Optimización:

Def: Un problema de optimización es uno de la forma

$$\min \{ f(x) : x \in F \}$$

Queremos minimizar (ó a veces maximizar)

función objetivo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

conjunto factible de "opciones disponibles" $F \subseteq \mathbb{R}$

En palabras: Se trata de encontrar puntos factibles (en F) en los que la función objetivo f alcanza su valor MÍNIMO

Concretamente hay dos posibles tipos de solución de un problema de optimización. Podemos querer:

(1) Encontrar el número f_{min} que es el mínimo valor de $f(x)$ en F ó

encontrar el valor mínimo

(2) Encontrar todos los lugares $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_N$ con $f(a_i) = f_{min}$

Encontrar los minimizadores.

Ejemplo: La temperatura del punto x de una barra está dado por la fórmula

$$T(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 1$$

para x con $-1 \leq x \leq 2$.

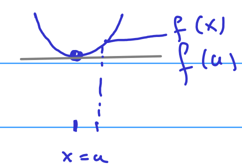
Encuentre las temperaturas máxima y mínima de la barra y los lugares donde tales temp. se alcanzan.

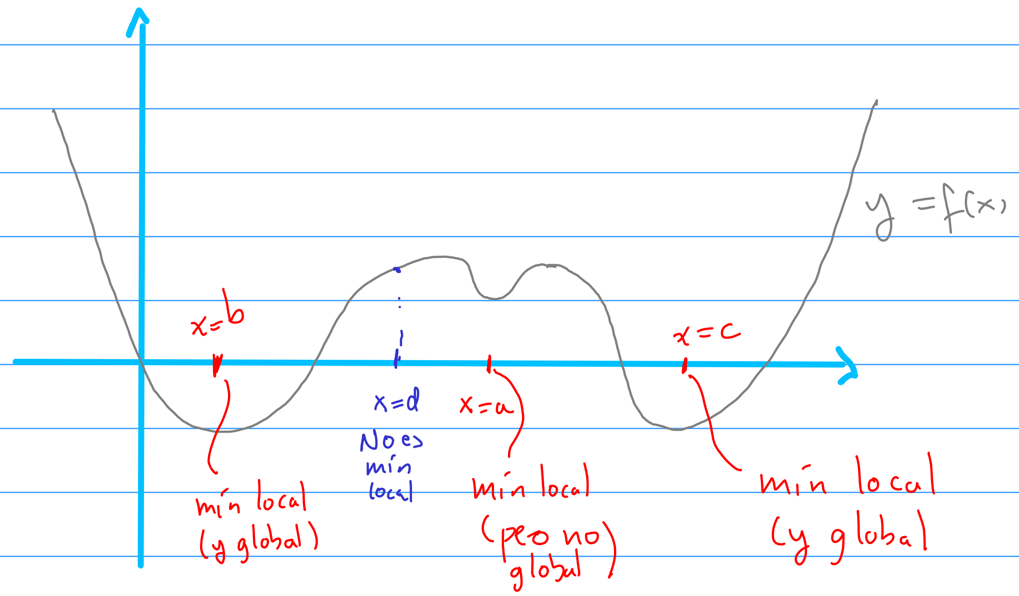
El objetivo real es encontrar la temperatura más baja de todas (el mínimo "global" de la temperatura). Cómo esto es en general muy difícil recurrimos a algunos conceptos auxiliares que nos ayudarán en esta búsqueda.

Def: El punto $x=a$ es un mínimo local para $f(x)$ si existe $\delta>0$ tal que

$$|x-a|<\delta \implies f(x)\geq f(a)$$

↳ Cerca de a los valores de f son $\geq f(a)$





Teorema: Si $f(x)$ es diferenciable en $x=a$ y $x=a$ es un mínimo local para $f(x)$ entonces $\boxed{f'(a)=0}$

Dem:

Para $h>0$ pequeño $a+h$ está muy cerca de a luego, porque $x=a$ es mín local

$$f(a+h)\geq f(a)$$

Se sigue que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq\frac{0}{h}=0$$

así que

$$f'(a)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0$$

Por otro lado, si $h<0$ con $|h|$ pequeño

$$f(a+h) \geq f(a)$$

luego

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$$

concluimos

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$$

luego $f'(a) \geq 0$ y $f'(a) \leq 0$

de donde $\boxed{f'(a) = 0}$

Hemos descubierto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizadores} \\ \text{globales de } f \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizadores} \\ \text{locales de } f \end{array} \right\} \overset{\substack{\text{si } f \\ \text{es diferenciable}}}{\subseteq} \underbrace{\{ a : f'(a) = 0 \}}_{\substack{\text{Puntos CRÍTICOS} \\ \text{de } f(x)}}$$

IDEA: Los puntos críticos son fáciles de encontrar y contienen a los minimizadores globales así que basta compararar los valores de $f(x)$ en los puntos críticos.

Teorema: Si $f(x)$ es diferenciable en $[a,b]$ entonces todo minimizador de $f(x)$ en $[a,b]$ es un punto crítico de $f(x)$ ó un extremo del intervalo.

Algoritmo: $\min \{ f(x) : x \in [a,b] \}$

(1) Calcule los puntos críticos de $f(x)$ en $[a,b]$ resolviendo $f'(x) = 0$ $\quad C = \{ c_1, c_2, \ldots, c_N \}$

(2) Comparo los valores de f en C

y en los bordes

$$\underbrace{f(a),\ f(b),\ f(c_1),\dots,\ f(c_N)}$$

El mínimo es el valor mínimo de f en $[a,b]$.

Ejemplo: La temperatura del punto x de una barra está dado por la fórmula

$$T(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 1$$

para x con $-1 \leq x \leq 2$.

Encuentre las temperaturas máxima y mínima de la barra y los lugares donde tales temp. se alcanzan.

Sol: Queremos resolver

$$\min \{ T(x) : x \in [-1,2] \}$$

(1) Calculamos puntos críticos

$$T'(x) = x - x^2 = 0 \quad \text{factorizando}$$

$$x(1-x) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ó } x=1$$

(2) Comparamos $\underbrace{T(-1)}_{}, \underbrace{T(0), T(1)}_{}, \underbrace{T(2)}_{}$ frontera $[-1,2]$

$T(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{6}$ ← máx temp

$T(0) = 1$

$T(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{6}$

$T(2) = 2 - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ← min temp.

Ejemplo: El punto (x,y) está en la recta $y = 4x+7$

$d(x) =$ "distancia entre (x,y) y $(0,0)$". Encuentre el valor mínimo de $d(x)$ para $-10 \leq x \leq 10$.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4x+7)^2}$$

Obs: Los minimizadores de $d(x)^2$ y de $d(x)$ coinciden así que $f(x) := d(x)^2$. Note que los valores NO coinciden, solo la localización de los minimizadores.

(1) Puntos críticos de $f(x)$:

$$f'(x) = 2x + 2(4x+7)\cdot 4 = 0$$

$$34x + 56 = 0$$

$$x = -\frac{56}{34} = -\frac{28}{17}$$

(2) $\underbrace{f(-10)}_{\vee \atop 400}$, $\underbrace{f\left(-\frac{28}{17}\right)}$, $\underbrace{f(10)}_{\vee \atop 400}$

así que el valor mínimo se alcanza aquí

luego el minimizador tiene

$$\begin{cases} x = -\frac{28}{17} \\ y = 4x + 7 \end{cases}$$