Cálculo Vectorial – Parcial I

Jueves 5 de Febrero de 2020.

Nombre: . . . .

INSTRUCCIONES – LEA ESTO ANTES DE EMPEZAR

- Este examen tiene 4 problemas.
- Muestre su trabajo. Para recibir todo el credito debe mostrar su razonamiento y los pasos que lo llevaron a la respuesta final y estos deben ser escritos claramente. Si necesita más espacio escriba en la parte de atras del ejercicio anterior pero asegúrese de identificar claramente a que ejercicio corresponde cada pagina.
- Este es un examen individual y con libro cerrado. Su Celular debe estar **apagado** (si no puede apagarlo por motivos de urgencia mayor por favor comuníquelo a su profesor).
- Este examen tiene una duracion de 80 mins.

Se espera integridad academica de todos los estudiantes. Entendiendo esto, declaro que no voy a dar, usar o recibir ayuda no autorizada durante este examen.
Firma del estudiante:

Problema ♯	1.	2.	3.	4.	TOTAL
Puntos ganados					

1. **[12 pts]** Sea $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x + y)$.

   (a) Verifique rigurosamente que $f(x, y)$ es diferenciable en todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Encuentre la función $\ell(x, y)$ que mejor aproxima a $f(x, y)$ cerca de $(0, 0)$.

   (c) Encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ en $(0, 0, 1)$ y dibuje este plano.

2. **[14 pts]** La temperatura de los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ esta dada por la función

$$T(x, y, z) = xyz.$$

Un insecto camina sobre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Encuentre las temperaturas mínima y máxima que el insecto puede experimentar y los puntos de $\mathbb{R}^3$ donde estas temperaturas se alcanzan.

3. **[12 pts]**

(a) Enuncie de manera precisa el "Teorema del gradiente" visto en clase.

(b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la colección de soluciones (x, y, z) de la ecuación

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

(c) Justifique su solución de la parte (b) utilizando el Teorema de la parte (a).

4. **[12 pts] Verdadero o Falso:** En los siguientes ejercicios marque V si el enunciado es Verdadero y F si el enunciado es falso. No es necesario escribir la justificación de su respuesta. ESCRIBA SUS RESPUESTAS EN LA TABLA QUE APARECE A CONTINUACION.

a	
b	
c	
d	

(a) Si $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva parametrizada que para todo t esta contenida en la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 100$ entonces los vectores $\sigma(t)$ y $\sigma'(t)$ son perpendiculares para todo t.

(b) Sea $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable y defina $W(r, \theta) = U(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Entonces para todo r_0 y θ_0 tenemos que

$$\frac{\partial W}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)\,(-r_0\sin\theta_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)\,(r_0\cos\theta_0)$$

(c) Sea $\sigma(t)$ una curva parametrizada en el plano. Si para todo t tenemos $\|\sigma'(t)\| = 10$ entonces $\sigma(t)$ parametriza una recta.

(d) Existe un valor del número real c para el cual la función $h(x, y)$ definida abajo es continua en $(0, 0)$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ c, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$