Hoy: (1) Coordenadas esféricas

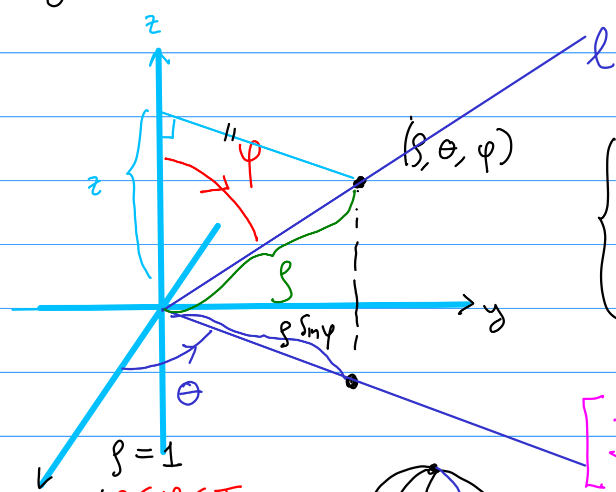
(2) Aplicaciones de integración (en física y probabilidad)

FÍSICA		PROB.
masa total(E)	$\sim$	$\mathbb{P}\{\vec{X} \in E\}$
centro de masa (E)	$\sim$	$\mathbb{E}[\vec{X}]$
momento de inercia de E respecto a un eje	$\sim$	Matriz de Varianzas_Covarianzas

$\sum m_i r_i^2$

$$\mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = V_{ij}$$

(1) Integración en coords esféricas



$$\begin{cases} z = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ x = \rho \sin\varphi \cos\theta \end{cases}$$

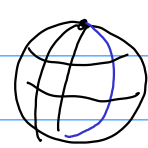
Ejercicio:

$$\left[J = \rho^2 \sin\varphi \right]$$

Jacobiano

$\rho = 1$

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$



Ejercicio: Calcule el volumen de la bola de radio 2

$$\mathrm{Vol}(B) = \iiint_B 1 \, dV$$

def de integral

Bola sólida.

$$B = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right\}$$

Usando Teo del cambio de variable

$$\stackrel{\text{Usando Teo del cambio de variable}}{=} \int_0^{\pi} \int_0^{2} \int_0^{2\pi} 1 \underbrace{\overbrace{\rho^2 \sin\varphi}}_{\text{Jacobiano.}} \, d\theta \, d\rho \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2} \rho^2 \sin\varphi \, 2\pi \, d\rho \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi \left(\int_0^{2} \rho^2 \, d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=0}^{\rho=2} \right) d\varphi$$

$$= \frac{2\pi \, 2^3}{3} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi \, 2^3}{3} \left[-\cos\varphi \right] \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}$$

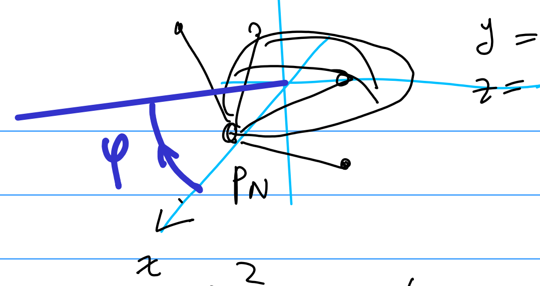
$$= \frac{4\pi \, 2^3}{3} - \frac{4}{3}\pi R^3$$

(b) La densidad de una bola centrada en $(0,0,0)$ de radio 2 es $[\rho(x,y,z) = y^2 + z^2]$. Si la bola tiene radio 2, ¿cuál es la masa total?

$$\text{masa}(B) \stackrel{\text{porque } \rho \text{ es la densidad en } kg/m^3}{=} \iiint_B (y^2 + z^2) \, dV =$$

Nuevas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



$x =$
$y =$
$z =$

$$y^2 + z^2 = (\rho \sin\varphi \sin\theta)^2 + (\rho \cos\varphi)^2 =$$

$$= \rho^2 S^2\varphi \, S^2\theta + \rho^2 C^2\varphi$$

$$= \rho^2 \left[S^2\varphi \, S^2\theta + C^2\varphi \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_0^{\pi} \left[\rho^2 \left[S^2\varphi \, S^2\theta + C^2\varphi \right] \cdot \rho^2 S\varphi \right] d\varphi \, d\rho \, d\theta =$$

Poco cálculo hasta

$$\cos^2\varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

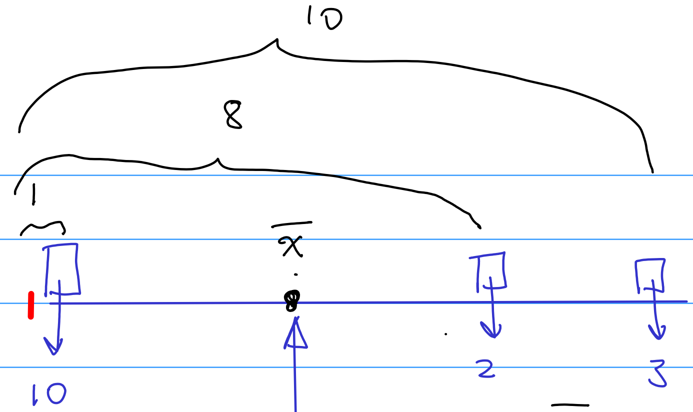
$$\sin^2\varphi = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$$

Ejercicio. Explique como se calcula

$$\int \sin^{2k}(x)\, dx \quad - \quad \int \cos^{2k}(x)\, dx$$

(Hint: Use ángulos dobles)

(2)



$$\left[\sum F_i = m\vec{a}\right]$$

$$\sum \tau_i = I\ddot{\alpha}$$

?

