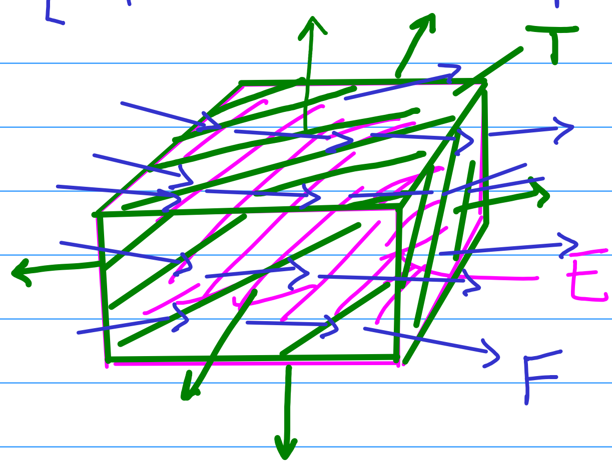
Hoy: Teorema de Gauss.

Teorema [de Gauss]

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ una región sólida y sea T su superficie de frontera orientada hacia afuera de E. Sea $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial [diferenciable en los puntos de E.]



$$\boxed{\partial E = T}$$

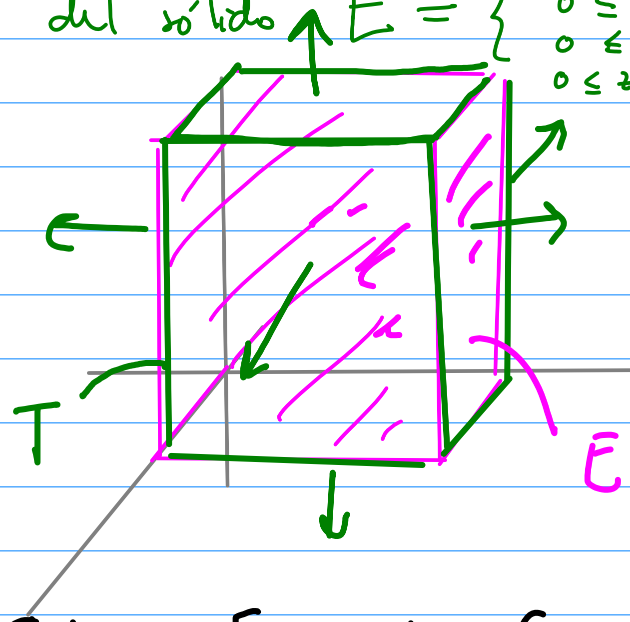
$$\underbrace{\iint_T F \, d\vec{S}}_{\text{Flujo de F a través de T hacia afuera}} = \iiint_E \overbrace{\nabla \cdot F}^{\text{divergencia de F}} \, dV$$

Más fácil porque

(1) Región sólida ✓

(2) $\nabla \cdot F$ típicamente es más simple que F

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (x,0,0)$. Calcule el flujo de F a través de la frontera del sólido $E = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 4 \end{array} \right\}$. hacia afuera.



Sol 1: [Teo de Gauss]

La superficie T es frontera de la región sólida E. El campo vectorial F es diferenciable en todo el plano y en particular en los puntos de E

$$F(x,y,z) = (x, 0, 0)$$

así que podemos aplicar Teo de Gauss:

m/sec

$$\iint_T F\,d\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot F\,dV$$

Función escalar

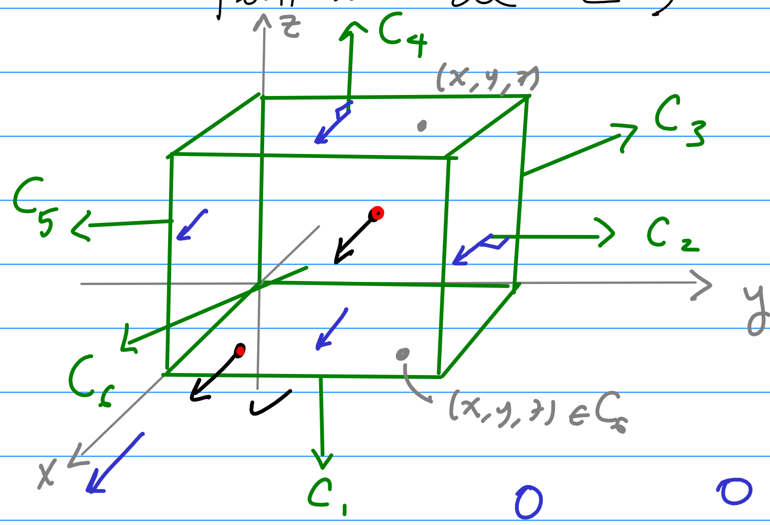
$$div(F) = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, 0, 0)$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

