Hoy: Límites y continuidad en funciones escalares. $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

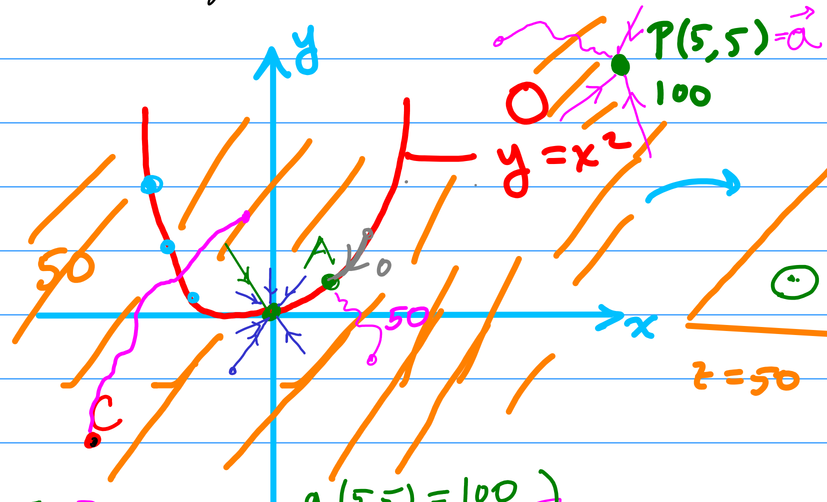
Ejemplo: $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

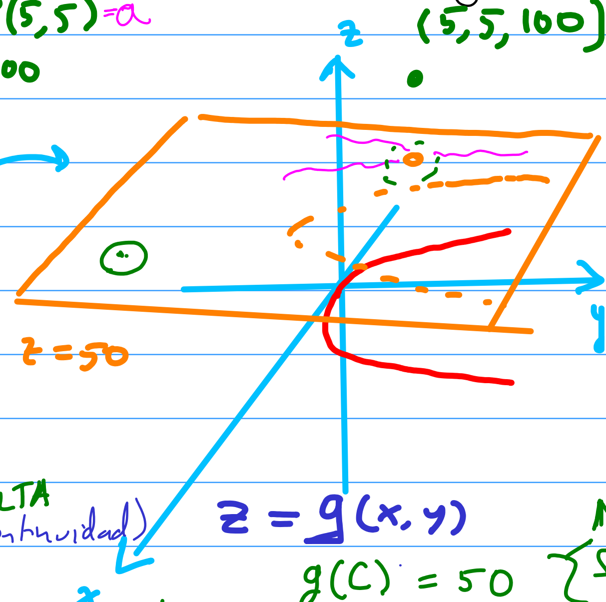
$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y = x^2 \\ 100, & \text{si } (x,y) = (5,5) \\ 50, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Cómo visualizar g?

(1) Conjuntos de nivel $\subseteq \mathbb{R}^2$

(2) Gráfica de g





Ej: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,5)} g(x,y) = 50$; $g(5,5) = 100$ → SALTA (discontinuidad)

$z = g(x,y)$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to A} g(x,y) =$ NO EXISTE!

$g(C) = 50$; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to C} g(x,y) = 50$ NO SALTA

Querríamos describir el comportamiento de $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ cerca de $\vec{x} = \vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = c}$$

= "Los valores de $f(\vec{x})$ (por valores distintos de $\vec{a}$) se acercan a c cuando $\vec{x}$ se acerca a $\vec{a}$, DESDE CUALQUIER DIRECCIÓN"

⇕

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\exists \delta \left(0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - c| < \varepsilon \right)\right)$$

Def: Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es continua en $\vec{a}$ si

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})}$$

No hay un salto en $\vec{a}$

Obs: Esto quiere decir:

(i) f está definida en $\vec{a}$

(ii) El límite $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(x)$ existe

(iii) Los valores de (i) y (ii) coinciden.

Ejercicio:

(1) Sea $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} h(x,y) \overset{?}{=}$

(b) Es h continua en $(0,0)$?

