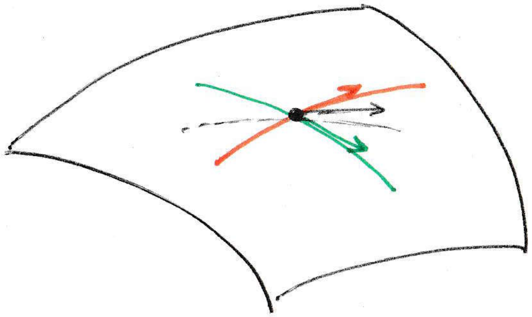
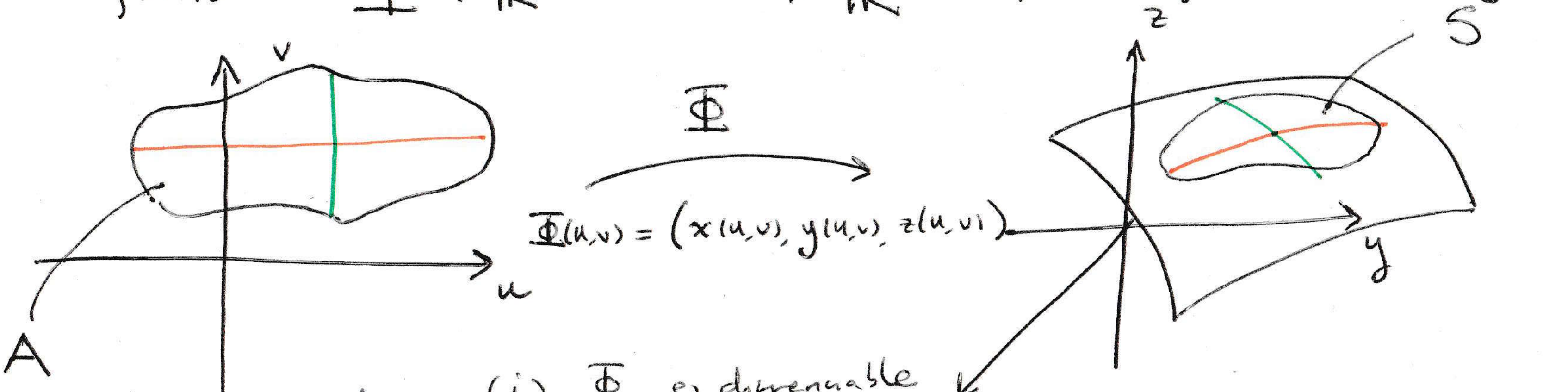
Superficies parametrizadas

Def: Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subconjunto 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$ en el sentido en que en cada punto hay dos direcciones independientes en las cuales moverse:



Def: Una parametrización de la superficie S es una función $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que es biyección entre A y S.



Adicionalmente, pedimos

(i) Φ es diferenciable

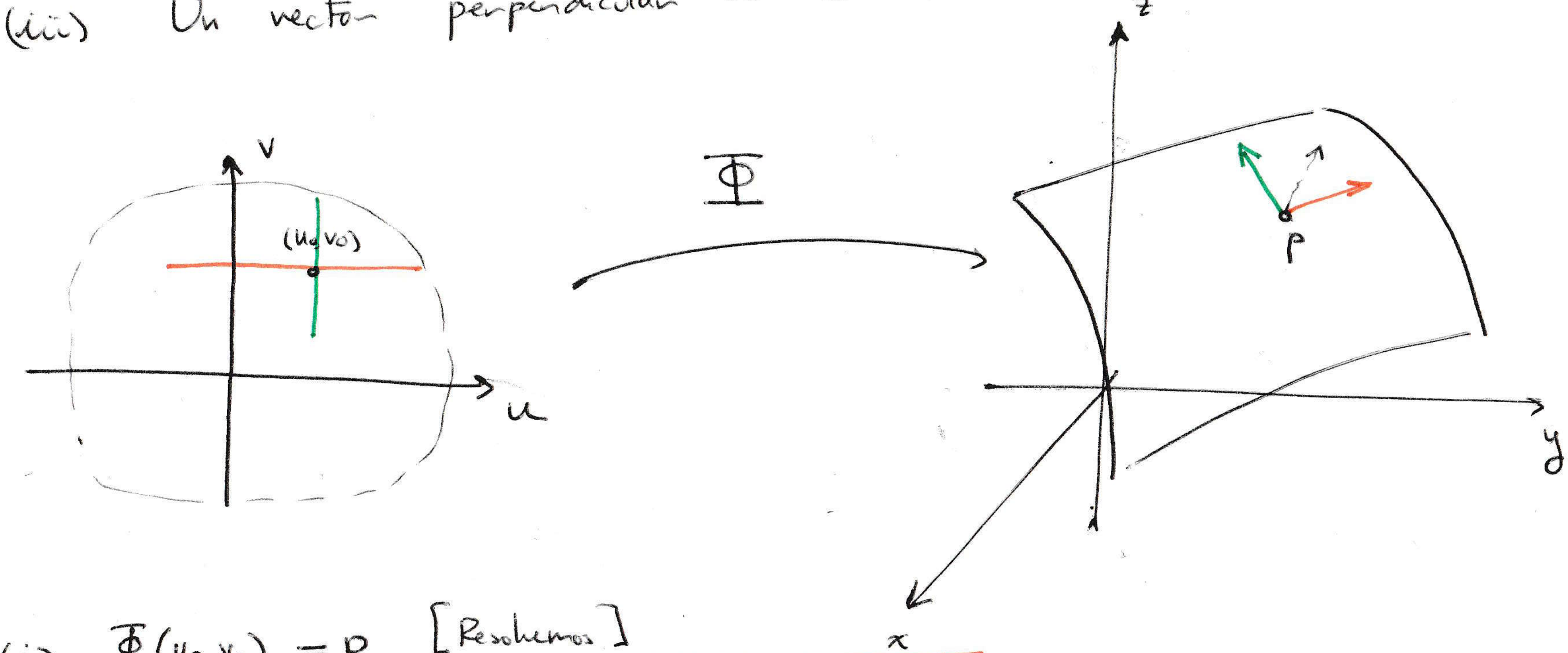
(ii) $\forall (u,v)$ $\Phi_u(u,v)$ y $\Phi_v(u,v)$ son lin. indep.

