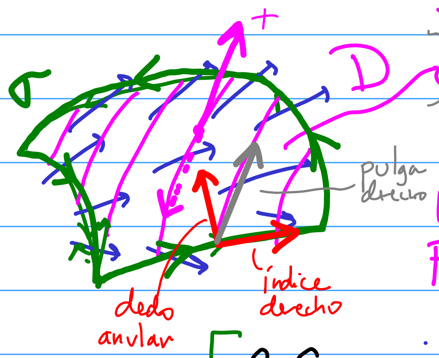
Teorema (Stokes) [en 3D]

Sea σ una curva cerrada parametrizada en $\mathbb{R}^3$
F un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

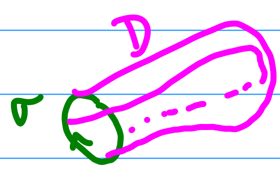


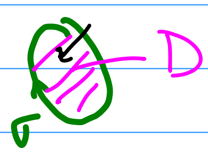
Si D es una superficie con frontera σ, las orientaciones de D y σ son compatibles y F es diferenciable en D

$$\underbrace{\int_\sigma F\, d\vec{s}}_{\text{Trabajo realizado por } F \text{ a lo largo de } \sigma} = \underbrace{\iint_D \nabla \times F \, dS}_{\text{Puede ser mucho más simple que } F}$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

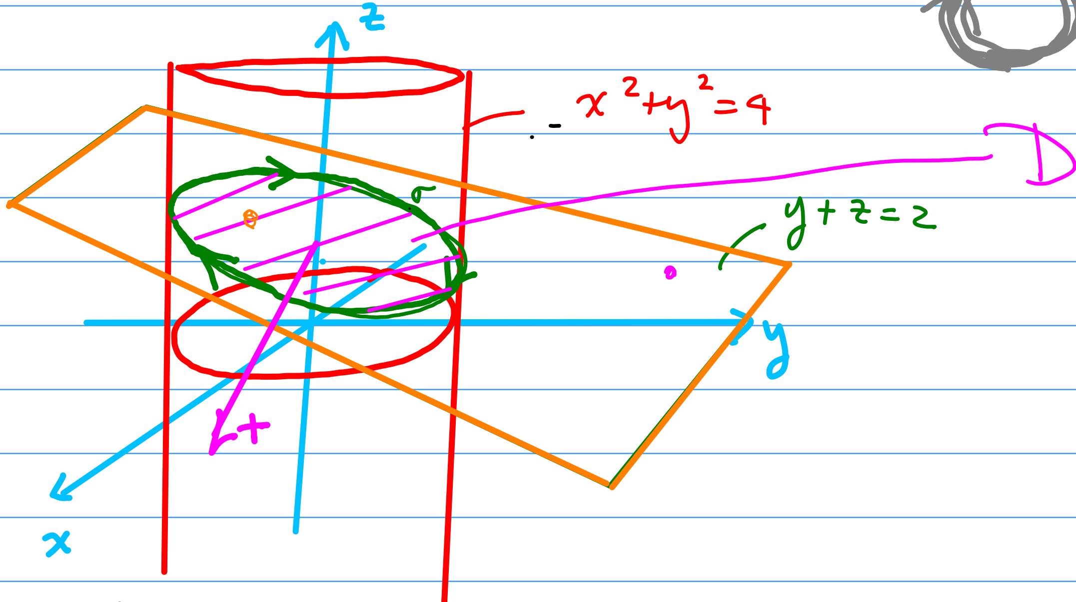
Obs: La misma σ admite muchas D
El Teorema funciona con cualquier D.





