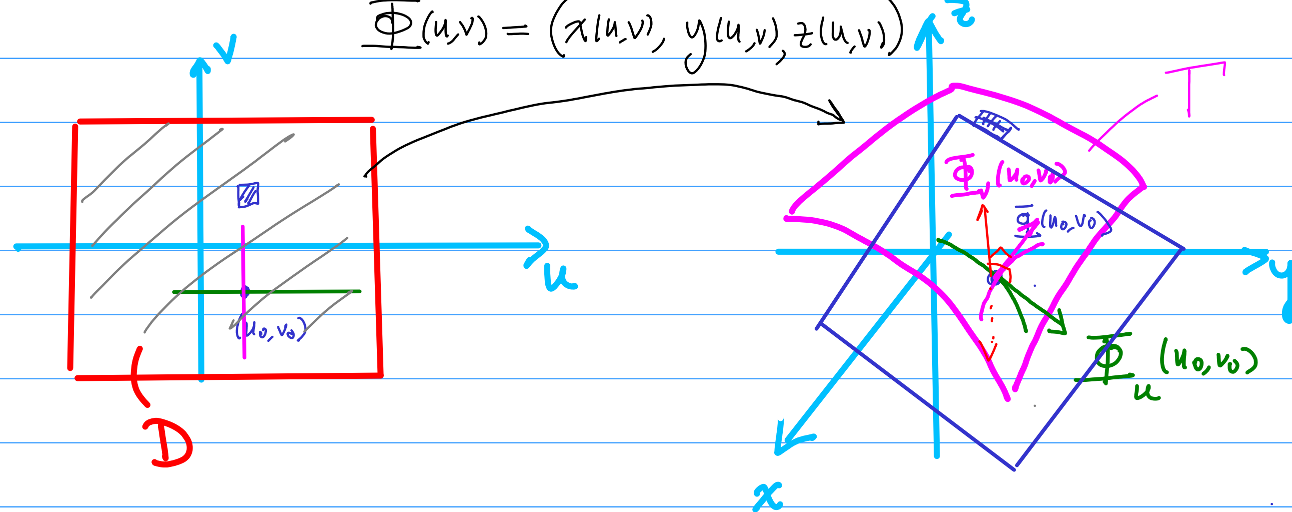
Hoy: (1) Superficies Parametrizadas (Repaso)

(2) Integrales sobre superficies

(1) Superficies Parametrizadas:

$$\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$



Φ es inyectiva (en casi todos ptos) y diferenciable

$\Phi(u_0,v_0)$

$\left.\begin{array}{l}\Phi_u(u_0,v_0)\\ \Phi_v(u_0,v_0)\end{array}\right\}$ vectores tangentes a la superficie en $\Phi(u_0,v_0)$

$$\underbrace{N(u_0,v_0)}_{\text{determina una orientación de } T} = \Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0)$$

(2) Hay dos tipos de integrales posibles sobre una superficie T, de cada una veremos:

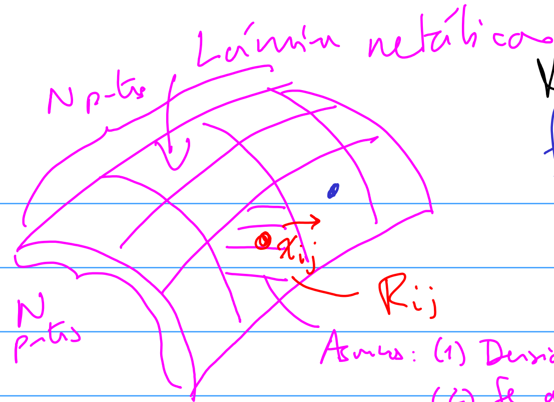
(a) Cómo se calcula? (usando una parametrización dada)

(b) Qué aplicaciones tiene?

