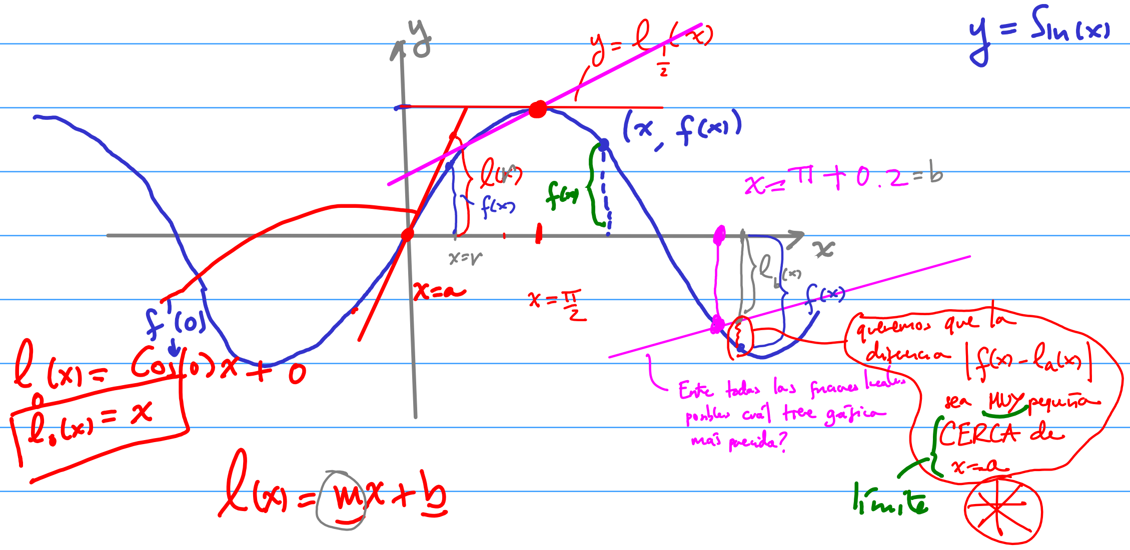
Hoy: Funciones diferenciables

(1) Recapitulemos cálculo diferencial

¿Sea $f(x)$ una función dada. Cómo se comporta f cerca del punto $x = a$?

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ $\quad x = \overset{a}{\overset{\shortparallel}{0}}$

Visualizamos $f(x)$ a través de su gráfica



R: Se comporta como la función lineal afín $\ell_a(x)$ cerca del punto. El cálculo 1 nos enseña métodos para calcular $\ell_a(x)$ (dado a y la función f)

Def: La función $f(x)$ se puede aproximar muy bien cerca del punto $x=a$ si existe una función lineal $\ell_a(x) = \overset{m(x-a)+f(a)}{mx + b}$ que satisface:

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - \ell_a(x)|}{|x-a|} = 0$$

el error va a cero mucho más rápido que $x-a$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left(m(x-a)+f(a)\right)}{x-a}=0$$

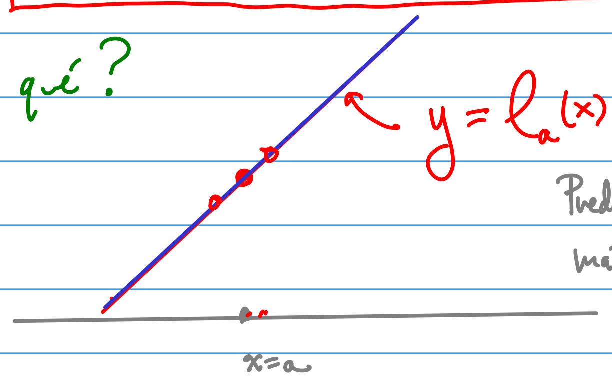
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{m\,\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}=0$$

$$\boxed{m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \sim f'(a)$$

Si existe una recta que cumple esta recta es única y está dada por:

$$\boxed{\ell_a(x)=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Para qué?

