Teorema de la divergencia de Gauss:

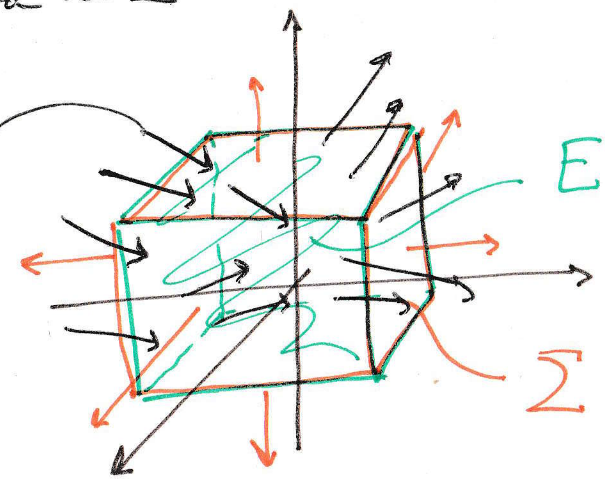
Teorema: Sea E una región sólida en $\mathbb{R}^3$ y sea Σ su superficie de frontera orientada hacia afuera. Si $H:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable en E entonces

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} H \, d\vec{S}}_{\text{Flujo de } H \text{ hacia afuera de } \Sigma} = \iiint_{E} \underbrace{\nabla \cdot H}_{\text{divergencia}} \, dV$$

Fácil de calcular

$$\boxed{\operatorname{div}(H) = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}}$$

H campo vectorial diferenciable.



E – cubo sólido

Σ – superficie de frontera del cubo

Ejemplo 1:

Sea E la región sólida encerrada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $y + z = 2$.

Sea $F(x,y,z) = \left(xy,\ y^2 + e^{xz^2},\ \sin(xy) \right)$.

Calcule el flujo de F hacia afuera de la frontera de E.

DETENGA EL VIDEO Y RESUÉLVALO UD. MISM@ . . .

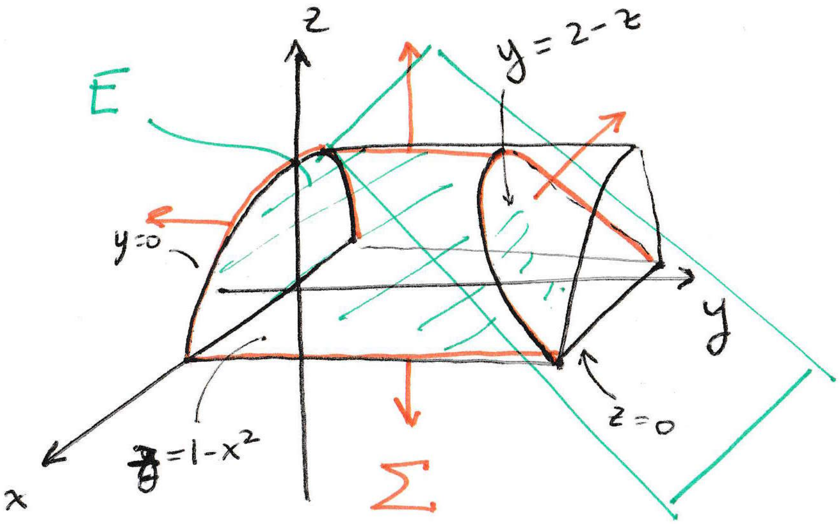
Solución: Habría dos caminos:

(a) Parametriza S e integrar

Difícil, ver campo ...

(b) Usar Teo de divergencia

$$\iint_{\Sigma} F\, d\vec{S} = \iiint_{E} \nabla \cdot F \, dV$$



$z = 1 - x^2$

$$F = \left(xy,\; y^2 + e^{xz^2},\; \sin(xy)\right)$$

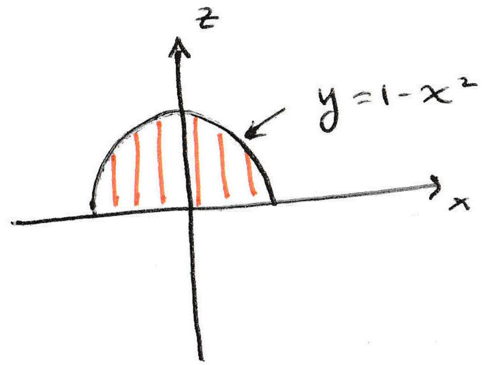
$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$$

