Ejercicios Análisis Numérico 2022-1

Semana 1.

Ejercicio 1.1. Demuestre que $\| \|_p$ es una norma en $\mathbb{C}^n$ para $p \geq 1$.

Ejercicio 1.2. Demuestre que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Ejercicio 1.3. Probar que el producto hermitiano $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ es una norma.

Ejercicio 1.4. Demuestre que $\| \|_p$ viene del producto interno $\Leftrightarrow p = 2$.

Ejercicio 1.5. Sea $T : V \to V$ una transformacion con V espacio vectorial con producto interno, con $T^* = T$.

1. Demuestre que todo valor propio es real.
2. Demuestre que dos vectores propios de valores propios distintos son ortogonales.
3. *Teorema Espectral* Demuestre que T es diagonalizable (Existe una base de V constituida por vectores propios de T).

Ejercicio 1.6. S es skew-hermitian si $S^* = -S$.

1. Demuestre que todo valor propio de S es puramente imaginario.
2. Demuestre que $S - I$ es invertible.
3. Demuestre que $(S - I)^{-1}(S + 1)$ es unitaria.

Semana 2.

Ejercicio 2.1.
1. Si D es diagonal $\|D\|_{op,p} = \max_{1\leq u\leq m} |D_{i,j}|_1$
2. Si $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & ... & a_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$, entonces $\|A\|_{op,p} = \max_{1\leq u\leq m} |a_j|_1$
3. Si $A = \begin{pmatrix} - & a_1^* & - \\ - & \vdots & - \\ - & a_n^* & - \end{pmatrix}$, entonces $\|A\|_{op,p} = \max_{1\leq u\leq m} \left\|a_j^*\right\|_1$

Ejercicio 2.2. *Submultiplicatividad.* Demuestre que $A, B, C : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

1. $\|AB\|_{op} \leq \|A\|_{op} \cdot \|B\|_{op}$.
2. $\|AB\|_{fb} \leq \|A\|_{fb} \cdot \|B\|_{fb}$
3. Demuestre que $\|\cdot\|_{fb}$ no es una norma inducida.

Ejercicio 2.3. *Radio Espectral.* Sea $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$. Demuestre que $\rho(A) \leq \|A\|_{op}$ para toda norma en $\mathbb{C}^n$.

Ejercicio 2.4. Sea $x \in \mathbb{C}^m$, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

1. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$
2. $\|x\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$
3. $\|A\|_{op,\infty} \leq \sqrt{n}\,\|A\|_{op,2}$
4. $\|A\|_{op,2} \leq \sqrt{m}\,\|A\|_{op,\infty}$

Semana 3.

Ejercicio 3.1. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ entonces tiene un SVD real (Existen U, V ortogonales con $A = U\Sigma V^t$)

Ejercicio 3.2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Encuentre un SVD para a A (a mano)
2. Calcule $||A||_q$ para $q \in \{1, 2, \infty, Fb\}$
3. Encuentre A^{-1} y los valores propios de A a partir del primer inciso.
4. ¿Cuál es el área de la imágen del disco unitario bajo A?

Ejercicio 3.3. Si $A = U\Sigma V^*$ Encuentre una diagonalización ortogonal de

$$\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3.4. Sea $F = \left\{ \pm \left(\frac{m}{2^{53}}\right) 2^e;\ \begin{matrix} 0 \leq m \leq 2^53 \\ 0 \leq e \leq M \end{matrix} \right\}$, $N^* = min\{n \in \mathbb{N} : n \notin F\}$.
Encuentre N^* en Python.

Ejercicio 3.5 (Ortonormalización triangular $\sim QR$)**.** Demuestre que la factorización QR mediante Gram-Schmidt puede codificarse así:

$$AR_1R_2\cdots R_n \quad = \quad \hat{Q}$$

Donde $\hat{Q}$ es una matriz con columnas ortonormales , R_i es una matriz triangular $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Si definimos $\hat{R} \coloneqq R_n^{-1}R_{n-1}^{-1}\cdots R_1^{-1}$, la factorización $A = \hat{Q}\hat{R}$ recibe el nombre de *Factorzación QR reducida.*

Ejercicio 3.6. Teorema: $F_b : \begin{matrix} \text{Matrices triangulares superiores} nxn \text{ con } det \neq 0 & \to & \mathbb{C}^n \\ R & \mapsto & R^{-1}b \end{matrix}$ donde

$$\hat{F}_b(R) = \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} & \cdots & \hat{R}_{1n} \\ & \hat{R}_{12} & \cdots & \hat{R}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \hat{R}_{12} \end{bmatrix}, \hat{b} \mapsto \hat{x}_n = \hat{b_n}/\hat{R_{nn}},\ \hat{x}_{n-1} = R_{n-1n}\hat{X}_n/\widehat{R_{n-1n-1}}$$

es backward stable. Pruebe el teorema para matrices $2x2$

Ejercicio 3.7. Sea $x \in \mathbb{R}^m$. Dado x con $x_1 \neq 0$, si $y = sgn(x_1)||x||e_1 + x$ entonces

$$||y|| > ||x||$$

evitando cancelacion.

$$\begin{pmatrix} \pm||x|| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = sgn(x_1)\|x\|e_1$$