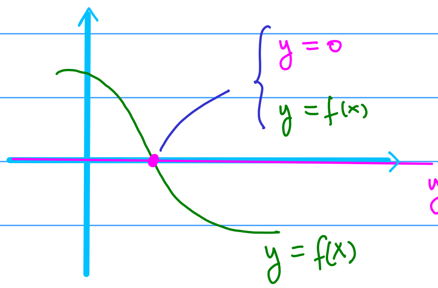
Aplicaciones del Cálculo I.

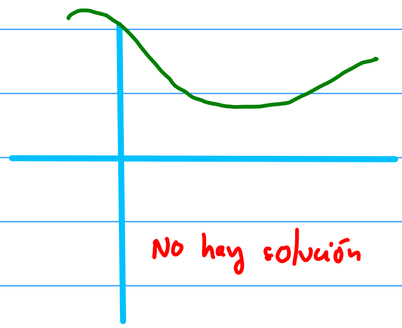
(1) Cómo resolver ecuaciones $\underbrace{x^3-3x+6}_{\text{función diferenciable } f(x)} \overset{\text{ecuación}}{=} 0$?

"resolver" significa encontrar un número real x^* con $f(x^*)=0$ (arriba sería $(x^*)^3-3x^*+6=0$)

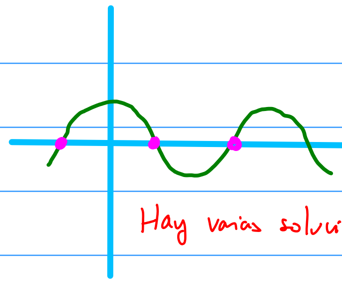
Note que un problema de este tipo podría no tener ninguna solución o tener muchas. Gráficamente



Una solución



No hay solución



Hay varias soluciones

El Método de Newton es un mecanismo para encontrar MUY BUENAS aproximaciones de una solución x^* de la ecuación $\boxed{f(x)=0}$ si disponemos de una aproximación inicial de esta solución.

Es una manera de refinar aproximaciones

PROBLEMA: encuentre solución x^* de

Considere $\boxed{f(x)=0}$ donde $f(x)$ es diferenciable

Idea: Si empezamos de una solución aproximada $x=a$ cómo podemos mejorarla?

USAMOS LA IDEA del cálculo diferencial. Cerca de $x=a$ tenemos

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

luego en vez de resolver $f(x)=0$ resolvemos

$$f(a)+f'(a)(x-a)=0 \quad \text{que es lineal en } x$$

$$f'(a)[x-a] = -f(a) \iff x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{si } f'(a)\neq 0.$$

así que nuestra solución mejorada es

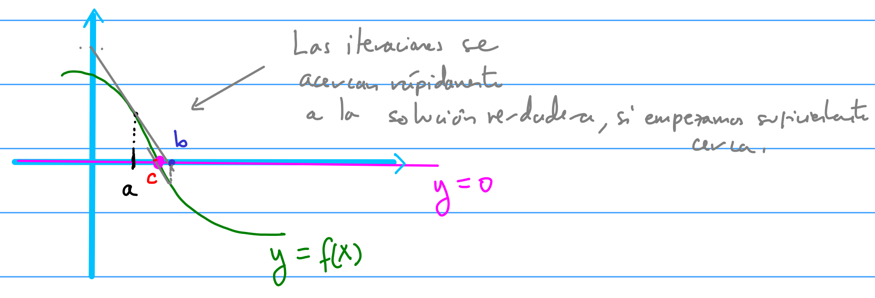
$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Más formalmente, definimos inductivamente $x_0, x_1, x_2, \ldots$

$$\begin{cases} x_0 = a & \text{(aproximación inicial dada)} \\ x_{j+1} = x_j - \dfrac{f(x_j)}{f'(x_j)} \end{cases}$$

Método de Newton para "resolver" $f(x)=0$.

Gráficamente lo podemos interpretar así:



Ejemplo: Para ver que el método funciona, calculemos aproximaciones a $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ es la solución a la ecuación $x^2-2=0$

$f(x) = x^2-2$

$f'(x) = 2x$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1.5 \\ x_{j+1} = x_j - \dfrac{x_j^2 - 2}{2x_j} \end{array}\right\}$$ ver implementación en la página web del cálculo. Obtiene los decimales conocidos en 5 iteraciones ✓

Ejemplo: Encuentre el mínimo absoluto de

$$f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 6x^2 + 24x \quad \text{en} \quad -1 \leq x \leq 7.$$

usando el Método de Newton para tener una precisión muy alta.

$f(\alpha) = 0$

Teorema: Si α es una solución, $I := [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ y $x_0 \in I$ cumplen:

(i) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

(ii) $f''(x)$ es continua en I

(iii) $M = \frac{1}{2}\left(\max_{x \in I} |f''(x)|\right)\left(\max_{x \in I} \frac{1}{|f'(x)|}\right)$ cumple $M|x_0 - \alpha| < 1$

entonces $|x_{k+1} - \alpha| \leq M\,|x_k - \alpha|^2$

y el método de Newton converge a α

MUY RÁPIDO

(el número de cifras significativas (decimales correctos) se duplica en cada iteración)

Derivadas de orden superior y sus usos:

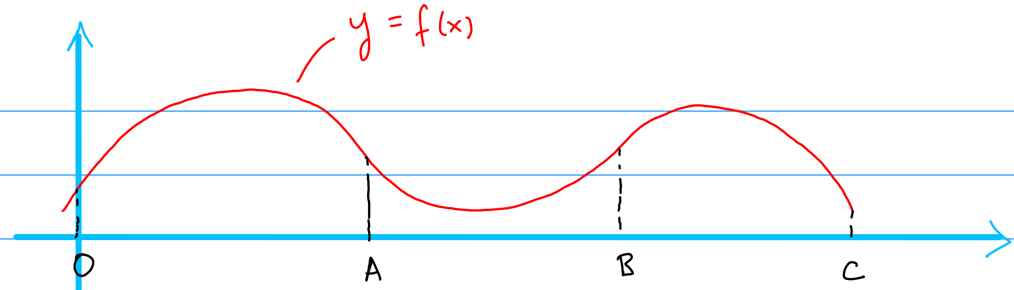
Si $f(x)$ es derivable podemos definir la función $f'(x)$ (que en cada punto x vale la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(x, f(x))$). Podemos preguntarnos si $f'(x)$ es diferenciable y en ese caso

$$\boxed{f''(x) := (f')'(x)}$$

Ejemplo: Si $f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x, \; f''(x) = e^x, \ldots$

Si $f(x) = \operatorname{Sin}(x), \; f'(x) = \operatorname{Cos}(x), \; f''(x) = -\operatorname{Sin}(x), \; f'''(x) = -\operatorname{Cos}(x), \; f^{(4)}(x) = \operatorname{Sin}(x)$

Cuánto vale $f^{(358)}(x) = ?$



Qué signo tiene la segunda derivada en cada pedazo?

Def: Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa en $[a,b]$

ssi: $f(ta+(1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$ $\forall t \in (0,1)$.

Teorema: Si f es una función diferenciable en $[a,b]$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es convexa en $[a,b]$

(2) $\forall x \in (a,b)$ $\forall y \in (a,b)$

$$\boxed{f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)}$$

(3) $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Ejemplo: Demuestre que la función $f(x) = x\log(x)$ es convexa para $x > 0$

entropía de Shannon.

Obs: Si $f(x)$ es convexa entonces todo punto crítico es un mínimo GLOBAL. Las funciones convexas son fáciles de optimizar y es una de las razones de su importancia