

Práctico 6B

1. Para las siguientes funciones calcular los polinomios de Taylor de orden  $n$  (arbitrario) en el punto indicado.  
a)  $f(x, y, z) = xyz$  en  $(1, -1, 0)$     b)  $f(x, y) = e^{x+y}$  en  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ .
2. Hallar y clasificar los puntos críticos. En caso de que existan, hallar el máximo y el mínimo absolutos:  
a)  $f(x, y) = x^4 + y^2 + y^4$ .  
b)  $f(x, y) = 1 - y^2 - x^4$ .  
c)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ .  
d)  $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ .  
e)  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x + 1)/(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$ .  
f)  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz$ .  
g)  $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$ .  
h)  $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$  en  $[0, 1]^2$ .  
i)  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x, y) = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ .
3. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:  
a)  $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ .  
b)  $f(x, y) = 1 - y^2 + x^2$ .  
c)  $f(x, y) = (x - y - 1)^2$ .  
d)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$ .  
e)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .  
f)  $f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$ , solamente para los puntos que estén en  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .  
g)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .  
h)  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ .  
i)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2-y^2}$ , en  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .  
j)  $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - 2y^2 - 3x^2 + 1$ , en  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$ .
4. Hallar  $a, b \in \mathbb{R}$  para que el valor de la integral  $\int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$  sea mínimo.
5. Dada  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, definimos  $f : (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  poniendo  $f(x, y) = \int_x^y \varphi(t) dt$ .  
a) Hallar los puntos críticos de  $f$ , y determinar la condición para que sean no degenerados.

- b) Para  $\varphi(t) = 3t^2 - 1$ , hallar y clasificar los puntos críticos.
6. Sean  $I$  un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$  y  $f : I \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que existe y es continua  $\frac{\partial f}{\partial x} : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- a) Se define  $G : (a, b)^2 \times I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $G(u, v, x) = \int_u^v f(x, y) dy$ . Calcular  $\frac{\partial G}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial G}{\partial v}$  y  $\frac{\partial G}{\partial x}$ .
- b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \int_0^x \sin(xy) dy$ . Sin calcular la integral, probar que

$$f'(x) = \sin(x^2) + \int_0^x y \cos(xy) dy$$

7. *Regresión lineal.* Dados  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ , hallar una función afín  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, tal que  $f(x) = ax + b$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , que minimice el error cuadrático  $E(a, b)$ , dado por  $E(x, y) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$ .
8. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua, con  $n \geq 2$ . Si para algún  $c \in \mathbb{R}$  el conjunto de nivel  $f^{-1}(c)$  es compacto, mostrar que entonces  $f$  posee al menos un extremo absoluto (máximo o mínimo). Notar que para  $n = 1$  esto no es cierto.
9. Si  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son las distancias desde un punto  $(x, y)$  de una elipse a sus focos, demostrar que la ecuación  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \text{constante}$  (que satisfacen esas distancias) implica la relación  $T \cdot \nabla(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = 0$ , siendo  $T$  el vector unitario tangente a la elipse en  $(x, y)$ . Interpretar geoméricamente este resultado, y con ello demostrar que la tangente forma ángulos iguales con las rectas que unen  $(x, y)$  a los focos.