Práctico [P7]

1. Probar que las siguientes ecuaciones determinan a y en función de x alrededor de (x_0, y_0), como $y = \phi(x)$. Hallar $\phi'(x_0)$ y $\phi''(x_0)$, y determinar el polinomio de Taylor de segundo orden de ϕ alrededor de x_0.

    a) $x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0$, $(x_0, y_0) = (4, 3)$.
    b) $x^2y + \log(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
    c) $\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arc\,tg}(\frac{y}{x}) = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
    d) $\frac{x}{y} - \operatorname{sen}(\frac{\pi xy}{2}) = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
    e) $x + \operatorname{sh} x - \operatorname{sen} y = 0$, con $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2. Demostrar que la ecuación $e^y + y = e^{-2x} - x$ determina una única función $y = f(x)$ definida para todo x real. Hallar $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

3. Estudiar las funciones $y(x)$ definidas por las ecuaciones implícitas $F(x, y) = c$, donde $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2$. La curva de nivel para $c = 0$ se conoce como *lemniscata de Bernoulli.* Encontrar el conjunto de los puntos en los que $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, es decir, aquellos en los que no se puede aplicar el teorema de la función implícita. Hallar también el conjunto de los $(x, y(x))$ tales que $y'(x) = 0$, y reconocerlo geométricamente.

4. Probar que las siguientes ecuaciones determinan $z = \phi(x, y)$ alrededor de (x_0, y_0, z_0). Determinar el polinomio de Taylor de primer orden de ϕ alrededor de (x_0, y_0).

    a) $xz + x \operatorname{arc\,tg}(z) + z \operatorname{sen}(2x + y) = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$.
    b) $(x^2 + y^2 + 2z^2)^{\frac{1}{2}} = x \operatorname{sen}(z)$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = axz + x \arctan z + z \operatorname{sen}(2x + y) - 1$, con $a \in \mathbb{R}$.

    a) Probar que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ determina a $z = g(x, y)$ alrededor de $(0, \pi/2, 1)$.
    b) Hallar a para que $(0, \pi/2)$ sea un punto crítico de g.
    c) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \dfrac{g(x, y) - 1 - 3/2x^2 - 2x(y - \pi/2)}{x^2 + (y - \pi/2)^2}$.

6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto, y $f : A \to \mathbb{R}$ una función que no se anula en A, y tal que $(x^2 + y^2)f(x, y) + (f(x, y)^3) = 1$, $\forall (x, y) \in A$. Probar que f es de clase C^∞.

7. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = \big(x \cos y, \operatorname{sen}(x - y)\big)$. Probar que f es localmente invertible alrededor de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y calcular la matriz Jacobiana de la inversa local en $(0, 0)$.

8. *a)* Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Probar que f no es inyectiva.
    b) (Opcional) Generalice este resultado al caso de una función de clase C^1 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $m < n$.