Vectorial Virtual – Taller 1, parte 3: Diferenciación en $\mathbb{R}^n$

Qué son las derivadas?

Sea $f(x,y) = x^2 - y^2$.

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.
2. Encuentre una fórmula para $\ell_{(1,2)}(x,y)$, la función lineal que mejor aproxima a $f(x,y)$ cerca de $(1,2)$.
3. Haga los siguientes dos dibujos (en un sólo $\mathbb{R}^2$ y un sólo $\mathbb{R}^3$ respectivamente).
    1. Los conjuntos de nivel $-5, -4, -3, -2, -1$ de f y de $\ell_{(1,2)}$. Qué relación hay entre el conjunto de nivel -3 de f y el de $\ell_{(1,2)}$ en $(1,2)$?
    2. Las gráficas de f y de $\ell_{(1,2)}$.

Problema 2: Cálculo de derivadas parciales

Sea $g(x, y) = \cos(xy) + x\cos(y)$

1. Calcule las funciones $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.
2. Demuestre que $g(x, y)$ es diferenciable en todos los puntos (x, y) del plano.
3. Calcule $Dg\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Calcule la función lineal que mejor aproxima a $g(x, y)$ cerca de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Cálculo de derivadas

1. Calcular la matriz $Df(x, y)$ para las siguientes funciones:
   1. $h(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   2. $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$
   3. $h(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$
2. Calcule:
   1. La función $A(x, y, z) = f(h(x, y, z))$
   2. Calcule la matriz $DA(1, 2, 3)$
   3. Calcule las matrices $Df(h(1, 2, 3))$, $Dh(1, 2, 3)$
   4. Verifique que $DA(1, 2, 3) = Df(h(1, 2, 3)) \cdot Dh(1, 2, 3)$ donde el punto representa producto de matrices.

Plano tangente

Sea $h(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$.

1. Usando un computador pinte la gráfica de $h(x, y)$ cerca del punto $(1, 0, 2)$ (puede por ejemplo modificar esto `https://www.geogebra.org/m/mCV2enZ2`).
2. Calcule la ecuación del plano tangente a la gráfica en el punto $(1, 0, 2)$ (usando el hecho de que este es la gráfica de la mejor aproximación lineal a g cerca de $(1, 0)$).
3. Usando la aproximación lineal de la parte anterior, es $(1, 0)$ un máximo local de g? justifique su respuesta.