Práctico 6: Ecuaciones diferenciales.

Mauricio Velasco

1. Considere la ecuación diferencial $y' = \frac{y^2-1}{2}$.

   a) Demuestre que para todo valor de $c \in \mathbb{R}$ la función $y(t) = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ es solución de la ecuación diferencial.

   b) Haga una sola gráfica en `pyplot` que contenga las gráficas de $y(t)$ para $-5 \leq t \leq 5$ para 5 valores distintos de la constante c escogidos por ud (el dibujo debe ser legible y aclarar el valor de c en `legend`).

   c) Encuentre una solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2-1}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Considere la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

   a) Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial? Justifique regurosamente su respuesta

      1) $y = e^t$
      2) $y = e^{-t}$
      3) $y = te^t$
      4) $y = t^2e^{-t}$

   b) Demuestre que si $f(t)$ y $h(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial tambien lo es $Af(t) + Bh(t)$ para cualquier par de constantes A y B.

   c) Utilice las partes (a) y (b) del ejercicio para encontrar una solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(1) = e \\ y'(1) = e \end{cases}$$

3. Haga gráficas en `pyplot` de los campos de direcciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $4y' + 12y = 60$. Qué sucede con las soluciones cuando la variable independiente x aumenta?

   b) $y' = y^3 - 4y$. Segun el dibujo, para qué valores de la constante c existe el límite $\lim_{x\to\infty} y(x)$ para una solución con de $y(0) = c$? Cuáles son los valores posibles de este límite? Justifique sus respuestas.

4. Realice los siguientes pasos:

   a) Haga una implementación del método de Euler en python. Escriba el código de la misma.

   b) Utilice su implementación para calcular soluciones numéricas de los siguientes problemas de valor inicial para $h \in \{0{,}1, 0{,}01, 0{,}001\}$ y $0 \leq x \leq 5$:

      1) $\begin{cases} \text{y'=x}^2 + y \\ \text{y(1)=1} \end{cases}$

      2) $\begin{cases} \text{y'=y(4-y)} \\ \text{y(0)=1} \end{cases}$