Práctico 5: Algunas aplicaciones.

Mauricio Velasco

1. Resuelva los siguientes problemas de optimización, justificando rigurosamente su razonamiento:

   a) Una caja rectangular tiene un volumen de $1000cm^3$. La longitud de la base es el doble de la altura h. El material de la base vale 100 por cm^2 y el de la pared 50 por cm^2. Encuentre la función de costo $C(h)$ de la caja y las dimensiones de la caja de costo mínimo.

   b) El punto (x, y) esta en la recta $y = 4x + 7$. Encuentre la función $d(x)$ que mide la distancia entre (x, y) y el origen y las coordenadas del punto que minimiza esta distancia.

   c) Un rectángulo centrado en el origen y paralelo a los ejes tiene longitud de la base b y altura a. El rectángulo esta inscrito en el círculo de radio 4. Encuentre $a(b)$ y el valor de b que maximiza el área del rectángulo.

   d) Una ventana normanda tiene la forma de un semicírculo pegado a un rectángulo https://search.library.wisc.edu/digital/AGS7KII67JFJ5S8Q. Si la ventana tiene un perímetro de $8m$. Encuentre la función $A(b)$ que mide el área de la ventana como función de la longitud de la base y las dimensiones que maximizan el área.

2. Haga una implementación del método de Newton con el objetivo de encontrar $\sqrt[3]{2}$ con 10 cifras decimales correctas (Debe escribir el código de su implementación asi como la justificación del proceso y los resultados obtenidos en las primeras diez iteraciones).

3. Utilice lo que sabe de optimización y del método de Newton para encontrar los lugares donde la función $f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 6x^2 + 24x$ alcanza sus valores máximo y mínimo en el intervalo $-1 \leq x \leq 7$.

   a) Haga una gráfica de la función en el intervalo.

b) Calcule todos los puntos críticos con al menos 5 decimales correctos. Debe entregar el código de su implementación de las iteraciones de Newton asi como el output de su implementación para cada solución.

c) Responda a la pregunta de arriba.

4. Encuentre una fórmula para la n-ésima derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sin(2x)$

   b) $f(x) = e^{3x}$

   c) $f(x) = xe^{x}$

5. Demuestre que $f(x) = x\log(x)$ en $x > 0$ y $h(x) = e^{x}$ en $\mathbb{R}$ son funciones convexas. Incluya gráficas en `pyplot` de las funciones.