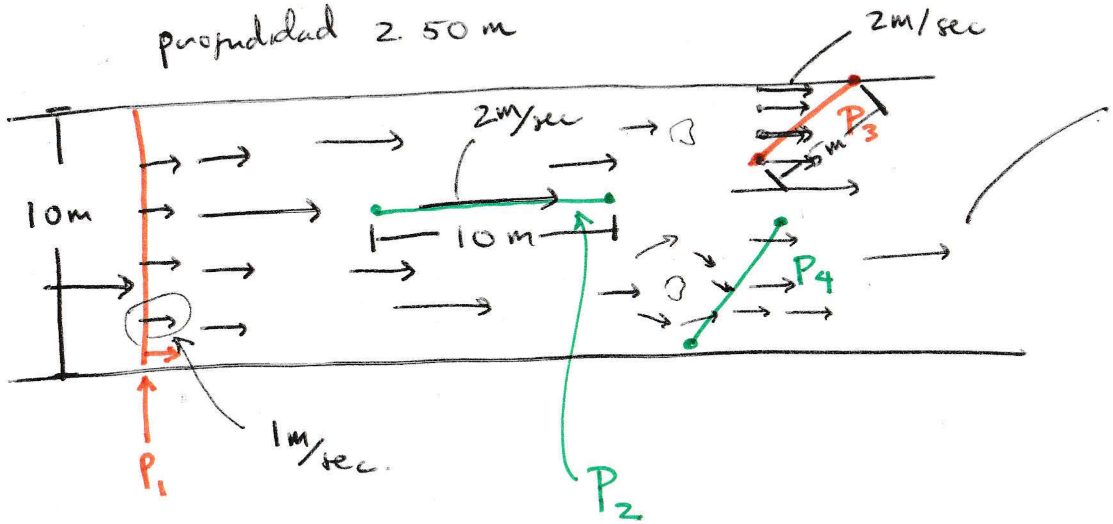
Integrales de flujo:

Problema: Cuánta agua "fluye" en un río?



$V(x,y)$ = "Campo de velocidad del río"

ⓐ A través de P_1?

ⓑ A través de P_2?

ⓒ A través de P_3?

ⓓ A través de P_4?

Detenga el video e intente responder la pregunta uno mism@

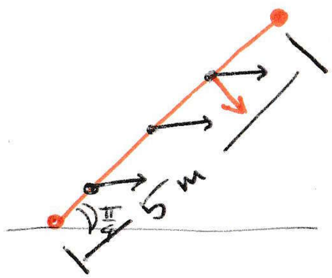
Solución:

$$m^2 \cdot m \cdot \frac{m}{sec} = m^3/sec$$

(a) $$\underbrace{10 \times 2.5}_{\text{Área de } P_1} \times 1 = 25\ m^3/sec.$$

(b) $$\underbrace{10 \times 2.5}_{\text{Área de } P_2} \times \qquad =$$

(c)

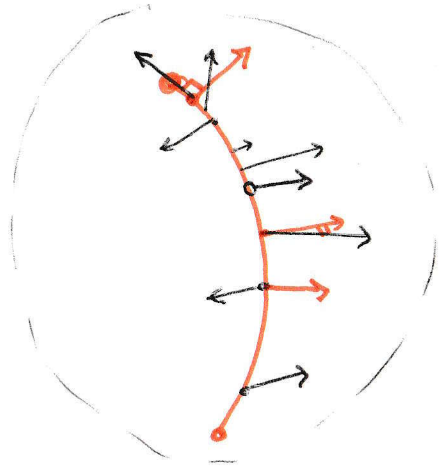


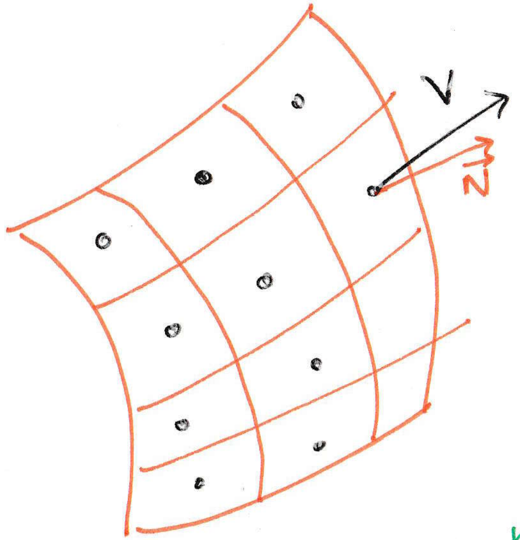
$$N = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$V = (2, 0)$$

$$\underbrace{5m \times 2.5m}_{\text{Área de } P_3} \times \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2}}}_{\substack{\text{componente} \\ \text{del flujo} \\ \text{en dirección} \\ \text{normal a la} \\ \text{superficie}}} = (\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 2.5)\ m^3/sec.$$

d





componente del campo vectorial perpendicular a $\vec{S}$ en dirección de la orientación N.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \text{Area}(R_{ij}) \cdot \vec{V} \cdot \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

$$\parallel$$

$$\boxed{\iint_S V \, d\vec{S}}$$

Flujo del campo vectorial V a través de la superficie S.

