Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ________________

1. (**10 pts**) Un láser se dispara desde el origen en dirección $(1, 2, 3)$ hacia la superficie S dada por

$$S = \{(x, y, z) : 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 92\}$$

   a) (**3 pts**) Encuentre una parametrización de la trayectoria rectilínea seguida por el láser.

   b) (**2 pts**) Encuentre el punto $\vec{b}$ en el que el láser golpea a S.

   c) (**3 pts**) Encuentre la ecuación del plano tangente a S en $\vec{b}$.

   d) (**2 pts**) Encuentre el ángulo entre el láser y el vector normal al plano tangente a S en $\vec{b}$ que apunta hacia el origen (puede dejar su respuesta indicada como el arccos de un número).

   (10 puntos)

2. (**15 pts**) La región $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ esta dada por

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 3y^2 \leq 6\}.$$

La temperatura de un punto (x, y) de S esta dada por $T(x, y) = xy - y$ (en grados centígrados).

a) (**2 pts**) Dibuje la región $Q \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) (**10 pts**) Encuentre los puntos de Q en los que la temperatura alcanza su máximo.

c) (**3 pts**) Encuentre el valor máximo de la temperatura en Q.

(15 puntos)

3. **(10 pts)** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función escalar con segundas derivadas parciales continuas y sea $\vec{a}$ un punto en $\mathbb{R}^3$.

   a) **(3 pts)** Defina *formalmente* la expresión: "La función $f(\vec{x})$ es continua en el punto $\vec{a}$".

   b) **(3 pts)** Escriba una fórmula para el polinomio cuadrático $Q(\vec{x})$ que mejor aproxima a la función $f(\vec{x})$ cerca de $\vec{a}$.

   c) **(4 pts)** Cuáles son las dos propiedades principales que tiene el vector $\nabla f(\vec{a})$ si asumimos que este vector no es el vector cero?

   (10 puntos)

4. (**15 pts**) En los siguientes ejercicios marque V si el enunciado es Verdadero y F si el enunciado es falso. No es necesario escribir la justificación de su respuesta. ESCRIBA SUS RESPUESTAS EN LA TABLA QUE APARECE A CONTINUACION.

a	
b	
c	
d	
e	

a) (**3 pts**) Sea $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. La dirección de máximo crecimiento para f en $(1,1)$ es $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

b) (**3 pts**) Sabemos que la función diferenciable $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ satisface $c(0) = (1,1)$ y $c'(0) = (1,-4)$ y que la función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface $\nabla g(1,1) = (-2,4)$. Entonces la función $g(t) = h(c(t))$ tiene derivada negativa en $t = 0$.

c) (**3 pts**) La mejor aproximación lineal de $h(x,y) = \sin(3x + 4y + x^2)$ cerca de $x = 0$, $y = 0$ es la función $L(x,y) = 3x + 4y$.

d) (**3 pts**) La trayectoria de una partícula esta dada por la función $\sigma(t) = (cos(t), \sin(t), t^2)$. La distancia recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2\pi$ es mayor que 6 unidades.

e) (**3 pts**) Existe un valor del número real c para el cual la función $h(x,y)$ definida abajo es continua

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ c, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(15 puntos)