Teoremas integrales del cálculo vectorial

($\underbrace{\text{Teo de Green y Stokes}}_{(1)}$ y $\underbrace{\text{Teo de Gauss}}_{(2)}$)

Estos relacionan integrales de dos tipos.

Hoy: Teorema de Green (*)

Def: Sea $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

Funciones escalares

$$\text{rot}(F) := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

Notación: $\nabla \times F$

Explicación: Si extendemos F a 3D poniendo uno en la tercera componente

$$\tilde{F} = (P, Q, 0)$$

$$\nabla \times \tilde{F} = \left[\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}\right] = i(0) - j(0) + k\left(\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Ejemplo: $F(x,y) = (-y, x)$

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$$

Teorema: [de Green]

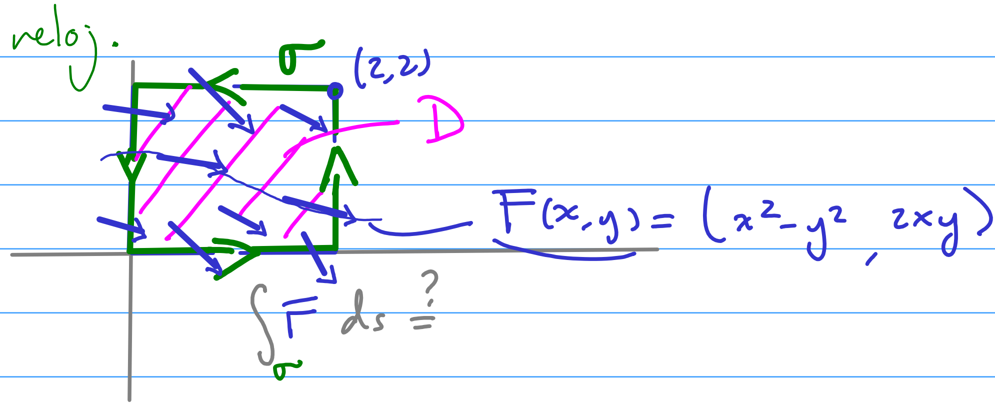
Sea D una región sólida en $\mathbb{R}^2$ y sea σ su curva de frontera orientada positivamente.

Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ que sea diferenciable en todos los puntos de D

$$\boxed{\int_\sigma F\,ds = \iint_D (\nabla \times F)\,dA}$$

Expresión más simple
mismo resultado

Ejercicio. Sea $F(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$.
Calcule el trabajo realizado por F a lo largo de la curva de frontera del rectángulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ orientado en la dirección de las manecillas del reloj.



$$\int_\sigma F\,ds \stackrel{?}{=}$$

Solución 1: Teorema de Green.

Como las componentes del campo F son los polinomios x^2-y^2 y $2xy$ sabemos que es un campo vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto también en los puntos de D. Así que podemos aplicar Teorema de Green que dice:

$$\left[\int_{\sigma} F\, ds\right] = \left[\iint_{D} \nabla\times F\, dA\right]$$

muchas veces es más fácil de calcular.

Calculamos $\nabla\times(x^2-y^2, 2xy) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2-y^2 & 2xy \end{vmatrix}$

$$= 2y-(-2y) = \left[4y = \nabla\times F\right]$$

$$= \int_0^2\int_0^2 4y\, dy\, dx = 2\int_0^2 4y\, dy =$$

$$= \cancel{2}\cdot 4\, \frac{y^2}{\cancel{2}}\Big|_0^2 = 4\cdot 4 = 16 \text{ Joules}$$

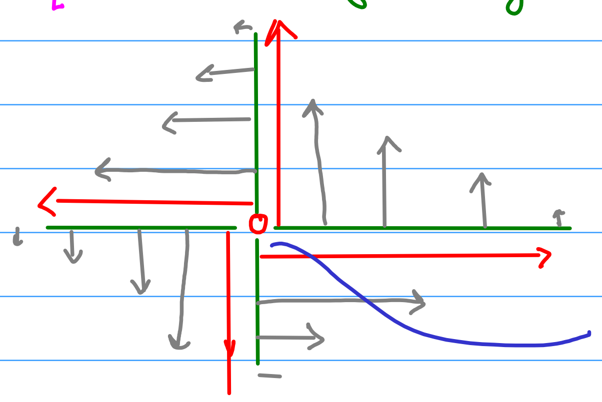
Como querían la orientación de las manecillas del reloj $\boxed{R = -16 \text{ Joules}}$

(* Sol 2) — ver abajo...

