

# Práctico 1: Repaso desigualdades e Inducción.

Mauricio Velasco

1. Encuentre todos los números reales  $x$  que cumplen las siguientes fórmulas, justificando su respuesta

a)  $5 - x^2 < 8$

b)  $(x - 1)(x - 3) > 0$

c)  $(x - \pi)(x + 5)(x - 3) > 0$

d)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

e)  $\frac{x-1}{x+1} > 0$

f)  $|x - 1| + |x - 2| > 1$

g)  $|x - 1||x + 2| = 3$

2. Escriba los *axiomas de los números reales positivos* vistos en clase y utilice esos axiomas para demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si  $a < b$  y  $c > 0$  entonces  $ac < bc$ .

b) Si  $a < b$  y  $c < 0$  entonces  $ac > bc$ .

c) Si  $0 \leq a < b$  entonces  $a^2 < b^2$ .

3. Enuncie la *desigualdad del triángulo* y utilícela para dar demostraciones muy cortas de las siguientes afirmaciones:

a)  $|x - y| \leq |x| + |y|$

b)  $|x| - |y| \leq |x - y|$

c)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

d)  $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ . Para cuáles  $x, y, z$  se alcanza la igualdad?

e)  $\max(x, y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}$

f)  $\min(x, y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}$

4. Suponga que  $x, y, x_0, y_0$  son números reales cualquiera y  $\epsilon > 0$ . Asumiendo que  $|x - x_0| < \epsilon/2$  y  $|y - y_0| < \epsilon/2$ , demuestre las siguientes dos desigualdades:

a)  $|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq \epsilon$

b)  $|(x - y) - (x_0 - y_0)| \leq \epsilon$

5. Suponga que  $x, y, x_0, y_0$  son números reales cualquiera y  $\epsilon > 0$ .

a) Asumiendo que  $|x - x_0| < \min\left(\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right)$  y que  $|y - y_0| < \min\left(\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}, 1\right)$ , demuestre la desigualdad  $|xy - x_0y_0| < \epsilon$ .

(Sugerencia: Recuerde que  $xy - x_0y_0 = xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0$  y factorice)

b) Interprete la desigualdad del ejercicio anterior, qué es más fácil multiplicar con precisión aproximada? números pequeños o números grandes? Justifique su respuesta.

6. Sean  $x, x_0$  números reales con  $x_0 \neq 0$ .

a) Encuentre qué debe ser  $K$  para poder demostrar que  $|x - x_0| < K$  implica

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon$$

( $K$  debe depender de  $\epsilon$  y de  $x_0$ ).

b) Interprete la desigualdad anterior. Qué es más fácil numéricamente, dividir por números grandes o por números pequeños? Justifique su respuesta.

7. Demuestre que las siguientes fórmulas son válidas para cualquier entero positivo  $n$ :

a)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

c) Implemente las fórmulas en python y verifique su validez (usando **assert**) para los primeros 100 valores de  $n$  (escriba sólo el código de su implementación más no el output).

8. Resuelva los siguientes problemas:

a) Usando el ejercicio anterior, encuentre fórmulas para las siguientes sumas:

- 1)  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = ?$
  - 2)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = ?$
- b) Implemente las fórmulas que encontró en Python y verifique su validez (usando `assert`) para los primeros 100 valores de  $n$  (entregue solo el código de su implementación pero no el output).
- c) Demuestre la validez de las fórmulas que encontró usando inducción.