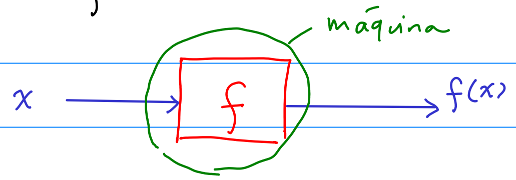
Funciones y sus gráficas:

El concepto de función es una de las ideas más importantes de las matemáticas y las ciencias.
Nos da una forma unificada de describir una gran cantidad de fenómenos disímiles.

Def: Una función f es una regla que recibe un número real x y produce otro número real $f(x)$



Como recibe y produce números reales denotamos

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Las funciones "matemáticas" son funciones en el sentido de programación:

```
def mifuncion(x)
    ⋮           } – regla
    return (f(x))
```

La "regla" de la que hablamos puede describirse de muchas maneras.

Ejemplo: (a) $f(x) = 3x + 1$

(b) $g(x) = \sin(x)$

(c) Una piedra cae en caída libre desde un edificio de 100 m de altura

100m

$h(x) =$ "Altura de la piedra x segundos después de ser soltada"

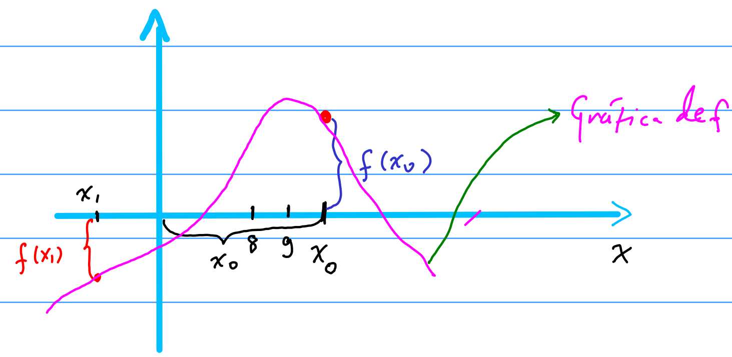
(d)

$$\operatorname{Err}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

Cómo imaginarse una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

Def: La GRÁFICA de una función f es

$$G(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$$



Nota que $f(9) > f(8)$

La gráfica tiene TODA la información de la función, es una manera perfecta de imaginar $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pregunta: ¿Toda curva en el plano es la gráfica de alguna función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$? (NO, encuentre un contraejemplo)

Cómo se hace la gráfica de una función?

(i) Si $f(x)$ tiene una fórmula sencilla, identificamos la forma y tabulamos un par de puntos ó

(ii) Mediante un computador.

Método (i):

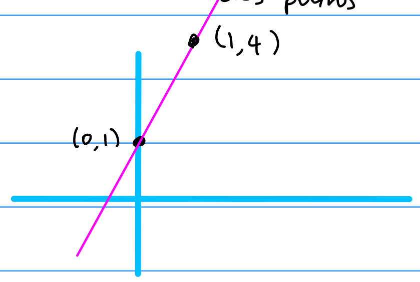
$f(x) = 3x + 1$

La gráfica es $y = 3x + 1$, una recta, para identificarla evalúo en dos puntos

x	y
0	1
1	4

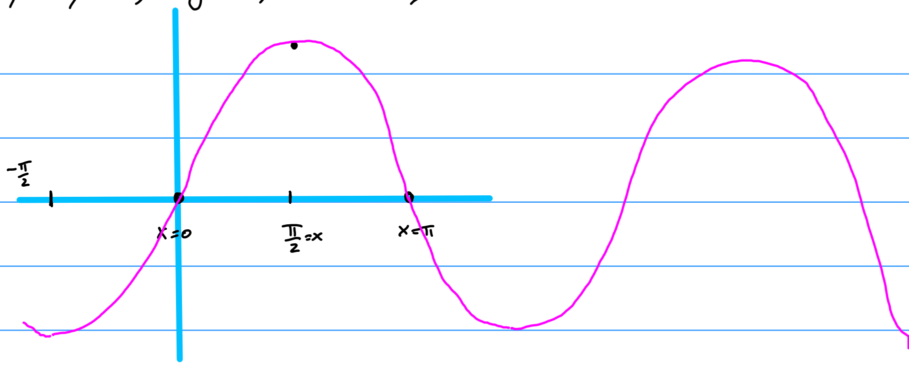
Variable dependiente su valor es determinado por la fórmula.

Variable independiente, nosotros elegimos su valor libremente



Vale la pena memorizar las gráficas de unas pocas funciones

$\sin(x)$, x^p, e^x, $\log(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\frac{1}{x}$



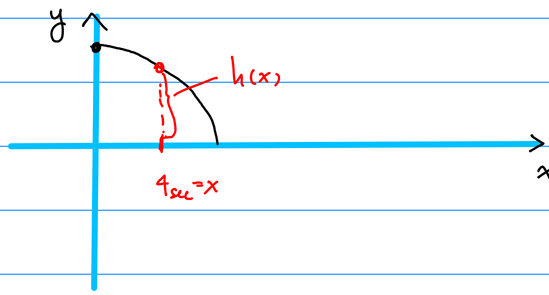
Cómo es la gráfica de $g(x) = 3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + 2$?

escalamiento   traslación

Para el problema de la piedra, la mecánica clásica nos enseña que:

9.8 m/sec^2

$$h(x) = 100 - a\frac{x^2}{2}$$



Las cosas se pueden complicar rápidamente...

