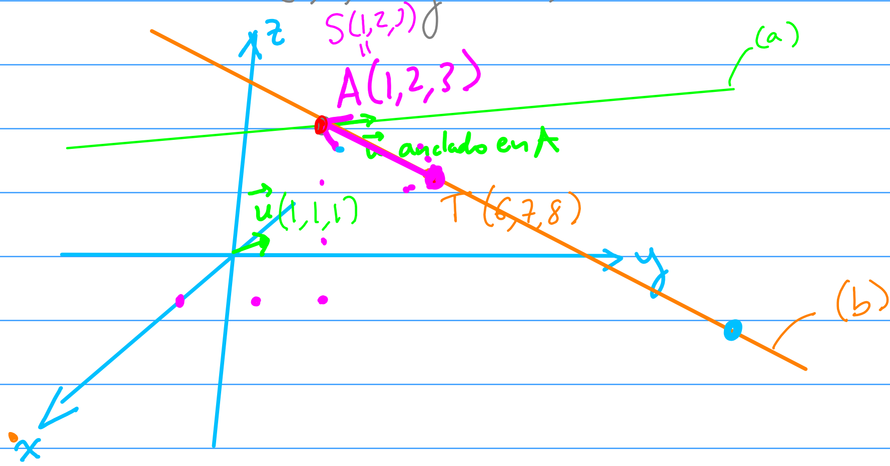
Ejercicio: Encuentre una parametrización de:

(a) La recta que pasa por $\vec{A}(1,2,3)$ con vector director $\vec{u}(1,1,1)$.

(b) La recta que pasa por los puntos $S(1,2,3)$ y $T(6,7,8)$



(a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{A} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Equivalente a

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2+t \\ z &= 3+t \end{aligned} \right\} : \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

depende del valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$

(b) De la clase anterior sabemos que el vector $\vec{S}-\vec{T}$ va desde T hasta S luego nos sirve como director

$$\vec{S}-\vec{T} = (1,2,3)-(6,7,8) = (-5,-5,-5)$$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= 1-5t \\ y &= 2-5t \\ z &= 3-5t \end{aligned} \right.$$

Hoy: distancias, ángulos e (hiper)-planos en $\mathbb{R}^n$.

Def: Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $\in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{producto punto entre } \vec{x} \text{ y } \vec{y}.} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n$$

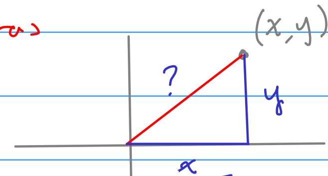
Para qué sirve? Sirve para medir distancias y ángulos en $\mathbb{R}^n$.

Def: (a) Si $\vec{x} \overset{(x_1, x_2, \dots, x_n)}{=} \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

longitud ó norma de $\vec{x}$

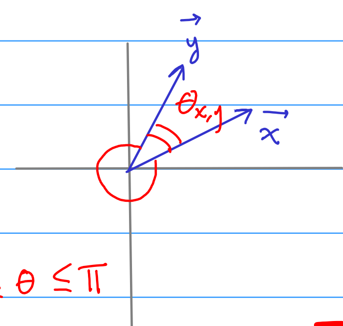
Teorema de pitágoras en $\mathbb{R}^n$



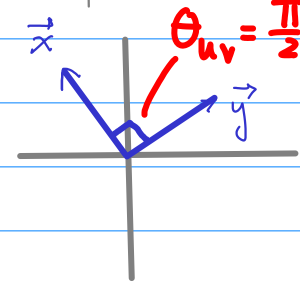
$? = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta_{\vec{x},\vec{y}})$$



$$\boxed{\theta_{\vec{x},\vec{y}} = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}\right),} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

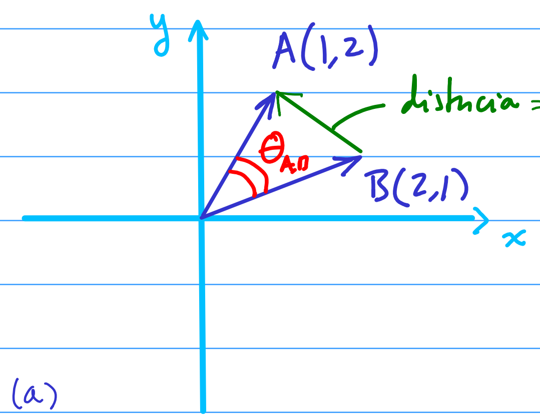


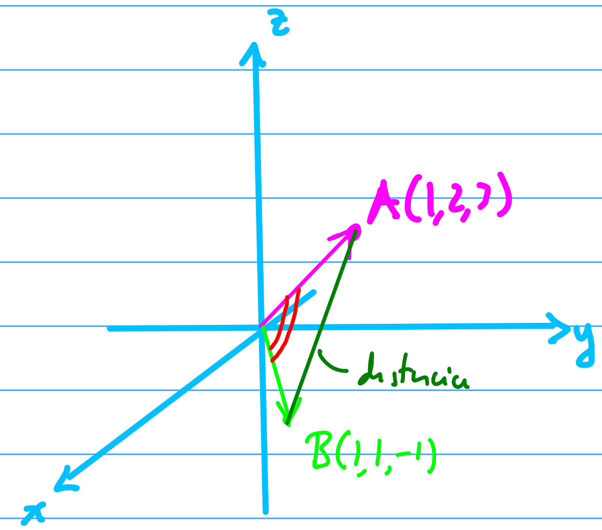
Obs: $\vec{x} \neq 0$ y $\vec{y} \neq 0$ $\in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares ssi $\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = 0}$

