Hoy: Teorema Fundamental del cálculo para integrales de línea

C — curva en $\mathbb{R}^3$ orientada desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$

F — campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ $\quad F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\left[\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt \right]$$

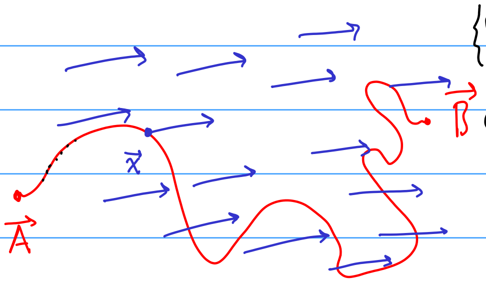
Integral de línea de F a lo largo de C
"
Trabajo realizado por F a lo largo de C

(1) Construye una parametrización de C

$\sigma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{cases} \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$

(2) Calcula ...



Hecho: Para algunos campos vectoriales, los llamados campos [CONSERVATIVOS] es posible calcular integrales de línea SIN PARAMETRIZAR. Este tipo de campos aparecen en todas partes, especialmente en física (campo gravitacional y el campo eléctrico son conservativos)

Plan de hoy:

(1) Qué es un campo conservativo? } $*$ TFCIL

(2) Qué propiedades tiene?

(3) Cómo saber si un campo dado F es conservativo?

Def: Un campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es CONSERVATIVO si existe una función diferenciable $U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$\left[\nabla U(x,y,z) = F(x,y,z) \right] \quad \text{para todo } (x,y,z)$$

En ese caso la función escalar $U(x,y,z)$ se llama un POTENCIAL para F

Ejemplo: $\left[U(x,y,z) = x^2 \sin(y) z\right]$ $\quad U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla U(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \sin(y) z \\ x^2 \cos(y) z \\ x^2 \sin(y) \end{pmatrix}$$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

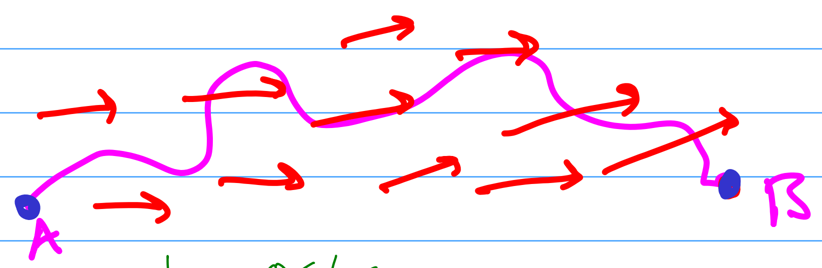
$$\boxed{F(x,y,z) = \left(2x \sin(y) z,\ x^2 \cos(y) z,\ x^2 \sin(y)\right)}$$

Así que el campo vectorial es conservativo y un potencial para F es $U(x,y,z) = x^2 \sin(y) z$.

Teorema [Fundamental del cálculo para integrales de línea]

Suponga que el campo vectorial $F(x,y,z)$ es CONSERVATIVO y que $U(x,y,z)$ es un potencial para F. Entonces para cualquier curva C desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$ tenemos

$$\boxed{\int_C F \, d\vec{s} = U(\vec{B}) - U(\vec{A})}$$



Ejercicio: Sea $\left\{ \sigma(t) = \left(\cos(t) + t^2,\ e^t,\ e^{-t}\right) \right.$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

y sea $F(x,y,z) = \left(2x \sin(y) z,\ x^2 \cos(y) z,\ x^2 \sin(y)\right)$

Calcule

$$\int F \, d\vec{s} =$$

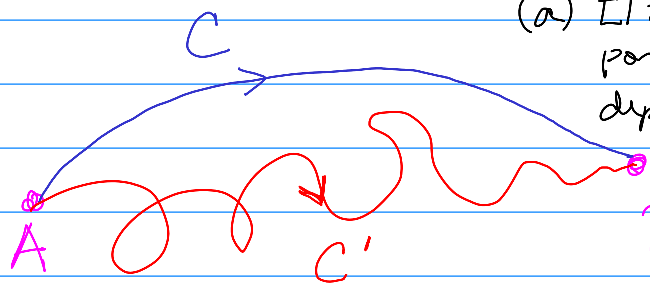
$\sigma(0) = \vec{A}(1, 1, 1)$, $\quad \sigma(1) = \vec{B} = \left(\cos(1) + 1,\ e,\ e^{-1}\right)$

Sabemos que F es conservativo y que tiene potencial $U(x,y,z) = x^2 \sin(y) z$ así que por TFCIL tenemos

$$\int_C F\, ds = U\left(\cos(1)+1, e, e^{-1}\right) - U(1,1,1)$$

$$= \boxed{(\cos(1)+1)^2 \sin(e)\, e^{-1} - 1^2 \sin(1)\cdot 1}$$

(2) SI F ES UN CAMPO CONSERVATIVO:

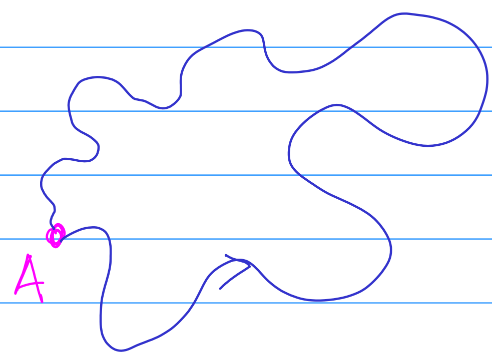


(a) El trabajo realizado por un campo conservativo depende sólo del inicio y del final pero no de la trayectoria que los une.

$$\int_C F\, ds = \int_{C'} F\, ds = U(B) - U(A)$$

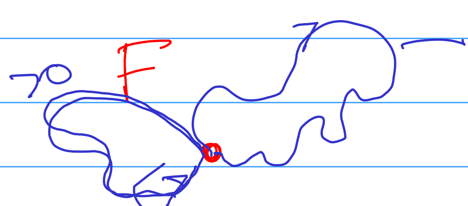
$U(B) - U(A)$

(b) En un campo conservativo el trabajo a lo largo de cualquier trayectoria CERRADA es cero.



$$\int_C F\, ds = \underbrace{U(A) - U(A)}_{= 0}$$

Consecuencia: Por qué las leyes de la naturaleza se expresan típicamente mediante campos conservativos?



trabajo > 0 = Energía

(3) Cómo saber si un campo dado $F(x,y,z)$ es conservativo?

