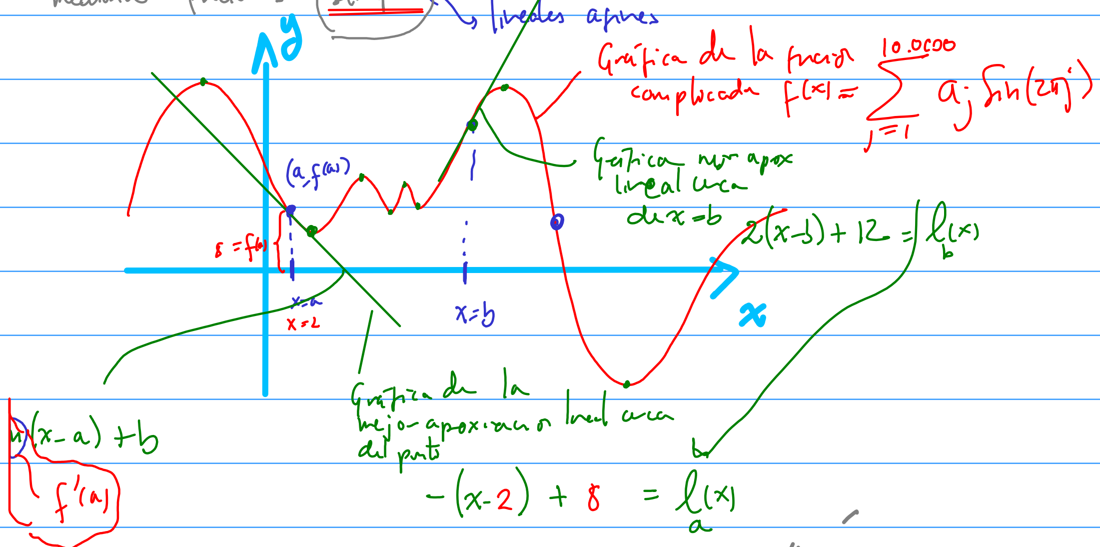
Hoy: Funciones diferenciables

¿Qué es el cálculo?

"El cálculo es un método para aproximar funciones complicadas mediante funciones simples"



"FÁCIL"

Def: Una función $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal afín si es de la forma

$$\ell(x_1, \dots, x_n) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n + c$$

$A_1, A_2, \dots, A_n, c$ son números dados.

Ejemplos:

$n = 1$

$$\boxed{\ell(x) = Ax + c}, \qquad \ell(x) = 2x + 81$$

$n = 2$

$$\ell(x, y) = Ax + By + C, \qquad \ell(x, y) = 5x + 4y - 7.$$

Ejercicio: (1) Haga la gráfica de las siguientes funciones

(1.a) $\ell(x) = -x + 1$, (1.b) $\ell(x, y) = -y - x + 1$

(2) Verifique las siguientes dos:

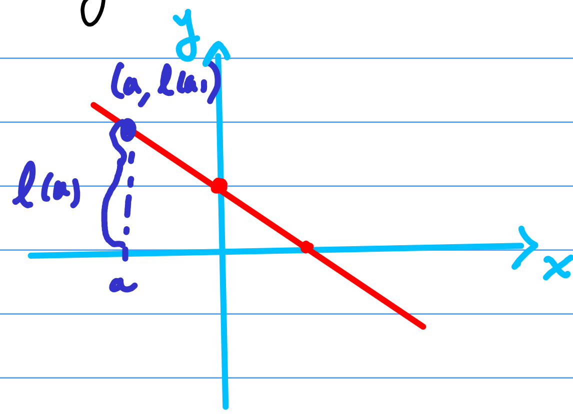
(2.a) Toda función lineal afín con $\ell(8) = 2$ es $\ell(x) = m(x-8) + 2$ para algún m

(2.b) Escriba como son todas las funciones lineal afines $\ell(x,y)$ con $\ell(1,2)=7$.