$$= \iiint_E 1\,dV = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^4 1\,dz\,dy\,dx$$

$$= \boxed{24\ m^3/sec}$$

Solución 2: (sin Gauss, parametrizamos las seis caras de la frontera de E)



$F(x,y,z) = (x,0,0)$

$$\iint_T F\,dS = \cancel{\iint_{C_1}}^{0} + \cancel{\iint_{C_2}}^{0} + \underbrace{\cancel{\iint_{C_3}}^{0}}_{\text{Porque } F \text{ vale } 0 \text{ en } C_3} + \cancel{\iint_{C_4}}^{0} + \cancel{\iint_{C_5}}^{0} + \underbrace{\iint_{C_6}}_{24}$$

$\underline{C_3}$: Parametrizamos C_3

$$\begin{cases} \Phi(y,z) = (0,y,z) \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_y = & (0, & 1, & 0) \end{array}$$

$\Phi_z = (0,0,1)$

$\Phi_y \times \Phi_z = (1,0,0)$

(la normal es la contraria a la deseada así que cambié el signo al final.

$$\iint_{C_3} F\,dS = \int_0^3\int_0^4 (0,0,0)\cdot(1,0,0)\,dy\,dz = 0$$

$F(\Phi(y,z)) = F(0,y,z) = (0,0,0)$

$\underline{C_6}$:

$$\begin{cases} \Phi(y,z) = (2,y,z) \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$$

$\Phi_y = (0,1,0)$

$\Phi_z = (0,0,1)$

$\Phi_y \times \Phi_z = (1,0,0)$

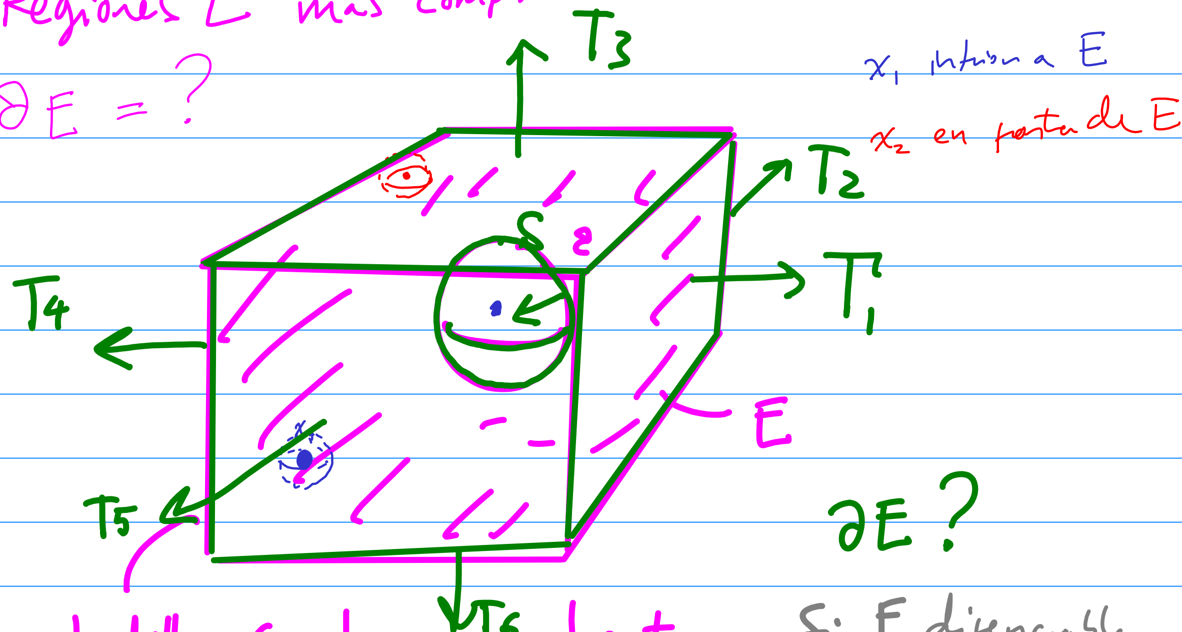
orientación correcta ✓

$$\iint_{C_6} F\,dS = \int_0^4\int_0^3 (2,0,0)(1,0,0)\,dy\,dz = 2\cdot 3\cdot 4 = \boxed{24}$$