(2.1) Integral de una función escalar $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre la superficie T.

$$\iint_T f\, dS = \dots$$

Def:



$f(x,y,z) =$ "Kg/m^2 del material de (x,y,z)" — densidad superficial

Asumimos: (1) Densidad es constante en el pedazo
(2) Se aproxima bien con un rectángulo

$$\text{Masa total} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(\vec{x}_{ij})\cdot \text{Area}(R_{ij})\right)$$

$$\therefore \; = \; \iint_T f\, dS \quad \checkmark$$

(a) **Teorema:** Suponga que $\Phi : \mathbb{R}^2_{u,v} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ con $(u,v)\in D$ es una parametrización para T.

Entonces:

$$\left[\iint_T f\, dS = \underbrace{\iint_D f(\Phi(u,v)) \overbrace{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}^{\text{Ajusta las áreas}} dA}_{\text{integral doble}}\right]$$

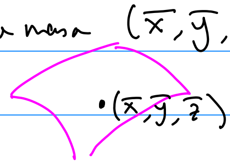
(b) Aplicaciones

(i) $\displaystyle\iint_T 1\, dS = \text{Area superficial}(T)$

(ii) Si $f(x,y,z) =$ "densidad superficial (en Kg/m^2) de (x,y,z)"

$$\iint_T f\, dS = \text{masa}(T)$$

(iii) Centro de masa $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$



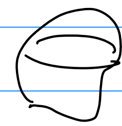
$$\bar{x} = \frac{\iint_T x f\, dS}{\text{masa}(T)}$$

$\bar{y} = \dots$

$\bar{z} = \dots$

(iv) Momentos de inercia

$$I_e = \iint_T \underbrace{\mathrm{dist}((x,y,z),e_j e)^2}_{m^2} \, \underbrace{f(x,y,z)}_{Kg/\cancel{m^2}} \, \underbrace{dS}_{\cancel{m^2}}$$

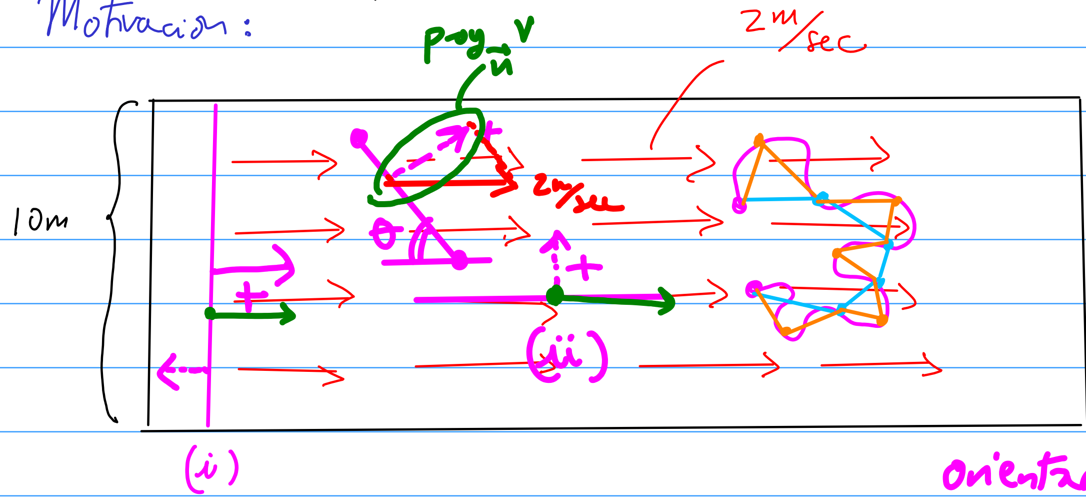


$$\begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = I$$

(2.2) Integral de un campo vectorial F a través de la superficie T.
(se llama también "flujo de F a través de T")

Profundidad 2.5m

Motivación:



orientada ✓

Cuánta agua pasa a través de la red?
en m^3/sec (gasto)

(i) $\underbrace{\overset{m}{2.5} \times \overset{m}{10}}_{\text{área de red}} \times 2\,m/sec = 50\,m^3/sec$ ✓

