

Práctico 2: Funciones, gráficas y límites.

Mauricio Velasco

1. Dibuje en planos cartesianos distintos las regiones (x, y) del plano que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

a) $x > y$

b) $y < x^2$

c) $x + y$ es un entero

d) $(x - 1)^2 + (y - 2)^3 < 1$

e) $x^2 < y < x^4$

2. Dibuje en planos cartesianos distintos las regiones (x, y) del plano que cumplen cada una de las siguientes igualdades:

a) $|x| + |y| = 1$

b) $|x - 1| = |y - 1|$

c) $xy = 0$

d) $x^2 - 2y + 4 = 0$

e) $x^2 - y^2 = 0$

f) $x = |y|$

g) $x = \sin(y)$

3. Use `pyplot` para obtener dibujos de las gráficas de las funciones de abajo. Incluya su implementación y las gráficas de las funciones. En cada una describa qué pasa cerca de cero y cuando x es muy grande.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b) $g(x) = x - \frac{1}{x}$

c) $h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

d) $u(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

4. Mirando sólo la gráfica de la función $f(x)$ de la parte (a) del ejercicio anterior, dibuje (a mano) las gráficas de las siguientes funciones:

- a) $f(x - 2)$
- b) $f(x) - 2$
- c) $2f(x)$
- d) $f(2x)$
- e) $3f(3(x - 1)) + 2$

5. Defina la función $ReLu(x) := \max(x, 0)$. Haga la gráfica de las siguientes funciones para $-2 \leq x \leq 2$

- a) $f(x) = ReLu(x)$
- b) $f(x) = x + ReLu(x)$
- c) $f(x) = ReLu(x)^2 + x$
- d) Demuestre que $|x| = ReLu(x) + ReLu(-x)$.

6. Recuerde que una función es *par* si $f(x) = f(-x)$ para todo valor de x e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo valor de x . Demuestre que toda función se puede escribir de manera única como la suma de una función par y una función impar.

7. Asuma que, como vimos en clase, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

a) Implemente un programa en Python que calcule los valores de $\frac{\sin(x)}{x}$ cerca de cero (en 0,1,0,01,0,001, etc.). Qué dicen estos números sobre el comportamiento de las funciones $\sin(x)$ y x cerca de cero? Haga graficas en `pyplot` que justifiquen su respuesta.

b) Usando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ y las fórmulas para seno y coseno de la suma de dos ángulos calcule los siguientes límites explicando cuidadosamente su razonamiento:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} =$
- 2) Si a, b son números reales calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} =$ (el resultado depende de a y b).
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a)}{x} =$ (el resultado depende de a)
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a)}{a} =$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} =$

8. Dibuje la gráfica de una función cualquiera que cumpla todas las siguientes condiciones:

a) $f(1) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

e) $f(x)$ es impar (es decir cumple $f(-x) = -f(x)$ para todo x).

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$.

9. (*Notación o-chica*) Para $a \in \mathbb{R}$ y un entero positivo k . Escribimos $f(x) \in o((x-a)^k)$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

(en palabras $f(x) \in o((x-a)^k)$ se lee $f(x)$ tiene orden menor a k en a). Demuestre las siguientes afirmaciones para enteros positivos $k, m, n \geq 1$

a) $(x-3)^{k+1} \in o((x-3)^k)$ y $(x-3)^{k+1} \notin o((x-3)^{k+1})$.

b) Si $f(x) \in o((x-a)^{k+1})$ entonces $f(x) \in o((x-a)^k)$.

c) Si $f(x) \in o((x-a)^m)$ y $g(x) \in o((x-a)^n)$ entonces:

1) $f(x) \cdot g(x) \in o((x-a)^{m+n})$

2) $f(x) + g(x) \in o((x-a)^{\min(m,n)})$