Hoy: Cálculo del trabajo hecho por un campo de fuerza F a lo largo de una curva orientada σ.

(1) ¿Qué es?

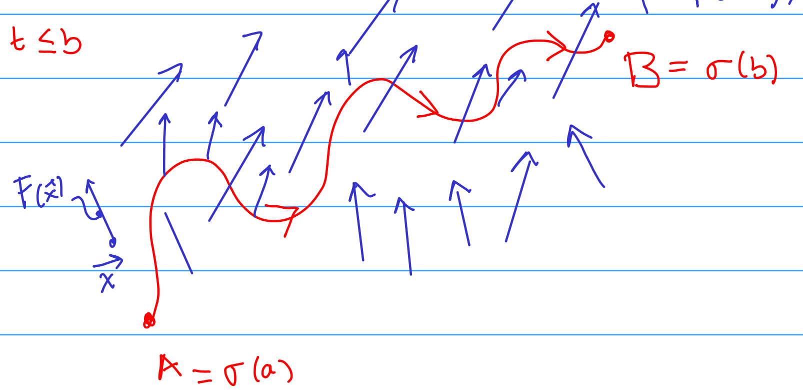
(2) ¿Cómo se calcula?

[(3) Campos vectoriales especiales (CONSERVATIVOS)]

(1) **Def:** Sea $\sigma(t)$ una curva parametrizada orientada. Sea $F(x,y,z)$ un CAMPO VECTORIAL

$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$a \leq t \leq b$

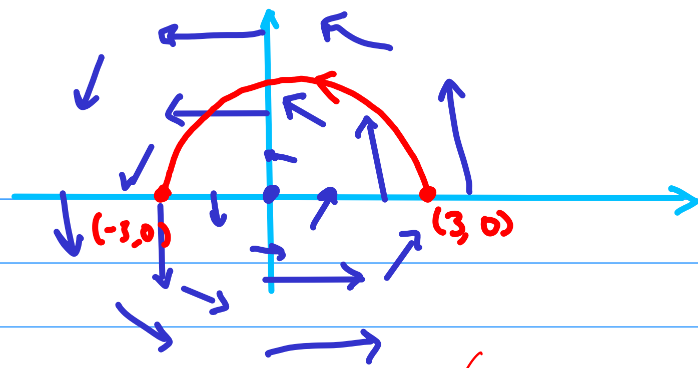


"¿Cuánto trabajo realiza F a lo largo de σ?"

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} \overset{\text{TEOREMA}}{=} \int_a^b \left[F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\right] dt$$

Ejemplo: Sea $F(x,y) = (-y, x)$ y

$\sigma(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi$



$$\int_{\sigma} F \, d\vec{s} = \int_0^{\pi} \left[F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \right] dt$$

$$\begin{cases} \sigma(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)) \\ F(x,y) = (-y, x) \end{cases}$$

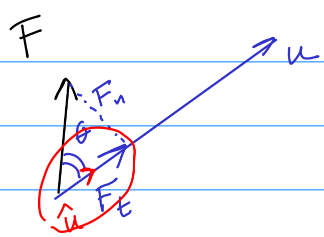
$$F(\sigma(t)) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$$

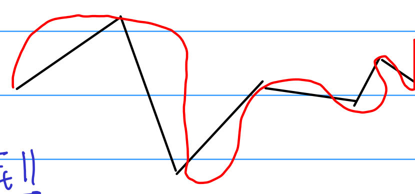
$$\sigma'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) = 9$$

$$= \int_0^{\pi} 9 \, dt = \boxed{9 \cdot \pi} \approx 27 \text{ Joules}$$

(2) Por qué se calcula así el trabajo?





$$\cos\theta = \frac{\|F_t\|}{\|F\|}$$

$$\|F\| \cos\theta = \|F_t\|$$

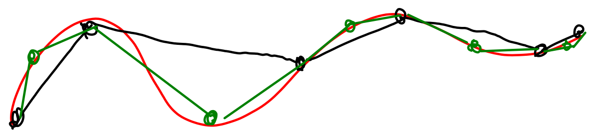
$$F_t = \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right) \frac{\vec{u}}{\|u\|}$$

MAGNITUD DE PROYECCIÓN

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\|u\|} = \frac{\|F\| \cancel{\|u\|} \cos\theta}{\cancel{\|u\|}}$$

$$\left[\text{Trabajo} = \left(\frac{F \cdot \vec{u}}{\cancel{\|u\|}} \right) \cancel{\|u\|} \right]$$

trabajo caso constante → Fuerza
↓
velocidad



distancia recorrida

$$\int_\sigma F \, ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{F(x_j)\cdot \sigma'(x_j)}{\|\sigma'(x_j)\|}}_{\text{magnitud de la proyección}} \|\sigma'(x_j)\| \Delta t$$

