# Sistemas de coordenadas:

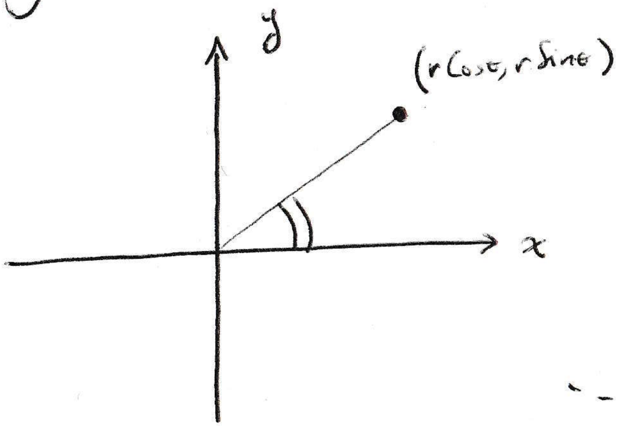
**Def:** Un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ es una transformación $T: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que es una biyección (es decir $T(D) = \mathbb{R}^n$ y $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \Longrightarrow T(x_1) \neq T(x_2)$) en casi todas partes.

Hay muchos cambios de coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Estudiaremos principalmente:

(a) Coordenadas polares (en $\mathbb{R}^2$) y transformaciones lineales.

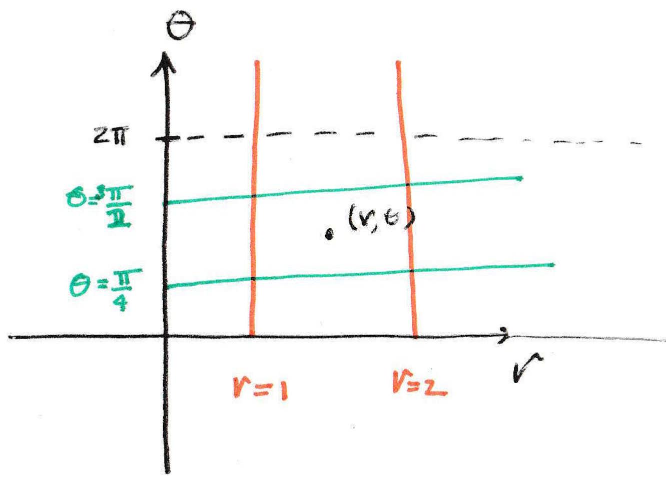
(b) Coordenadas esféricas y cilíndricas (en $\mathbb{R}^3$)

**Ejemplo:** (Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$)




$T$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

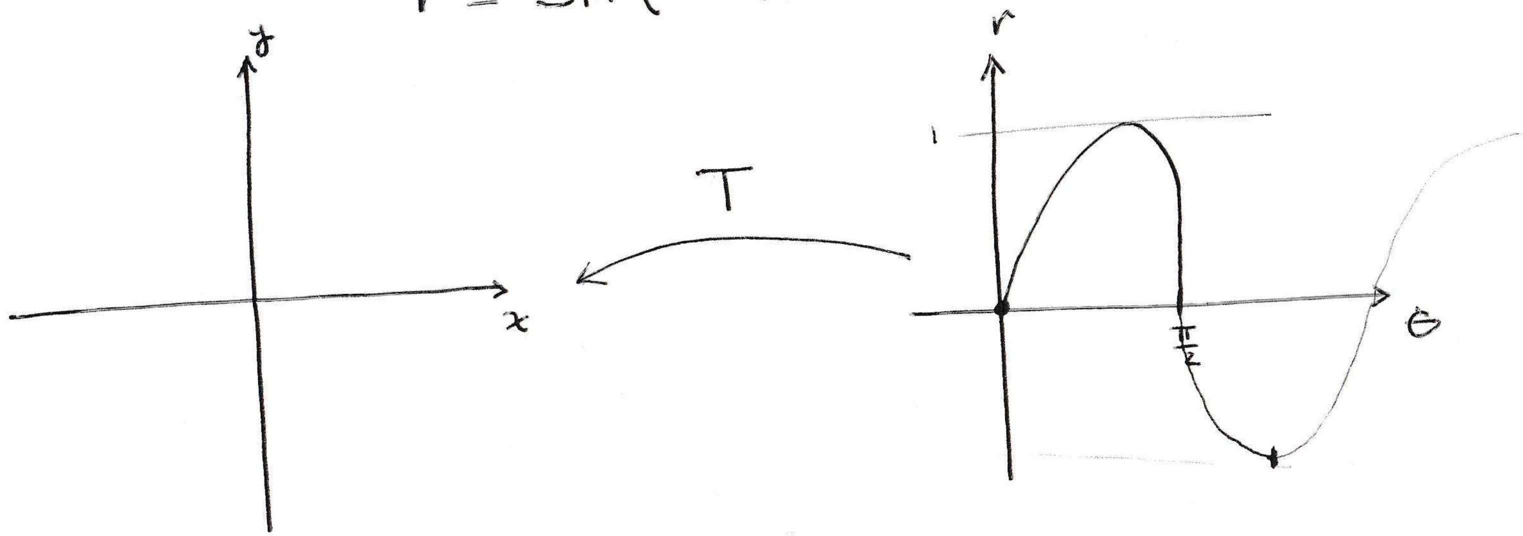



$$\begin{cases} \theta = \\ r = \end{cases}$$

Para que sirven los cambios de coordenadas?