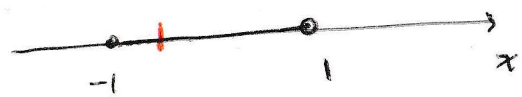
$$= y + 2y = \boxed{3y}$$

muy simple!

$$\iint_{\Sigma} F\, d\vec{S} = \iiint_{E} 3y \, dV =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} 3y \; dy\, dz\, dx =$$





$$= 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2-z} dz\,dx = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\,dz\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3\cdot 2}\Big|_{z=0}^{z=1-x^2} dx\right] = 3\int_{-1}^{1} -\frac{(1+x^2)^3}{6} + \frac{2^3}{3\cdot 2}\,dx$$

$$= 3\left[\int_{-1}^{1} \frac{-(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1)}{6} + \frac{8}{6}\right.$$

$$= \frac{-3}{6}\int_{-1}^{1}\left[x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7\right] dx = \frac{184}{35}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^7}{7} + \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - 7x\right]\Big|_{-1}^{1}$$

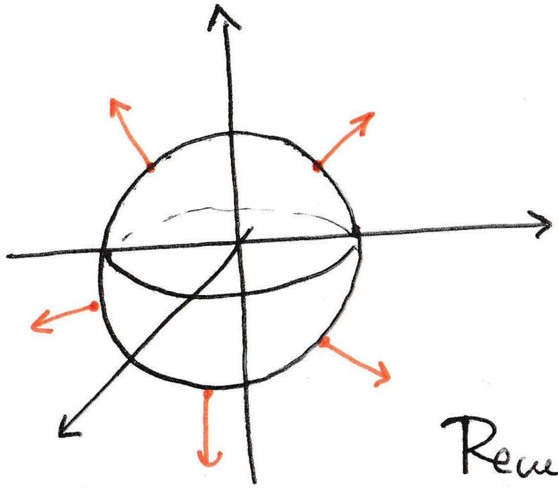
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{7} + \frac{2\cdot 3}{5} + \frac{2\cdot 3}{3} - 2\cdot 7\right] = (-1)\left(\frac{1}{7} + \frac{3}{5} + \frac{3}{3} - 7\right) = \frac{(-1)5 + 21 + 35 - 7\cdot 35}{35} = \frac{(-1)26 - 6\cdot 35}{35}$$

Ejemplo 2:

Sea $E(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ en $\mathbb{R}^3$. Calcule el flujo hacia afuera de la esfera de radio 2 centrada en $\vec{0}$.

DETENGA EL VIDEO Y RESUÉLVALO UD. MISM@ ...

Solucion 1: Calcula la integral directamente



Para la esfera, la normal unitaria en un punto $\vec{x}$ cualquiera es

$$\hat{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

Recuerda que $\displaystyle\iint_S E\, d\vec{S} = \iint_S E(\vec{x})\cdot\hat{n}(\vec{x})\, dS$

Cuando la normal tiene una formula sencilla esto es mucho mejor

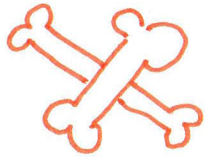
$$E(x)\cdot\hat{n}(x) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^4} = \frac{\cancel{\|\vec{x}\|^2}\,1}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{1}{4}$$

en la esfera de radio 2

Concluimos que

$$\iint_S E\, d\vec{S} = \iint_S \frac{1}{4}\, dS = \frac{1}{4}\,\text{Area}(S)$$

$$= \frac{1}{4}\, 4\pi\cdot 2^2 = \boxed{4\pi}$$

"Solución 2"  usar Teo Gauss:

(a) Calcule $\operatorname{div}(E)$: $\quad E(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{y}{(\quad)}, \dfrac{z}{(\quad)} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right) x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(\cancel{2}x)$$

$$\operatorname{div}(E) = 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \left[3\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2+y^2+z^2) \right] = 0$$

Así que

$$\iint_S E\, d\vec{S} \overset{\text{Teo Gauss.}}{=} \iiint_B \operatorname{div}(E)\, dV = 0$$

