Práctico 1: Repaso desigualdades e Inducción.

Mauricio Velasco

1. Encuentre todos los números reales x que cumplen las siguientes fórmulas, justificando su respuesta

   a) $5 - x^2 < 8$
   b) $(x-1)(x-3) > 0$
   c) $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$
   d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$
   e) $\frac{x-1}{x+1} > 0$
   f) $|x-1| + |x-2| > 1$
   g) $|x-1||x+2| = 3$

2. Escriba los *axiomas de los números reales positivos* vistos en clase y utilice esos axiomas para demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
   b) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.
   c) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

3. Enuncie la *desigualdad del triángulo* y dé demostraciones de las siguientes afirmaciones (usando, si quiere, la desigualdad del triángulo):

   a) $|x-y| \leq |x| + |y|$
   b) $|x| - |y| \leq |x-y|$
   c) $||x| - |y|| \leq |x-y|$
   d) $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$. Para cuáles x, y, z se alcanza la igualdad?
   e) $\text{máx}(x,y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}$
   f) $\text{mín}(x,y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}$

4. Suponga que x, y, x_0, y_0 son números reales cualquiera y $\epsilon > 0$. Asumiendo que $|x - x_0| < \epsilon/2$ y $|y - y_0| < \epsilon/2$, demuestre las siguientes dos desigualdades:

   a) $|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq \epsilon$

   b) $|(x - y) - (x_0 - y_0)| \leq \epsilon$

5. Suponga que x, y, x_0, y_0 son números reales cualquiera y $\epsilon > 0$.

   a) Asumiendo que $|x - x_0| < \text{mín}\left(\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right)$ y que $|y - y_0| < \text{mín}\left(\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}, 1\right)$, demuestre la desigualdad $|xy - x_0y_0| < \epsilon$. (Sugerencia: Recuerde que $xy - x_0y_0 = xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0$ y factorice)

   b) Interprete la desigualdad del ejercicio anterior, qué es más fácil multiplicar con precisión aproximada? números pequeños o números grandes? Justifique su respuesta.

6. Sean x, x_0 números reales con $x_0 \neq 0$.

   a) Encuentre qué debe ser K para poder demostrar que $|x - x_0| < K$ implica
   $$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon$$
   (K debe depender de ϵ y de x_0).

   b) Interprete la desigualdad anterior. Qué es más fácil numéricamente, dividir por números grandes o por números pequeños? Justifique su respuesta.

7. Demuestre que las siguientes fórmulas son válidas para cualquier entero positivo n:

   a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

   c) Implemente las fórmulas en python y verifique su validez (usando `assert`) para los primeros 100 valores de n (escriba sólo el código de su implementación más no el output).

8. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Usando el ejercicio anterior, encuentre fórmulas para las siguientes sumas:

1) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 =?$

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 =?$

b) Implemente las fórmulas que encontró en Python y verifique su validez (usando `assert`) para los primeros 100 valores de n (entregue solo el código de su implementación pero no el output).

c) Demuestre la validez de las fórmulas que encontró usando inducción.