(I) Sistemas numéricos:

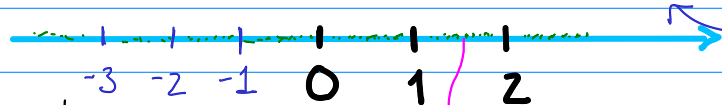
① Hay muchos tipos de números:

- Los números naturales $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Los números enteros $\mathbb{Z}$: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
- Los números racionales $\mathbb{Q}$: $-8, \ldots, -\frac{2}{50}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

$$\left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Los números reales $\mathbb{R}$ (cualquier número decimal)

$1.\underline{4142 \ldots\ldots}$ pueden ser infinitos



Todos los puntos de la recta

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

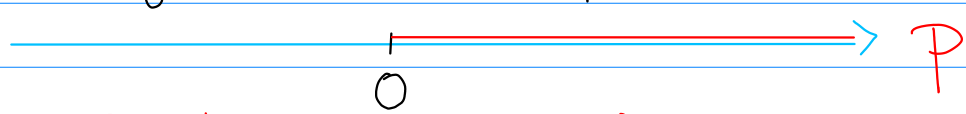
$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Del colegio sabemos sumar y multiplicar números reales y sus reglas ...

② Hay una relación de orden entre números reales $p < q$.

DESIGUALDADES

Su comportamiento esta capturado por el conjunto $\mathbb{P}$ de los números positivos



$$P = \{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0 \}$$

Axiomas de Orden:

(A1) Para todo número a se cumple una y sólo una de las siguientes:

$$a = 0 \quad ó \quad a \in P \quad ó \quad -a \in P$$

(A2) Si $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$

(A3) Si $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$

Cómo se usan los axiomas?

Los asumimos como verdaderos y podemos usarlos para deducir nuevas verdades.

<u>Ejemplo:</u> Demuestre que:

$$\underbrace{\text{Si } a<0 \text{ y } b<0}_{\text{Premisa}} \text{ entonces } \underbrace{ab>0}_{\text{Conclusión}}$$

[Premisa + Axiomas, ..., Conclusión.] ← Demostración

$$\text{Si } a<0 \text{ y } b<0 \overset{(A1)}{\Longrightarrow} -a\in P,\ -b\in P \overset{(A3)}{\Longrightarrow} \underset{\underset{ab}{\|}}{(-a)\cdot(-b)} \in P \underset{\text{definición de } P}{\Longrightarrow} \underbrace{ab>0}_{\text{Conclusión!}}$$

(3) Valor absoluto

<u>Def:</u> Si $x\in\mathbb{R}$ definimos

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0 \\ -x, & \text{si } x<0 \end{cases}$$

"Valor absoluto de x"

<u>Ejemplo:</u>

$|8| = 8$

$|-8| = -(-8) = 8$

<u>Ej:</u> Demuestre que $|x|\geq 0$ siempre.

$$d(x,y) := |x-y|$$

"Distancia entre x y y"

<u>Teorema:</u> [desigualdad triangular]

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{Para todos } x,y\in\mathbb{R}$$

Dem: Dado que $|z|$ depende de si $z \geq 0$ ó $z<0$
consideramos todos los casos posibles

x	y
≥ 0	≥ 0
≥ 0	< 0
< 0	≥ 0
< 0	< 0

Caso i: $x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0$
así que $|x+y| = x+y$
$|x| = x$
$|y| = y$ y
comparando $|x+y| = x+y = |x|+|y|$ ✓

Caso (ii): $x \geq 0$ (*), $y<0$ (*). No sabemos el signo de $x+y$
así que queremos verificar que
$$|x+y| \leq x-y$$
Consideramos dos subcasos:

Caso (ii).1:
$$x+y \geq 0$$
$$x+y \overset{?}{\leq} x-y$$
$$2y \overset{?}{\leq} 0$$
Si porque sabemos (*) que $y<0$

Caso (ii).2:
$$x+y<0$$
$$-(x+y) \overset{?}{\leq} x-y$$
$$-x-\cancel{y} \overset{?}{\leq} x-\cancel{y}$$
$$0 \leq 2x$$
Si, porque sabemos (*) que $x \geq 0$.

