Problema 6:

Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable. Sea $H = \nabla u$ el campo vectorial gradiente de u.

1. Verifique que $\nabla \times H = \vec{0}$.
2. (V ó F) Es verdad qué $\nabla \cdot H = 0$ para cualquier función diferenciable u?
3. (V ó F) Si F es un campo vectorial con $\nabla \times F = 0$ entonces F es conservativo.

Problema 7: Teorema de Green

1. Considere el campo vectorial

   $$F(x,y) = (22y + 2x\sin(y) + 17\sin(x), x^2\cos(y) + 13y^{200\sin(y)})$$

   Calcule el trabajo realizado por F a lo largo del triángulo con vértices $(0,0)$, $(2\pi, 0)$ y $(2\pi, 2\pi)$ en ese orden.

2. Considere el campo vectorial

   $$G(x,y) = (3xy^2, 3x^2).$$

   Calcule el trabajo realizado por G a lo largo de la frontera del rectángulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ en dirección de las manecillas del reloj.

Problema 8: Teorema de Green y el cálculo de áreas

1. Sea $F(x, y) = (0, x)$. Utilice el Teorema de Green para demostrar que, para cualquier curva simple cerrada σ positivamente orientada

$$\int_{\sigma} F d\vec{s} = Area(D)$$

Donde D es la region encerrada por σ.

2. Sea $r(t)$ la curva parametrizada para $-1 \leq t \leq 1$ por:

$$r(t) = \left(\frac{\sin(\pi t)^2}{t}, t^2 - 1 \right)$$

   1. Dibuje la curva (puede ayudarse con software)
   2. Calcule el área encerrada por la curva usando la parte (1).

Esta es la idea detrás de un *planímetro*

https://en.wikipedia.org/wiki/Planimeter

Problema 9: Teorema de Stokes

El plano $z = x + 4$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ se intersectan en una curva C orientada en contra de las manecillas del reloj cuando la vemos desde arriba. Calcule $\int_C Fds$ donde F es el campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = \left(x^3 + 2y, \sin(y) + z, x + \sin(z^2)\right)$$

Problema 10: Teorema de Stokes

Sea C la curva orientada parametrizada por

$$r(t) = \left(\cos(t), \sin(t), 8 - \cos^2(t) - \sin(t)\right)$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$ y sea F el campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = \left(z^2 - y^2, -2xy^2, e^{\sqrt{z}} \cos(z)\right).$$

Calcule el trabajo realizado por F a lo largo de σ.