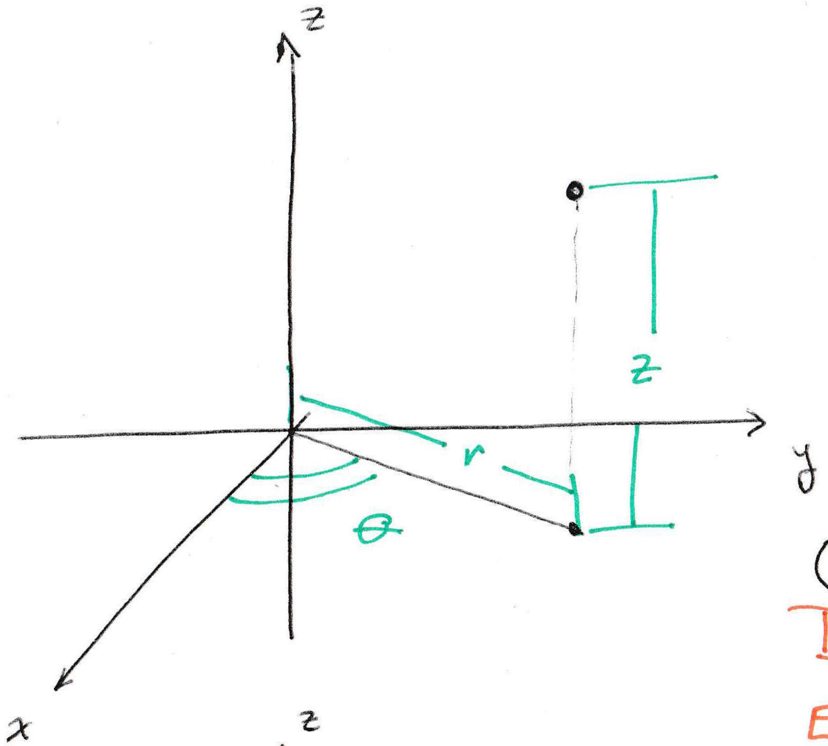
Coordenadas Cilíndricas: ~~y/ esféricas~~:



Ejercicio:

(a) Encuentre fórmulas

$x =$

$y =$

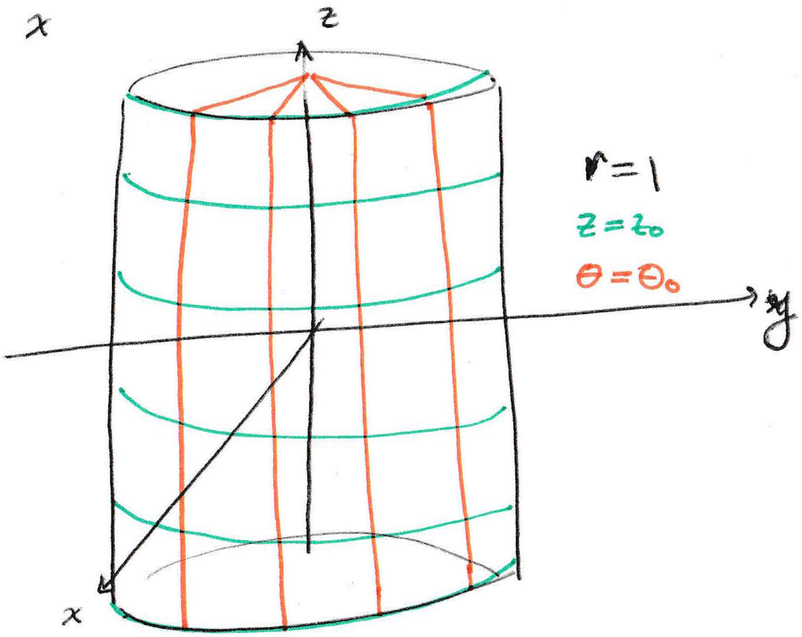
$z =$

en términos de (r, θ, z)

(b) Calcule el Jacobino del cambio de coordenadas

DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLO USTED MISMO

¿Dónde está el Cilindro en coordenadas cilíndricas?



(b)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

Expandiendo

Cómo se integra en cilíndricas?

Así que, por Teo del cambio de variable

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \boxed{\iiint_F f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r \, dz\, dr\, d\theta}$$

En coords cilíndricas

$$E = \{ (r,\theta,z) \in F \}$$

descipción en coords cilíndricas de E

Cuando se usan las coordenadas cilíndricas?

