Estimação de modelo ARX por método dos minimos quadrados
Relatório Técnico

Maurício Ohse Lourencena

I. Introdução

Este relatório visa documentar a implementação da estimação de um sistema do tipo ARX para um conjunto de dados dado pelo professor. O conjunto de dados é um um sinal de entrada e um sinal de saída de um sistema cujo não se tem informações da ordem e nem se é do tipo ARX, além do sistema conter um sinal de ruído desconhecido.

O objetivo desse trabalho é trazer as referências para computação de um estimador de modelo ARX por método dos mínimos quadrados [3] e aplicar nesse conjunto de dados. Como não há informação quanto a ordem do sistema, várias ordens de modelo são computadas e o critério de Akaike é utilizado para selecionar o melhor modelo. Além do método explicitado, o resultado é comparado para sistemas do tipo ARIMA, utilizando o método Box-Jenkins do MATLAB para obter essa estimação.

Todo o código utilizado em ambiente MATLAB 2018a está disponível em [2].

Modelos ARX. O modelo de sistema ARX pode ser descrito por [3]

$$\begin{aligned} A(z^{-1})y(t) &= B(z^{-1})u(t) + \epsilon(t) && (1)\\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + ... + a_{na} z^{-na} && (2)\\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + ... + b_{nb} z^{-nb} && (3) \end{aligned}$$

Esse modelo leva em consideração um ruído de medição, $\epsilon(t)$, e presume comportamento de ruído branco para o mesmo. z^{-1} é a variável da transformada de laplace no tempo discreto, $u(t)$ o sinal de entrada e $y(t)$ o de sáida. Há dois polinômios que definem o comportamento do sistema a serem estimados, $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$, que juntos formam a função de transferência da entrada para saída e do ruído para saída respectivamente por:

$$\begin{aligned} G(z^{-1}) &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} && (4)\\ H(z^{-1}) &= \frac{1}{A(z^{-1})} && (5) \end{aligned}$$

Método dos mínimos quadrados. Nessa seção o método de estimação por mínimos quadrados descritos na seção 7.1 de [3] será explicitado. Devido às propriedades da transformada de laplace em tempo discreto, o sistema definido em (1) pode ser reescrito pela seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= \Phi^T(t)\Theta + \epsilon(t) && (6)\\ \Phi^T(t) &= [-y(t-1) \quad ... \quad -y(t-na) && (7)\\ & \qquad u(t-1) \quad ... \quad u(t-nb)] \\ \Theta &= [a_1 \quad ... \quad a_{na} \quad b_1 \quad ... \quad b_{nb}]^T && (8) \end{aligned}$$

onde $\Phi(t)$ é um vetor que contém as informações do sistema necessárias para calcular o $y(t)$ em cada instante, e Θ é o vetor de parâmetros do modelo. O objetivo do método então é, a partir das medidas $y(t)$ e $u(t)$ de um experimento, obter uma estimativa dos parâmetros $\hat{\Theta}$ que minimize o erro de estimação quadrado

$$V_N(\Theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y(t) - \hat{y}(t))^2 \qquad (9)$$

De acordo com [3], o estimador que minimiza o erro quadrático é dado por

$$\hat{\Theta} = \left[\sum_{t=1}^{N} \Phi(t)\Phi^T(t)\right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{N} \Phi(t)y(t)\right] \qquad (10)$$

Dado uma ordem do modelo $[na \quad nb]$ os parâmetros desse modelo pode ser estimado pela equação (10), e esse é dito o método dos mínimos quadrados para modelos do tipo ARX.

Critério de Akaike. Dado um conjunto de medidas de um experimento de um sistema que não há informações sobre a ordem do modelo, pode-se usar o critério de Akaike para escolher entre diversos modelos com diferentes ordens. [3]

Esse critério leva em consideração a minimização do critério $V_N(\hat{\Theta})$ e um termo de complexidade do modelo dado por $p = 1 + na + nb$. O critério é definido na equação (11)

$$AIC = Nlog(V_N(\hat{\Theta})) + 2p \qquad (11)$$

Em geral, escolhe-se o modelo cujo critério de Akaike for menor.

