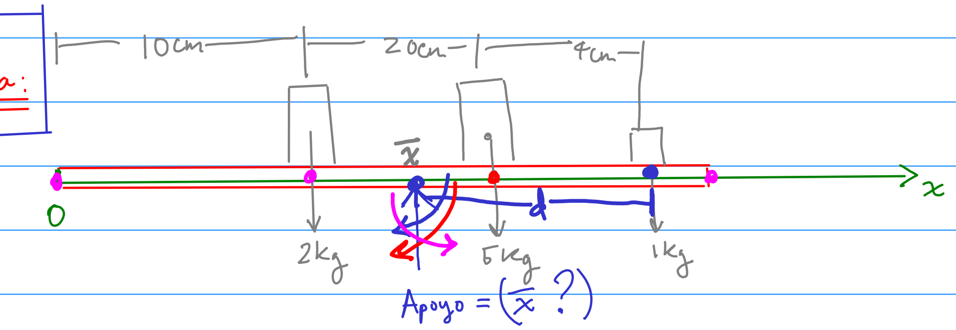
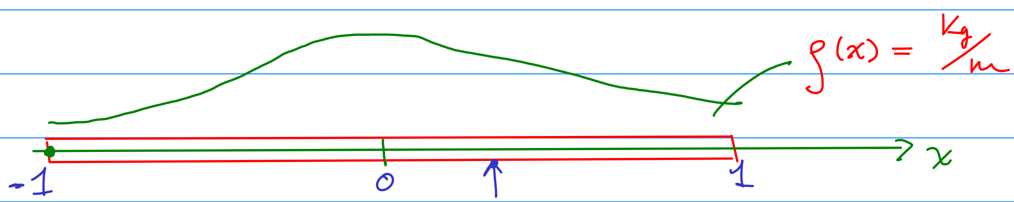
Hoy: Aplicaciones de integración en física y probabilidad.

Problema:



(a) En qué lugar deberíamos poner el apoyo para que la barra quede perfectamente balanceada?

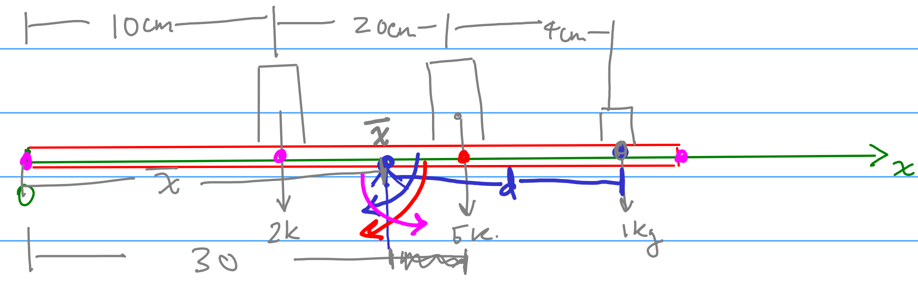
(b)



Misma pregunta pero la densidad depende continuamente de x

$$\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Solución: Para que la barra esté en equilibrio necesitamos que el torque total alrededor de $\bar{x}$ sea 0.



$$(34-\bar{x})\cdot 1 + (30-\bar{x})\cdot 5 + (10-\bar{x})\cdot 2 = 0$$

$$(34\cdot 1 + 30\cdot 5 + 10\cdot 2) - (1+5+2)\,\bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{\overset{\text{distancia}}{34}\ \overset{\text{masa}}{1} + 30\cdot 5 + 10\cdot 2}{\underset{\text{masa}}{1} + 5 + 2} = \left[\frac{\text{"}\sum \text{masa}_i \cdot d_i}{\sum \text{masa}_i} \right]$$

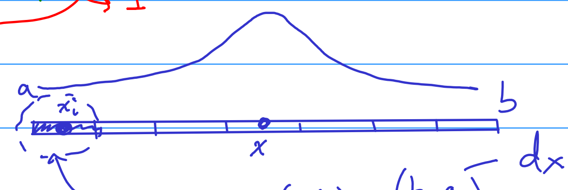
		1	2	F
Pesos	:	p_1	p_2	p_3
E	:	4.5	4.6	5.0

$p_1+p_2+p_3=1$

Ejemplo:

$$\bar{x} = \frac{4.5\,p_1 + 4.6\,p_2 + 5.0\,p_3}{p_1+p_2+p_3 \to 1}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \underline{\text{masa}_i} \cdot \underline{\text{distancia}_i}}{\sum_{i=1}^{N} \text{masa}_i}$$



$$\text{masa}_i = \underbrace{\rho(x_i)}_{\text{densidad}} \cdot \underbrace{\left(\frac{b-a}{N}\right)}_{\text{longitud}}$$

$\downarrow N \to \infty$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_a^b \rho(x)\,x\,dx}{\underbrace{\left(\int_a^b \rho(x)\,dx\right)}_{\text{masa total}}}}$$

Ej: $$\frac{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,x\,dx}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx} = 0$$ impar.

