Hoy: Superficies Parametrizadas.

Def formal:

Def: Una superficie parametrizada $S \subseteq \mathbb{R}^3$ consiste de:

$\left(\Phi(u_0, v_0) = \Phi(u_0', v_0') \Rightarrow \begin{matrix} u_0 = u_0' \\ v_0 = v_0' \end{matrix} \right)$

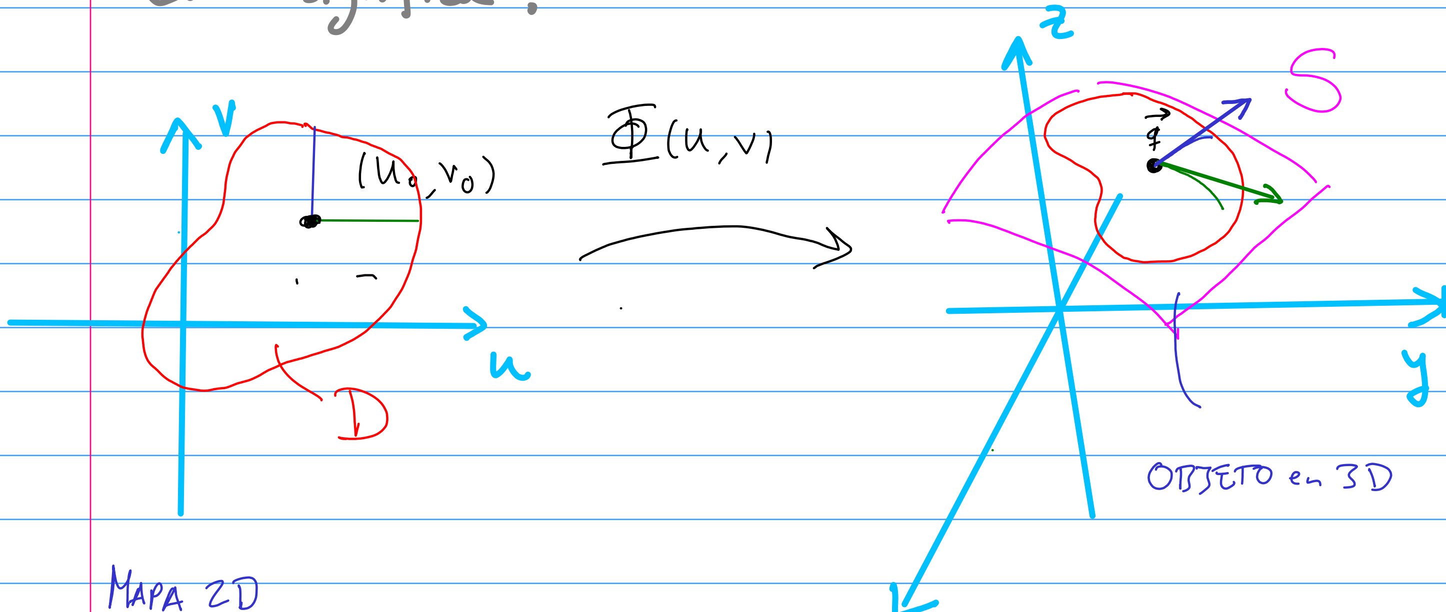
(1) Una función diferenciable y 1-1

$$\Phi : \mathbb{R}^2_{(u,v)} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$$

$$\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

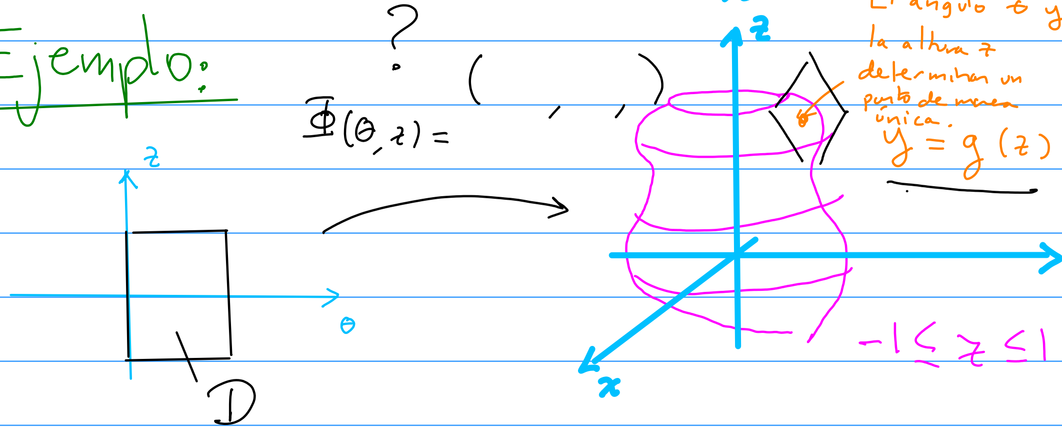
(2) Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2_{(u,v)}$ que satisface $\Phi(D) = S$.

Qué significa?



MAPA 2D

Ejemplo:



$$\left[\, \Phi(\theta, z) = \left(g(z)\cos\theta,\ g(z)\sin\theta,\ z \right) \right]$$

$$D = \left\{ (\theta, z) : \begin{array}{l} -1 \le z \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\}$$

Qué podemos hacer con una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$?

(0) Construir una parametrización de S (ver ejemplo anterior y ejemplo siguiente para dos casos especiales que deben saber)

Qué podemos hacer con una superficie parametrizada? (Φ, D, S).

