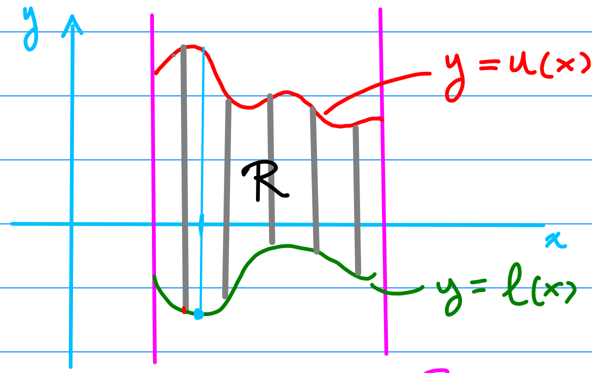
Hoy: (1) Cálculo de int. dobles
(2) Integ. triples.

La herramienta principal para calcular integrales es el:

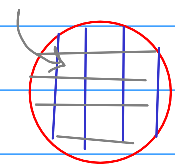
Teorema (de Fubini)

(1)



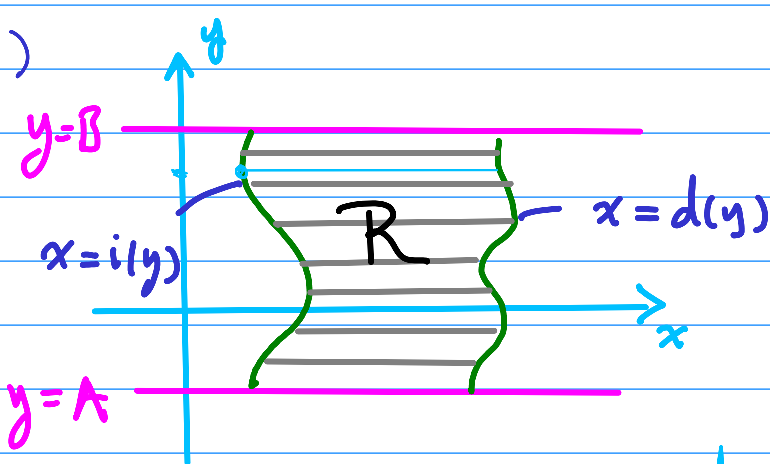
$$\iint_R p(x,y)\,dA = \int_A^B \left(\int_{\ell(x)}^{u(x)} p(x,y)\,dy \right) dx$$

Ej: de ambos tipos



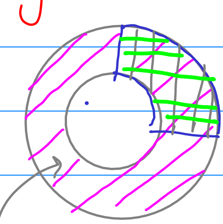
dy dx, dx dy.

(2)



$$\iint_R p(x,y)\,dA = \int_A^B \left(\int_{i(y)}^{d(y)} p(x,y)\,dx \right) dy$$

Ej:



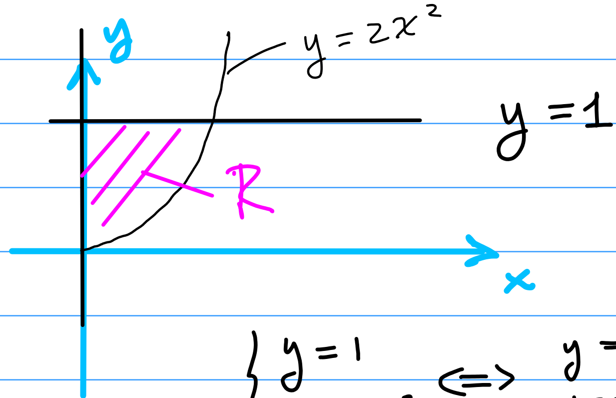
Ni tipo (1) ni tipo (2)

Partimos la región en partes tipo (1) ó (2)

Ejemplo: Sea R la región plana encerrada por $y=1$, $y=2x^2$, $x=0$.

(a) Escriba $\iint_R x\cos(y)\,dA$ como integral iterada $dy\,dx$ y $dx\,dy$.

