existiert unter diesen mindestens eine Kante nicht (o.B.d.A. $\{x_1, x_2\}$), dann ist $G[\{v, x_1, x_2\}] \cong \overline{K_3}$ oder unter diesen existieren alle Kanten, dann gilt aber $G[\{x_1, x_2, x_3\}] \cong K_3$. ✓

□

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Es genügt zu zeigen:

$$G \text{ ist nicht zusammenhängend } \Rightarrow \overline{G} \text{ ist zusammenhängend.}$$

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein unzusammenhängender Graph mit den Zusammenhangskomponenten $K_1, \ldots, K_p \subseteq V$, $\bigcup_{i=1}^{p} K_i = V$. Seien $x, y \in V$ beliebig.

Fall 1: Es existieren $i \neq j \in \{1, \ldots, p\}$ mit $x \in K_i \wedge y \in K_j$:
Nun gilt: $\{x, y\} \notin E \Rightarrow \{x, y\} \in E(\overline{G}) =: \overline{E}$. ✓

Fall 2: Es existieren $z \in V, i \neq j \in \{1, \ldots, p\}$ mit $x, y \in K_i \wedge z \in K_j$ (da G nicht zusammenhängend ist muss es Knoten in anderen Komponenten geben):
$\Rightarrow \{x, z\}, \{y, z\} \notin E \Rightarrow \{x, z\}, \{y, z\} \in \overline{E} \Rightarrow$ Der Weg (x, z, y) existiert in $\overline{G}$. ✓

Da dies für je zwei Knoten in V gilt, ist $\overline{G}$ zusammenhängend. □

Aufgabe 4

a) Die Aussage $\text{cone}(S \cup T) = \text{cone}(S) + \text{cone}(T)$ ist korrekt.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
& x \in \text{cone}(S \cup T) \\
\Leftrightarrow & \exists \lambda_1, \ldots \lambda_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0 \in \mathbb{K}, s_1, \ldots, s_k \in S, t_1, \ldots, t_n \in T: \\
& x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i \\
\Leftrightarrow & \exists \lambda_1, \ldots \lambda_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0 \in \mathbb{K}, s_1, \ldots, s_k, s' \in S, t_1, \ldots, t_n, t' \in T: \\
& x = s' + t' \wedge s' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i \wedge t' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i \\
\Leftrightarrow & \exists s' \in \text{cone}(S), t' \in \text{cone}(T) : x = s' + t' \\
\Leftrightarrow & x \in \text{cone}(S) + \text{cone}(T)
\end{aligned}
$$

□

b) Die Aussage $\text{aff}(S \cup T) = \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$ ist inkorrekt.

Gegenbeispiel. Seien $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Dann ist $\text{aff}(S) = S, \text{aff}(T) = T, \text{aff}(S) + \text{aff}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
aber $\text{aff}(S \cup T) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{K} \right\}$. □

c) Die Aussage $\text{aff}(S + T) = \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$ ist korrekt.

Beweis. „$\subseteq$"

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } x \in \operatorname{aff}(S+T)\\
\Rightarrow &\exists k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^k \text{ mit } \lambda^T \mathbb{1} = 1, x_1, \dots, x_k \in S+T:\\
&x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\\
\overset{\text{Def. } S+T}{\Rightarrow} &\exists k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^k \text{ mit } \lambda^T \mathbb{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_k \in T:\\
&x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (s_i + t_i)\\
\Rightarrow &\exists k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^k \text{ mit } \lambda^T \mathbb{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_k \in T:\\
&x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i t_i\\
\overset{\text{Def. aff}}{\Rightarrow} &\exists s' \in \operatorname{aff}(S), t' \in \operatorname{aff}(T) : x = s' + t'\\
\Rightarrow &x \in \operatorname{aff}(S) + \operatorname{aff}(T)
\end{aligned}$$

„$\supseteq$"

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } x \in \operatorname{aff}(S) + \operatorname{aff}(T)\\
\Rightarrow\ &\exists k, l \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{K}^k, \beta \in \mathbb{K}^l \text{ mit } \alpha^T \mathbb{1} = 1, \beta^T \mathbb{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_l \in T:\\
&x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i t_i
\end{aligned}$$

Sei o.B.d.A. $k = l$ ($k < l \Rightarrow \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_l = 0, s_{k+1} = \cdots = s_l = s_k$, $k > l$ analog).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ &\exists k \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}^k \text{ mit } \alpha^T \mathbb{1} = 1, \beta^T \mathbb{1} = 1, s_1, \dots, s_k \in S, t_1, \dots, t_k \in T:\\
&x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i t_i\\
&\quad = \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{1}{k}(s_i + t_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_i + \beta_j}{k}(s_i + t_j)}_{\text{insges.: } \sum_{m=1}^{k} (\alpha_m + \frac{1}{k}) s_m + (\beta_m + \frac{1}{k}) t_m} \right)
\end{aligned}$$

Setze $u_{i,j} := s_i + t_j \in S+T, \gamma_{i,j} := \frac{\alpha_i+\beta_j}{k}, \delta_i = -\frac{1}{k}' \in \mathbb{K}$, wobei gilt:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\gamma_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\delta_i = \sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i + \frac{1}{k}\right) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

Es gilt also:

$$x = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\gamma_{i,j}u_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\delta_i u_{i,i}$$

und dies ist eine affine Kombination aus $S+T$.

$\square$

d) Die Aussage $\mathrm{conv}(S \cup T) = \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T)$ ist inkorrekt.

Gegenbeispiel. Seien $S = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, T = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Dann ist $\mathrm{conv}(S) = S, \mathrm{conv}(T) = T, \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,
aber $\mathrm{conv}(S \cup T) = \left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{K} \cap [0,1]\right\}$. $\square$

e) Die Aussage $\mathrm{conv}(S+T) = \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T)$ ist korrekt.

Beweis. Betrachte Algorithmus $coeff((\alpha),(\beta),(s),(t)$ mit folgenden Eingaben:

- Zwei Folgen $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}, \alpha_i > 0$ und $(\beta_i)_{1\leq i\leq l}, \beta_i > 0$ mit $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = \sum_{j=1}^{m}\beta_j = 1$ für ein $c \in \mathbb{K}$.
- Zwei Folgen $(s_i)_{1\leq i\leq k}, s_i \in S, (t_i)_{1\leq i\leq l}, t_i \in T$.

```
coeff:
global i=1
Falls k,l≥ 1)
  begin
    Falls α_1 > β_1
      begin
        γ_i := α_1
        u_i := s_1 + t_1
        β_1 := β_1 − α_1
```

```
      coeff((α_2, ..., α_k), (β), (s_2, ..., s_k), (t))
    end
  sonst Falls α_1 < β_1
        begin
          γ_i := β_1
          u_i = s_1 + t_1
          α_1 := α_1 − β_1
          coeff((α), (β_2, ..., β_l), (s), (t_2, ..., t_l))
        end
     sonst
        begin
          γ_i := β_1          (= α_1)
          u_i = s_1 + t_1
          coeff((α_2, ..., α_k), (β_2, ..., β_l), (s_2, ..., s_k), (t_2, ..., t_l))
        end
i:=i+1
end
```

Da beide Folgen zu 1 aufsummieren, kann es nicht passieren, dass man mit der einen Folge früher fertig ist. Daher ist das Ergebnis wohldefiniert. Es gilt nun:

$$\sum_m (\gamma_m u_m) = \sum_i (\alpha_i s_i) + \sum_j (\beta_j t_j)$$

und $\sum\limits_m (\gamma_m u_m)$ ist eine konvexe Kombination in $S + T$. $\square$