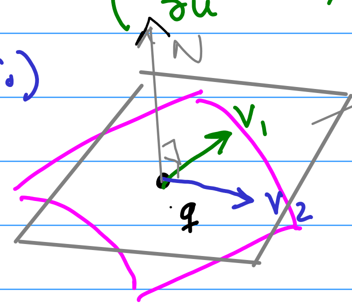
(1) Encontrar las coordenadas (u_0, v_0) que corresponden a $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in S \subseteq \mathbb{R}^3$

Resuelve $\Phi(u_0, v_0) = \vec{q}$ para (u_0, v_0) (3 ecuaciones, 2 incógnitas)

(2) Encontrar vectores tangentes a S en $\vec{q}$:

$$\vec{v}_1 = \Phi_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0),\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0),\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

$$\vec{v}_2 = \Phi_v(u_0, v_0)$$



$\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ = Plano tangente a S en $\vec{q}$

(3) Encontrar un vector normal al plano tangente a S en $\vec{q}$.

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$$

(4) Calcular integrales (de dos tipos) sobre superficies.

Integrales de

(4.1) Funciones escalares sobre S

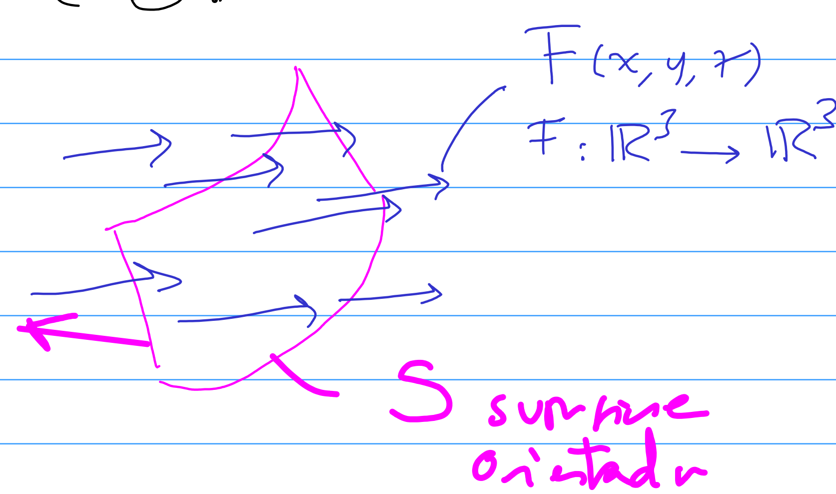
Teorema: Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar entonces

$$\iint_S f \, dS = \iint_D \underbrace{f(\Phi(u,v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, dA}_{\text{integral doble en } \mathbb{R}^2}$$

donde (Φ, D) es una parametrización de S

Obs: Permite calcular área superficial / masa total, posición del centro de masa y momento de inercia de una superficie (lámina).

(4.2) Integrar campos vectoriales calculando el flujo del campo a través de S.



Teorema: Si (Φ, D) es una parametrización de S entonces

orientación consistente con la de S

$$\underbrace{\iint_{S} \vec{F}\, d\vec{S}}_{\text{Flujo de } \vec{F} \text{ a través de } S.} = \underbrace{\iint_{D} F(\Phi(u,v))\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\, dA}_{\text{integral doble en } \mathbb{R}^2}$$

Ejercicio: *

(a) Halle una parametrización para la parte S de la superficie $z = x^2+y^2+5$ que está dentro del cilindro $x^2+y^2=4$

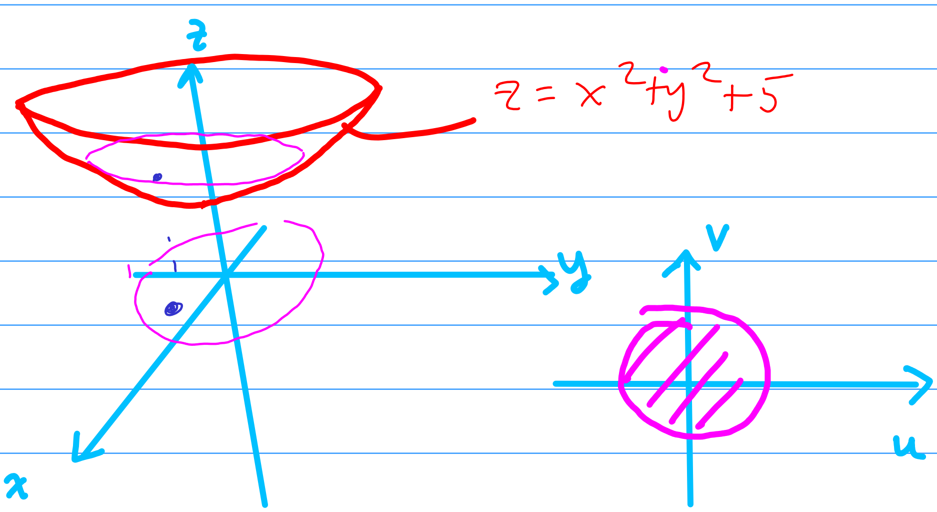
(b) Halle dos vectores linealmente independientes que sean tangentes a S en $(1,1,7)=\vec{q}$.

(c) Halle la ecuación del plano tangente a S en q.

(d) Halle el área superficial de S

(e) Si $F(x,y,z)=(x,y,z)$, calcule el flujo de F a través de S orientada hacia arriba

Sol.



$$S \begin{cases} \Phi(u,v) = \left(u \quad , \quad v \quad , u^2+v^2+5 \right) \\ D = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 4\} \end{cases}$$