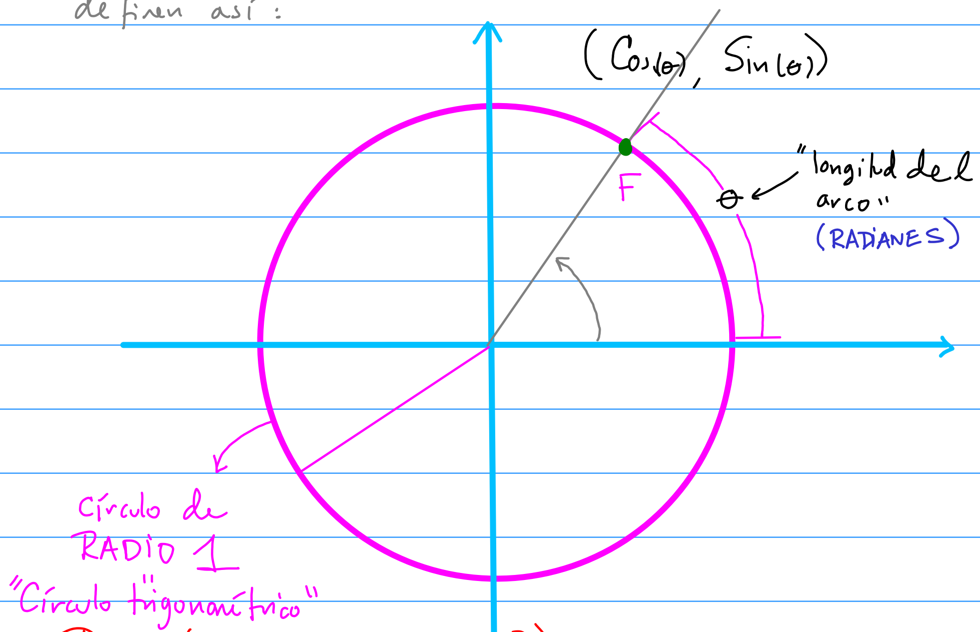
(1) Repaso de trigonometría:

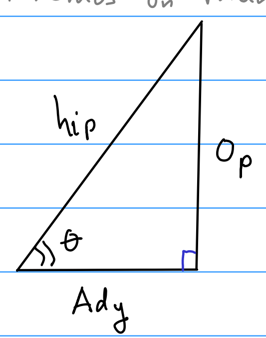
La trigonometría sirve para relacionar ángulos y distancias y es una fuente fundamental de nuevas funciones. Las principales son $Sin(x)$ y $Cos(x)$, que se definen así:



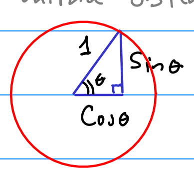
Def: (Qué son $Sin\theta$ y $Cos\theta$?)

Si consideramos el arco de longitud θ del círculo trigonométrico iniciando en $(1,0)$ entonces las coordenadas del punto final F del arco son $F = (Cos\theta, Sin\theta)$

Si tenemos un triangulo rectángulo cualquiera



podemos escalarlo para que la hipotenusa se haga unitaria obteniendo:



y como los triángulos son semejantes obtenemos

$$\boxed{\frac{Sin\theta}{1} = \frac{Op}{hip}} \quad , \quad \boxed{\frac{Cos\theta}{1} = \frac{Ady}{hip}}$$

Estas fórmulas relacionan ángulos y distancias.

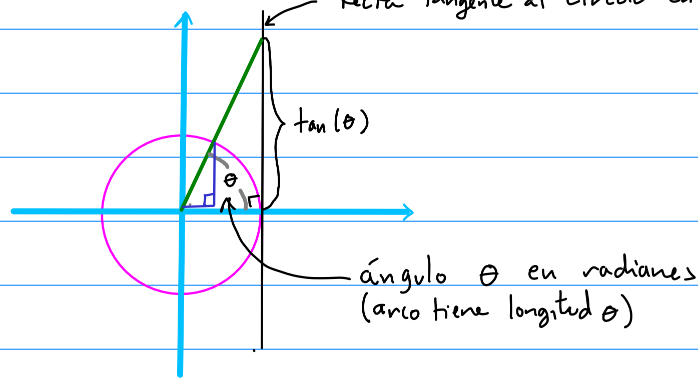
Teorema: [Identidades trigonométricas]
Las siguientes igualdades son ciertas para todo θ, α, β:

(1) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (identidad pitagórica)

(2) Identidades de seno y coseno de la suma:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Def: (Qué es $\tan(\theta)$?)



