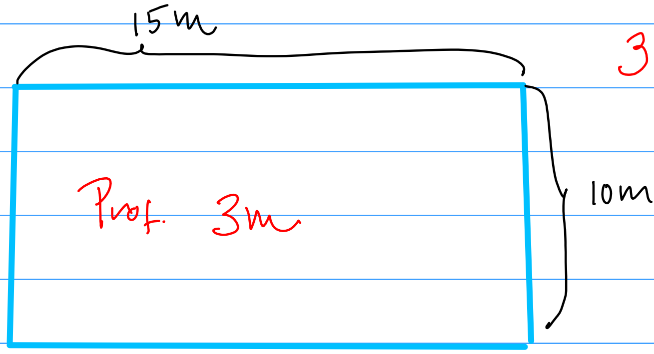
Hoy: (1) Qué es una integral?
(2) Son fáciles de calcular (en computadora)
(3) Son útiles

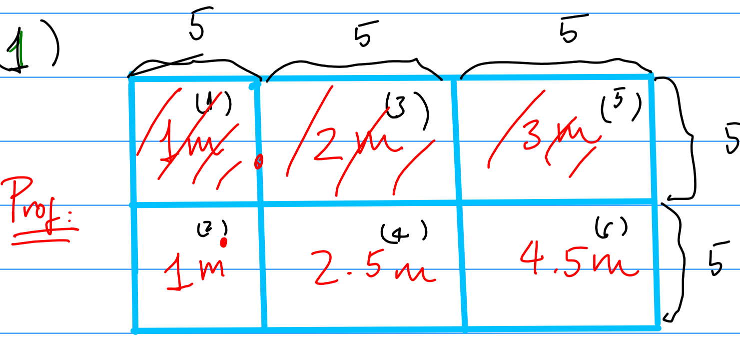
¿Cuánta agua tiene una piscina?

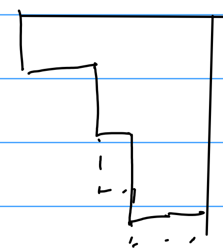
$\underline{450 \text{ m}^3}$
$\parallel$
$3\text{m} \times 15\text{m} \times 10\text{m}$

(0)



(1)



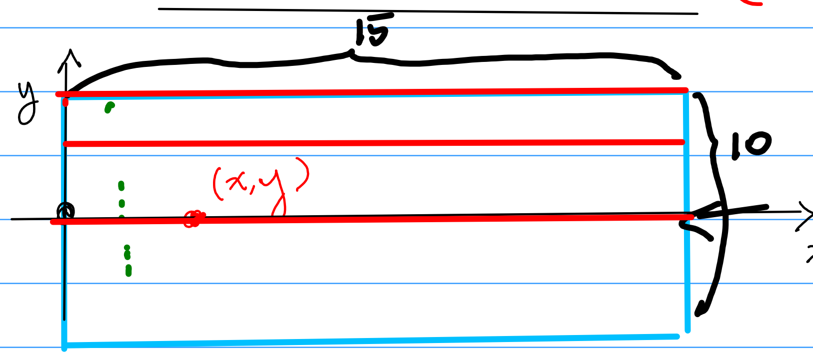


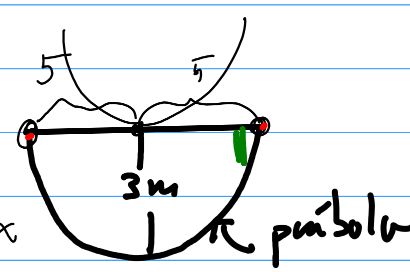
$$\text{Vol} = \left.\begin{array}{l} 1\text{m} \times 5\text{m} \times 5\text{m} + \\ 1\text{m} \times 5\text{m} \times 5\text{m} + \\ 2\text{m} \times (25\text{m}^2) + \\ 2.5\text{m} \times (25\text{m}^2) + \\ 3\text{m} \times (25\text{m}^2) + \\ 4.5\text{m} \times 25\text{m}^2 \end{array}\right\} = (25\text{m}^2 \times 14\text{m}) = 350\text{ m}^3$$

Sumas de la forma,

Profundidad × Area(R)

(2)





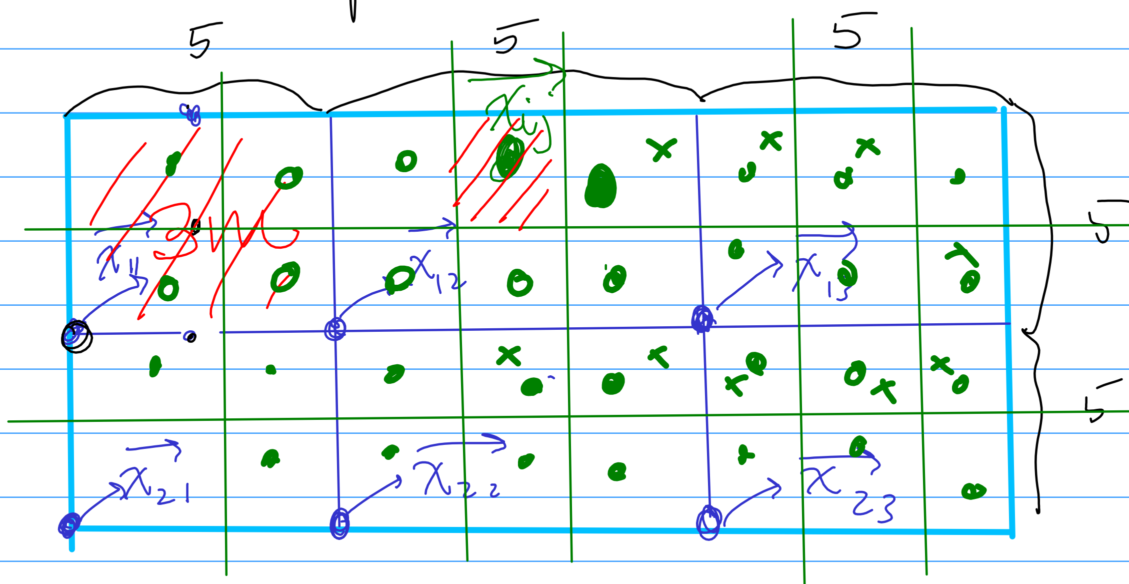
$p(x,y) = p(y)$ $\quad [Ay^2-3] \quad A5^2-3=0$

