Hoy: $\boxed{\text{Integrales sobre curvas.}}$

$$\int_{C} f$$

qué objeto se integra?

En general.

sobre qué región?

Si el objeto C sobre el que integramos es una curva parametrizada entonces hay dos tipos de integrales fundamentales, que dependen de qué objeto integramos:

(1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ función escalar

$$\int_C f \, ds =$$

(2) Si $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un CAMPO VECTORIAL

$$\int_C F \, d\vec{s} =$$

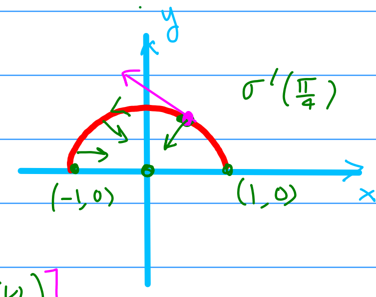
Hoy discutiremos:
- Qué son? (1) (2)
- Por qué sirven?
- Cómo se calculan?

Ejemplos.

Def: Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ es una función $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$\sigma(t) =$ "Vector posición de una partícula en el instante t"



Ejemplo: $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$0 \leq t \leq \pi$

$[\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))]$

$\sigma''(t) = (-\cos(t), -\sin(t))]$ ← aceleración

$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ ← espiral

* Deben saber parametrizar segmentos de rectas y de círculos.

Si conocemos una parametrización $\begin{cases} \sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a \leq t \leq b \end{cases}$

para nuestra curva C entonces calcular integrales sobre C es fácil.

(1) Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar

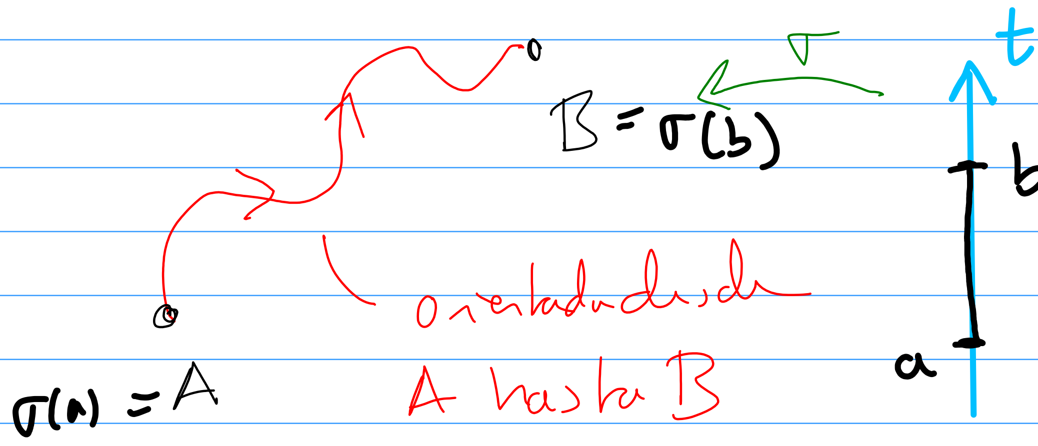
$$\int_C f \, ds = \underbrace{\int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt}_{\text{en una sola variable}}$$

Teorema tipo "Fubini" para integrales sobre curvas

(2) Si $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial

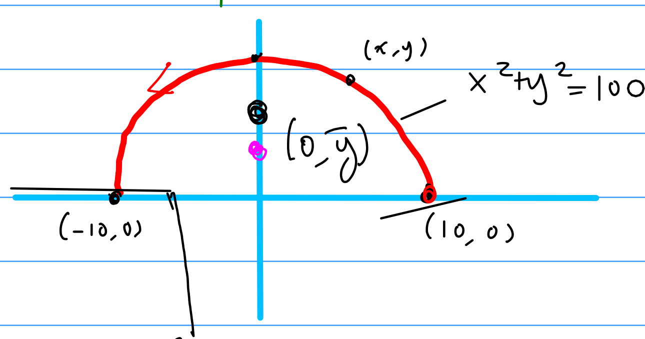
y nuestra parametrización de C respeta la orientación de C entonces

$$\int_C F\, d\vec{s} = \int_a^b \underbrace{F(\sigma(t))\cdot \sigma'(t)}_{\substack{\text{escalar porque}\\ F \text{ y } \sigma' \text{ son}\\ \text{vectores en } \mathbb{R}^3}}\, dt$$



respeta la orientación desde A hacia B

Ejercicio: Una varilla metálica semicircular tiene densidad lineal en el punto (x,y) Kg/m dada por $\rho(x,y) = x^2$. (a) Calcule la masa total de la varilla.
(b) Calcule la posición del centro de masa.



