Hoy: Funciones diferenciables.

Ejercicio "Funciones fáciles" Grafique las siguientes funciones: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

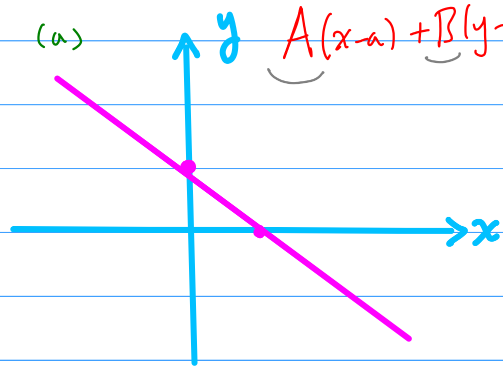
$G_f = \{ (\vec{x}, z) : z = f(\vec{x}) \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

(a) $h(x) = -x + 1$ $ax+b$

(b) $\ell(x,y) = -x - y + 1$ $Ax+By+C$

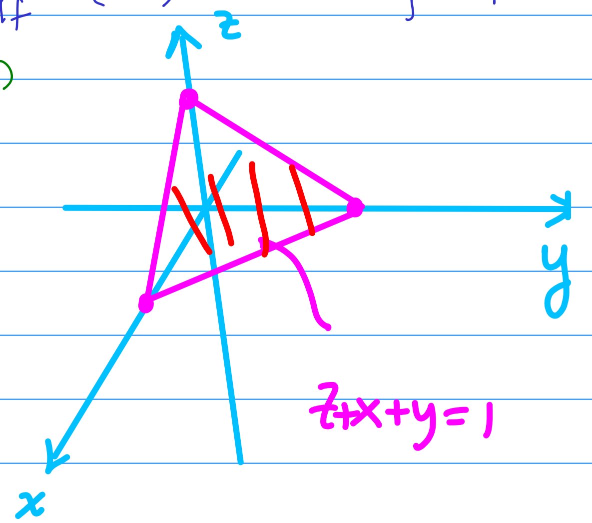
$A(x-a)+B(y-b)+C$

(a)



$y = -x+1$

(b)



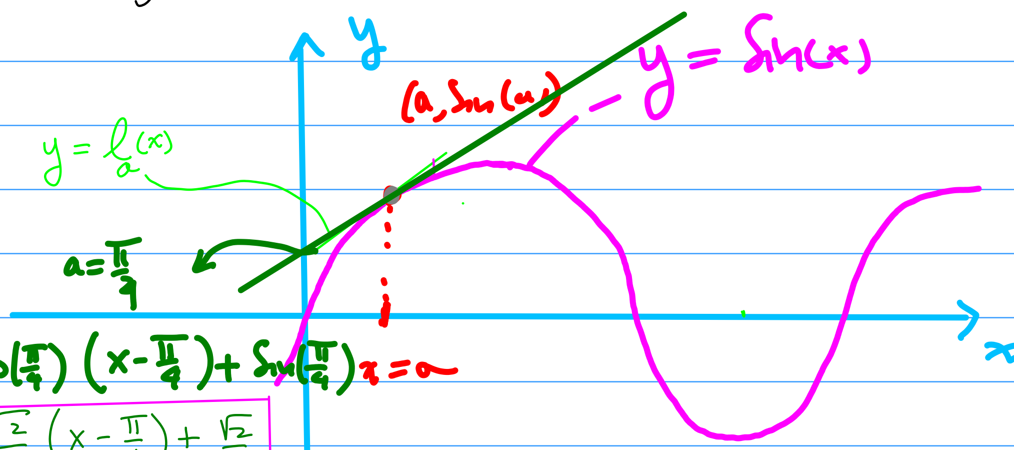
$z = -x-y+1$

$x+y+z=1$

Def: Una función $\ell: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama lineal afín si es de la forma $\ell(x,y) = Ax + By + C$ (su gráfica es un plano)

LA IDEA CENTRAL del cálculo diferencial es que hay muchas funciones (que pueden ser muy complicadas) que cerca de un punto $x=a$ pueden APROXIMARSE muy bien mediante una función lineal afín.