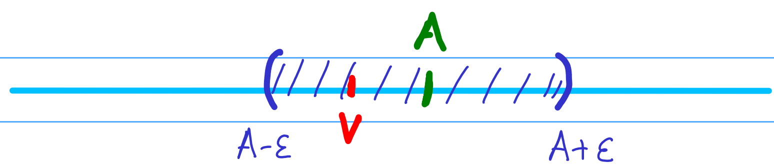
Caso (iii) y Caso (iv) son muy parecidos (VERIFÍQUELO) $\square$

Las propiedades fundamentales del valor absoluto son:
(1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x|=0 \iff x=0$
(2) $|xy| = |x||y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
(3) $|x+y| \leq |x|+|y|$.

IDEA:

El valor absoluto sirve para medir distancia entre números. En matemáticas computacionales las distancias más importantes son los errores de aproximación. Típicamente vamos a querer controlar el error

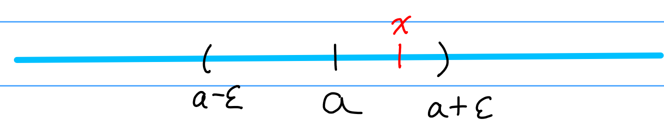
$$\left|\underbrace{\text{Valor verdadero}}_{V} - \underbrace{\text{Valor aproximado}}_{A}\right| \leq \underbrace{\text{ALGO que podamos controlar.}}_{\varepsilon}$$



Ejemplo: Si el valor verdadero es $a > 0$ y conozco una aproximación x con $|x-a| < \varepsilon$ ¿qué tan cerca están $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{x}$?

$$\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x-a}{xa}\right| = \frac{|x-a|}{|x||a|} \leq \frac{\varepsilon}{|x||a|}$$

Si $|x-a| < \varepsilon$



Si $\varepsilon < \frac{a}{2} \Rightarrow x \geq \frac{a}{2}$

luego $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{2\varepsilon}{a^2}$

Si $\varepsilon \leq \min\left(\frac{a}{2}, \delta\frac{a^2}{2}\right)$

$$|x-a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right| \leq \delta$$

Para escribir el resultado más claramente, la idea terminó

Conclusión: Si aseguramos una aproximación x con $|x-a| \leq \min\left(\frac{a}{2}, \delta\frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right| \leq \delta$

II Inducción matemática:

La inducción matemática es una técnica para demostrar que una propiedad cualquiera $Q(n)$ se cumple para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: $Q(m) :=$ " La suma $0+1+2+\dots+m$ vale $\frac{m(m+1)}{2}$ "

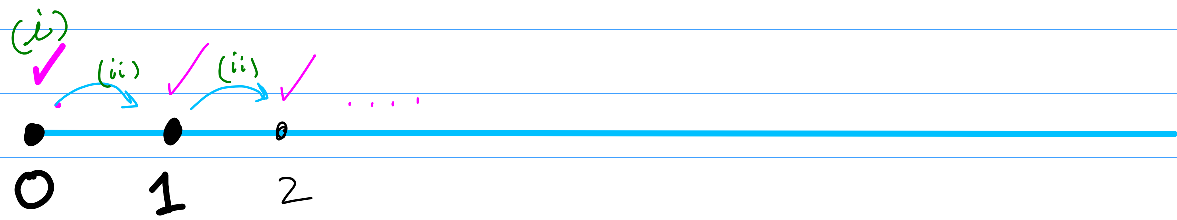
$Q(3) :=$ "La suma $\underbrace{0+1+2+3}_{6} = \underbrace{\frac{3\cdot 4}{2}}_{6}$ " ✓

Podemos verificar a mano para algunos valores, pero cómo saber que es verdad PARA TODO m?

Idea: Demostraremos dos cosas:

(i) $Q(0)$ es VERDADERA — Caso BASE
y
(ii) La IMPLICACIÓN $Q(m) \Rightarrow Q(m+1)$ — Paso inductivo.

Por qué esto es suficiente?



Hagámoslo para nuestro ejemplo

CASO BASE:

$Q(0)$: "La suma $\underbrace{0}_{0} = \underbrace{\frac{0(0+1)}{2}}_{0}$ " VERDAD ✓

PASO INDUCTIVO: Asumo $Q(m)$ e intento demostrar $Q(m+1)$

$Q(m+1) =$ "La suma $1+2+\dots+m+m+1 \overset{?}{\text{vale}} \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ "

$$1+2+3+\dots+m + m+1 \overset{Q(m)\ (\text{Hip. ind})}{=} \frac{m(m+1)}{2} + m+1 =$$

$$\frac{m^2+m+2m+2}{2} = \frac{m^2+3m+2}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$