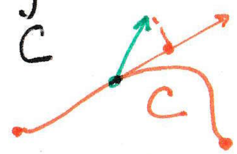
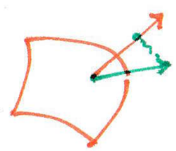
PARTE III (del curso)

Teoremas integrales del análisis vectorial.

$\int$ función f sobre Σ

	Función escalar $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$	Campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (ó en $\mathbb{R}^2$)
Región sólida E en $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\iiint_E g\, dV$	
Curva parametrizada C	$\int_C g\, ds$	T. Green; $\int_C H\, d\vec{S}$ —  Aplicación: • Trabajo realizado por un campo de fuerza a lo largo de una superficie • En la dirección tangente de C
Superficie parametrizada Σ	$\iint_\Sigma g\, ds$	T. Stokes; T. Gauss; $\iint_\Sigma H\, d\vec{S} =$ —  Aplicación: • Flujo de un campo vectorial a través de una superficie • En dirección $\perp$ a Σ.

Aplicaciones:
- Masa total
- Centro de masa
- Momento de inercia

Def: Si $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial en el plano

$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ definimos el rotacional

de F como $\operatorname{rot}(F) := \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$,

$\nabla \times F$:= notación

Ejercicio: Sea $F(x,y) = (-y, x)$. Calcule $\operatorname{rot}(F)$

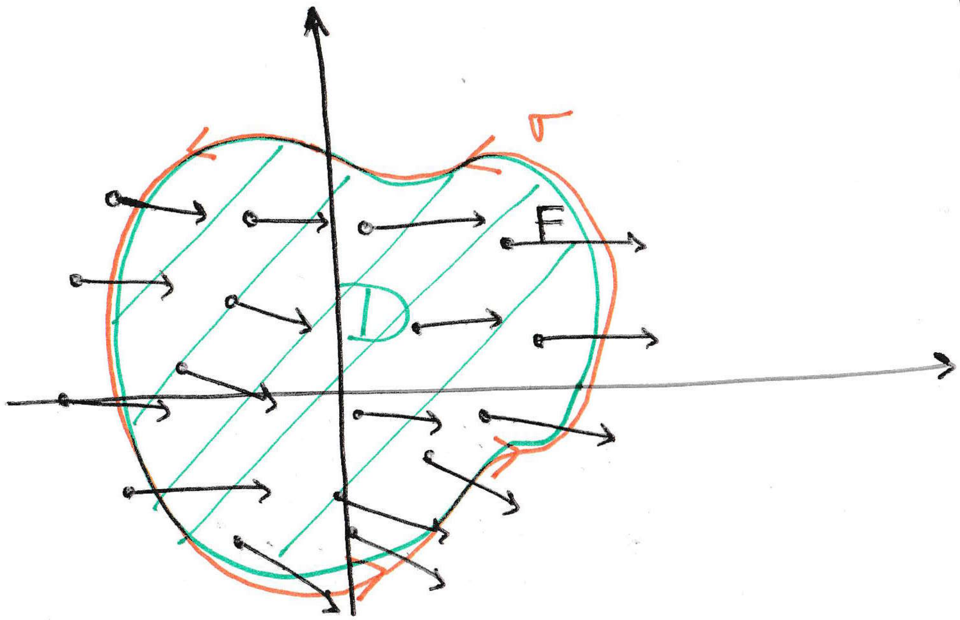
$G(x,y) = (x^3+y^2, y^3+x^2y)$. Calcule $\nabla \times G$

Obs: Típicamente $\operatorname{rot}(F)$ es más simple que F, pues se obtiene "derivando".

Teorema (Green)

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región plana sólida con curva de frontera σ positivamente orientada. Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ diferenciable en todos los puntos de D.

