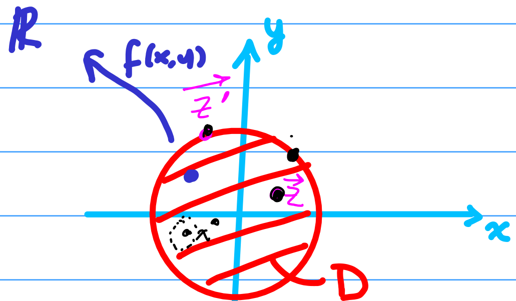
Hoy: (1) Cómo resolver problemas de optimización?
(2) Justificación de los métodos.

Problema: [minimizar x^2-y^2 sujeto a: $x^2+y^2 \leq 1$]

$f(x,y) = x^2-y^2$
FUNCIÓN OBJETIVO

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ REGIÓN FACTIBLE
$\parallel$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq c\}$
con $g(x,y) = x^2+y^2$
$c = 1$



Cómo Resolver el problema?

Teorema: [Cómo buscar mínimos locales]
Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y sea
$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) \leq c\}$ para algún $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable
$c \in \mathbb{R}$.

(1) Si x^* es un mínimo local para f en el interior de D entonces

Puntos críticos $\longrightarrow$ $\boxed{\nabla f(x^*) = \vec{0}}$

(2) Si x^* es un mínimo local en la frontera de D $\overbrace{}^{\partial D \,=}$ entonces $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisface

explicación al final

Puntos críticos de mult. de Lagrange. $\longrightarrow$
$$\boxed{\begin{cases} \nabla f(x^*) = \lambda\, \nabla g(x^*) \\ g(x^*) = c \end{cases}}$$

grad de f es múltiplo del grad de g

x^* está en el borde

Método: (1) Buscamos todos puntos críticos de f en el interior de D

$$\left[\nabla f(x) = \vec{0}\right] \quad \leadsto \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_m\}$$

(2) Buscamos puntos críticos de Lagrange en la frontera de D

$(\vec{x}, \lambda)$:

Resolver $\rightarrow$ $\begin{cases} \nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) = C \end{cases}$ $\leadsto \{(\vec{P}_{m+1}, \lambda_1), \ldots, (\vec{P}_t, \lambda_t)\}$

(3) Evalúo f en TODOS los candidatos $\vec{P}_i$ y tomo aquellos donde el valor sea mínimo (ó máximo).

** NOTA: Muy importante!!

Ejemplo: $\min\ x^2 - y^2 \quad$ s.a. $\quad x^2 + y^2 \leq 4$.

(1) Busco soluciones de $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix}(x,y) \\ \shortparallel \\ (0,0)\end{matrix}$$

$\{(0,0)\}$ es pto crítico en el interior de D (porque $g(0,0) = 0 < 4$)

(2) Busco ptos críticos de Lagrange en ∂D:

$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) = C \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{2x(1-\lambda)=0} \\ 2y(-1-\lambda)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$2x = 0$ | $2x \neq 0$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2y(-1-\lambda)=0 \\ y^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-\lambda=0 \\ 2y(-2)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x^2=4 \end{cases}$$

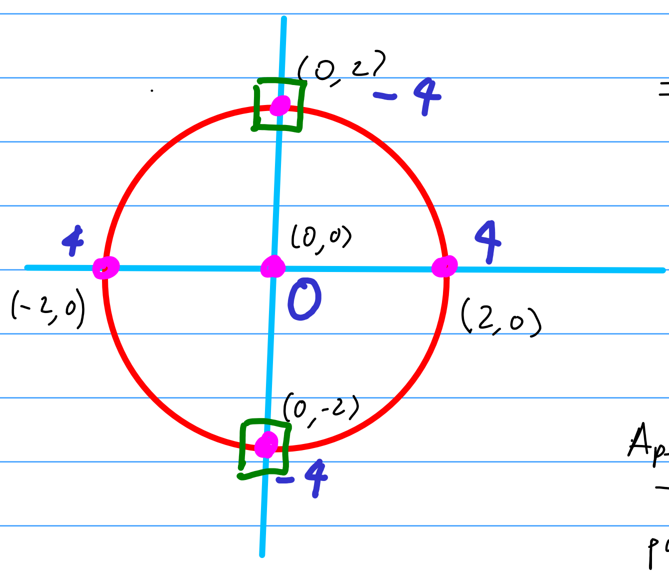
$$\begin{cases} y=\pm 2 \\ \lambda=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

$((0,-2),-1)$ $\qquad$ $((2,0),1)$

$((0,2),-1)$ $\qquad$ $((-2,0),1)$

λ

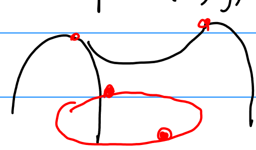
(3) Evaluamos $f(x,y)=x^2-y^2$ en los candidatos.



Conclusión:

El valor mínimo de $f(x,y)$ en D es -4 y este mínimo se alcanza en $(0,2)$ y $(0,-2)$.

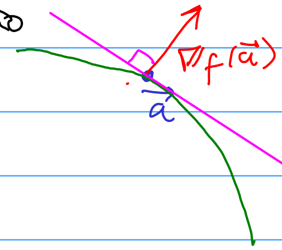
Aprendimos también que:
$$-4 \leq f(x,y) \leq 4$$
para (x,y) en D



Justificación:

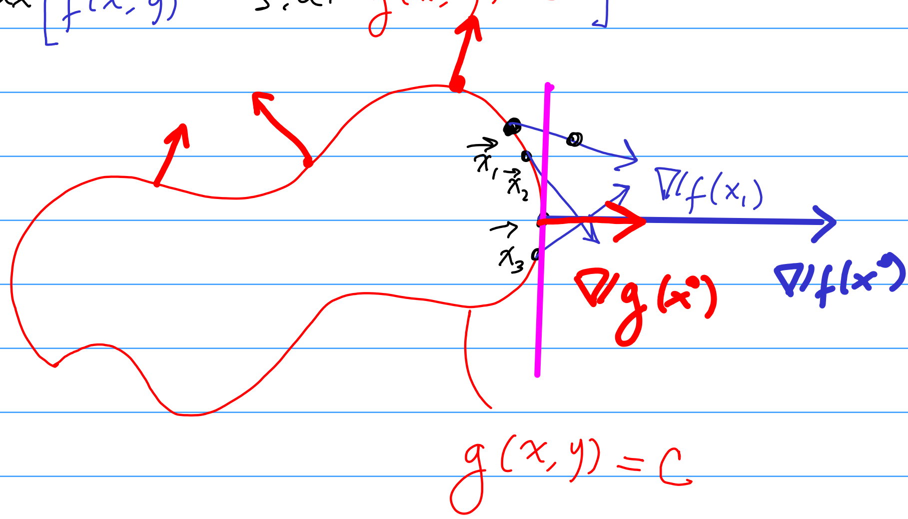
Teorema (del gradiente) Sea $h:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\nabla h(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Entonces

(1) $\nabla h(\vec{a})$ apunta en dir de máximo crecimiento para f mirando en $\vec{a}$



(2) $\nabla h(\vec{a})$ es $\perp$ al conjunto de nivel de h que pasa por $\vec{a}$

$$\max\left[f(x,y) \quad s.a. \quad g(x,y)=c \right]$$



$$\begin{cases} \nabla f(x^0) = \lambda \nabla g(x^0) \\ g(x^0) = c \end{cases}$$