Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo 2

Práctico 2

1. *a)* Demuestre que todo paralelogramo en el plano cumple que la suma de los cuadrados de las longitudes de todos sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales.

   b) Más generalmente, demuestre que toda norma inducida por un producto interno cumple
   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

   c) Demuestre que la norma $\| \bullet \|_1$ en $\mathbb{R}^n$ (definida en el práctico anterior) no es inducida por ningun producto interno.

2. Para las siguientes funciones hallar el dominio más grande posible, determinar el conjunto imágen, y hallar las curvas de nivel, intentando bosquejar o reconocer geométricamente:

   a) $f(x,y) = e^{\sqrt{x-y}}$ *b)* $\ln\left(\dfrac{1}{x^2-y^2+1}\right)$ *c)* $\operatorname{sen}(x^2+y^2)$

   d) $f(x,y) = \cos(y) + x$ *e)* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2 \geq 1$, $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2 \leq 1$

   f) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(\ln(x) + 2y)$ *g)* $f(x,y) = e^{\cos(x)+y}$ *h)* $\dfrac{1}{y^2+\ln(x)}$

3. Para las siguientes funciones hallar dominio máximo, el conjunto imágen y los conjuntos de nivel:
   a) $f(x,y,z) = 2x + y - 3z$, b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$, c) $f(x,y,z) = e^{x+y} - z$
   d) $f(x,y,z) = x\cos(y)$, e) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ f) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

4. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en $\mathbb{R}^2$, y hallar sus *puntos de aglomeración* (los límites de las subsucesiones convergentes).

   a) $x_n = \left(e^{-n}, \frac{3}{n}\right)$.
   b) $x_n = \left(e^{-n} + 2, [1 + (-1)^n]n\right)$.
   c) $x_n = \left((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n}\right)$.
   d) $\left(n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.
   e) $(\cos n, \cos n)$.
   f) $(\cos n, \operatorname{sen} n)$.

   Sugerencia: Para los dos últimos, probar primero que el conjunto $\{n + 2k\pi : n, k \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

5. En cada uno de los casos siguientes, sea S el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano que satisfacen las desigualdades dadas. Hacer un gráfico mostrando el conjunto S y explicar si S es o no abierto. Indicar la frontera de S en el gráfico.

a) $x^2 + y^2 < 1$.
b) $3x^2 + 2y^2 < 6$.
c) $|x| < 1$ y $|y| < 1$.
d) $x \geq 0$ y $y > 0$.
e) $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$.
f) $x > 0$ y $y < 0$.
g) $xy < 1$.
h) $1 \leq x \leq 2$ y $3 < y < 4$.
i) $1 < x < 2$ y $y > 0$.
j) $x \geq y$.
k) $x > y$.
l) $y > x^2$ y $|x| < 2$.
m) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$.
n) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$.

6. Encuentre ejemplos que satisfagan las siguientes propiedades. Demuestre sus afirmaciones:

   a) Una sucesión en $[0,1]$ que tenga como adherencia a todo el intervalo $[0,1]$

   b) Una sucesión en $[0,1]^2$ que tenga como adherencia a todos los puntos del rectángulo $[0,1]^2$.

   c) Dado un conjunto contable $D \subseteq \mathbb{R}$ construya una sucesión que tenga los puntos de D como adherencia. Es posible, para todo D encontrar una sucesión cuyos puntos límites sean exáctamente los puntos de D?

7. Se definen los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\} \\
A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2, y > 0\} \\
A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\} \\
A_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1, (x,y) \neq (0,0)\} \\
A_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\} \\
A_6 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = (-1)^n + \tfrac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\} \\
A_7 &= \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \colon x = (-1)^n + e^{-n}, n \geq 1\} \cup \{(-1,0)\} \cup \{A_1 \cap \mathbb{Q}^2\} \\
A_8 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\} \\
A_9 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 1 \leq z\}
\end{aligned}
$$

   a) Representarlos gráficamente.

   b) Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos. Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.

   c) Indicar si son abiertos, cerrados, acotados, compactos, y/o conexos.

8. Probar los siguientes resultados.

   a) Si A es un conjunto abierto y $x \in A$ entonces $A \setminus \{x\}$ es abierto.

   b) A es abierto sii $A \cap \partial A = \phi$.

   c) $\overset{\circ}{A} = \bar{A} \setminus \partial A$ es un conjunto abierto, más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en A (es el conjunto abierto incluido en A más grande).

   d) A es cerrado sii $\partial A \subset A$ sii $A' \subset A$.

   e) $\bar{A} = A \cup \partial A$ es un conjunto cerrado, más aún, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A (es el cerrado que contiene a A más chico).

   f) A' es un conjunto cerrado.

9. Probar que si K es compacto y $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de K, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in K$ se tiene que $B(x,\delta) \subseteq A_\lambda$, para algún $\lambda \in \Lambda$ (un tal número δ se llama número de Lebesgue para el cubrimiento $\mathcal{A}$).