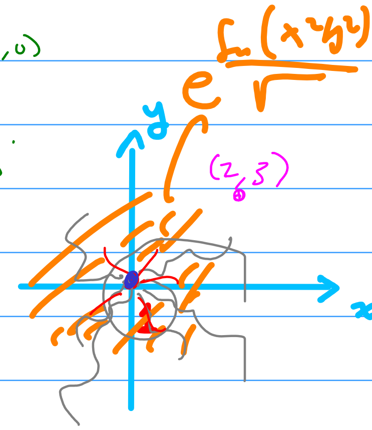
**Hoy:** (1) Composición de funciones (en varias variables)
(2) Propiedades de una función a partir de las propiedades de sus partes.

**Ejercicio:** Sea
$$h(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$




Demuestre que $h$ es continua en $\mathbb{R}^2$ en los siguientes pasos:

[(1) Verifique que $h$ es continua en $(0,0)$]

(2) Verifique que $h$ es continua en $(x,y)\neq(0,0)$.

Obs. en esos $(x,y)$ $h(x,y)=e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}$

"Cómo demostrar continuidad a partir de la fórmula que define a $h$"

**Sol 1:** Idea: como estamos en $\mathbb{R}^2$ y queremos ver qué pasa cerca del origen, podemos pasar a polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}} \right| =$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$$

$$\| \quad \lim_{r\to 0} e^{\frac{\sin(r^2)}{r}} = e^{\boxed{\lim_{r\to 0}\frac{\sin(r^2)}{r}}} \sim \frac{0}{0}$$

exp es continua

$$= e^0 = 1$$

Por L'hôpital:
$$\lim_{r\to 0}\frac{\sin(r^2)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\cos(r^2)\cdot 2r}{1} = \frac{0}{1}=0 \checkmark$$

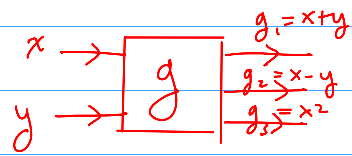
Concluimos que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 1$$
$\|$

Luego $h$ es continua en $(0,0)$

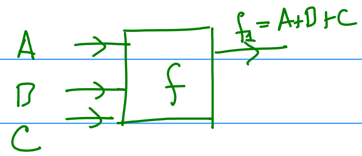
**Método:** Composición de funciones.

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

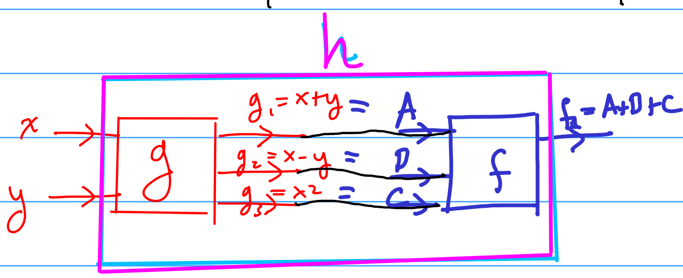
$g(x,y) = (x+y,\ x-y,\ x^2)$




$f(A,B,C) = A + B + C$




Podemos "conectar" todas las salidas de g en las entradas de f (en orden) y crear una nueva función que es la composición. $\Big\}$ Composición de funciones



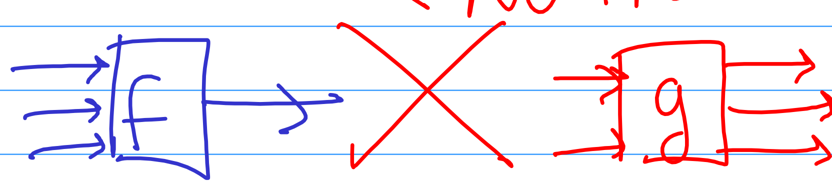

$f \circ g : (x,y)$

$$h(x,y) = f(g(x,y))$$

$$h(x,y) = (x+y)+(x-y)+x^2 = 2x+x^2$$

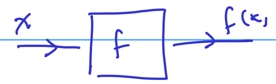
Calcular $t = g \circ f$ ?

← NO TIENE SENTIDO



Conocemos las siguientes funciones simples:

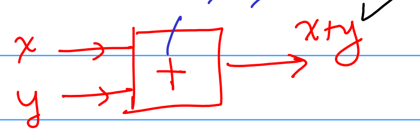
(1) Univariadas:



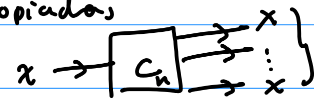

$\sin(x)$
$\cos(x)$
$e^x$
$\sqrt{x}$
$\vdots$

(2) Binarias de suma, resta, mult. y div.

