Hoy: $\boxed{\text{Integrales sobre curvas}}$

Vamos a definir dos tipos de integrales nuevas

¿Qué integrando?

$$\int_C f \, ds = \qquad\qquad\qquad \int_C \mathbf{F} \, d\vec{s} =$$

¿sobre qué?

donde $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada

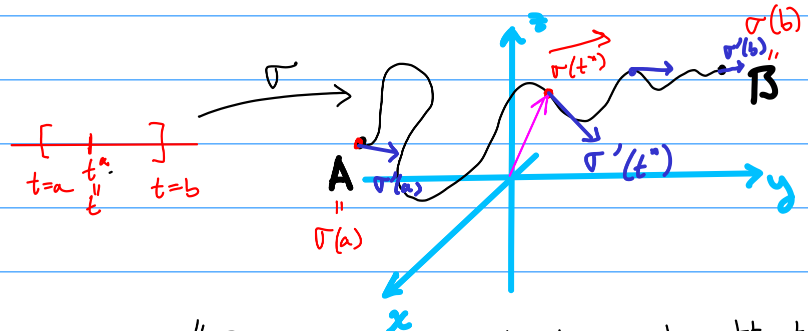
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar

$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial

y mencionaremos algunas de sus aplicaciones

(1) Repaso de curvas:

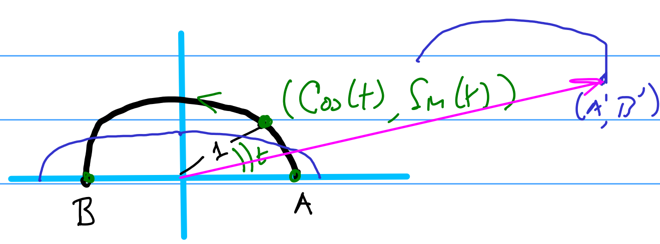
Def: Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ es una función $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ($[a,b] \subseteq \mathbb{R}$) inyectiva y diferenciable.



$\sigma(t) =$ "Posición de una partícula en el instante t"

$C = \operatorname{im}(\sigma)$.

Ejemplo: Encuentre una parametrización para el círculo unitario $\cap \{y \geq 0\}$.



$$\sigma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t)) + (A', D'), \quad 0 \le t \le \pi$$

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$$

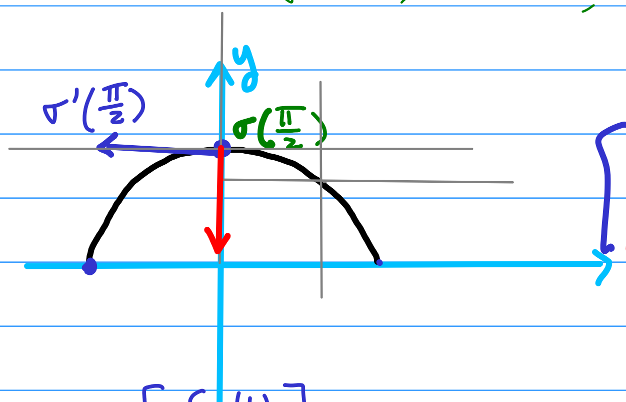
$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$D\sigma(t_0) = \begin{array}{c|c} & 1 \\ 3 & \begin{bmatrix} \sigma_1'(t) \\ \sigma_2'(t) \\ \sigma_3'(t) \end{bmatrix} \end{array} =: \overrightarrow{\sigma'(t)}$$

"Vector velocidad de la partícula en el instante t"

$$\left[\sigma''(t) = \text{"Vector aceleración"} \right]$$

Ej: Si $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \le t \le \pi$



$$\left[\vec{F} = m\, \overrightarrow{\sigma''(t)} \right]$$

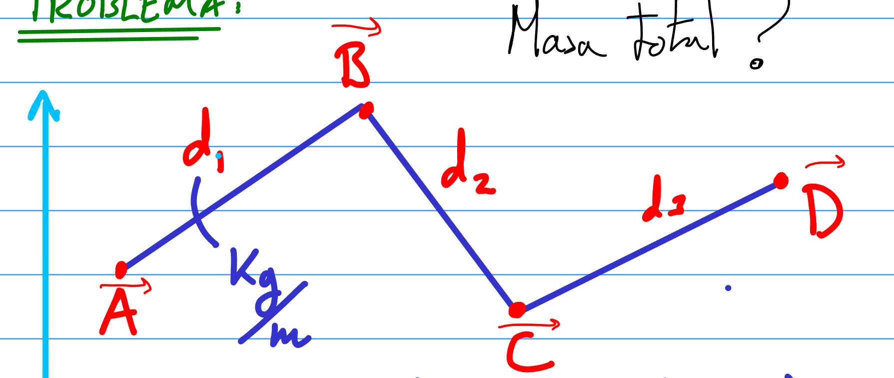
$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \quad \sigma'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma''(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad \sigma''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) Integral de funciones escalares sobre curvas $\quad \int_C f\, ds$

