

Práctico 8: Integración y algunas aplicaciones.

Mauricio Velasco

1. Utilice una sustitución para encontrar todas las primitivas de las siguientes funciones,

a) $\int x^3 \cos(x^4 + 7) dx =$

b) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} =$

c) $\int \sin(5x) dx =$

d) $\int \sec^2(6\theta) d\theta =$

e) $\int \cos(x) \cos(\sin(x)) dx =$

2. Evalúe todas las integrales del ejercicio anterior en el intervalo donde la variable recorre $[1, \pi]$. Acompañe cada integral con una gráfica del integrando en `pyplot` en la región de interés. Marque el área que representa el valor de la integral en cada caso.
3. La tasa de producción de circuitos de una compañía está dada por

$$y'(t) = 5000 \left(1 - \frac{100}{(t+10)^2} \right)$$

con t medido en semanas.

- a) Cuántos circuitos se producen desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta?
 - b) Si en el instante inicial la compañía tenía $y(0) = 1000$ circuitos encuentre una fórmula para el número total de circuitos disponibles en el instante t para $t \geq 0$
4. La función de Fresnel está dada por

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt$$

- a) En qué intervalos es $C(x)$ una función decreciente?

- b) En qué intervalos es $C(x)$ una función convexa?
- c) Explique cómo usaría el método de Newton para resolver la ecuación

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt = 0,7$$

- d) Implemente en **python** su solución del numeral anterior y encuentre una aproximación a la solución con 3 cifras decimales correctas.
5. Sea $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$ y suponga que X es una variable aleatoria con $\mathbb{P}(X \in [a, b])$ proporcional a $\int_a^b f(x) dx$ para todos a, b .
- a) Encuentre la función de densidad de X .
 - b) Cuál es la probabilidad de que X sea menor que $1/2$?
 - c) Encuentre una fórmula para el valor esperado de X .
 - d) Encuentre una fórmula para $\mathbb{E}[X^k]$ para cada entero positivo k . Calcule el valor de la varianza de X .
6. Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial con parámetro dado $\lambda > 0$ si su densidad esta dada por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) , & \text{si } x > 0 \\ 0 , & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

- a) Demuestre que $f(x)$ es una distribución de probabilidad.
- b) Demuestre que el valor esperado de X es $1/\lambda$.
- c) Calcule la varianza de X .