Práctico [P5]

1. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{a} \in X^\circ$ si y solo si sus funciones componentes $f_i := \pi_i \circ f$ para $i = 1, \ldots, m$ son diferenciables en $\vec{a}$.

   b) Sea $g : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar y sea $\vec{a} \in X^\circ$. Si las n funciones $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$ para $j = 1, \ldots, n$ estan definidas en algún entorno de $\vec{a}$ y son continuas en $\vec{a}$ entonces g es diferenciable en a.

2. Hallar la mejor aproximación lineal de $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2,1)$ y usarla para calcular de manera aproximada $f(1{,}95, 1{,}08)$.

3. Calcular el campo gradiente de las siguientes funciones. Cuando sea posible, representar gráficamente.

   a) $f(x,y) = x - y$, b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, c) $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(y) + 1$, d) $f(x,y) = \mathrm{sen}(x^2 - y^2)$
   e) $f(x,y,z) = 2x + y - 3z$, f) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$, g) $f(x,y,z) = e^{x+y} - z$
   h) $f(x,y,z) = x\cos(y)$, i) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ j) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

4. Hallar el espacio tangente, dando su dirección perpendicular, de los siguientes conjuntos de nivel en los puntos indicados:

   a) $x - y = 1$ en $(1,0)$, b) $2x^2 + y^2 = 3$ en $(1,1)$, c) $\ln(x^2 + y^2) = 0$ en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,
   d) $x\,\mathrm{sen}(y) + 1 = 3$ en $(2, \frac{\pi}{2})$, e) $1 = \mathrm{sen}(x^2 - y^2)$ en $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0)$, f) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en $(1,1,2)$,
   g) $x^2 - 3y^2 + z^2 = 2$ en $(1,1,2)$ h) $e^{xy}\cos(z) = 0$ en $(0, 1, \frac{\pi}{2})$,
   i) $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n$ en $(1, \ldots, 1)$, j) $x_1x_4 - x_2x_3x_1 + x_3x_2 = 1$ en $(1,1,1,1)$.

5. Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie $z = xy$, las dos rectas $z = y_0x$, $y = y_0$ y $z = x_0y$, $x = x_0$, se cortan en (x_0, y_0, z_0). Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) contiene a esas dos rectas.

6. Hallar la ecuación de la recta que es tangente en el punto (1,1,1) a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$.

7. *a*) Hallar un vector $V(x,y,z)$ normal a la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$ en un punto cualquiera $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ de la superficie.

   b) Hallar el coseno del ángulo θ formado por el vector $V(x,y,z)$ y el eje z, y determinar el límite de $\cos\theta$ cuando $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

8. Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ en $(3,4,5)$ a lo largo de la curva de intersección de las dos superficies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$.

9. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y $f(0) = 0$, probar que existen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuas tales que $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$.

   Sugerencia: si $h_x(t) = f(tx)$, entonces $f(x) = \int_0^1 h_x'(t)dt$.

10. En cada caso, calcular la matriz Jacobiana de las funciones f y g en cada punto de sus respectivos dominios. Hallar la función compuesta $h = f \circ g$ y su matriz Jacobiana en los puntos indicados:

    a) $f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(y+2x))$, y $g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2)$. Hallar $Jh(1,-1,1)$.

    b) $f(x,y,z) = (x^2+y+z, 2x+y+z^2)$, y $g(u,v,w) = (uv^2w^2, w^2 \operatorname{sen} v, u^2 e^v)$. Hallar $Jh(u,0,w)$.

11. Determinar la solución de la ecuación en derivadas parciales $4f_x + 3f_y = 0$ que satisfaga la condición $f(x,0) = \operatorname{sen} x$ para todo x.