Aclaración: Taller 1, Problema 3, Ej (1)

"y el plano $(3,5,6)$" $\longrightarrow$ "y el plano de ecuación $3x+5y+6z=0$"

Hoy: Cómo visualizar funciones escalares?

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Interpretación física: $n=3$

$f(x,y,z) =$ "Temperatura en °C del punto (x,y,z)"

Clave anterior: Hay dos métodos principales

(1) Usando conjuntos de nivel. "Dibuja en distintos colores los conjuntos de algunos niveles $n_1, n_2, \dots, n_k$"

Def: El conjunto de nivel $c \in \mathbb{R}$ de f es

$$\boxed{N_c(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = c\}}$$

(2) Usando la gráfica de f. "En $\mathbb{R}^{n+1}$ hace el dibujo del conjunto $G(f)$"

Def:

$$\underbrace{G(f)}_{\text{la gráfica de } f} = \{(\underset{\mathbb{R}^n}{\vec{x}}, \overset{\mathbb{R}}{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(\vec{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

(útil para $n \leq 2$)

Ejercicio: Dibuje los conjuntos de niveles $-4, -1, 0, 1, 4$ de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f: \mathbb{R}^{2=n} \longrightarrow \mathbb{R}$

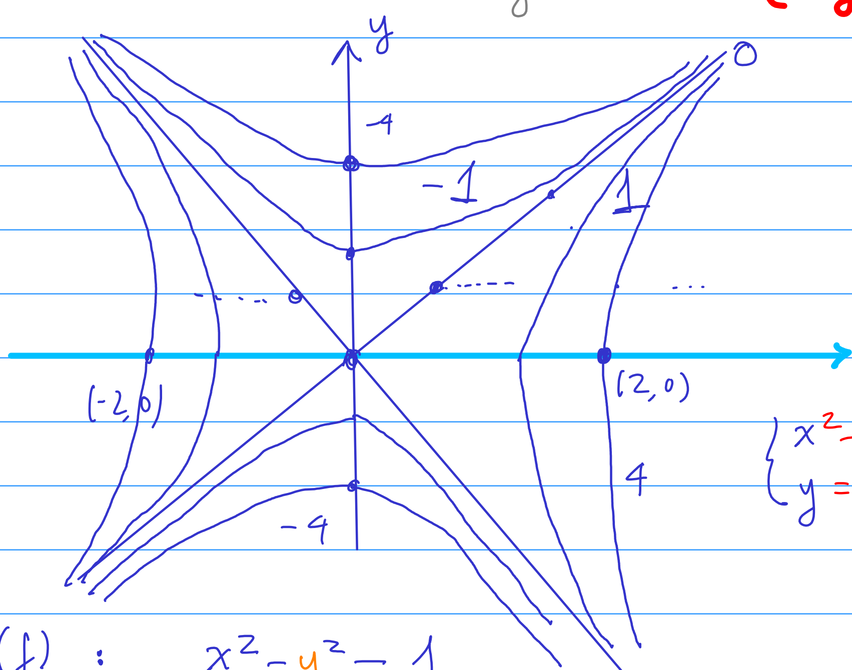
$\vec{x} = (x,y)$

$N_0(f) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : f(\vec{x}) = 0 \}$

$N_0(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0 \}$ $\quad x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - y^2 = 0$

$(x-y)(x+y) = 0$



$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad x = \pm 2$

$N_1(f)$: $x^2 - y^2 = 1$

$N_{-1}(f)$: $x^2 - y^2 = -1 \iff y^2 - x^2 = 1$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es calar en $\mathbb{R}^3$