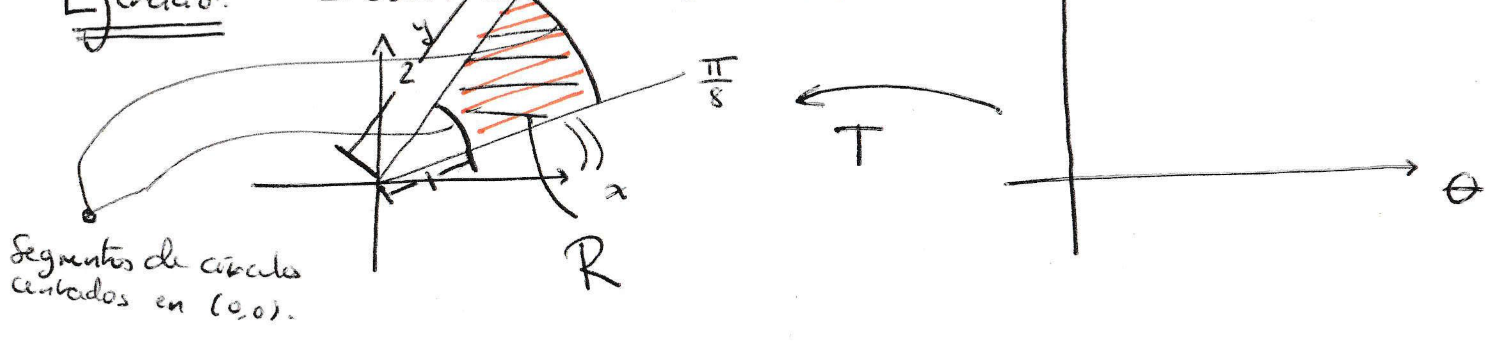
R: Objetos muy difíciles de describir en un sistema son muy fáciles en otro.

Ejercicio: Dibuje la curva cartesiana dada en polares por $r = \sin(2\theta)$. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



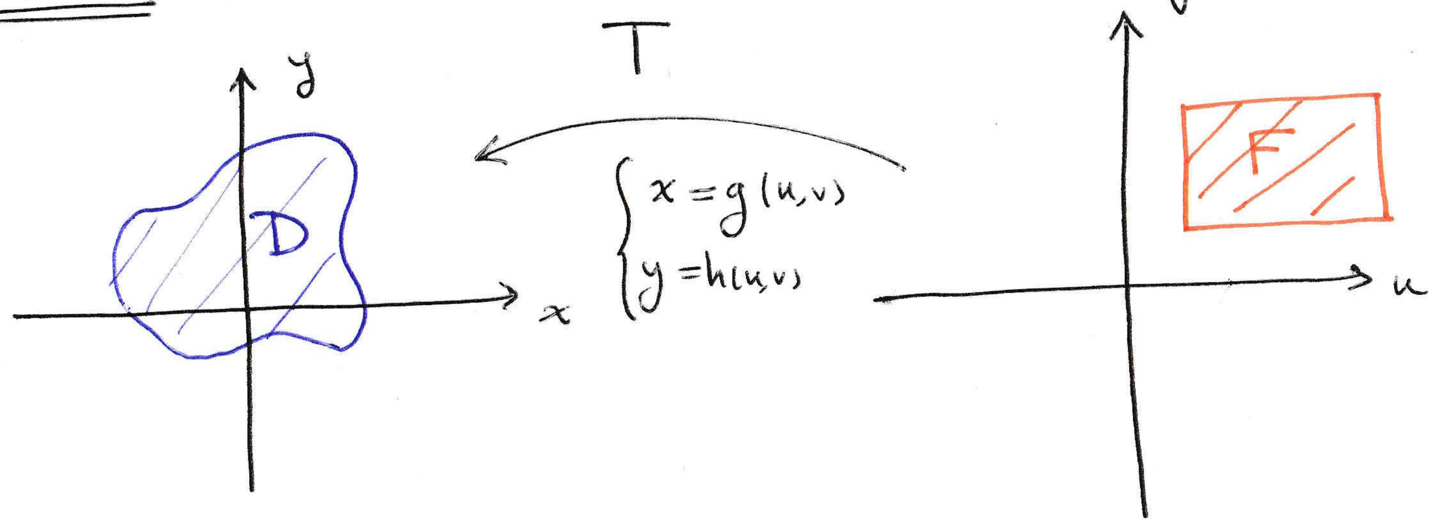

(b) Encuentre la ecuación cartesiana para la curva.

