Hoy: Ecuaciones diferenciales

Def: Un problema de valor inicial es uno de la forma

$$\begin{cases} y'(x) = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Condiciones iniciales

donde x_0, y_0 son números reales dados

y $\underbrace{F(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$ es una función dada

Regla de evolución (ecuación diferencial) $y'(x) = F(x,y)$

Esto parece complicado así que miraremos ejemplos concretos:

$$(A) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En palabras esto quiere decir: "Queremos encontrar una función $y(x)$ que cumpla

(i) $y'(x) = y(x)$ y

(ii) $y(0) = 1$ "

Ejercicio: Demuestre que la función exponencial $y(x) = e^x$ es solución del problema de valor inicial (A).

Sol: • Calculamos $y'(x) = [e^x]' = e^x$ en clase calculamos la derivada de e^x

así que sí se cumple (i) pues $y'(x) = e^x = y(x)$ ✓

• Verificamos que la condición inicial se satisfaga

$y(0) = e^0 = 1$ ✓

Obs: En general no es difícil verificar si una función dada es o no es solución de un problema de valor inicial, basta

(i) meter la función en la ecuación (calculando derivadas) y

(ii) Chequear las condiciones iniciales.

El problema más interesante (y mucho más difícil) es cómo encontrar las soluciones a partir de la ecuación. Este problema es muy importante pues en las ciencias aplicadas la mayor parte de funciones interesantes se describen como soluciones a problemas de valor inicial.

Ejemplo: La tasa de cambio de una población de bacterias es aproximadamente el doble de la cantidad presente en ese instante (t en horas). Si hay 1000 bacterias en el instante 0, cuánto tiempo pasa antes de que haya 10^6 bacterias?

Sol: Sea $B(t)$ la cantidad de bacterias en el instante t

Cómo es $B(t)$?

Problema de valor inicial

$$\begin{cases} B'(t) = 2B(t) \\ B(0) = 1000 \end{cases}$$

Nuestra experiencia con el ejercicio anterior nos hace intentar (adivinar) $B(t) = D\exp(kt)$. Qué valores de las constantes funcionan? Reemplazamos

$$B'(t) = De^{kt}\cdot k \qquad De^{kt}\cdot k = 2e^{kt}$$

$$B(t) = De^{kt} \qquad \boxed{k=2}$$

$$B(0) = De^{0\cdot t} = \boxed{D = 1000}$$

Así que la solución es $B(t) = 1000\, e^{2t}$

esta función es creciente porque $B'(t) = 2000\, e^{2t} > 0$

así que basta resolver $B(t) = 1000000$

$$e^{2t} = 1000$$

$$t^* = \frac{\ln(1000)}{2} \approx 6.902$$

menos de 7 horas

Qué información sobre la función $y(x)$ está contenida en la ecuación diferencial?

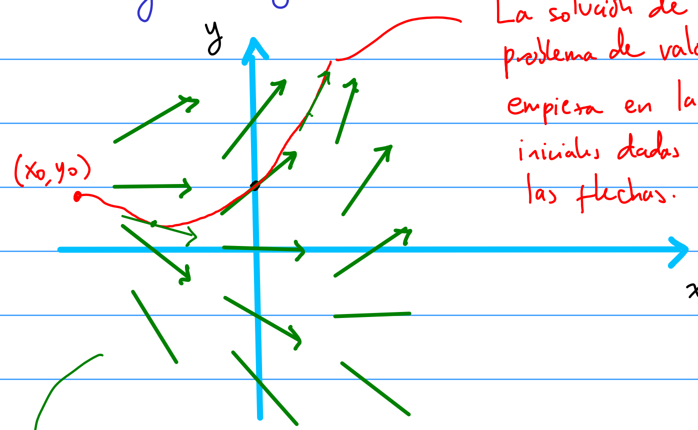
$$y' = F(x,y)$$

la función $F(x,y)$ nos dice la pendiente de la recta tangente $y'(x)$ a la gráfica de y en el punto (x,y).

En rigor la igualdad de arriba se lee:

$y'(x) = F(x, y(x))$ y es una igualdad para todo x

Ejemplo: $y' = x+y$



La solución de un problema de valor inicial empieza en las condiciones iniciales dadas y sigue las flechas.

Ver .py con ejemplos de direction fields ...
estos dibujos son útiles para hacerse una idea cualitativa de las soluciones.

Cómo calculamos soluciones explícitas ? Mediante computadores es muy fácil:

Idea:

$$y'(x) = F(x,y)$$

(22)

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = F(x,y) \quad \text{luego:}$$

Si h es pequeño la diferencia entre se hace muy pequeño

$$\boxed{y(x+h) = y(x) + h\,F(x,y)}$$

Algoritmo: Método de Euler para calcular soluciones de un problema de valor inicial

Partimos de la condición inicial $y(x_0) = y_0$

```
x_s = [x0]
y_s = [y0]

for k in range (numsteps):
    x_actual = xs[-1]
    y_actual = ys[-1]
    [y_new = y_actual + h * F(x_actual, y_actual)]
    x_new = x_actual + h
    x_s.append(x_new)
    ys.append(y_new),
```

Ver ejemplos en código .py adjunto.

Qué podemos decir del método de Euler?

Teorema: Si la solución $y(x)$ del problema de valor inicial tiene $y''(x)$ continua en la región de interés entonces existe una constante positiva K tal que

$$|y(x) - y_n| \leq K\,h\,|(x - x_0)|$$

solución verdadera

discretización de Euler con n pasos

método de primer orden

IMPORTANTE: Hay métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial MUCHO MEJORES
(ver Runge-Kutta de cuarto orden).