Hoy: Teorema del gradiente

(1) Derivada direccional (de la clase anterior)

(2) Concepto de GRADIENTE de una función escalar $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \nabla T$ — vector

(3) Teo. del gradiente: "¿Qué propiedades tiene?"

(1) De la clase anterior tenemos:

Sea $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada

$$\underline{\sigma(t) = \vec{a} + t\,\vec{v}} = (a_1+tv_1,\ a_2+tv_2)$$

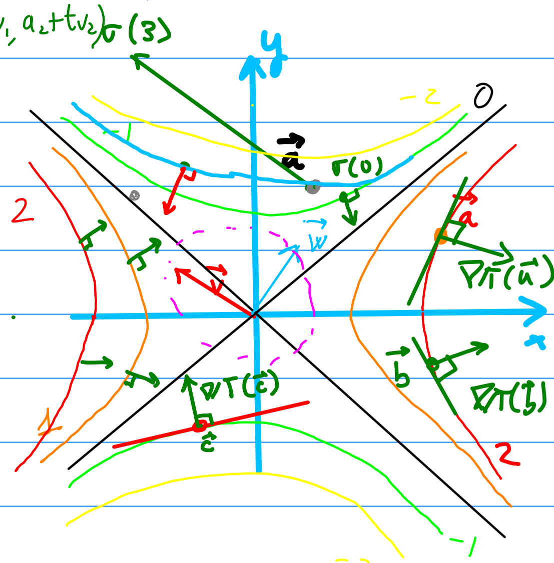
Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar

$$T(x,y) = x^2 - y^2$$

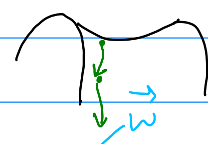
$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(t) = T(\sigma(t))$$

"Temperatura experimentada por la partícula en el instante t" $\quad \frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow$



Clase anterior, usando regla de la cadena



$$h'(0) = DT(\sigma(0)) \cdot \sigma'(0)$$

$$h'(0) = \underbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial x}(\vec{a}),\ \frac{\partial T}{\partial y}(\vec{a})\right]}_{\text{en } \vec{a}} \odot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

producto de matrices

Derivada direccional

"Tasa de cambio de la temperatura en el instante $t=0$" $\quad \left[\frac{°C}{sec}\right]$

$$= \left[\frac{\partial T}{\partial x}(\vec{a})\,v_1 + \frac{\partial T}{\partial y}(\vec{a})\,v_2\right]$$

Muy importante

$$= \left[\nabla T(\vec{a}) \odot \vec{v}\right]$$

GRADIENTE

producto PUNTO

Def: Sea $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable.

$$\underbrace{\nabla T(\vec{a})}_{\text{gradiente de } T \text{ en } \vec{a}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial T}{\partial x_2}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial T}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Un vector $\nabla T(\vec{a})$ en cada punto $\vec{a}$

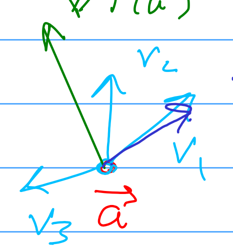
Obs: $DT(\vec{a}) = 1\left[\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \\ \frac{\partial T}{\partial x_1}(\vec{a}) & & \frac{\partial T}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{array}\right]$ así que $\nabla T(\vec{a}) = DT(\vec{a})^t$

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Def: La derivada de T en dirección del vector unitario $\vec{V}$ iniciando en $\vec{a}$

si no unitario $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

$$D_{\vec{V}} T(\vec{a}) = \underbrace{\boxed{\nabla T(\vec{a}) \cdot \vec{V}}}_{\text{cerca de } \vec{a}}$$



¿Si iniciando en $\vec{a}$ nos movemos en dirección de $\vec{V}$ cómo cambia T?

