

# Taller Vectorial Virtual parte 4: Coordenadas cilíndricas y esféricas

Marzo 2020

## Ejercicio 15

Para cada una de las siguientes integrales, haga un dibujo de la región de integración y evalúe la integral cambiándola a coordenadas cilíndricas:

- 1  $\iiint_E (x^3 + x^2y) dV$  donde  $E$  es el sólido del primer octante debajo del paraboloide  $z = 10 - x^2 - y^2$ .
- 2  $\iiint_E x^2 dV$  donde  $E$  es el sólido que está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  encima del plano  $z = 0$  y debajo del cono  $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ .

## Ejercicio 16

Para cada una de las siguientes integrales, haga un dibujo de la región de integración y evalúe la integral cambiándola a coordenadas esféricas:

- 1  $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dV$  donde  $B$  es la bola de radio 2 centrada en el origen.
- 2  $\iiint_E 1 dV$  donde  $E$  es la región dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está debajo del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## Ejercicio 17

Para cada una de las siguientes integrales, haga un dibujo de la región de integración y evalúe la integral planteándola en un sistema de coordenadas conveniente:

1  $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx$

2  $\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$  donde  $B$  es la región determinada por las condiciones  $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$  y  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

## Ejercicio 18

Sea  $a$  un número real positivo. Calcule, mediante integrales:

- 1 El volumen de la bola de radio  $a$ .
- 2 El volumen del pedazo más pequeño que se obtiene al cortar una esfera de radio  $a$  en cuatro partes mediante dos planos que pasan por el centro y que se intersectan en un diámetro formando un ángulo de  $\frac{\pi}{6}$ .

Note que las respuestas de ambos problemas deben ser funciones de  $a$ .

## Ejercicio 19

Sean  $a, b, c$  números positivos dados y sea  $E$  el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ . Calcule las siguientes integrales:

1 El volumen de  $E$ .

2 
$$\iiint_E \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} dV$$

(Sugerencia: Cambie de variables para convertir a  $E$  en una bola y luego utilice coordenadas esféricas).

## Ejercicio 20

Sea  $r$  un número positivo y sea  $E$  el sólido de intersección de los dos cilindros  $x^2 + y^2 = r^2$  y  $y^2 + z^2 = r^2$ .

- 1 Haga un dibujo de  $E$
- 2 Encuentre el volumen de  $E$ .
- 3 \*OPCIONAL: Puede ud. encontrar el volumen de la intersección de TRES cilindros, el tercero  $x^2 + z^2 = r^2$ .

(Nota: probablemente no sea necesario cambiar de variable para resolver este ejercicio)