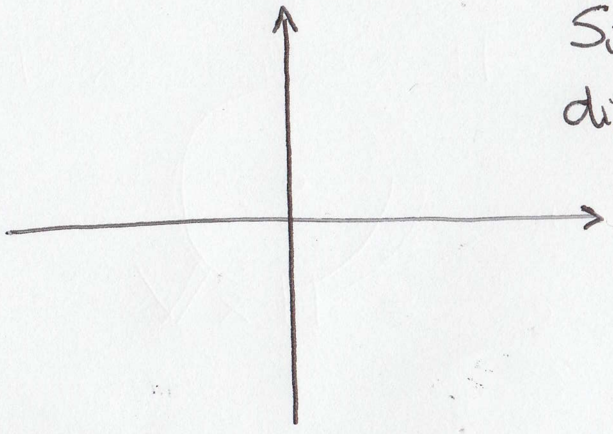
Teorema [Green]:

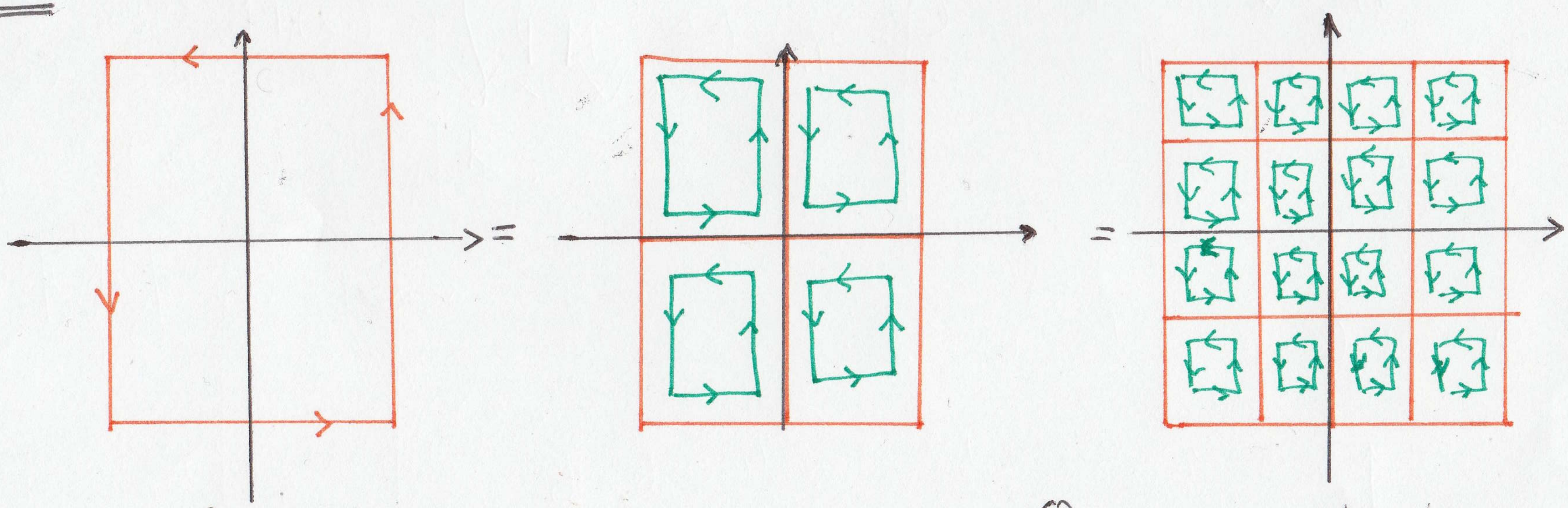
Sea D una región sólida en el plano y sea C su curva de frontera positivamente orientada. Si $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial diferenciable en D entonces



$$\boxed{\int_C H\, d\vec{s} = \iint_D [\nabla \times H]\, dA}$$

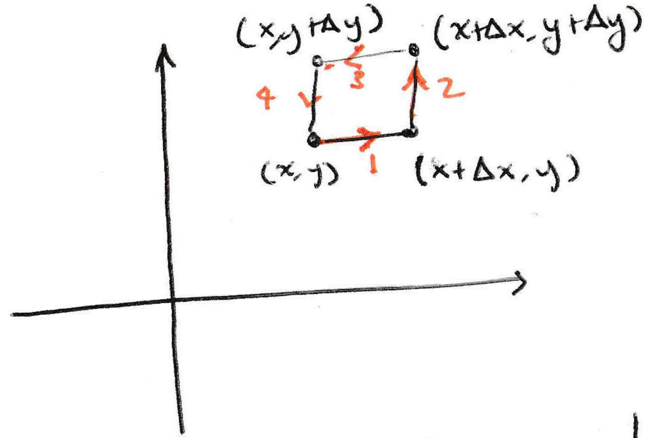
¿Qué es el rotacional?