Qualidade da estimativa. Como toda estimativa, para a mesma ter algum valor é necessário obter as propriedades dessa estimativa, como a variância e um intervalo de confiança. No caso do método dos mínimos quadrados, a matriz de covâriancia dos paramêtros estimados pode ser obtido diretamente pela matriz $\Phi(t)$ [1]:

$$Cov\hat{\Theta} = \left[\sum_{t=1}^{N} \Phi(t) * \Phi(t)\right]^{-1} \qquad (12)$$

A partir da matriz de covariância, para fácil visualização de pares de estimativas, é possível traçar um elipsoide de intervalo de confiança para duplas de parâmetros através da desigualdade

$$Elipse(\hat{\Theta}) \quad = \quad \{\forall\Theta|(\Theta-\hat{\Theta})(Cov\hat{\Theta})^{-1}(\Theta-\hat{\Theta})\} < \chi \tag{13}$$

Onde χ é um valor obtido pela distribuição qui-quadrado referente a confiança do intervalo que se quer. No caso de 95%, o valor é $\chi = 2.4477$. Então, dado um estimador $\hat{\Theta}$, todos os valores de Θ que satisfazem a desigualdade (13) são valores dentro do intervalo de confiança.

Com isso, todas as equações necessárias para obter e avaliar a estimativa dos métodos dos mínimos quadrado foram descritas.

Estimação por Box-Jenkins. Agora será brevemente exposto como o modelo Box-Jenkins (BJ) funciona no MATLAB. Agora o modelo não é mais ARX, como na equação (1), o modelo de seleção BJ é mais genérico e aceita ordens diferentes para todos os polinômios envolvidos, chamado de modelo ARIMA.

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\epsilon(t) \tag{14}$$

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \tag{15}$$

$$H(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \tag{16}$$

Note que nesse modelo, todos os polinomios podem ter ordens distintas, e portanto há 4 parametros de ordem do modelo dado por $[nb \quad nc \quad nd \quad nf]$. Também há possibilidade de utilizar um atraso de entrada, mas como isso não é levado em consideração no modelo ARX deduzido nesse relatório, será considerado apenas modelos sem atraso de entrada.

Utilizando o MATLAB, a função bj(dados,ordem) retorna uma estimativa pelo método Box-Jenkins de um modelo ARIMA.

II. Resultados

Um arquivo com 1101 dados de entrada e de saída de um sistema de ordem desconhecida foi disponibilizado, com a intenção de obter uma estimativa de um modelo ARX por método dos mínimos quadrados e de um modelo ARIMA por método de Box-Jenkins.

Estimação por Mínimos Quadrados. O primeiro passo foi obter diversos modelos para diferentes ordens para os dados. Para o modelo ARX, utilizou-se todas as combinações de ordens de na indo de 1 a 4 e nb indo de 1 a 4. Com isso, obteve-se modelo que minimizou o critério de Akaike:

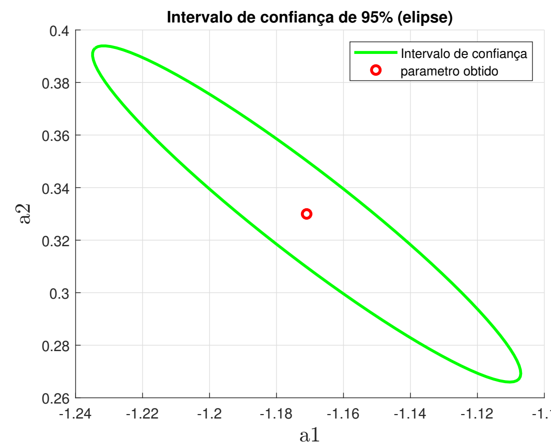

Fig. 1. Intervalo de confiança para os parâmetros a_1 e a_2

$$[na \quad nb] = [2 \quad 2] \tag{17}$$

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} -1.1710 \\ 0.3300 \\ 1.9922 \\ -1.3571 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$G(z^{-1}) = \frac{1.992 - 1.357z^{-1}}{1 - 1.171z^{-1} + 0.33z^{-2}} \tag{19}$$

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{1 - 1.171z^{-1} + 0.33z^{-2}} \tag{20}$$

Esse melhor modelo obteve erro quadrático médio de $V_N(\hat{\Theta}) = 0.0576$, e critério de Akaike -313.51. Houveram outros modelos que chegaram próximo desse valor do critério também.

