Universidad de la República **Cálculo 2**
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico [P1]‘

1. Representar gráficamente los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$. Cuando sea posible, reconocer geométricamente el conjunto.

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = \operatorname{sen}(x), \; \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$.
   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -1 \leq x \leq y^2, \; 2 \leq y < 3\}$.
   c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \; -1 \leq x \leq 1\}$.
   d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 3x + 2y = -1\}$.
   e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x - 5y = -1, \; -2 \leq x < 2\}$.
   f) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 3\}$.
   g) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = y^2 - 2y + 1, \; -1 \leq x \leq 1\}$.
   h) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 5x^2 + 2y^2 = 2\}$.
   i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -3x^2 + y^2 = 1\}$.
   j) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 5\cos(\theta), \; y = 5\operatorname{sen}(\theta), \; \theta \in [0,\pi]\}$.

2. Dados los vectores $u = (1,1), \; v = (2,1)$ de $\mathbb{R}^2$ hallar

   a) $\| u + v \|$ *b)* $\operatorname{dist}(u,v)$ *c)* $\langle u, v \rangle$ *d)* el ángulo entre u y v
   e) la recta r paralela a u por $(0,1)$ *f)* la recta s perpendicular a v por $(0,0)$
   g) $r \cap s$.

3. Muestre que en general dado un vector v del plano $\mathbb{R}^2$, el conjunto K_v de puntos cuya proyección sobre v es cero es una recta que pasa por el origen. Encuentre dicha recta para $v = (2,3)$. Muestre que dados dos vectores v y v', dichas rectas coinciden si y solo si v y v' son colineales.

4. Represente gráficamente los siguientes conjuntos del espacio $\mathbb{R}^3$. Cuando sea posible, reconocer geométricamente el conjunto.

   a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 3x + 2y - z = 1\}$.
   b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y - z = 0, \; -2x - 2y + 2z = 1\}$.
   c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = t, \; y = 2t, \; z = -t$ donde t varía en $\mathbb{R}\}$.
   d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1\}$.
   e) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 3x^2 + y^2 = 2, \; -1 \leq z \leq 2\}$.
   f) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 - y^2 = 1, \; z = 1\}$.
   g) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10\}$.
   h) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x-1)^2 + y^2 = 1\}$.

i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 2, x + y = 1\}$.

j) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 - 4z^2 = 1\}$.

k) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 10\cos(\theta), y = 10\,\mathrm{sen}(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

l) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 5\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta),\ y = 5\,\mathrm{sen}(\phi)\sin(\theta),\ z = 5\cos(\phi), \phi \in [-\pi, \pi]$ y $\theta \in [0, \pi]\}$.

5. Dados los vectores $u = (1, 1, 1),\ v = (2, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ hallar

   a) $\| u + v \|$ *b*) $\mathrm{dist}(u, v)$ *c*) $\langle u, v\rangle$ *d*) el ángulo entre u y v
   e) la recta r paralela a u por $(0, 0, 1)$ *f*) el plano Π perpendicular a v por $(0, 0, 0)$
   g) $r \cap \Pi$.

6. Muestre que en general dado un vector v del espacio $\mathbb{R}^3$, el conjunto K_v de puntos cuya proyección sobre v es cero es un plano que pasa por el origen. Encuentre dicho plano para $v = (1, -1, 0)$. Muestre que dados dos vectores v y v', dichos planos coinciden si y solo si v y v' son colineales.

7. Encuentre una fórmula para medir la distancia entre un el hiperplano $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ y el vector $v = (v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$.

8. Para una matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la norma de Frobenius se define como

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}.$$

   a) Demuestre que $\|A\|_F$ es una norma en el espacio de matrices.

   b) Demuestre que la norma de Frobenius es invariante bajo transformaciones ortogonales. Es decir, pruebe que
$$\|UAV^\top\|_F = \|A\|_F.$$
   Para cualquier par $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de matrices ortogonales, es decir que satisfacen las ecuaciones $U^\top U = I_m$ y $V^\top V = I_n$.

   c) Que relación hay entre los valores singulares de A y su norma de Frobenius? Demuestre su respuesta.