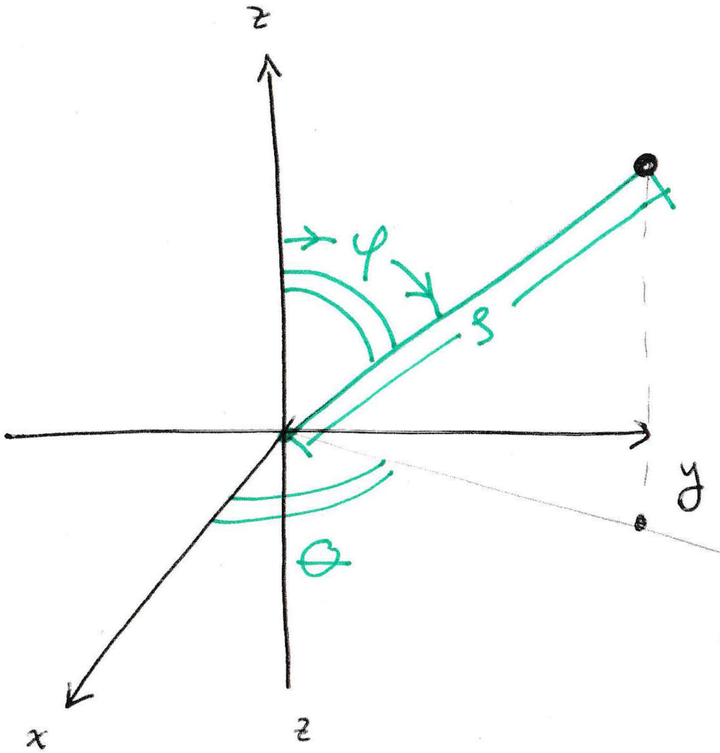
Coordenadas esféricas:

$\rho \geq 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$0 \leq \varphi < \pi$



Ejercicio:

(a) Encuentre una fórmula

$x =$

$y =$

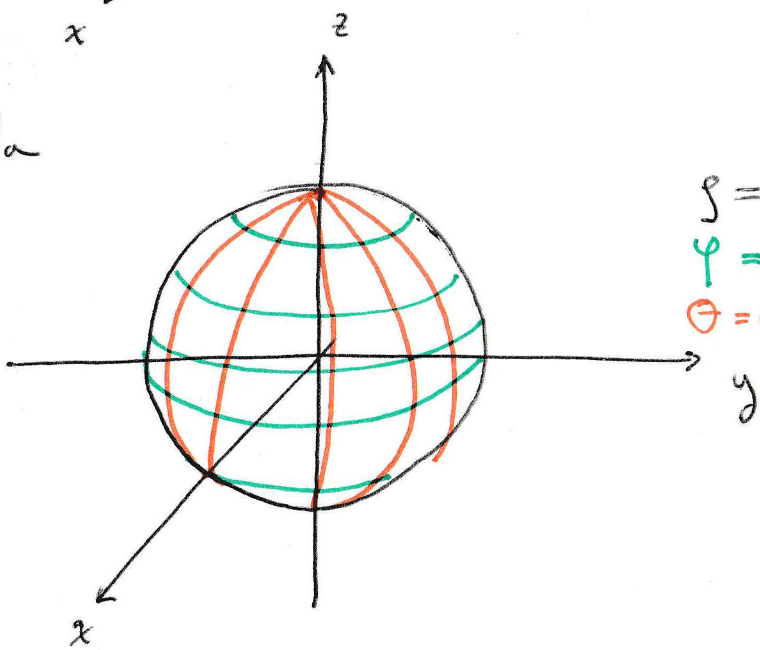
$z =$

en términos de ρ, θ, φ.

(b) Calcule el Jacobiano de la transformación.

DETENGA EL VIDEO E INTENTE CALCULARLA USTED MISMO...

¿Dónde está la esfera en coord. esféricas?



