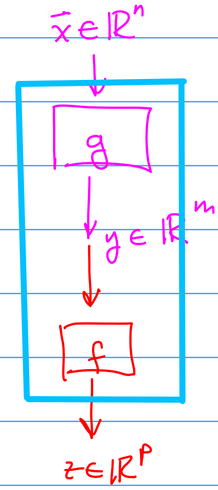
Hoy: Regla de la cadena

$$\begin{tikzcd}
\vec{a} \in \mathbb{R}^n \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h = f\circ g"'] & & \mathbb{R}^m \ni g(\vec{a}) \arrow[dl, "f"] \\
& \mathbb{R}^p &
\end{tikzcd}$$

$h(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$



Cómo calcular $\overbrace{Dh(\vec{a})}^{\text{matriz de } p\times n} \stackrel{?}{=}$

Teorema: Suponga que

(i) $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es dif en $g(\vec{a})$

entonces la función $h = f \circ g$ cumple

(1) h es DIFERENCIABLE en $\vec{a}$ y

(2) $$\boxed{\underbrace{Dh(\vec{a})}_{p\times n} = \underbrace{Df(g(a))}_{p\times m} \cdot \underbrace{Dg(a)}_{m\times n}}$$

producto de matrices

Obs: La regla de la cadena es muy útil porque permite calcular $Dh(\vec{a})$ SIN TENER QUE CALCULAR h. y sabiendo solamente Df y Dg (y no necesariamente f, g)

Obs: En cálculo 1:

$h(x) = f(g(x))$

$h'(a) = f'(g(a))\, g'(a)$

generalización

Ejercicio: Sea $g(x,y) = (x^2+y^2,\ x^2-y^2)$

y $f(A,B) = (B^2,\ A-B)$

(1) Calcule $h = f \circ g$

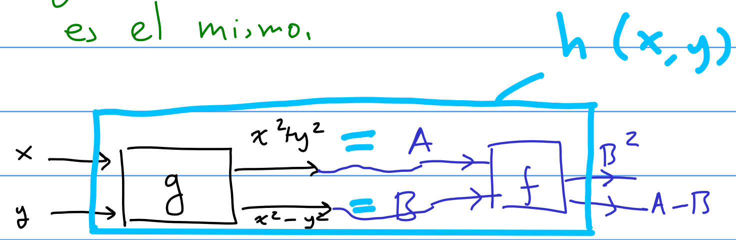
(2) Calcule $Dh(1,2)$ de dos maneras:

(i) Usando (1) y derivando

(ii) Usando regla de la cadena

y verifique que el resultado obtenido es el mismo.

Solución:



(1) $\begin{cases} h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ h(x,y) = \left((x^2-y^2)^2,\ 2y^2 \right) \end{cases}$

(2) **método 1:**

$$Dh(1,2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(1,2) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(x^2-y^2)\cdot 2x & -2(x^2-y^2)2y \\ 0 & 4y \end{bmatrix}_{(1,2)}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} -12 & 24 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = Dh(1,2)}$$

Método 2: Regla de la cadena

$$h(x,y) = f(g(x,y))$$

$$Dh(1,2) = Df(g(1,2)) \cdot Dg(1,2)$$

$$Dh(1,2) = \underbrace{Df(g(1,2))} \cdot \underbrace{Dg(1,2)}$$

$$f(A,B) = (\underset{f_1}{B^2}, \underset{f_2}{A-B})$$

$$g(x,y) = (\underset{g_1}{x^2+y^2}, \underset{g_2}{x^2-y^2})$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$Dg(1,2) = \begin{array}{c} \\ g_1 \\ g_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} \end{array} (1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$g(1,2) = (5, -3)$$

$$Df(5,-3) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2B \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} (5,-3) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Dh(1,2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{Df(5,-3)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}_{Dg(1,2)} = \begin{bmatrix} -12 & 24 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \checkmark$$

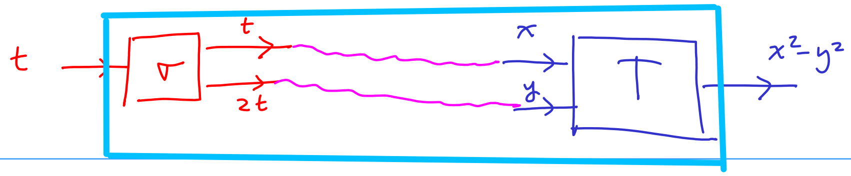
Ejemplo: La temperatura en °C de un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está dada por $T(x,y) = x^2 - y^2$. La posición de una partícula en el instante t está dada por $\sigma(t) = (t, 2t)$.