$F(\Phi(y,z)) = (2,0,0)$

También aplica en Regiones E más complicadas...

$\partial E = ?$



Ladrillo con hueco en el centro

Si F diferenciable en E

$$\iint_S F\,dS + \left[\iint_{T_1} F\,dS + \dots + \iint_{T_6} F\,dS\right] = \iiint_E (\nabla\cdot F)\,dV$$

Ejercicio: Según la ley de Coulomb una carga eléctrica puesta en el origen produce un campo de fuerza

$$H(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|x\|^3} = \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}$$

$\frac{1}{\text{distancia al cuadrado}}$

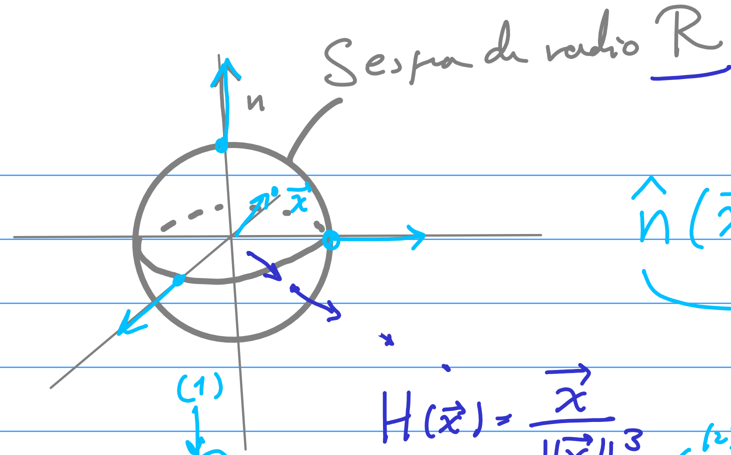
(a) Calcule el flujo de H a través de una esfera de radio R centrada en el origen parametrizando la esfera.

(b) Calcule $\nabla\cdot H = \operatorname{div}(H)$.

(c) Calcule el flujo de H a través de la frontera del cubo

$$E = \left\{ \begin{array}{l} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \\ -2 \le z \le 2 \end{array} \right\}$$

(a)



$$\underbrace{\hat{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}}_{\text{en esfera conocemos la normal unitaria}}$$

$$H(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$\boxed{4\pi = \iint_S H\, d\vec{S}} \overset{(1)}{\stackrel{?}{=}} \iint_S (H\cdot\hat{n})\, dS \overset{(2)}{=} \iint_S \frac{1}{R^2}\, dS$$

$$H(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, \qquad \hat{n} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \qquad \frac{1}{R^2}\iint_S 1\, dS$$

$$H\cdot\hat{n} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|^4} = \frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^4} = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \qquad \frac{1}{\cancel{R^2}}\, 4\pi \cancel{R^2}$$

(b) $H(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = \left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}, y(\ )^{-\frac{3}{2}}, z(\ )^{-\frac{3}{2}}\right)$

No es dif en $\vec{0}$

$$\nabla\cdot H = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(y\ ) + \frac{\partial}{\partial z}(z(\ ))$$

$$= (\ )^{-\frac{3}{2}} + x\,\frac{-3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2x) +$$

$$+$$

$$=$$

$$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(\ )^{-\frac{5}{2}} - 3y^2(\ )^{-\frac{5}{2}} - 3z^2(\ )^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3(\ )^{-\frac{5}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 0.$$

~~PROBLEMA:~~

ACHTUNG!

NO PUEDO USAR GAUSS !! Hay que chequear diferenciabilidad.

$$4\pi = \iint_T H \, dS \cancel{=} \iiint_E \nabla \cdot H \, dV = 0$$

Solución de (c) próxima clase...