Ejercicio: Calcule la distancia y el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con:

(a) $A(1,2)$ $B(2,1)$ $\mathbb{R}^2$

(b) $A(1,2,3)$ $B(1,1,-1)$. $\mathbb{R}^3$





$$\|\vec{A}-\vec{B}\| = \|(-1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_{\vec{A},\vec{B}} = \text{Arccos}\left(\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{2+2}{\sqrt{1^2+2^2}\,\sqrt{2^2+1^2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$$

?? 36.86°

$$36.86° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$

Ejercicio: Sean $A(1,2,3,4)$ y $B(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$

(a) Son A y B vectores perpendiculares?

(b) Encuentre un vector C perpendicular a A.

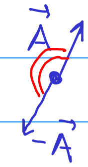
(c) Encuentre todos los vectores perpendiculares a A.

R: (a) NO, porque $\vec{A}\bullet\vec{B} = 1+2+3+4 = 10 \neq 0$ ✓

(b) Idea 1: $\cancel{\vec{A}\times\vec{B} = \det\begin{pmatrix} i & j & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

el producto cruz vive sólo en $\mathbb{R}^3$

Idea 2: $\cancel{-\vec{A}\bullet\vec{A} = (-1,-2,-3,-4)\bullet(1,2,3,4) = -1^2-2^2-3^2-4^2 \neq 0}$ X



Idea 3: $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$

$$0 = \vec{C} \cdot \vec{A} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \bullet (1, 2, 3, 4) = 0$$

$$\boxed{c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 = 0} \leftarrow \text{ecuación lineal} \quad *$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 3 \\ c_4\,? \end{cases} \qquad 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4c_4 = 0$$

$$14 + 4c_4 = 0$$

$$c_4 = -\frac{14}{4}$$

$$\vec{C} = \left(1, 2, 3, -\frac{14}{4}\right) \checkmark$$

$$c_1 = -2c_2 - 3c_3 - 4c_4$$

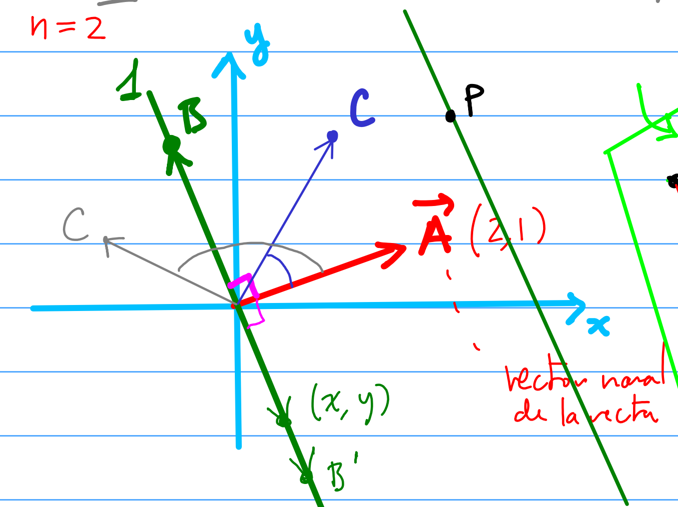
$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 - 3c_3 - 4c_4 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

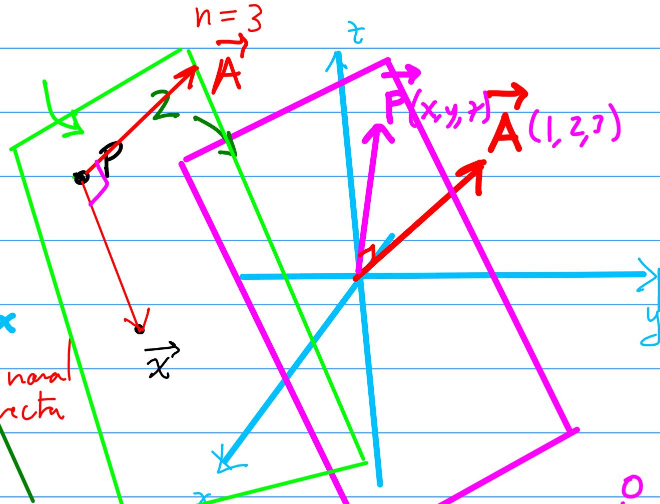
3

$$c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Pregunta: Qué forma tiene la colección de vectores en $\mathbb{R}^n$ perpendiculares a un vector fijo $\vec{A}$?

R: Hiperplano en $\mathbb{R}^n$ definido por una ecuación lineal.





$$(x, y) \bullet (2, 1) = 0 \iff 2x + y = 0$$

$$0 = (x, y, z) \bullet (1, 2, 3) \iff x + 2y + 3z = 0$$

Def: El plano Π en $\mathbb{R}^n$ que pasa por $\vec{P}$ y tiene vector normal $\vec{A}$ tiene la siguiente ecuación:

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : (\vec{x} - \vec{P}) \cdot \vec{A} = 0\}$$

Ejercicio:

(a) Encuentre una ecuación para el plano que pasa por $(1,2,3)$ y es perpendicular a $(1,1,1)$.

(b) Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.