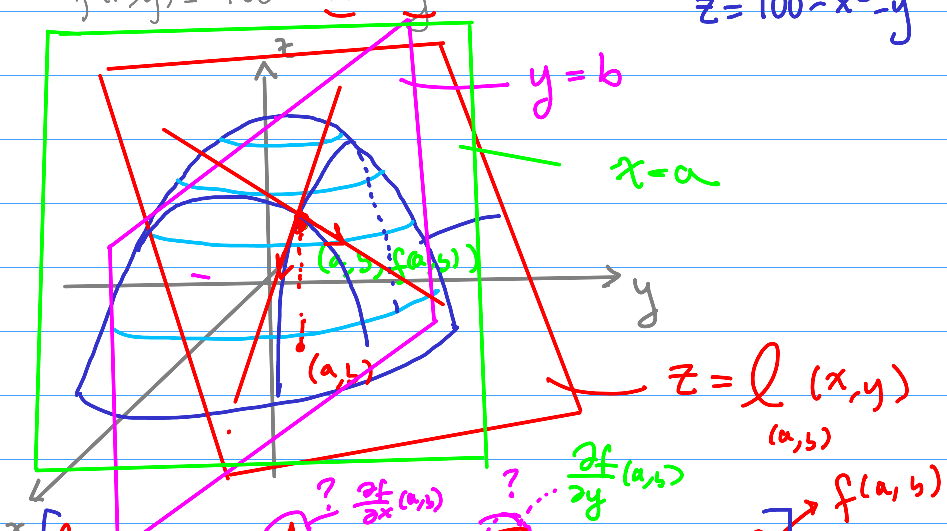


Puede ser $x=a$ un máximo local de $f(x)$?

Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$. Cómo se comporta $f(x,y)$ cerca de un punto dado $(\underset{x}{a},\underset{y}{b})$?

Ejemplo: $f(x,y)=100-x^2-y^2$

$z=100-x^2-y^2$



$$\ell_{(a,b)}(x,y)=\overset{?\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{A}(x-a)+\overset{?\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{B}(y-b)+\overset{f(a,b)}{C}$$

Qué pasa en el plano $y=b$?

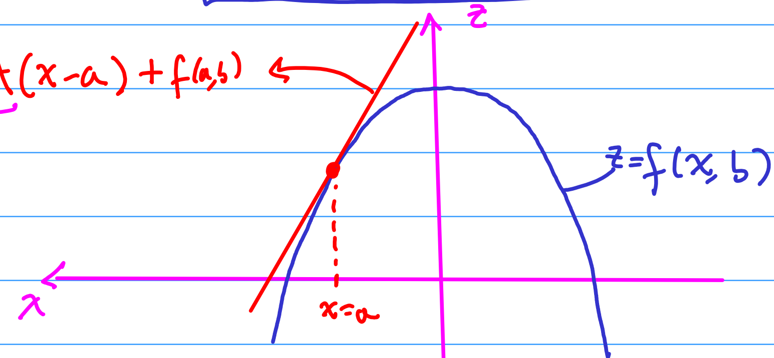
$$f(x,y) \rightsquigarrow f(x,b)$$

↑ una sóla variable!

$$\ell_{a,b}(x,y) \rightsquigarrow \underbrace{A(x-a)+f(a,b)}$$

$y = A(x-a)+f(a,b)$

$y=b$



$$A \overset{??}{=} \left.\left(f'(x,b)\right)\right|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

Def: Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}(a,b) = \text{" Derivar } f \text{ contra la variable } x \text{ imaginando que todas las demás variables son constantes + evaluamos } x=a \text{ y } y=b \text{"}$$

(reemplazamos)

Derivada parcial de f contra x

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \text{" Derivar } f \text{ contra la variable } y \text{ imaginando que todas las demás vars. son constantes + evaluamos en } x=a \text{ y } y=b \text{"}$$

Def: Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

La mejor aproximación lineal para $f(x,y)$ cerca de (a,b) es:

$$\ell_{(a,b)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

números

Def: f es diferenciable en el punto (a,b) si existe una función lineal $t(x,y)$ que satisface:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-t(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0$$

Teorema: Si $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) la mejor aprox lineal es única y está dada por

$$\boxed{\ell_{(a,b)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + f(a,b)}$$

Ejercicio: Sea $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$. Calcule

(a) TODAS las derivadas parciales de f en $(1,2)$

(b) La función lineal $t(x,y)$ que mejor aproxima a f cerca de $(1,2)$

(c) Dibuje (c.1) La gráfica de f / (c.2) La gráfica de t } en el mismo $\mathbb{R}^3$

Qué relación hay entre ellas?