Hoy: (1) La derivada como mejor aproximación lineal.

(2) Cómo calcular derivadas?

Recordamos de la clase anterior,

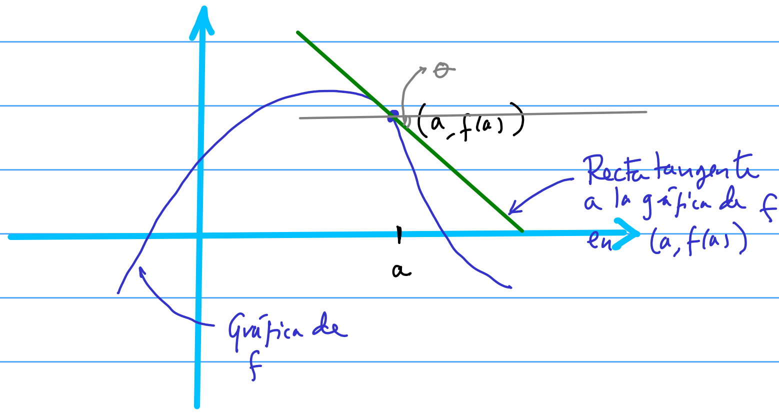
Def: Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y $x=a$ un punto definimos

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

pendiente de la secante por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$

si el límite EXISTE

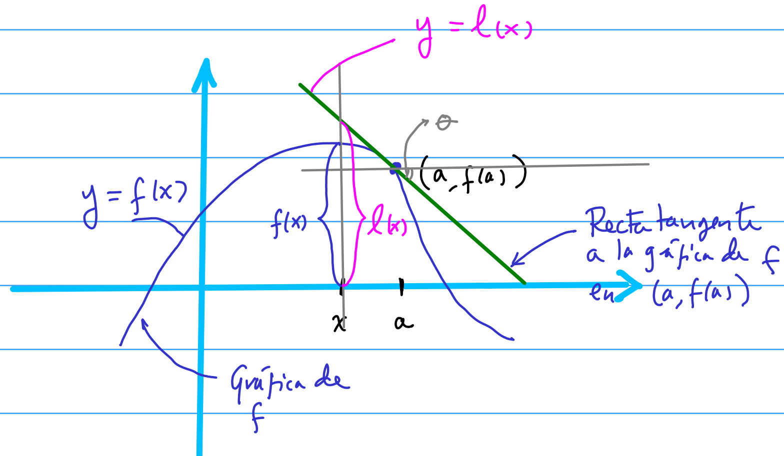
Esto se puede interpretar geométricamente así:



$f'(a) =$ "Pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$"

$\tan(\theta)$ en el dibujo de arriba.

Hay otra interpretación muy útil de la derivada. En el dibujo de arriba la gráfica de f y la gráfica de la recta tangente se parecen mucho CERCA de $x=a$.



Encontremos una fórmula para $\ell(x)$. Para ello calculemos la ecuación de la recta tangente.

Sabemos: (1) La recta tangente pasa por $(a, f(a))$

(2) tiene pendiente $f'(a)$

Del ejercicio de la clase anterior sabemos que toda recta que pasa por $(a, f(a))$ es de la forma

$$y = m(x-a) + f(a)$$

y sabemos que $m = f'(a)$ así que la ecuación de la recta tangente es

$$y = f'(a)(x-a) + f(x)$$

luego

$$\ell(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Con esa fórmula podemos medir qué tan cerca están $f(x)$ y $\ell(x)$

$$|f(x) - \ell(x)| = |f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))|$$

Obs:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{|f(x) - \ell_a(x)|}{|x-a|}\right] = \lim_{x\to a}\left(\frac{|f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))|}{|x-a|}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f'(a)(x-a)}{(x-a)}\right] = \lim_{x\to a}\left|\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right]\right| = 0$$

Por definición de derivada.

