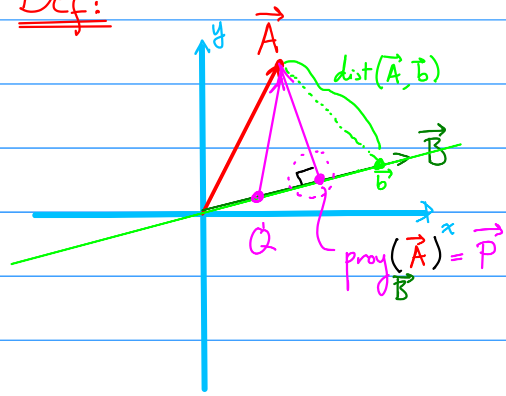
Hoy: Proyecciones ortogonales y sus aplicaciones

Def:



$proy_{\vec{B}}(\vec{A}) =$ "El múltiplo escalar del vector $\vec{B}$ más cercano al vector $\vec{A}$"

$\boxed{\text{Obs:}}$ Si $\vec{P} = proy_{\vec{B}}\vec{A}$ entonces $\vec{B} \perp (\vec{A} - \vec{P})$

Usaremos la perpendicularidad para ENCONTRAR el vector $\vec{P}$

Sabemos: (i) $\vec{P} = \lambda \vec{B}$, λ? (ii) $\vec{B} \cdot (\vec{A} - \vec{P}) = 0$ } Despejar λ

$\vec{B} \cdot (\vec{A} - \lambda\vec{B}) = \boxed{0 = \vec{B} \cdot A - \lambda\, \vec{B} \cdot \vec{B}}$

$\lambda\, \vec{B} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\lambda = \dfrac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}$

$\lambda = \dfrac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}$

$\vec{P} = \left[\dfrac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}\right] \vec{B}$

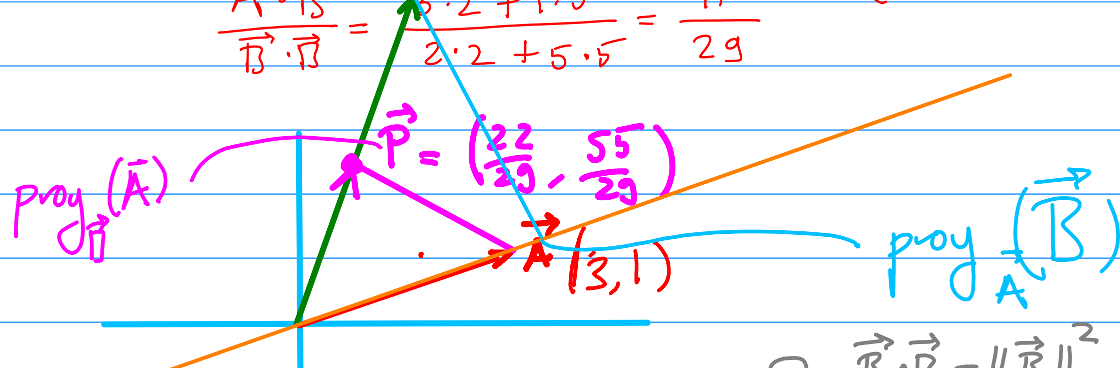
$$\boxed{\text{Conclusión: (1) } \boxed{proy_{\vec{B}}(\vec{A}) = \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}\right) \vec{B}} \quad (2)\ \|proy_{\vec{B}}(\vec{A})\| = \frac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}{\|\vec{B}\|}.}$$

Ejemplo: $\vec{A} = (3, 1)$

$\vec{B} = (2, 5)$

$\dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} = \dfrac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 5}{2 \cdot 2 + 5 \cdot 5} = \dfrac{11}{29}$

$proy_{\vec{B}}\vec{A} = \dfrac{11}{29}(2, 5) = \left(\dfrac{22}{29}, \dfrac{55}{29}\right)$

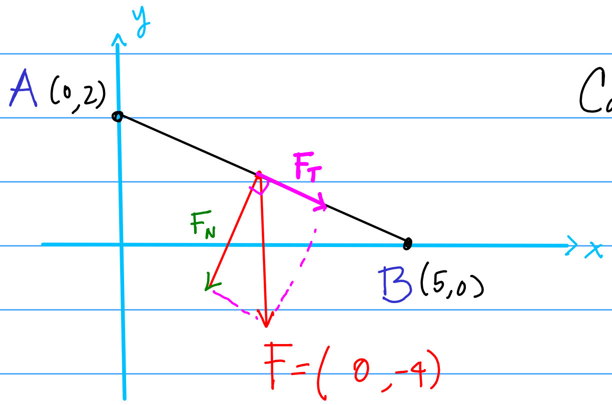


$\vec{B} \cdot \vec{B} = \|\vec{B}\|^2$

Qué longitud tiene $proy_{\vec{B}}(\vec{A})$?

$$\|proy_{\vec{B}}(\vec{A})\| = \left\|\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}\right)\vec{B}\right\| = \left|\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}\right| \|\vec{B}\| = \frac{|A \cdot \vec{B}|}{\|\vec{B}\|^{\cancel{2}}} \cancel{\|\vec{B}\|}$$

Aplicaciones

(1) 