Idea:



$\int_\sigma$

¿Qué pasa en rectángulos muy muy pequeños?



$$H(x,y) = \left(P(x,y),\ Q(x,y)\right)$$

Parametrizando calculamos la integral de linea alrededor del rectángulo

$$\int_0^{\Delta x} P(x+t, y)\, dt$$

$$- \int_0^{\Delta x} P(x+t, y+h)\, dt$$

$$\int_0^{\Delta x} \boxed{P(x+t,y) - P(x+t, y+h)} \approx -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, \Delta y\, \Delta x$$

$$\int_0^{\Delta y} Q(x+\Delta x, y+t)\, dt$$

$$- \int_0^{\Delta y} Q(x, y+t)$$

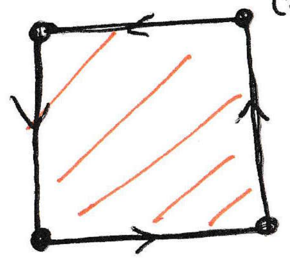
$$\int_0^{\Delta y} \boxed{Q(x+\Delta x, y+t) - Q(x, y+t)}\, dt \approx \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\, \Delta x\, \Delta y$$

$$= \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

← Teo Green!

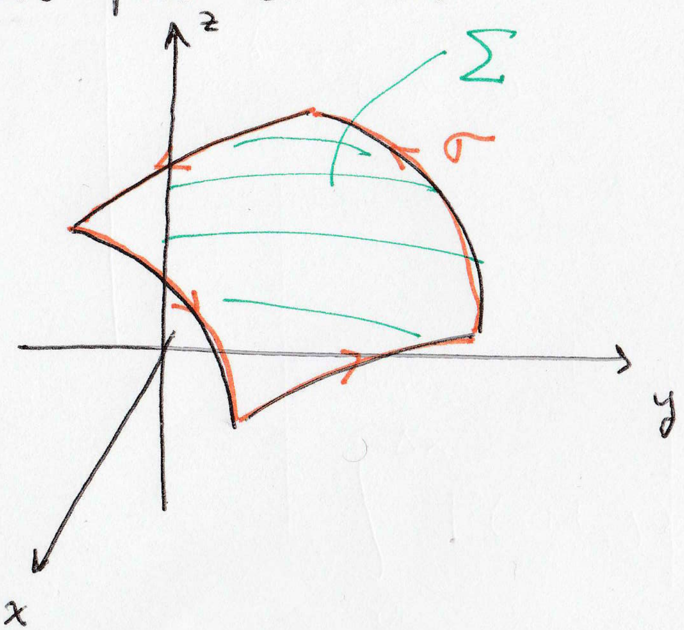
De acá concluimos que

$$\operatorname{rot}(H)(x,y) = \frac{\text{Trabajo alrededor de un rectángulo \underline{pequeño}}}{\Delta x \Delta y}$$

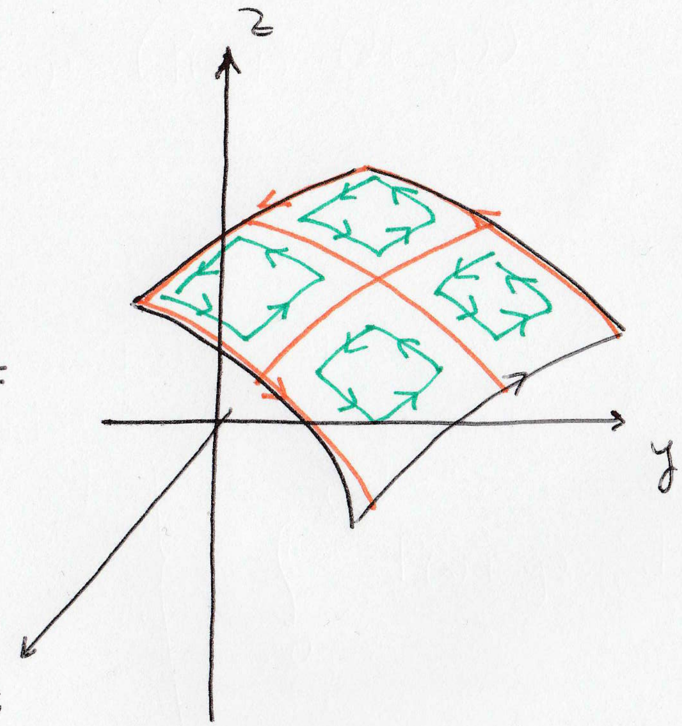


"Qué tanto gira el campo vectorial cerca de (x,y)"