Obs:

$$\iint_S V \, d\vec{S} = \iint_S (V \cdot \hat{n}) \, dS$$

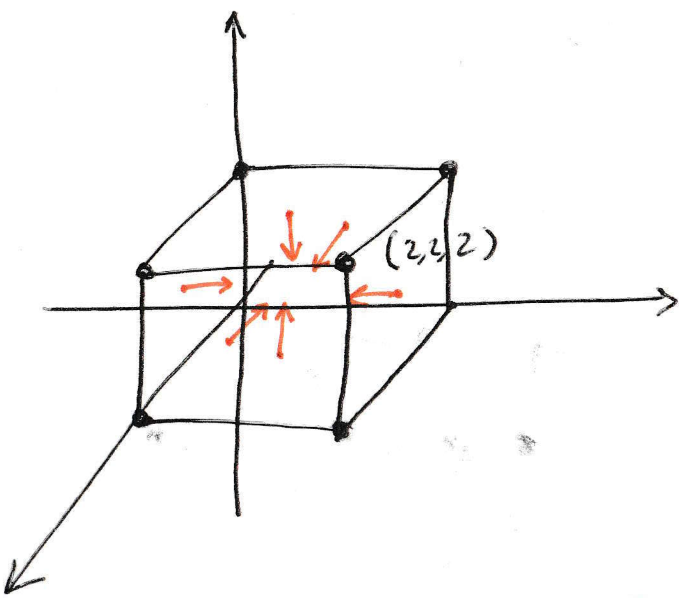
esta forma a veces es muy útil para el cálculo.

Ejemplo:

Sea $V(x,y,z) = (e^x, 0, 0)$ y sea

S el borde del cubo $\begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 2 \end{array}$. Calcule el

flujo de V a través de S (con orientación hacia adentro del cubo).

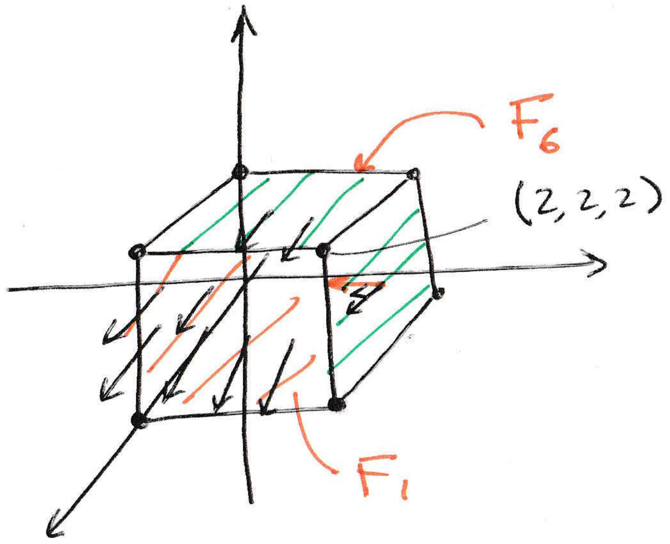


DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESPONDERLO USTED MISM@.

Solución.

$$\left[V(x,y,z) = (e^{x}, 0, 0) \right]$$

Paralelo al eje x y constante en los planos $x = k$



$$\iint_S V\,d\vec{S} = \iint_{F_1} V\,d\vec{S} + \iint_{F_6} V\,d\vec{S} + \iint_{\boxed{F_2,\dots,F_5}} V\,d\vec{S}$$

$$= -e^2 \cdot 4 + (-1 \cdot 4) = -4(e^2+1)$$

**

¿ $\boxed{V \text{ ó } F}$?

El flujo de todo campo vectorial a través de una superficie cerrada es cero porque todo lo que entra tiene que salir.

FALSO.

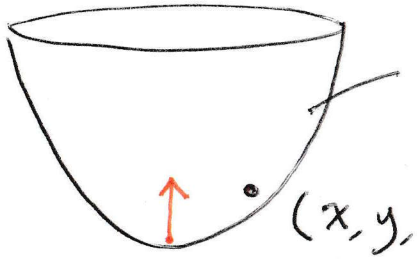
Teorema: [Cómo calcular flujos?] Sea $F(x,y,z)$ un campo vectorial y Σ una superficie parametrizada $\Phi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} F \, d\vec{S} = \iint_{A} F(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v \, dA}$$

Ejercicio: Sea $F(x,y,z) = (xy, xz, yz)$ y sea Σ la parte del paraboloide $z = x^2+y^2$ con $0 \leq z \leq 9$ calcule el flujo de F a través de Σ orientada hacia arriba. (No es necesario resolver la integral sino solo plantearla)

DETENGA EL VIDEO Y RESUÉLVALO UD MISM@ ...

Solución:



$z = x^2+y^2$

$F(x,y,z) = (xy, xz, yz)$

$(x,y,z) = (x,y,x^2+y^2)$

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,y) &= (x,y,x^2+y^2) \\ D &= \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 9\} \end{aligned}\right\} \text{— superficie parametrizada } \Sigma$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_x = (& 1, & 0, & 2x \;) \\ \Phi_y = (& 0, & 1, & 2y \;) \end{array}$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (-2x, -2y, 1) \leftarrow \text{Normal orientada hacia arriba}$$

$$\iint_{\Sigma} F \, d\vec{S} = \iint_D F(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x \times \Phi_y \, dA$$

$$= \iint_D (xy, x(x^2+y^2), y(x^2+y^2))(-2x, -2y, 1) \, dA$$

$$= \left[\iint_D -2x^2y - 2yx(x^2+y^2) + y(x^2+y^2) \, dA \right] \overset{\uparrow}{=}$$

Cambio de variable en 2D a polares ...