Vectorial Virtual – Taller 3, parte 3: Teoremas de Stokes y Gauss.

Mayo 2020

Problema 11: (Teorema de Stokes)

Sea $H(x,y,z) = x^2y\hat{\imath} + \frac{x^3}{3}\hat{\jmath} + xy\hat{k}$ y sea C la curva de intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ orientado en la dirección de las manecillas del reloj visto desde arriba:

1. Grafique el paraboloide hiperbólico y el cilindro. Trace la curva de intersección.
2. Encuentre una parametrización para la curva C.

Problema 12: (Teorema de Stokes)

Calcule el trabajo hecho por el campo de fuerza

$$F(x, y, z) = \left(x^x + z^2, y^y + x^2, z^z + y^2\right)$$

cuando una partícula se mueve bajo su influencia alrededor del borde de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra en el primer octante en dirección contraria a las manecillas del reloj vista desde arriba.

Problema 13: (Teorema de la divergencia)

Considere el campo vectorial H dador por

$$H(x,y,z) = \left(\sin(x)\cos^2(y), \sin^3(y)\cos^4(z), \sin^5(z)\cos^6(y)\right)$$

1. Haga un dibujo del campo vectorial (usando por ejemplo `https://www.geogebra.org/m/u3xregNW`)
2. Calcule el flujo de H hacia adentro del cubo definido por los seis planos $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$.

Problema 14:

Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$ y sea E el volumen encerrado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$.

1. Calcule el flujo de F a través de la frontera de E hacia afuera.
2. La frontera de E consiste de tres partes: la superficie cilíndrica S y las "tapas" $x = -1$ y $x = 2$. Calcule el flujo de F a través de S hacia afuera.

Problema 15: Teorema de Gauss

Sea E el campo eléctrico generado en $\mathbb{R}^3$ generado por una carga puntual unitaria puesta en el origen

$$E(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

1. Haga un dibujo del campo vectorial, (por ejemplo usando `https://www.geogebra.org/m/u3xregNW`).
2. Verifique que el campo tiene divergencia cero $\nabla \cdot E = 0$.
3. Calcule el flujo de E a través de la esfera unitaria orientada hacia afuera parametrizando la esfera.
4. Calcule el flujo de E hacia adentro del cubo $[-2,2] \times [-2,2] \times [-2,2]$ (sugerencia: Use el Teo de Gauss).
5. Es E un campo conservativo?

Problema 16: (Verdadero o Falso)

Verdadero o Falso: Para cada una de las siguientes afirmaciones de una justificación (si cree que es V) ó un contraejemplo (si cree que es F).

1. Si $\nabla \cdot H = 0$ entonces el campo vectorial H es conservativo.
2. Si $\nabla \times H = 0$ entonces el campo vectorial H es conservativo.
3. Si $H = \nabla \times F$ entonces H es conservativo.
4. Si $\nabla \cdot F = 0$ entonces el trabajo realizado por F a lo largo de toda curva cerrada es cero.
5. $\nabla \times \nabla u = \vec{0}$ para toda funcion escalar diferenciable $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
6. Si H es conservativo entonces $\mathrm{div}(H) = 0$.