$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Ejemplo: Sea $\left[F(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)\right]$ y sea σ la curva de intersección entre el plano $[y+z=2]$ y el cilindro $[x^2+y^2=4]$. Calcule $\int_\sigma F\,ds =$ Si σ está orientada en σ la dirección de las manecillas del reloj cuando la vemos desde encima.



$$\int_\sigma F\,ds \overset{?}{=}$$

Sol. Sea D la parte del plano $y+z=2$ encerrada por σ orientada con la normal hacia abajo.
El campo vectorial F tiene componentes polinomiales luego son diferenciables en todo $\mathbb{R}^3$ y en particular en los

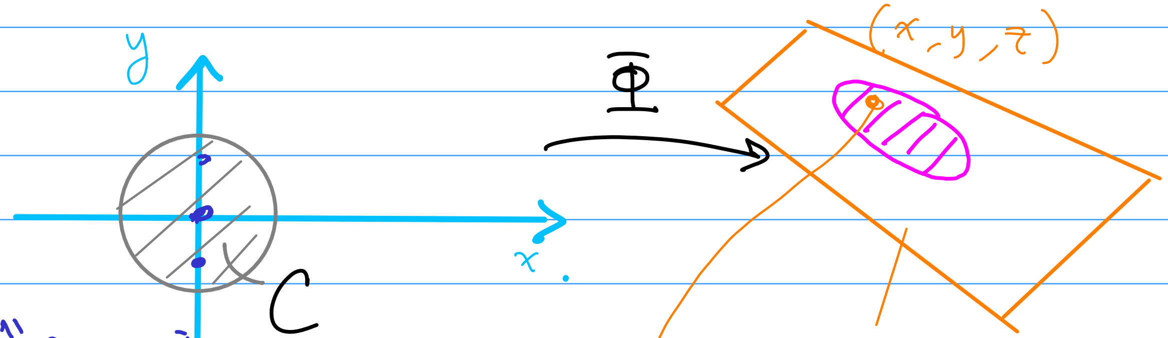
puntos de D así que podemos aplicar el Teorema de Stokes:

$$\int_{\sigma} F\, ds = \underbrace{\left[\iint_{D} \nabla \times F \; dS \right]}_{\text{Flujo a través de } D}$$ ← Calcularemos este lado

(1)
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= i(0) - j(0) + k(1 + 2y)$$

$$\nabla \times F = (0, 0, 1+2y) \checkmark$$



$$\bar{y} = \frac{\iint_C y\, dA}{\iint_C 1\, dA} = 0$$
masa (A)

PARAMETRIZACIÓN DE D.
$$\left[\begin{array}{l} \Phi(x,y) = (x, y, 2-y) \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{array} \right]$$

$$\iint_D \vec{G} \cdot dS = \iint_C G(\Phi(x,y)) \cdot \overbrace{\Phi_x \times \Phi_y}^{\text{orientación}}\, dA$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_x = & (1, & 0, & 0) \\ \Phi_y = & (0, & 1, & -1) \end{array}$$

$$\boxed{\Phi_x \times \Phi_y = (0,\ 1,\ 1)}$$

orientación incorrecta

CORREGIMOS LA ORIENTACIÓN MULTIPLICANDO POR (-1).

$$= \iint_C (0,\ 0,\ 1+2y) \cdot (0,\ -1,\ -1)\, dA_{(x,y)} =$$

$$= \iint_C (-1-2y)\, dA = -\text{Área}(C) - 2\underbrace{\cancel{\iint_C y\, dA}}_{0}$$