$-$, $\times$, $\%$

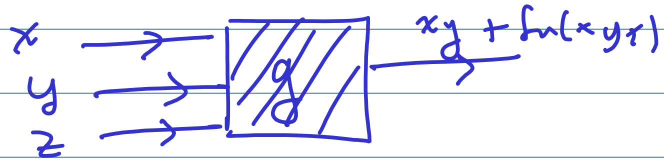


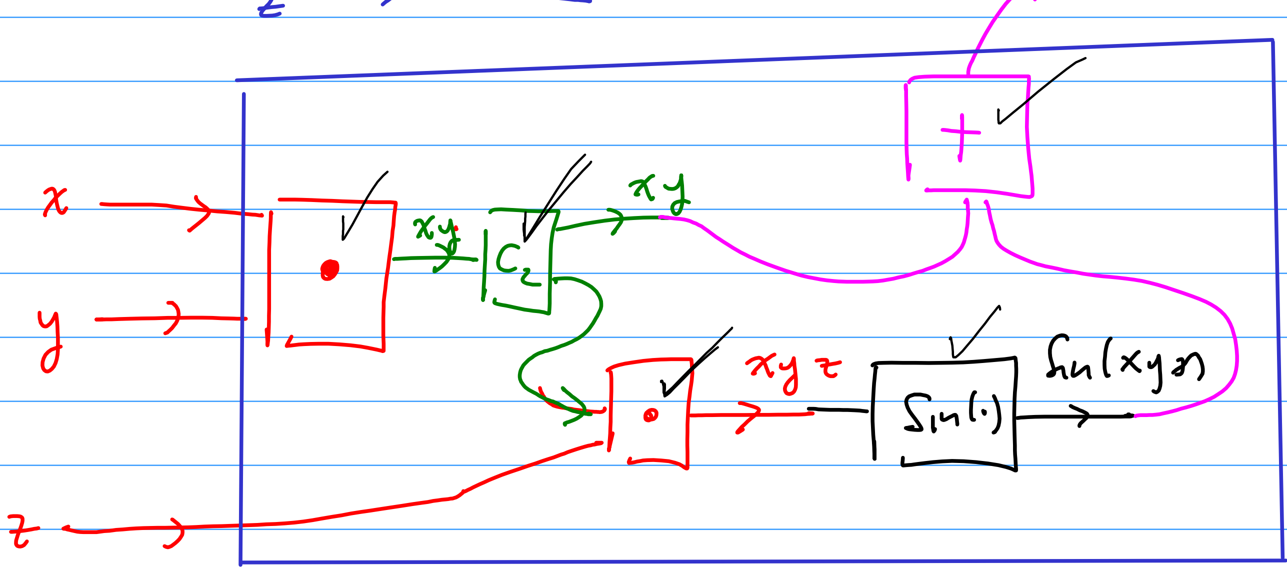

(3) "Copiadas"



