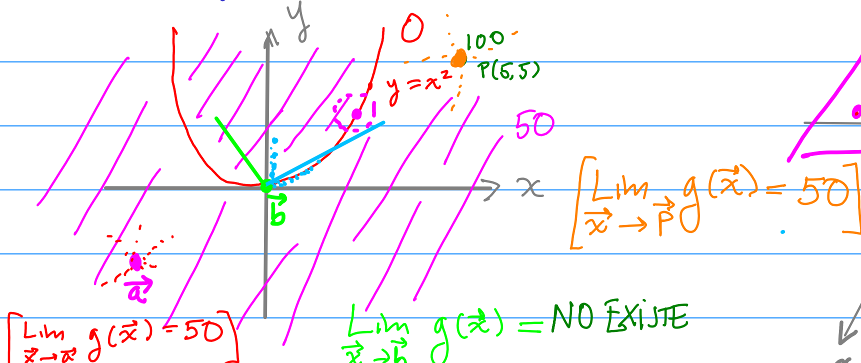
Hoy: Límites y continuidad

Ejemplo: Cómo podemos imaginar g?

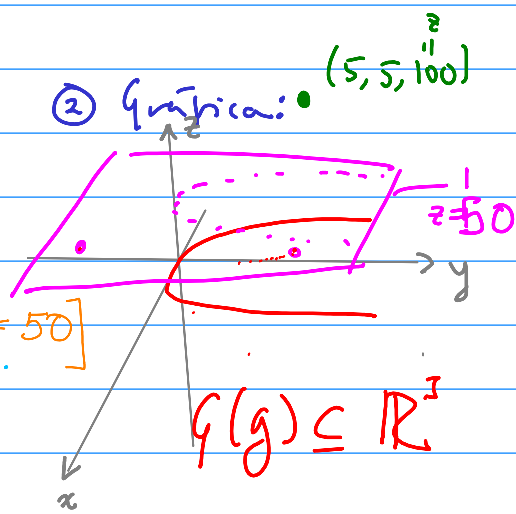
$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y = x^2 \\ 100, & \text{si } (x,y) = (5,5) \\ 50, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

① Conjuntos de nivel:



② Gráfica:



Queremos describir el comportamiento de una función escalar $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ cerca de un punto $\vec{x} = \vec{a}$.

$$\left[\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = c\right] \xrightarrow[\text{Quiere decir que}]{} \text{"Los valores de } f(\vec{x}) \text{ se acercan a } c \text{ cuando } \vec{x} \text{ se acerca a } \vec{a} \text{ desde cualquier dirección"}$$

Def: (1) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\vec{x} = \vec{a}$ si

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})}$$

(1) f está definida en $\vec{a}$
(2) Límite existe y tiene un valor c
(3) $c = f(\vec{a})$

[(2) f es continua en $R \subseteq \mathbb{R}^n$ si es continua en todos los puntos de R.]

Ejercicios

(1) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \boxed{\text{NO EXISTE}}$

(b) Es $h(x,y)$ continua en $(0,0)$? $\boxed{\text{NO}}$

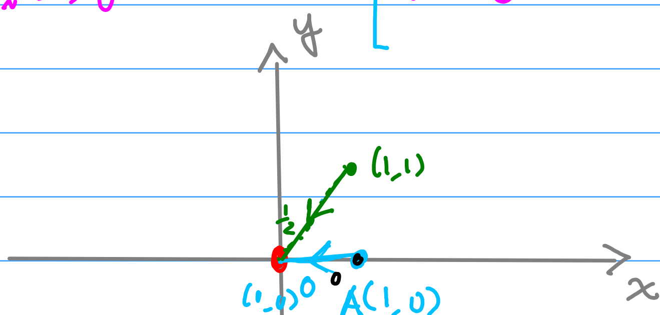
(2) $\ell(x,y) = \begin{cases} 1+\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ c, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ell(x,y) =$

(b) Existe c que haga que $\ell(x,y)$ sea continua en $(0,0)$?

