# Primer Parcial - TJA - 2025

**INSTRUCCIONES.** Seleccionar *cuatro* ejercicios, dos de cada tema, y entregarlos por mail al profesor titular y al ayudante antes del miércoles 26 - 11:59. Los ejercicios 5.2 y 5.3 se colocaron juntos porque se consideran que valen como uno sólo. Los ejercicios son los mismos que figuran en la página y que están en las lectures.

**Lema de Meyerson.**

**3.1** Usar las desigualdades de pago de la demostración del Lema de Meyerson para probar que si la función de asignación $\chi$ no es monotona, entonces no existe función de precios $p$ tal que $(\chi, p)$ resulte DSIC.

**3.2** En las notas (revisar las lectures), se presenta una demostración visual de que la función de precios sea DSIC. Explicar por qué el argumento falla cuando la función $\chi$ no es monotona.

**3.3** Dar una prueba directa de que $(\chi, p)$ es DSIC para el caso en el que $\chi$ sea una función constante a trozos y monotona, y $p$ sea la fórmula que indica el lema.

**3.4** Aplicar el lema de Meyerson para el click-through rate problem descrito en clase (asignación de posiciones de páginas en buscador web con click-through rate $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_k$): construir la regla de asignación que maximiza el bienestar social, demostrar que es monotona y dar una fóruma explicita para la función de precios $p$.

**Revenue Maximizing**

**5.1** Considerar una subasta de un bien a dos jugadores cuyas valoraciónes internas $\nu_i$ son uniformes en el intervalo $[0, 1]$ e independientes.

(a) Mostrar que el valor esperado del retorno de una subasta de segundo precio (sin reserva) es $\frac{1}{3}$.

(b) Mostrar que si pedimos una reserva de $\frac{1}{2}$, el valor esperado ahora es $\frac{5}{12}$.

**5.2 + 5.3** Calcular la función de variación virtual ($\varphi$) para las siguientes distribuciones:

(a) distribución uniforme $[0, a]$ con $a > 0$.

(b) exponencial con parámetro $\lambda > 0$.

(c) con función acumulada $F(z) = 1 - \dfrac{1}{(z+1)^c}$ en el intervalo $[0, +\infty)$, donde $c$ es una constante positiva.

¿Cuáles de estas distribuciones son regulares?

**5.5** Demostrar que para cualquieras distribuciones regulares $F_1, \ldots, F_n$ de valoración interna, la función de asignación $\chi$ que maximiza el valor esperado del bienestar social virtual es monotona. Puede asumir que los empates se rompen por orden del índice. (La función de bienestar social virtual es simplemente $\sum \varphi_i \chi_i$).

**6.1** Cosniderar una subasta donde se reparte un único bien entre $n$ jugadores con valoraciones internas con distribución $F_1, \ldots, F_n$ independientes y regulares.

(a) Dar la fórmula de precio que paga el jugador ganador en una subasta óptima en términos de las funciones de las funciones de valoración virtuales $\varphi_i$.

(b) Dar un ejemplo en el que el jugador con el bid máximo pueda no recibir el bien (incluso si la valoración es positiva).

(c) Explicar intuitivamente por qué de hecho lo que sucede en (b) puede ser algo deseable si queremos maximizar el retorno esperado de la subasta.