Ejercicio: Describa la región R en coordenadas polares



Cómo se relacionan las integrales en dos sistemas de coordenadas?

<u>**Teorema:**</u> [del Cambio de variable] Sea $T$ un cambio de coordenadas diferenciable con $D = T(F)$. Entonces




PROBLEMA ORIGINAL

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \underbrace{\iint_F f\big(g(u,v),\, h(u,v)\big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv}_{\text{PROBLEMA EN LAS NUEVAS COORDENADAS.}}$$

donde $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right|$ ← Jacobiano del cambio de coordenadas $T$.

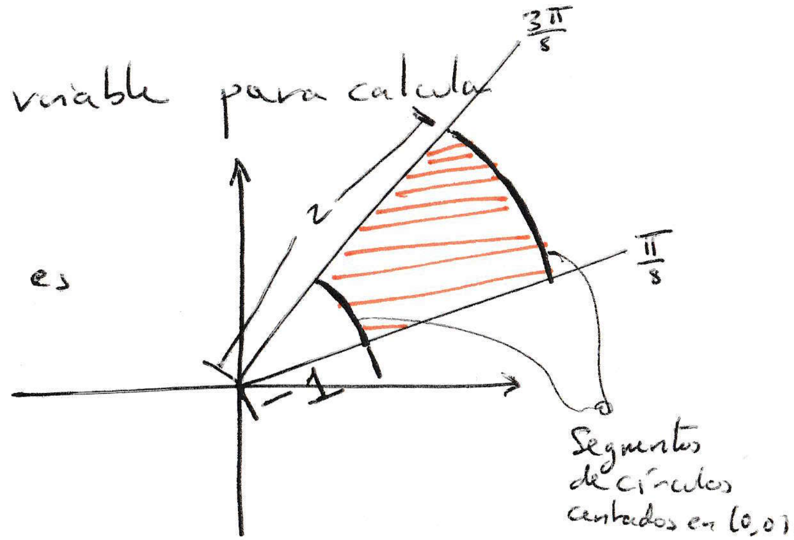
# Ejercicio:

(a) Sea $T\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ la transformación de coordenadas polares.

Calcule el Jacobiano de T.

(b) Use el Teorema del cambio de variable para calcular

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$ donde D es




PARE EL VIDEO y
RESUÉLVALO USTED MISMO...

Solución:

(a) Nuestra transformación $T$ es $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$ luego

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left| r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \right| = r.$$

JACOBIANO en Polares.

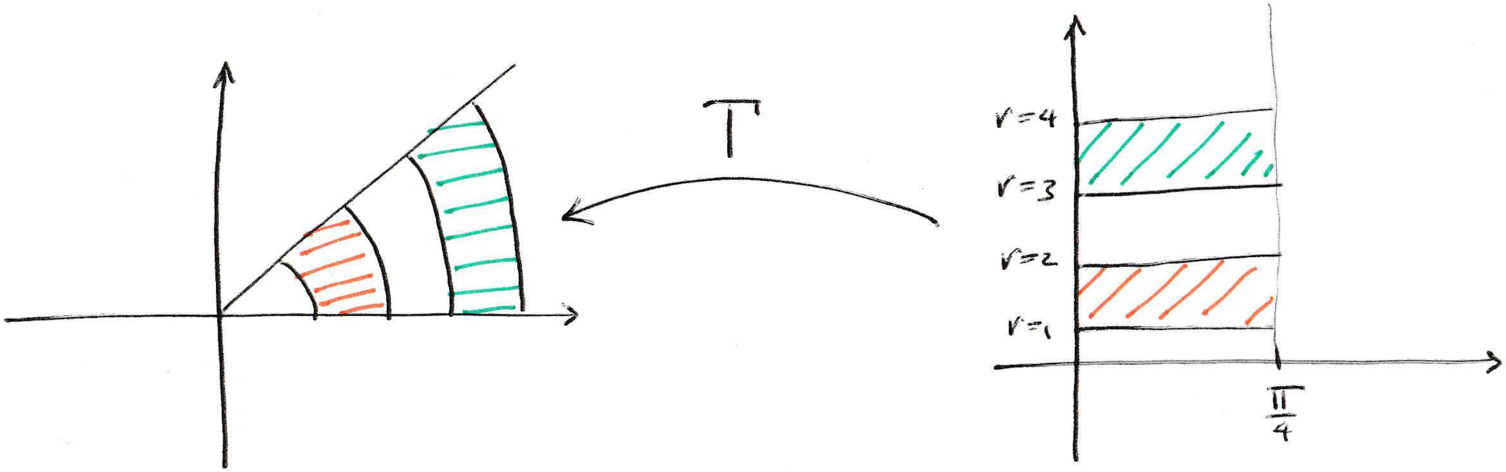
(b) En coordenadas polares, nuestra región de integración está descrita como $\left\{ (r,\theta) : \begin{array}{l} \frac{\pi}{8} \le \theta \le \frac{3\pi}{8} \\ 1 \le r \le 2 \end{array} \right\}$

