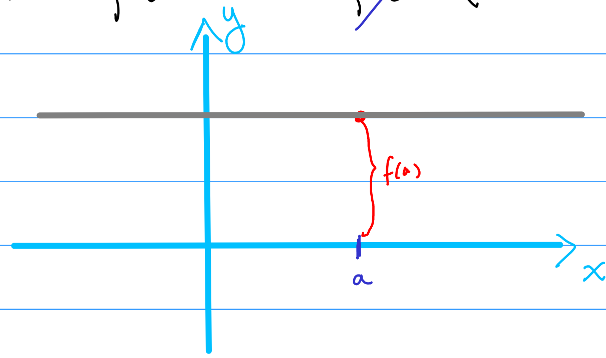
Hoy: Segundas derivadas

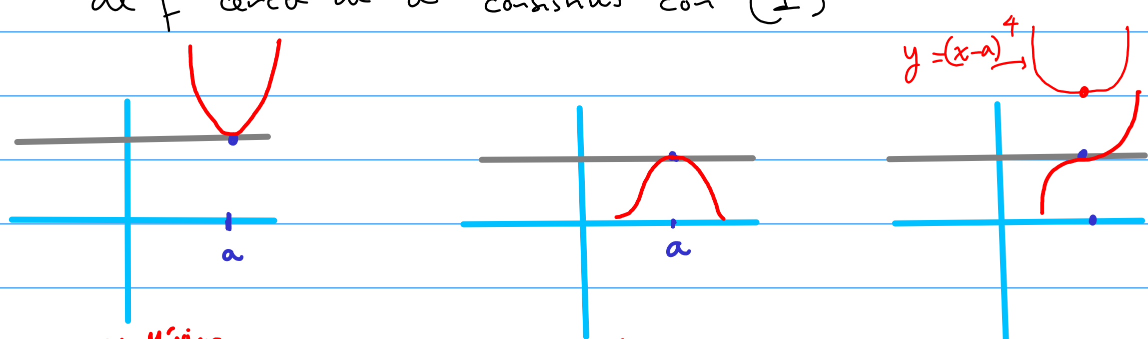
PROBLEMA: Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable y suponga que $f'(a)=0$. ¿Cómo se comporta f cerca de a?

(1) Aproximación lineal:

$$\ell_a(x) = f(a) + \cancelto{0}{f'(a)}\,(x-a)$$



Podría haber muchos comportamientos distintos de f cerca de a consistentes con (1)



a es mínimo local de f

$f''(a)>0$

a es máximo local de f

$f''(a)<0$

??

$f''(a)=0$??

$$(x-a)\cdot\frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)$$

$$q_a(x) = \left[\underbrace{f(a) + \cancelto{0}{f'(a)}\,(x-a)} + \left[\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right]\right]$$

$$f(x) = q_a(x) + \text{error}(x)$$ ← se hace pequeño cerca de a $\quad O(\|x-a\|^2)$

Calcular $f''(a)$ no es difícil y da información más detallada acerca del comportamiento de f cerca de $x=a$.

Qué sucede en funciones $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) Hay MUCHAS segundas derivadas ..

Def:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots x_n)\right)$$

En cada punto hay n^2 SEGUNDAS derivadas distintas así que las ordenamos en una matriz de $n \times n$ llamada la HESSIANA $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$

LA SEGUNDA DERIVADA

$$\begin{array}{c|c} & x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ i \\ \\ x_n \end{array} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array} =: \overbrace{\mathcal{H}_f(\vec{a})}^{\text{LA SEGUNDA DERIVADA}}$$

Se sabe (Teo. de Clairaut que $\mathcal{H}_f(\vec{a}) \overset{t}{=} \mathcal{H}_f(\vec{a})$) simétrica

Def: La mejor aproximación cuadrática para f cerca de $\vec{a}$ es $\quad 1 \times n \quad \times n \times n \quad \times n \times 1$

$$\boxed{q_{\vec{a}}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + (\vec{x} - \vec{a})^t \cdot \frac{\mathcal{H}_f(\vec{a})}{2} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}$$

Teorema [Apox cuadrática] Si TODAS las segundas derivadas parciales de f cerca de $\vec{a}$ son funciones continuas $\Longrightarrow$ f se puede aproximar MUY BIEN cerca de $\vec{a}$ mediante $q_{\vec{a}}(\vec{x})$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - q_{\vec{a}}(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^2} = 0$$

error va MUY rápido a 0.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = \cos(x-y) + 1 - y^2$

(a) Calcule $H_f(0,0)$

(b) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor aproxima a f cerca de $(0,0)$.

