Universidad de la República | **Cálculo 2**
Facultad de Ciencias | **Segundo semestre 2024**
Centro de Matemática

Práctico 6

1. Para las siguientes funciones calcular los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 en el punto indicado.

   a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ en $(0,0)$ b) $f(x,y) = \sqrt{5x+2y}$ en $(1,1)$ c) $f(x,y) = e^{x^2+y(y+1)}$ en $(0,0)$

2. Para las siguientes funciones calcular los polinomios de Taylor de órden n (arbitrario) en el punto indicado.

   a) $f(x,y,z) = xyz$ en $(1,-1,0)$ b) $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$ y $(1,0)$.

3. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)}-(1+y)}{x^2+y^2}$.

4. Hallar y clasificar los puntos críticos. En caso de que existan, hallar el máximo y el mínimo absolutos:

   a) $f(x,y) = x^4 + y^2 + y^4$.
   b) $f(x,y) = 1 - y^2 - x^4$.
   c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
   d) $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
   e) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2x + 1)/(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$.
   f) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz$.
   g) $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.
   h) $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ en $[0,1]^2$.
   i) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x,y) = \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

5. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.
   b) $f(x,y) = 1 - y^2 + x^2$.
   c) $f(x,y) = (x-y-1)^2$.
   d) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.
   e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
   f) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x+y)$, solamente para los puntos que estén en $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.
   g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

h) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$

i) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

j) $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - 2y^2 - 3x^2 + 1$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$.

6. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ para que el valor de la integral $\int_{-1}^{1}(x^2 - ax - b)^2 dx$ sea mínimo.

7. Dada $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable, definimos $f : (a, b) \times (a, b) \to \mathbb{R}$ poniendo $f(x, y) = \int_x^y \varphi(t)dt$.

   a) Hallar los puntos críticos de f, y determinar la condición para que sean no degenerados.

   b) Para $\varphi(t) = 3t^2 - 1$, hallar y clasificar los puntos críticos.

8. Sean I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y $f : I \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe y es continua $\frac{\partial f}{\partial x} : I \times [a, b] \to \mathbb{R}$.

   a) Se define $G : (a, b)^2 \times I \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante $G(u, v, x) = \int_u^v f(x, y)dy$. Calcular $\frac{\partial G}{\partial u}$, $\frac{\partial G}{\partial v}$ y $\frac{\partial G}{\partial x}$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(xy)dy$. Sin calcular la integral, probar que

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x^2) + \int_0^x y \cos(xy)dy$$

9. *Regresión lineal.* Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, hallar una función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, tal que $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, que minimice el error cuadrático $E(a, b)$, dado por $E(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2$.

Ejercicios optativos

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con $n \geq 2$. Si para algún $c \in \mathbb{R}$ el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es compacto, mostrar que entonces f posee al menos un extremo absoluto (máximo o mínimo). Notar que para $n = 1$ esto no es cierto.

2. Si $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ son las distancias desde un punto (x, y) de una elipse a sus focos, demostrar que la ecuación $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ =constante (que satisfacen esas distancias) implica la relación $T \cdot \nabla(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = 0$, siendo T el vector unitario tangente a la elipse en (x, y). Interpretar geométricamente este resultado, y con ello demostrar que la tangente forma ángulos iguales con las rectas que unen (x, y) a los focos.