(b) Calcule su valor

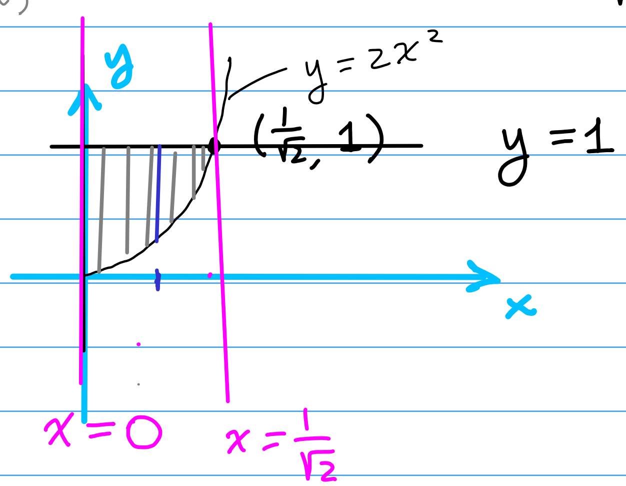


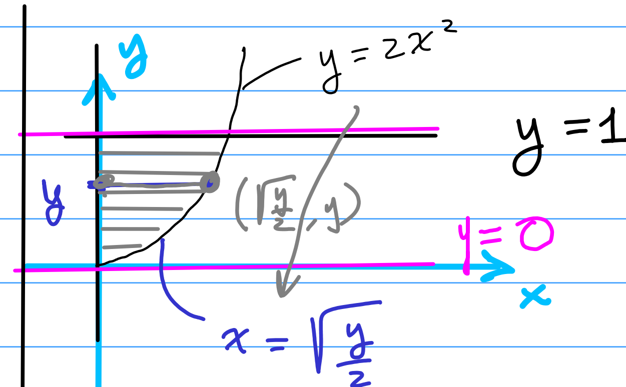
$$\iint_R x\cos(y)\,dA$$

$$\begin{cases} y=1 \\ y=2x^2 \end{cases} \iff \begin{array}{l} y=1 \\ 1=2x^2 \iff \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\frac{y}{2}=x^2 \qquad \sqrt{\frac{y}{2}}=x$$

(a)





$$\int_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{y=2x^2}^{y=1} x\cos(y)\,dy\right)dx$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{y}{2}}} x\cos(y)\,dx\right)dy$$

(b) Calculemos ambas. El Teo de Fubini asegura que el resultado <u>debe</u> ser el mismo.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{2x^2}^{1} x\cos(y)\,dy\right)dx =$$

$$\int_{2x^2}^{1} x\cos(y)\,dy = x\int_{2x^2}^{1}\cos(y)\,dy = x\sin(y)\Big|_{y=2x^2}^{y=1}$$

$$= x\sin(1) - x\sin(2x^2)$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sin(1) - x\sin(2x^2)\,dx = \sin(1)\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} - \quad = \sin(1)\left[\frac{1}{4}-0\right]$$

$$-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sin(2x^2)\,dx = \frac{\sin(1)}{4} + \left[\frac{\cos(2x^2)}{4}\right]\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sin(1)}{4} + \frac{\cos(1)}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[\sin(1)+\cos(1)-1\right]$$

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} x\cos(y)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} x\cos(y)\,dx = \cos(y)\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} x\,dx = \cos(y)\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{y}{2}}}$$

$$= \cos(y)\,\frac{y}{4}.$$

PARTES:

$u = y \qquad du = dy$

$dv = \frac{\cos(y)}{4} \qquad v = \frac{\sin(y)}{4}$

$$\int_0^1 \frac{\cos(y)\,y}{4}\,dy =$$

$$= \frac{y\sin(y)}{4}\Bigg|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\sin(y)}{4}\,dy$$

