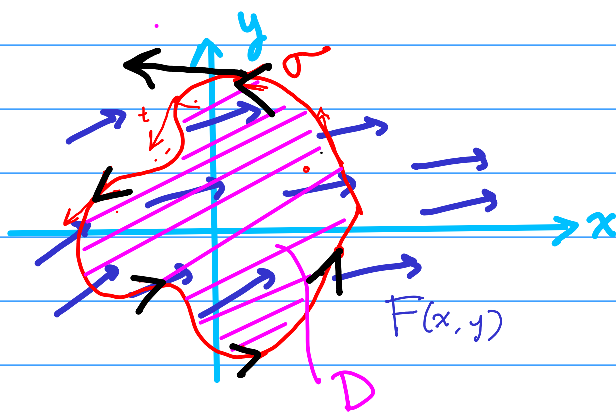
Hoy: Teorema de Green

(1) Enunciado (2) Ejemplo.

Teorema [de Green].

Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un CAMPO VECTORIAL

y sea σ una curva parametrizada que sirva como frontera de una región plana D



Si F es diferenciable en $\underline{D}$

y σ esta POSITIVAMENTE ORIENTADA (región D a la izquierda de la tangente) entonces

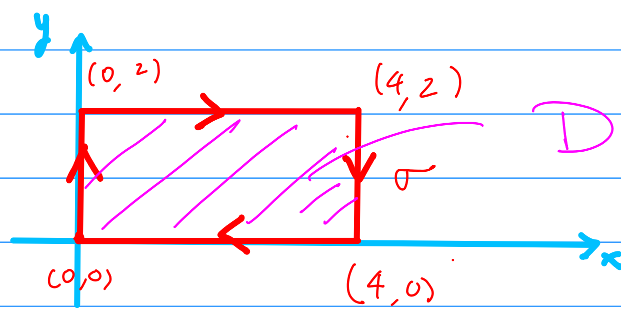
$$\underbrace{\int_\sigma F\, d\vec{s}}_{\text{Trabajo realizado por } F \text{ a lo largo de } \sigma} = \underbrace{\iint_D \underbrace{(\nabla \times F)}_{\text{func. escalar}}\, dA}_{\text{más simple!}}$$

$$F(x,y) = (\underbrace{P(x,y), \quad Q(x,y)}_{\text{funciones escalares}})$$

Recuerde que si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

*** Ejercicio:** Sea $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. ¿Cuánto trabajo realiza F a lo largo de la curva del dibujo?



$$F(x,y) = (\underbrace{x^2 - y^2}_{P(x,y)}, \underbrace{2xy}_{Q(x,y)})$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 2y + 2y = \boxed{\begin{matrix} \operatorname{rot}(F) \\ \| \\ 4y \end{matrix}}$$

Note que las componentes de F son polinomios y por lo tanto diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto en D, y por Teo de Green (si σ tiene la orientación positiva) tenemos:

