Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo 2
Segundo semestre 2024

Práctico 3

1. *a*) Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y $a \in D'$. Probar que si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en alguna bola reducida centrada en a, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

   b) Calcular: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$, y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$.

2. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \qquad c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log|y| \qquad e)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

$$b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \qquad f)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

3. Probar que en los siguientes casos no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

4. *a*) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ y existen los límites unidimensionales $\lim_{x\to a} f(x,y)$ (para cada y) y $\lim_{y\to b} f(x,y)$ (para cada x), entonces también existen los límites iterados $\lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y))$ y $\lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y))$, y son iguales a L.

   b) Verificar que los límites iterados de $f(x,y) = (x-y)/(x+y)$ existen en $(0,0)$ pero son distintos.

   c) Verificar que los límites iterados de $f(x,y) = (x^2y^2)/(x^2y^2+(x-y)^2)$ existen y son iguales en $(0,0)$ pero no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   d) Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x,y) = \begin{cases} x\operatorname{sen}(1/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$.

   Mostrar que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, pero un límite iterado no existe. ¿Esto contradice la parte *a*)?

5. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se considera el cambio de variable (a *coordenadas polares*) $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \geq 0$, y obtenemos $f(x,y) = g(r,\theta)$, $g : [0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}$.

   a) Aplicar dicho cambio de variable para calcular:

   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   b) ¿Es cierto que si $\lim_{r\to 0} g(r,\theta) = 0$ para todo $\theta \in [0,2\pi)$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$? Según corresponda, demostrar o dar un contraejemplo.

6. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, a punto de acumulación de A, $g : B \to \mathbb{R}^p$, b de acumulación de B con $f(A) \subset B \subset \mathbb{R}^m$. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$. ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big)$? Discutir el asunto y justificar la respuesta.

7. En los siguientes casos, hallar el conjunto de los puntos en los que f es continua:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2y}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

8. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes en los dominios dados:

   a) $f(x) = \cos\left(x^2\right)$ en los intervalos $[0, 2\pi]$ y $\mathbb{R}$.

   b) $f(x,y) = 1/(x+y^2)$ en el cuadrado $(0,1) \times (0,1)$.

9. *a*) Probar que la composición de funciones uniformemente continuas también lo es.

   b) Probar que si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es uniformemente continua, entonces f admite una extensión continua (única) a la clausura de D.

   Sugerencia: recordar que f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.