Hoy. + Integración por sustitución y
Aplicaciones a ecuaciones diferenciales.

Recuerde la fórmula de integración por sustitución:

$$\boxed{\int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)\,du = \int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dx}$$

Si f y g son funciones diferenciables cualquiera. (Esto es esencialmente reescribir la regla de la cadena $[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x)$)

Para usarla en la práctica recurrimos a una MNEMOTECNIA,

$$\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \end{cases}$$

como se hace en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$

Idea: $u = 1-4x^2$, $du = -8x\,dx$ y sustituyendo

$$\int -\frac{1}{8}\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\,\frac{u^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{u}$$

así que

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C}$$

Ejemplo 2: $\displaystyle\int x^5\left(\sqrt{1+x^2}\right)dx =$

Idea: $u = 1+x^2$ $\quad du = 2x\,dx$

así que $u-1 = x^2$ $\quad (u-1)^2 = x^4$

$$\int (u-1)^2 \sqrt{u} \, \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right] du \quad (*)$$

Cómo se integran exponenciales generales x^α?

(1) Qué son?

$$x^\alpha := e^{\alpha \log(x)}$$

$\Big[$ porque $x = e^{\log(x)}$

$x^\alpha = \left(e^{\log(x)}\right)^\alpha \overset{\text{para } \alpha \in \mathbb{N}}{=} \underbrace{e^{\alpha \log(x)}}$ $\Big]$

tiene sentido para $\alpha \in \mathbb{R}$

Por regla de la cadena $(x^\alpha)' =$

$$\left[\exp(\alpha \log(x))\right]' = \exp'(\alpha \log(x)) \left[\alpha \log(x)\right]'$$

$$= \exp(\alpha \log(x)) \frac{\alpha}{x} = \frac{\exp(\alpha \log(x)) \, \alpha}{\exp(\log(x))} =$$

$$\exp((\alpha - 1)\log(x)) \, \alpha = \alpha \, x^{\alpha - 1}$$

Concluimos que

$$\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \log(|x|), & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

Para terminar (*) podemos aplicar lo de arriba.

2) Ecuaciones diferenciales separables.

Como mencionamos antes resolver ecuaciones diferenciales analíticamente es, en general, difícil. Hay algunas formas especiales en las que todo se simplifica, por ejemplo en las llamadas ecuaciones separables:

$$y'(x) = h(x)\, g(y)$$

El $F(x,y)$ es un producto (o división) de dos funciones, una depende exclusivamente de x y la otra exclusivamente de y.

Cómo se resuelven?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)} \iff g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$$

este símbolo es simplemente otra notación para la derivada

Integramos a ambos lados

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int h(x)\,dx$$

Regla de sustitución

$$\boxed{\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx}$$

Resolvemos las integrales e intentamos "despejar" y como función de x, resolviendo el problema.

__Ejemplo:__ Una población de bacterias crece de manera proporcional a la cantidad de bacterias presentes.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

si $k=2$ y $P(0)=1000$ describa el comportamiento

Sol: $\dfrac{dP}{dt} = 2P \Rightarrow \dfrac{dP}{2P} = dt$ integrando

$$\tfrac{1}{2}\log(P) = t + C$$

$$P = \exp(2t + 2C)$$

constante a determinar

$$P = e^{2t} A \qquad P(0) = 1000 = A \Rightarrow A = 1000$$

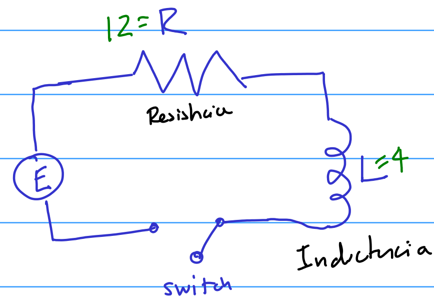
$$\boxed{P(t) = 1000\, e^{2t}}$$

constantes

Ejemplo: $L \dfrac{dI}{dt} + RI = E \qquad I(0) = 0$

Corriente $I(t)$ en Amperios.

$$4\frac{dI}{dt} + 12 I = 60$$



Caida en voltaje = $E(t)$ ← voltaje producido

$$\frac{4}{60 - 12I}\, dI = dt$$

$$-\frac{\cancel{4}}{\cancel{12}\,3}\log(60 - 12I) = t + K$$

$$60 - 12I = \exp(-3t + K) = \exp(-3t)\, e^{K} \quad A$$

$I(0) = 0 \Rightarrow A = 60$

$$I = \frac{60 - 60\exp(-3t)}{12} = 5\left[1 - e^{-3t}\right]$$

$I(t)$ converge a 5 si $t \to \infty$.