Práctico 4

1. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones (en el dominio máximo donde están definidas):

$$\begin{array}{lll}
f(x,y)=x^2+y^2(xy) & f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} & f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
f(x,y)=\frac{x+y}{x-y},\ x\neq y & f(x,y)=\frac{\cos(x^2)}{y}, y\neq 0 & f(x)=a\cdot x,\ a\in\mathbb{R}^n \text{ fijo} \\
f(x,y,z)=x^y & f(x,y,z)=z & f(x,y)=(xy) \\
f(x,y,z)=(x(yz)) & f(x,y,z)=xy^z & f(x,y,z)=x^{y+z} \\
f(x,y,z)=(x+y)^z & f(x,y,z)=(xy) & f(x,y)=[(xy)]^{\cos 3}
\end{array}$$

2. Estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas parciales en el origen de las siguientes funciones:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad ; \quad f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\left(\frac{1}{x+y}\right) & si\ x+y\neq 0\\ 0 & si\ x+y=0\end{cases}$$

3. Calcular, si es que existen, las derivadas direccionales de las siguientes funciones escalares en los puntos y direcciones que se indican:

   (a) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ en $(1,1,0)$ en la dirección $v=(1,-1,2)$.

   (b) $f(x,y)=\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ en $(0,0)$ para toda $v=(a,b)\neq(0,0)$.

   (c) $f(x,y)=e^{2x+y}-1$ en $(0,0)$ para toda $v=(a,b)\neq(0,0)$.

   (d) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ en $(0,0)$ para toda $v=(a,b)\neq(0,0)$, y en $(1,-1)$ para $v=(1,1)$.

4. Para cada una de las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas direccionales (en particular de las derivadas parciales) en los puntos que se indican:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ y & \text{si } x=0\end{cases} \qquad \text{en } (0,y_0),\ \text{con } y_0\in\mathbb{R}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}xy(1/x)\cos(1/y) & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases} \qquad \text{en los ejes coordenados.}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3 & \text{si } y\geq 1\\ x^2y^2 & \text{si } y<1\end{cases} \qquad \text{en } (x_0,1): x_0\in\mathbb{R}.$$

5. Sea $v(r,t):=t^k e^{-r^2/(4t)}$. Hallar el valor de la constante k tal que v satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

6. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} 2x - y & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x + y & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$ en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} yx & \text{si} \quad y \leq x \\ x^2 & \text{si} \quad y > x \end{cases}$ en $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,2)$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln\left(1+x^2y\right)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

   f) $f(x,y) = \begin{cases} 4x^2 & \text{si} \quad y = 2 \\ 2xy & \text{si} \quad y \neq 2 \end{cases}$ en $(0,0)$

   g) $f(x,y) = |y - 2x^2|$ en $(1,1)$ y $(0,0)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} e^{1-x^2-y^2} & \text{si } ||(x,y)|| \geq 1 \\ x^2 + y^2 & \text{si } ||(x,y)|| \leq 1 \end{cases}$

   Estudiar la continuidad, la existencia de las derivadas parciales, y la diferenciabilidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

8. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = -1$. Sabiendo que f diferenciable en el origen, probar que existe y calcular $\frac{\delta f}{\delta v}(0,0)$ para $v = (v_1, v_2)$ no nulo.

   (b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,x) = x$ y $f(0,y) = 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con f diferenciable en el origen. Calcular $f_x(0,0)$.