$$= -\pi 2^2 = \boxed{-4\pi}$$

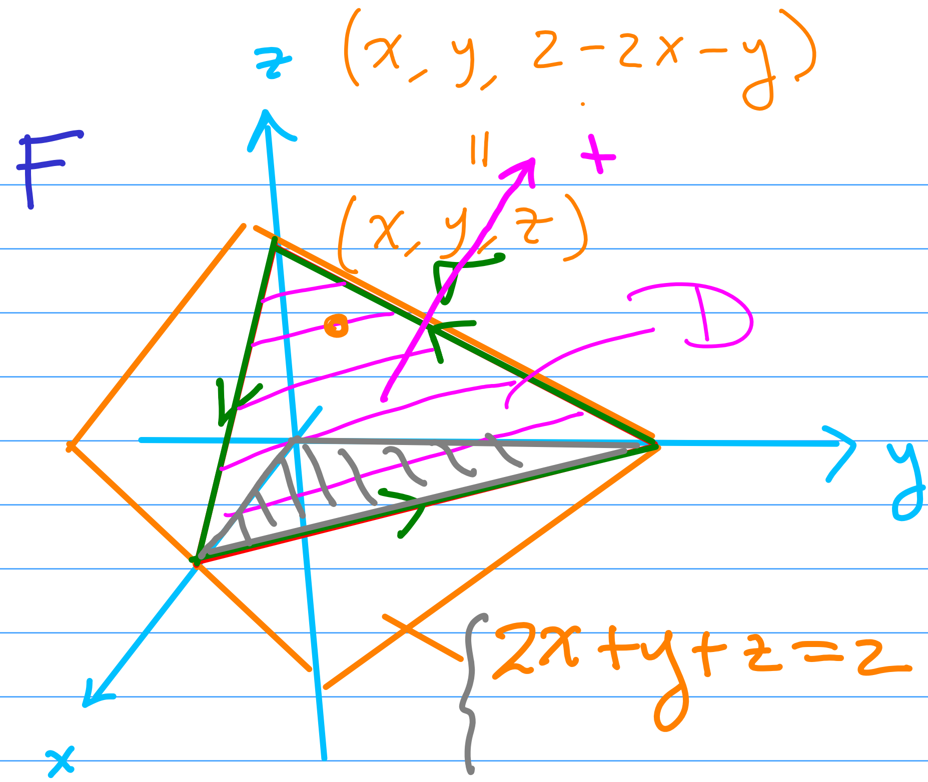
$$\boxed{-4\pi = \int_\sigma F\, ds}$$

Teo Stokes.

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (x, y, xyz)$

Sea σ la frontera de la intersección entre el plano $2x+y+z=2$ y el octante positivo orientado en dirección contraria a las manecillas del reloj visto desde arriba. Calcule

$$\int_\sigma F\, ds =$$

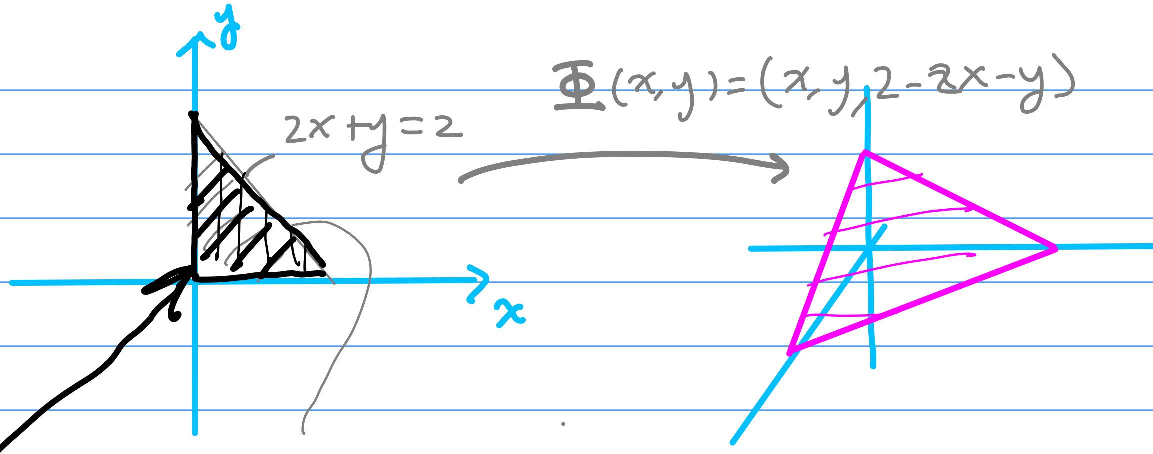


Sol: For Stokes

$$\int_{\sigma} F\,ds = \iint_{D} \nabla \times F \, dS$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & xyz \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\nabla \times F = (xz, -yz, 0)}$$



$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_x = & (1, & 0, & -2) \\ \Phi_y = & (0, & 1, & -1) \\ \Phi_x \times \Phi_y = & (2, & 1, & 1) \end{array}$$

Normal correcta ✓

$$= \underbrace{\iint \big(x(2-2x-y),\, -y(2-2x-y),\, 0\big)\cdot(2,1,1)\, dA}_{\text{Integral en 2D fácil.}}$$

Integral en 2D fácil.

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} [\quad]\; dx$$