Hoy:
- Teorema de Green (2D) (y de Stokes (3D))
- Teorema de Gauss (3D)

Def: Si $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ definimos el rotacional de F

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Ejemplo: $F(x,y) = (-y^2, x)$

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y^2 & x \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} = \underbrace{1 + 2y}_{\text{función escalar}}$$

Explicación: Si construimos $(P(x,y), Q(x,y), 0) = G(x,y,z)$

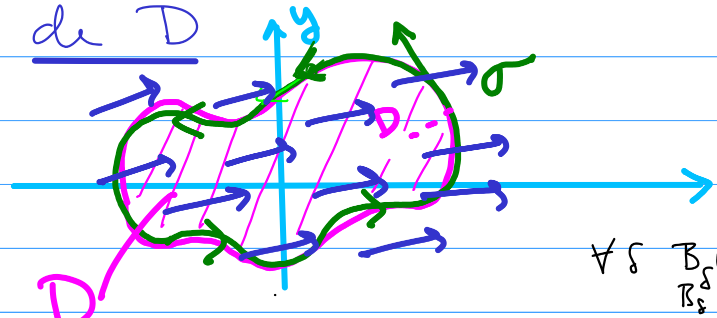
$$\nabla \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = i(0) - j(\ ) + k\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Teorema [Green]

Sea D una región sólida en $\mathbb{R}^2$

$(\#)_1$
- sea σ la curva de frontera de D orientada positivamente y
- sea $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ diferenciable en todos los puntos de D

D a la izquierda



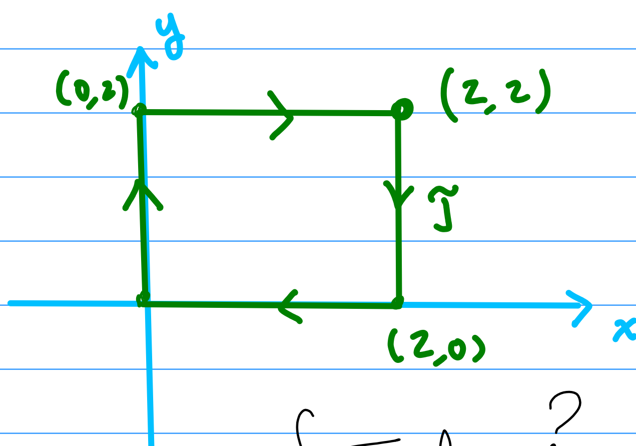
$\forall \delta \quad B_\delta(x^*) \cap D \neq \emptyset$ y $B_\delta(x^*) \cap D^c \neq \emptyset$

$$\underbrace{\int_{\sigma} F\, d\vec{s}}_{\substack{\text{trabajo realizado}\\ \text{por F a lo largo}\\ \text{de la curva de frontera}}} = \underbrace{\iint_{D} (\nabla \times F)\, dA}_{\substack{\text{integral doble de}\\ \text{un objeto "más simple"}}}$$

Obs: (1) Típicamente nos dan F y σ y nosotros construimos la región D (lo que está encerrado por σ) y calculamos $\nabla \times F$ para poder hacer el cálculo.

(2) Esto generaliza el "trabajo sobre curvas cerradas" de campos conservativos (donde siempre es cero) a campos generales (donde el resultado es).

Ejemplo: Sea $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ y γ

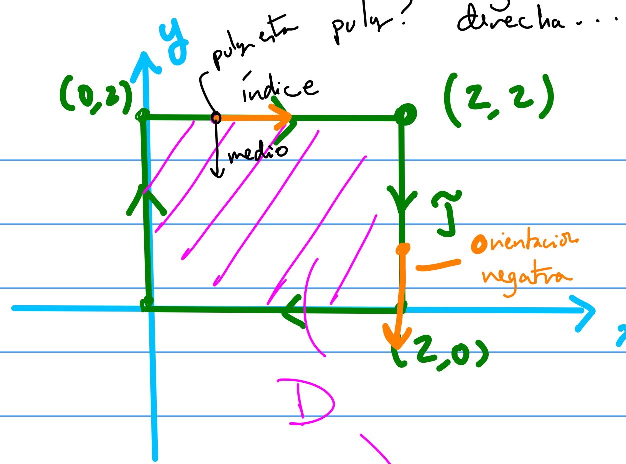


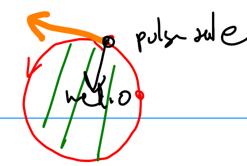
Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} F\, d\vec{s} \overset{?}{=}$

Campo no conservativo $\leftarrow$ $\overset{0}{\neq}$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 2y - (-2y) = \underline{4y}$$

Regla de la mano derecha...





Definimos D así: $0 \le x \le 2$
$0 \le y \le 2$

y usamos el Teorema de Green

$$\int_{-\tilde{J}} F \, d\vec{s} = \left[\iint_D \underbrace{4y}_{\nabla \times F} \, dA \right]$$

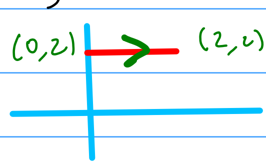
queremos revertir la orientación para poder usar green

$$= \int_0^2 \int_0^2 4y \quad dx\,dy =$$

$$\int_0^2 4y \cdot 2 \, dy = 8 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ Nm}$$

así que $\displaystyle\int_{\tilde{J}} F \, d\vec{s} = -16$ Nm.

