Taller: Integrales (de ambos tipos) sobre superficies

Problema 1: Masa total

Calcule la masa de la parte de la superficie parabólica $z = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 4$ si la densidad de un punto (x, y, z) de la superficie es igual a z.

Problema 2: Centro de masa

Encuentre las coordenadas del centro de masa de la parte de la esfera (hueca) de radio 10 ($x^2 + y^2 + z^2 = 10$) cuyos puntos satisfacen $x, y, z \geq 0$. Asuma que la densidad de un punto en la esfera es constante.

Problema 3: Momento de Inercia

Calcule el momento de inercia de una esfera (hueca) de radio R y masa M alrededor de un eje que pasa a través del centro de la esfera.

Problema 4:

Una tubería cilíndrica con centro el eje x y radio 5 contiene un fluido viscoso que se mueve siguiento el campo de velocidad $V = (e^{-x}, 0, 0)$ en metros por segundo. Calcule el flujo (en m^3/sec) a través de los siguientes cortes (asumiendo que la orientación del corte esta dada por un vector con coordenada $x > 0$):

1. Un corte perpendicular a la tubería.
2. Un corte hecho con el plano $y = x + 10$.
3. Un corte contenido en el plano $z = 0$.

Problema 5:

Sea $\vec{x} = (x, y, z)$ un punto en $\mathbb{R}^3$. Llamemos F al campo vectorial dado por $F(\vec{x}) = -\frac{x}{\|x\|^3}$. Calcule el flujo del campo vectorial F a través de la esfera de radio 2 centrada en el origen (orientada hacia afuera).