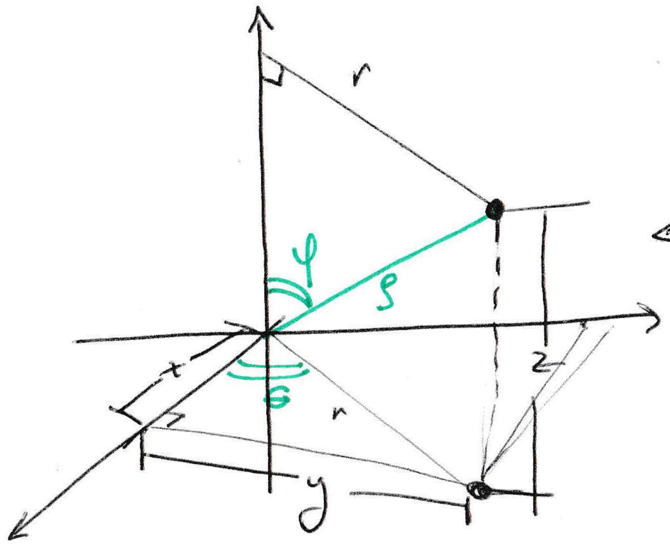
$\rho = 1$

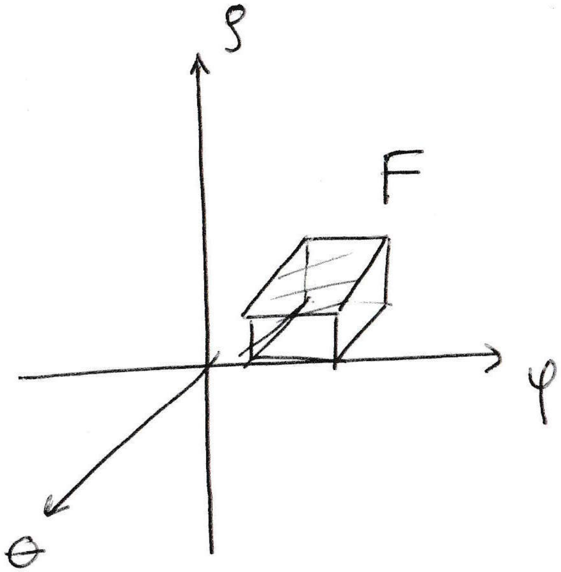
$\varphi = \varphi_0$

$\theta = \theta_0$

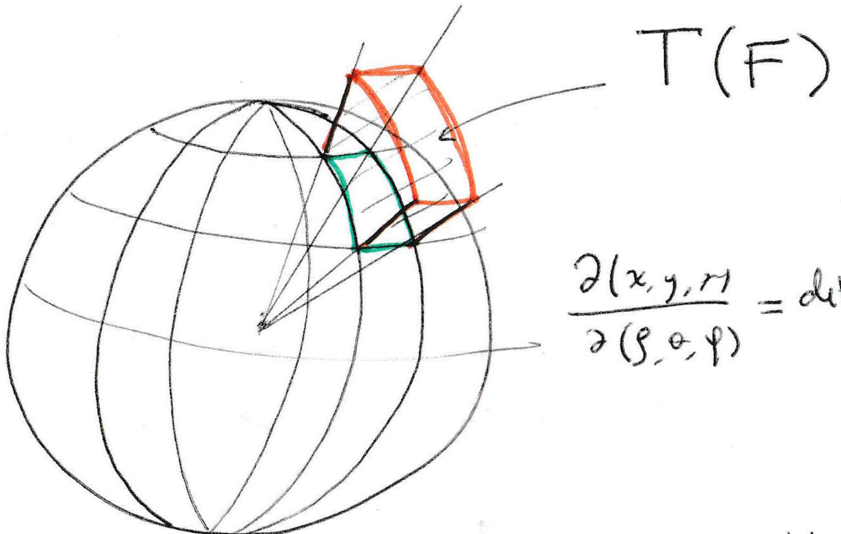
(a)

$$x = \rho \sin(\varphi) \cos\theta$$
$$y = \rho \sin(\varphi) \sin\theta$$
$$z = \rho \cos(\varphi)$$





(b)



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \det \begin{bmatrix} S(\varphi)C(\theta) & -\rho S(\varphi)S(\theta) & \rho C(\varphi)C(\theta) \\ S\varphi S\theta & \rho S\varphi C\theta & \rho C\varphi S\theta \\ C\varphi & 0 & -\rho S\varphi \end{bmatrix} = \rho^2 \sin\varphi$$

Por Teorema del cambio de variable

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \boxed{\iiint_F f(\rho S\varphi C\theta, \rho S\varphi S\theta, \rho C\varphi)\, \rho^2 S\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta}$$

Cuándo se usan las coordenadas esféricas?

(1) En regiones fáciles de describir en esféricas (Bolas, conos de helado , sectores de espacio dados con paralelos y meridianos)

(2) Problemas con simetría esférica

(3) Si el integrando es fácil de expresar en esféricas (Ej $x^2+y^2+z^2=\rho^2$)

Ejercicio:

Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV$ donde B es la bola unitaria centrada en el origen.

DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLA USTED MISMO...