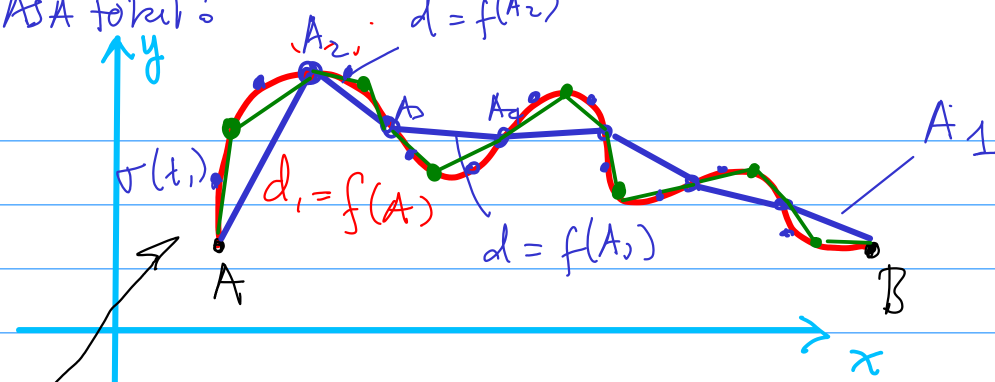
PROBLEMA:

Masa total?



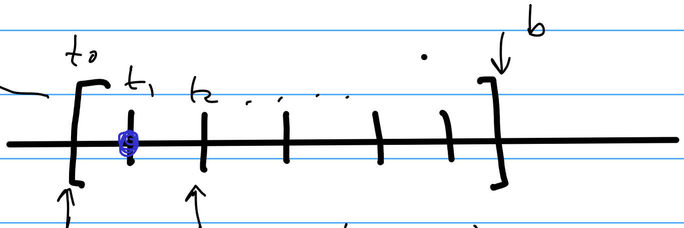
$$M = \underbrace{d_1}_{} (\|\vec{B} - \vec{A}\|) + d_2 (\|\vec{C} - \vec{B}\|) + d_3 (\|\vec{D} - \vec{C}\|)$$

MASA total?



$f(x,y) =$ "Densidad lineal del material de (x,y) en Kg/m"

$$\boxed{M = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left[f(\sigma(t_i)) \cdot \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| \right]}$$



$$t_i = (i-1)\left(\frac{b-a}{N}\right) + a, \quad 1 \le i \le N$$

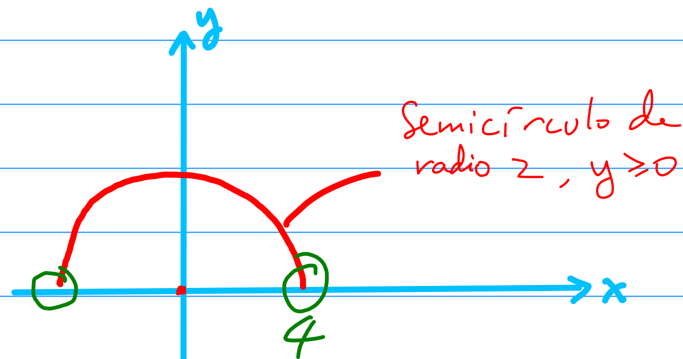
Def: Si $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definimos

$$\boxed{\int_C f \, ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f(\sigma(t_j)) \|\sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j)\| \qquad t_i = a + i\left(\frac{b-a}{N}\right)}$$

Teorema: Si $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la curva C y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua:

$$\boxed{\int_C f\, ds = \underbrace{\int_a^b f(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|\,dt}_{\text{fácil, si tenemos } \sigma(t) \text{ integral en la variable } t.}}$$

Ejemplo:



(a) Calcule la longitud del cable.

(b) Calcule la masa total si $\rho(x,y) = x^2$

(c) Cuál es la $\boxed{\text{DENSIDAD PROMEDIO}}$ del cable.

