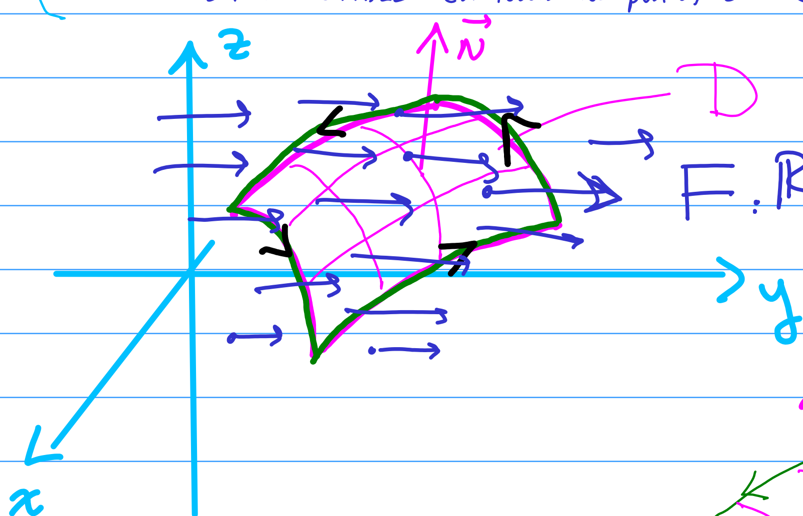
Hoy: (1) Teorema de Stokes
(2) Ejemplo numérico
(3) ¿Qué es el rotacional?

Teorema de Stokes [Green en 3D]

Sean

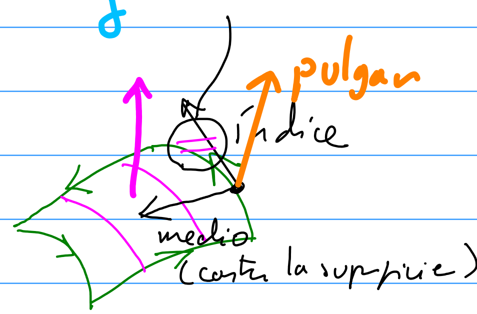
D — una superficie ORIENTADA $\subseteq \mathbb{R}^3$ ✓

DADAS
- σ — Curva de frontera de D orientada de manera compatible con la orientación de D.
- F — Campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que es DIFERENCIABLE en todos los puntos de D.



$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

ORIENTACIÓN COMPATIBLE

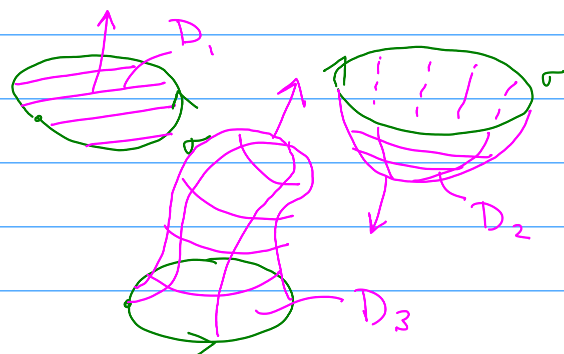


entonces

$$\boxed{\underbrace{\int_{\sigma} F\, ds}_{\text{Trabajo realizado por } F \text{ a lo largo de } \sigma} = \underbrace{\iint_{D} \underbrace{(\nabla \times F)}_{\text{más sencillo que } F} d\vec{S}}_{\text{Flujo del campo vectorial } \nabla \times F \text{ a través de la superficie } D.}}$$

Obs: (1) Orientación adecuada de D es aquella que coincide con la dirección del pulgar al usar la regla de la mano derecha con la orientación de la curva.