Por triángulos semejantes

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{op}{\cancel{h}}}{\frac{ady}{\cancel{h}}} = \frac{op}{ady}$$

pendiente de la recta por el origen con ángulo θ.

Calculando $\tan\theta$ podemos relacionar un ángulo con la ecuación de la recta que tiene ese ángulo

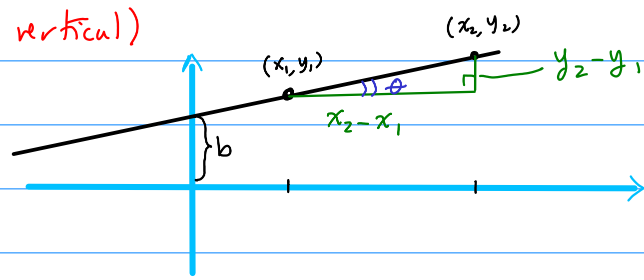
(2) Funciones lineales afines:

Def: Una función lineal afín es una de la forma

$$f(x) = m\,x + b$$

para alguna escogencia de los números m y b
llamados pendiente   intercepto

La gráfica de una función lineal afín es una recta (no vertical)



Obs: • $f(0) = m\cdot 0 + b = b$ así que $(0, b)$ es un punto de la gráfica.
intercepto

• Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en la gráfica entonces

$$\begin{cases} y_1 = m\,x_1 + b \\ y_2 = m\,x_2 + b \end{cases}$$

Restando las ecuaciones obtenemos

$$y_2 - y_1 = m\,x_2 - m\,x_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

y despejando obtenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{op}{ady}$$

en el triángulo rectángulo de la página anterior

$\frac{op}{ady} = \tan(\theta)$ (!) por repaso de Trig.

Ejercicio: Verifique que toda recta no vertical que pasa por el punto (A, B) es la gráfica de una función de la forma

$$f(x) = m\,(x - A) + B$$

para algún valor de m.

Sol: Sabemos que toda recta no vertical es la gráfica de una función lineal afín

$$f(x) = mx + b$$

si la gráfica pasa por (A, B) entonces

$f(A) = B$, es decir

$$mA + b = B \implies \boxed{b = B - mA}$$

y sustituyendo en la fórmula original

$$f(x) = mx + (B - mA) = m\,(x - A) + B \;.$$

Si $f(x)$ es una función lineal afín su comportamiento global es fácil de entender:

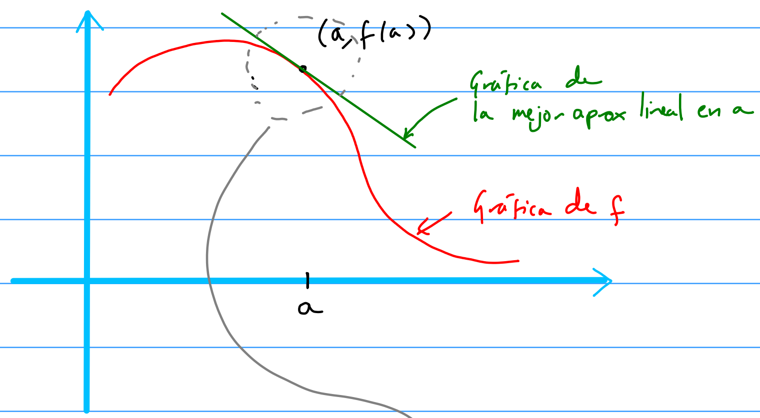
$f(x)$ es constante si $m = 0$

$f(x)$ es creciente si $m > 0$

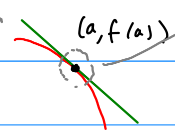
$f(x)$ es decreciente si $m < 0$

③ La idea de derivada:

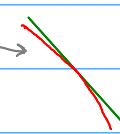
Como vimos antes las funciones lineales afines son muy simples. LA IDEA CENTRAL del cálculo diferencial es que una función muy complicada puede aproximarse cerca de un punto a dado mediante una función lineal afín y que esto basta para "entender" f cerca de a. Veámoslo en un dibujo:



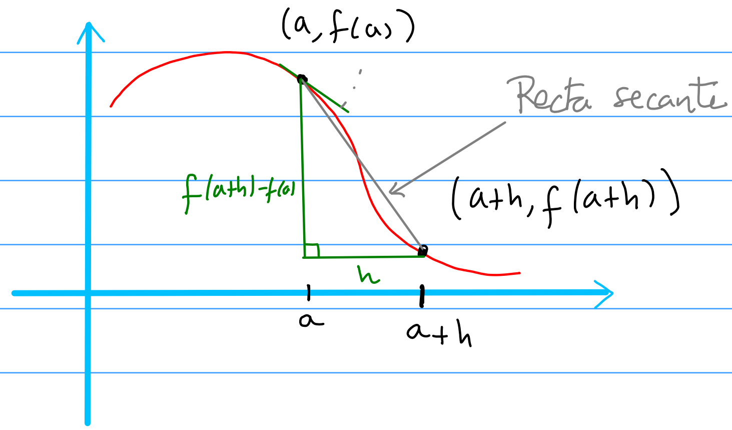
Si nos acercamos más



y más



el comportamiento de la gráfica de f y el de su recta tangente son muy parecidos. ¿Cómo calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$?



Consideramos la recta secante, que corta a la gráfica en los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$

$$\text{Pendiente de la recta secante} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En la medida en que h se hace más pequeño la secante se aproxima a la tangente, así que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta cantidad es MUY útil así que le damos un nombre:

Def: La derivada de $f(x)$ en a es

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Símbolo que se lee "derivada de f en a"

Así que, repitiendo lo de arriba tenemos

"$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$."

Las derivadas son muy útiles porque incluso si $f(x)$ es una función complicada calcular $f'(a)$ en un punto a es fácil indicándonos como se comporta f cerca de a. Ahora buscaremos algunas fórmulas para calcular derivadas.

Ejemplo: Si $f(x) = x^3$ calcule $f'(a)$ a partir de la definición de derivada.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = *$$

Calculamos $(a+h)^3 = (a+h)^2(a+h) = (a^2+2ah+h^2)(a+h)$

$$= a^3 + 2a^2h + ah^2 + a^2h + 2ah^2 + h^3$$

$$= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

así que $* = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a^3} + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3a^2 + 3ah + h^2)}{\cancel{h}} = 3a^2$$

Así que $f'(a) = 3a^2$

Ejemplo: Si $t(x) = \operatorname{Sin}(x)$ encuentre $t'(a)$ con la definición de derivada.

$$t'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{t(a+h) - t(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Sin}(a+h) - \operatorname{Sin}(a)}{h} =$$

De las identidades trigonométricas sabemos que

$$\operatorname{Sin}(a+h) = \operatorname{Sin}(a)\operatorname{Cos}(h) + \operatorname{Sin}(h)\operatorname{Cos}(a)$$

luego

$$\frac{\operatorname{Sin}(a+h) - \operatorname{Sin}(a)}{h} = \operatorname{Sin}(a)\frac{[\operatorname{Cos}(h) - 1]}{h} + \operatorname{Cos}(a)\frac{\operatorname{Sin}(h)}{h}$$

sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Sin}(h)}{h} = 1$,

$\operatorname{Cos}(a)$

Para el término faltante $\frac{\operatorname{Cos}(h) - 1}{h}$ tenemos:

identidad pitagórica

$$\frac{\operatorname{Cos}(h) - 1}{h} = \frac{(\operatorname{Cos}(h) - 1)(\operatorname{Cos}(h) + 1)}{h(\operatorname{Cos}(h) + 1)} = \frac{\operatorname{Cos}^2(h) - 1}{h(\operatorname{Cos}(h) + 1)} = \frac{-\operatorname{Sin}^2(h)}{h(\operatorname{Cos}(h) + 1)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\left(-\sin(h)\right)\cdot \frac{1}{\cos(h)+1}$$

$$1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Aquí usamos que el límite de un producto = producto de los límites si cada uno existe individualmente.

De todo lo anterior concluimos:

Si $t(x) = \sin(x)$ entonces $\boxed{t'(a) = \cos(a)}$