Obs: Dado el campo F y la curva σ calculamos $\int_\sigma F \, d\vec{s}$ mediante:

Dificil
* (1) Construimos una parametrización para σ
 (2) Usamos $\int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\, dt$

Hay campos vectoriales especiales (CONSERVATIVOS) en los que NO ES NECESARIO parametrizar ✓

Def: Un campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es CONSERVATIVO si existe una función escalar $U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$\nabla U(x,y,z) = F(x,y,z).$$

La función U se llama UN POTENCIAL para F

$U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Ejemplo: $U(x,y,z) = xy + \sin(z)$

$$\nabla U(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ \cos(z) \end{pmatrix}$$

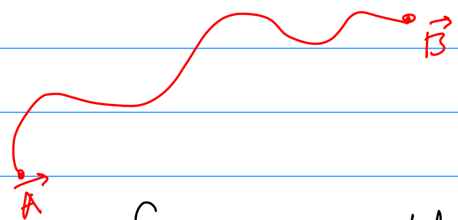
Defina $\left[\begin{array}{l} F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(x,y,z) = (y,\ x,\ \cos(z)) \end{array}\right]$

y note que F es un campo conservativo con potencial $U(x,y,z) = xy + \sin(z)$.

Teorema (Fundamental del cálculo para integrales de línea)

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Si F es un campo conservativo y U es un potencial para F y σ ($\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$) es una curva orientada desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$



entonces

$$\int_\sigma F\, ds = U(\vec{B}) - U(\vec{A})$$

No es necesario parametrizar!

Ejemplo: Sea $\sigma(t) = (2\cos(t),\ 3\sin(t),\ e^t)$ $\quad 0 \le t \le \pi$ y $F(x,y,z) = (y,\ x,\ \cos(z))$

Calcule

$$\int_\sigma F\, d\vec{s} \overset{?}{=} U(\vec{B}) - U(\vec{A})$$

Del ejercicio anterior sabemos que F es conservativo con potencial $U(x,y,z) = yx + \sin(z)$

$$\vec{A} = \sigma(0) = (2,\ 0,\ 1)$$

$$\vec{B} = \sigma(\pi) = (-2,\ 0,\ e^{\pi})$$

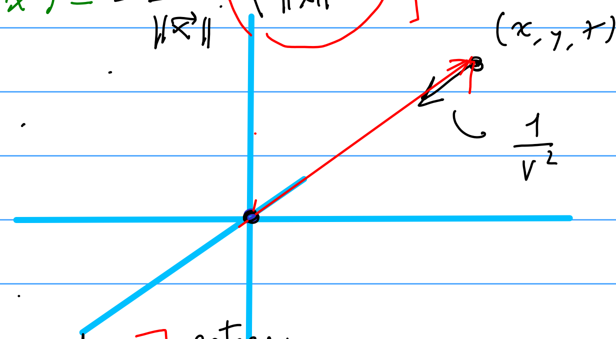
$$U(\vec{B}) = \sin(e^{\pi})$$

$$U(\vec{A}) = \sin(1)$$

$$\boxed{\int_{\sigma} F\, d\vec{s} = \sin(e^{\pi}) - \sin(1)}$$

Ejemplo: Campo Gravitacional / Eléctrico

$$F(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \quad \text{prop } \frac{1}{dist^2}$$