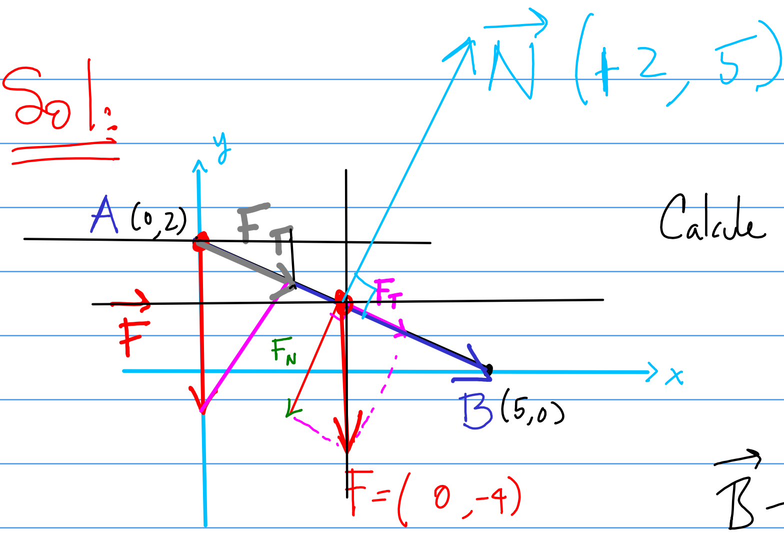
Calcule F_N, F_T.

$$F_N + F_T = F$$

(2) Sea r la recta parametrizada por
$\sigma(t) = (2,1,0) + t(1,6,10)$
y $A = (1,1,1)$. Encuentre la distancia entre
r y $\vec{A}$.

(3) Sea P el plano de ecuación
$2x + y + z = 3$. y $A = (1,1,1)$. Encuentre
la distancia entre P y $\vec{A}$.

Sol:



Calcule F_N, F_T.

$$F_T = proy_{\vec{B}-\vec{A}} (\vec{F})$$

$$\vec{B}-\vec{A} = (5,0) - (0,2) = (5,-2)$$

$$F_N + F_T = F$$

$$proy_{\vec{B}-\vec{A}} \vec{F} = \left[\frac{\vec{F}\circ(\vec{B}-\vec{A})}{(\vec{B}-\vec{A})\circ(\vec{B}-\vec{A})}\right](\vec{B}-\vec{A})$$

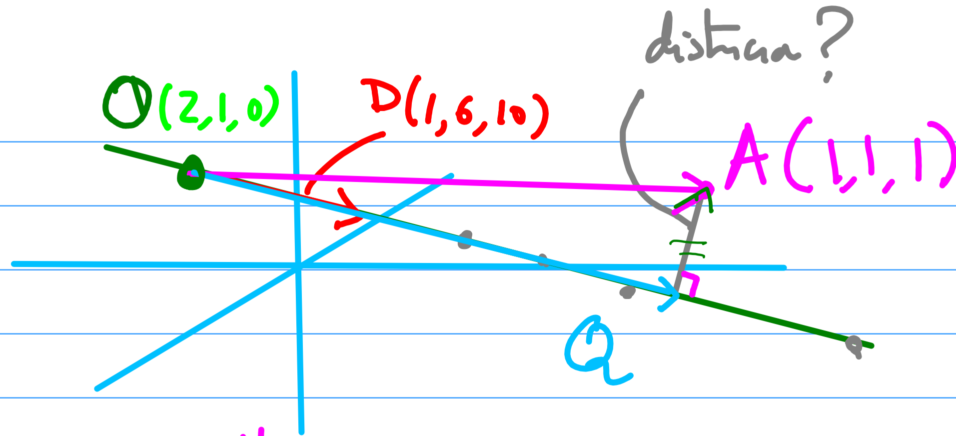
$$= \frac{8}{25+4}(5,-2) = \left(\frac{40}{29}, -\frac{16}{29}\right) = F_T$$

$$F_N = F - F_T = -\left(\frac{40}{29}, -\frac{16}{29}\right) + (0,-4) =$$

$$= \left(-\frac{40}{29}, \frac{16}{29} - 4\right)$$

$$F_N = Proy_{\vec{N}} \vec{F}$$

(2) Sea r la recta parametrizada por $\sigma(t) = (2,1,0) + t(1,6,10)$ y $A=(1,1,1)$. Encuentre la distancia entre r y $\vec{A}$.



$$\left\| \vec{A} - proy_{\text{"recta"}} \vec{A} \right\| = ?$$

$$Q = proy_{\vec{D}} (\vec{A} - \vec{O})$$

$$dist = \left\| (\vec{A} - \vec{O}) - \vec{Q} \right\|$$

$$A - O = (1,1,1) - (2,1,0) = (-1,0,1)$$

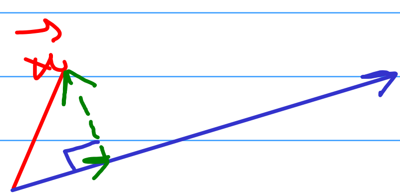
$$Q = proy_{D} (\vec{A} - \vec{O}) = \left[\frac{(-1,0,1) \cdot (1,6,10)}{(1,6,10) \cdot (1,6,10)} \right] (1,6,10)$$

$$= \frac{9}{137} (1,6,10) = \left(\frac{9}{137}, \frac{54}{137}, \frac{90}{137} \right)$$

$$(A - O) - Q = \left\| (-1,0,1) - \left(\frac{9}{137}, \frac{54}{137}, \frac{90}{137} \right) \right\|$$

Obs:

$$\vec{u} - proy_{\vec{v}} (\vec{u}) \perp \vec{V}$$



(3) Sea $\mathcal{P}$ el plano de ecuación $2x+y+z=3$. y $A=(1,1,1)$. Encuentre la distancia entre $\mathcal{P}$ y $\vec{A}$.