(a) $$\int_C \rho(x,y)\, ds \overset{?}{=}$$

(1) Parametrizamos: $\begin{cases} \sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad 0 \le t \le \pi \\ \sigma(t) = \left(\underline{10\cos(t)}, \underline{10\sin(t)}\right) \end{cases}$

$\rho(x,y) = x^2, \quad \rho(\sigma(t)) = 100\cos^2(t)$

$$= \int_0^{\pi} 100\cos^2(t)\cdot 10\, dt = 1000\left(\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,dt\right)$$

$$= 1000\,\frac{\pi}{2} =$$

$$\sigma'(t) = (-10\sin(t),\ 10\cos(t))$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{10^2\sin^2(t) + 10^2\cos^2(t)} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$1 = \sin^2(t) + \cos^2(t)$$

$$\cos(2t) = -\sin^2(t) + \cos^2(t)$$

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

La masa total de la varilla es 500π Kg

$(yx^2)\ (\sigma(t)) = 1000\sin(t)\cos^2(t)$

(b)

$$\bar{y} = \frac{\int_C y\rho\,ds}{\text{masa total de } C} = \frac{\int_0^{\pi} 1000\sin(t)\cos^2(t)\,10}{500\pi}$$

$$"\ \bar{y}$$

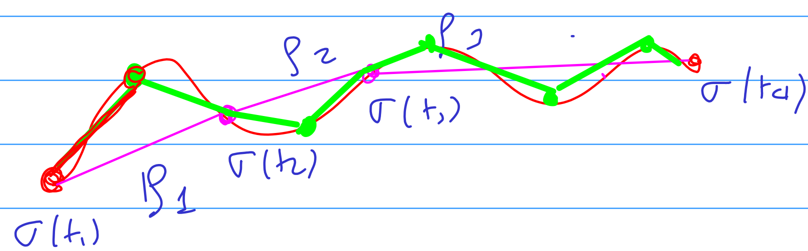
$$10\left(\frac{4}{3\pi}\right)$$

$$\frac{1000}{500\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(t)\cos^2(t)\,dt\right)10 = \left(-\frac{\cos^3(t)}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\right)\frac{1000}{500\pi}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\, x^2 \, ds}{\text{Masa total}}$$

$f(-x,y) = -f(x,y)$ así que lo que aporta a la derecha e izquierda se cancelan.

¿Qué es $\int_C \rho \, ds =$



$$\rho_1 \|\sigma(t_2)-\sigma(t_1)\| + \rho_2 \|\sigma(t_3)-\sigma(t_2)\| + \rho_3 \|\sigma(t_4)-\sigma(t_3)\|$$

(1) Parto $[a,b]$ en N pedazos iguales

$a = t_0$, t_1 ...., $b = t_N$

Defino

(2) $\rho_i := \rho(\sigma(t_i))$ $\qquad \int_C \rho \, ds$

(3) Aproximo la masa total $\quad$ //

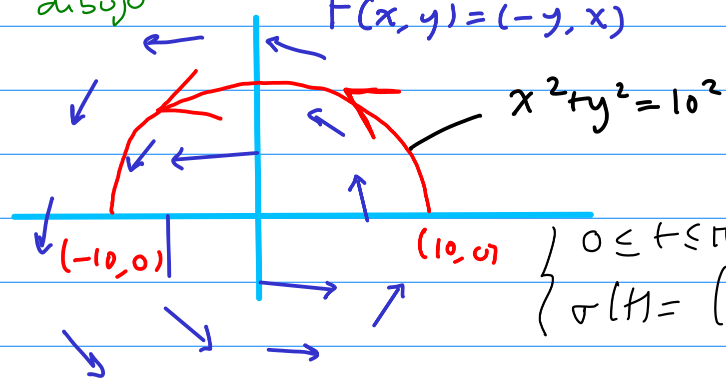
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \rho_i \cdot \|\sigma(t_i)-\sigma(t_{i-1})\|$$

$\approx$

$\|\sigma'(t_i)\|(t_{i+1}-t_i)$

(2) $\int_C F$ Si $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial

Ejercicio: Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y) = (-y, x)$ a lo largo de la curva ORIENTADA del dibujo



$$\begin{cases} 0 \le t \le \pi \\ \sigma(t) = (10\cos(t),\ 10\sin(t)) \end{cases}$$

Sol:

Trabajo $=$ $\int_C F \, d\vec{s} = \int_0^{\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt$

próxima clase

$$= \int_0^{\pi} 100 \, dt = \boxed{100\pi}$$

$$\sigma'(t) = (-10\sin(t),\ 10\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) = (-10\sin(t),\ 10\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 100\sin^2(t) + 100\cos^2(t) =$$

$$= 100\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) = \underline{\underline{100}}$$