

Práctico 1: Repaso desigualdades e Inducción

Mauricio Velasco

1. Encuentre todos los números reales x que cumplen las siguientes fórmulas, justificando su respuesta

a) $5 - x^2 < 8$

b) $(x - 1)(x - 3) > 0$

c) $(x - \pi)(x + 5)(x - 3) > 0$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

e) $\frac{x-1}{x+1} > 0$

f) $|x - 1| + |x - 2| > 1$

g) $|x - 1||x + 2| = 3$

2. Escriba los *axiomas de los números reales positivos* vistos en clase y utilice esos axiomas para demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

b) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

c) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

3. Enuncie la *desigualdad del triángulo* y utilícela para dar demostraciones muy cortas de las siguientes afirmaciones:

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$

b) $|x| - |y| \leq |x - y|$

c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

d) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$. Para cuáles x, y, z se alcanza la igualdad?

e) $\max(x, y) = \frac{x+y+|x+y|}{2}$

f) $\min(x, y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}$

4. Suponga que x, y, x_0, y_0 son números reales cualquiera y $\epsilon > 0$. Asumiendo que $|x - x_0| < \epsilon/2$ y $|y - y_0| < \epsilon/2$, demuestre las siguientes dos desigualdades:

a) $|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq \epsilon$

b) $|(x - y) - (x_0 - y_0)| \leq \epsilon$

5. Suponga que x, y, x_0, y_0 son números reales cualquiera y $\epsilon > 0$.

a) Asumiendo que $|x - x_0| < \min\left(\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right)$ y que $|y - y_0| < \min\left(\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}, 1\right)$, demuestre la desigualdad $|xy - x_0y_0| < \epsilon$.

b) Interprete la desigualdad del ejercicio anterior, qué es más fácil multiplicar con precisión aproximada? números pequeños o números grandes? Justifique su respuesta.

6. Sean x, x_0 números reales con $x_0 \neq 0$.

a) Encuentre qué debe ser K para poder demostrar que $|x - x_0| < K$ implica

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon$$

(K debe depender de ϵ y de x_0).

b) Interprete la desigualdad anterior. Qué es más fácil numéricamente, dividir por números grandes o por números pequeños? Justifique su respuesta.

7. Demuestre que las siguientes fórmulas son válidas para cualquier entero positivo n :

a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

c) Implemente las fórmulas en python y verifique su validez (usando **assert**) para los primeros 100 valores de n (escriba sólo el código de su implementación más no el output).

8. Resuelva los siguientes problemas:

a) Usando el ejercicio anterior, encuentre fórmulas para las siguientes sumas:

1) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = ?$

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = ?$

- b) Implemente las fórmulas que encontró en Python y verifique su validez (usando `assert`) para los primeros 100 valores de n (entregue solo el código de su implementación pero no el output).
- c) Demuestre la validez de las fórmulas que encontró usando inducción.