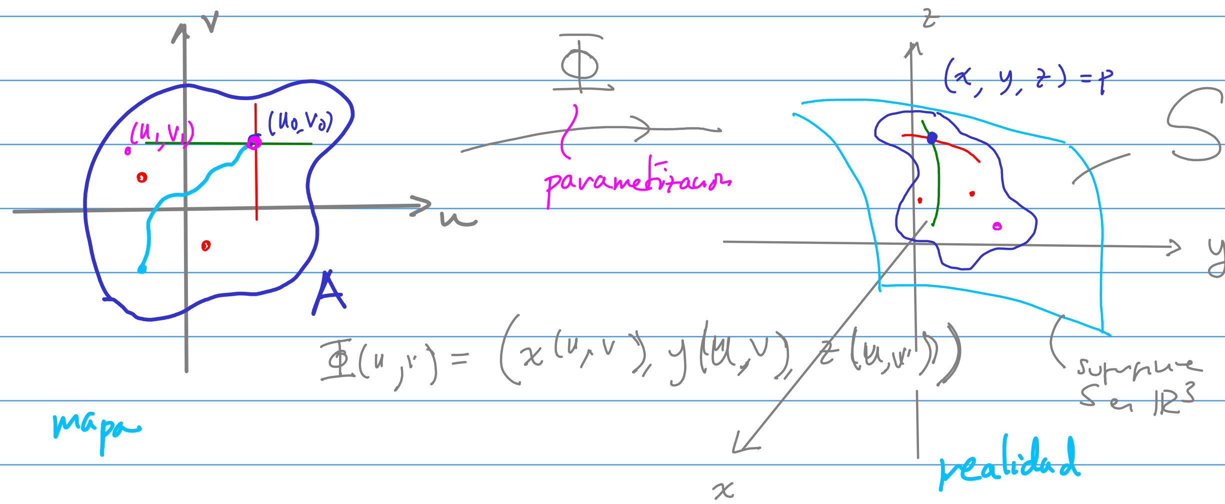
Hoy: Integrales de superficie, parte 1.

Def: Una superficie parametrizada consiste de

(i) Un dominio $A \subseteq \mathbb{R}^2$ con coordenadas (u,v)

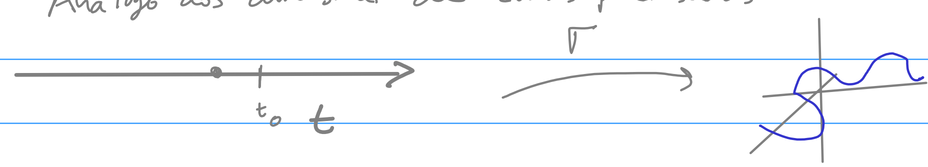
(ii) Una función diferenciable $\underbrace{\Phi}_{\text{fi}}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ biyectiva en A

La superficie que parametrizamos es $S := \Phi(A)$



$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Análogo dos dimensional de curvas parametrizadas.



$$\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

Cálculo Diferencial de superficies: Dada $S \subseteq \mathbb{R}^3$

Nos gustaría poder calcular:

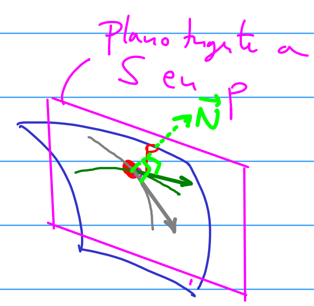
(i) El punto (u_0, v_0) que corresponde a un $p \in S$

(ii) Dos vectores tangentes a S en p

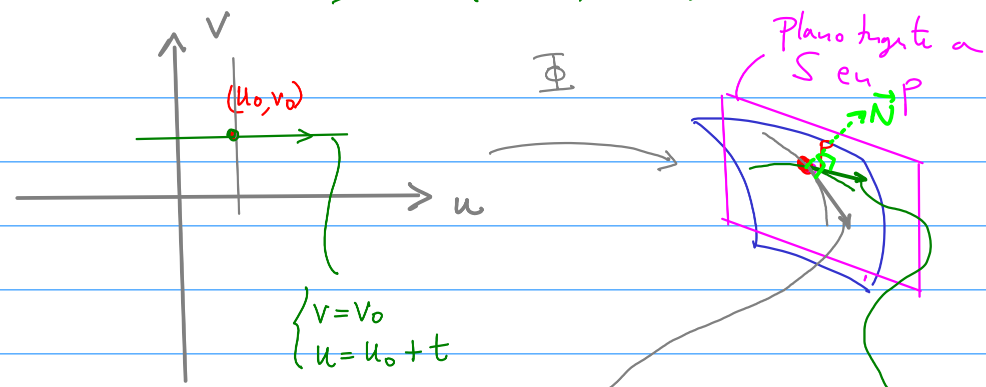
$$\underset{\Phi_u}{\overset{}{}}\; \Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0,v_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0,v_0) = \Phi_v$$

(iii) El vector normal a S en p

$$\vec{N} := \Phi_u \times \Phi_v$$



$\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$



En S $\quad \Phi(u_0+t,\ v_0)$

$$\frac{d}{dt}\Phi(u_0+t, v_0)\Big|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0+t, v_0)\Big|_{t=0} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)\right]$$

vect.

