Hoy:

(1) Por qué es verdad el Teorema de Green?

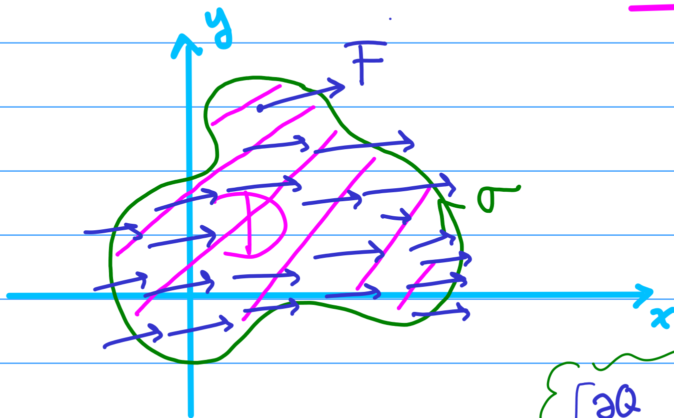
(2) Teo Green $\subseteq$ Teorema de Stokes

(3) Ejemplo básico de ↑.

Teorema de Green: [Existe sólo en 2D]

Sea σ una curva que encierra a una región sólida D. Sea $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial diferenciable en D.

funciones escalares



??

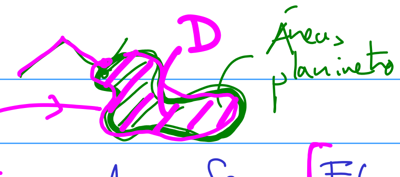
$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\int_{\sigma} F \, d\vec{s}}_{\text{Trabajo realizado por } F \text{ a lo largo de } \sigma} = \underbrace{\iint_{D} \left[\mathrm{rot}(F)\cdot\hat{k}\right] dA}_{\text{Típicamente este lado es más fácil.}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}$$

Ejemplo: [Planímetro]



Sea σ una curva cerrada. Sea $F(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

Calcule

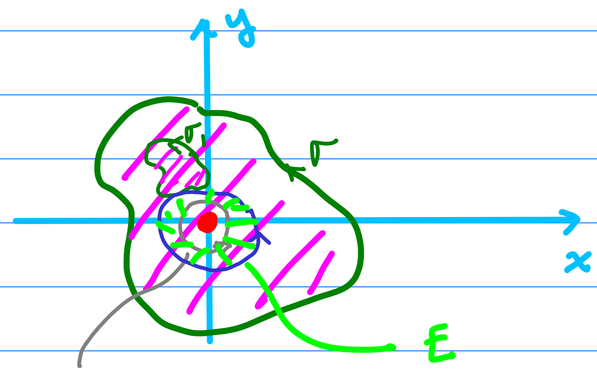
$$\int_\sigma F \, ds \overset{?}{=} \iint_D 1 \, dA = \text{Area}(D)$$

?

$$\text{rot}(F)\cdot\hat{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Ejemplo 2 de clase anterior:

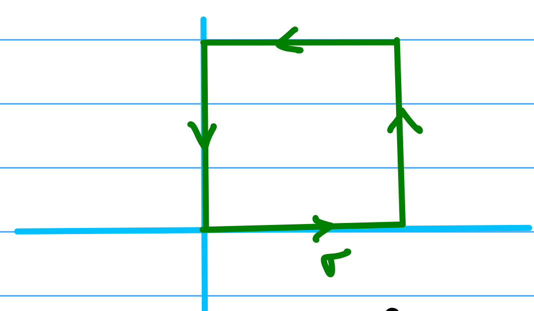
• = No dif del CAMPO

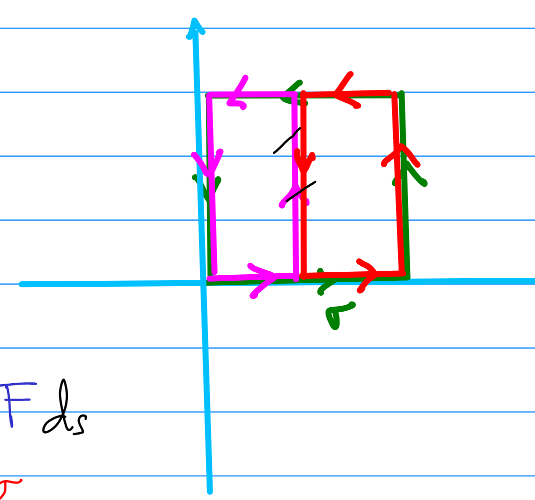


$$\int_C F ds = 4\pi \checkmark$$

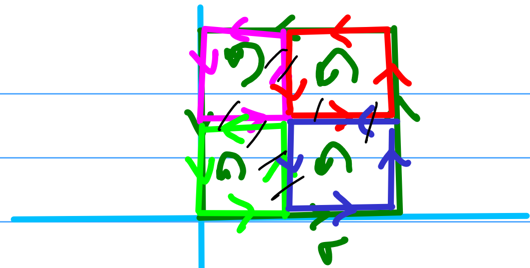
$$\int_C - \int_c = \iint_E \cancel{\text{rot}(F)\cdot k}^{\,0} \, dA$$

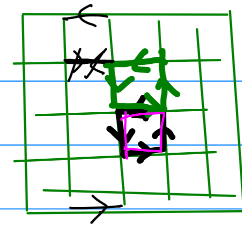
De dónde viene?





