# Práctico 1: Repaso desigualdades e Inducción.

Mauricio Velasco

1. Encuentre todos los números reales $x$ que cumplen las siguientes fórmulas, justificando su respuesta

    *a*) $5 - x^2 < 8$
    *b*) $(x-1)(x-3) > 0$
    *c*) $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$
    *d*) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$
    *e*) $\frac{x-1}{x+1} > 0$
    *f*) $|x-1| + |x-2| > 1$
    *g*) $|x-1||x+2| = 3$

2. Escriba los *axiomas de los números reales positivos* vistos en clase y utilice esos axiomas para demostrar las siguientes afirmaciones:

    *a*) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
    *b*) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.
    *c*) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

3. Enuncie la *desigualdad del triángulo* y utilícela para dar demostraciones muy cortas de las siguientes afirmaciones:

    *a*) $|x-y| \leq |x| + |y|$
    *b*) $|x| - |y| \leq |x-y|$
    *c*) $||x| - |y|| \leq |x-y|$
    *d*) $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$. Para cuáles $x, y, z$ se alcanza la igualdad?
    *e*) $\text{máx}(x,y) = \frac{x+y+|x+y|}{2}$
    *f*) $\text{mín}(x,y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}$

4. Suponga que $x, y, x_0, y_0$ son números reales cualquiera y $\epsilon > 0$. Asumiendo que $|x - x_0| < \epsilon/2$ y $|y - y_0| < \epsilon/2$, demuestre las siguientes dos desigualdades:

   *a*) $|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq \epsilon$
   *b*) $|(x - y) - (x_0 - y_0)| \leq \epsilon$

5. Suponga que $x, y, x_0, y_0$ son números reales cualquiera y $\epsilon > 0$.

   *a*) Asumiendo que $|x - x_0| < \text{mín}\left(\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right)$ y que $|y - y_0| < \text{mín}\left(\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}, 1\right)$, demuestre la desigualdad $|xy - x_0 y_0| < \epsilon$.
   *b*) Interprete la desigualdad del ejercicio anterior, qué es más fácil multiplicar con precisión aproximada? números pequeños o números grandes? Justifique su respuesta.

6. Sean $x, x_0$ números reales con $x_0 \neq 0$.

   *a*) Encuentre qué debe ser $K$ para poder demostrar que $|x - x_0| < K$ implica
   $$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon$$
   ($K$ debe depender de $\epsilon$ y de $x_0$).
   *b*) Interprete la desigualdad anterior. Qué es más fácil numéricamente, dividir por números grandes o por números pequeños? Justifique su respuesta.

7. Demuestre que las siguientes fórmulas son válidas para cualquier entero positivo $n$:

   *a*) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   *b*) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$
   *c*) Implemente las fórmulas en python y verifique su validez (usando `assert`) para los primeros 100 valores de $n$ (escriba sólo el código de su implementación más no el output).

8. Resuelva los siguientes problemas:

   *a*) Usando el ejercicio anterior, encuentre fórmulas para las siguientes sumas:

      1) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = ?$

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = ?$

*b*) Implemente las fórmulas que encontró en Python y verifique su validez (usando `assert`) para los primeros 100 valores de $n$ (entregue solo el código de su implementación pero no el output).

*c*) Demuestre la validez de las fórmulas que encontró usando inducción.