Sol (1)

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} h(x,y) = \left[\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] =$$



Nos acercamos al origen a lo largo de la recta

$$A+t(\vec{0}-\vec{A}) = (1,0)+t\left((0,0)-(1,0)\right)$$
$$= (1,0)+t(-1,0) = (1-t,\ 0)$$

$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = 0 \end{cases}$ $\qquad \sigma(t) = (1-t, 0)$

Cómo se comporta g en los puntos de la recta?

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$g(\sigma(t)) = \frac{(1-t)\cdot 0}{(1-t)^2+0^2} = 0$$

A lo largo de la recta azul el límite vale 0.

$$\lambda(t) = (1,1) + t\left((0,0)-(1,1)\right)$$

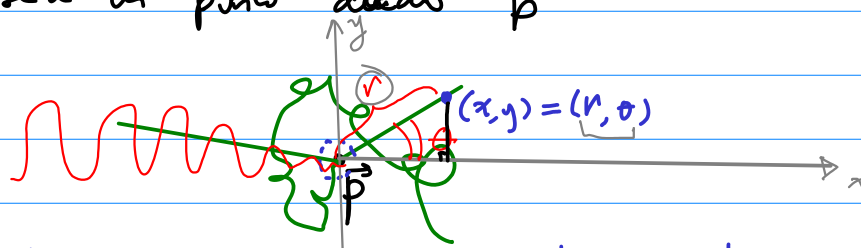
$$\lambda(t) = (1-t,\ 1-t) \qquad \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = 1-t \end{cases}$$

A lo largo de la recta verde cómo es g?

$$g(\lambda(t)) = \frac{(1-t)(1-t)}{(1-t)^2+(1-t)^2} = \frac{\cancel{(1-t)^2}}{2\cancel{(1-t)^2}} = \frac{1}{2}$$

A lo largo de la recta verde el límite vale $\frac{1}{2}$.

Problema: Hay muchísimas (infinitas) maneras de acercarse a un punto dado $\vec{p}$



Hay un truco muy útil para el cálculo de límites, pasarse a coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{0} \\ (x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

una sola variable!!

Ejercicio:

$$l(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ c, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ell(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to\boxed{(0,0)}} \left(1 + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{r\to 0}\left(1 + \frac{r\cos\theta \, r\sin\theta}{\sqrt{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,=\,r^2}}}\right)$$

(a,b)

Pasamos a polares

$x = r\cos\theta + a$

$y = r\sin\theta + b$

$$= \lim_{r\to 0}\left(1 + \frac{r^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r}}\right) = \lim_{r\to 0}\left(1 + r\cos\theta\sin\theta\right) = 1$$

(b) Existirá un valor de c que haga que $\ell(x,y)$ sea continua en $(0,0)$?

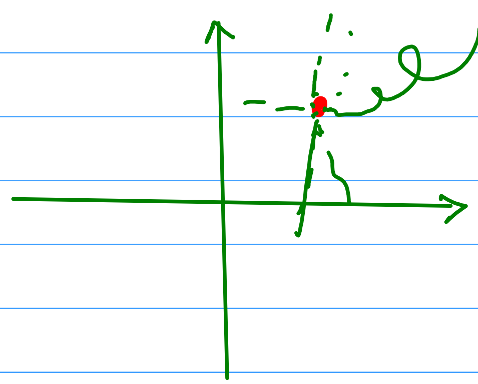
Recuerde $\ell(x,y)$ es continua en $(0,0)$ ssi

$$\ell(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ell(x,y) = 1$$

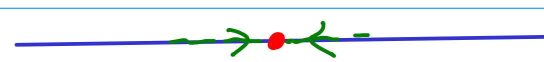
parte (a)

$\ell(0,0) = c$

Sí, escoja $\boxed{c=1}$



MUCHO MÁS FÁCIL



Calcule

$$(*)\ \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

Pasamos a polares

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}} = \cos\theta\sin\theta$$

es distinto para distintos valores de θ luego el límite $(*)$ no existe!