Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo 2
Segundo semestre 2024

Práctico 8

1. En cada caso, encontrar los extremos absolutos de la función f en el conjunto dado.

   a) $f(x,y) = ax + by$ en $C : x^2 + y^2 = 1$ (donde $a^2 + b^2 \neq 0$).
   b) $f(x,y,z) = ax + by + cz$ en $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (donde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).
   c) $f(x,y) = xy$, en $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 1\}$.
   d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, en $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 + xy = 1\}$.
   e) $f(x,y) = xy$, en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$.
   f) $f(x,y,z) = xyz$, en $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

2. En cada caso, hallar la distancia mínima al origen del conjunto dado. Cuando exista, hallar también la distancia máxima.

   a) $C : 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ en $\mathbb{R}^2$.
   b) $C : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$.
   c) $S : z^2 - xy = 1$ en $\mathbb{R}^3$.
   d) $S : x^2(y+z) + 2x(y^2 - z^2) + 2 = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

3. En cada caso, hallar la distancia máxima y mínima de $P \in \mathbb{R}^3$ a la curva $C \subset \mathbb{R}^3$.

   a) $P = (1,-1,0)$, $C : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1, x - y + 2z = 4$ (intersección de un plano y una esfera).
   b) $P = (0,0,2)$, $C : z^2 = x^2 + y^2, 3(z-1)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$ (intersección de un cono y un cilindro).
   c) $P = (1,1,1)$, $C : x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ (intersección de un cono y una esfera).

4. En cada caso, mostrar que el conjunto C es compacto, y hallar los extremos absolutos de la función f en el conjunto C.

   a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 = 12, x + y + z = 2\}$, $f(x,y,z) = x + y + 2z$.
   b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 3y^2 - 4z = 0, y^2 - z = 0\}$, $f(x,y,z) = 4xy + 4z - 1$.
   c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 + 2 = 0, x + y + z - 1 = 0\}$, $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Hallar también la distancia máxima y mínima de C al plano $y + 2z = 0$.

5. Cuál es la cantidad mínima de cartón que se necesita para hacer una caja de un litro?

6. Demostrar que, entre todos los polígonos de n lados inscriptos en una circunferencia, el que tiene área máxima es el polígono regular.

7. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x,y) = x \cdot y$. Hallar los extremos de f sujeta a $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ y deducir de aquí la desigualdad de Cauchy-Schwarz.