Sol:

(a)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ y & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{array}$$

$$\| \\ H_f(0,0)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x-y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = +\sin(x-y) - 2y \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x-y)\right], \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 + \cos(x-y)(-1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos(x-y)(-1) = \cos(x-y)$$

(b) $\vec{x} = (x,y)$

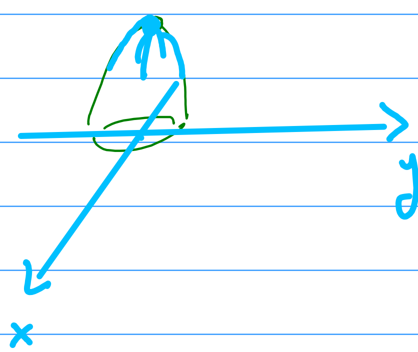
$$Df(0,0) = \begin{array}{cc} x & y \\ \hline \end{array}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_{f(0,0)}(\vec{x}) = f(0,0) + \cancel{Df(0,0)}^{\,0} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \frac{1}{2} H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$q_{f(0,0)}(x,y) = 2 + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \simeq 2 - \text{algo}$$

?

$$= 2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

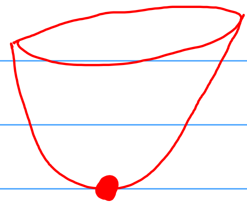


$$2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x + y \\ x - 3y \end{pmatrix} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left[x(y-x) + y(x-3y)\right]$$

$$\boxed{q_{fa}(x,y) = 2 + \frac{1}{2}\left[-x^2 - 3y^2 + 2xy\right]}$$

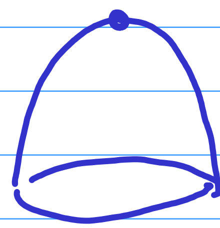
$$(x\ y)\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$



$\vec{x}^t H \vec{x} > 0$

SIEMPRE

(para cualquier $\vec{x}$) $\neq \vec{0}$

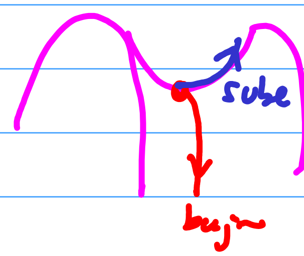


$\vec{x}^t H \vec{x} < 0$

siempre

(para cualquier $\vec{x}$) $\neq \vec{0}$

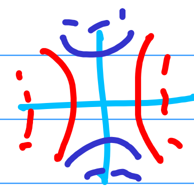
PUNTO DE SILLA



$$(x\ y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 - y^2$



Def: Sea A una matriz simétrica de $n \times n$

$A \succ 0$ (positiva definida) $\iff \vec{x}^t A \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

$A \prec 0$ (negativa definida) $\iff \vec{x}^t A \vec{x} < 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

indefinida de lo contrario.

Teorema: [Criterio de la segunda derivada]

Si TODAS las segundas derivadas parciales de f en $\vec{a}$ son continuas y $\nabla f(\vec{a}) = 0$ entonces:

(1) Si $\mathcal{H}_f(\vec{a}) > 0 \Rightarrow \vec{a}$ es mínimo local de f

(2) Si $\mathcal{H}_f(\vec{a}) < 0 \Rightarrow \vec{a}$ es máx. local de f

(3) Si $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ tiene algunos v.p. > 0 y otros $< 0 \Rightarrow \vec{a}$ es de silla

De resto, no sabemos.

Obs: Del álgebra lineal sabemos que

$A > 0 \iff$ Todos sus valores propios son > 0 ✓

$A < 0 \iff$ Todos sus v.p. son < 0 ✓

Ejemplo: $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ¿Es definida?

$\det(M) = 3 - 1 = 2$

$A = -1 < 0$

Lema: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = M$

(1) Si $\det(M) < 0 \Rightarrow$ punto de silla ✓

(2) Si $\det(M) > 0$

- $A > 0$: $M > 0$ mínimo local
- $A < 0$: máximo local $M < 0$

(3) Si $\det(M) = 0 \Rightarrow$ ni idea...