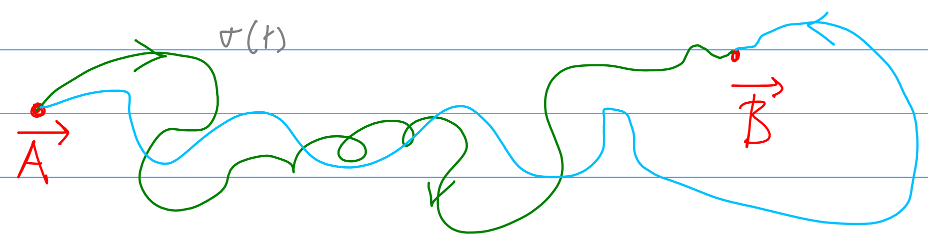
Hoy: Campos Conservativos 2

Def: Un campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es conservativo si tiene un potencial $U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir una función escalar diferenciable $U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$\boxed{\nabla U(x,y,z) = F(x,y,z)}$$

Porqué son importantes?

(1) Teorema (Fundamental del cálculo para integrales de línea)



Si $\sigma(t)$ es una curva parametrizada cualquiera de $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$ y F es un campo vectorial CONSERVATIVO con potencial escalar U entonces:

$$\int_\sigma F \, ds = U(\vec{B}) - U(\vec{A})$$

(2) Muchas leyes físicas producen campos conservativos (campo eléctrico y gravitacional)

Hoy: 4 items

(a) Cómo reconoces si un campo F dado es conservativo?

(b) Si es conservativo cómo encontrar U?

(c) Ejemplos relevantes de campos conservativos y potenciales en física

(d) Teorema de trabajo y energía (permite calcular cambios en la rapidez de un objeto bajo la acción de un campo de fuerzas mediante integrales de línea)

Para qué son las int de línea?

(a) Cómo reconoces un campo conservativo?

Ejemplo: Sea $G(x,y,z) = (-y, x, 0)$. Es G conservativo?

Lema: (1) Si $\nabla \times G \neq \vec{0} \Rightarrow G$ NO ES conservativo.

(2) Si $\nabla \times G = \vec{0}$ y G está definido en una región "sin huecos" $\Rightarrow G$ SI ES conservativo.

Obs: ~~Si~~ $\nabla \times G = \vec{0} \Rightarrow$ NO SABEMOS.

Sol: Calculamos el rotacional de G, $\nabla \times G =$

$$\nabla \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(1-(-1))$$

$$= (0, 0, 2) \neq (0,0,0)$$

Por el lema sabemos que G NO ES un campo conservativo. (No existe tal U.)

Ejercicio: Sea $\left[H(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \right]$

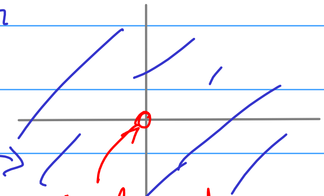
(a) Verifique que si C es el círculo unitario en dirección positiva entonces

$$0 \neq \int_C H \, ds \underset{\text{Notación}}{=} \int_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

luego H no es conservativo.

(b) Demuestre que $rot(H) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix} = 0$

Note que H está definido en



(b) Sea $\left[G(x,y) = (4x+y,\ 6y^2+x)\right]$ Encuentre un potencial escalar $U(x,y)$ para G.

Sol: $U(x,y)$? debe satisfacer $\boxed{\nabla U(x,y) = G(x,y)}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 4x+y & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y} = 6y^2+x & (2) \end{cases}$$

Miro (1) e integro parcialmente con respecto a x

desconocida porque $\frac{\partial A}{\partial x}(y) = 0$

$$\left[U(x,y) = 2x^2 + yx + [A(y)]\right]$$

Sustituyendo en la segunda ecuación para buscar $A(y)$ encontramos:

$$\cancel{x} + A'(y) = 6y^2 + \cancel{x} \quad \Rightarrow \quad A'(y) = 6y^2$$

$$\left[\left[A(y) = 2y^3 + C\right]\right]$$

Combinando concluimos que

$$\left[U(x,y) = 2x^2 + yx + 2y^3 + C\right]$$

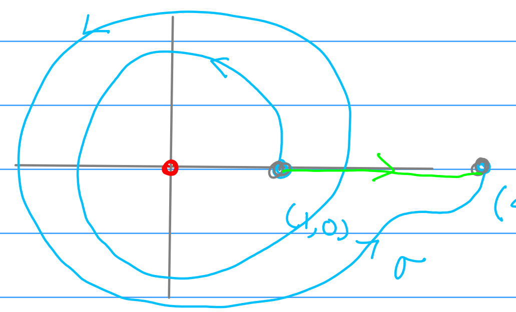
una escogencia es $C=0$, $U(x,y) = 2x^2 + yx + 2y^3$ ✓.

Ejemplo: El campo gravitacional causado por un cuerpo en el origen es

$$\boxed{F(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\cdot\left(\frac{K}{\|\vec{x}\|^2}\right)}$$

(a) Verifique que $\left[U(\vec{x}) = \dfrac{K}{\|\vec{x}\|}\right]$ es un potencial para F.

(b) Calcule



$$\left[\int_\sigma F\,ds = \right]$$

Por TFCIL $=$

Sol parte (b): $U((4,0)) - U((1,0)) = \left(\dfrac{K}{4} - \dfrac{K}{1}\right)$

(a) Resolvemos para $n=3$, $\vec{x} = (x,y,z)$

$$U(x,y,z) = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \text{ calculamos } \nabla U:$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = K\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\underline{2x}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = K\,\frac{-x}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K\,\frac{-y}{\|\vec{x}\|^3}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = K\,\frac{-z}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$\nabla U(x,y,z) = K\left(\frac{-x}{\|\vec{x}\|^3}, \frac{-y}{\|\vec{x}\|^3}, \frac{-z}{\|x\|^3}\right)$$

$$= K\,\frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \frac{-K\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{1}{\|x\|^2} = F(\vec{x})\ \checkmark$$

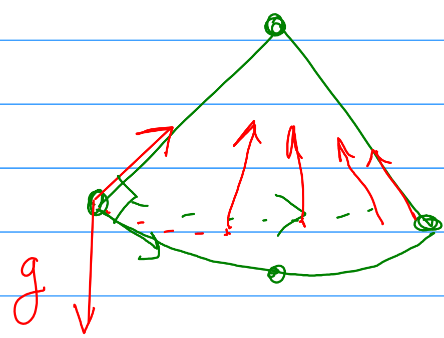
(d)

Teorema (de trabajo y energía) Sea $\sigma(t)$ la trayectoria de una partícula de masa m bajo la acción del campo de fuerza $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\xrightarrow{\text{ley de Newton}} \left(\forall t \left(F(\sigma(t)) = m \cdot \sigma''(t)\right)\right)$$

$$\boxed{\underbrace{\int_\sigma F \, d\vec{s}}_{\text{Trabajo realizado}}} = \underbrace{\frac{1}{2} m \|\sigma'(t_F)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\sigma'(t_0)\|^2}_{\text{diferencia en energías cinéticas..}}$$

Ejemplo:



$$gR - gR\cos\theta$$