(1) Qué interpretación tiene $[h(t) := T(\sigma(t))]$? En qué unidades está?

(2) Qué mide $h'(t)$? En qué unidades está?

(3) Calcule $h'(t)$ en $t = 1$

$\sigma(t) = (t, 2t)$



$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$h(t) =$ "La temperatura experimentada por la partícula en el instante t" en °C.

(2) $h'(t) =$ "Tasa de cambio de la temperatura experimentada por la partícula en el instante t" en °C/sec.

(1) $Dh(t)$

una sola variable

(3) $h(t) = T(\sigma(t))$

$h'(1) = Dh(1) = DT(\sigma(1)) \cdot D\sigma(1)$

R. cadena

$\sigma(t) = (t, 2t)$ $\qquad T(x,y) = x^2 - y^2$

$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$D\sigma(0) = \begin{array}{c c} & t \\ \sigma_1 & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right. \\ \sigma_2 & \left.\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} t \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$DT(1,2) = \begin{array}{cc} x & y \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 2x & -2y \end{bmatrix}} \end{array}$$

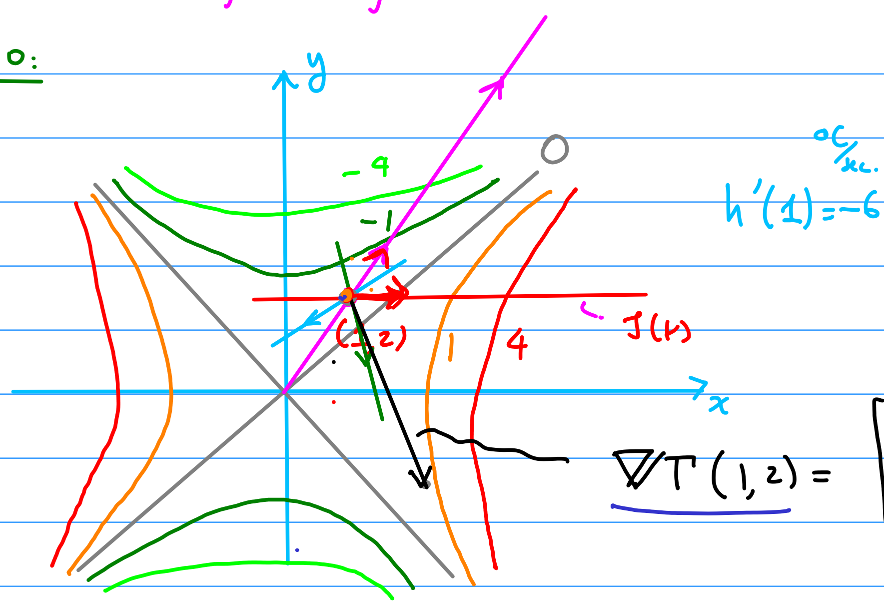
$$= \begin{bmatrix} 2, & -4 \end{bmatrix}$$

$\sigma(1) = (1, 2)$

$$Dh(1) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 - 8 = -6 \ °C/seg$$

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:
$T(x,y) = x^2 - y^2$

Dibujo:



$^{o}C/_{sec.}$

$h'(1) = -6$

$$\nabla T(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} J(t) = (1+t, 2) = (1,2) + t(1,0) \\ h(t) = T(J(t)) \quad ; \quad h'(0) \end{cases}$$

!!

$$Dh(0) = DT(J(0)) \cdot DJ(0)$$

$$= DT(1,2) \cdot DJ(0)$$

Obs: Para cualquier trayectoria σ

$$Dh(0) = DT(1,2) \cdot D\sigma(0)$$

$$[2, -4] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

La tasa de cambio de la temperatura $T(x,y)$ en el punto $(1,2)$ en la dirección $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ es

$$[2 \ \ -4] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 2v_1 - 4v_2.$$

ESTE ES UN VECTOR MUY IMPORTANTE, llamado "el gradiente" de T en $(1,2)$.