$\shortparallel$

$\frac{3}{25}y^2-3$

$$\boxed{P(x,y) = 3 - \frac{3}{25}y^2}$$

Idea: Intentemos calcular una aproximación:



(1) Dividimos la planta de la piscina en rectángulos R_{ij}, partiendo las filas y columnas en N partes

(2) En cada rectángulo escogemos un punto $\vec{x}_{ij} \in R_{ij}$

(3) APROXIMAMOS la cantidad de agua así: (imaginando que la profundidad de todos los puntos de R_{ij} es $P(\vec{x}_{ij})$)

$25m^2$

$$\mathrm{Vol} \approx \left[\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} P(\vec{x}_{ij}) \left[\text{Área}(R_{ij})\right]\right]$$

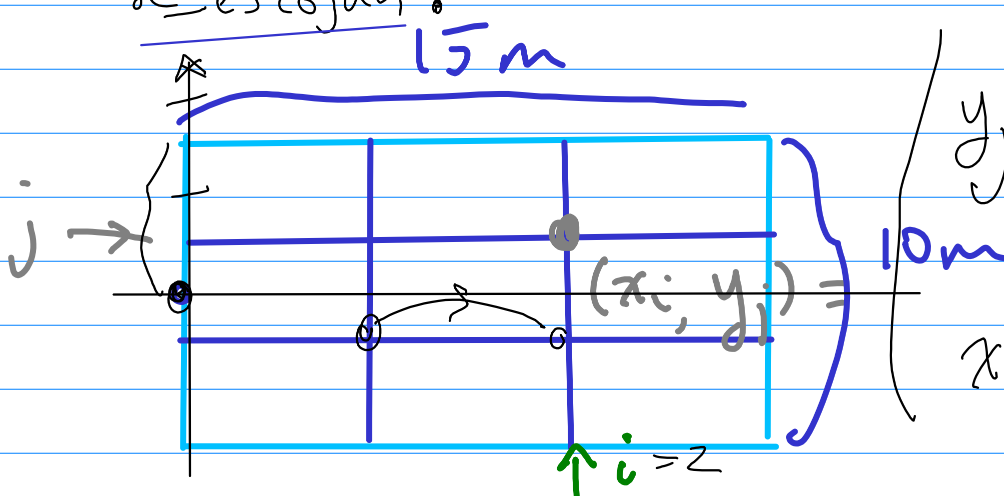
En general

$$Vol \approx \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(\vec{x_{ij}})\, Area(R_{ij})\right]$$

$$Vol := \left[\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(\vec{x_{ij}})\cdot Area(R_{ij})\right] = \iint_{R} P(x,y)\, dA\right]$$

<u>Teorema</u> Si $P(x,y)$ es una función continua

$\iint_R P(x,y)\,dA$ existe y es el mismo sin importar cuales $\vec{x_{ij}} \in R_{ij}$ se escojan.



$$(x_i, y_j) = \begin{cases} y_j = j\left(\dfrac{10}{N}\right) - \dfrac{10}{2} \\ x_i = \left(\dfrac{15}{N}\right) i \end{cases}$$

Teoremas: [Propiedades básicas de integrales]

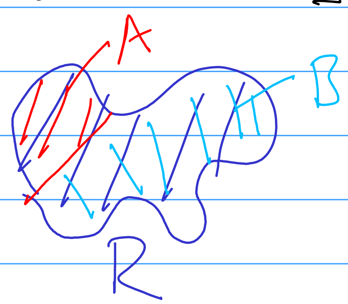
(1) [Linealidad]

$$\iint_R f(x,y) + \lambda g(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \lambda \iint_R g(x,y)\,dA$$

(2) [Monotonicidad]

Si $f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dA \le \iint_R g(x,y)\,dA$

(3) [Aditividad]



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_A f(x,y)\,dA + \iint_B f(x,y)\,dA$$

Usos:

$$\iint_R 1\, dA = \text{Area}(R)$$

Si $f(x,y) =$ "Densidad en Kg/m^2 del material de (x,y)"

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \sum \text{densidad}(\vec{x}_{ij}) \cdot \text{Area}(R_{ij})$$

$$\frac{Kg}{\cancel{m^2}} \cdot \cancel{m^2}$$

= masa total de R.