

Vectorial Virtual: Taller 3, parte 1: Integrales Dobles.

Ejercicio 1

Evalúe las siguientes integrales dobles. No olvide dibujar las regiones de integración.

- 1 $\iint_D x \cos(y) dA$ donde D es la región acotada por las curvas $y = 2x^2$ y $y = 1$ con $x \geq 0$.
- 2 $\iint_R (3x - y) dA$ donde R es el círculo de radio $\sqrt{2}$ centrado en el origen.

Ejercicio 2

Dibuje la región de integración de las siguientes integrales iteradas:

1 $\int_{-1}^0 \int_0^{1+y} (1 - x + y) dx dy$

2 $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$

Ejercicio 3

Evalúe las siguientes integrales. (*Sugerencia.* Si la integral parece muy difícil, a veces vale la pena cambiar el orden de integración). No olvide dibujar las regiones de integración.

$$1 \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx dy =$$

$$2 \quad \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx =$$

Ejercicio 4

Sea R el rectángulo $[-1, 1] \times [1, 3]$.

- 1 Escriba la integral $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$ como límite de una doble sumatoria, usando la definicin de integral doble. (No olvide escribir fórmulas explícitas para el punto \vec{x}_{ij}^* que escogió).
- 2 OPCIONAL: Usando la parte (a), escriba un programa en python que calcule los primeros 100, 1000 y 10000 términos de esta suma. Cuánto vale aproximadamente la integral? (notar que esta integral no se puede calcular con funciones elementales asi que es necesario aproximarla numéricamente).

Ejercicio 5 (Integración y optimización)

- 1 Encuentre los valores máximos y mínimos que alcanza la función $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ en el rectángulo $R = [-1, 1] \times [1, 2]$ (es decir R es el conjunto de (x, y) tales que $-1 \leq x \leq 1$ y $1 \leq y \leq 2$).
- 2 Utilice el punto anterior para demostrar que

$$\frac{1}{3} \leq \iint_R \frac{dA}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6$$

Puede dar una estimación más precisa?