Fundamentos de Probabilidad

Def:
Para hablar de probabilidades necesitamos parejas $(\Omega, \mathbb{P})$

Espacio de "estados" (omega) — Medida de probabilidad

donde:

(1) Ω es un conjunto FINITO llamado "espacio de estados"

(2) $\mathbb{P} : \underbrace{2^{\Omega}}_{\text{subconjuntos de } \Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ y cumple

(a) $\forall A \subseteq \Omega \ [\ \mathbb{P}(A) \geq 0\ ]$ ← $\mathbb{P}$ es positiva

(b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Se dice "$\mathbb{P}$ es Σ-aditiva"

(c) Para toda colección de conjuntos DISJUNTOS $A_1, A_2, \ldots$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$$

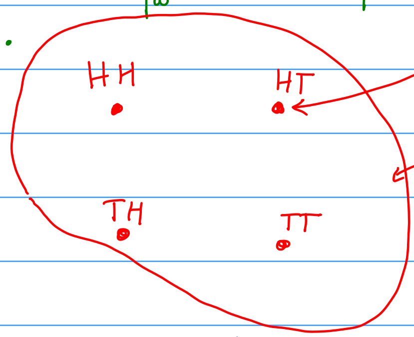
Obs: Si $A = \{a, b, c\} \subseteq \Omega$, por Σ-aditividad

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\}).$$

Completamente determinada por las probabilidades de los SINGLETONS
(subconjuntos de Ω con 1 solo elemento)

** Así que basta saber $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ para $\omega \in \Omega$ con $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Ejemplo:

$\Omega =$ 

este elemento se llama HT

Hay 4 eventos atómicos

$\mathbb{P}(HH) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(TH) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(HT) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(TT) = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(HH) + \mathbb{P}(HT) + \mathbb{P}(TH) + \mathbb{P}(TT) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1$ ✓

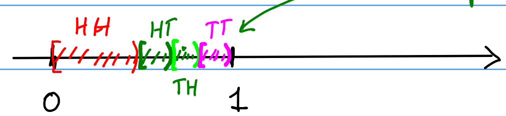
$A = \{\text{Sucesiones con una cara y un sello}\} = \{HT, TH\}$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(HT) + \mathbb{P}(TH) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Intuitivamente, si sorteamos un elemento de Ω con probabilidad de que sea ω $= \mathbb{P}(\omega)$ $\Rightarrow$ La probabilidad de caer en A es $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.

¿Cómo? Si Ω es pequeño es fácil...

Usamos $\mathbb{P}$ para partir el intervalo $[0,1)$ en intervalos half-open disjuntos



Pedimos al computador que nos de una uniforme en $[0,1]$

a= numpy.random.uniform()

y la clasificamos según el dibujo

$a \in [0, \frac{1}{2}) \longrightarrow HH$

$a \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{6}) \longrightarrow HT$

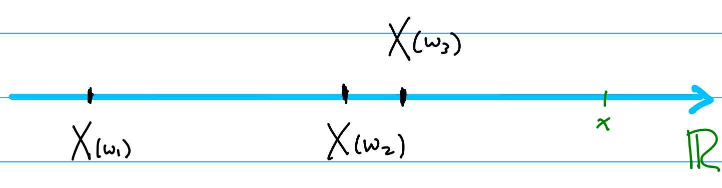
$a \in (\frac{1}{2}+\frac{1}{6}, \frac{1}{2}+\frac{2}{6}) \longrightarrow TH$

$a \in [\frac{1}{2}+\frac{2}{6}, 1) \longrightarrow TT$

Def: Una variable aleatoria X es una función

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{R}^n$ y en ese caso se llama un vector aleatorio)

Como Ω es finito, X solo toma finitos valores distintos.
Podemos dibujarlos en $\mathbb{R}$



¿Qué tan probable es cada valor? Depende del valor...

Def: La densidad de X es la función

$f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

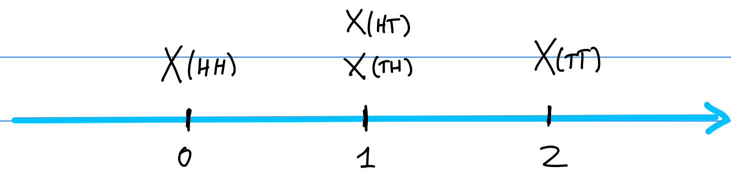
$f_X(x) := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$

Ejemplo: Como antes $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$X(\omega) =$ "Número de T's en ω"

Cómo es la densidad de X?



$$f_X(0) = \mathbb{P}(HH) = \frac{1}{2}$$

$$f_X(1) = \mathbb{P}(HT) + \mathbb{P}(TH) = \frac{1}{3}$$

$$f_X(2) = \mathbb{P}(TT) = \frac{1}{6}$$

Cómo los números reales se pueden promediar podemos preguntar: "Cuál es el promedio ponderado de una variable aleatoria X"?

[VALOR ESPERADO]

Def: Si X es una variable aleatoria en Ω entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x)$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}[\#\text{de T's}] = \frac{2}{3}$$

Qué consecuencias tiene esto?

Un Teorema (fundamental) llamado la ley de los grandes números asegura que si

$X_1, X_2, \ldots, X_N$ son variables aleatorias independientes con la misma distribución que X entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \xrightarrow{N \to \infty} \mathbb{E}[X]$$

Por ejemplo, un casino que tiene un juego aleatorio con ganancia espeada positiva γ y N jugadores independientes con ganancia en el juego G_i ganará

$$\sum_{i=1}^{N} G_i \xrightarrow[a.s.]{} N\gamma$$

A veces ganará, a veces perderá peo las ganancias pomedio se acercarán a γ.

Def: Si X, Y son variables aleatorias en Ω son independientes si saber que $Y=y$ no altera $(\mathbb{P}\{X=\alpha\})_\alpha$

Equivalentemente, X y Y son <u>independientes</u> si $\forall a, b \in \Omega$

$$\left[\mathbb{P}\{\omega\in\Omega : X(\omega)=a, Y(\omega)=b\} = \mathbb{P}\{\omega\in\Omega : X(\omega)=a\} \cdot \mathbb{P}\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=b\}\right]$$