$\longleftarrow \; = -50\,m^3/sec$

no hay velocidad en dirección $\perp$ a la red

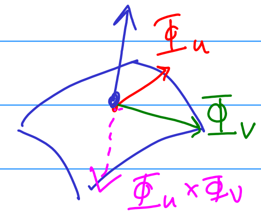
(ii) $(2.5m \times 10\,m) \times 0 = 0\,m^3/sec$

(iii) $2.5m \times 10m \times \left(\hat{n} \cdot \vec{V}\right) =$

campo vectorial

Def:
$$\iint_{T} \vec{F}\, d\vec{S} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(F(\vec{x}_{ij}) \cdot \hat{n}\right) \text{Area}(R_{ij})$$

orientada (normal escogida en cada punto)



(a) **Teorema:** Suponga que $\Phi: \mathbb{R}^2_{u,v} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ es una parametrización de la superficie T y que $\Phi_u \times \Phi_v$ nos da la orientación deseada $\hat{n}$. Entonces

$$\iint_{T} F\, dS = \underbrace{\iint_{D} F(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, dA}_{\text{Integral doble!}}$$

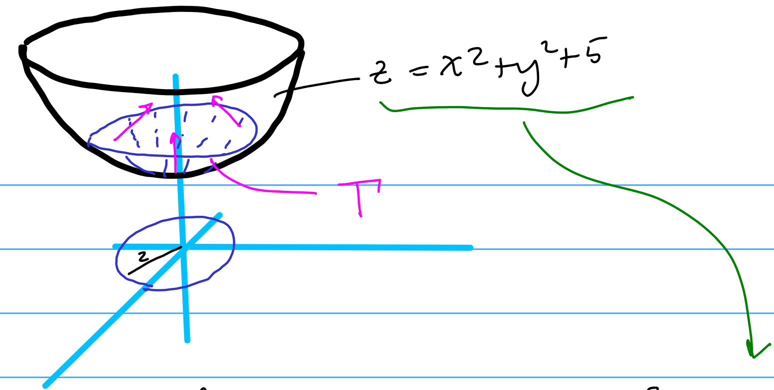
Obs:
$$\iint_{D} \left[F(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\cancel{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}} \right] \cancel{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}\, dS$$

(b) **Aplicaciones:** - Cálculo de gasto (si F es de velocidades)
- de flujo (si F es campo de fuerzas magnético)

Ejemplo: Sea T la parte de la superficie $z = x^2+y^2+5$ contenida en el cilindro $x^2+y^2=4$.

(a) Calcule el área superficial de T

(b) Sea $G(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcule el flujo de G a través de T orientada hacia arriba.



$$\begin{cases} \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r^2+5) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

(a) $$\iint_T 1\, dS = \iint_D 1\,(\underbrace{\Phi(r,\theta)}_{1}) \cdot \|\Phi_r \times \Phi_\theta\|\, dS$$

$i \quad j \quad k$

$$\Phi_r = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2r)$$

$$\Phi_\theta = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$$

Como $z>0$ es la orientación deseada

$$\boxed{\Phi_r \times \Phi_\theta = (-2r^2\cos\theta,\ -2r^2\sin\theta,\ r)}$$

$$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2}$$

$$= \sqrt{4r^4+r^2} = \sqrt{r^2(4r^2+1)} = \boxed{r\sqrt{4r^2+1}}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta = \checkmark$$

(b) $$\iint_T G(x,y,z)\, d\vec{S} = \iint_D G(\Phi(r,\theta)) \cdot \Phi_r \times \Phi_\theta\, dA$$

$$G(x,y,z) = (x,y,z)$$

$$G(\Phi(r,\theta)) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r^2+5)$$

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r)$$

$$G(\Phi(r,\theta)) \cdot \Phi_r \times \Phi_\theta = -2r^3\cos^2\theta - 2r^3\sin^2\theta + r(r^2+5)$$

$$= -2r^3 + r^3 + 5r$$

$$= -r^3 + 5r$$

$$\iint_T G \, d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-r^3+5r)\,dr\,d\theta \stackrel{\checkmark}{=}$$