(1) (a) $\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\ell(x) = -x+1$

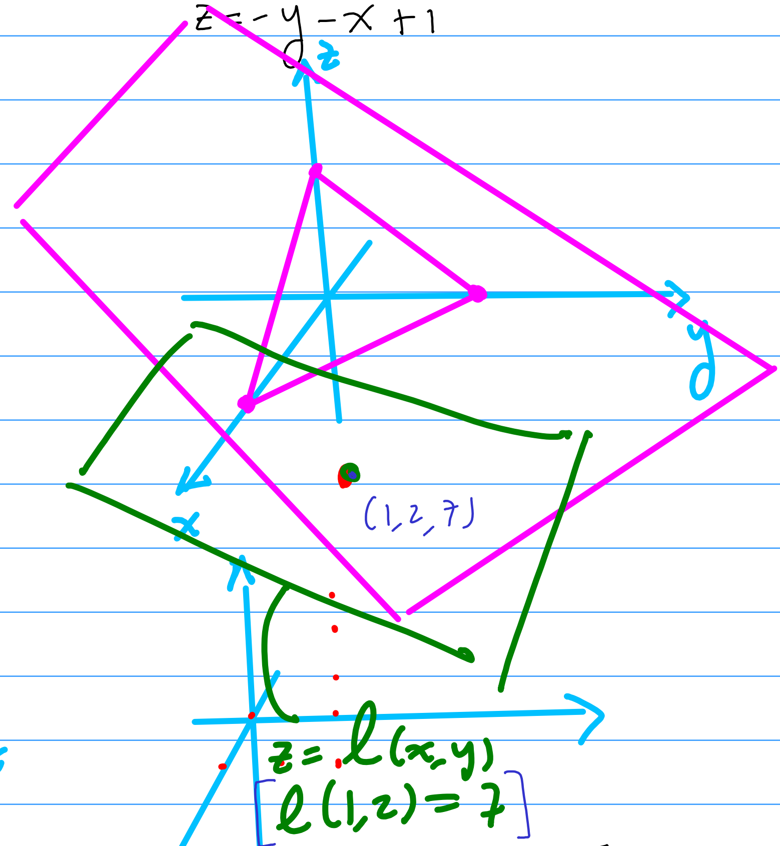
$y = -x+1$ — Gráfica

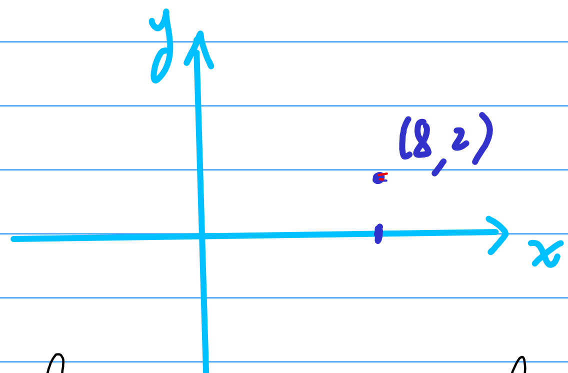


(b) $\ell:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\ell(x,y) = -y-x+1$

$z = -y-x+1$





$\ell(x) = ax + c$ $\qquad$ $\ell(8)=2 \iff \ell(8) = \boxed{a\cdot 8 + c = 2}$

$c = 2-8\cdot a$

$\ell(x) = ax + 2 - 8\cdot a$

$\boxed{\ell(x) = a(x-8)+2}$

$\ell(8,8) = 41$

(2b) $\ell(x,y) = ax + by + c$

$\ell(1,2) = a\cdot 1 + b\cdot 2 + c = 7$

$[c = 7 - a\cdot 1 - b\cdot 2]$

$\ell(x,y) = a\cdot x + by + [7 - a\cdot 1 - b\cdot 2]$

$$\left[\ell(x,y) = a(x-1) + b(y-2) + \underline{7}\right]$$

Teorema: Toda func. lineal afín con $\ell(1,2)=7$

$$\underline{a}(x-8) + \underline{b}(y-8) + 4)$$

$\boxed{\text{Def:}}$ Una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ si existe una función lineal afín $\ell_{\vec{a}}(\vec{x})$ que la aproxima MUY BIEN cerca de $\vec{a}$, en el sentido en que...

