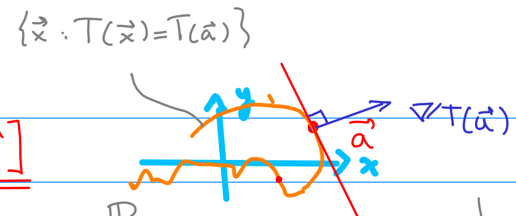


Teorema ["del gradiente"]

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable y $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla T(\vec{a}) \neq \vec{0}$.

Entonces:

(1) $\dfrac{\nabla T(\vec{a})}{\|\nabla T(\vec{a})\|}$ es la dirección de máximo CRECIMIENTO para T iniciando en $\vec{a}$

(2) $\nabla T(\vec{a})$ es PERPENDICULAR al conjunto de nivel de T que pasa por $\vec{a}$ ($\nabla T(\vec{a})$ es un vector normal para el plano tangente al conjunto de nivel que pasa por $\vec{a}$)

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Ejercicio: Sea $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

(a) Dibuje los conjuntos de niveles 1, 4 de T

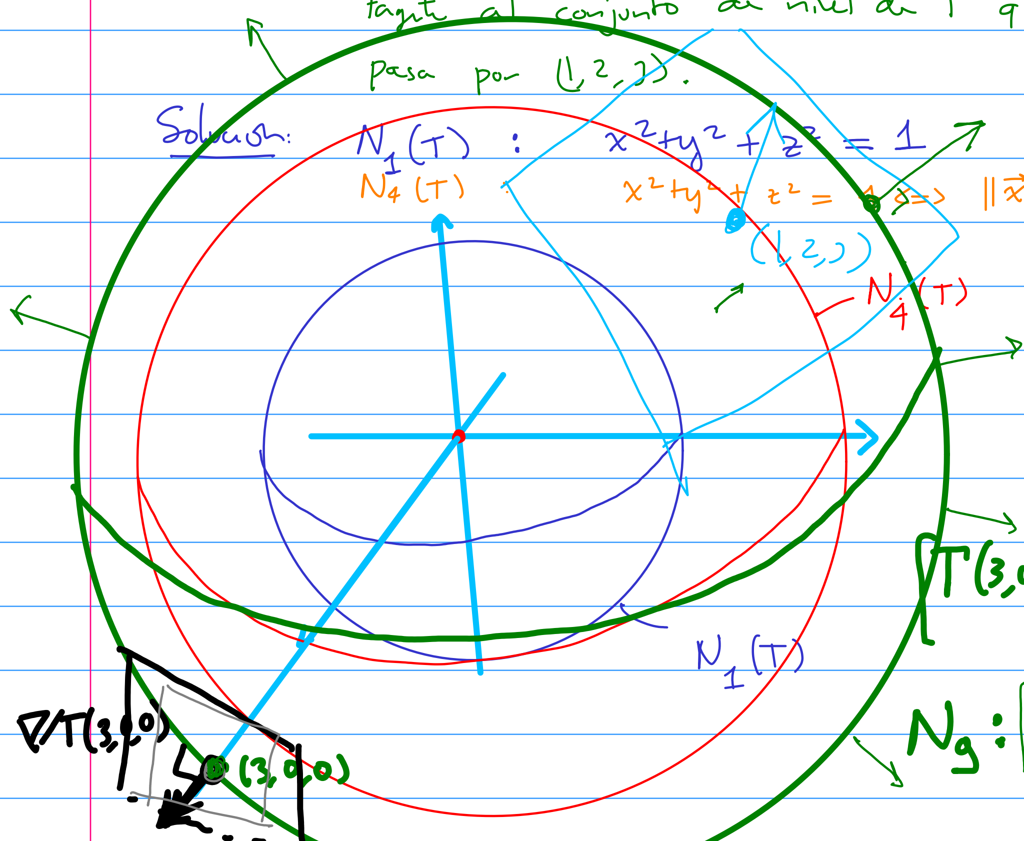
(b) Dibuje el conjunto de nivel que pasa por (3,0,0)

(c) Calcule $\nabla T(3,0,0)$ y dibújelo.

(d) Encuentre una ecuación del plano tangente al conjunto de nivel de T que pasa por (1,2,3).