Def: Si $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z))$
definimos el <u>rotacional de $F(x,y,z)$</u> así:

$$\begin{array}{c} \\ \nabla \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) i - j\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}_{\underbrace{\nabla}_{\text{"nabla"}} \times F}$$

Propiedades:
(1) $\nabla \times F$ es otro campo vectorial
(2) Es fácil de calcular (derivadas) y generalmente es "más simple" que F.

Ej: $\left[F(x,y,z) = (-y,\ x^2,\ z)\right]$
Calcule $\nabla \times F = ?$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x^2 & z \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x^2}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial (x^2)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)$$

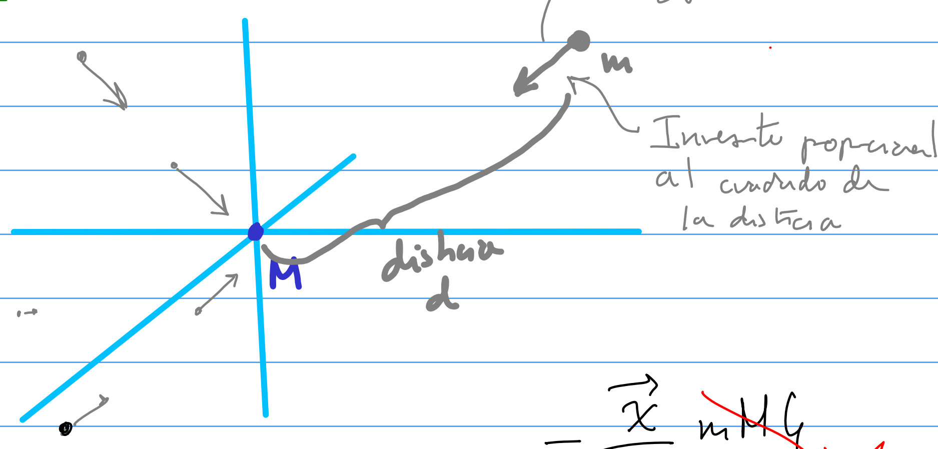
$$\nabla \times F = (0,\ 0,\ 2x+1) \neq (0,0,0)$$

Lema: Sea $F(x,y,z)$ un campo vectorial. (ver ejemplo anterior)

(1) Si $\nabla \times F \neq \vec{0}$ entonces F NO ES CONSERVATIVO.

(2) Si $\nabla \times F = \vec{0}$ entonces
- → en una región sin huecos F ES CONSERVATIVO
- → en general NO SABEMOS.

Ejemplo: Campo gravitacional. $\frac{1}{d^2} \cdot K$



$\vec{x} = (x,y,z)$

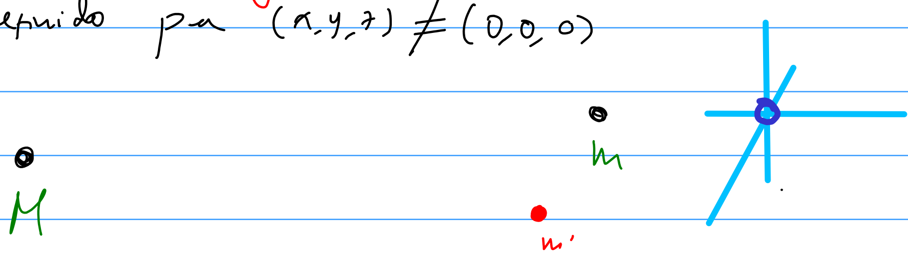
$$-\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\cancel{mMG} \to 1$$

$$\boxed{F(x,y,z) = \frac{mMG}{\|(x,y,z)\|^2}\left[-\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}\right]}$$

Ley de Gravitación universal

Ley de Coulomb

F está definido para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$



Obs: $F(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$

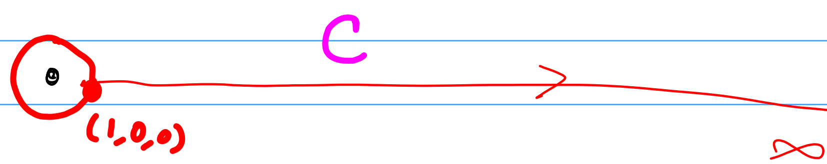
el campo gravitacional es conservativo y tiene potencial $\left[U(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\right]$

Dem:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla U = \left(-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cancel{2}x,\ -\frac{1}{2}(\quad)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y,\ -\frac{1}{2}(\quad)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2z\right)$$

$$= \left(-\frac{x}{\|(x,y,z)\|^3},\ -\frac{y}{\|\vec{x}\|^3},\ \frac{-z}{\|\vec{x}\|^3}\right) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$



$$\int_C F\,ds = \underbrace{U(\infty)}_{0} - U(1,0,0)$$

$$= \boxed{-1}$$ ← hasta