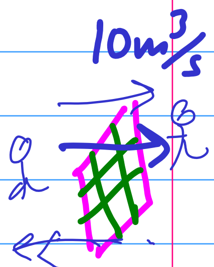
Teorema de Gauss [En 3D]



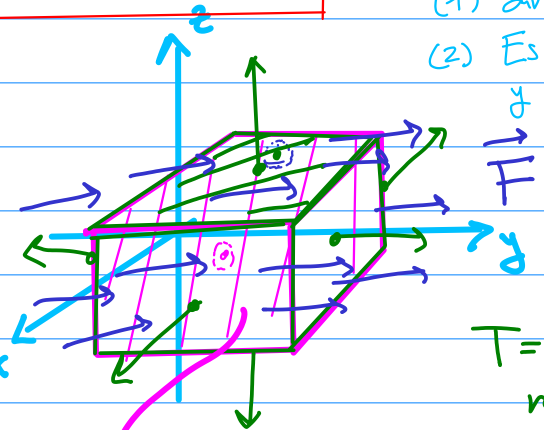
Sea E una región sólida en $\mathbb{R}^3$ y sea T su superficie de frontera orientada hacia afuera de E. Si $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable en E

$$\boxed{\underbrace{\iint_T F\, d\vec{S}}_{\text{Flujo de } \vec{F} \text{ hacia afuera de } T}} = \underbrace{\iiint_E \overset{\nabla\cdot\vec{F}}{\overset{\|}{div(F)}}\, dV}_{}$$

Mucho más fácil porque:

(1) $div(F)$ es más simple

(2) Es una integral triple y no hay que parametrizar la frontera.



T = unión de 6 caras rectangulares

E

$$\underbrace{\partial E}_{\text{La frontera de } E} = T$$

Se usa para calcular Flujo a través de una superficie cerrada

$$T = \partial E$$

Cálculo de $\nabla\cdot\vec{F}$:

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

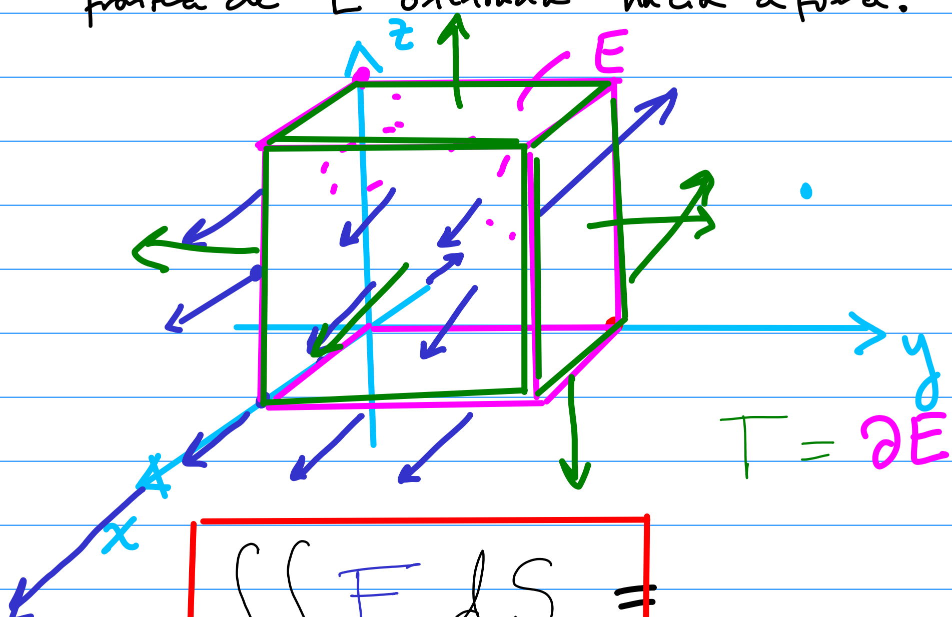
$F(x,y,z) = \left(F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z)\right)$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$div(F) = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

Ejemplo: Sea $\overline{F(x,y,z) = (x, 0, 0)}$ m/sec y sea $E = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 4 \end{array} \right\}$ Calcule el flujo de F a través de la frontera de E orientada hacia afuera.

Paralelo al eje x



$T = \partial E$

$$\boxed{\iint_T F \, dS =}$$

Sol 1: Las componentes de F son diferenciables en todas partes y por ello F también lo es, así que podemos aplicar el Teo de Gauss

$$\iint_T F \, d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}(F) \, dV$$

(1) Calcular div(F)