$\vec{x} = (x, y, z)$

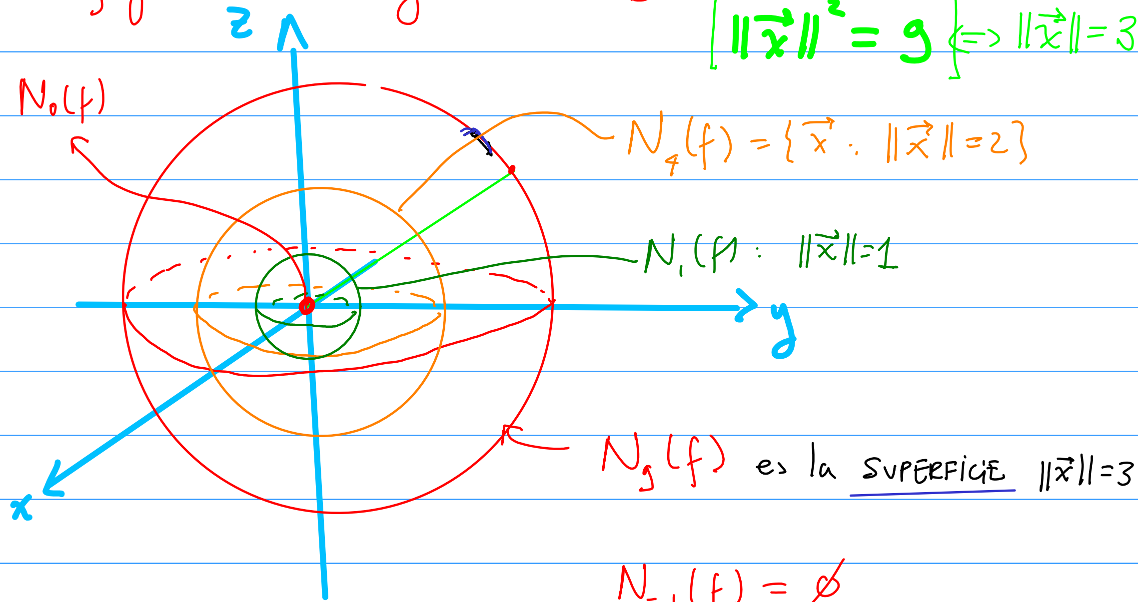
<u>Ejercicio:</u> Sea $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Dibuje los conjuntos de nivel $9, 4, 1, 0, -1$ de g.

$$N_9(g) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : g(\vec{x}) = 9 \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 9 \}$$

$$N_9(g) : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \subseteq \mathbb{R}^3$$

$[\|\vec{x}\|^2 = 9] \Leftrightarrow \|\vec{x}\| = 3$



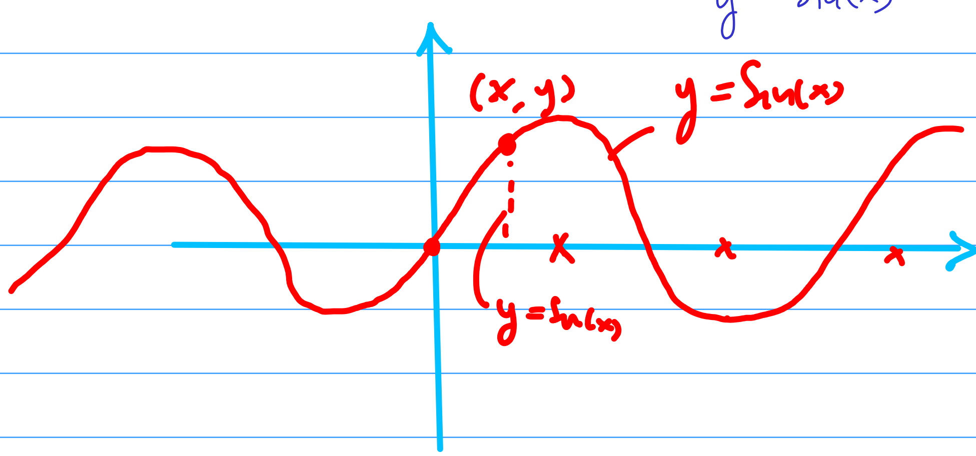
$N_{-1}(f) = \emptyset$

(2) Método de "dibujar la gráfica $G(f)$"

<u>Ejemplo:</u> $h(x) = \sin(x)$ $\quad h : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{G(h)} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2=1+1} : y = h(x) \}$$

$$y = \sin(x)$$



$$\vec{x}=(x,y)$$

$$u:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplo 2: Sea $u(x,y)=x^2+y^2$.