ABSURDO PORQUE ANTES VIMOS QUE DABA $\boxed{4\pi}$

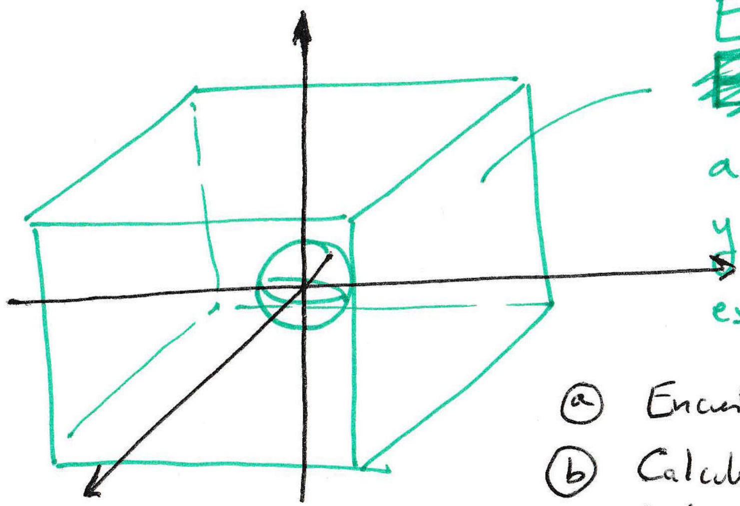
Qué está pasando??

El problema es que $E = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ no esta difinido y por lo tanto no es diferenciable en el origen que esta contenido en la región sólida B así que por eso no podemos usar ~~Stokes~~ Gauss en esa región.

Ejercicio [Continuación del anterior]

Sea $E(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$. Calcule el flujo de E a través de la frontera del cubo $[-10, 10] \times [-10, 10] \times [-10, 10]$

Sugerencia:



E la región sólida adentro del cubo y afuera de la esfera de radio 2.

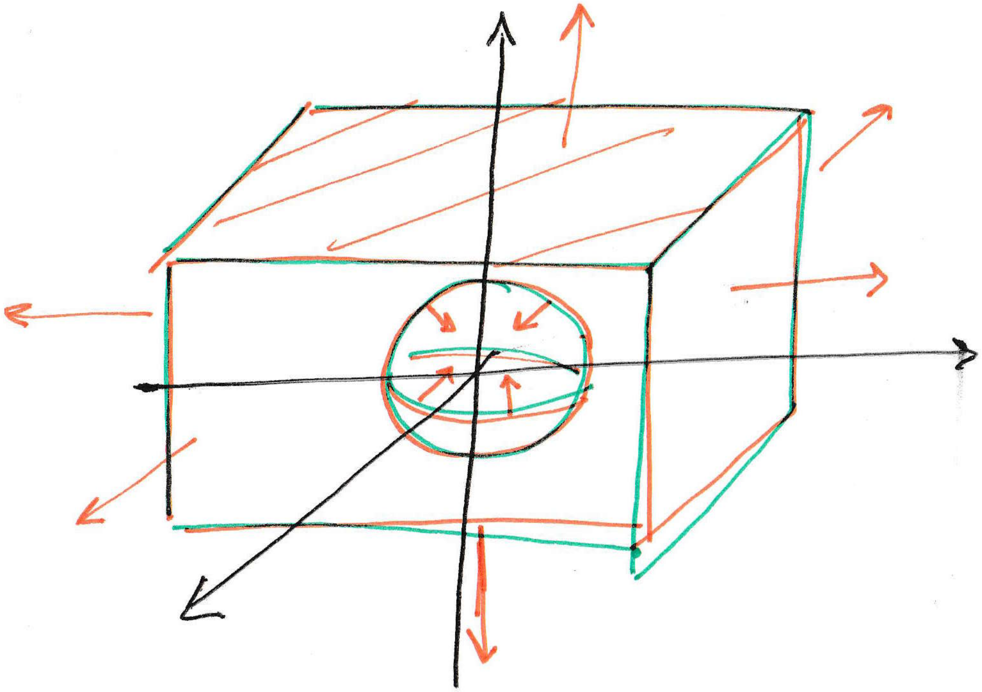
DETENGA EL VIDEO Y RESUÉLVALO UD. MISMO.

