

## Práctico 8: Integración y algunas aplicaciones.

Mauricio Velasco

1. Utilice una sustitución para encontrar todas las primitivas de las siguientes funciones,

a)  $\int x^3 \cos(x^4 + 7) dx =$

b)  $\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} =$

c)  $\int \sin(5x) dx =$

d)  $\int \sec^2(6\theta) d\theta =$

e)  $\int \cos(x) \cos(\sin(x)) dx =$

2. Evalúe todas las integrales del ejercicio anterior en el intervalo donde la variable recorre  $[1, \pi]$ . Acompañe cada integral con una gráfica del integrando en `pyplot` en la región de interés. Marque el área que representa el valor de la integral en cada caso.
3. La tasa de producción de circuitos de una compañía está dada por

$$y'(t) = 5000 \left( 1 - \frac{100}{(t+10)^2} \right)$$

con  $t$  medido en semanas.

- a) Cuántos circuitos se producen desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta?
  - b) Si en el instante inicial la compañía tenía  $y(0) = 1000$  circuitos encuentre una fórmula para el número total de circuitos disponibles en el instante  $t$  para  $t \geq 0$
4. La función de Fresnel está dada por

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt$$

- a) En qué intervalos es  $C(x)$  una función decreciente?

- b) En qué intervalos es  $C(x)$  una función convexa?
- c) Explique cómo usaría el método de Newton para resolver la ecuación

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt = 0,7$$

- d) Implemente en **python** su solución del numeral anterior y encuentre una aproximación a la solución con 3 cifras decimales correctas.
5. Sea  $f(x) = x^2$  para  $0 \leq x \leq 1$  y suponga que  $X$  es una variable aleatoria con  $\mathbb{P}(X \in [a, b])$  proporcional a  $\int_a^b f(x) dx$  para todos  $a, b$ .
- a) Encuentre la función de densidad de  $X$ .
  - b)Cuál es la probabilidad de que  $X$  sea menor que  $1/2$ ?
  - c) Encuentre una fórmula para el valor esperado de  $X$ .
  - d) Encuentre una fórmula para  $\mathbb{E}[X^k]$  para cada entero positivo  $k$ . Calcule el valor de la varianza de  $X$ .
6. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución exponencial con parámetro dado  $\lambda > 0$  si su densidad esta dada por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ de lo contrario.} \end{cases}$$

- a) Demuestre que  $f(x)$  es una distribución de probabilidad.
- b) Demuestre que el valor esperado de  $X$  es  $1/\lambda$ .
- c) Calcule la varianza de  $X$ .