Universidad de la República **Cálculo 2**
Facultad de Ciencias **Segundo semestre 2024**
Centro de Matemática

Práctico 4

1. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones (en el dominio máximo donde están definidas):

$$
\begin{array}{lll}
f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy) & f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} & f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
f(x,y) = \frac{x+y}{x-y},\ x \neq y & f(x,y) = \frac{\cos(x^2)}{y}, y \neq 0 & f(x) = a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}^n \text{ fijo} \\
f(x,y,z) = x^y & f(x,y,z) = z & f(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y) \\
f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} z)) & f(x,y,z) = xy^z & f(x,y,z) = x^{y+z} \\
f(x,y,z) = (x+y)^z & f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy) & f(x,y) = [\operatorname{sen}(xy)]^{\cos 3}
\end{array}
$$

2. Estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas parciales en el origen de las siguientes funciones:

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ; \quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+y}\right) & si\ x+y \neq 0 \\ 0 & si\ x+y = 0 \end{cases}
$$

3. Calcular, si es que existen, las derivadas direccionales de las siguientes funciones escalares en los puntos y direcciones que se indican:

   a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en $(1,1,0)$ en la dirección $v = (1,-1,2)$.

   b) $f(x,y) = \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ en $(0,0)$ para toda $v = (a,b) \neq (0,0)$.

   c) $f(x,y) = e^{2x+y} - 1$ en $(0,0)$ para toda $v = (a,b) \neq (0,0)$.

   d) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ en $(0,0)$ para toda $v = (a,b) \neq (0,0)$, y en $(1,-1)$ para $v = (1,1)$.

4. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas direccionales (en particular de las derivadas parciales) en los puntos que se indican:

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } (0,y_0), \text{ con } y_0 \in \mathbb{R}
$$

$$
f(x,y) = \begin{cases} xy\operatorname{sen}(1/x)\cos(1/y) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases} \quad \text{en los ejes coordenados.}
$$

$$
f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^2y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases} \quad \text{en } (x_0,1) : x_0 \in \mathbb{R}.
$$

5. Sea $v(r,t) := t^k e^{-r^2/(4t)}$. Hallar el valor de la constante k tal que v satisfaga la siguiente ecuación:

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right)
$$

6. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} 2x - y & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x + y & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$ en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} yx & \text{si} \quad y \leq x \\ x^2 & \text{si} \quad y > x \end{cases}$ en $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,2)$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln\left(1+x^2y\right)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

   f) $f(x,y) = \begin{cases} 4x^2 & \text{si} \quad y = 2 \\ 2xy & \text{si} \quad y \neq 2 \end{cases}$ en $(0,0)$

   g) $f(x,y) = |y - 2x^2|$ en $(1,1)$ y $(0,0)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} e^{1-x^2-y^2} & \text{si } ||(x,y)|| \geq 1 \\ x^2 + y^2 & \text{si } ||(x,y)|| \leq 1 \end{cases}$

   Estudiar la continuidad, la existencia de las derivadas parciales, y la diferenciabilidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

8. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = -1$. Sabiendo que f diferenciable en el origen, probar que existe y calcular $\frac{\delta f}{\delta v}(0,0)$ para $v = (v_1, v_2)$ no nulo.

   b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,x) = x$ y $f(0,y) = 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con f diferenciable en el origen. Calcular $f_x(0,0)$.