Solución: $N_1(T)$: $x^2+y^2+z^2 = 1$

$N_4(T)$: $x^2+y^2+z^2 = 4 \iff \|\vec{x}\| = 2$



$T(3,0,0) = 3^2+0^2+0^2 = 9$

$N_9 : x^2+y^2+z^2 = 9$

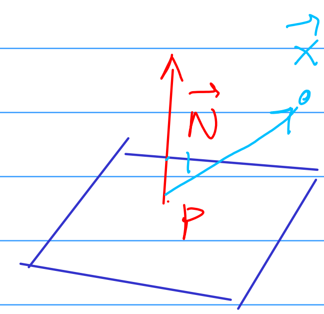
$$\nabla T(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}(3,0,0) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}(3,0,0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) Por el Teorema del gradiente sabemos que

$$\nabla T(1,2,3) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}(1,2,3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

es perpendicular al plano tangente al conjunto de nivel de T que pasa por (1,2,3).
La ecuación de ese plano es:

$$\left(\vec{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

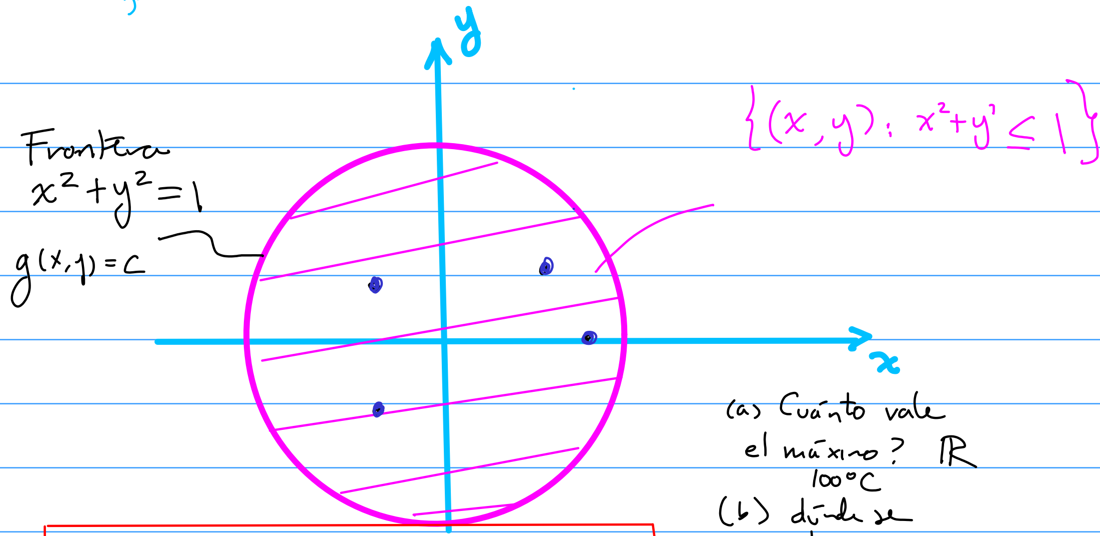
$$\boxed{2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0}$$

Aplicación: Cómo resolver problemas de optimización?

Problema: (a) Encuentre el valor máximo que toma la función escalar xy en la región $x^2+y^2 \le 1$. (b) En qué puntos se alcanza este valor?

$f(x,y) = xy$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



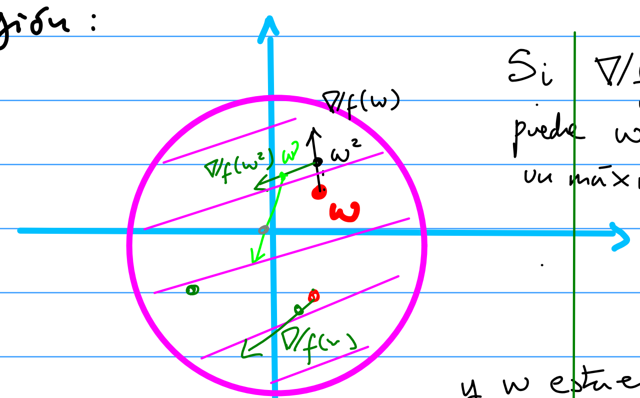
(a) Cuánto vale el máximo? $\mathbb{R}$
100°C
(b) dónde se alcanza?
$X \subseteq \mathbb{R}^2$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2,0)$

$$\boxed{\text{máx } f(x,y) \quad \text{s.a.} \quad x^2+y^2 \leq 1}$$

Objetivo: Buscar los vectores $z_i^* \in \mathbb{R}^2$ dónde la temperatura $f(x,y)$ sea máxima.

