Einführung in die lineare und kombinatorische Optimierung
Serie 2

Maurice Althoff (FU 4745454)
Michael R. Jung (HU 502133)
Felix Völker (TU 331834)

31. Oktober 2014

Aufgabe 5

a)

$x_1 \ldots$ Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ A
$x_2 \ldots$ Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ B
$x_3 \ldots$ Anzahl produzierter Müsli-Packungen vom Typ C

$$c := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \; b := \begin{pmatrix} 5000 \\ 11000 \\ 8000 \end{pmatrix} \; x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{LP } P: \ \max c^T x & \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{aligned}$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} &\max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 && \text{unter den Nebenbedingungen} \\ &2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 5000 && (y_1) \\ &4x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 11000 && (y_2) \\ &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8000 && (y_3) \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D: \ \min b^T y & \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \\ A^T y \geq c & \\ y \geq 0 & \end{aligned}$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} &\min\ 5000y_1 + 11000y_2 + 8000y_3 && \text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ &\quad 3y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 4 \\ &\quad 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ &\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c)
- Erster Versuch in P:
  Wir nehmen möglichst viel von Müsli A, da dieses den meisten Gewinn bringt. Ein zulässiger Vektor wäre $x^1 := \begin{pmatrix} 2500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gewinn wäre $c^T x^1 = 12500$.
- Erster Versuch in D:
  Wir wissen bereits, dass 12500 eine untere Schranke ist, um möglichst nah heranzukommen muss y_2 möglichst klein sein. Hier sieht man nun, dass $y^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein zulässiger Vektor ist. Zielfunktion: $b^T y^1 = 13000$.
  Wir wissen also nun: Das Optimum liegt in $[12500, 13000]$.
- Zweiter Versuch in P:
  Da Nüsse knapp sind und Müsli B viel davon verbraucht, versuchen wir x_1 groß zu lassen, und ein wenig Müsli C dazu zu nehmen. Da auch Rosinen knapp sind versuchen wir y_1 und y_3 möglichst genau zu treffen. Wenn wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 8000 \end{pmatrix}$$

  lösen, so erhalten wir $x_1^2 = 2000, x_3^2 = 1000$. Da $(2000, 0, 1000)^T$ zulässig ist versuchen wir diesen. Gewinn: $c^T x^2 = 13000$. Nun wir wissen wir wegen $b^T y^1 = 13000$, dass dies optimal ist.

Aufgabe 6

a)
- $\{x \in \mathbb{R}^n | \forall 1 \leq i \leq n : x_i \leq 1 \wedge -x_i \leq 1\}$
- Setze $I := \{1, \ldots, n\}$.
  $\left\{ x \in \mathbb{R}^n | \forall S \subseteq I : \left(\sum_{i \in S} x_i - \sum_{i \in I \setminus S} x_i \right) \leq 1 \right\}$

b) Setze $c' := \begin{pmatrix} c \\ c_0 \end{pmatrix}, d' := \begin{pmatrix} d \\ d_0 \end{pmatrix}$, dann kann man das Problem zunächst umschreiben für $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ zu:

$$\begin{aligned} &\min \max \{c'^T x', d'^T x'\} \\ &\underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}}_{=:A'} x' \geq \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:b'} \end{aligned}$$

Mit der erweiterten Ungleichung wird sichergestellt, dass $x'_{n+1} = 1$ ist, und somit die „Zielfunktionen“ wieder die gleichen sind.

Als nächstes nutzen wir die Gleichheit $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} &\min\ \left((c'+d')^T x' + |(c'-d')^T x'|\right) \\ &A'x' \geq b' \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Gegeben sei ein Graph $G=(V,E)$ mit Kantengewichten $c_e \geq 0$ für alle $e \in E$. Wir konstruieren einen Graphen G' ähnlich wie im Skript S.45 und nehmen an, dass $V = \{v_1, ..., v_n\}$ gilt:

1. Die Graphen $G_1 = (U, E_1)$ mit $U := \{u_1, ..., u_n\}$ und $G_2 = (W, E_2)$ mit $W := \{w_1, ..., w_n\}$ seien knotendisjunkte isomorphe Bilder von G, so dass die Abbildungen $v_1 \to u_i$ und $v_i \to w_i$, $i = 1, ..., n$ Isomorphismen sind.

2. Aus G_2 entfernen wir das Bild des Knoten u, dann verbinden wir die übrigen Knoten $w_i \in W$ mit ihren isomorphen Bildern $u_i \in U$ durch eine Kante $u_i w_i$ mit dem Gewicht $c(u_i, w_i) = 0$. Die Kanten von G_1 und $G_2 - u$ enthalten das Gewicht ihrer Urbildkanten.

3. G' entsteht durch die Vereinigung von G_1 und $G_2 - \{u\}$ unter Hinzufügung der Kanten $u_i w_i$.

4. Zusätzlich fügen wir G' einen Knoten v' hinzu, der mit unserem Zielknoten v verbunden ist.

Aufgabe 8