Hemos verificado el siguiente Teorema:

Teorema: Si $f(x)$ es derivable en $x=a$ entonces

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}$$

Notación o-chica, ver página siguiente

y más aún es el ÚNICO VALOR de m tal que

$$f(x) = f(a) + m(x-a) + o(x-a)$$

En palabras, la función lineal afín que MEJOR aproxima a $f(x)$ cerca de a es

$$l_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

o-chica

NOTACIÓN $o(\cdot)$:

o-minúscula

- Escribimos $f(x) = o(g(x))$ para decir $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, Se lee "$f(x)$ es de orden menor a $g(x)$ cerca de 0"

- Escribimos $f(x) = o(g(x-a))$ para decir que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Esto es equivalente a

$\forall \varepsilon \; \exists h: \; |x-a| < h \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ — se lee "$f(x)$ de orden menor a $g(x-a)$ para x cerca de a"

Ejemplo $f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{parte lineal}} + \underbrace{o(x-a)}_{\text{ERROR}}$

Ejemplo: Demuestre que $o((x-a)^2) \subseteq o((x-a))$

(b) y que $(x-a)\,h(x) = o((x-a)^2)$ si $h(x) = o(x-a)$

Sol: (a) Si $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^2} = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{x-a} = \lim_{x \to a}(x-a) \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x-a)^2} = 0$$

(b) Si $h(x) = o(x-a)$ entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{x-a} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}\,h(x)}{(x-a)^{\cancel{2}}} = 0 \checkmark \Rightarrow (x-a)\,h(x) = o((x-a)^2)$$

Ejemplo: Calcule la función lineal que mejor aproxima $f(x) = \sin(x)$ cerca de 0.

Sol.:

$$l_0(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$f(0) = 0$ _ $f'(x) = \cos(x)$ luego $f'(0) = 1$

de la clase anterior

$$l_0(x) = 0 + 1(x-0) = x$$

$$\sin(0.005) \approx 0.005$$

Ejemplo 2: Si f, g son diferenciables en a ¿cuál es la mejor aproximación lineal de $\underbrace{f(x)g(x)}_{\text{Producto}}$ cerca de a?

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)$$

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + f(a)g'(a)(x-a) + f'(a)g(a)(x-a) + f'(a)g'(a)(x-a)^2 + o(x-a)$$

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + [f(a)g'(a) + f'(a)g(a)](x-a) + o(x-a)$$

Concluimos que

$$(f(x)g(x))'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

La famosísima regla de Leibniz del producto.

Ejemplo 3: Si $f(x)$ es diferenciable en a y $g(x)$ es diferenciable en $b = f(a)$ ¿cuál es la mejor aproximación lineal de la composición $g(f(x))$ cerca de a?

Sol: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

$g(x) = g(b) + g'(b)(x-b) + o(x-b)$

$$g(f(x)) = g(b) + g'(b)\left[f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) - b\right] + o(x-b)$$

$$= g(f(a)) + \underbrace{g'(f(a))\left[f'(a)\right.}_{(g(f(x)))'(a)}\left.(x-a)\right] + \underbrace{o(x-a) + o(x-a)}_{=\,o(x-a)}$$

Concluimos que

$$[g(f(x))]'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$$

La famosísima regla de la cadena.

② Cómo calcular derivadas?

Hay algunas que obtenemos de la definición con límites

- $f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = k x^{k-1}$
- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
  $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$ } trigo

Y otras se obtienen mediante reglas de derivación:

Suma y resta $[f(x) + \lambda g(x)]' = f'(x) + \lambda g'(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

producto $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

división $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Regla de la cadena (Composición) $\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Sea $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$. Encuentre la función lineal que mejor aproxima a f cerca de $x = \frac{\pi}{4}$

(1) $f(x) = \frac{\overbrace{1}^{A(x)}}{\underbrace{1+\sin^2(x)}_{B(x)}}$

Usamos regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} =$$

$A'(x) = 0$ y calculemos $B'(x)$

$$B(x) = 1 + \sin^2(x) = 1 + (\sin(x))^2$$

composición de dos funciones

Regla de la cadena

$$B'(x) = 0 + 2(\sin(x)) \cdot \sin'(x)$$

$$= 2\sin(x)\cos(x).$$

Concluimos

$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{(1+\sin^2(x))^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2}=-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=-\frac{4}{9}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\ell(x)=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$