(1) Teorema Fund del cálculo: [TFC]

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$.

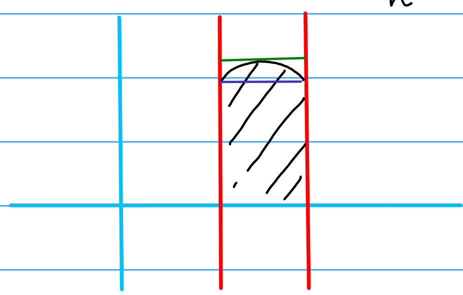
Si $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ entonces

(i) $G(x)$ es diferenciable en x

(ii) $G'(x) = f(x)$

Dem: Dado $x \in (a,b)$ calcularemos

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$



$$\frac{\cancel{h}\, m(f,x,x+h)}{\cancel{h}} \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq \frac{\cancel{h}\, M(f,x,x+h)}{\cancel{h}}$$

Continuidad de $f(x)$

continuidad de $f(x)$

$$f(x) \leq \qquad \leq f(x)$$

Como ambos lados van a $f(x)$ este límite también luego (i) y (ii) se cumplen.

Aplicaciones de la integral

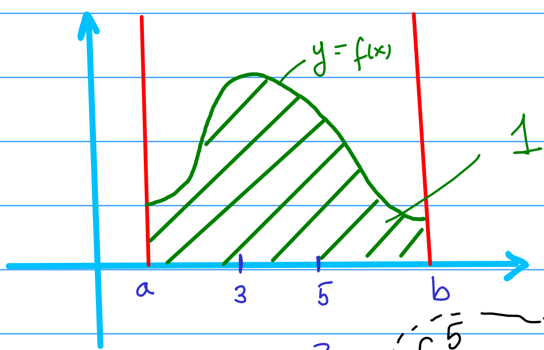
La aplicación más básica de la integral es el cálculo del "área bajo una curva" que esta nos permitió definir. Calcular áreas tiene una generalización muy muy importante que se llama cálculo de probabilidades.

Def: Una función continua $f(x)$ es una distribución de probabilidad en $[a,b]$ si cumple:

(i) $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

Idea:



Este número siempre resulta algo en $[0,1]$ y crece al hacer el intervalo más grande

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \in [3,5])} \overset{?}{:=} \int_3^5 f(x)\,dx$$

Probabilidad de que la variable aleatoria X esté en $[3,5]$

No sabemos en que lugar exacto está X sino sólo la probabilidad de que esté en una región.

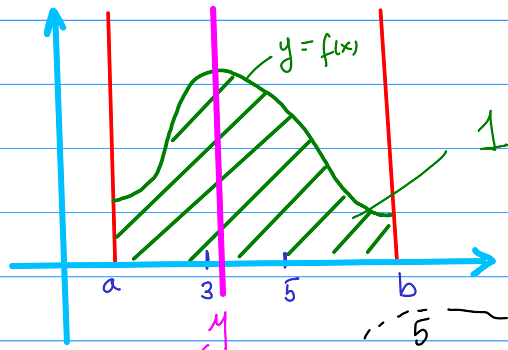
Def: El valor esperado de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X con densidad $f(x)$ es:

$$\mathbb{E}[g(X)] := \int_a^b g(x)\,f(x)\,dx$$

La media de X es $\mu := \mathbb{E}[X]$

La varianza de X es $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]$

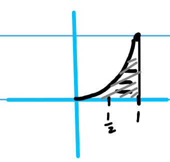
Lema: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$



(La media es el centro de masa de la distribución.

La varianza es una medida de que tan dispersa está la densidad alrededor de la media (para los físicos es el momento de inercia de un objeto).

Ejemplo: (i) Demuestre que $h(x) = 5x^4$ para $0 \le x \le 1$ es una dist. de probabilidad



(ii) Si Z tiene distribución $h(x)$ calcule $\mathbb{P}\{Z \ge \frac{1}{2}\}$, $\mathbb{E}[Z]$, $\mathbb{E}[Z^2]$, $\mathrm{Var}(Z)$

Sol: (i) $h(x) = (x^2)^2$ así que es ≥ 0 siempre.

$$\int_0^1 5x^4\,dx = 5\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{x=0}^{x=1} = 5\left(\frac{1}{5} - \frac{0}{5}\right) = \frac{5}{5} = 1.$$

dado que $h \ge 0$ e integra a 1 es una dist de probabilidad.

(ii) $$\mathbb{P}\{Z \ge \tfrac{1}{2}\} = \int_{\frac{1}{2}}^1 5x^4\,dx = x^5\Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} = 1 - \frac{1}{2^5} = \frac{2^5-1}{2^5} = \frac{31}{32} = 0.968\ldots$$

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^1 x\,(5x^4)\,dx = \frac{5x^6}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_0^1 x^2(5x^4)\,dx = \frac{5x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{5}{7}$$

$$Var(Z) = \frac{5}{7} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0198\ldots$$

Compare con la dist uniforme... esta esta mucho más a la derecha.

③ Para muchas aplicaciones es útil tener algunas técnicas básicas de integración.

<u>Sustitución:</u> Si $h(x) = f(g(x))$ entonces $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$ luego

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(x))\, g'(x)\, dx$$

haciendo $u = g(x)$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)\, du$$

Ejemplo: Use integrales para demostrar que el área de un semicírculo de radio r es $\frac{\pi}{2} r^2$.