Si conocemos una parametrización $\Phi(u,v)$ de una superficie S queríamos poder calcular:

(i) El punto (u_0,v_0) correspondiente a $p\in S$

(ii) Dos vectores tangentes a S en p

(iii) Un vector perpendicular a S (i.e. al plano tangente a S)



(i) $\Phi(u_0,v_0)=p$ [Resolvemos]

(ii) $\boxed{\Phi_u(u_0,v_0)=(x_u(u_0,v_0),\ y_u(u_0,v_0),\ z_u(u_0,v_0))}$

$\boxed{\Phi_v(u_0,v_0)=(x_v(u_0,v_0),\ y_v(u_0,v_0),\ z_v(u_0,v_0))}$

(iii) $N(u_0,v_0)=\underline{\Phi_u(u_0,v_0)}\times\underline{\Phi_v(u_0,v_0)}$

Ejemplo: Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por
$$z = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad x^2+y^2 \leq 25.$$

(a) Encuentre una parametrización de S

(b) Encuentre dos vectores tangentes a S en $p=(1,2,5)$

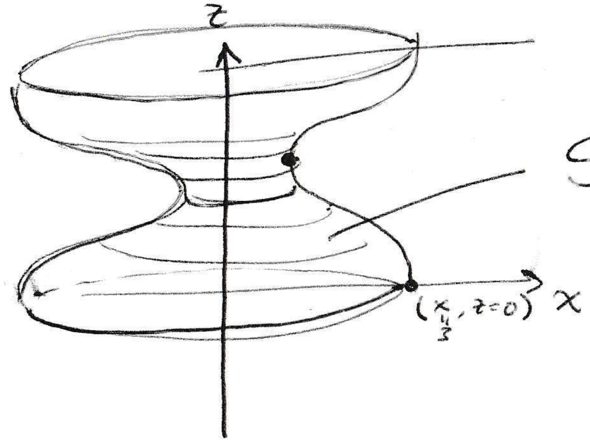
(c) Encuentre ~~el~~ un vector normal a S en $p=(1,2,5)$.

POR FAVOR DETENGA EL VIDEO Y CALCÚLELO UD. MISM@...

Ejemplo 2:

Un jarrón tiene forma del sólido de revolución obtenido al hacer girar $x = \cos(z) + 2$ alrededor del eje z

