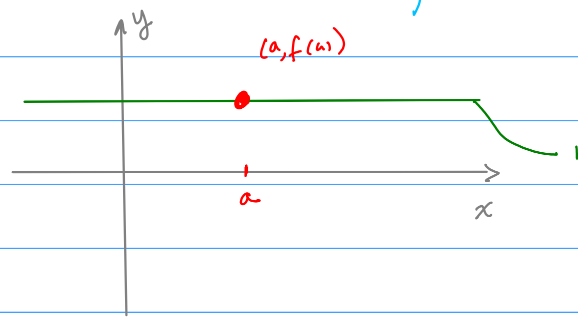
Hoy: Aproximaciones de segundo orden.

Caso especial: Tenemos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y sabemos que $\boxed{f'(a)=0}$

¿Cómo entender el comportamiento de f cerca de a?

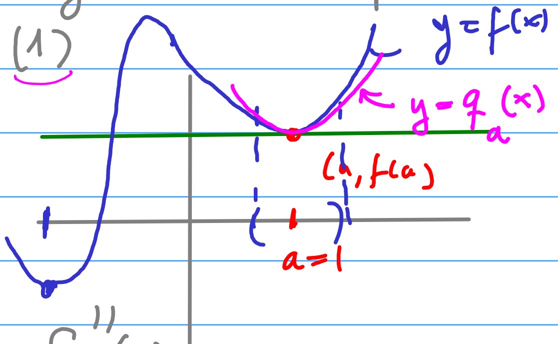
Miremos la gráfica de f



$\ell_a(x) = f(a) + \cancel{f'(a)(x-a)}$

Hay muchos comportamientos posibles...

(1)



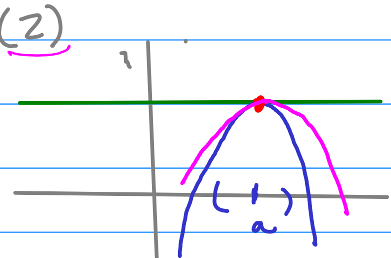
$f''(a) > 0$

$f(x) = (x-1)^2$

✓

a es un mínimo local

(2)



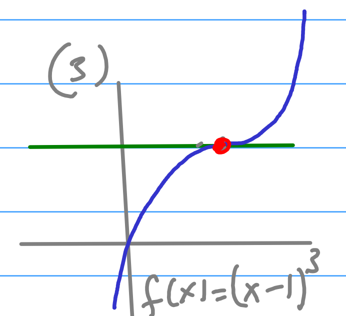
$f''(a) < 0$

$f(x) = -(x-1)^2$

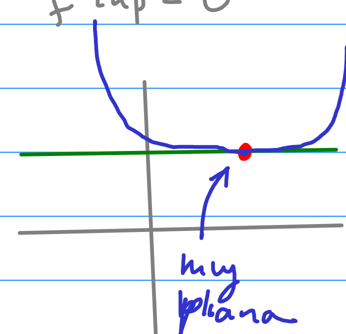
✓

a es un máximo local

(3)



$f''(a) = 0$



$f(x) = (x-1)^4$

NO SABEMOS

$$\left[\, q_a(x) = \underbrace{\underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{apox local}} + \tfrac{1}{2} f''(a) \cdot \underbrace{(x-a)^2}_{\text{parte cuadrática}}}_{\text{apox cuadrática}} \,\right]$$

Obs: Podemos seguir aumentando el orden de la aprox todo

$$f(x) \approx \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right]$$

¿Cómo generalizar la mejor aproximación cuadrática al caso de funciones escalares $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$?

Def: Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \, (x_1, \ldots, x_n) \right)$$

Obs: Hay MUCHAS segundas derivadas (n^2)...

se ordenan mediante una matriz de segundas derivadas llamada el Hessiano de f.

$$\mathcal{H}_f(a_1, \ldots, a_n) = \begin{array}{cc} & j \\ i & n\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix}}_{n} \right. \end{array}$$

Sabemos (Teo de Clairaut) que $\mathcal{H}_f(\vec{a})$ es una matriz simétrica.

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad Df = [\,\tfrac{\partial f}{\partial x} \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}\,], \quad \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

primeras derivadas

Ej: $f(x,y) = \cos(x+y)$. Calcule $\mathcal{H}_f(0,0)$

Sol: Queremos calcular todas las segundas derivadas de f en $(0,0)$

$$\mathcal{H}_f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}) \end{bmatrix} \quad 2 \times 2$$

$$\boxed{\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin(x+y)\right) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\cos(0+0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\sin(x+y)\right)$$
$$= -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -\cos(0+0) = -1$$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: La mejor aproximación cuadrática para f cerca de $\vec{a}$ es:

