Práctico 7: Introducción a integración.

Mauricio Velasco

1. (*Arquímedes reloaded*) Para la función $f(x) = x^3$ realice los siguientes pasos:

    a) Si P es una partición del intervalo $[0, 1]$ en n intervalos de igual longitud, encuentre fórmulas para $L(f, P)$ y $U(f, P)$ como sumatorias con n términos.

    b) Calcule el valor de estas sumatorias usando el Problema 7 del práctico $[P1]$ como función de n.

    c) Calcule el límite cuando $n \to \infty$ en sus fórmulas.

    d) Use lo anterior para calcular el valor de $\int_0^1 x^3 dx$ justificando rigurosamente su respuesta.

2. Sea $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, esta función se llama *densidad de la normal standard* ó densidad gaussiana y juega un papel central en probabilidad y estadística.

    a) Haga la gráfica de la función en `pyplot`.

    b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ sea P_n la partición de $[a, b]$ en n partes iguales. Escriba una fórmula para el punto t_j que es el extremo izquierdo del j-'esimo intervalo para $j = 1, \ldots, n$ y fórmulas para m_j y M_j que denotan el valor mínimo y máximo de $g(x)$ en el j-ésimo intervalo de la partición respectivamente. Sus fórmulas deben depender sólo de a, b y n.

    c) Usando lo anterior, implemente en `python` funciones que reciban una cota inferior a, una cota superior b y un número de partes n y calculen $L(g, P_n)$ y $U(g, P_n)$ donde P_n denota la partición de $[a, b]$ en n partes iguales.

    d) Usando su implementación produzca

        1) Una tabla con $L(g, P_n)$ y $U(g, P_n)$ para $a = 0$, $b = 1$ y n variando entre 100 y 1000 en incrementos de 100.

2) Una tabla con $L(g, P_n)$ y $U(g, P_n)$ para $a = 1$, $b = 2$ y n variando entre 100 y 1000 en incrementos de 100.
3) Qué tan grande debe ser n para que los primeros dos decimales despues de la coma sean correctos? Responda en los dos casos.
4) Estime el valor de $\int_0^\infty g(x)dx$ usando su programa.

3. Use el Teorema fundamental del cálculo para calcular las siguientes integrales de manera exacta. Justifique rigurosamente todos sus pasos.

   a) $\int_1^2 4\sin(x) - 3x^5 + 6\sqrt{x}dx =$
   b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$
   c) $\int_\pi^{2\pi} \cos(\theta)d\theta =$
   d) $\int_{ln(3)}^{ln(6)} 8e^t dt =$

4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, \text{ si } 1 < x \leq 2 \\ 0, \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

   y defina $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

   a) Encuentre una expresión para $g(x)$ semejante a la de $f(x)$.
   b) Haga la gráfica de $f(x)$ y $g(x)$ en `pyplot`. Incluya su código y las imágenes.
   c) En qué subconjunto de $\mathbb{R}$ es $f(x)$ diferenciable? Justifique su respuesta.
   d) En qué subconjunto de $\mathbb{R}$ es $g(x)$ diferenciable? Justifique su respuesta.

5. Encuentre las derivadas de las siguientes funciones usando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo donde sea apropiado.

   a) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin^3(t)dt$
   b)

$$F(x) = \int_0^{\left(\int_1^x \frac{1}{y}dy\right)} \frac{1}{1+t^2}dt$$

   c) $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$ (Ayuda: La respuesta NO ES $xf(x)$).

d) Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial con parámetro dado $\lambda > 0$ si su densidad esta dada por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) \text{ , si } x > 0 \\ 0 \text{ , de lo contrario.} \end{cases}$$

1) Demuestre que $f(x)$ es una distribución de probabilidad.
2) Demuestre que el valor esperado de X es $1/\lambda$.
3) Calcule la varianza de X.