En un dibujo: $h(x) = \sin(x)$



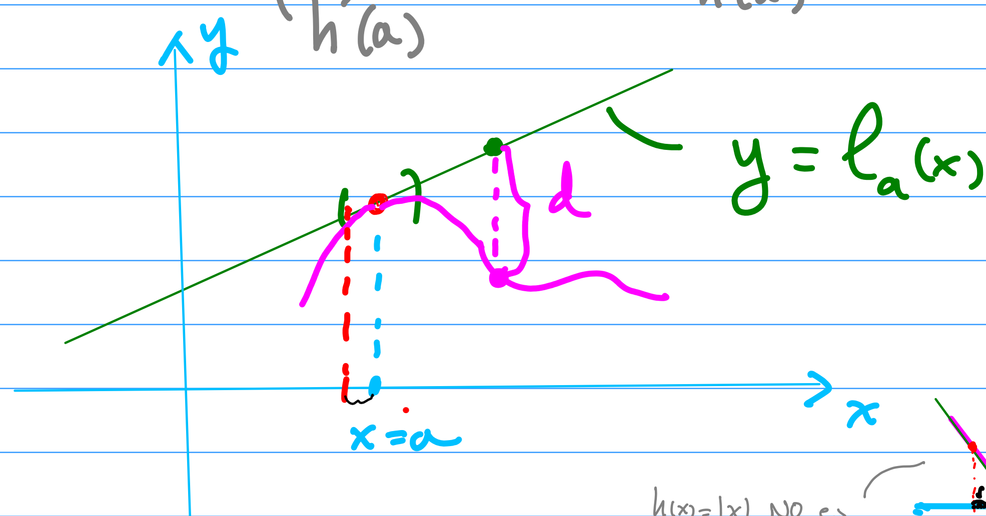
$\ell_a(x) = \cos(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4})$

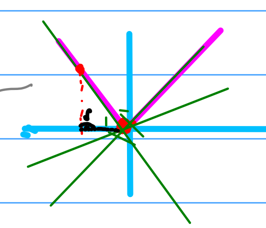
$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Cómo se comporta h cerca de x=a?

Se comporta como $\ell_a(x)$ — Cálculo nos dice cómo encontrar $\ell_a(x)$

$$\ell_a(x) = \underbrace{m}_{h'(a)}(x-a) + \underbrace{b}_{h(a)}$$





h(x) = |x| NO es dif en x = 0

Def: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

h(x) es diferenciable en x = a si existe una función lineal afín $\ell_a(x) = m(x-a) + b$ que aproxima a h(x) MUY BIEN cerca de x = a

$$\left[\lim_{x \to a} \frac{|h(x) - \ell_a(x)|}{|x-a|} = 0\right]$$

Teorema:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} =: h'(a)$$

Si $h(x)$ es diferenciable entonces

Dem:

$$\ell_a(x) = m(x-a) + \underbrace{h(a)}_{b}$$

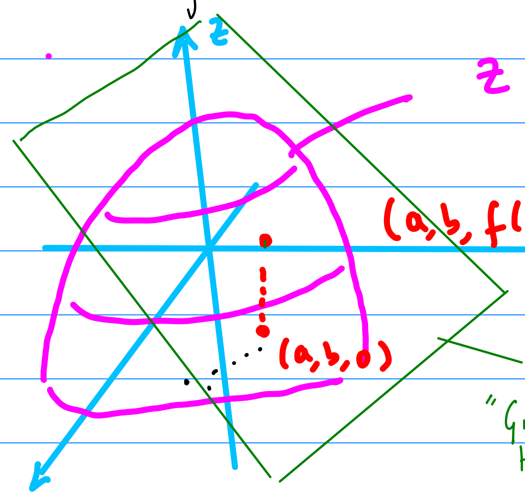
$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - \ell_a(x)}{x-a} = \frac{h(x)-h(a)}{x-a} - \frac{m\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}$$

$$\| \quad 0$$

luego

$$\left[\lim_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a}\right] - m = 0$$

¿Qué sucede si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$?