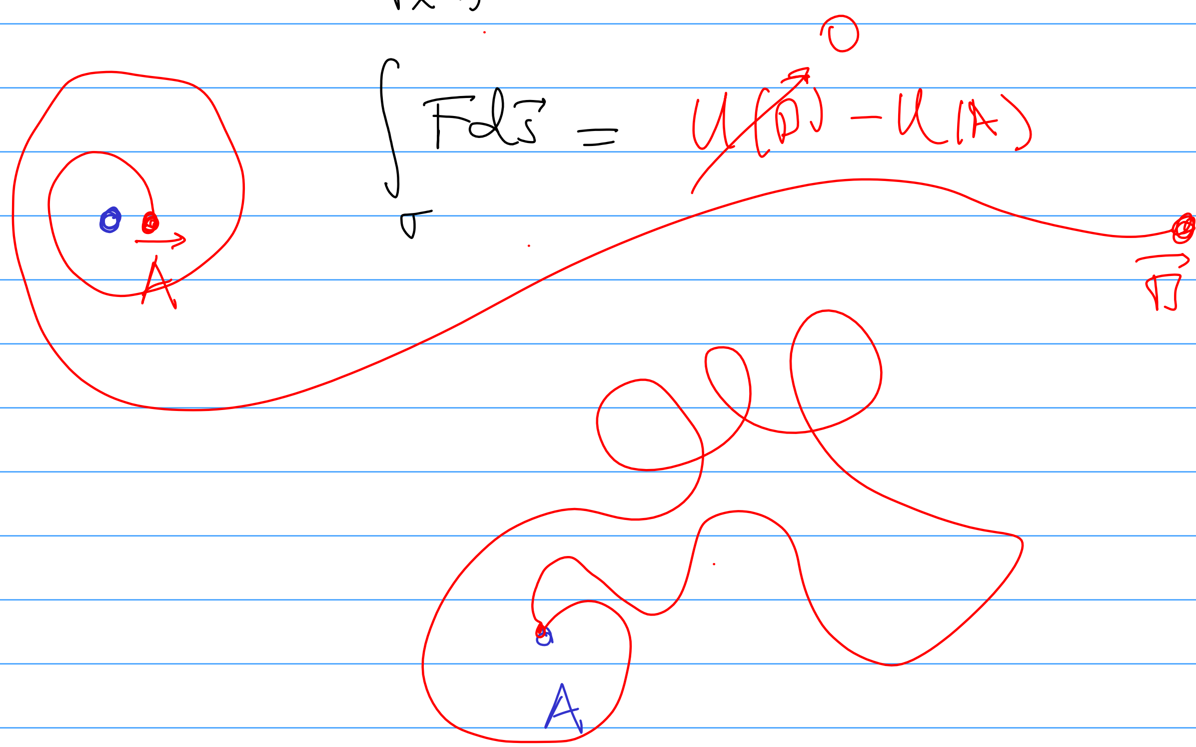


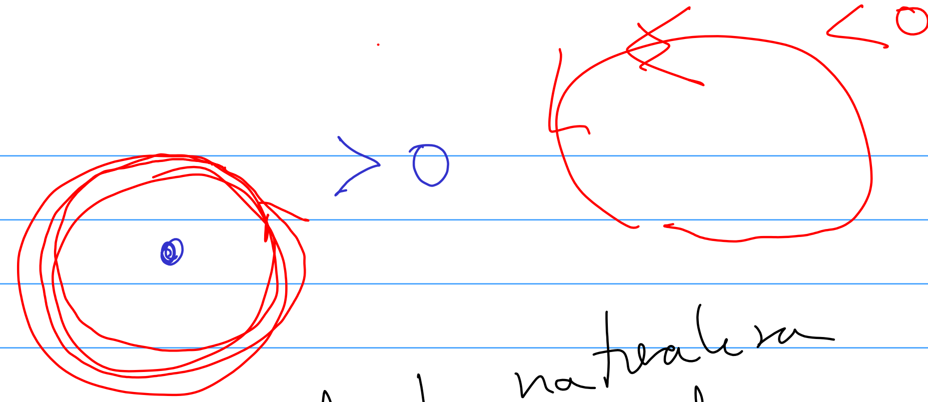
Ejercicio:

Si $\left[U(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\right]$ entonces $\nabla U = F$

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\int_{\sigma} F\, d\vec{s} = \cancel{U(\vec{B})}^{\,0} - U(A)$$





Fuerzas de la naturaleza son conservativas. (de lo contrario habría maneras de extraer energía infinita de un objeto)

Ejemplo: Como calcular un potencial para F?

$$F(x,y,z) = (y,\ x,\ \cos(z))$$

Buscamos U que satisfaga:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \left[u(x,y,z) = xy + A(y,z) \right] \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = x & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \cancel{x} + \dfrac{\partial A}{\partial y} = \overset{0}{\cancel{x}} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z} = \cos(z) & \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial A}{\partial z} = \cos(z) \end{cases}$$

$A(y,z)$: $A(y,z) = \sin(z) + C$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0 \rightsquigarrow A(y,z) = D(z)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \cos(z)$$

$$D'(z) = \cos(z) \longrightarrow$$

$$D(z) = \sin(z) + C$$

potential!

$$\boxed{u(x,y,z) = xy + \sin(z) + C}$$