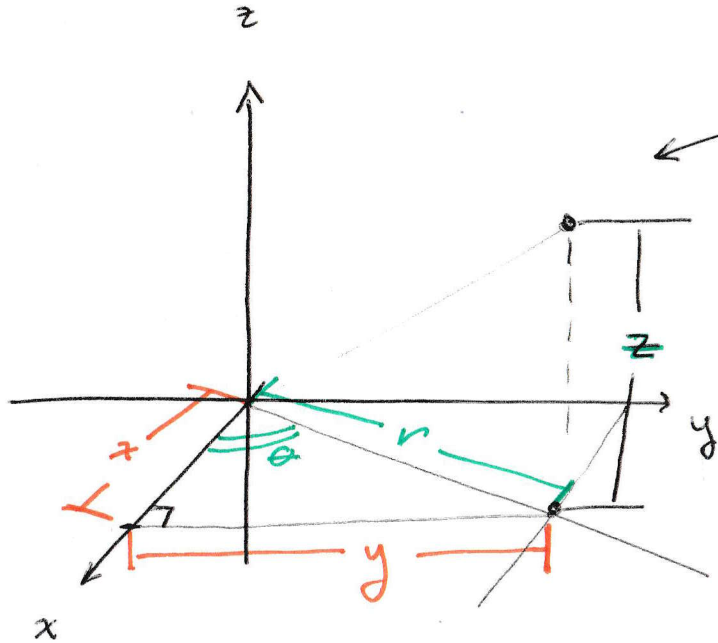
Solución:

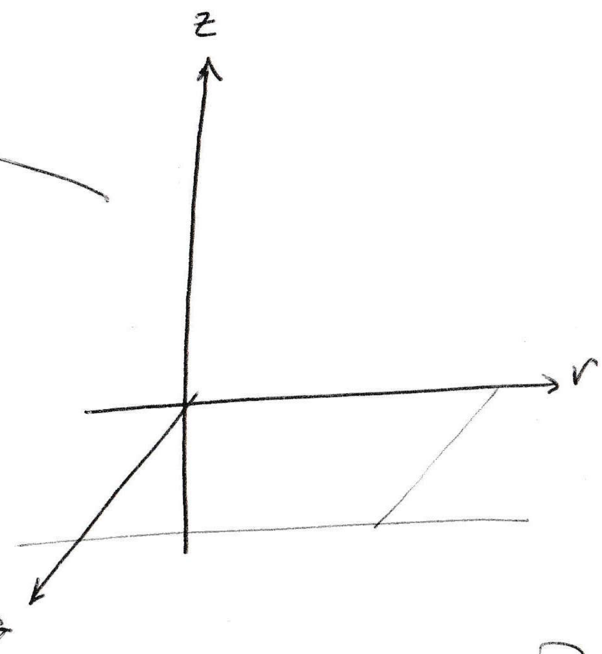
a

$x =$

$y =$

$z =$

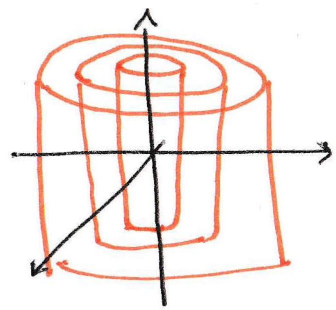




Qué tipo de regiones son fáciles de describir en coordenadas cilíndricas?

(i) $$E = \left\{ (r, \theta, z) : \begin{array}{c} 1 \le r \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le z \le 2 \end{array} \right\}$$

(ii) Situaciones con simetría circular (techo y piso cualquiera sobre paredes cilíndricas)