Def: Una "dist de probabilidad" es una función $\rho(x)$ que cumple:

(1) $\rho(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1$

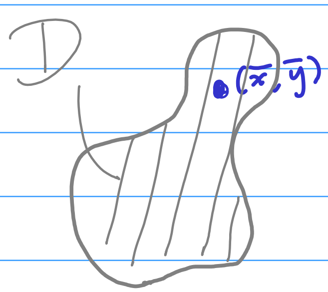
$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

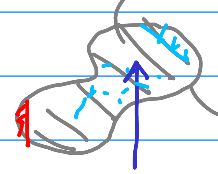
Calcula probabilidades!!

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\rho(x)\,dx = \mathbb{E}[X]$$

centro de masa
calcula valores esperados.

¿Qué pasa en dimensiones 2 ó 3?





$\rho(x,y) =$ "densidad superficial del material de (x,y)" kg/m^2

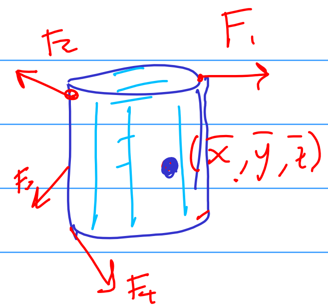
(lámina) Placa plana en 3D

¿Dónde debo poner un apoyo $(\bar{x},\bar{y})$ para que quede perfectamente balanceada?

Def: Las coordenadas cartesianas del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dA}{\underbrace{\left(\iint_D \rho(x,y)\,dA\right)}_{\text{masa total}}} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dA}{\left(\iint_D \rho(x,y)\,dA\right)}$$

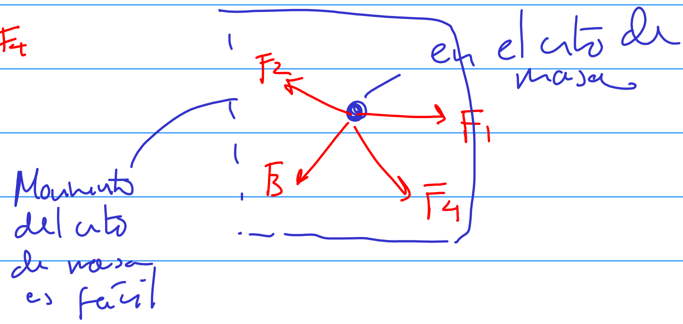
De la misma manera, si E es una región sólida con densidad $\rho(x,y,z)$ en Kg/m^3 definimos el cto de masa $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$



Traslacional — FÁCIL

y

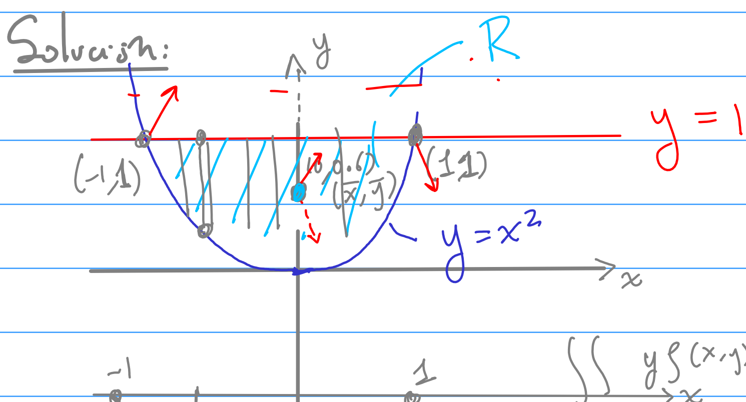
Rotacional — complicado



Ejercicio: (a) Encuentre el cto de masa de la placa R limitada por $y=x^2$ y $y=1$ con densidad constante.

(b) $\boxed{\text{(V ó F)}}$ Sin importar la función de densidad el centro de masa de R SIEMPRE está en el eje y porque R es simétrica respecto a este.

Solución:



$\rho(x,y) = K$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sabemos que

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\,\rho(x,y)\,dA}{\iint_R \rho(x,y)\,dA}$$

$\bar{x} = 0$ por simetría y $\rho(x,y) = K$

$$M = \iint_R K\,dA = K\iint_R 1\,dA = \left[K\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} 1\,dy\,dx\right]$$

$$= K\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = K\left(2-\int_{-1}^{1}x^2\,dx\right)$$

✓

$$= K\left(2-\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$$

$$\boxed{M = K\,\frac{4}{3}}$$ ✓

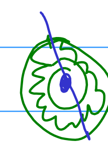
$$2-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\iint_R y\,\rho(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y\,K\,dy\,dx =$$

$$= K\int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=1} dx = K\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$= K\left(1-\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2}\right) = K\left(1-\frac{x^5}{10}\Big|_{x=-1}^{x=1}\right)$$

$$= K\left(1-\frac{2}{10}\right) = \left[K\left(\frac{8}{10}\right)\right]$$



$$\bar{y} = \frac{\cancel{K}\left(\frac{8}{10}\right)}{\cancel{K}\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0.6$$

(b) FALSO: Haga la mitad derecha de metal y la izq de icopor

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0.1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$\iint_R x\,\rho(x,y)\,dA > 0$ así que $\bar{x} \neq 0$

Si la densidad es simétrica respecto a x

$\rho(x,y) = \rho(-x,y)$ entonces

$$\iint_R x\,\rho(x,y)\,dA = 0$$

porque función es impar en x y R es simétrica