CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS:

Hay un tipo de campos vectoriales que son los más importantes porque: (1) aparecen en nuestras descripciones de las leyes físicas
(2) Es FÁCIL calcular integrales de línea sobre ellos

los $\boxed{\text{campos conservativos}}$

Def: Un campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es conservativo si existe una función escalar $u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable que satisface

$$\boxed{F_{(x,y,z)} = \nabla u_{(x,y,z)}}$$

En ese caso u se llama un potencial escalar para F.

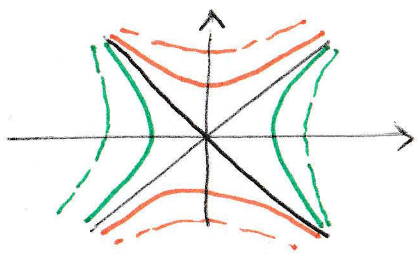
Ejemplo: $u(x,y,z) = xy + xz + yz$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix},$$

así que el campo $F(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$ es conservativo.

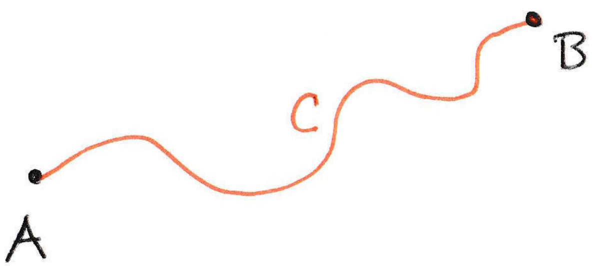
Ejemplo 2: $u(x,y) = x^2 - y^2$

∇u ?



Los campos conservativos son importantes porque sobre ellos es muy fácil calcular integrales de línea:

Teorema (Fundamental del cálculo para integrales de línea)



Si $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial conservativo con potencial escalar u entonces, para cualquier curva C desde A hasta B

$$\boxed{\int_C F\, d\vec{s} = u(B) - u(A)}$$

Ejercicio: Sea $F(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$ el campo vectorial conservativo del ejemplo anterior y sea $\sigma(t) = (\cos(t),\ t\sin(t),\ t^2)$ $0 \leq t \leq \pi$ una parametrización de la curva H.

Calcule $\displaystyle\int_H F\, d\vec{s} =$

DETENGA EL VIDEO Y CALCULELO UD. MISMO

Solución:

Del ejemplo anterior sabemos que $u(x,y,z) = xy + xz + yz$ es un potencial escalar para el campo F (porque $\nabla u = F$)

La curva σ inicia en $A = \sigma(0)$ y termina en $B = \sigma(\pi)$,

calculando $\sigma(0) = (1,0,0)$, $\sigma(\pi) = (1, 0, \pi^2)$

así que

$$
\begin{aligned}
\int_\sigma F\, d\vec{s} &= u(\sigma(\pi)) - u(\sigma(0)) \\
&= \cancel{u((1,0,0)) +} \\
&= u(1,0,\pi^2) - u(1,0,0) = \boxed{\pi^2 \text{ Joules}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Sea $F(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$.
Calcule un potencial escalar $g(x,y,z)$ para F.

DETENGA EL VIDEO Y CALCÚLELO
USTED MISM@ . . .

$F(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$

Solución: Queremos $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$g(x,y,z)$:

$$\left.\begin{aligned} &(i) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = y+z \\ &(ii) \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x+z \\ &(iii) \quad \frac{\partial g}{\partial z} = x+y \end{aligned}\right\}$$

De (i) $\boxed{g(x,y,z) = xy + xz + A(y,z) \ *}$

Reemplazaremos $(*)$ en (ii) y (iii) para buscar $A(y,z)$.

De (ii) $\quad x + \frac{\partial A}{\partial y} = x + z$

De (iii) $\quad x + \frac{\partial A}{\partial z} = x + y$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} &(I) \quad \frac{\partial A}{\partial y} = z \\ &(II) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = y \end{aligned}\right\}}$$

igual al problema original pero con sólo dos ecuaciones, dos variables, así que repetimos...

De (I) $\boxed{A(y,z) = zy + B(z) \ (*2)}$ Reemplazaremos $(*2)$ en II

De (II) $\quad y + B'(z) = y \implies B'(z) = 0 \implies \boxed{B(z) = C}$ ✓

Nos devolvemos $A(y,z) = zy + C$, $\boxed{g(x,y,z) = xy + xz + yz + C}$

Ejercicio: (* *)

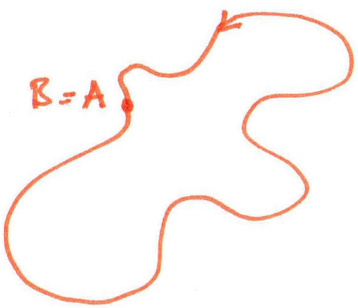
Sea $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial CONSERVATIVO.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas explicando su respuesta.

Af 1 (V ó F) Si C_1 y C_2 son dos curvas cualquiera iniciando en A y terminando en B entonces

$$\int_{C_1} F\, d\vec{s} = \int_{C_2} F\, d\vec{s}$$

Af 2: (V ó F) Si C es una curva cerrada cualquiera



$$\int_{C} F\, d\vec{s} = 0$$

Solución:

Def: Sea $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\nabla \times F}_{\text{"rotacional de" } F \text{ ó } rot(F)} := \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

Ejercicio: Sea $F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$. Calcule $\nabla \times F =$

DETENGA EL VIDEO Y CALCÚLELO UD MISM@

Ejercicio: Sea $F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = i(1-1) \mp j(\quad) + k(\quad) = (0,0,0)$$

Teorema: [Ayuda para chequear si un campo F es conservativo]

$$\boxed{(1)\ \text{Si } \nabla \times F \neq \vec{0} \Rightarrow F \text{ NO ES conservativo}}$$

(2) Si $\nabla \times F = \vec{0}$ y F es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ entonces F es conservativo

Nota: (1) Si $\nabla \times F = \vec{0}$ NO SABEMOS.

(2) Si $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad F(x,y) = (P, Q)$

$$\nabla \times F := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \longleftarrow$$ Es la componente $\hat{k}$ de $\nabla \times (P, Q, 0)$ $\quad (\mathrm{rot}(F) \cdot \hat{k})$