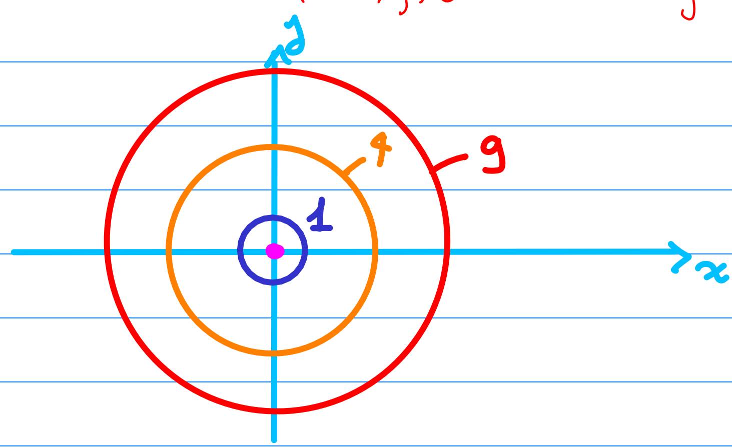
(a) Dibuje los conjunto de nivel 9, 4, 1, 0 de u

(b) Dibuje la gráfica de u.

Sol: $N_9(u) = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : u(\vec{x})=9\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : u(x,y)=9\}$

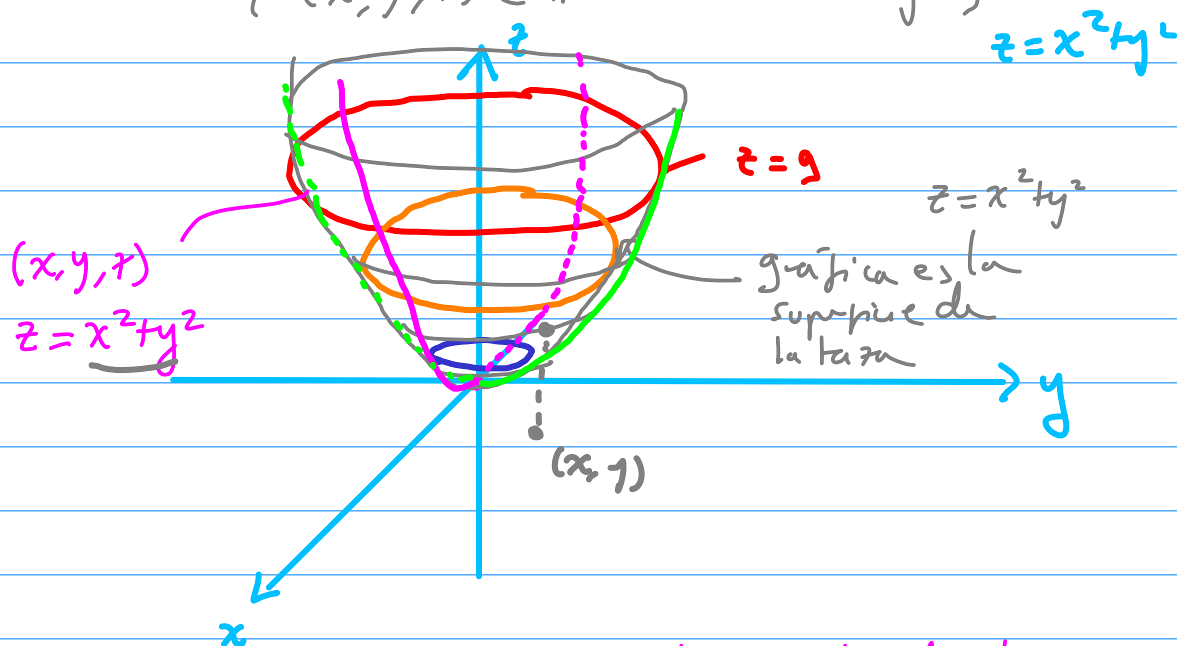
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=9\}$