$z = f(x,y)$

$$\ell_a(x,y) = \overbrace{A(x-a) + B(y-b) + C}^{??}$$

$$C = f(a,b)$$

$z = \ell_a(x,y)$

"Gráfica del plano tangente a la superficie"

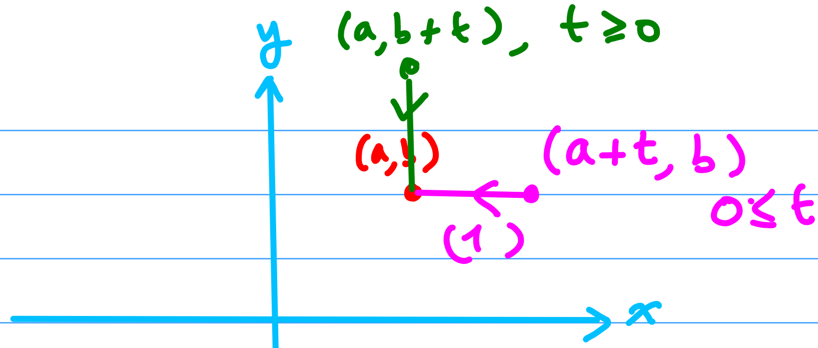
Queremos obtener la mejor aproximación lineal posible para $f(x,y)$ cerca de (a,b).

Def: $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) si existe una función lineal afín

$$\ell_{(a,b)}(x,y) = A(x-a) + B(y-b) + f(a,b)$$

que aproxime MUY BIEN a $f(x,y)$ cerca de (a,b)

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{|f(x,y) - \ell_{(a,b)}(x,y)|}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$$



$$\ell_{(a,b)}(x,y) = A(x-a) + B(y-b) + f(a,b)$$

En trayectoria (1)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\left|f(a+t,b) - [A(a+t-a) + f(a,b)]\right|}{\|(a+t,b)-(a,b)\|} = 0$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left|f(a+t,b) - [A\cdot t + f(a,b)]\right|}{\|(t,0)\|}$$

Si $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$h'(a) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{h(a+t)-h(a)}{t}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} - A = 0$$

$$\boxed{A = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}}$$

De la curva verde obtenemos

$$\boxed{B = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}}$$

Esto nos lleva al concepto de derivada parcial.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t, b) - f(a,b)}{t}$$

Def: Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}_{\text{Derivada parcial de } f \text{ contra } x} = \text{" (1) Derivamos contra la variable } x \text{ dejando constantes todas las demás}$$

(2) Evaluamos $x=a$, $y=b$ "

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) =$ " (1) Derivamos contra la variable y dejando constantes todas las demás

(2) Evaluamos $x=a$ $y=b$ "

" " contra y

Teorema: Si $f(x,y)$ es una función diferenciable en (a,b) entonces la mejor aproximación lineal para $f(x,y)$ cerca de (a,b) es

$$\ell_{(a,b)}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}_{A}(x-a) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{B}(y-b) + f(a,b)$$

Ejercicio: Sea $f(x,y) = 100 - 2x^2 - xy - 3y^2$.

(a) Encuentre TODAS las derivadas parciales de f en $(1,3)$.

(b) Encuentre la mejor aproximación lineal a f cerca de $(1,3)$

(c) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(1,3,f(1,3))$.

Sol (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) \overset{?}{=}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) \overset{?}{=}$

(i) $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 6y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = -4\cdot1 - 3 = -7 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -1 - 18 = -19$

$f(1,3) = 100 - 2 - 3 - 27 = 68$

(b)_(c) próxima clase ...