

Práctico 6

1. Para las siguientes funciones calcular los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 en el punto indicado.
 - a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$ en $(0, 0)$
 - b) $f(x, y) = \sqrt{5x + 2y}$ en $(1, 1)$
 - c) $f(x, y) = e^{x^2+y(y+1)}$ en $(0, 0)$
2. Para las siguientes funciones calcular los polinomios de Taylor de orden n (arbitrario) en el punto indicado.
 - a) $f(x, y, z) = xyz$ en $(1, -1, 0)$
 - b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$ y $(1, 0)$.
3. Calcular los siguientes límites:
 - a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)}{x^2 + y^2}$
 - b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1+y)}{x^2 + y^2}$.
4. Hallar y clasificar los puntos críticos. En caso de que existan, hallar el máximo y el mínimo absolutos:
 - a) $f(x, y) = x^4 + y^2 + y^4$.
 - b) $f(x, y) = 1 - y^2 - x^4$.
 - c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
 - d) $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
 - e) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x + 1)/(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$.
 - f) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz$.
 - g) $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$.
 - h) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en $[0, 1]^2$.
 - i) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.
5. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:
 - a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.
 - b) $f(x, y) = 1 - y^2 + x^2$.
 - c) $f(x, y) = (x - y - 1)^2$.
 - d) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.
 - e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
 - f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(x + y)$, solamente para los puntos que estén en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.
 - g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

- h) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$
- i) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2-y^2}$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
- j) $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - 2y^2 - 3x^2 + 1$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$.
6. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ para que el valor de la integral $\int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ sea mínimo.
7. Dada $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable, definimos $f : (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ poniendo $f(x, y) = \int_x^y \varphi(t) dt$.
- a) Hallar los puntos críticos de f , y determinar la condición para que sean no degenerados.
- b) Para $\varphi(t) = 3t^2 - 1$, hallar y clasificar los puntos críticos.
8. Sean I un intervalo abierto en \mathbb{R} y $f : I \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existe y es continua $\frac{\partial f}{\partial x} : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- a) Se define $G : (a, b)^2 \times I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $G(u, v, x) = \int_u^v f(x, y) dy$. Calcular $\frac{\partial G}{\partial u}$, $\frac{\partial G}{\partial v}$ y $\frac{\partial G}{\partial x}$.
- b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x \sin(xy) dy$. Sin calcular la integral, probar que

$$f'(x) = \sin(x^2) + \int_0^x y \cos(xy) dy$$

9. *Regresión lineal.* Dados $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, hallar una función afín $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, tal que $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, que minimice el error cuadrático $E(a, b)$, dado por $E(x, y) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$.

Ejercicios optativos

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $n \geq 2$. Si para algún $c \in \mathbb{R}$ el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es compacto, mostrar que entonces f posee al menos un extremo absoluto (máximo o mínimo). Notar que para $n = 1$ esto no es cierto.
2. Si \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son las distancias desde un punto (x, y) de una elipse a sus focos, demostrar que la ecuación $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \text{constante}$ (que satisfacen esas distancias) implica la relación $T \cdot \nabla(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = 0$, siendo T el vector unitario tangente a la elipse en (x, y) . Interpretar geométricamente este resultado, y con ello demostrar que la tangente forma ángulos iguales con las rectas que unen (x, y) a los focos.