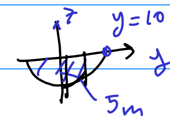
Hoy: ✓(1) Qué son las integrales?

✓(2) Para qué sirve integrar?

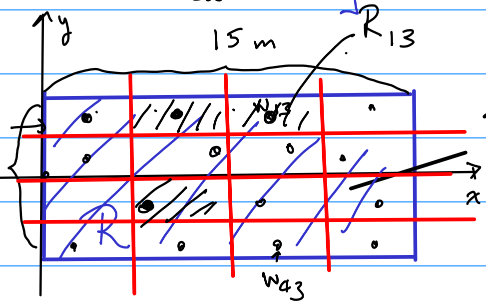
(3) [Cómo se calculan?]

Ej:



$P(x,y) = \frac{5}{100} y^2 - 5$

Problema



Profundidad $P(x,y)$ (Función escalar)

Cuánta agua cabe en la piscina?

$$\iint_R P(x,y)\, dA$$

(1) Partir R en N^2 rectángulos R_{ij}

(2) Escoger w_{ij}^* en R_{ij} para cada rectángulo

(3) Imaginamos que la prof en todo R_{ij} es $P(w_{ij}^*)$

$$A_N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\text{Area}(R_{ij}) \cdot P(w_{ij}^*) \right)$$

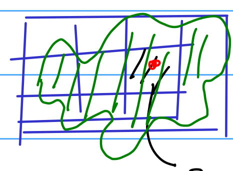
(4) $$\iint_R P(x,y)\, dA := \lim_{N \to \infty} A_N$$

(2) Aplicaciones de las integrales

ⓐ $$\iint_R 1\, dA = \text{Area}(R)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \text{Area}(R_{ij}) \cdot 1$$

Area de R



R_{ij}

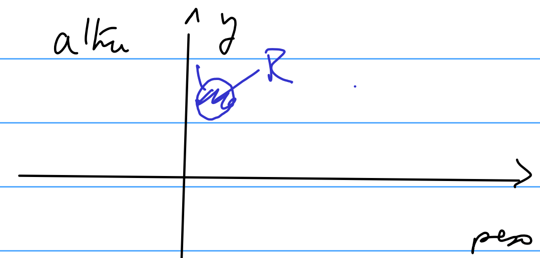
ⓑ Si $f(x,y) =$ "Densidad del material del que esta hecho (x,y) en Kg/m^2"

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \text{masa total } (R)$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overbrace{\underbrace{\text{Area}(R_{ij})}_{\text{área}}\ \underbrace{f(w_{ij}^*)}_{\text{densidad superficial}}}^{\text{masa}(R_{ij})} =$$

(c) Si $p(x,y) =$ "Función de densidad conjunta de (X,Y)"

$$\iint_R p(x,y)\,dA = \mathbb{P}\{(X,Y)\in R\}$$

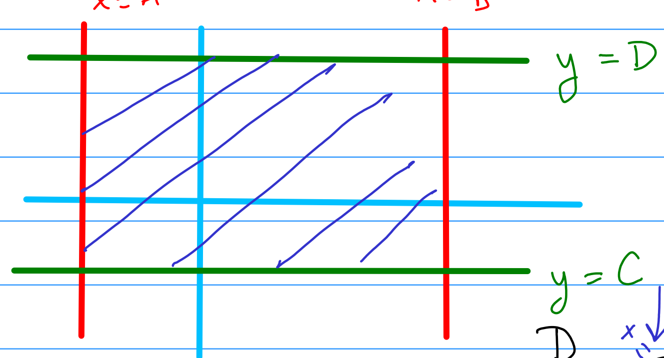


[Existencia de integrales]

Teorema: Si $P(x,y)$ es continua en R entonces, el límite $\lim_{N\to\infty} A_N$ existe y es independiente de los w_{ij}^* que escojamos.

(3) ¿Cómo se calcula?

Teorema: [Fubini] Sea $R = \left\{(x,y): \begin{array}{l} A\le x\le B \\ C\le y\le D\end{array}\right\}$ y suponga que $P(x,y)$ es continua



$$\iint_R p(x,y)\,dA = \int_C^D\left[\int_{x=A}^{x=B} P(x,y)\,dx\right]dy$$

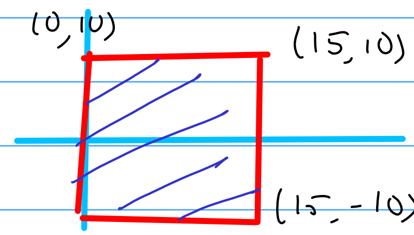
$$\int_A^B \left(\int_C^D p(x,y) \quad dy \right) dx$$

Ejercicio:

$$P(x,y) = 5 - \frac{5}{100} y^2$$

$$R = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} -10 \le y \le 10 \\ 0 \le x \le 15 \end{array} \right\}$$