Resolveremos estos problemas buscando candidatos para los z_i^* partiendo el problema en dos partes:

parte 1: En el INTERIOR de la región:



Si $\nabla f(w) \neq \vec{0}$ puede w ser un máximo de f?

y w está en el interior

Obs: Si $\nabla f(w) \neq \vec{0}$ entonces w NO ES un maximizador.

Def: w es un punto crítico de f si $\boxed{\nabla f(w) = \vec{0}}$

Si z^* es maximizador en el interior entonces z^* es un punto crítico.

Idea: (1) Encontramos ptos críticos en el interior de la región.

[Puede haber varios puntos críticos y los maximizadores están ahí...]

Ejemplo: $f(x,y) = xy$

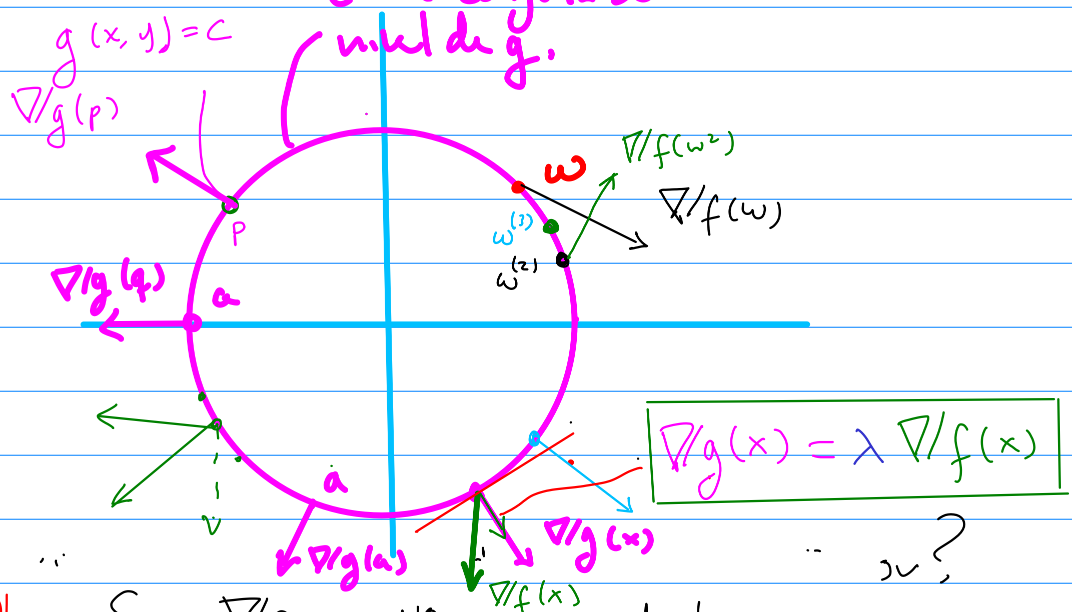
$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x=0,\ y=0$$

puntos críticos

$$\left[\text{Candidatos} = \{ (0,0) \} \right]$$

parte 2: En la frontera de la región

es un conjunto de nivel de g.



Obs: Si $\nabla f(w)$ NO es perpendicular a la frontera de R (al $g(x,y)=c$) entonces w NO ES un maximizador

Def: Un punto (x,y) es "punto crítico de la frontera" si

(i) $g(x,y) = c$ (está en la frontera)

[(ii) $\nabla f(x,y)$ es $\perp$ a la frontera]

convertir en una ecuación?

Esto es equivalente a decir

ECUACIONES! $\rightarrow$ $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}$

Ejemplo: $f(x,y) = xy$

$g(x,y) = x^2+y^2$

3 ecuaciones
3 incógnitas

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases}$$

sols

Candidatos $= \{(0,0)\} \cup \{ \dots \}$

Evalúo $f(x,y)$ en todos ellos y el máximo valor es el MÁXIMO de f en la región. Este máximo se alcanza en los candidatos que tienen ese valor.

Método para resolver problemas de optimización:

(1) Buscamos puntos críticos en el interior $\nabla f(x) = \vec{0}$

(2) Buscamos puntos críticos en la frontera $\begin{cases} g(x,y) = c \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases}$

(3) Evalúo $f(x,y)$ en los candidatos y busco el máximo. y en qué candidatos se alcanza.

Teorema: Este procedimiento nos encuentra:

(1) El valor máximo de f

(2) Todos los puntos donde ese máximo se alcanza.