Práctico 2: Funciones, gráficas y límites.

Mauricio Velasco

1. Dibuje en planos cartesianos distintos las regiones (x, y) del plano que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

   a) $x > y$

   b) $y < x^2$

   c) $x + y$ es un entero

   d) $(x-1)^2 + (y-2)^3 < 1$

   e) $x^2 < y < x^4$

2. Dibuje en planos cartesianos distintos las regiones (x, y) del plano que cumplen cada una de las siguientes igualdades:

   a) $|x| + |y| = 1$

   b) $|x-1| = |y-1|$

   c) $xy = 0$

   d) $x^2 - 2y + 4 = 0$

   e) $x^2 - y^2 = 0$

   f) $x = |y|$

   g) $x = \sin(y)$

3. Use `pyplot` para obetener dibujos de las gráficas de las funciones de abajo. Incluya su implementación y las gráficas de las funciones. En cada una describa qué pasa cerca de cero y cuando x es muy grande.

   a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

   b) $g(x) = x - \frac{1}{x}$

   c) $h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

   d) $u(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

4. Mirando sólo la gráfica de la función $f(x)$ de la parte (a) del ejercicio anterior, dibuje (a mano) las gráficas de las siguientes funciones:

   a) $f(x-2)$
   b) $f(x)-2$
   c) $2f(x)$
   d) $f(2x)$
   e) $3f(3(x-1))+2$

5. Defina la función $ReLu(x) := \text{máx}(x,0)$. Haga la gráfica de las siguientes funciones para $-2 \leq x \leq 2$

   a) $f(x) = ReLu(x)$
   b) $f(x) = x + ReLu(x)$
   c) $f(x) = ReLu(x)^2 + x$
   d) Demuestre que $|x| = ReLu(x) + ReLu(-x)$.

6. Recuerde que una función es *par* si $f(x) = f(-x)$ para todo valor de x e impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo valor de x. Demuestre que toda función se puede escribir de manera única como la suma de una función par y una función impar.

7. Asuma que, como vimos en clase, $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

   a) Implemente un programa en Python que calcule los valores de $\frac{\sin(x)}{x}$ cerca de cero (en 0,1,0,01,0,001, etc.). Qué dicen estos números sobre el comportamiento de las funciones $\sin(x)$ y x cerca de cero? Haga graficas en `pyplot` que justifiquen su respuesta.
   b) Usando que $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ y las fórmulas para seno y coseno de la suma de dos ángulos calcule los siguientes límites explicando cuidadosamente su razonamiento:

      1) $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} =$
      2) Si a, b son números reales calcule $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} =$ (el resultado depende de a y b).
      3) $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a)}{x} =$ (el resultado depende de a)
      4) $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a)}{a} =$
      5) $\text{lím}_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} =$

8. Dibuje la gráfica de una función cualquiera que cumpla todas las siguientes condiciones:

   a) $f(1) = 3$
   b) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
   c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$
   d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$
   e) $f(x)$ es impar (es decir cumple $f(-x) = -f(x)$ para todo x).
   f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.

9. (*Notación o-chica*) Para $a \in \mathbb{R}$ y un entero positivo k. Escribimos $f(x) \in o\big((x-a)^k\big)$ si y sólo si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

(en palabras $f(x) \in o\big((x-a)^k\big)$ se lee $f(x)$ *tiene orden menor a k en a*). Demuestre las siguientes afirmaciones para enteros positivos $k, m, n \geq 1$

   a) $(x-3)^{k+1} \in o((x-3)^k)$ y $(x-3)^{k+1} \notin o((x-3)^{k+1})$.
   b) Si $f(x) \in o\big((x-a)^{k+1}\big)$ entonces $f(x) \in o\big((x-a)^k\big)$.
   c) Si $f(x) \in o\left((x-a)^m\right)$ y $g(x) \in o\left((x-a)^n\right)$ entonces:
      1) $f(x) \cdot g(x) \in o\left((x-a)^{m+n}\right)$
      2) $f(x) + g(x) \in o\left((x-a)^{\min(m,n)}\right)$