Solución:

Construimos una parametrización

$$\sigma(t) = (\underbrace{2\cos(t)}_{x(t)}, 2\sin(t)), \quad 0 \le t \le \pi$$

$$\sigma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = \sqrt{4} = 2$$

(a) longitud $= \int_C 1\, ds =$

$$= \int_0^\pi 2\, dt = \boxed{2\pi}$$

Usamos la parametrización

(b) Masa $= \int_C x^2\, ds = \int_0^\pi f(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|\,dt$

$$= \int_0^{\pi} 4\cos^2(t)\cdot 2\, dt = 8\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt$$

$$= 8\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = 8\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\cancel{\sin(2t)}}{4}\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right) \quad 0$$

$$= \boxed{\boxed{4\pi} = M}$$

(c) Densidad promedio $\dfrac{M}{L} = \dfrac{4\pi}{2\pi} = 2\ \text{Kg}/\text{m}$

Hecho: $\int_C f\, ds$ no depende de la parametrización, es decir podemos usar cualquier parametrización de C para calcularla.

(3) Repaso campos vectoriales.

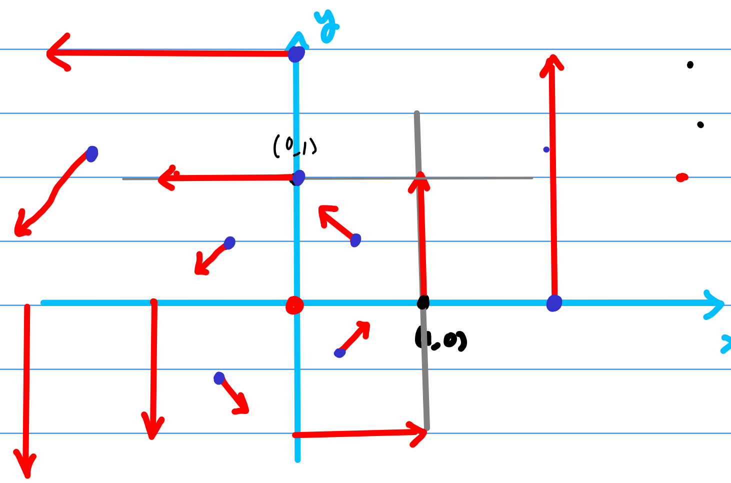
Def: Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función

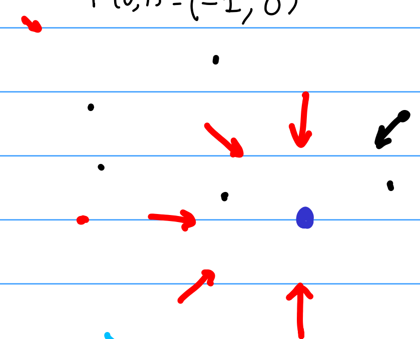
$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

"En el lugar $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ponemos la flecha $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$"

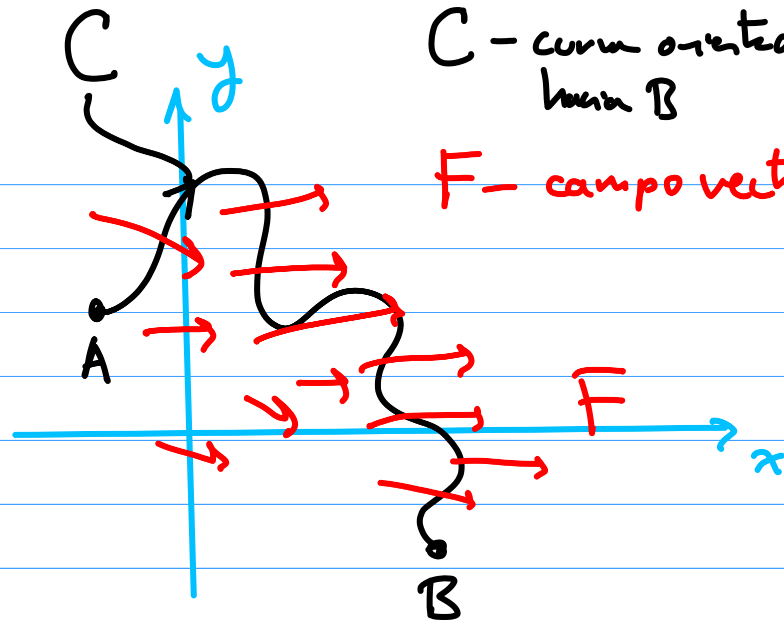
$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad F(1,0) = (0,1)$

Ejemplo: $F(x,y) = (-y,x)$ $\quad F(0,1) = (-1,0)$





$$\left[\, g(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\frac{K}{\|\vec{x}\|^2} \,\right]$$



C – curva orientada de A hacia B

F – campo vectorial

$$\int_C F\, d\vec{s} = \text{"Trabajo realizado por el campo } F \text{ a lo largo de la curva } C\text{"}$$

"Integral de línea de F a lo largo de C"

Teorema: Si $\sigma(t)$ es una parametrización de C entonces

$$\int_C F\, d\vec{s} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$