1) Ya está en la página fecha de entrega de talleres 2 y 3...

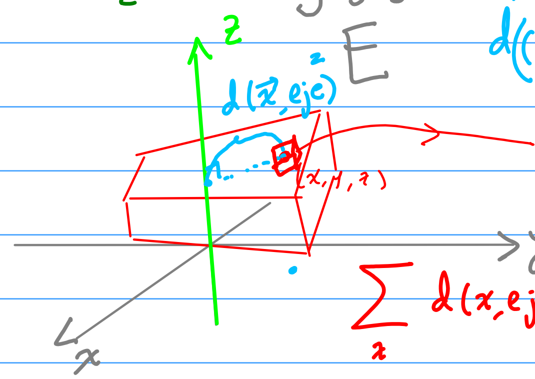
Hoy: (1) Momentos de inercia

(2) Integración sobre curvas parametrizadas (1 de 2)

(1) **Def:** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un objeto sólido con densidad $\rho(x,y,z)$ (en Kg/m^3).
El momento de inercia de E alrededor del eje z es

$$I_z := \iiint_E \underbrace{\overbrace{(x^2+y^2)}^{m^2}}_{d((x,y,z),\,\text{eje } z)^2} \overbrace{\rho(x,y,z)\,dV}^{\text{masa}}$$

ρ: Kg/m^3, dV: m^3



$$\sum_x d(x,\text{eje})^2\, \text{masa}(x)$$

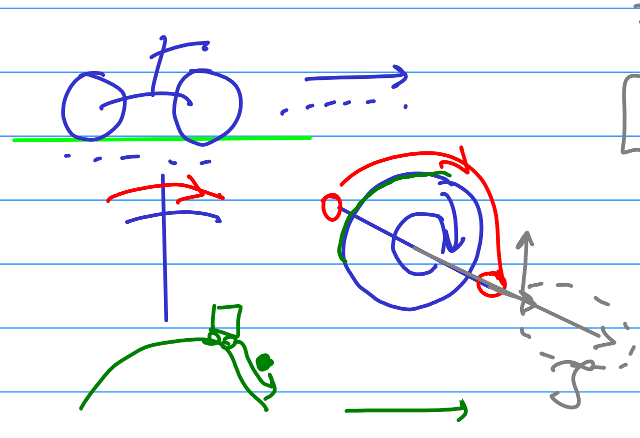
$I = Kg\,m^2$

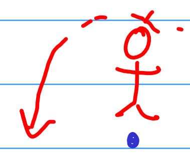
Ejemplo: $\left[I_x = \left[\iiint_E (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV \right] \right]$

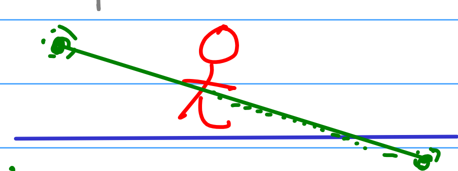
?

$F = m\,a$

$[J = [\boxed{I}]\,\alpha]$





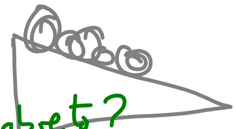


$$\frac{J}{I} = \alpha$$

$\alpha = 0$

* Material complementario (VOLUNTARIO)

¿Qué es el momento de inercia?



$\iiint_E f \, dV$ — Qué objeto? — Qué región?

(2) Integrales sobre curvas

Hoy $\int_C f \, ds =$ (i) ¿Qué son y para qué sirven? ✓

f: función escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

C: curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$

[(ii) Cómo se calculan?]

Def: Una curva parametrizada σ en $\mathbb{R}^3$ es una función $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

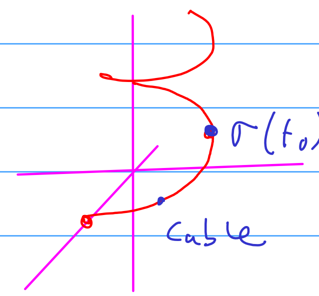
Interpretación física

$\sigma(t) =$ "Vector posición de una partícula en el instante t"

Ej: $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$



Problemas:

Suponga que $\sigma(t)$ describe la forma de un cable y $\rho(x,y,z)$ nos dice la densidad (en Kg/m) del punto (x,y,z) en el cable.

