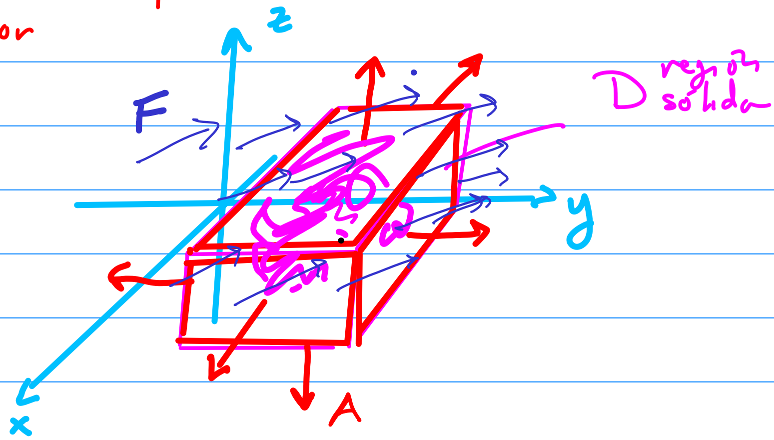
Hoy: (1) Teorema de Gauss
(2) Ejemplo
(3) Ley de Gauss

<u>Teorema:</u> Sea $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial
Sea D una región sólida en $\mathbb{R}^3$ y
sea A la frontera de D orientada hacia el exterior



Si F es diferenciable en todos los puntos de D
entonces:

$$\underbrace{\iint_A F\, d\vec{S}}_{\text{Flujo de } F \text{ a través de } A \text{ hacia afuera}} = \iiint_D \overset{\nabla\cdot F}{\overset{\|}{\mathrm{div}(F)}}\, dV$$

Obs: (1) Cálculo de $\overset{\text{“divergencia de } F\text{”}}{\mathrm{div}(F)} \overset{\text{notación}}{\equiv} \nabla\cdot F$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) =$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \mathrm{div}(F)$$

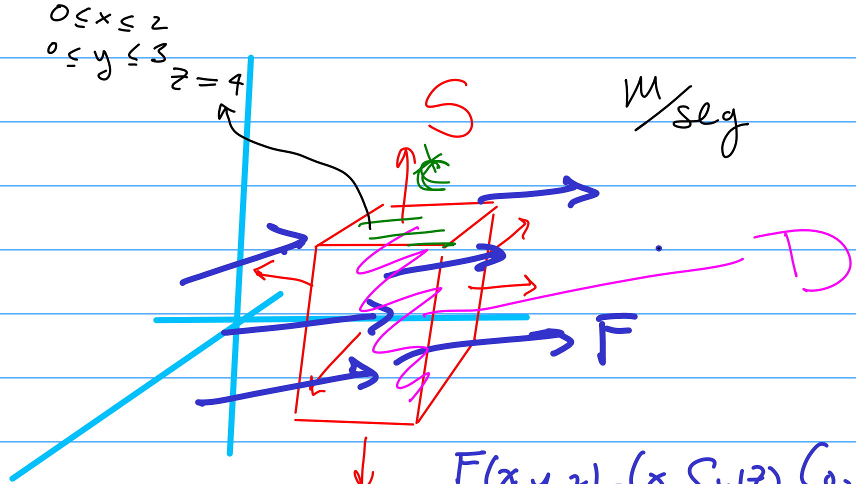
(2) Útil porque el lado derecho es mucho más simple que el izquierdo en general.

(3) "Se usa para calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada S."

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (x, \sin(z), \cos(y^2))$

(a) Calcule el flujo de F a través de las
* paredes del ladrillo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 4$ orientada hacia afuera.

(b) Calcule el flujo a través de las 5 paredes diferentes a la de encima.



$F(x,y,z) = (x, \sin(z), \cos(y^2))$

$$\iint_S F\, d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV = \operatorname{Vol}(D)$$

$$\operatorname{div}(F) = 1$$

Mucho más simple que F!

