

Práctico [P8]

1. En cada caso, encontrar los extremos absolutos de la función f en el conjunto dado.
 - a) $f(x, y) = ax + by$ en $C : x^2 + y^2 = 1$ (donde $a^2 + b^2 \neq 0$).
 - b) $f(x, y, z) = ax + by + cz$ en $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (donde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).
 - c) $f(x, y) = xy$, en $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.
 - d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, en $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\}$.
 - e) $f(x, y) = xy$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$.
 - f) $f(x, y, z) = xyz$, en $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
2. En cada caso, hallar la distancia mínima al origen del conjunto dado. Cuando exista, hallar también la distancia máxima.
 - a) $C : 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ en \mathbb{R}^2 .
 - b) $C : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ en \mathbb{R}^2 .
 - c) $S : z^2 - xy = 1$ en \mathbb{R}^3 .
 - d) $S : x^2(y + z) + 2x(y^2 - z^2) + 2 = 0$ en \mathbb{R}^3 .
3. En cada caso, hallar la distancia máxima y mínima de $P \in \mathbb{R}^3$ a la curva $C \subset \mathbb{R}^3$.
 - a) $P = (1, -1, 0)$, $C : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$, $x - y + 2z = 4$ (intersección de un plano y una esfera).
 - b) $P = (0, 0, 2)$, $C : z^2 = x^2 + y^2$, $3(z - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0$ (intersección de un cono y un cilindro).
 - c) $P = (1, 1, 1)$, $C : x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ (intersección de un cono y una esfera).
4. En cada caso, mostrar que el conjunto C es compacto, y hallar los extremos absolutos de la función f en el conjunto C .
 - a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 = 12, x + y + z = 2\}$, $f(x, y, z) = x + y + 2z$.
 - b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 3y^2 - 4z = 0, y^2 - z = 0\}$, $f(x, y, z) = 4xy + 4z - 1$.
 - c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 + 2 = 0, x + y + z - 1 = 0\}$, $f(x, y, z) = xy + xz + yz$. Hallar también la distancia máxima y mínima de C al plano $y + 2z = 0$.
5. Cuál es la cantidad mínima de cartón que se necesita para hacer una caja de un litro?
6. Demostrar que, entre todos los polígonos de n lados inscriptos en una circunferencia, el que tiene área máxima es el polígono regular.
7. Consideraremos la función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = x \cdot y$. Hallar los extremos de f sujeta a $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ y deducir de aquí la desigualdad de Cauchy-Schwarz.