Problemas de optimización: (Cómo resolverlos?)

Método de solución: $\underline{\max}$ $f(x,y)$ s.a. $g(x,y) \leq c$

(1) Buscamos candidatos posibles

(1.a) En el interior de la región $g(x,y) < c$

Encontramos toda solución de

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \vec{0}}$$

Lista de candidatos $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N$

(1.b) En la frontera de la región $g(x,y) = c$

Método de mult. de Lagrange

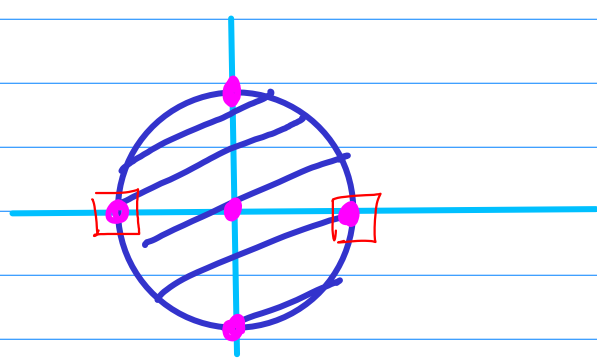
Encontrar todas las soluciones (x,y,λ) de

$$\boxed{\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}}$$

(2) Comparo los valores de f en los candidatos $w_1, \dots, w_N$ y escojo aquellos donde el valor de f sea máximo $f(w_i)$

Teorema: Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son DIFERENCIABLES entonces este método encuentra todos los puntos de $g(x,y) \leq c$ dónde $f(x,y)$ alcanza su valor máximo.

Ejemplo: $\underline{\max}$ $(\underbrace{x^2 - 2y^2}_{f(x,y)})$ s.a. $\underbrace{x^2 + y^2}_{g(x,y)} \leq 4$



(1a) $\begin{pmatrix} 2x \\ -4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

(1.b) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ -4y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -4y = 2\lambda y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 2x(1-\lambda)=0 \\ -4y-2\lambda y = 2y(-2-\lambda)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{bmatrix}$$

Caso 1

$x=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2y(-2-\lambda)=0 \to \lambda=-2 \\ y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2 \end{cases}$$

$(0,-2)$, $(0,+2)$

Caso 2

$x \neq 0$

$1-\lambda=0 \iff \lambda=1$

$2y(-3)=0 \iff y=0$

$x^2=4 \iff x=\pm 2$

$(-2,0)$, $(+2,0)$

(2) Candidatos:

	$(-2,0)$	$(2,0)$	$(0,2)$	$(0,-2)$	$(0,0)$
f	4	4	-8	-8	0

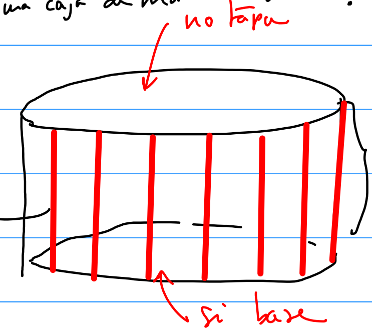
Conclusión: El valor máximo de f en la región $x^2+y^2 \leq 4$ es 4 y este valor se alcanza en $(-2,0)$ y $(2,0)$.

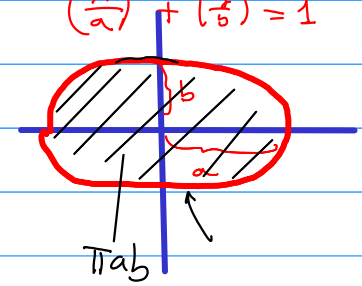
Ejercicios:

(a) Encuentre el punto de la curva $y\sqrt{x} = \sqrt{2}$ que está más cerca del origen.

(b) Queremos una caja de máximo volumen:

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$





$C \times$ Perímetro de la base

πab

$\sigma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$

Superficie $12\,cm^2$

$$\int_0^{2\pi} \|\sigma'(t)\|\,dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,dt}_{} = \varphi(a,b,c)$$

$$\begin{cases} \max & \pi abc \\ \text{s.a.} & \underbrace{\pi ab} + c\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{}\,dt = 12 \end{cases}$$

Pregunta: Cómo calcular $\nabla\varphi(a,b,c)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(\ )^{-\frac{1}{2}} \cdot 2a\cos^2(t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2a\cos^2(t)}{2\sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}}\,dt = a\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t)}{\sqrt{}}\,dt$$

$f(a,b,c) = \pi abc$

$g(a,b,c) = \pi ab + c\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}\,dt$

Multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f(a,b,c) = \lambda \nabla g(a,b,c)$$

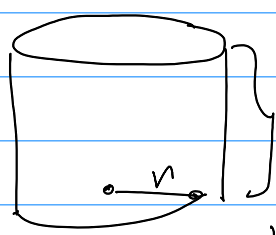
$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\pi bc\\ \pi ac\\ \pi ab\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \pi b + \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{ca\cos^2(t)}{\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}}\,dt \\ \pi a + \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{cb\sin^2(t)}{\sqrt{\quad}}\,dt \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\quad}\,dt\end{pmatrix} \\ \pi ab + c\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\quad} = 12\end{array}\right.$$

Método numérico permite resolver esto...

Idea: Qué pasa con $a=b=r$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\pi rc\\ \pi rc\\ \pi r^2\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \pi r + c\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cancel{r}\cos^2(t)}{\cancel{r}}\,dt \\ \pi r + c\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt \\ 2\pi r\end{pmatrix} \\ \boxed{\pi r^2 + 2\pi rc = 12}\end{array}\right.$$

Todavía difícil... Intentemos optimizar sobre cilindros (r, c)



$$\begin{array}{ll} \max & \pi r^2 c \\ \text{s.a.} & 12 = \pi r^2 + 2\pi rc\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}2\pi rc\\ \pi r^2\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}2\pi r + 2\pi c\\ 2\pi r\end{pmatrix} \\ \pi r^2 + 2\pi rc = 12\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2\pi rc = \lambda 2\pi r + \lambda 2\pi c \\ \pi r^2 = \lambda 2\pi r \quad \big) r \\ \pi r^2 + 2\pi rc = 12 \end{cases}$$

$\pi r^2 - 2\pi r\lambda = 0$

$\pi r(r - 2\lambda) = 0$

Caso 1: $r = 0$

$0 = 12$

$\times$

Caso 2: $r \neq 0$

$\boxed{r = 2\lambda}$

$\boxed{c = \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r}}$

$rc = \lambda r + \lambda c$

$\boxed{(r-\lambda)c = \lambda r} \longrightarrow \lambda c = 2\lambda^2$

Caso 2.1: $\lambda = 0$

$\times$

$Vol = 0$

Caso 2.2 $\lambda \neq 0$

$\boxed{c = 2\lambda}$

$\boxed{r = 2\lambda}$

$c = \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r}$

$r = \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r}$

$2\pi r^2 + \pi r^2 = 12 \Rightarrow$

$3\pi r^2 = 12$

$r^2 = \frac{12}{3\pi}$

$\boxed{r = \sqrt{\frac{12}{3\pi}}}$

$\boxed{c = \sqrt{\frac{12}{3\pi}}}$

Conclusión:

$c = \sqrt{\frac{12}{3\pi}}$

$r = \sqrt{\frac{12}{3\pi}}$

es el cilindro de máximo vol que cumple la rest de área.