

## Práctico 2: Funciones, gráficas y límites.

Mauricio Velasco

1. Dibuje en planos cartesianos distintos las regiones  $(x, y)$  del plano que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

a)  $x > y$

b)  $y < x^2$

c)  $x + y$  es un entero

d)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^3 < 1$

e)  $x^2 < y < x^4$

2. Dibuje en planos cartesianos distintos las regiones  $(x, y)$  del plano que cumplen cada una de las siguientes igualdades:

a)  $|x| + |y| = 1$

b)  $|x - 1| = |y - 1|$

c)  $xy = 0$

d)  $x^2 - 2y + 4 = 0$

e)  $x^2 - y^2 = 0$

f)  $x = |y|$

g)  $x = \sin(y)$

3. Use `pyplot` para obtener dibujos de las gráficas de las funciones de abajo. Incluya su implementación y las gráficas de las funciones. En cada una describa qué pasa cerca de cero y cuando  $x$  es muy grande.

a)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b)  $g(x) = x - \frac{1}{x}$

c)  $h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

d)  $u(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

4. Mirando sólo la gráfica de la función  $f(x)$  de la parte (a) del ejercicio anterior, dibuje (a mano) las gráficas de las siguientes funciones:
  - a)  $f(x - 2)$
  - b)  $f(x) - 2$
  - c)  $2f(x)$
  - d)  $f(2x)$
  - e)  $3f(3(x - 1)) + 2$
5. El símbolo  $ReLu(x) = \max(x, 0)$ . Dibuje las siguientes funciones para  $-2 \leq x \leq 2$ 
  - a)  $f(x) = ReLu(x)$
  - b)  $f(x) = x + ReLu(x)$
  - c)  $f(x) = ReLu(x)^2 + x$
  - d) Demuestre que  $|x| = ReLu(x) + ReLu(-x)$ .
6. Recuerde que una función es *par* si  $f(x) = f(-x)$  para todo valor de  $x$  e *impar* si  $f(-x) = -f(x)$  para todo valor de  $x$ . Demuestre que toda función se puede escribir de manera única como la suma de una función par y una función impar.
7. Nos dicen que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ 
  - a) Implemente un programa en Python que calcule los valores de  $\frac{\sin(x)}{x}$  cerca de cero (en 0,1,0,01,0,001, etc.). Qué dicen estos números sobre el comportamiento de las funciones  $\sin(x)$  y  $x$  cerca de cero? Haga graficas en `pyplot` que justifiquen su respuesta.
  - b) Usando que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  y las fórmulas para seno y coseno de la suma de dos ángulos calcule los siguientes límites explicando cuidadosamente su razonamiento:
    - 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} =$
    - 2) Si  $a, b$  son números reales calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} =$  (el resultado depende de  $a$  y  $b$ ).
    - 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a)}{h} =$  (el resultado depende de  $a$ )
    - 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} =$
8. Dibuje la gráfica de una función cualquiera que cumpla todas las siguientes condiciones:

a)  $f(1) = 3$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

e)  $f(x)$  es impar (es decir cumple  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$ ).

f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ .

9. Si  $n$  un entero positivo y  $f(x)$  es una función decimos que  $f(x)$  tiene *orden polinomial  $n$  en el origen* si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 1$ . Suponga que  $f(x)$  tiene orden polinomial  $n$  y que  $g(x)$  tiene orden polinomial  $m$  en el origen.

a) Cuánto vale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ? (la depende de  $m$  y  $n$ ).

b)Cuál es el orden polinomial de la función  $f(x)g(x)$  en el origen?

c)Cuál es el orden polinomial de la función  $f(x) + g(x)$  en el origen?