$0 \leq z \leq 2\pi$

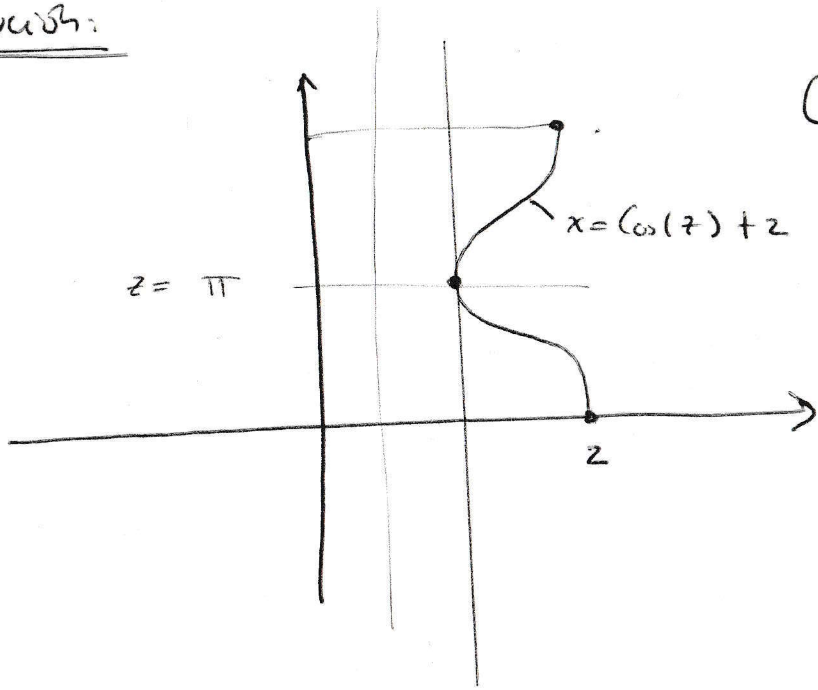


(i) ~~Calcule~~ Encuentre una parametrización de la superficie S

(ii) Encuentre dos rectas tangente a S en $(z = \pi,\ y = 0,\ x = 1)$ linealmente independiente

(iii) Encuentre una recta normal a S en $(x=1,\ y=0,\ z=\pi)$.

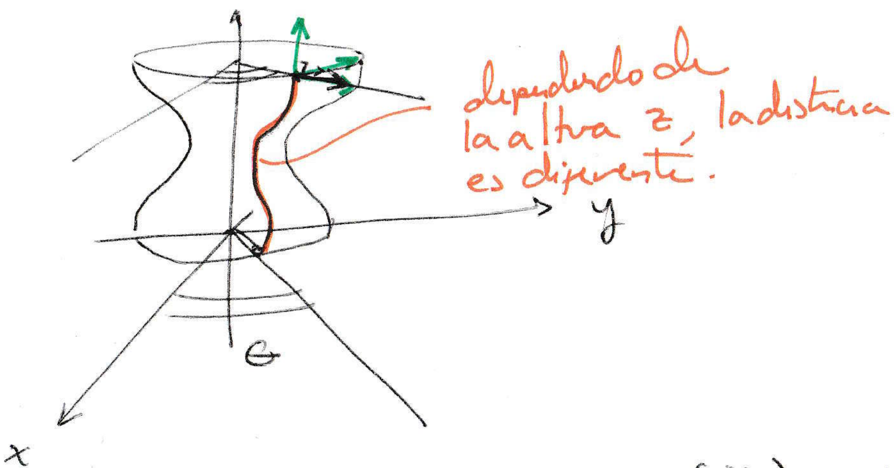
Solución:



(i) $(z, \theta) \longmapsto \overset{\Phi(z,\theta)}{\big((\cos(z)+z)\cos\theta,\ (\cos(z)+z)\sin\theta,\ z\big)}$

(ii) ¿Qué valores de z y θ (z°, θ°) nos llevan a $x=1,\ y=0,\ z=\pi$?

Φ_z



Φ_θ

(iii) $N = \Phi_z \times \Phi_\theta$.

Integrales sobre superficies

Problema: Una lámina metálica $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ tiene densidad superficial $\rho(x,y,z)$ (en Kg/m^2 del ~~cada~~ material del punto (x,y,z))

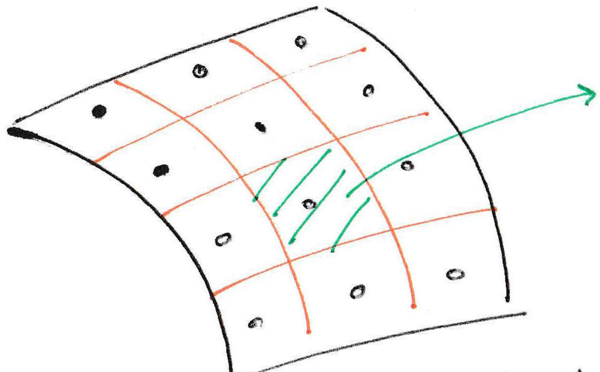
$$\iint_{\Sigma} \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{Función ESCALAR}} \, dS = \lim_{N \to \infty} \Bigg(\qquad \Bigg)$$

Superficie

(i) Divida S en pequeños fragmentos de área ΔS

(ii) En cada pedazo elija un punto (x_i, y_i, z_i)

(iii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \rho(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \, \text{Area}(S_{ij})$



$$\text{masa} = \rho(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \, \text{Area}(S_{ij})$$

Podemos:

ⓐ Calcular la masa total de la lámina

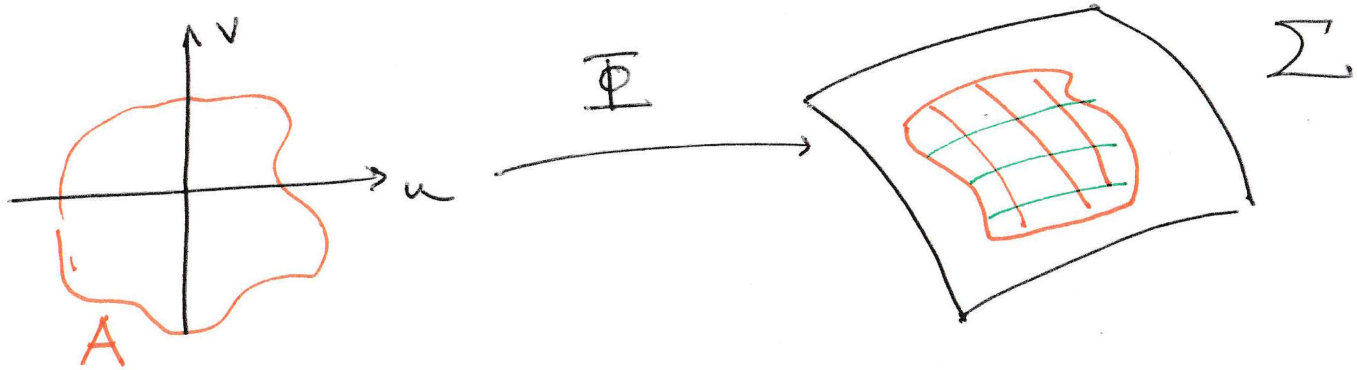
ⓑ Calcular el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

ⓒ Calcular el momento de inercia / torque, etc...

¿Cómo calcular integrales de superficie?

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar.

Si $\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización con dominio A



$$\iint_{\Sigma} f \, dS = \underbrace{\iint_{A} f(\Phi(u,v)) \, \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, dA}_{\text{integral doble de las que ya conocemos.}}$$

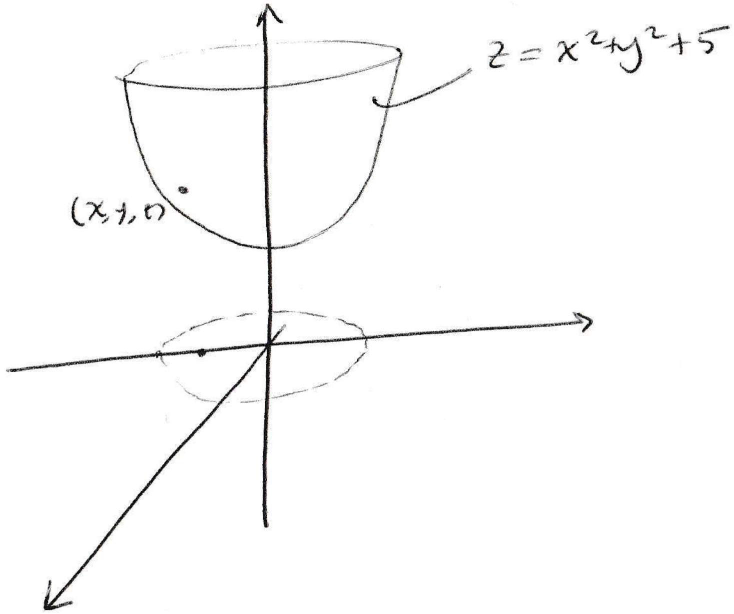
Ejercicio:

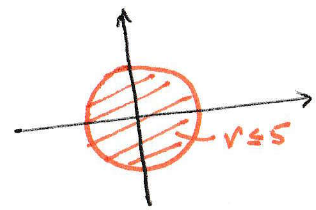
Sea Σ la parte del paraboloide $z = x^2+y^2+5$ encima del círculo $x^2+y^2 \leq 25$ en el plno xy.

Calcule $\displaystyle\iint_{\Sigma} 1 \, dS =$

DETENGA EL VIDEO E
INTENTE RESOLVERLO UD. MISM@

Solución:





$$\begin{cases} \Phi(x,y) = (x, y, x^2+y^2) \\ x^2+y^2 \le 25 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_x = (& 1, & 0, & 2x \;) \end{array}$$

$$\Phi_y = (0, 1, 2y)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (-2x, -2y, 1)$$

$$\|\Phi_x \times \Phi_y\| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$\iint_{\Sigma} 1\, dS = \iint_{D} 1 \cdot \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\; dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^5 \sqrt{1+4r^2}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{8} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_{r=0}^{r=5}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(101)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3} - 1\right]$$