Obs: Otra solución se podría obtener parametrizando los 4 segmentos de recta integrando cada uno y sumando los resultados ← más difícil...

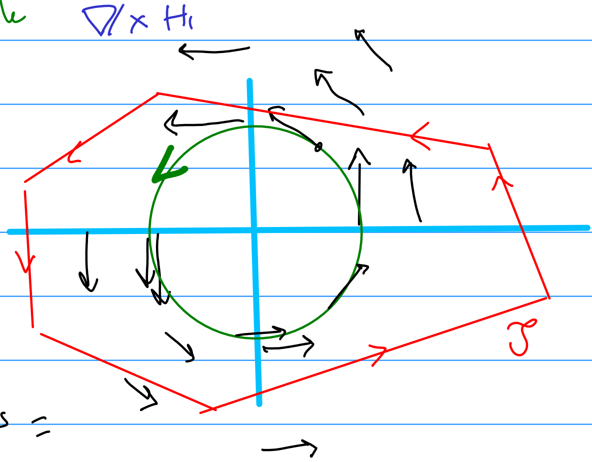


$$\sigma(t) = (0,2) + t\big((2,0) - (0,2)\big)$$
$$= (2t, 2-2t) = (x(t), y(t))$$

Ejemplo: $H(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2} , \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$

(a) Calcule el trabajo realizado por H al dar una vuelta alrededor del círculo unitario con centro en $(0,0)$ con orientación positiva ✓ PARAMETRIZANDO.

(b) Calcule $\nabla \times H$



(c) $\displaystyle\int_\gamma F\, ds =$

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_\sigma F\, ds = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) = \left(\frac{-\sin(t)}{1} , \frac{\cos(t)}{1} \right)$$

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = \boxed{2\pi}$$

$H(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2} , \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$

(b) $\operatorname{rot}(H) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ -y(x^2+y^2)^{-1} & x(x^2+y^2)^{-1} \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x(x^2+y^2)^{-1}\right] = (x^2+y^2)^{-1} + x\left[-(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[-y(x^2+y^2)^{-1}\right] = -\left[(x^2+y^2)^{-1} - y\left[-(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y\right]\right]$$

$$\operatorname{rot}(H) = 2(x^2+y^2)^{-1} - (x^2+y^2)^{-2}\left[2x^2+2y^2\right]$$

$$= 2(x^2+y^2)^{-1} - 2(x^2+y^2)^{-1} = 0$$

? Sí $(x,y) \neq (0,0)$

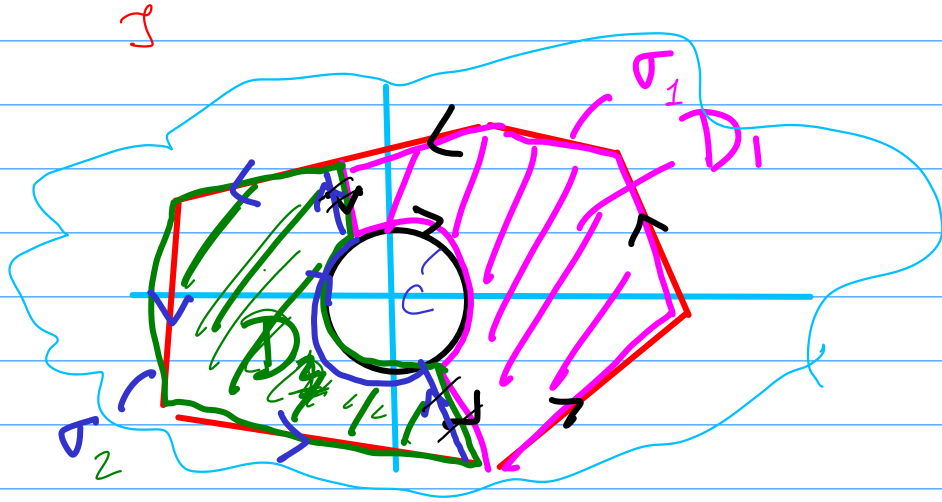
ALERTA: No podemos usar green porque H no es diferenciable en $(0,0) \in D$.

$$\int_\sigma H\, ds = 2\pi$$

$$\neq$$

$$\iint_D \nabla \times H \, dA = 0$$

(c) $$\int_{J} F\, d\vec{s} = 2\pi$$



$$\int_{\Gamma_1} F\,d\vec{s} + \int_{\Gamma_2} F\,d\vec{s} = \int_{J} F\,d\vec{s} - \int_{C} F\,d\vec{s} = 0$$

$$\underbrace{\int_{\Gamma_1} F\,d\vec{s}}_{\parallel} \qquad \int_{\Gamma_2} F\,d\vec{s} \; \parallel$$

$$\iint_{D_1} \nabla \times F\,d\vec{s} + \iint_{D_2} \nabla \times F\,dA$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$0 \qquad 0$$

si Green porque F es diferenciable en D_2

porque D_2 no contiene al $\vec{0}$