Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo 2
Segundo semestre 2024

Práctico 9

1. Calcular las siguientes integrales en los bloques dados.

   a) $\int_I xy(x+y)$, donde $I = [0,1] \times [0,1]$.
   b) $\int_I (x^3 + 3x^2y + y^3)$, donde $I = [0,1] \times [0,1]$.
   c) $\int_I (\sqrt{y} + x - 3xy^2)$, donde $I = [0,1] \times [1,3]$.
   d) $\int_I \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$, donde $I = [0,\pi] \times [0,\pi]$.
   e) $\int_I y^{-3} e^{tx/y}$, $I = [0,t] \times [1,t]$.
   f) $\int_I f(x,y)$, donde $I = [-1,1] \times [-1,1]$, $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$.
   g) $\int_I z e^{y - zx}$, donde $I = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.
   h) $\int_I (y \cos x \operatorname{sen} z + x^2 y e^{xyz})$, donde $I = [2\pi, 5\pi/2] \times [0,1] \times [0,\pi]$.

2. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales de ciertas funciones f definidas sobre ciertos dominios. Dibujar esos dominios y expresar las integrales como integrales iteradas en el orden inverso de integración.

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx \qquad \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dy \qquad \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx$$

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy \qquad \int_1^e dx \int_0^{\log(x)} f(x,y)\,dy$$

3. Calcular $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = 2x - y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
   b) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.
   c) $f(x,y) = xy^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y+1\}$.
   d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$.
   e) $f(x,y) = xy$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
   f) $f(x,y) = (xy)^2$ y D es la región acotada del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas: $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

4. Calcular $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos, haciendo cambios de variable convenientes:

   a) $f(x,y) = x + y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) $f(x,y) = x$, y D es el paralelogramo de vértices $(-2/3,-1/3)$, $(2/3,1/3)$, $(4/3,-1/3)$ y $(0,-1)$.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y,\ x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

d) $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ y D es el triángulo de lados $y = x$, $y = -x$, $x = 1$ (se sugiere pasar a coordenadas polares).

e) $f(x,y) = (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)$ y D es el cuadrado de vértices $(\pi,0)$, $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$.

f) $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$. (Se sugiere hacer el cambio de variable $x = \sqrt{v-u}$, $y = v + u$).

5. En los siguientes casos, calcular el volumen de D:

a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq z \leq 1\}$.

b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 \}$.

c) D es el conjunto comprendido entre $z = x^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.

d) D es la intersección de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ con el interior del cilindro $2x^2+y^2-2x = 0$.

e) D es el sólido acotado que limitan S_1, S_2 y el plano $z = 0$, donde S_1 y S_2 son las superficies dadas respectivamente por las ecuaciones $2az = x^2+y^2$ y $x^2+y^2-z^2 = a^2$, con $a > 0$.

6. Sean $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u > 0\}$ y $h \colon U \to h(U)$ dada por $h(u,v) = (u+v, v-u^2)$.

a) Probar que h es un cambio de coordenadas (se hallará explícitamente h^{-1}).

b) Hallar J_h y $\det(J_h)$ en un punto genérico. Hallar $\det(J_{h^{-1}})$ en $(2,0)$, observando que $h(1,1) = (2,0)$.

c) Sea T el triángulo de lados $u = 0$, $v = 0$, $u + v = 2$. Calcular el área de $S = h(T)$.

7. Calcular $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ en los siguientes casos:

a) $f(x,y,z) = \sqrt{1 + (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x,y,z) \colon x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.

b) $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

c) $f(x,y,z) = x$ y D es el dominio acotado limitado por: $z = 0$, $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$, $x + y + z = 6$.

d) $f(x,y,z) = xyz$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq y,\ 0 \leq x,\ 0 \leq z,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

e) $f(x,y,z) = x^2+y^2$ y D es el dominio acotado comprendido entre: $x^2+y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 2$.

f) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$ y D comprendido entre: $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

g) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ y D comprendido entre: $z = 0$, $z = 1$, $z^2 = x^2+y^2$.

h) $f(x,y,z) = z$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leq a \leq x^2+y^2+z^2 \leq b \}$.

i) $f(x,y,z) = \big((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\big)^{-1/2}$ y D la clausura de bola de centro en el origen y radio r.

8. Demostrar la siguiente igualdad: $\iint_D f(xy)\,dx\,dy = \log(2) \int_1^2 f(u)\ du$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.