

Práctico ALGABO: El algoritmo de Dijkstra de caminos más cortos con pesos no negativos.

Mauricio Velasco

1. Sea G un grafo dirigido con pesos no negativos $\ell \geq 0$ en las aristas y sea t un vértice de G :
 - a) Proponga una variante del algoritmo de Dijkstra para calcular las distancias **hasta** t , es decir los valores $d_\ell(v, t)$ para $v \in V(G)$.
 - b) Demuestre formalmente que su algoritmo es correcto (es decir escriba un enunciado de Teorema claro y una demostración del mismo).
2. Implemente el algoritmo de Dijkstra en python dos veces, una vez usando un `priority_queue` o `heap` (por ejemplo usando `import heapq`) y la segunda vez sin usar esta estructura de datos especial.
 - a) Escriba el código de sus dos implementaciones.
 - b) Ejecute sus algoritmos en el ejemplo [M3] y escriba en qué orden se incluyen los vértices en el conjunto X definido en clase.
 - c) Ejecute sus implementaciones en ejemplos contruidos por uds. de grafos grandes y lleve sus implementaciones hasta el límite. Es cierto en la práctica que usar el heap es mejor que no usarlo? Explique en palabras qué ejemplos de grafos utilizó y escriba una tabla reportando los tiempos de cómputo de ambas implementaciones en sus ejemplos.
3. Decida si la siguiente afirmación es Verdadera o Falsa. En el primer caso escriba una demostración y en el segundo encuentre un contraejemplo:
Suponga que el algoritmo de Dijkstra iniciando en s inserta los vértices de $V(G)$ en el conjunto X (definido en clase) en orden $s = v_0, v_1, \dots, v_n$. Si $i < j$ entonces $d_\ell(s, v_i) \leq d_\ell(s, v_j)$.
4. Sea G un grafo dirigido con pesos no negativos y sea s un vértice fijo dado. Defina el costo-especial de un camino P como

$$b(P) = \text{Máxima longitud } \ell \text{ de una arista de } P$$

y para dos vértices s y v defina la distancia-especial $m(s, v)$ como

$$m(s, v) = \min\{b(P) : P \text{ es un camino desde } s \text{ hasta } v \text{ en } G\}$$

- a) Calcule $m(s, v)$ para todo $v \in V$ para el grafo $[M3]$ de clase.
- b) Proponga una variante del algoritmo de Dijkstra para calcular las distancias especiales $m(s, v)$ para $v \in V(G)$.
 - 1) Demuestre la validez del algoritmo que propone (es decir escriba un enunciado de Teorema de validez claro y una demostración del mismo).
 - 2) Proponga una implementación que corra en tiempo $O(mn)$ o mejor, justificando de manera precisa su cálculo del tiempo de ejecución.

5. Sea G un árbol binario. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- a) Si G tiene los primeros q niveles completamente llenos entonces tiene $2^q - 1$ vértices.
- b) Ponemos las entradas de un arreglo de longitud n llenando un árbol binario de izquierda a derecha (note que es posible que el último nivel del árbol no quede completamente lleno). Muestre que el número de niveles del árbol es $\Theta(\log(n))$ donde \log denota el logaritmo natural (en base e) de n .