ⓐ Encuentre la frontera de E

ⓑ Calcule el flujo a través de la frontera de E.

ⓒ Use el problema anterior.

Sol:



$$\partial E = \underbrace{S}_{\substack{\uparrow \\ \text{esfera} \\ \text{hacia} \\ \text{adentro}}} \cup \underbrace{C}_{\substack{\uparrow \\ \text{cubo} \\ \text{hacia} \\ \text{afuera}}}$$

En E nuestro campo F es diferenciable!
así que podemos aplicar Gauss

$$\underbrace{\iint_S F\,d\vec{S} + \iint_C F\,d\vec{S}}_{\iint_{\partial E} F\,d\vec{S}} = \iiint_E \nabla\cdot F\,dV = 0$$

$$\Rightarrow \iint_C F\,d\vec{S} = -\iint_S \vec{F}\,d\vec{S} = \boxed{4\pi}$$

Teorema (Ley de Gauss de electromagnetismo)

El campo eléctrico debido a una carga puntual en el origen es

$$\boxed{E(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}}$$

Obs experimental, ley de Coulomb.

Se sigue que, si M es una superficie cerrada

$$\underbrace{\iint_M E\, d\vec{S}}_{} = \begin{cases} Q, & \text{si la carga está encerrada por } M \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Flujo del campo eléctrico hacia afuera de M

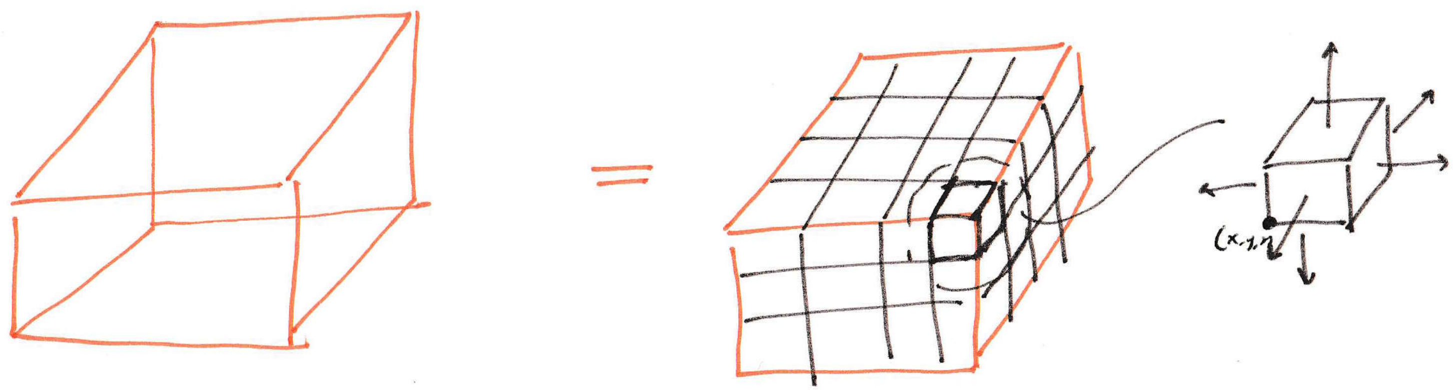
Obs. Si $\rho(x,y,z)$ es una densidad de cargas se sigue que el campo eléctrico correspondiente satisface

$$\boxed{\mathrm{div}(E) = \rho}, \quad \boxed{\nabla \times E = \vec{0}}$$

Leyes de Maxwell (estáticas) sobre el campo eléctrico.

Qué es la divergencia?

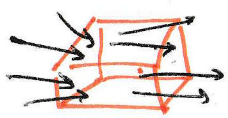
Si $F(x,y,z)$ es un campo vectorial $\mathrm{div}(F): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar. Qué significa?



$$\mathrm{div}(F)(x,y,z) = \frac{\text{Flujo hacia afuera de un cubo muy pequeño}}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

Mide qué tanto se "expande" ($\mathrm{div}(F) > 0$) o se "contrae" ($\mathrm{div}(F) < 0$) un fluido cerca de (x,y,z).

Un campo vectorial se dice "incompresible" si $\boxed{\nabla \cdot F = 0}$



Flujo neto es 0 (por Gauss)
todo lo que entra tiene que salir.