(2) Típicamente nos dan σ y F y nosotros debemos construir (o escoger) D. Hay muchas maneras de hacer esto...



todas llevan al mismo resultado numérico (pero no con el mismo esfuerzo)

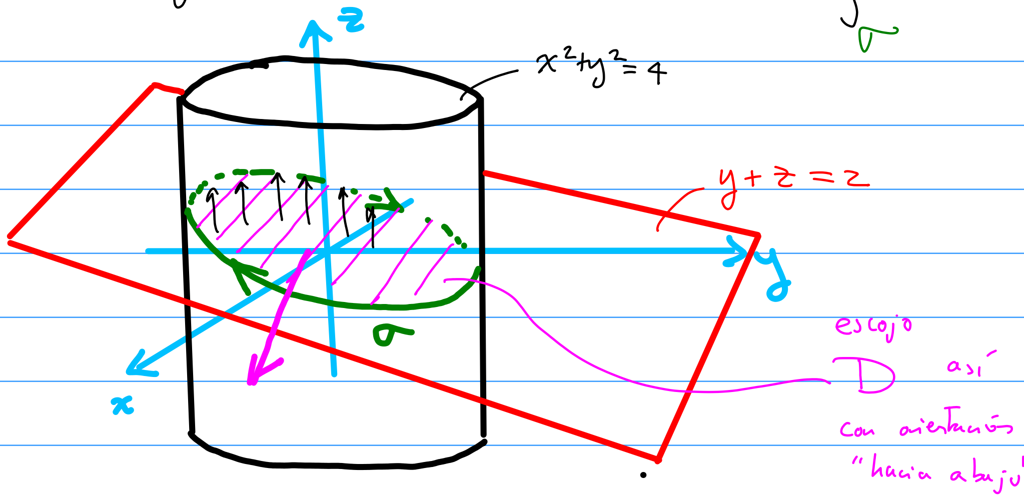
$$\iint_{D_2} \nabla\times F \, dS \overset{\checkmark}{=} \iint_{D_3} \nabla\times F \, dS$$

(3) Recuerda que, si $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de D $\left(\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \right)$

$$\iint_D \nabla\times F \, d\vec{S} = \iint_A \left[\nabla\times F(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v \right] dA$$

Ejemplo: $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Sea $F(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$ y sea σ la curva de intersección entre $y+z=2$ y $x^2+y^2=4$ orientada en la dirección de las manecillas del reloj vista desde arriba. Calcule $\int_\sigma F\,ds =$



Sol: Note que el campo vectorial F tiene componentes polinomiales así que es diferenciable en TODO $\mathbb{R}^3$.

Definimos la superficie orientada D como en el dibujo. Por Teo de Stokes tenemos:

$$\int_\sigma F\,ds = \iint_D (\nabla \times F)\, d\vec{S}$$

$$F(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = i\cdot(0) - j(0) + k(1+2y) = (0, 0, 1+2y)$$

$$= \iint_{D} (0,0,1+2y)\, d\vec{S} =$$

Cambiemos una parametrización de la superficie D

$$\begin{cases} \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta \;,\; r\sin\theta \;,\; 2-r\sin\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$N = \Phi_r \times \Phi_\theta$$

$$\begin{array}{lccc} & i & j & k \\ \Phi_r = & (\cos\theta, & \sin\theta, & -\sin\theta) \\ \Phi_\theta = & (-r\sin\theta, & r\cos\theta, & -r\cos\theta) \end{array}$$

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (0 \;,\; r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \;,\; r)$$

$$= (0, r, r)$$

Apunta hacia arriba así que usemos la orientación contraria

$$\Phi_\theta \times \Phi_r = (0, -r, -r)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} (0,0,1+2r\sin\theta) \cdot (0,-r,-r)\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} -r(1+2r\sin\theta)\, dr\, d\theta$$