→ (a) Cuál es la masa total del cable? $\int_\sigma \rho \, ds$

(b) Cuál es la longitud total del cable? → $\int_\sigma 1 \, ds$

→ (c) Dónde está el centro de masa del cable? $(\bar{x}, \bar{y})$

→ (d) Cuál es el momento de inercia del cable alrededor del eje x?

$$I_{\text{alrededor de } z} = \int_\sigma (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\, ds$$

$$\left[\ \bar{y} = \frac{\int_\sigma y \rho \, ds}{\int_\sigma \rho \, ds}\ \right]$$

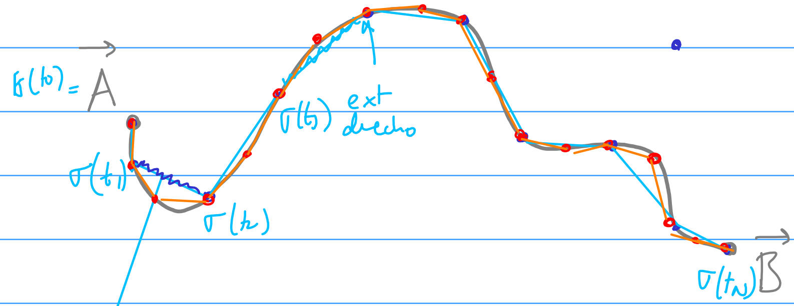
$a \quad t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_N \quad b$

$\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\sigma(a) = \vec{A}, \quad \sigma(b) = \vec{B}$

$\rho(x,y) = \frac{Kg}{m}$ en (x,y)

masa total ?



Imaginamos que densidad es constante igual al ext derecho.

$$\text{Masa} = \|\sigma(t_1) - \sigma(t_0)\| \, \rho(\sigma(t_1)) + \|\sigma(t_2) - \sigma(t_1)\| \, \rho(\sigma(t_2)) + \cdots + \|\sigma(t_N) - \sigma(t_{N-1})\| \, \rho(\sigma(t_N))$$

$$\boxed{\text{Masa} = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \, \rho(\sigma(t_j)) = \left[\int_\sigma \rho \, ds\right]}$$

¿Cómo se calcula de manera exacta?

$\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Teorema: Sea $\sigma(t)$ una curva parametrizada diferenciable en $\mathbb{R}^3$, sea $\rho(x,y,z)$ una función escalar continua. Entonces

$$\int_\sigma \rho \, ds = \left[\int_a^b \underbrace{\rho(\sigma(t)) \, \|\sigma'(t)\| \, dt}_{\text{Integral univariada con variable } t}\right]$$

Necesito:

(1) $\rho(x,y,z)$ ✓

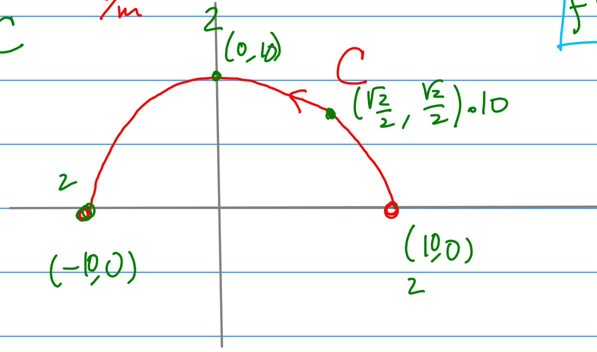
(2) Conocer la parametrización $\sigma(t)$ ✓

Ejemplo: Sea C la mitad superior del círculo de radio 10 en $\mathbb{R}^2$ centrado en el origen. Calcule

$$\int_C (2+x^2y)\,ds =$$

masa total de C Kg/m   m

$$\boxed{f(x,y) = 2+x^2y} \quad \text{Kg/m}$$



$$2 + 100\,\frac{2\sqrt{2}}{8}$$

$$\begin{cases} \sigma(t) = (10\cos(t), \; 10\sin(t)) \\ 0 \le t \le \pi \end{cases} \qquad 10\cos(t) = x(t), \quad 10\sin(t) = y(t)$$

Usando Fubini:

$$\int_\sigma 2+x^2y\,ds = \int_0^\pi f(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|\,dt$$

$$\sigma'(t) = (-10\sin(t), \; 10\cos(t))$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{10^2\sin^2(t) + 10^2\cos^2(t)} = 10$$

$$f(\sigma(t)) = 2 + (10\cos(t))^2(10\sin(t))$$

$$= 2 + 1000\cos^2(t)\sin(t)$$

$$= \int_0^\pi (2+1000\cos^2(t)\sin(t))\,10\,dt$$

$$= \underbrace{20\pi}_{20\int_0^\pi dt} + 10.000\left[\int_0^\pi \cos^2(t)\sin(t)\,dt\right] = \left[20\pi + (10.000)\frac{2}{3}\right]$$

Kg

$$-\frac{\cos^3(t)}{3}\Big|_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3}$$