$$\sin(\cos(x^2+7)) + 8\tan(x) = h(x) \quad ?$$

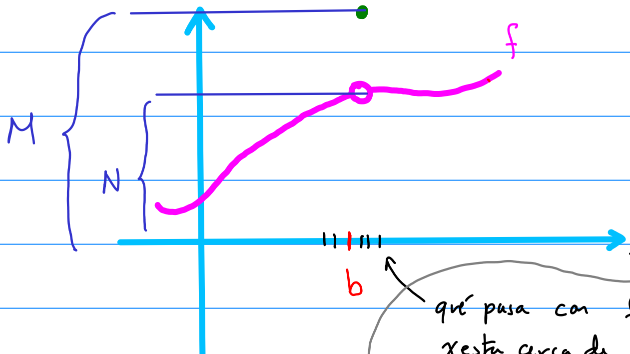
Un computador hace la gráfica de una función evaluando una tabla de valores muy grande

x	y
0.001	
0.002	
⋮	

Debemos indicarle el rango de la variable independiente

[Ver código en link adjunto para ver cómo se hace usando matplotlib]

Límites: Los límites sirven para describir el comportamiento de una función f cuando la variable independiente x toma valores cercanos, pero NO iguales a un valor $x = b$.



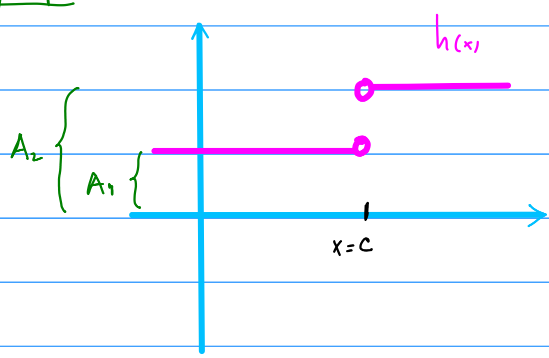
qué pasa con $f(x)$ cuándo x está cerca de b?

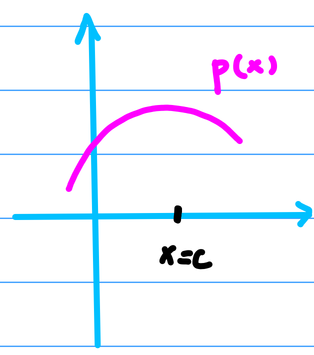
R. Toma valores muy cercanos a N

MÁS CORTO

$$\underbrace{\lim_{x \to b}}_{\text{"Límite cuando } x \text{ tiende a } b \text{" de } f(x)} f(x) = N$$

Ejemplos:





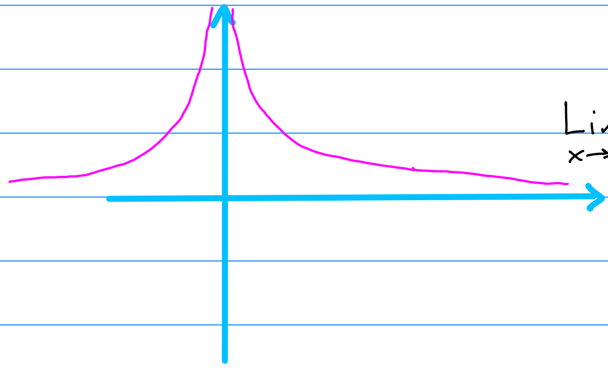
$\lim_{x \to c} h(x) =$ NO existe porque depende de cómo nos acercamos

$\lim_{x \to c^-} h(x) = A_1 \neq \lim_{x \to c^+} h(x) = A_2$

$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$

"La función $p(x)$ es continua en $x = c$"

(Ver ejemplo 1 para ver una función con un salto).



$$r(x) = \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \to 0} r(x) = +\infty$$

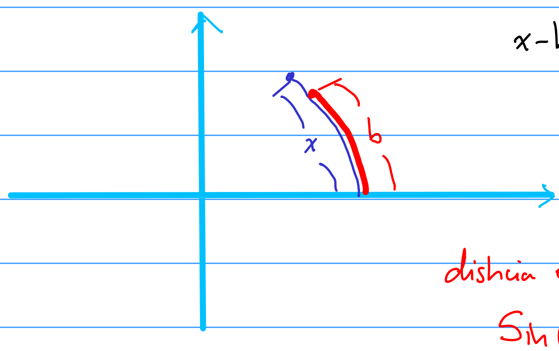
Hay dos ideas que se combinan para calcular límites:

(1) Mediante desigualdades [Teorema del sandwich]

(2) Usando reglas de límites y la continuidad de algunas funciones conocidas.

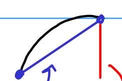
1

Ejemplo 1: Calcule $\lim_{x \to b} \sin(x) \overset{?}{=}$



$x - b$ = distancia a lo largo del círculo

$\geq$



distancia a lo largo de la recta

$\geq$

distancia entre coords y

$\sin(x) - \sin(b)$

$$|\sin(x) - \sin(b)| \leq |x - b|$$

$$\downarrow x \to b \qquad \downarrow x \to b$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

De aquí sabemos que $\sin(x)$ es continua, podemos reemplazar.

(2) **Reglas:** Suponga que $\lim_{x \to a} g(x) = G$ y $\lim_{x \to b} h(x) = H$ existen. Entonces:

(i) $\lim_{x \to a} g(x) \pm h(x) = G \pm H$

(ii) $\lim_{x \to a} g(x) \cdot h(x) = G \cdot H$

(iii) Si $H \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{G}{H}.$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 0} \frac{x(x-1)}{x(x+3)} =$