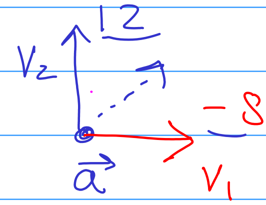
↑ unitario

$D_V T(\vec{a}) = \underline{-8}$ = "Por cada unidad que avancemos en la dirección de $\vec{V}$ iniciando en $\vec{a}$ perdemos 8°"

$°C/\text{sec} = °C/\text{mt}$

$\left[°C/\text{mt}\right]$

porque vamos a rapidez $1\,\text{m/sec}$.



$$\ell_a(a+v)$$
$$\parallel$$

Obs: $f(a+v) \approx \left[f(a) + \nabla f(a) \cdot \vec{v} \right]$

Ejercicio: Sea $T(x,y) = x^2 - y^2$ — temperatura en °C

(a) Calcule $\nabla T(1,2)$

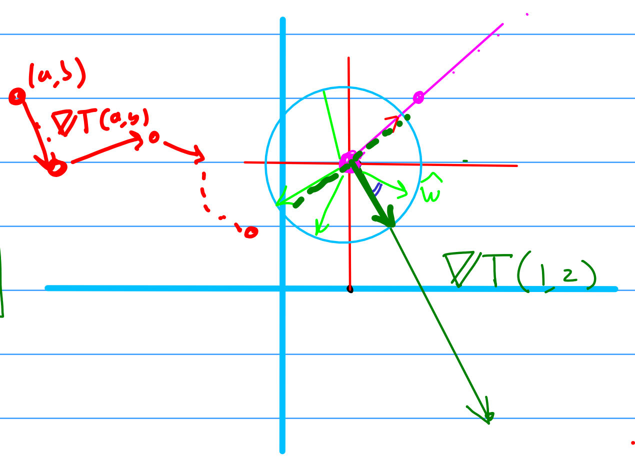
(b) Calcule la tasa de cambio en dirección de $\hat{v} = (1,1)$ iniciando en $(1,2)$, e interprételo físicamente

$\boxed{(c)}$ Una hormiga inicia en $(1,2)$. En qué dirección debería moverse para disminuir su temperatura lo más rápido posible?

Solución: $\nabla T(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$

$$\nabla T(1,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla T(1,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$



(b)

$\vec{v} = (1,1)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\hat{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leftarrow$ unitizado

-1.4
$\approx$

$$D_{\hat{v}} T(1,2) = \nabla T(1,2) \cdot \hat{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\theta_{AB})$

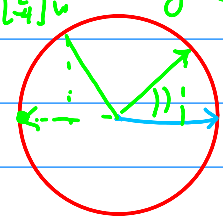
$$D_{\hat{w}}T(\vec{a}) = \underbrace{\nabla T(\vec{a})\cdot\hat{w}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}\cdot\hat{w}}_{}$$

Cuál $\hat{w}$ escojo para que este producto punto sea lo más pequeño posible?

$$= \left\|\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}\right\|\|\hat{w}\|\cos\left(\theta_{\left[\begin{smallmatrix}2\\-4\end{smallmatrix}\right]\hat{w}}\right) = \sqrt{20}\cos\left(\theta_{\left[\begin{smallmatrix}2\\-4\end{smallmatrix}\right]\hat{w}}\right)$$

$$\hat{w} = -\frac{\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}}{\left\|-\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}\right\|}$$

porque $\theta_{\left[\begin{smallmatrix}2\\-4\end{smallmatrix}\right]\hat{w}} = \pi$ y $\cos(\pi) = -1$



Teorema (del gradiente)

Si $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar diferenciable y $\nabla T(\vec{a}) \neq \vec{0}$ entonces

(1) $\left[\dfrac{\nabla T(\vec{a})}{\|\nabla T(\vec{a})\|}\right]$ es la dirección de máximo crecimiento para T iniciando en $\vec{a}$.

(2) $\nabla T(\vec{a})$ es perpendicular al conjunto de nivel de T que pasa por $\vec{a}$.

(ver dibujo pag - 1)