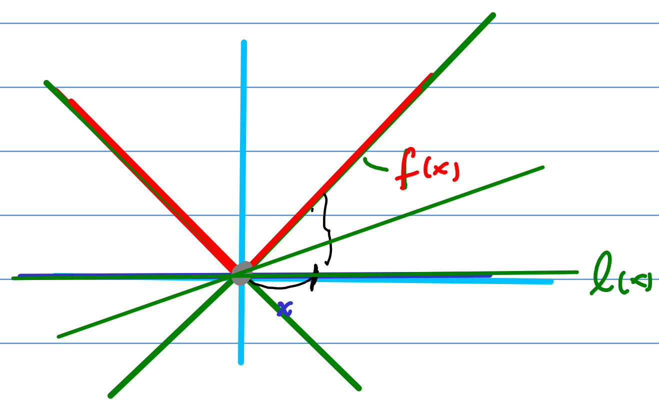
¿¿Cómo la encontramos??

$$\left[\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left[\frac{|f(x) - \ell_a(x)|}{\|x-a\|}\right] = 0\right]$$

$f(x) - \ell_a(x)$ decrece mucho más rápido que $|x-a|$

Ejemplo:

$f(x) = |x|$



$$\frac{f(x) - \ell(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{|x|}{x} = 1$$

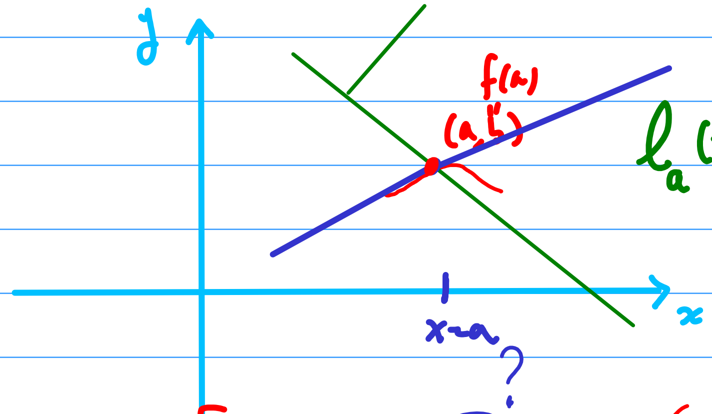
$$\nexists \lim_{x\to 0} |f(x) - ax| = 0$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Sea $f(x)$ una función diferenciable en $x=a$

y supongamos que $f(a)=b$.

Cómo encuentro $\ell_a(x)$?



$$\ell_a(x) = \underbrace{\overbrace{f'(a)}^{m}(x-a)+f(a)}_{\text{mejor aprox lineal para } f \text{ cerca de } a}$$

Sabemos (1) $\left[\ell_a(x) = m(x-a)+b\right]$

(2) $\left[\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-\ell_a(x)}{x-a}\right]=0\right]$ ← Queremos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-m(x-a)-\overset{f(a)}{\overset{\shortparallel}{b}}}{x-a}=0$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{m\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}}\right]=0$$

luego

$$\left[\underline{\underline{m}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] = f'(a) \quad !!$$

Ejemplo: Aproxime $\overset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{\sin(x)}}$ cerca de $x=\frac{\pi}{4}$

$$\ell_{\frac{\pi}{4}}(x) = f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)+f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$f'(x) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\, l_{\frac{\pi}{4}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \,\right]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 0.00001\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(0.00001) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$