Usando el Teorema del cambio de variable tenemos

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \int_1^2 e^{-} \quad r\, dr\, d\theta$$

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left( \int_{1}^{2} e^{-r^2} r \, dr \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left( -\frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_{r=1}^{r=2} \right) d\theta = \boxed{\left( -\frac{e^{-4}}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) \frac{7\pi}{8}} \tag{5}$$

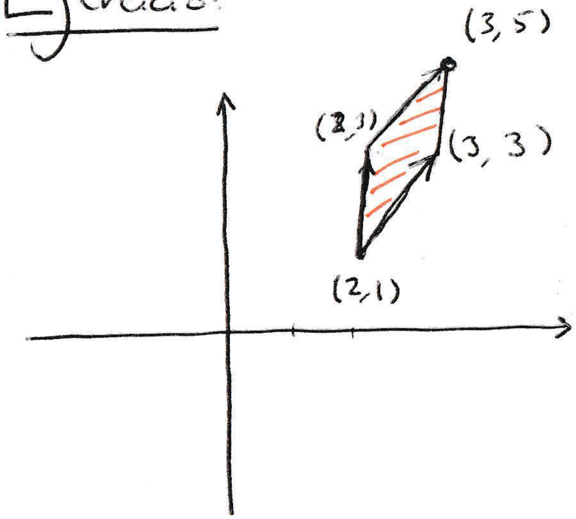
**Nota:** El Jacobiano $r$ es muy importante porque la transformación $T$ NO preserva las áreas.




El jacobiano es
$$\lim_{\Delta u \Delta v \to 0} \frac{\text{Area}(T(u+\Delta u, v+\Delta v))}{\text{Area}(u+\Delta u, v+\Delta v)} = J(u,v)$$

mide la "razón" entre el área de $T(R)$ y el área de $R$.

**Ejercicio:**




Sea $P$ el paralelogramo del dibujo

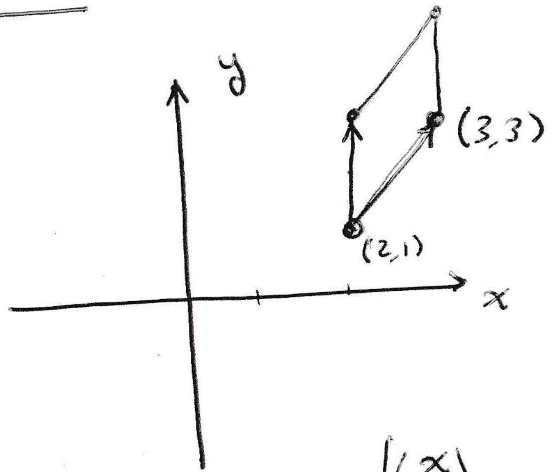
(a) Encuentre una transformación $T$ que convierta al cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en $P$

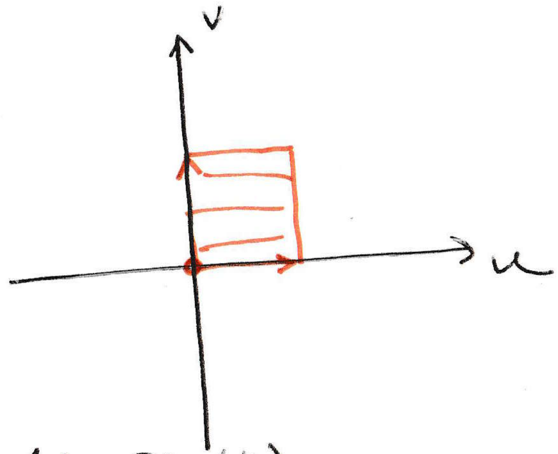
(b) Calcule, usando el cambio de variables de (a)

$$\iint_P x^2 y \, dA =$$

PARE EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLO POR SU CUENTA ...

Solución:




$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 1 + 2u + 2v \end{cases}$$

Calculamos el Jacobino $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right| = 2$

$$\iint_P x^2 y \, dA = \int_0^1 \int_0^1 (2+u)^2 (1+2u+2v) \, 2 \, du\, dv =$$