Dónde $= \bar{x}$ pongo el triángulo pa que quede balanceado?

$$m_1(x_1-\bar{x}) + m_2(x_2-\bar{x}) + m_3(x_3-\bar{x}) = 0$$

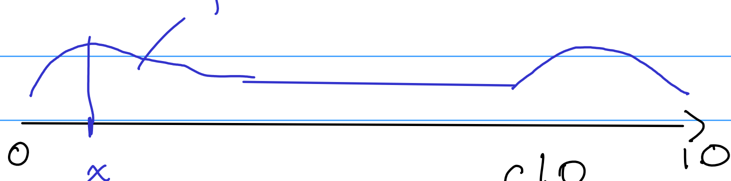
despejo $\bar{x}$

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 - (m_1+m_2+m_3)\bar{x} = 0$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}}$$

m_i

$f(x) =$ "densidad lineal en kg/m"



$$\sim \sum_{i=1}^{N} x_i \underbrace{f(x_i)\Delta x_i}_{m_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{10} f(x)\,x\,dx}{\int_0^{10} f(x)\,dx}$$

← masa total

Def: Si $\rho(x,y,z)$ es la densidad en Kg/m^3 de un objeto sólido E en $\mathbb{R}^3$ entonces el centro de masa de E es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dadas así:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_E x\,\rho(x,y,z)\,dV}{\underbrace{\left(\iiint_E \rho(x,y,z)\,dV\right)}_{MT = \text{Masa Total}}}$$

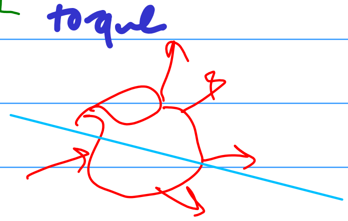
$$\bar{y} = \frac{\iiint_E y\,\rho(x,y,z)\,dV}{MT}$$

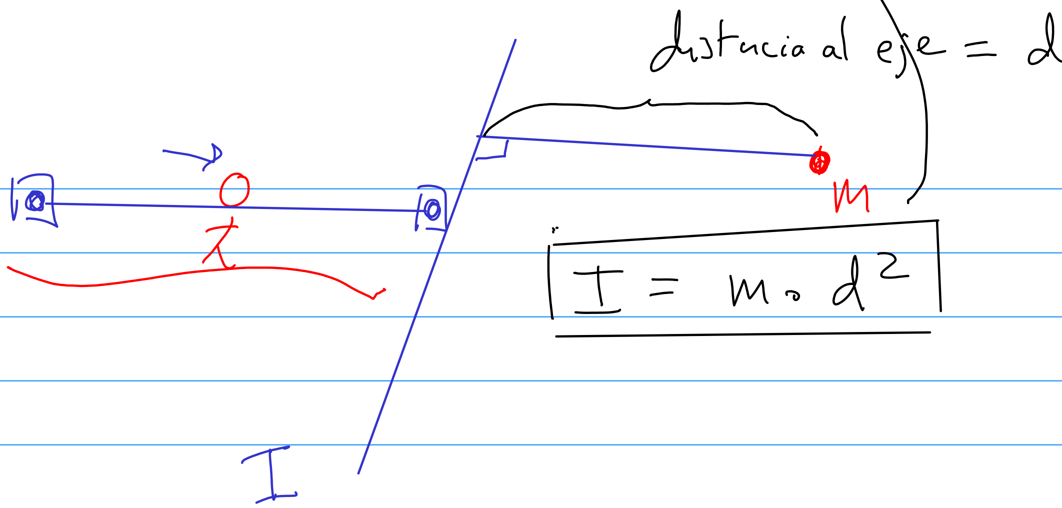
$$\bar{z} = \frac{\iiint_E z\,\rho(x,y,z)\,dV}{MT}$$

Momento de Inercia:

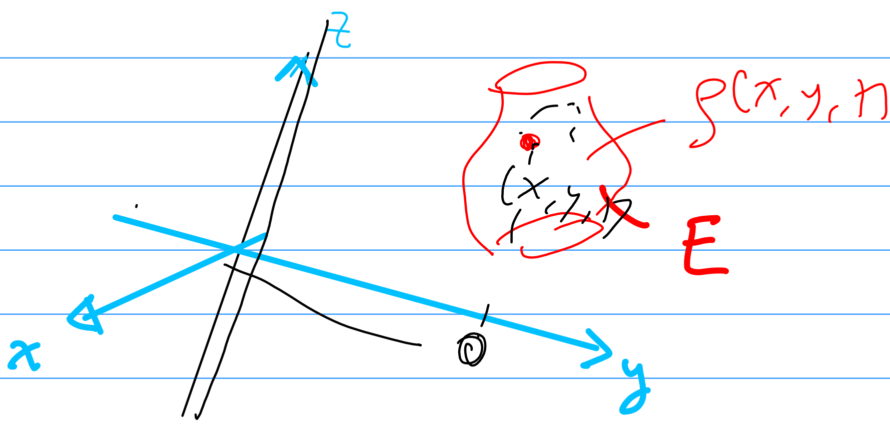
$$\left[\underbrace{\sum \vec{\tau}_i}_{\text{torque}} = \underbrace{I}_{\text{momento de inercia}}\,\overset{\text{aceleración angular}}{\alpha}\right]$$

alrededor de cualquier eje fijo.





$$\boxed{I = m \cdot d^2}$$



$$I = \iiint_E \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{dist}((x,y,z),\ \text{eje } z)} \rho(x,y,z)\, dV$$