Ejercicio: *

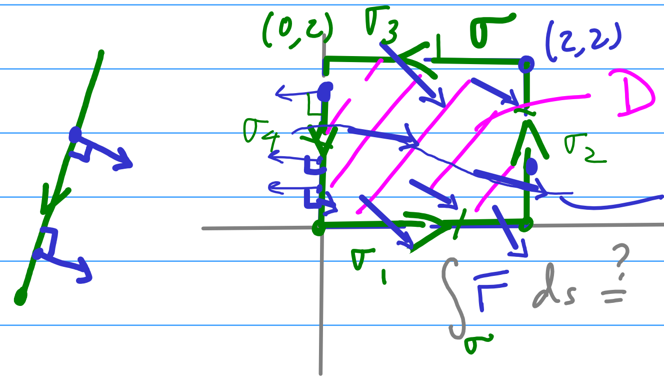
$$\left[H(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(-y,x)}{\|(-y,x)\|^2}\right]$$

no dif en $(x,y)=(0,0)$



NO DIF en $(0,0)$

Sol 2: (Parametrizar σ e integrar)



$$F(0,y) = \underline{(-y^2, 0)}$$

$$\underline{F(x,y)} = (x^2-y^2, 2xy)$$

$$\int_\sigma F\, ds \stackrel{?}{=}$$

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma_1(t) = t(2,0) \\ \qquad = (2t, 0) \end{cases}$$

$$\sigma_1'(t) = (2,0)$$

$$\int_{\sigma_1} F\, ds = \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 ((4t)^2, 4t) \cdot (2,0)\, dt$$

$$= \int_0^1 2(4t)^2 dt = 32 \int_0^1 t^2 dt = \frac{32}{3}$$

$$\begin{cases} \sigma_3(t) = (2,2) + t\left((0,2)-(2,2)\right) \\ \qquad = (2-2t, 2) \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 ((2-2t)^2-4, \text{[illegible]}) \cdot (-2, 0)$$

$$= \int_0^1 (\cancel{4} - 8t + 4t^2 - \cancel{4})(-2)\, dt = \int_0^1 16t - 8t^2\, dt$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\int_\sigma F\, ds = \int_{\sigma_1} F\, ds + \int_{\sigma_2} F\, ds + \int_{\sigma_3} F\, ds + \int_{\sigma_4} F\, ds$$

$$\frac{32}{3} + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 0 = 16$$

Ejercicio*: Sea $H(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$

(a) Calcule $\nabla \times H$

(b) Calcule $\oint H\, ds$ con σ el círculo unitario positivamente orientado parametrizado.

(c) Use Teo Stokes (NOTA:)

Sol:
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y(x^2+y^2)^{-1} & x(x^2+y^2)^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\cancel{(x^2+y^2)^{-1}} + x\left[-(x^2+y^2)^{-2}\right]2x \right) - \left(-\cancel{(x^2+y^2)^{-1}} - y\left[-(x^2+y^2)^{-2}\right] \cdot 2y \right)$$

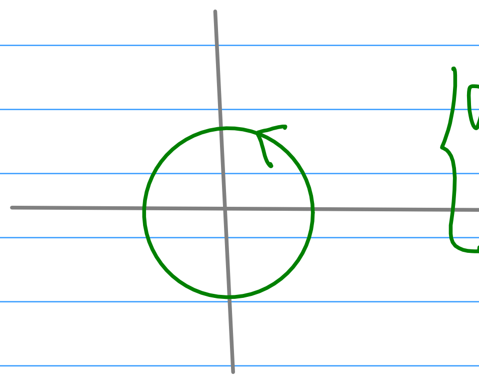
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-x\,(x^2+y^2)^{-1}\right) \quad - \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\,(x^2+y^2)^{-1}\right)$$

$$= (x^2+y^2)^{-1} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \left(-(x^2+y^2)^{-1} + 2y^2(x^2+y^2)^{-2}\right)$$

$$= 2(x^2+y^2)^{-1} - \frac{2\cancel{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} = 0$$

$\nabla \times F = 0$

(b)



$$\begin{cases} \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$F(\sigma(t)) = \left(\frac{-\sin(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)}, \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)} \right)$$

$$\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = +\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

$$\int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$$

Nota:

$$\underbrace{\int_\sigma H\,ds}_{= 2\pi} \neq \underbrace{\iint_D \nabla \times H\,ds}_{= 0}$$

Teorema de Green NO aplica porque H no es dif en $(0,0)$.