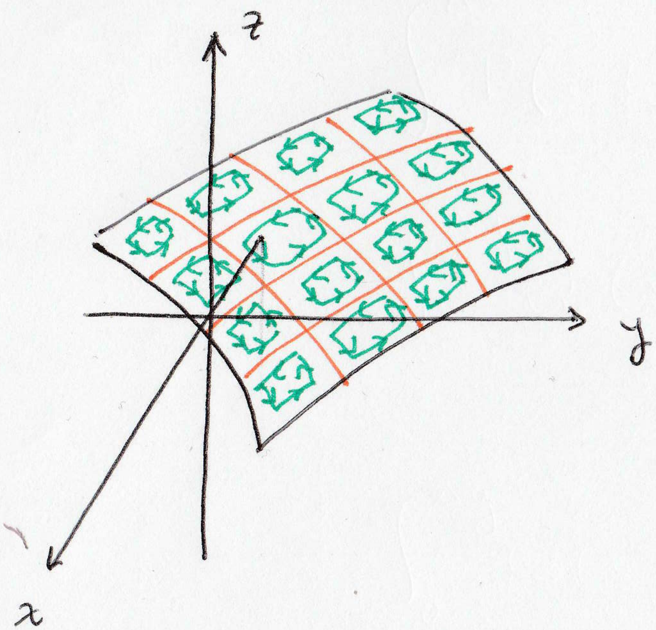
Qué pasa en 3D?



=



=



$$\int_{\sigma} H \, ds = \iint_{\Sigma} \overbrace{\text{Algo}(H)}^{\text{Qué pasa en el límite?}} \, d\vec{S}$$

Def: Sea $H: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial el rotacional de H, $\mathrm{rot}(H)$ ó $\nabla \times H$ está dado por

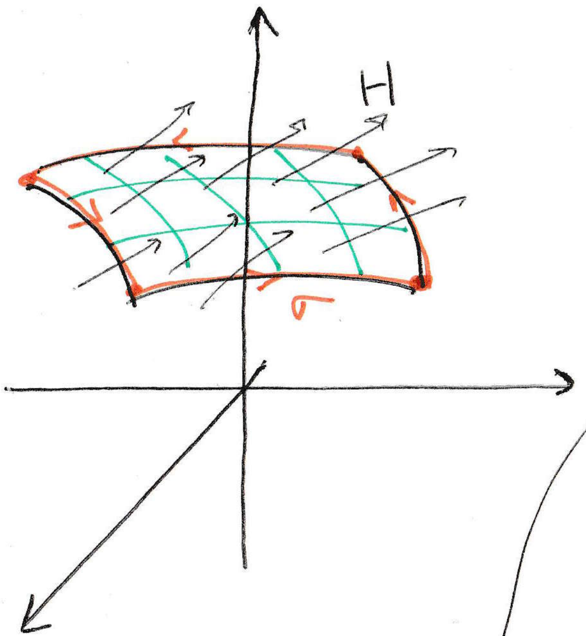
$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = \underbrace{i\left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z}\right) - j(\quad) + k(\quad)}_{\nabla \times H \text{ es OTRO CAMPO VECTORIAL}}$$

Ejercicio: (a) $H(x,y,z) = (x^2, xy, z+x)$. Calcule $\nabla \times H =$

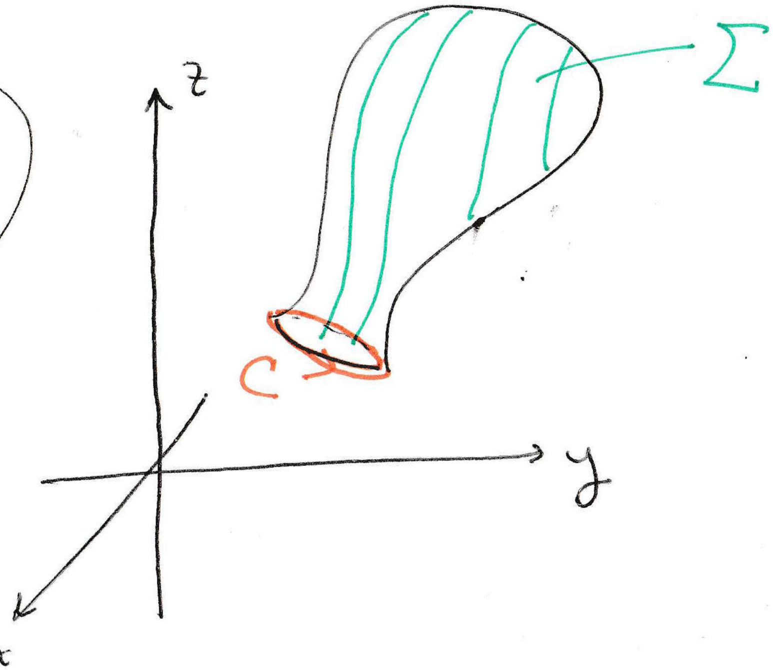
(b) Cuánto da $\nabla \times \nabla u$ si $u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar diferenciable cualquiera? [Sugerencia: $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$, calcule $\nabla \times \nabla u =$]

Teorema (Stokes):

Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y sea C su curva de frontera. Si $H:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable en Σ entonces, si las orientaciones de C y Σ son compatibles



tenemos



$$\boxed{\int_C H\, d\vec{s} = \iint_\Sigma [\nabla \times H]\, d\vec{S}}$$