Além dos parâmetros obtidos, é necessário observar a qualidade da estimativa obtida. Como são quatro parâmetros, a matriz de covariância dessa estimativa é uma matriz 4x4:

$$Cov\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} 0.0105 & -0.0055 & 0.0001 & 0.0201 \\ -0.0055 & 0.0031 & -0.0002 & -0.0098 \\ 0.0001 & -0.0002 & 0.0039 & -0.0036 \\ 0.0201 & -0.0098 & -0.0036 & 0.0445 \end{bmatrix} \tag{21}$$

A partir da matriz de covariância, foram plotadas duas elipses de intervalo de confiança dos parâmetros, uma elipse para os parâmetros a_1 e a_2 na Figura 1 e outra para os parâmetros b_1 e b_2 na Figura 2. Utiliza-se a variância própria e covariância dos parâmetros em dupla, formando a matriz M da equação (13).

Estimação por Box-Jenkins. Por fim, utilizando a função bj() do MATLAB, foram obtidos diversos modelos por BJ, com as ordens $[nf \quad nb \quad nd \quad nk] = [1:4 \quad 1:4 \quad 0:4 \quad 0:4]$. Entre essas, o melhor modelo foi de acordo com o critério de Akaike teve valor de -340.73 e foi o modelo:

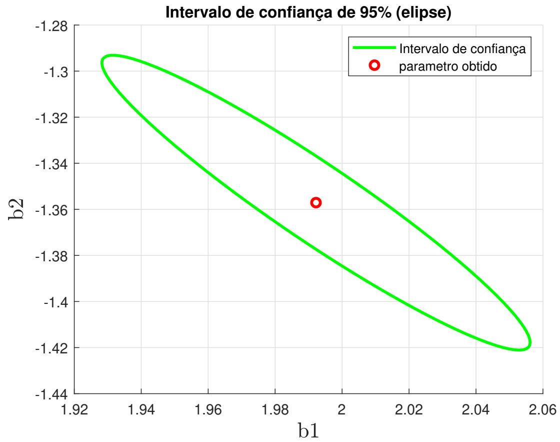

Fig. 2. Intervalo de confiança para os parâmetros b_1 e b_2

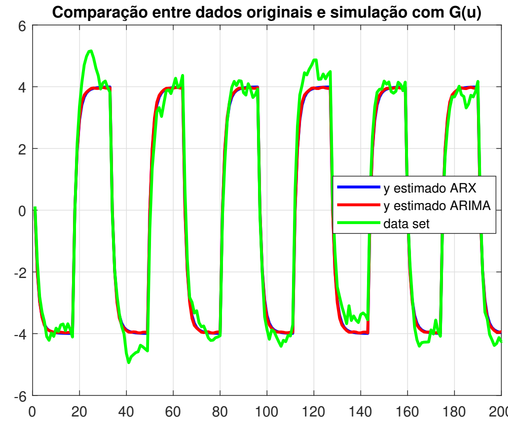

Fig. 3. Comparação entre dados disponibilizados e modelos ARX e ARIMA desconsiderando ruído

$$
\begin{aligned}
[ordem] &= [4 \quad 3 \quad 3 \quad 3] && (22)\\
B(z^{-1}) &= -0.001285 + 1.994z^{-1} - 0.4145z^{-2} + 1.897z^{-3} && (23)\\
F(z^{-1}) &= 1 - 0.6999z^{-1} + 1.046z^{-2} - 0.4697z^{-3} && (24)\\
C(z^{-1}) &= 1 + 1.893z^{-1} + 1.001z^{-2} + 0.0007077z^{-3} && (25)\\
D(z^{-1}) &= 1 + 0.9482z^{-1} - 0.7339z^{-2} - 0.8865z^{-3} && (26)
\end{aligned}
$$

Note que há 13 parâmetros estimados nesse modelo. Devido a quantidade de parâmetros, a matriz de covariância deles foi colocada no anexo. Note que a ordem dos valores de covariância do modelo por BJ foram menores que por mínimos quadrados - esperado visto que o modelo ARIMA é mais completo que o modelo ARX. Apesar da covariancia menor, o erro quadrático (e o critério de Akaike) entre os modelos fora parecido, indicando que mesmo que a variância dos parametros seja menor, não significa que o modelo correto necessariamente seja do tipo ARIMA e não ARX.

