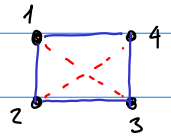
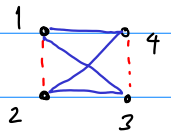
El problema del agente viajero
(Traveling Salesman Problem TSP)

(1832, Hamilton, Kirkman 1930)

Problema: Un vendedor de enciclopedias debe recorrer n ciudades y regresar a casa visitando cada ciudad exáctamente una vez. Sabemos los costos c_{ij} de viajar desde i hasta j. Cuál es el itinerario más económico posible?





$1423 = 4231 = 2314 = 3142$

y $1423 = 3241$

Cuántos caminos posibles hay? **R:** $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$

ENORME!!

El algoritmo de **Held-Karp**, construido mediante programación dinámica nos dará un algoritmo $O(n^2 2^n)$, exponencial, pero MUUCHO mejor que fuerza bruta.

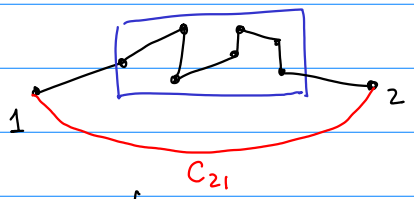
Plantearemos el problema como uno de optimización rompiendo el ciclo para permitir una formulación recursiva

Def: Fijamos ciudad de inicio 1. y para $S \subseteq \{2,\dots,n\}$ y $e \neq 1$, $e \notin S$ definimos

$g(S,e) = \min\{c(T)$:
- T es un camino
- T inicia en 1
- T termina en e
- T visita toda ciudad de S exáctamente una vez
- T no visita ninguna ciudad más (fuera de $S \cup \{1\} \cup \{e\}$).

Si supiéramos $g(S, e)$ resolveríamos el TSP así:

$$g(\{3,..,n\}, 2) + C_{21}$$

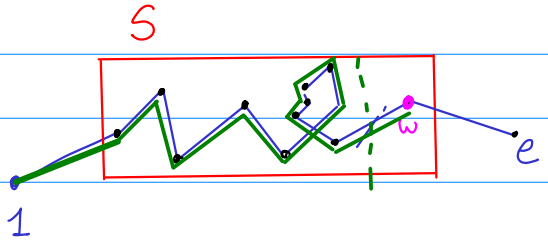


un tour óptimo aparece acá

j

Luego $TSP = \max_{2 \le j \le n} \{ g(\{2,..,j-1,j+1,..,n\}, j) + C_{j1} \}$

Ahora, sea T^* un camino óptimo para $g(S, e)$



Si w es el último vértice del camino dentro de S

entonces $\ell(T^*) = g(S \setminus \{w\}, w) + \ell(w, e)$

porque T' cumple:
- T' inicia en e
- T' termina en w S'
- Recorre solo las ciudades de $S \setminus \{w\}$ cada una una vez
- No pasa por ningún otro vértice.

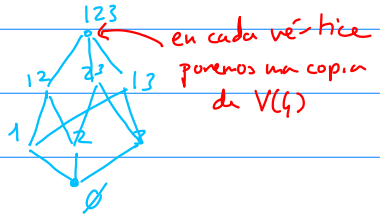
$\ell(T') \ge g(S \setminus \{w\}, w)$ y hay igualdad pues de lo contrio T^* no sería óptimo. Hemos demostrado

Teorema: Ecuación de Bellman para el TSP

$$g(S, e) = \min_{\substack{w \in S \\ (w,e) \in E(G)}} \{ g(S \setminus \{w\}, w) + C_{we} \}$$

Cuando $S = \emptyset$ $g(\emptyset, w) = C_{1w}$ y vamos subiendo el cardinal de los subconjuntos.

ESPACIO DE ESTADOS:



Cuál es la complejidad? Dado e: $g(S,e)$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n-1}{k} (n-1-k) \right]$$

$\binom{n-1}{k}$: Subconjunto S

$(n-1-k)$: escogimos posibles para unidades S

así que en total tenemos $n \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k}(n-1-k) \right] = O(n^2 2^n)$

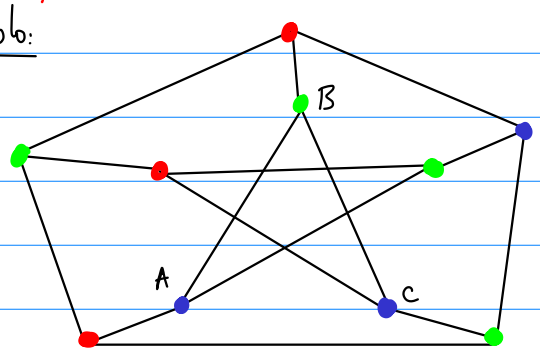
Es necesario enfatizar el ENORME avance

$O(n^2 2^n)$

$O(n!)$

PROBLEMA: Una coloración de un grafo finito G con k colores es una función $f: V(G) \longrightarrow [k]_0 = \{1, \dots, k\}$ con $f(u) \neq f(v) \quad \forall (u,v) \in E(G)$

Ejemplo:



1 2 3

$\chi(G) := \min \{ k : \text{existe una } k\text{-coloración de } G \}$

Número cromático

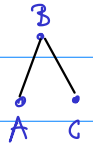
Cómo calcular $\chi(G)$? PROGRAMACIÓN DINÁMICA.

ALGORITMO DE LAWLER

Para cada $U \subseteq V(G)$ definimos el grafo inducido por U, $\langle U \rangle$ como:

$$V(\langle U \rangle) = U$$
$$E(\langle U \rangle) = \{ (a,b) \in E(G) : a \in U, b \in U \}.$$

Ejemplo: $\langle A, B, C \rangle_G =$



Definimos, para $U \subseteq V$:

$$h(U) := \chi(\langle U \rangle)$$

Qué propiedades tiene una coloración óptima f^* de G?

Entre todas las coloraciones óptimas escogemos una que tenga el color más grande de tamaño máximo

f^*: con k colores

y digamos que es el conjunto $A = f^{-1}(1)$

A es independiente y también maximal

porque de lo contrario podríamos encontrar otro vértice x independiente de A y colorearlo de azul contradiciendo la maximalidad.

Si $\langle V(G) \setminus A \rangle$ pudiera ser coloreado con $\leq k-2$ colores podríamos colorear A con $\leq k-1$ ⊠ luego

$$k = 1 + \chi(\langle V(G) \setminus A \rangle)$$

↑ para algún subconjunto maximal independiente A.

ECUACIÓN DE BELLMAN

$$\chi(G) = \min_{A \subseteq V(G)} \{ 1 + \chi(\langle V(G) \setminus A \rangle) \}$$

[A independiente y maximal.

Hay $\leq 3^{\frac{t}{3}}$ subconjuntos max indep. con t vértices

$$O(2.44\ldots^n) << O(n^n)$$

Como enumerar subconjuntos independientes maximales?
Siguiendo a Papadimitriou-Yannakakis 1988
lo haremos mediante una combinación de DFS y Programación dinámica.