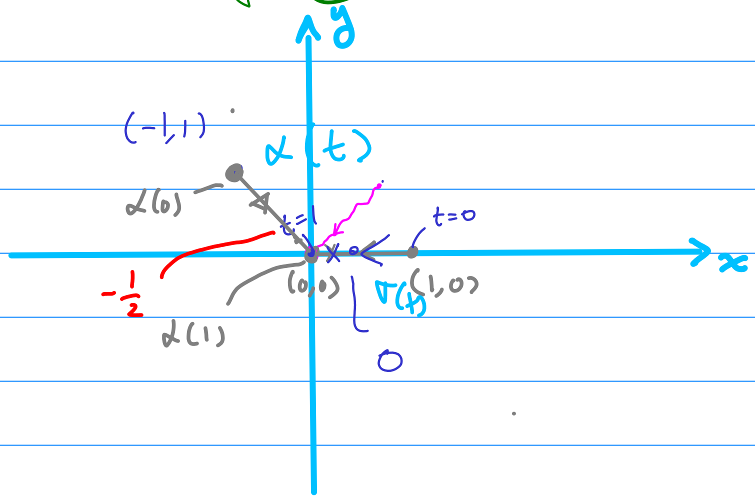
(2) Sea $t(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ c, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) $\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} t(\vec{x}) \overset{?}{=} 1$

(b) Existe un número real c que haga que t sea continua en $(0,0)$?

$h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 1, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



Sol: La recta que inicia en (1,0) y va hacia (0,0) se parametriza $\sigma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}\sigma(t)=\underbrace{(1,0)}_{\text{punto de la recta}}+t\,[\underbrace{(0,0)-(1,0)}_{\text{vector director}}]\\[2mm] 0\leq t\leq 1\end{cases}$$

$$\sigma(1)=(1,0)+1\,[(0,0)-(1,0)]=(0,0)$$

$$\sigma(t)=(1-t,0)$$

$$\lim_{t\to 1^-} h(\sigma(t))=\lim_{t\to 1^-}\frac{(1-t)\cdot 0}{(1-t)^2+0^2}=\lim_{t\to 1^-}0=0$$

Parametrizamos la recta que inicia en (-1,1) y va hacia (0,0)

$$\alpha(t)=(-1,1)+t\,[(0,0)-(-1,1)]$$

$$\alpha(t)=(-1+t,\ 1-t),\quad 0\leq t\leq 1$$

$$\lim_{t\to 1^-} h(\alpha(t))=\lim_{t\to 1}\frac{(-1+t)(1-t)}{(-1+t)^2+(1-t)^2}=$$

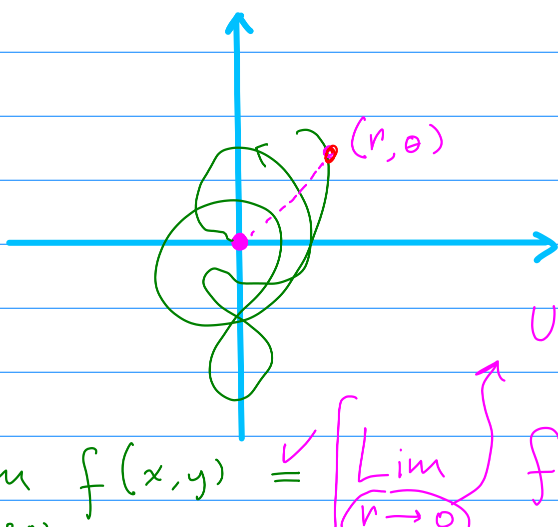
$$\lim_{t\to 1^-} \frac{(t-1)(1-t)}{(t-1)^2+(t-1)^2} = \lim_{t\to 1} \frac{\overset{-(\cancel{t-1})}{\cancel{1-t}}}{2\,\cancel{(t-1)}} = -\frac{1}{2}$$

(1a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ = NO EXISTE

porque el valor es distinto según la trayectoria de acercamiento

(1b) $h(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ porque $\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} h(\vec{x})$ NO EXISTE.

Hay un mecanismo muy útil para calcular límites de funciones en dos variables. Consiste en pasar a coordenadas polares y estudiar el límite univariado que aparece



UNIVARIADO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\checkmark}{=} \left[\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]$$

$$t(x,y) = \begin{cases} \left[1 + \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right], & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ c, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

PASAMOS A POLARES

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} t(x,y) = \lim_{r\to 0} t(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\lim_{r\to 0}\left(1 + \frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}\right) = \lim_{r\to 0}\left[1 + \frac{r^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r}}\right] = \boxed{1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} t(x,y) = 1.$$

(2b) $c=1$ hace que t sea continua en $(0,0)$ porque si $c=1$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} t(x,y) = t(0,0)$$

(*) Ej: Use el método de "pasar a polares" para dar otra solución del problema (1a).

Si queremos calcular $\lim_{(x,y)\to(7,9)} q(x,y) =$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + 7 \\ y = r\sin\theta + 9 \end{cases}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left[q(r\cos\theta + 7, r\sin\theta + 9)\right]$$