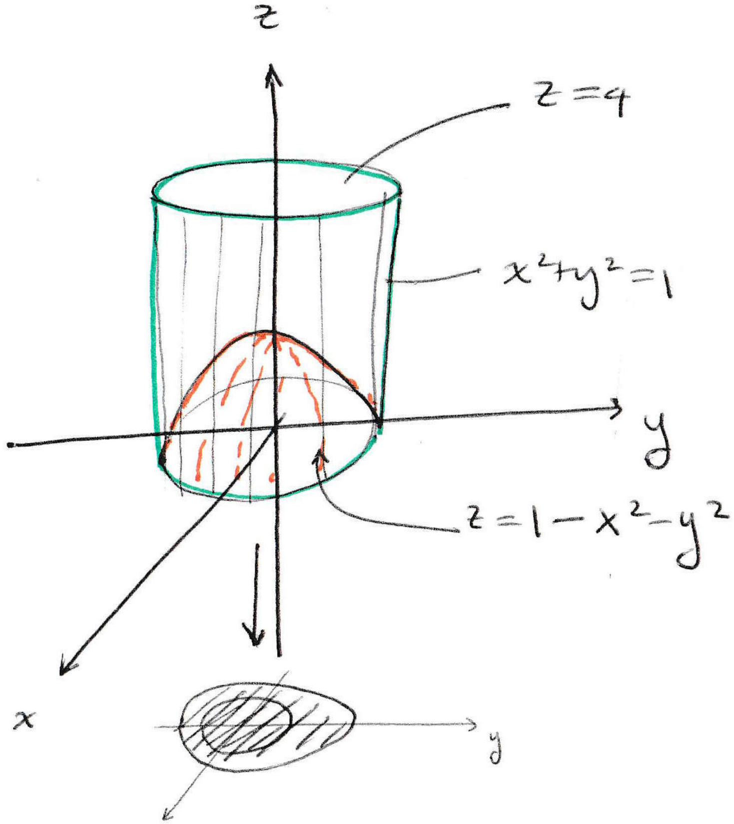


(iii) Cuando el integrando es más fácil en cilíndricas $\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2}$

Ejercicio: Un sólido E está contenido en la región $x^2+y^2=1$, debajo del plano $z=4$ y encima del paraboloide $z=1-x^2-y^2$. Calcule la masa de E si la densidad en un punto $p\in E$ es proporcional a la distancia entre p y el eje z y la densidad en $(1,0,1)$ vale $1\ \mathrm{Kg}/\mathrm{m}^3$.

DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLO USTED MISMO...

Solución:



① Describimos la región en cilíndricas:

$$E = \left\{ (r,\theta,z) : \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 1-r^2 = 1-x^2-y^2 \le z \le 4 \end{array} \right\}$$

② $\rho(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2}$, $\boxed{\rho(1,0,1) = K = 1}$

$$\text{masa} = \iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 r\, r\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 r^2 \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (3 + r^2) \, dr = \int_0^{2\pi} r^3 + \frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^{r=1} \, d\theta =$$

6

$$= \left(1 + \frac{1}{5}\right) 2\pi = \boxed{\frac{12\pi}{5} \quad Kg}$$

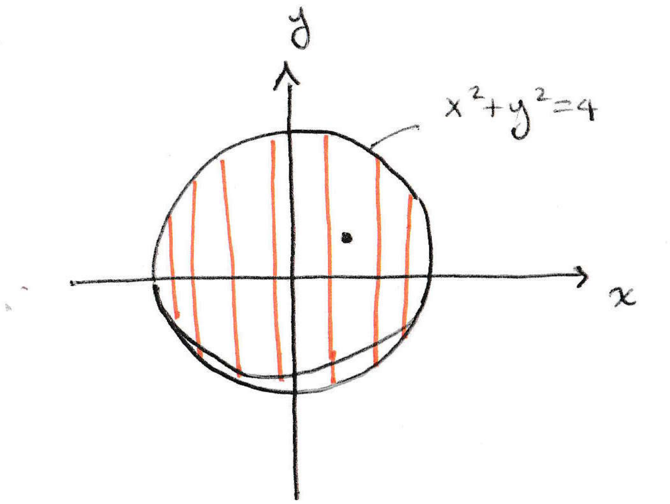
Ejercicio: Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx =$ (7)

DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLO

USTED MISMO...

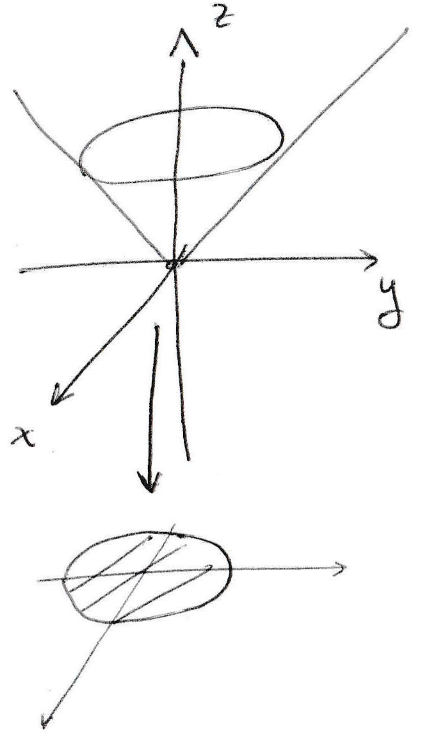
Solución:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} x^2+y^2 \, dz\, dy\, dx =$$



$y=\sqrt{4-x^2}$

$y=-\sqrt{4-x^2}$



$z=2$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{2} r^2\cdot r \; dz\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^2 r^3(2-r)\,dr =$$

Cambiamos a variables (θ, r, z)

$$= 2\pi\left(\frac{2r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} = 2\pi\left(2^3-\frac{2^5}{5}\right) = \boxed{\pi\left(2^4-\frac{2^6}{5}\right)}$$