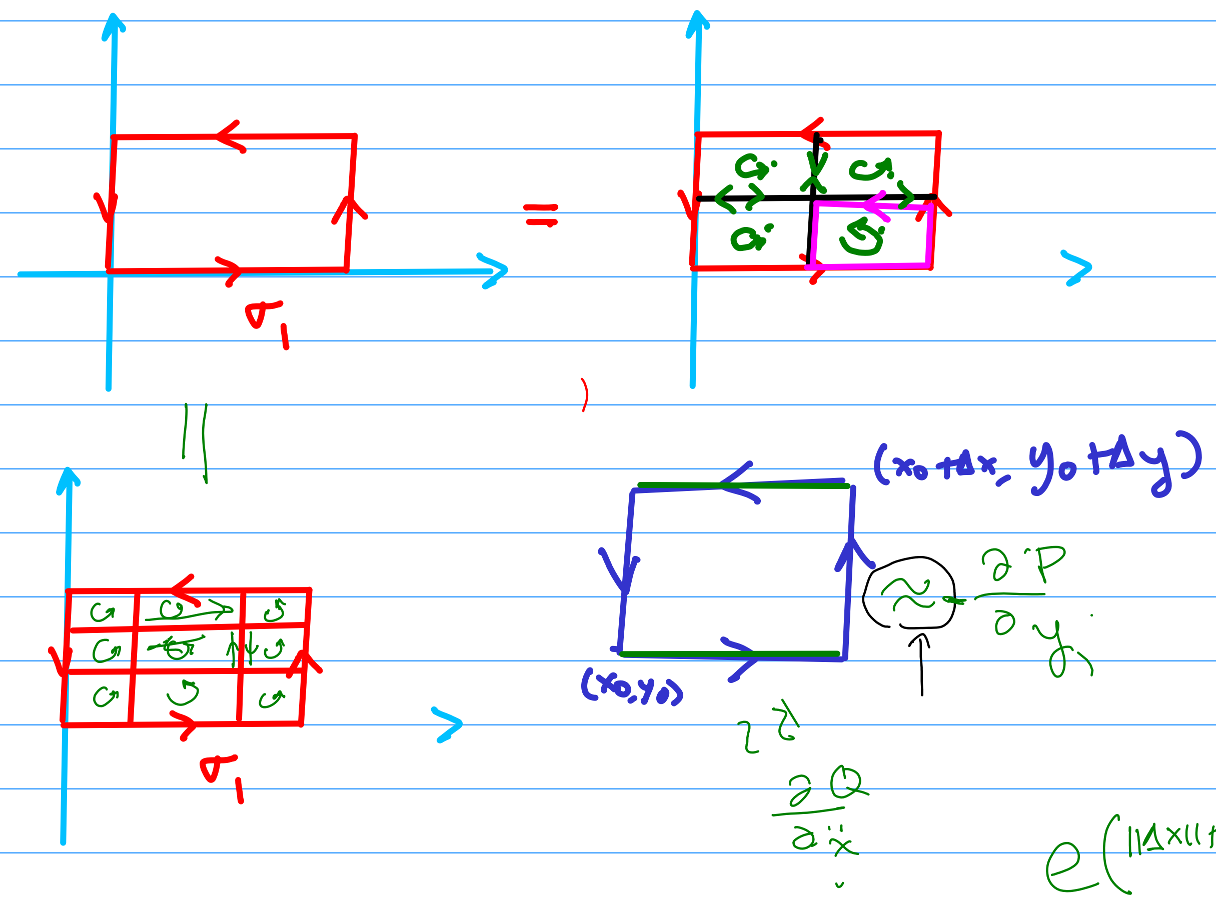
$$\int_{\sigma} F \, d\vec{s} \overset{\text{Teo green}}{=} \boxed{\iint_{D} 4y \, dA}$$

$$\overset{\text{Teo de Fubini}}{=} \int_0^4 \int_0^2 4y \, dy \, dx = \int_0^4 2y^2 \Big|_{y=0}^{y=2} dx =$$

$= 4 \cdot 8 = 32$ Nt · m = Joules.

Dado que queremos calcular el trabajo con la orientación opuesta, debemos cambiar el signo así que:

$$\boxed{\text{Trabajo total} = -32 \text{ Joules}}$$



$e(\|\Delta x\| + \|\Delta y\|)$

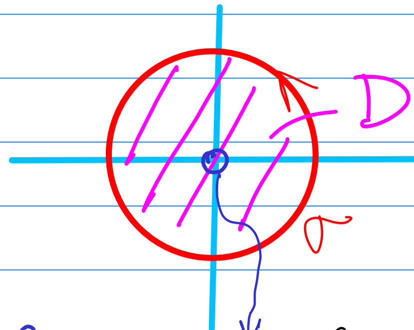
$+$

$$\left[P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = P(x_0, y_0) + \cancel{\Delta x \frac{\partial P}{\partial x}} + \Delta y \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

Ejercicio: Considere $H(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

(a) Verifique que $\nabla \times H = 0$ ✓

(b) Verifique parametrizando σ que



$$\int_\sigma H\, d\vec{s} = 2\pi .$$

$$2\pi \neq \int_\sigma F\, ds = \iint_D \left(\overset{0}{\cancel{\nabla \times F}}\right) dA = 0$$

NO PODEMOS APLICAR Green