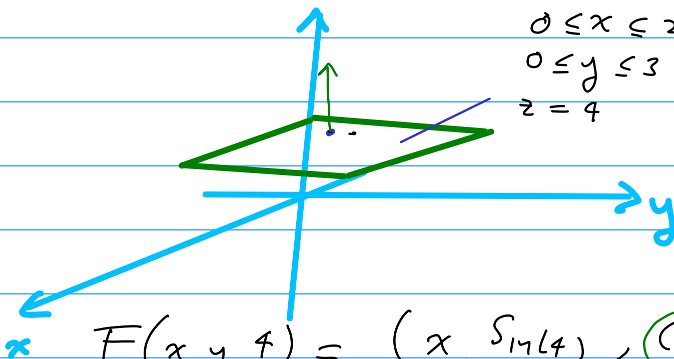
$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \quad \frac{m}{seg} \cdot m^2 = \frac{m^3}{seg}$$

(b) $$\overbrace{\iint_{\text{5 caras de } S} F\, d\vec{S}}^{?} = \iint_S F\, d\vec{S} - \iint_C F\, d\vec{S}$$

? = 24 m³/sec (1) Teo Gauss − 2·3

(ver cálculo abajo)

Para calcular el flujo hacia arriba a través de C
vamos a integrar el campo vectorial en C



$0 \le x \le 2$
$0 \le y \le 3$
$z = 4$

$$F(x, y, 4) = (x, \sin(4), \cos(y^2))$$

$$\iint_C F\, d\vec{S} = \iint_C (F \cdot \hat{n})\, dS = \iint_C \cos(y^2)\, dS$$

$\hat{n} = (0, 0, 1)$

$$= \int_0^2 \int_0^3 \cos(y^2)\, dy\, dx = \underline{2}\left(\int_0^3 \cos(y^2)\, dy\right)$$

$$\left[\Phi(u, v) = (u, v, 4)\right.$$
$$\Phi_u = (1, 0, 0)$$
$$\Phi_v = (0, 1, 0)$$
$$\Phi_u \times \Phi_v = (0, 0, 1)$$
$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = 1$$

$$\left[\cos(y) \approx \sum_{k=0}^{1000} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}\right]$$

$$\cos(y^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{4k}}{(2k)!}$$

$$\int_0^3 \cos(y^2)\, dy = \int_0^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{4k}}{(2k)!}\right) dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^3 \frac{(-1)^k y^{4k}}{(2k)!}\, dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{y^{4k+1}}{(4k+1)} \Bigg|_{y=0}^{y=3} =$$

$=$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \frac{3^{4k+1}}{(4k+1)} = \sqrt{3} \right]$$

<u>Ejercicio:</u> La ley de Coulomb dice que el campo eléctrico producido por una carga puntual Q en el origen es

$$\left[H(\vec{x}) = Q \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right]$$

(a) Calcule el flujo de H hacia afuera de una esfera de radio R centrada en $(0,0,0)$ parametrizando la esfera

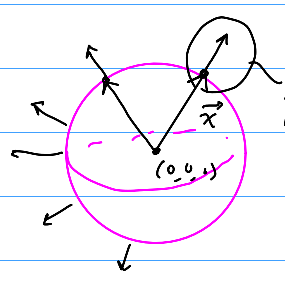
(b) Calcule $\operatorname{div}(H)$

(c) Calcule el flujo de H a través de la frontera del cubo $-2 \le x, y, z \le 2$.

<u>Sol a</u> usando

$$\iint_A \underbrace{F}_{\text{campo vectorial}} \, d\vec{S} = \iint_A \underbrace{(F \cdot \hat{n})}_{\text{escalar}} \, dS$$

Si A es una esfera centrada en $(0,0,0)$ y $\vec{x} \in A$ entonces $\left[\hat{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right]$



$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ en $\vec{x}$

$$\iint_{S_R} H \, d\vec{S} = \iint_{S_R} \frac{Q}{R^2} dS = \frac{Q}{R^2} \iint_{S_R} 1 \, dS = (4\pi R^2) \cdot \frac{Q}{R^2} = (4\pi Q)$$

$$H \cdot \hat{n} \stackrel{\text{si } \vec{x} \text{ esta la esfera de radio } R}{=} Q \frac{\vec{x}}{\|x\|^3} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{Q}{R^2}$$