Entonces



$$\boxed{\int_{\sigma} F\, d\vec{s} = \iint_{D} [\nabla \times F]\, dA}$$

Trabajo realizado por F a lo largo de la curva cerrada σ

Ejercicios: Sea $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Calcule el trabajo realizado por F a lo largo de la curva de frontera del rectángulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLO UD MISM@...

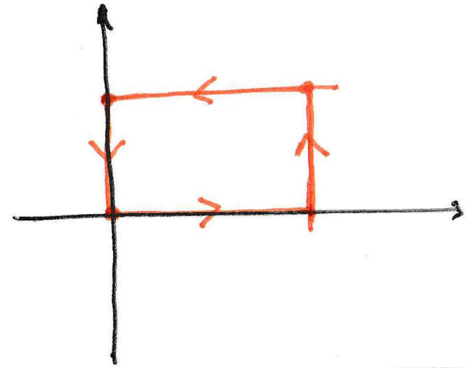
Solución:

$$F(x,y) = (\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{x^2-y^2}, \overset{\frac{\partial}{\partial y}}{2xy}) \text{ así que}$$

$$\nabla \times F = 2y - (-2y) = 4y$$

F es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (sus componentes son polinomios)

así que por Teo. de Green:



$$\int_\sigma F\,ds = \iint_R 4y = \int_0^2 \int_0^1 4y \; dy\,dx = 8 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = 4 \; \boxed{N \cdot m}$$

Cómo nos piden la orientación contraria $\boxed{-4 \text{ Nm}}$

Obs: Hay otra solución posible:

(i) Parametrizar los 4 pedazos de la curva

(ii) Integrar cada uno mediante $\int_\sigma F ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt$

(iii) Sumar los resultados.

El resultado es el mismo, pero Green nos ahorra mucho trabajo.

Ejercicio: Sea $H(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ DETENGA EL VIDEO E INTÉNTELO UD MISM@

(a) Calcule $\nabla \times H$

(b) Calcule $\int_\sigma H\,d\vec{s}$ donde σ es el círculo unitario centrado en el origen.

(c) Calcule σ el trabajo realizado a lo largo de la frontera del cuadrado $[-2,2]\times[-2,2]$

Solución: $H(x,y) = \left(-\dfrac{\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{y}}{x^2+y^2} , \dfrac{\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{x}}{x^2+y^2} \right)$

$\qquad\qquad\qquad\;\; (\;\; P \;\;\;\;\;\; , \;\;\;\;\;\; Q \;\;)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x \, (x^2+y^2)^{-1} \right] = (x^2+y^2)^{-1} + x \left[-(x^2+y^2)^{-2} \right] 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -(x^2+y^2)^{-1} - y \left[(x^2+y^2)^{-2} \right] 2y$$

(a) $\nabla \times H = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2(x^2+y^2)^{-1} - (x^2+y^2)^{-2}\left[2x^2+2y^2 \right] = 0$

(b) Sol 1: Parametrizamos el círculo unitario

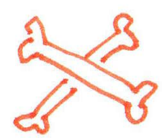
$\sigma(t) = (\mathrm{Cos}(t), \mathrm{Sin}(t))$, $\quad \sigma'(t) = (-\mathrm{Sin}(t), \mathrm{Cos}(t))$

$$\int_0^{2\pi} H(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

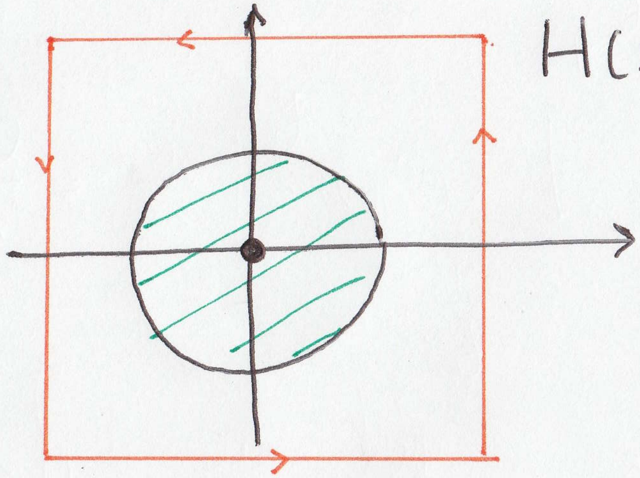
$$\int_\sigma H\, ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\mathrm{Sin}(t)}{C^2(t)+S^2(t)} , \frac{\mathrm{Cos}(t)}{C^2(t)+S^2(t)} \right) \cdot (-\mathrm{Sin}(t), \mathrm{Cos}(t))\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = \boxed{2\pi}$$