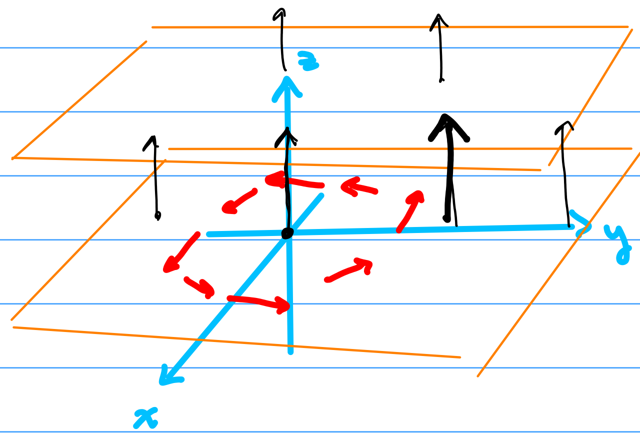
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3}\sin\theta \Big|_{r=0}^{r=2} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{-4}{2} - \frac{2\cdot 8}{3}\sin\theta\right) d\theta = -\frac{4}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\pi = \boxed{-4\pi}$$

!

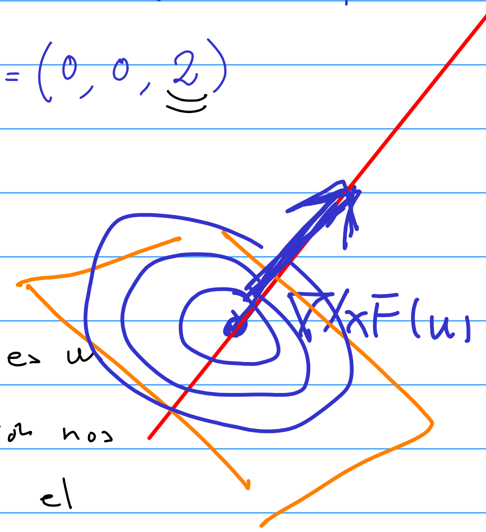
(3) Qué es el rotacional de un campo vectorial?

Ejemplo: $F(x,y,z) = (-y, x, 0)$

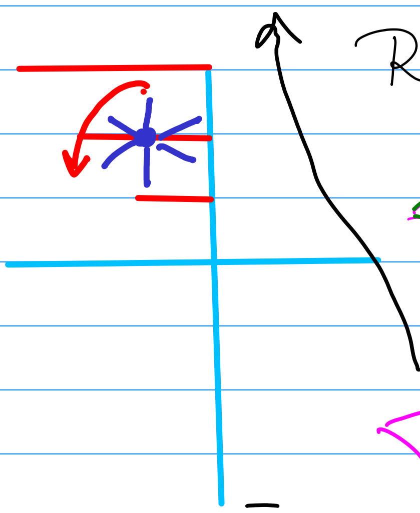


$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

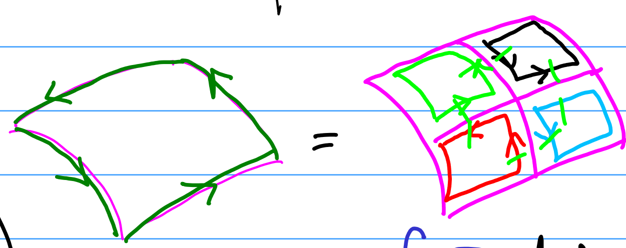
$$= (0, 0, \underline{\underline{2}})$$

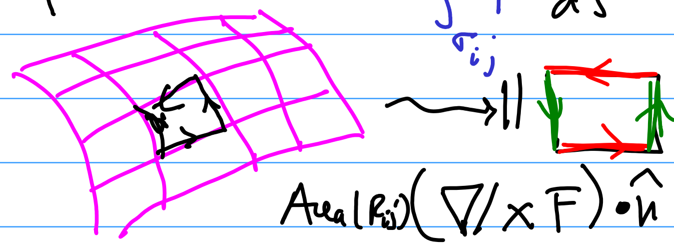


El rotacional de un campo F es un nuevo campo vectorial cuya dirección nos indica el eje de rotación en el que el fluido determinado por F gira más rápido y su magnitud nos dice la velocidad de rotación.



Razonamiento por teo de Stokes:





$$\int_{\sigma_{ij}} F\, d\vec{s} \approx \text{Area}(R_{ij})(\nabla \times F)\cdot \hat{n}$$