

Práctico [P8]

1. En cada caso, encontrar los extremos absolutos de la función  $f$  en el conjunto dado.
  - a)  $f(x, y) = ax + by$  en  $C : x^2 + y^2 = 1$  (donde  $a^2 + b^2 \neq 0$ ).
  - b)  $f(x, y, z) = ax + by + cz$  en  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (donde  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ).
  - c)  $f(x, y) = xy$ , en  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ .
  - d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ , en  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\}$ .
  - e)  $f(x, y) = xy$ , en  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$ .
  - f)  $f(x, y, z) = xyz$ , en  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .
2. En cada caso, hallar la distancia mínima al origen del conjunto dado. Cuando exista, hallar también la distancia máxima.
  - a)  $C : 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$  en  $\mathbb{R}^2$ .
  - b)  $C : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$  en  $\mathbb{R}^2$ .
  - c)  $S : z^2 - xy = 1$  en  $\mathbb{R}^3$ .
  - d)  $S : x^2(y + z) + 2x(y^2 - z^2) + 2 = 0$  en  $\mathbb{R}^3$ .
3. En cada caso, hallar la distancia máxima y mínima de  $P \in \mathbb{R}^3$  a la curva  $C \subset \mathbb{R}^3$ .
  - a)  $P = (1, -1, 0)$ ,  $C : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1, x - y + 2z = 4$  (intersección de un plano y una esfera).
  - b)  $P = (0, 0, 2)$ ,  $C : z^2 = x^2 + y^2, 3(z - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0$  (intersección de un cono y un cilindro).
  - c)  $P = (1, 1, 1)$ ,  $C : x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  (intersección de un cono y una esfera).
4. En cada caso, mostrar que el conjunto  $C$  es compacto, y hallar los extremos absolutos de la función  $f$  en el conjunto  $C$ .
  - a)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 = 12, x + y + z = 2\}$ ,  $f(x, y, z) = x + y + 2z$ .
  - b)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 3y^2 - 4z = 0, y^2 - z = 0\}$ ,  $f(x, y, z) = 4xy + 4z - 1$ .
  - c)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 + 2 = 0, x + y + z - 1 = 0\}$ ,  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ .  
Hallar también la distancia máxima y mínima de  $C$  al plano  $y + 2z = 0$ .
- 5.Cuál es la cantidad mínima de cartón que se necesita para hacer una caja de un litro?
6. Demostrar que, entre todos los polígonos de  $n$  lados inscriptos en una circunferencia, el que tiene área máxima es el polígono regular.
7. Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x, y) = x \cdot y$ . Hallar los extremos de  $f$  sujeta a  $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$  y deducir de aquí la desigualdad de Cauchy-Schwarz.