Comparação entre estimativas. Foram obtidas dois modelos de ordem e características diferentes para estimar um sistema SISO. Uma possível comparação entre os modelos seria utilizar a função de transferência $G(z^{-1})$ obtida para cada um e simular o sistema para o sinal de entrada dos dados. Isso é desconsiderar o efeito do ruído $\epsilon(t)$, e portanto é uma comparativa que deve ser feita com cuidado, visto que está se ignorando se há algum ruído no sistema que gerou os dados.

Apesar disso, é interessante comparar o resultado entre a estimativa obtida entre o modelo ARX e modelo ARIMA. A Figura 3 mostra a comparação entre os dados de saída disponibilizados e a resposta de cada $G(z^{-1})$ para o sinal de entrada.

Note que a proximidade entre os modelos ARX e ARIMA mostra que de fato são modelos cujo erro quadrático é parecido, além de terem um comportamento que, não fosse um ruído desconhecido, aparenta acompanhar o sinal de saída disponibilizado. A Figura 4 mostra um zoom para mostrar que de fato o modelo ARX e ARIMA obtidos foram bem próximos.

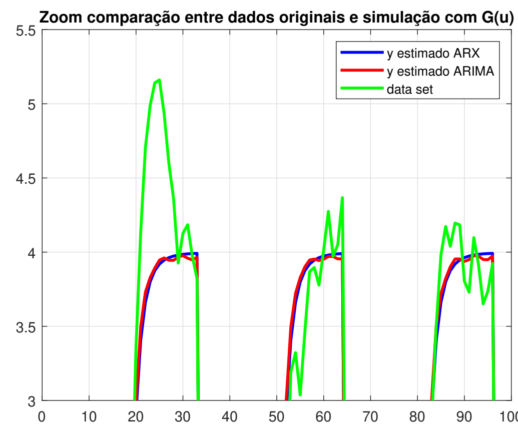

Fig. 4. Comparação entre dados disponibilizados e modelos ARX e ARIMA desconsiderando ruído

III. Conclusão

Nesse trabalho, o método dos mínimos quadrados para estimação de modelo ARX foi utilizado para estimar o modelo de um conjunto de dados em que não se sabe a ordem do modelo que o gerou, nem o sinal de ruído de medida do mesmo.

O método dos mínimos quadrados foi comparado com o médoto de Box-Jenkins, onde o método BJ tem um modelo com muito maior grau de liberadade de possíveis configurações do modelo. Apesar disso, o critério utilizado para determinar o melhor modelo - o critério de Akaike - teve valor parecido entre os dois métodos. Apesar da maior complexidade do modelo obtido método BJ, a variância dos parâmetros estimados fora parecido - o que pode ser um indício de que o modelo real é um modelo bem representado por um modelo ARX, visto que se não fosse bem representado haveria diferença significativa entre as variâncias dos parâmetros.

Um pouco de achismo agora, mas acredito que o fato das variância entre os modelos variar pouco parece indicar que de fato o modelo real é um modelo ARX e a variância dos modelos se deve em maior ao ruído branco desconhecido que gerou os sinais dados, e pouco pelo erro de modelagem.

REFERENCES

[1] L. Ljung. *System Identification*. Prentice-hall, 2 edition, 1979.
[2] M. O. Lourencena. Repositório código matlab. https://github.com/mauricio-Ohse/predicaoARX, 2021.
[3] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice-hall, 1999.

ANEXO

Matriz de Covariância do modelo ARIMA pelo método BJ:

```
best_model_bj.Report.Parameters.FreeParCovariance =
```

0.0002	-0.0001	0.0003	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0002	-0.0001
-0.0001	0.0003	-0.0005	0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0002	0.0000	0.0001
0.0003	-0.0005	0.0228	-0.0019	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0115	-0.0067	0.0004
0.0003	0.0001	-0.0019	0.0230	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0010	0.0123	-0.0060
0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0012	0.0023	0.0012	0.0003	0.0004	0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0023	0.0042	0.0022	0.0005	0.0007	0.0002	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0012	0.0022	0.0012	0.0003	0.0003	0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0005	0.0003	0.0003	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0004	0.0007	0.0003	0.0004	0.0006	0.0003	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0003	0.0002	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0001	-0.0002	0.0115	-0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0059	-0.0035	0.0002
0.0002	0.0000	-0.0067	0.0123	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0035	0.0081	-0.0032
-0.0001	0.0001	0.0004	-0.0060	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	-0.0032	0.0016