Universidad de la República **Cálculo 2**
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico [P1]

1. Representar gráficamente los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$. Cuando sea posible, reconocer geométricamente el conjunto.

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = (x), \ \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$.
   (b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq y^2, \ 2 \leq y < 3\}$.
   (c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \ -1 \leq x \leq 1\}$.
   (d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x + 2y = -1\}$.
   (e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - 5y = -1, \ -2 \leq x < 2\}$.
   (f) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 3\}$.
   (g) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y^2 - 2y + 1, \ -1 \leq x \leq 1\}$.
   (h) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 5x^2 + 2y^2 = 2\}$.
   (i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -3x^2 + y^2 = 1\}$.
   (j) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 5\cos(\theta), \ y = 5(\theta), \ \theta \in [0,\pi]\}$.

2. Dados los vectores $u = (1,1), \ v = (2,1)$ de $\mathbb{R}^2$ hallar

   a) $\| u + v \|$ *b*) $\text{dist}(u,v)$ *c*) $\langle u, v \rangle$ *d*) el ángulo entre u y v
   e) la recta r paralela a u por $(0,1)$ *f*) la recta s perpendicular a v por $(0,0)$
   g) $r \cap s$.

3. Muestre que en general dado un vector v del plano $\mathbb{R}^2$, el conjunto K_v de puntos cuya proyección sobre v es cero es una recta que pasa por el origen. Encuentre dicha recta para $v = (2,3)$. Muestre que dados dos vectores v y v', dichas rectas coinciden si y solo si v y v' son colineales.

4. Represente gráficamente los siguientes conjuntos del espacio $\mathbb{R}^3$. Cuando sea posible, reconocer geométricamente el conjunto.

   (a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x + 2y - z = 1\}$.
   (b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - z = 0, \ -2x - 2y + 2z = 1\}$.
   (c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = t, \ y = 2t, \ z = -t$ donde t varía en $\mathbb{R}\}$.
   (d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1\}$.
   (e) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x^2 + y^2 = 2, \ -1 \leq z \leq 2\}$.
   (f) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - y^2 = 1, \ z = 1\}$.
   (g) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10\}$.
   (h) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x-1)^2 + y^2 = 1\}$.

(i) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x^2+y^2+z^2=2, x+y=1\}$.
(j) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2-4z^2=1\}$.
(k) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=10\cos(\theta), y=10(\theta),\ \theta\in[0,2\pi]\}$.
(l) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=5(\phi)\cos(\theta),\ y=5(\phi)\sin(\theta),\ z=5\cos(\phi), \phi\in[-\pi,\pi]$ y $\theta\in[0,\pi]\}$.

5. Dados los vectores $u=(1,1,1),\ v=(2,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ hallar

a) $\| u+v \|$ *b)* $\operatorname{dist}(u,v)$ *c)* $\langle u,v\rangle$ *d)* el ángulo entre u y v
e) la recta r paralela a u por $(0,0,1)$ *f)* el plano Π perpendicular a v por $(0,0,0)$
g) $r\cap\Pi$.

6. Muestre que en general dado un vector v del espacio $\mathbb{R}^3$, el conjunto K_v de puntos cuya proyección sobre v es cero es un plano que pasa por el origen. Encuentre dicho plano para $v=(1,-1,0)$. Muestre que dados dos vectores v y v', dichos planos coinciden si y solo si v y v' son colineales.

7. Encuentre una fórmula para medir la distancia entre un el hiperplano $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$ y el vector $v=(v_1,\ldots,v_n)$ en $\mathbb{R}^n$.

8. (*Las p-normas en* $\mathbb{R}^n$) Para un real $p\geq 1$ defina la función $\|\bullet\|_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(a) Demuestre que $\|\bullet\|_p$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ para todo valor de $p\geq 1$.
(b) Para $n=2$ y $p=1,2,3,20$ dibuje la bola unitaria de la norma p, es decir el conjunto

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_p\leq 1\}$$

(c) Demuestre que $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\max_{i=1,2,\ldots,n}|x_i|$.
(d) Para $n=3$ y $p=1,\infty$ dibuje la bola unitaria de la norma p, es decir el conjunto

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y)\|_p\leq 1\}$$

(e) Demuestre que para la norma euclídea se cumple que $b(x,y):=(\|x+y\|_2-\|x\|_2-\|y\|_2)/2$ es una función bilineal simétrica.
(f) Demuestre que $b_p(x,y):=(\|x+y\|_p-\|x\|_p-\|y\|_p)/2$ es bilineal simétrica si y solo si $p=2$.

9. Para una matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ la norma de Frobenius se define como

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2}=\sqrt{\operatorname{Tr}(A^\top A)}.$$

(a) Demuestre que $\|A\|_F$ es una norma en el espacio de matrices.
(b) Demuestre que la norma de Frobenius es invariante bajo transformaciones ortogonales. Es decir, pruebe que

$$\|UAV^\top\|_F=\|A\|_F.$$

Para cualquier par $U\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ de matrices ortogonales, es decir que satisfacen las ecuaciones $U^\top U=I_m$ y $V^\top V=I_n$.
(c) Calcule la norma de Frobenius de una matriz de permutación.