Solución:

En esféricas $B = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\}$

y $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ luego, por Teo cambio de variable

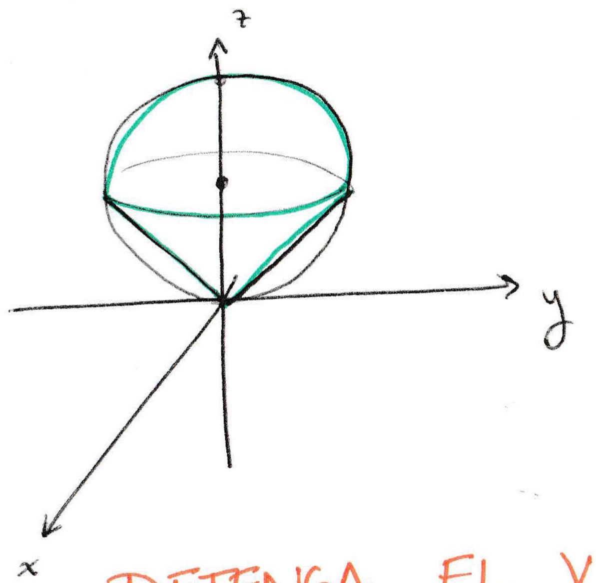
$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \; d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

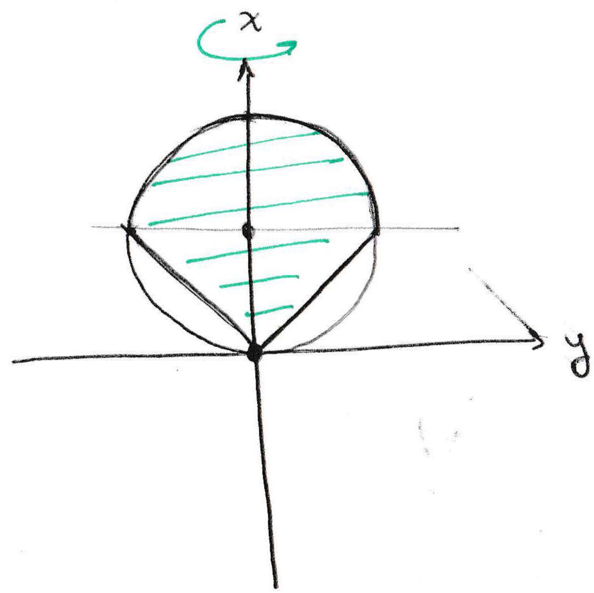
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \left[\int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho \right] d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi(e-1)}{3} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$\int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{e^{\rho^3}}{3} \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{e}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2\pi(e-1)}{3} \left[-\cos\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right] = \boxed{\frac{4\pi(e-1)}{3}}$$

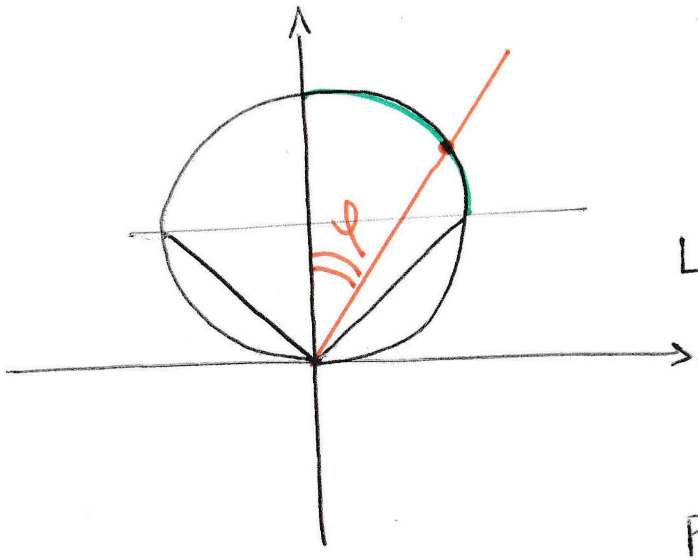
Ejercicio: Calcule el volumen del sólido que está debajo de la esfera de radio $\frac{1}{2}$ centrada en $(0, 0, \frac{1}{2})$ y encima del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$





DETENGA EL VIDEO Y RESUELVA EL EJERCICIO INDEPENDIENTEMENTE

Solución:



$$E = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le \,? \end{array} \right\}$$

La esfera tiene ecuación cartesiana

$$x^2 + y^2 + \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z + \cancel{\tfrac{1}{4}} = \cancel{\tfrac{1}{4}}$$

Pasando a esféricas

$$\rho^2 = \rho \cos\varphi \iff \boxed{\rho = \cos\varphi}$$

luego $0 \le \rho \le$

$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint_E 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\varphi} \underbrace{\boxed{\rho^2 \sin\varphi}}_{\text{Jac.}} \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right] \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\cos\varphi} d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3\varphi}{3} \sin\varphi \, d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(- \frac{\cos^4\varphi}{4} \right) \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{3} \left(- \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{-\frac{4}{16} + 1}{4} \right) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{16} \right) = \boxed{\cancel{\frac{15\pi}{24}}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{8}}$$