(2) Resolver integral

$F = (x, 0, 0)$

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, 0, 0)$$

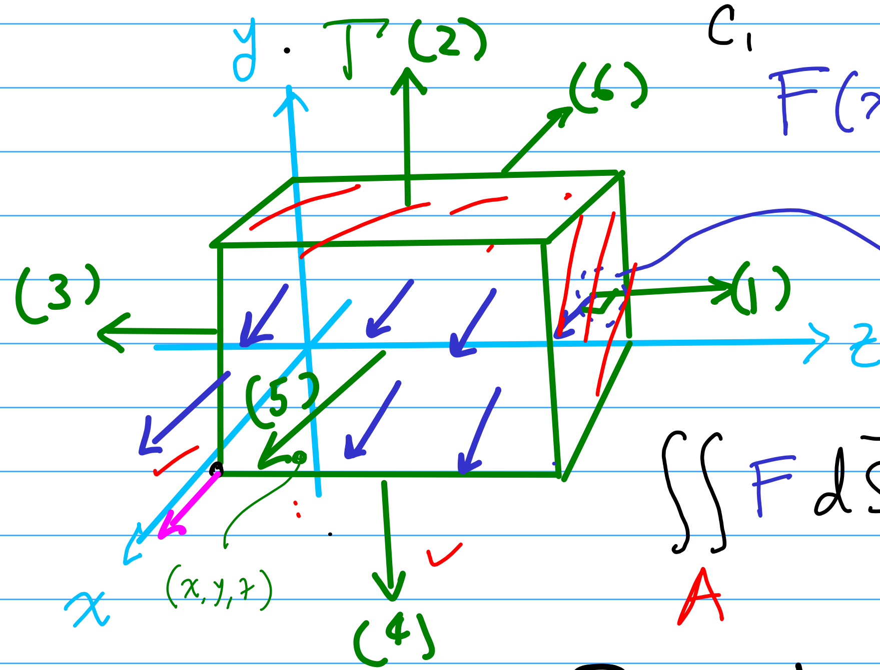
$$1 + 0 + 0 = 1$$

$$= \iiint_E 1 \, dV = \mathrm{Vol}(E) = 2 \times 3 \times 4$$

$$= \boxed{24} \ m^3/seg$$

Sol 2: $\iint F \, dS = \iint_{C_1} + \dots + \iint_{C_6}$

$F(x,y,z) = (x,0,0)$



$\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$

$$\iint_A F \, d\vec{S} = \iint_A (F \cdot \hat{n}) \, dS$$

$$\iint_{(1),(2),(3),(4)} F \, d\vec{S} = 0$$

Porque el campo vectorial es tangencial a T en (1), (2), (3)(4). (perpendicular a la normal)

$$\iint_{(6)} F \cdot d\vec{S} = 0$$

Porque en los puntos de la cara 6 $x=0$ luego

$F(x,y,z) = (0,0,0)$

$(x,y,z) = (2,y,z)$ Paretrizamos la cara

$$\iint F \, d\vec{S} = \iint_D F(\Phi(y,z)) \cdot \Phi_y \times \Phi_z \, dA$$

(5)

$$\begin{cases} \Phi(y,z) = (2, y, z) \\ 0 \le y \le 3, \quad 0 \le z \le 4 \rightarrow D \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_y = & (0, & 1, & 0) \\ \Phi_z = & (0, & 0, & 1) \end{array}$$

$$\Phi_y \times \Phi_z = (1, 0, 0)$$

$$F(\Phi(y,z)) = (2, 0, 0)$$

$$\iint_D F(\Phi(y,z)) \cdot \Phi_y \times \Phi_z \, dA = \iint_D (2,0,0) \cdot (1,0,0)$$

$$= \iint_D 2 \, dA = \int_0^3 \int_0^4 2 \, dz \, dy =$$

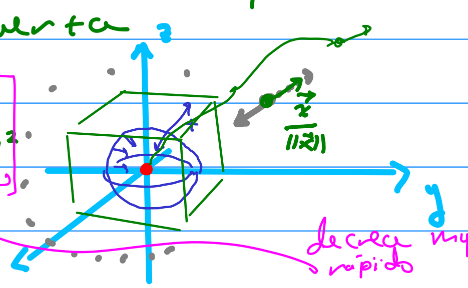
$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{24}$$

(Hecho:)

Ejercicio Según la ley de Coulomb una carga eléctrica puesta en el origen produce el siguiente campo de fuerza

$$\left[H(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) \underbrace{\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}}_{} \right]$$

decrece muy rápido



(a) Calcule el flujo de H a través de la esfera de radio R centrada en el origen orientada hacia afuera ✓ (parametrizando ✓)

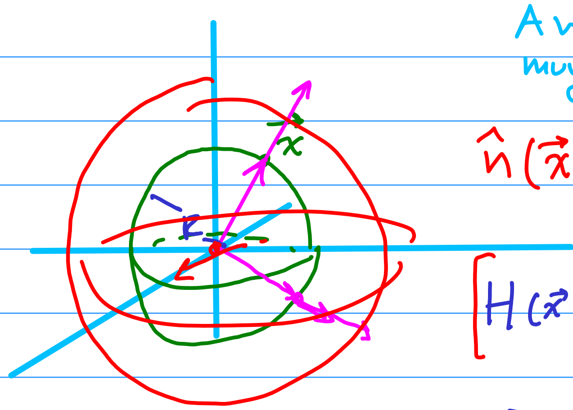
(b) Calcule $\nabla \cdot H$

(c) Calcule el flujo de H a través de las paredes del cubo $\left.\begin{array}{l} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \\ -2 \le z \le 2. \end{array}\right\}$ 4π

<u>Sol (a):</u>

$$\iint_S H \, d\vec{S} = \iint_S \underbrace{[H \cdot \hat{n}]}_{\text{A veces es muy simple}} dS$$

$$(a,b,c)\cdot(a,b,c) = a^2+b^2+c^2$$



$$\hat{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

$$\left[H(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right]$$

$$H(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^4} = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{1}{R^2}.$$

$$\iint_S \frac{1}{R^2} dS = \frac{1}{R^2} \cdot \left(\iint_S 1 \, dS \right)$$

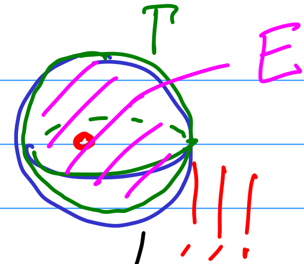
$$= \frac{1}{\cancel{R^2}} \cdot (4\pi \cancel{R^2}) = 4\pi$$

Para cualquier Radio R

Hacemos el cálculo

(b) $\operatorname{div}(H) = 0$

PROBLEMA:



$$\overset{4\pi}{\overset{\shortparallel}{\iint_T H\,dS}} \;\cancel{=}\; \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\iiint_E \mathrm{div}(H)\,dV}}$$

Porque campo
NO es diferenciable
en $(0,0,0) \in E$