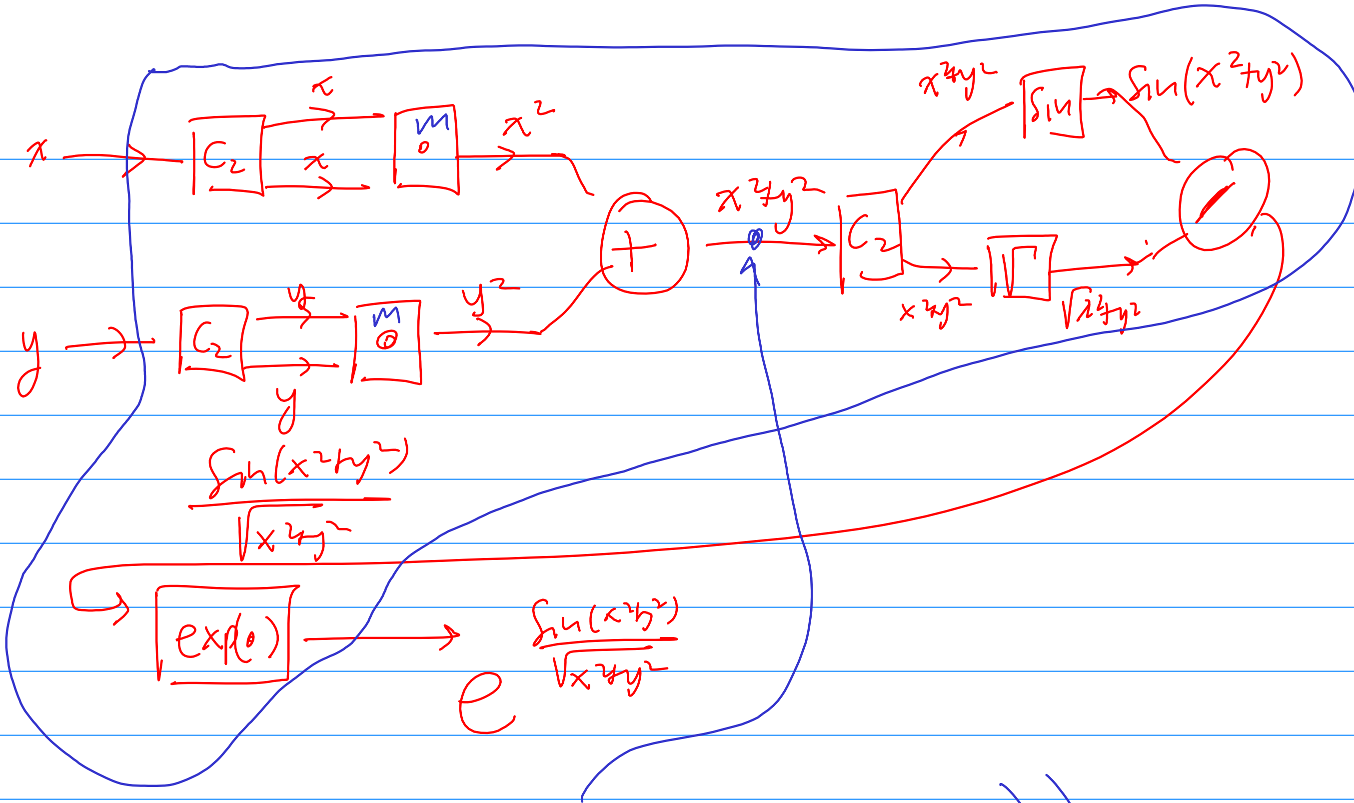

n copias.

Ejercicio: Escriba $g(x,y,z) = xy + \sin(xyz)$ como composición de funciones simples.




Ejercicio: Exprese $e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ como composición de funciones simples.




$$H(C_2(S(m(C_2(x)), m(C_2(y)))))$$

$$H(a,b) = (\sin(a), \sqrt{b})$$

$$\exp(D(H(C_2(S(m(C_2(x)), m(C_2(y)))))))$$

**Teorema** (Reglas de continuidad)

(1) Las siguientes funciones univariadas simples son continuas
($\text{polinomios } p(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $e^x$, $(\sqrt[n]{x},\ x \geq 0)$, ...)

(2) Suma, resta, mult es una función continua

[la div es continua en todos los lugares con denominador $\neq 0$]

sencillas

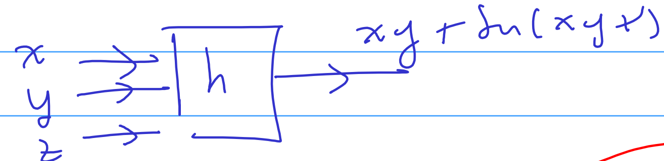
(3)

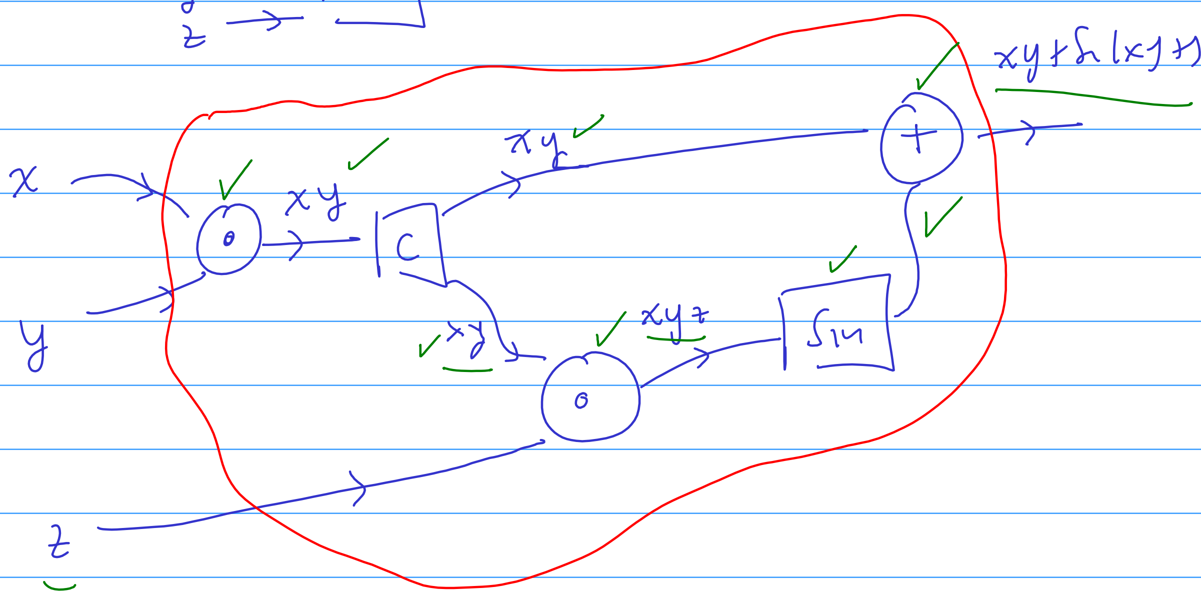
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h = f\circ g"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\#"] \\ & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

composición

Si $g$ es continua en $\vec{a}$ y $f$ es continua en $g(\vec{a})$ entonces $h$ es continua en $\vec{a}$

**Ejemplo:** Verifique que $xy + \sin(xyz)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.




**Ejercicio:** Terminar parte (2) del ejercicio del principio.