Intentando con ~~Stokes~~ ...
Green ...



Nota: **NO** se puede aplicar Teo. de Green en este caso $\boxed{\text{(para el disco D)}}$



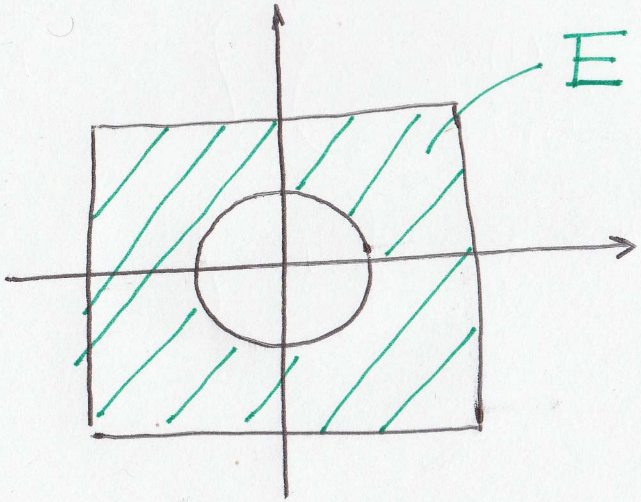
$$H(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

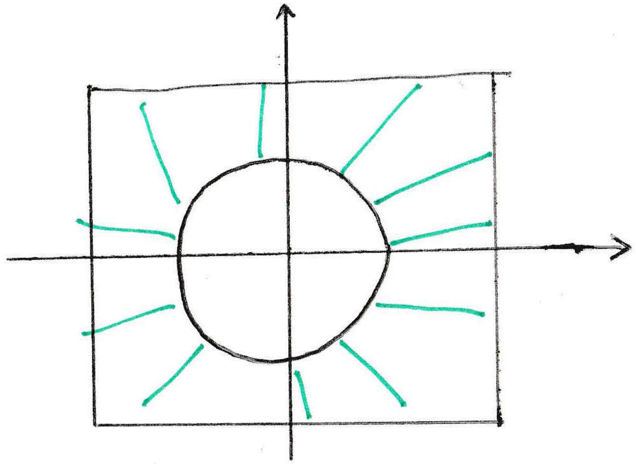
no está definido (y en particular no es diferenciable en $(0,0)$)

(c) Sugerencia: Sea E la región sólida dentro del cuadrado pero afuera del círculo. Podemos aplicar Green ahí?

Cómo es la frontera de E?

Qué orientación debe tomarse en la frontera de E?





Regla: La orientación positiva es "con la región a la izquierda"

$$\int_C \mathbb{F}\, ds + \int_R \mathbb{F}\, ds = \iint_E (\nabla \times \mathbb{F})\, dA$$

Concluimos que

$$\boxed{\int_R \mathbb{F}\, ds = 2\pi}$$

[Esta información podemos obtenerla solo mediante Teo de Green

Obs Con el mismo razonamiento concluimos que:

Para cualquier curva simple cerrada que no contenga al origen $\int_C H\, d\vec{s} = 0$

Si C es cerrada y simple gira alrededor del origen en dirección positiva

$$\int_C H\, d\vec{s} = 2\pi.$$