Calcula $\displaystyle\iint_R P(x,y)\, dA$



$$\iint_R \left(5 - \frac{5}{100}y^2\right) dA = \int_0^{15}\left[\int_{-10}^{10}\left(5-\frac{5}{100}y^2\right)dy\right]dx$$

$$\int_{-10}^{10}\left(5-\frac{5}{100}y^2\right)dy = 5\cdot y - \frac{5}{100}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=-10}^{y=10}$$

$$= 5\cdot 10 - \frac{5}{100}\,\frac{10^3}{3} - \left[5\cdot(-10) - \frac{5}{100}\,\frac{(-10)^3}{3}\right]$$

$$= 5\cdot 20 - \frac{5}{\cancel{100}}\cdot\frac{2\cdot 10^{\cancel{3}}}{3} = 5\cdot 20 - \frac{5\cdot 2\cdot 10}{3}$$

$$= 5\left[20 - \frac{20}{3}\right]$$

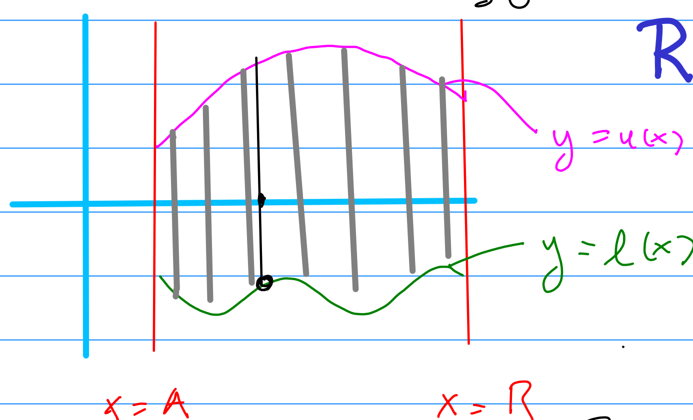
$$= 5\cdot 20\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5\cdot 20\cdot 2}{3}$$

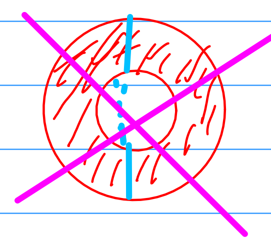
$$\int_0^{15} 5\cdot 20\cdot \frac{2}{3}\,dx = \frac{\cancel{15}\cdot 5\cdot 20\cdot 2}{\cancel{3}} = 5\cdot 5\cdot 2\cdot 20 = \boxed{1000\ m^3}$$

¿Qué hacer con regiones más generales?

Teorema: [Fubini para regiones generales]

(1) Si $R = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} A \leq x \leq B \\ l(x) \leq y \leq u(x) \end{array} \right\}$

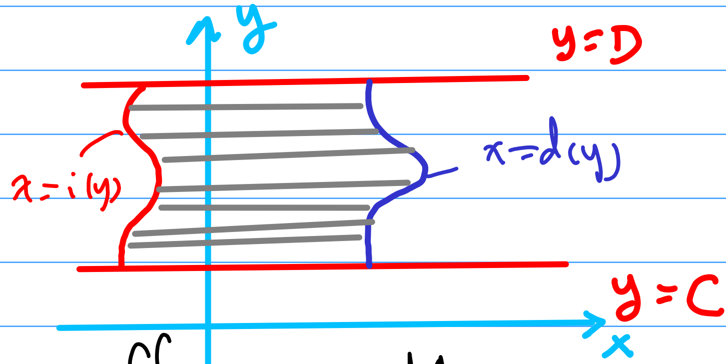




entonces

$$\iint_R p(x,y)\,dA = \int_A^B \left(\int_{l(x)}^{u(x)} p(x,y)\,dy \right) dx$$

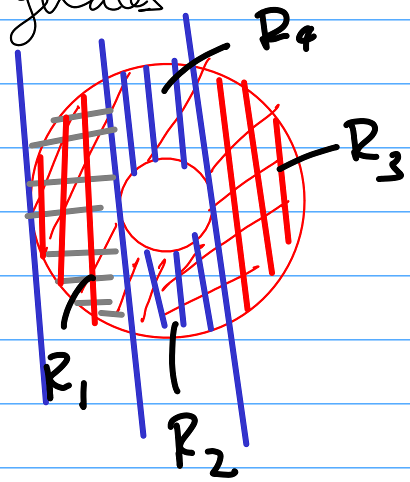
(2) Si $R = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} C \leq y \leq D \\ i(y) \leq x \leq d(y) \end{array} \right\}$



entonces

$$\iint_R p(x,y)\,dA = \int_C^D \left(\int_{i(y)}^{d(y)} p(x,y)\,dx \right) dy$$

Obs: Descomponiendo esto nos deja resolver integrales sobre regiones muy generales



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \overbrace{\iint_{R_1} + \iint_{R_2} + \iint_{R_3} + \iint_{R_4}}^{\text{cada una con Fubini}}$$