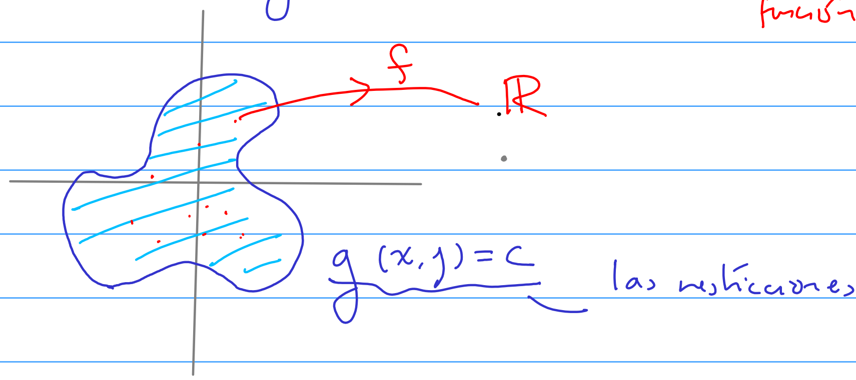
Problema: Encuentre el valor máximo (y los puntos en los que ese valor se alcanza) de la función $f(x,y)$ en la región $g(x,y) \leq c$.

función objetivo



Método:

① Buscamos candidatos posibles:

ⓐ En el interior de la región $(g(x,y)<c)$

Puntos críticos

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \vec{0}}$$

Buscamos todas las soluciones que satisfagan

ⓑ En la frontera de la región

Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

Buscamos todas las soluciones del sistema (en las x, y, λ)

Candidatos $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_N\}$

② Comparamos $f(\vec{w}_i)$.

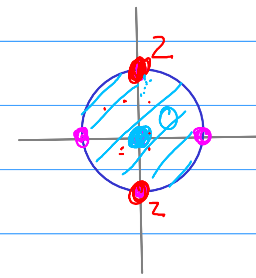
De la teoría general sabemos que (si f y g son diferenciables) entonces aquellos candidatos en los que el valor de f sea máximo son los maximizadores de f que buscábamos. ✓

Obs: Si el problema fuera

$\max f(x,y)$ en $g(x,y)=c$] ← mult de Lagrange

basta (1b) y (2).

Ejemplo 1: Encuentre el valor máximo de x^2+2y^2 en el disco $x^2+y^2\leq 1$.



Identificamos $f(x,y)=x^2+2y^2$ — función objetivo

$[g(x,y)=x^2+y^2]$, $g(x,y)\leq 1$

$[\{(x,y): g(x,y)\leq c\}\subseteq \mathrm{dom}(f)]$

Candidatos:

(1 a) Buscamos puntos críticos de f en el interior

$$\vec{0}=\nabla f(x,y) \iff \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\4y\end{pmatrix} \iff \begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix} \qquad \vec{w}_1=(0,0)$$

como $g(\vec{w}_1)=0<1 \Rightarrow w_1$ en interior

(1b) Buscamos candidatos en la frontera

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=c\end{cases} \qquad \begin{cases}\begin{pmatrix}2x\\4y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

en (x,y,λ)

$$\left[\begin{cases}2x=\lambda 2x\\ 4y=\lambda 2y\\ x^2+y^2=1\end{cases}\right] \iff \begin{cases}x^2+y^2=1\\ 2x=\lambda 2x\\ y(4-2\lambda)=0\end{cases}$$

$y=0$ | $y\neq 0$

$$\begin{cases}x^2=1\\ 2x=\lambda 2x\\ 0=0\end{cases} \qquad\qquad 4-2\lambda=0 \iff \boxed{\lambda=2}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \begin{cases}x^2+y^2=1\\ 2x=4x\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$x=\pm 1$ $\qquad\qquad y^2=1 \iff y=\pm 1$

$\{(-1,0),\ (+1,0)\}$ $\qquad\qquad \{(0,1),\ (0,-1)\}$

② Comparamos candidatos de acuerdo a f

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

$f(0,0) = 0$

$f(1,0) = 1$

$f(-1,0) = 1$

$f(0,1) = 2$

$f(0,-1) = 2$

Conclusión:

① $0 \leq f(x,y) \leq 2$

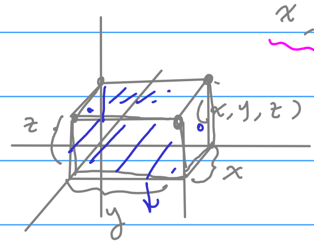
② El valor máximo se alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ que tienen temperatura 2.

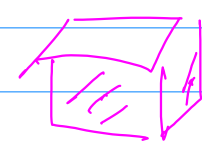
Ejemplo 2: Queremos diseñar una caja sin tapa usando $12 m^2$ de cartón. Como debemos construirla para que el volumen de la misma sea máximo?

Modelado:

⓪ Identificamos las variables (¿qué cosas podemos escoger nosotros!

x, y, z





① Identificamos las restricciones

$$xy + 2yz + 2xz = 12$$

$$g(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz, \quad g(x,y,z) = 12$$

② Identificamos la función objetivo

$f(x,y,z) = xyz$ — Volumen de la caja.

max xyz s.a. $xy + 2yz + 2xz = 12$

$$\max \quad \underbrace{xyz}_{f(x,y,z)} \quad \text{s.a.} \quad \underbrace{xy + 2yz + 2xz}_{g(x,y,z)} = 12$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y+2z \\ x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix} \\ xy+2yz+2xz=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z) \\ xz = \lambda(x+2z) \\ xy = \lambda(2x+2y) \\ xy+2yz+2xz=12 \end{cases} \xrightarrow{\cdot x,\ \cdot y,\ \cdot z} \begin{cases} xyz = \lambda(xy+2zx) & (1) \\ xyz = \lambda(xy+2zy) & (2) \\ xyz = \lambda(2xz+2yz) & (3) \\ xy+2yz+2xz=12 & (4) \end{cases}$$

Obs: $\boxed{\lambda \neq 0}$ porque si $\lambda = 0$ $xyz=0$ así que la caja tiene volumen 0

De (1) y (2)

$$\lambda(xy+2zy) = \lambda(xy+2zx)$$

$$\overset{\lambda\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \cancel{xy} + 2zy = \cancel{xy} + 2zx$$

$$\boxed{2z(y-x)=0}$$

$z=0$: $z=0$, $Vol=0$ ✗

$z\neq 0$: $\boxed{y-x=0}$

De (2) y (3)

$$\lambda \neq 0 \quad \lambda(xy+2zy) = \lambda(2xz+2yz)$$

$$\Longrightarrow \quad xy = 2xz$$

$$x(y-2z) = 0$$

$x=0$: $Vol=0$ ✗

$x\neq 0$: $\boxed{y-2z=0}$

*

* $x = y$ $\quad (\overset{x}{2z}, \overset{y}{2z}, z)$

$x = 2z$

Sustituimos en (4) $\quad xy + 2yz + 2xz = 12$

$$2z \cdot 2z + 2(2z \cdot z) + 2(2z) \cdot z = 12$$

$$12z^2 = 12$$

$$z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$$

Candidato: $\boxed{(\overset{x}{2}, \overset{y}{2}, \overset{z}{1})}$

$Vol = 4\ m^3$ ✓