Hoy: Integrales de línea.

Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable.

Def: La integral de F a lo largo de σ es

$$\int_\sigma F \cdot d\vec{s} := \left[\underbrace{\int_a^b \underbrace{F(\sigma(t))}_{\text{vector en } \mathbb{R}^3} \cdot \underbrace{\sigma'(t)}_{\text{vector en } \mathbb{R}^3}}_{\text{escalar}} \, dt \right]$$

Lim

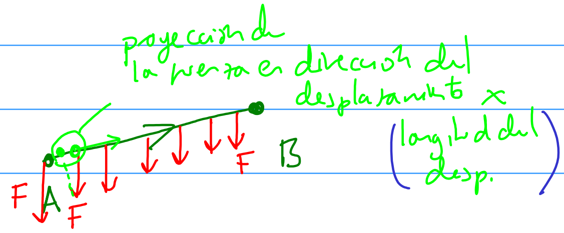
Preguntas: (1) Qué significa? (Para qué sirve?)

(2) Qué métodos de cálculo eficientes hay?

$\int_\sigma F \cdot d\vec{s} =$ número que mide el "Trabajo realizado por el campo vectorial F a lo largo de la trayectoria σ".

Si F es un campo de fuerza.

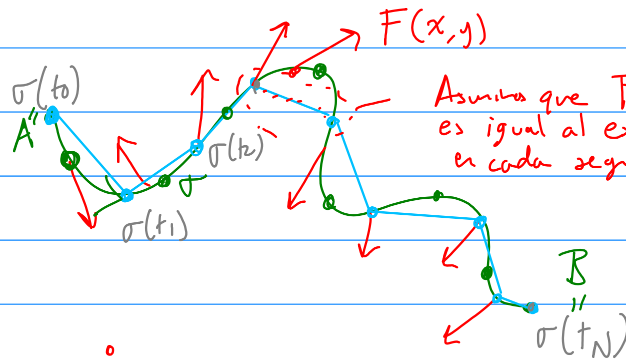
(1)



$$\text{Trabajo} = \underbrace{\left[F \cdot \frac{(B-A)}{\cancel{\|B-A\|}} \right]}_{\text{Fuerza a lo largo del desp.}} \times \underbrace{\cancel{\|B-A\|}}_{\text{distancia}}$$

De física (1) el trabajo de F al ir de A hacia B

(2)



Asumimos que F es igual al extremo izquierdo en cada segmento

$$F(\sigma(t_0)) \cdot (\sigma(t_1) - \sigma(t_0)) +$$
$$F(\sigma(t_1)) \cdot (\sigma(t_2) - \sigma(t_1)) +$$
$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{N} F(\sigma(t_{j-1}))\cdot(\sigma(t_j)-\sigma(t_{j-1})) = F(\sigma(t_{N-1}))(\sigma(t_N)-\sigma(t_{N-1}))$$

$$\int_\sigma F\,ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{F(\sigma(t_{j-1}))}_{N}\cdot\left[\underbrace{(\sigma(t_j)-\sigma(t_{j-1}))}_{m}\right]$$

$\parallel$

$\sigma'(t_{j-1})(t_j-t_{j-1})$

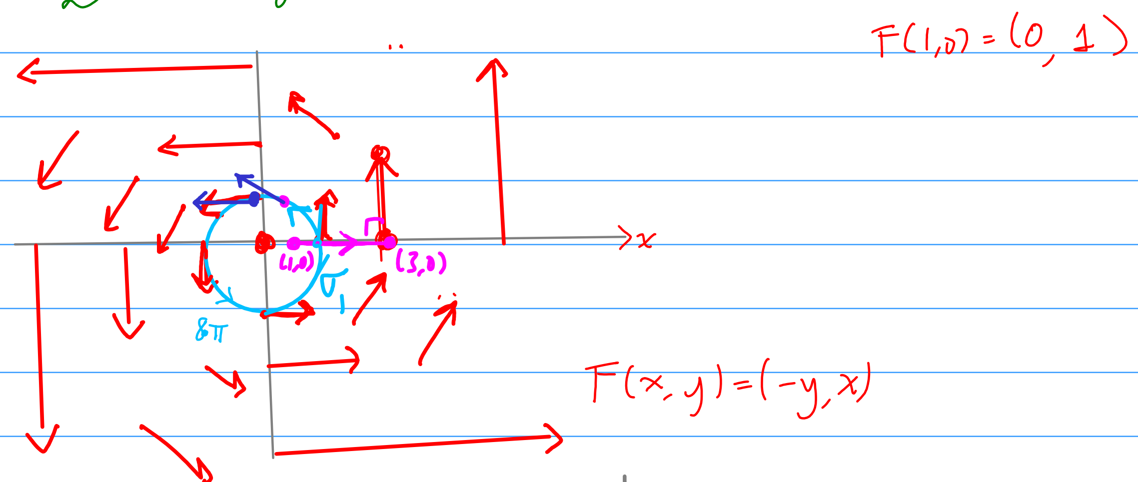
$N\cdot m$ = Joules.

$$\sigma(t_{j-1}+h) \approx \sigma(t_{j-1}) + [\sigma'(t_{j-1})\cdot h]$$

Ejemplo 1: Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $[F(x,y)=(-y,x)]$ a lo largo de las curvas siguientes:

(a) σ_1 es el círculo de radio 2 centrado en el origen en dirección contraria a las manecillas del reloj.

