

Práctico 4

1. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones (en el dominio máximo donde están definidas):

$$\begin{array}{lll} f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy) & f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} & f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}, \quad x \neq y & f(x, y) = \frac{\cos(x^2)}{y}, \quad y \neq 0 & f(x) = a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R}^n \text{ fijo} \\ f(x, y, z) = x^y & f(x, y, z) = z & f(x, y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y) \\ f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} z)) & f(x, y, z) = xy^z & f(x, y, z) = x^{y+z} \\ f(x, y, z) = (x + y)^z & f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy) & f(x, y) = [\operatorname{sen}(xy)]^{\cos 3} \end{array}$$

2. Estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas parciales en el origen de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+y}\right) & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

3. Calcular, si es que existen, las derivadas direccionales de las siguientes funciones escalares en los puntos y direcciones que se indican:

- a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en $(1, 1, 0)$ en la dirección $v = (1, -1, 2)$.
 - b) $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ en $(0, 0)$ para toda $v = (a, b) \neq (0, 0)$.
 - c) $f(x, y) = e^{2x+y} - 1$ en $(0, 0)$ para toda $v = (a, b) \neq (0, 0)$.
 - d) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ en $(0, 0)$ para toda $v = (a, b) \neq (0, 0)$, y en $(1, -1)$ para $v = (1, 1)$.
4. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas direccionales (en particular de las derivadas parciales) en los puntos que se indican:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } (0, y_0), \text{ con } y_0 \in \mathbb{R} \\ f(x, y) &= \begin{cases} xy \operatorname{sen}(1/x) \cos(1/y) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases} \quad \text{en los ejes coordenados.} \\ f(x, y) &= \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^2y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases} \quad \text{en } (x_0, 1) : x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. Sea $v(r, t) := t^k e^{-r^2/(4t)}$. Hallar el valor de la constante k tal que v satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

6. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$

b) $f(x, y) = \begin{cases} 2x - y & \text{si } xy \neq 0 \\ x + y & \text{si } xy = 0 \end{cases}$ en $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$

c) $f(x, y) = \begin{cases} yx & \text{si } y \leq x \\ x^2 & \text{si } y > x \end{cases}$ en $(0, 0), (1, 1)$ y $(1, 2)$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$

f) $f(x, y) = \begin{cases} 4x^2 & \text{si } y = 2 \\ 2xy & \text{si } y \neq 2 \end{cases}$ en $(0, 0)$

g) $f(x, y) = |y - 2x^2|$ en $(1, 1)$ y $(0, 0)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} e^{1-x^2-y^2} & \text{si } \|(x, y)\| \geq 1 \\ x^2 + y^2 & \text{si } \|(x, y)\| \leq 1 \end{cases}$

Estudiar la continuidad, la existencia de las derivadas parciales, y la diferenciabilidad de f en todo \mathbb{R}^2 .

8. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -1$. Sabiendo que f diferenciable en el origen, probar que existe y calcular $\frac{\delta f}{\delta v}(0, 0)$ para $v = (v_1, v_2)$ no nulo.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, x) = x$ y $f(0, y) = 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ con f diferenciable en el origen. Calcular $f_x(0, 0)$.