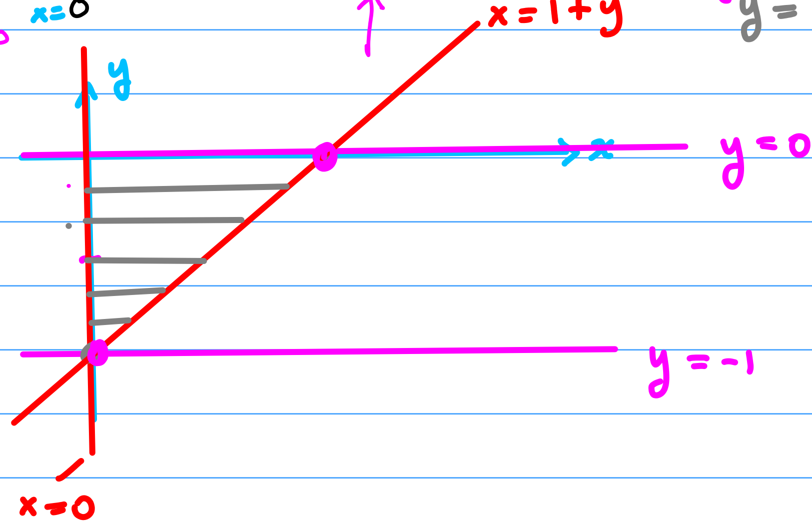
$$= \frac{\sin(1)}{4} - \int_0^1 \frac{\sin(y)}{4}\,dy = \frac{\sin(1)}{4} + \frac{\cos(y)}{4}\Bigg|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{\sin(1)}{4} + \frac{\cos(1)}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}\left[\sin(1)+\cos(1)-1\right]}$$

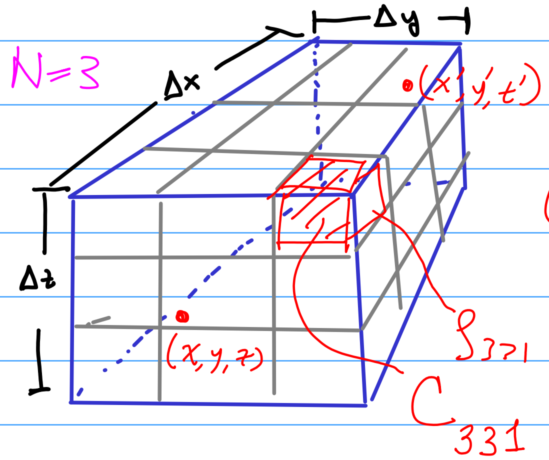
Ejercicio: Dibuje la region de integracion

$$\int_{y=-1}^{y=0}\int_{x=0}^{x=1+y} p(x,y)\,dx\,dy =$$

$x = 1+y$
$y = x-1$



(2) ¿Qué son las integrales triples y para qué sirven?



¿Cuál es la masa total del ladrillo C?

(A) Si la densidad del ladrillo es constante ρ Kg/m^3

$$M = \rho \cdot \underbrace{\Delta z \cdot \Delta x \cdot \Delta y}_{Vol(C)}$$

(B) Si la densidad del ladrillo es constante en cada uno de los "cubitos" C_{ijk}, ρ_{ijk}.

$$M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \rho_{ijk} \, Vol(C_{ijk})$$

(C) Si la densidad del ladrillo es una función de la posición

$\rho(x,y,z)$ $\qquad$ $\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x,y,z) =$ "Kg/m^3 del material del que está hecho el punto (x,y,z)".

Método:

(1) Dividimos ancho, alto y fondo en N partes iguales, obteniendo una partición del ladrillo en N^3 pedazos C_{ijk}

(2) Tomo un punto $\vec{x}_{ijk} \in C_{ijk}$ y
defino $\rho_{ijk} := \rho(\vec{x}_{ijk})$

[Asumimos que la densidad es CONSTANTE en todo el cubo]

(3) $$M_N := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \rho(\vec{x}_{ijk}) \cdot \mathrm{Vol}(C_{ijk})$$

(4) $$\text{MASA} = \lim_{N \to \infty} M_N$$

Def:

$$\iiint_C \rho(x,y,z)\, dV = \lim_{N \to \infty} M_N$$