(b) σ_2 es el segmento de recta desde $(1,0)$ a $(3,0)$



Sol: Sabemos que $\int_\sigma F\,d\vec{s} = \int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt$

Necesitamos fórmulas que parametricen σ_1 y σ_2.

(a) $\left[F(x,y) = (-y, x)\right]$

$$\begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ \sigma_1(t) = (\underbrace{2\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{2\sin(t)}_{y(t)}) \end{cases}$$

$$\int_{\sigma_1} F\,ds = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt$$

$$\sigma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) = 4$$

constante 4

$$\int_0^{2\pi} 4\,dt = \boxed{8\pi} \neq 0 \text{ Joules}$$

(b) σ_2 segmento desde $(1,0)$ hasta $(3,0)$

$$\begin{cases} \sigma_2(t) = \underbrace{(1,0)}_{\text{punto inicial}} + t\,\underbrace{[(3,0)-(1,0)]}_{\text{vector director}} = (1+2t, 0) \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$F(x,y) = (-y, x)$

$$\int_{\sigma_2} F \cdot d\vec{s} = \int_0^1 F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)\,dt =$$

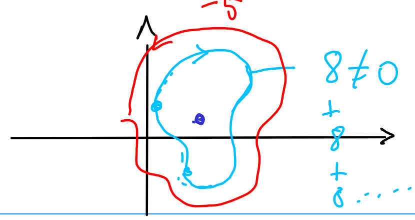
$$\sigma_2'(t) = (2, 0)$$

$$F(\sigma_2(t)) = (0, 1+2t)$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(0, 1+2t) \cdot (2, 0)}_{0}\,dt = 0 \text{ Joules}$$

Idea: Muchas veces ← Para muchos campos F que aparecen en la naturaleza (Leyes física) pasa que para trayectorias cerradas σ

$$\int_\sigma F\,d\vec{s} = 0 \text{. Por qué???}$$



$\oint \neq 0$ + $\oint$ + $\oint$ ....

— le puedo sacar energía ilimitada !!

Los campos no conservativos son fuentes (netas) de energía y por eso eventualmente se destruyen así que las leyes físicas que quedan TIENEN que producir campos (después) conservativos. (campo eléctrico o el campo gravitacional son conservativos).

Def: Un campo vectorial $F(x,y,z)$ en $\mathbb{R}^3$ es conservativo si existe una función escalar $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{F(x,y,z) = \nabla U(x,y,z).}$$

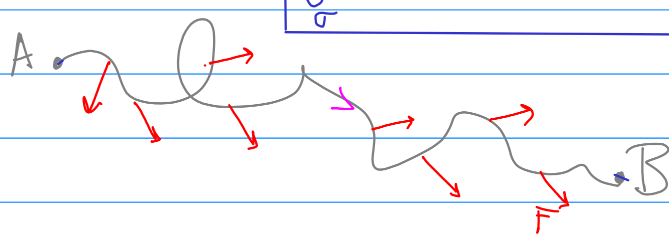
y en ese caso U se llama un potencial para el campo F.

Las integrales de campos conservativos son MUY FÁCILES,

Teorema [Fundamental del Cálculo para integrales de línea]

Sea σ una curva parametrizada desde A hacia B y sea F un campo vectorial conservativo con potencial U.

$$\boxed{\int_\sigma F\, d\vec{s} = U(B) - U(A)}$$



Ejemplo 2: $U(x,y) = x^2 + 3y^2$

$$\left[\nabla U(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y \end{pmatrix}\right].$$ Así que el campo vectorial $\left[G(x,y) = (2x, 6y)\right.$ es CONSERVATIVO y tiene potencial $\left.U(x,y) = x^2 + 3y^2.\right]$

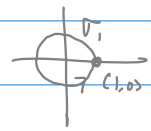
Ejercicio: Calcule $\int_\sigma G\,ds =$ donde $G(x,y) = (2x, 6y)$ y σ es:

(a) El círculo de radio 2 centrado en $(0,0)$ en contra de las manecillas del reloj

(b) El segmento que une $(1,0)$ y $(3,0)$

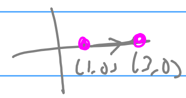
Sol: El campo $G(x,y)$ es conservativo y tiene potencial $U(x,y) = x^2 + 3y^2$.

(a)



$$\int_{\sigma_1} G\,ds = U((1,0)) - U((1,0)) = 0$$

(b)



$$\int_{\sigma_2} G\,ds = U((3,0)) - U((1,0))$$
$$= (3^2 + 3\cdot 0^2) - (1^2 + 3\cdot 0^2)$$
$$= 3^2 - 1^2 = 8 \text{ Joules.}$$

Nota: El campo $F(x,y) = (-y, x)$ NO es conservativo porque... la integral sobre el círculo que calculamos en el ejemplo 1 vale $8\pi \neq 0$ aunque la curva es cerrada.