$q_{\vec a} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

matriz $1\times d$ vector $d\times 1$

$$q_{\vec a}(\vec x) = f(\vec a) + Df(\vec a)\cdot(\vec x - \vec a) + \left[\underbrace{(\vec x - \vec a)^{t}}_{1\times \cancel{n}} \, \frac{\overbrace{H_f(\vec a)}^{\cancel{n}\times\cancel{n}}}{2} \, \underbrace{(\vec x - \vec a)}_{\cancel{n}\times 1} \right]$$

traspuesta

Teorema: Si (TODAS las segundas derivadas) parciales del f son continuas en $\vec a$ entonces

$$\lim_{\vec x \to \vec a} \frac{\| f(\vec x) - q_{\vec a}(\vec x) \|}{\| \vec x - \vec a \|^2} = 0$$

Es decir f se aproxima MUY BIEN mediante $q_{\vec a}(\vec x)$ cerca de $\vec a$

Ejercicio: (a) Calcule la mejor aprox cuadrática para $f(x,y) = \cos(x+y)$ cerca de $(0,0)$.

(b) Demuestre que esta es una buena aprox cuadrática

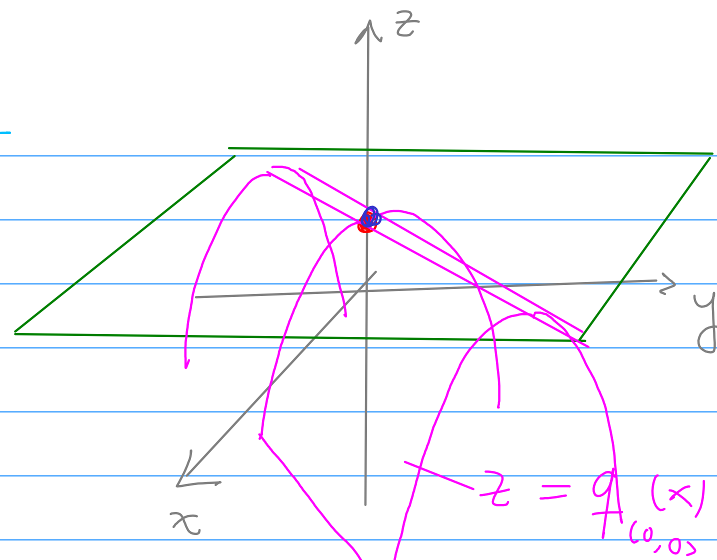
Sol:

$$q_{(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \overset{0}{\cancel{Df(0,0)}} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \frac{H_f(0,0)}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$f(0,0) = 1$

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix}$$

$$\ell_{(0,0)}(x,y) = 1$$



$$q_{(0,0)}(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x \;\; y)\left[\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x \;\; y)\begin{pmatrix} -x-y \\ -x-y \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[x(-x-y) + y(-x-y)\right]$$

$$q_{(0,0)}(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x-y)^2$$

cómo se comporta este polinomio cuadrático?

$$f(x,y) = \cos(x+y)$$

Def: Una matriz simétrica A es

(i) def. positiva si $\vec{x}^t A x > 0 \quad \forall x \neq 0$ $\quad A \succ 0$

(ii) def negativa si $\vec{x}^t A x < 0 \quad \forall x \neq 0$ $\quad A \prec 0$

(iii) indefinida en cualquier otro caso.

Teorema: (Álg lineal)

$A \succ 0 \iff$ sus valores propios son > 0

$A \prec 0 \iff$ sus valores propios son < 0

En el caso 2x2 es más fácil ...

Teorema: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = A$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = A$

Si $a > 0$ y $\det(A) > 0 \Rightarrow A > 0$

Si $a < 0$ y $\det(A) > 0 \Rightarrow A < 0$

Si $\det(A) < 0 \Rightarrow A$ tiene un valor propio > 0 y el otro < 0

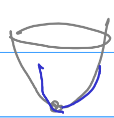
Teorema: (Criterio de la segunda derivada)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar dos veces diferenciable con continuidad en (a,b). Suponga que $\nabla f(a,b) = \vec{0}$.

Calculamos

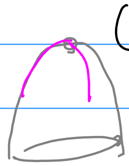
$$\mathcal{H}_f(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

(1) Si $A > 0$ y $\det(\mathcal{H}_f(a,b)) > 0 \Rightarrow$



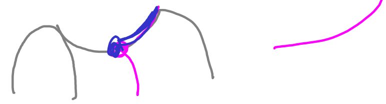
$\rightsquigarrow$ (a,b) es un mínimo local.

(2) Si $A < 0$ y $\det(\mathcal{H}_f(a,b)) > 0 \Rightarrow$



$\rightsquigarrow$ (a,b) es un máximo local

(3) Si $\det(\mathcal{H}_f(a,b)) < 0 \Rightarrow (a,b)$ es de silla



(4) Si $\det(\mathcal{H}_f(a,b)) = 0 \Rightarrow$ NI IDEA.