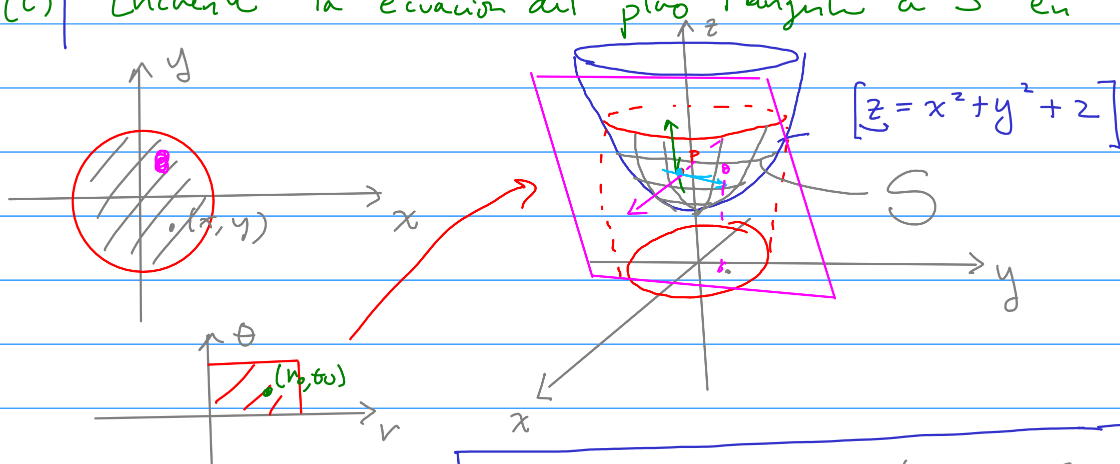
$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)\right]$$

Ejercicio: Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por $z = x^2+y^2+2$ con $x^2+y^2 \le 25$.

(a) Encuentre una parametrización de S

(b) Encuentre dos vectores tangentes en $P(1,2,7)$

(c) Encuentre la ecuación del plano tangente a S en P.



(a) Parametrizamos $\quad \Phi(x,y) = (x, y, x^2+y^2+2)$

$A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 5\}$

Usaremos:

$$\Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r^2+2)$$

$A = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 5\}$

Otra parametrización (hay muchas posibles!)

(b) A qué punto (r,θ) corresponde $P(1,2,7)$?

$$\left[\Phi_2(r,\theta) = (1,2,7)\right]$$

$$= (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r^2+2)$$

$$\begin{cases} r^2+2=7 \Rightarrow r^2=5 \Rightarrow r=\sqrt{5} & \text{porque } r>0 \\ \sqrt{5}\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5}\sin\theta = 2 \Rightarrow \sin\theta^* = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \theta_0^* = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\boxed{(\theta, r) = (\theta_0^*, \sqrt{5})}$$

(b)

$$\Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2+2)$$

$$A = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 5\}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 2r)$$

$$\boxed{\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(\theta_0^*, r_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5}\right)} = \Phi_r(r_0,\theta_0)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}(\theta_0^*, \sqrt{5}) = \left(-\sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)$$

$$\boxed{\Phi_\theta(r_0,\theta_0) = (-2, 1, 0)}$$

(c) Sabemos que el plano tangente pasa por $P(1,2,7)$ así que nos falta sólo el vector normal

$$\vec{N}(p) = \Phi_\theta(r_0,\theta_0) \times \Phi_r(r_0,\theta_0)$$

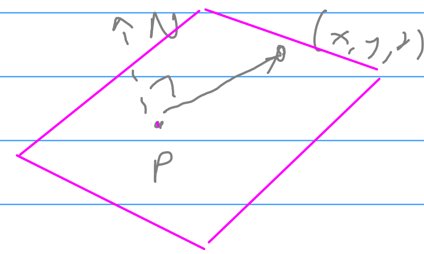
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 2\sqrt5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{N}$$

tangentes en P.

Con $\vec{N}$ y P la ecuación es

$$(\vec{x} - \vec{P})\cdot\vec{N} = 0 \checkmark$$

$\vec{x} = (x,y,z)$, $\vec{P} = (1,2,z)$



Cálculo integral en superficies:

Cuál es la masa total de la lámina?

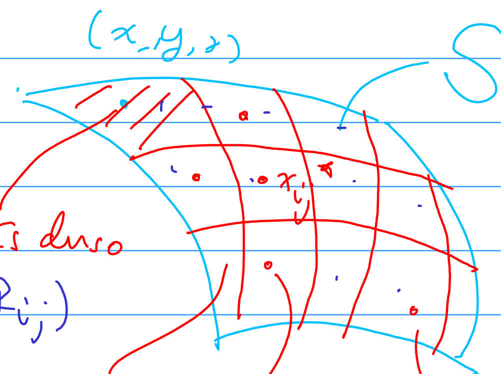
$$\| $$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \rho(x_{ij}^*)\cdot \text{Área}(R_{ij})$$

$$\| $$

$$\left[\iint_S \rho\, dS\right]$$

Integral de una función escalar ρ sobre una superficie S



más denso

Dada

menos denso

$\rho(x,y,z) =$ "Densidad superficial en Kg/m^2"

$$\rho(x_{ij}^*)\cdot \text{Área}(R_{ij})$$

Pregunta: Cómo calcularlas?