

Práctico 4: Cálculo de derivadas.

Mauricio Velasco

1. **Definiciones básicas.** Complete los siguientes enunciados con definiciones correctas y completas:
 - a) La función $f(x)$ es continua en $x = a$ si...
 - b) El valor de la derivada de la función $h(x)$ en el punto $x = 8$ es el valor del siguiente límite...
 - c) La interpretación geométrica del número $f'(a)$ es que este es igual a la pendiente de...
2. Sea $f(x) = 1/x$.
 - a) Encuentre una fórmula para $f'(a)$ a partir de la definición de la derivada como un límite.
 - b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, 1/a)$.
 - c) Demuestre que para todo número a , la recta tangente del punto anterior intersecta a la gráfica de f sólomente en el punto $(a, 1/a)$.
3. Sea $T(x) = 1/\sqrt{x}$
 - a) Encuentre una fórmula para $T'(a)$ a partir de la definición de la derivada como un límite asumiendo $a > 0$
 - b) Qué puede decir sobre $T'(0)$? Haga una gráfica en `pyplot` que acompañe y justifique su respuesta.
4. Demuestre, usando inducción matemática y la regla del producto que la derivada del polinomio $f_k(x) = x^k$ en a es ka^{k-1} .
5. Demuestre, usando la definición de derivada, que para todo par de funciones f, g diferenciables en a y para todo número real c se tiene que:
 - a) $(f(x) + g(x))'(a) = f'(a) + g'(a)$

$$b) \ (cf(x))'(a) = cf'(a).$$

6. Calcule una fórmula para $f'(x)$ en los siguientes casos y encuentre la función lineal $\ell(x)$ que mejor aproxima a $f(x)$ cerca de $x = 0,5$ (puede usar todas las reglas de diferenciación que vimos en clase). En cada caso, usando `pyplot` haga un dibujo de la función y de la recta con pendiente $f'(0,5)$ que pasa por $(0,5, f(0,5))$.

$$a) \ f(x) = \sin(x + x^2)$$

$$b) \ f(x) = \sin(x) + \sin(x^2)$$

$$c) \ f(x) = \sin(\sin(x))$$

$$d) \ f(x) = \sin(x + \sin(x))$$

7. Calcule una fórmula para $f'(x)$ en los siguientes casos y encuentre la función lineal $\ell(x)$ que mejor aproxima a $f(x)$ cerca de $x = 0,5$ (puede usar todas las reglas de diferenciación que vimos en clase). En cada caso, usando `pyplot` haga un dibujo de la función y de la recta con pendiente $f'(0,5)$ que pasa por $(0,5, f(0,5))$.

$$a) \ f(x) = \sin((x + 1)^2(x + 2))$$

$$b) \ f(x) = \sin^2(x) \sin(x^2)$$

$$c) \ f(x) = (x + \sin^5(x))^6$$

$$d) \ f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \sin^2(x)}$$