$$G(u) = \{(\vec{x}, z)\in\mathbb{R}^{3=2+1} : z = u(x,y)\}$$

$$z = x^2+y^2$$

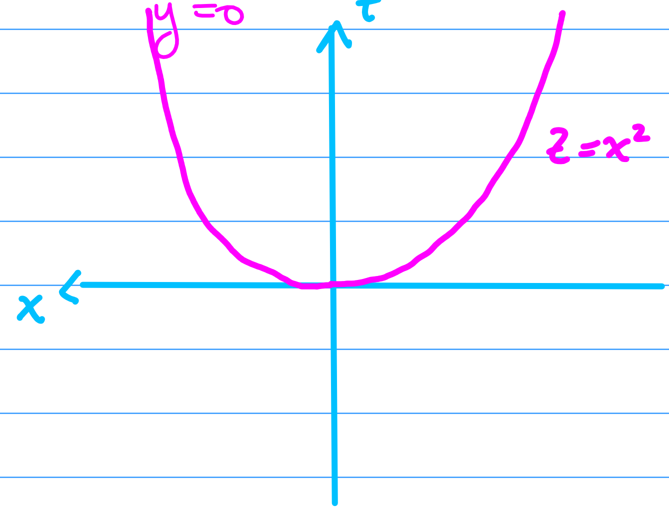
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2\}$$



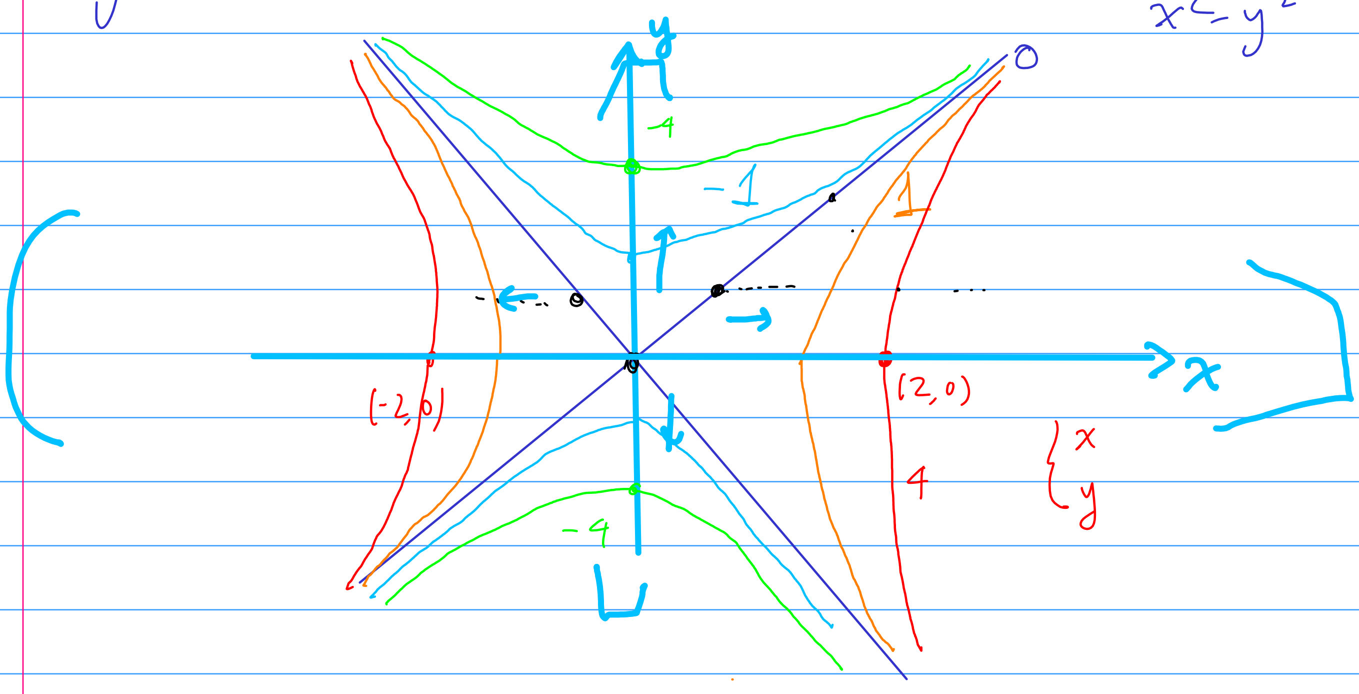
Pregunta: Más precisamente cómo se ve la parte de la gráfica en $y=0$? (i.e. el plano xz)

Buscamos soluciones de las dos ecuaciones al tiempo

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} z = x^2 \\ y = 0 \end{array}$$



Ejercicio: Dibuje la gráfica de $f(x,y) = x^2-y^2$



Paraboloide Hiperbólico

$z = x^2 - y^2$