

## Práctico 4: Cálculo de derivadas.

Mauricio Velasco

1. **Definiciones básicas.** Complete los siguientes enunciados con definiciones correctas y completas:
  - a) La función  $f(x)$  es continua en  $x = a$  si...
  - b) El valor de la derivada de la función  $h(x)$  en el punto  $x = 8$  es el valor del siguiente límite...
  - c) La interpretación geométrica del número  $f'(a)$  es que este es igual a la pendiente de...
2. Sea  $f(x) = 1/x$ .
  - a) Encuentre una fórmula para  $f'(a)$  a partir de la definición de la derivada como un límite.
  - b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, 1/a)$ .
  - c) Demuestre que para todo número  $a$ , la recta tangente del punto anterior intersecta a la gráfica de  $f$  solamente en el punto  $(a, 1/a)$ .
3. Sea  $T(x) = 1/\sqrt{x}$ 
  - a) Encuentre una fórmula para  $T'(a)$  a partir de la definición de la derivada como un límite asumiendo  $a > 0$
  - b) Qué puede decir sobre  $T'(0)$ ? Haga una gráfica en `pyplot` que acompañe y justifique su respuesta.
4. Demuestre, usando inducción matemática y la regla del producto que la derivada del polinomio  $f_k(x) = x^k$  en  $a$  es  $ka^{k-1}$  para todo entero positivo  $k$ .
5. Demuestre, usando la definición de derivada, que para todo par de funciones  $f(x), g(x)$  diferenciables en  $x = a$  y para todo número real  $c$  se tiene que:

$$a) (f(x) + g(x))'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$b) (cf(x))'(a) = cf'(a).$$

6. Calcule una fórmula para  $f'(x)$  en los siguientes casos y encuentre la función lineal  $\ell(x)$  que mejor aproxima a  $f(x)$  cerca de  $x = 0,5$  (puede usar todas las reglas de diferenciación que vimos en clase). En cada caso, usando `pyplot` haga un dibujo de la función y de la recta con pendiente  $f'(0,5)$  que pasa por  $(0,5, f(0,5))$ .

$$a) f(x) = \sin(x + x^2)$$

$$b) f(x) = \sin(x) + \sin(x^2)$$

$$c) f(x) = \sin(\sin(x))$$

$$d) f(x) = \sin(x + \sin(x))$$

7. Calcule una fórmula para  $f'(x)$  en los siguientes casos y encuentre la función lineal  $\ell(x)$  que mejor aproxima a  $f(x)$  cerca de  $x = 0,5$  (puede usar todas las reglas de diferenciación que vimos en clase). En cada caso, usando `pyplot` haga un dibujo de la función y de la recta con pendiente  $f'(0,5)$  que pasa por  $(0,5, f(0,5))$ .

$$a) f(x) = \sin((x + 1)^2(x + 2))$$

$$b) f(x) = \sin^2(x) \sin(x^2)$$

$$c) f(x) = (x + \sin^5(x))^6$$

$$d) f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \sin^2(x)}$$