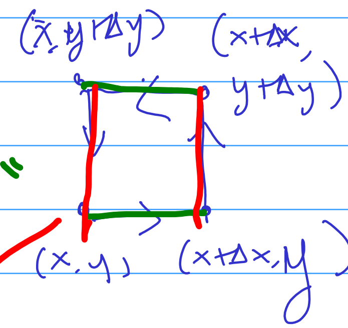
$$\int_\sigma F \, d\vec{s} = \int_\sigma F \, ds + \int_\sigma F \, ds$$





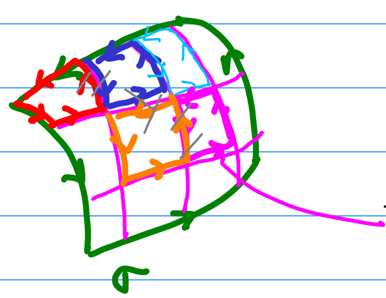
$$\int_{\sigma} F\,ds = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\underbrace{\left(\int_{\sigma_{ij}} F\,ds\right)}$$

"Comportamiento límite cuando los rectángulos son muy muy pequeños"



$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

Problema:



$D \subseteq \mathbb{R}^3$

superficie encerrada por σ

$$\int_{\sigma} F\,d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\sigma_{ij}} F\,ds\right)$$

$\mathrm{rot}(F) \cdot \vec{P}$ ← normal a la superficie en ese punto

Qué sucede si la curva es muy pequeña?

Def: Si $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, definimos

$$\mathrm{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

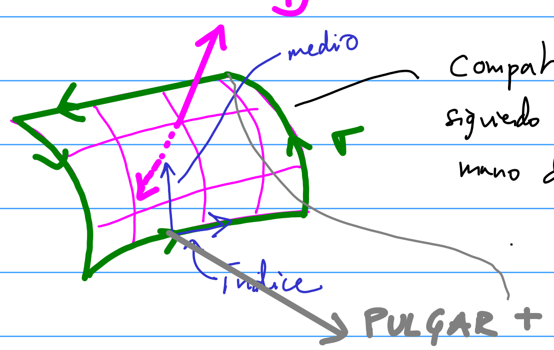
$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \; -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \; \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Llegamos así al Teorema de Stokes:

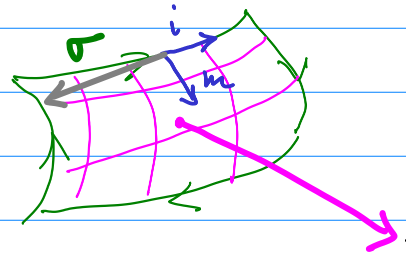
Teorema de Stokes: [Solo en 3D].

Sea σ la curva de frontera de una superficie $D \subseteq \mathbb{R}^3$.
Sea $F(x,y,z)$ un campo vectorial diferenciable en D.
Si las orientaciones de σ y D son compatibles entonces

$$\int_{\sigma} F \, ds = \iint_{D} \nabla \times F \, d\vec{S}$$



Compatibles = "Consistentes, siguiendo la regla de la mano derecha".

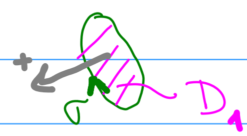


Son compatibles?
NO. Porque la regla de la mano derecha produce la orientación gir contraria a

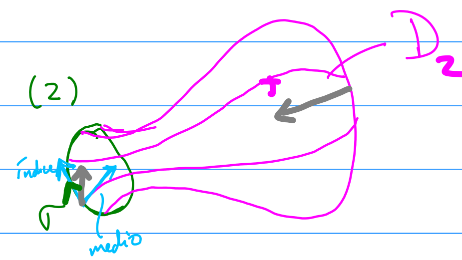
Obs: Dado σ hay muchas D's diferentes con σ como frontera.
Podemos usar cualquiera

Ejemplo

(1)



(2)



$$\iint_{D_1} \nabla \times F \, d\vec{S} \quad \begin{matrix} ? \\ > \\ < \\ = \end{matrix} \quad \iint_{D_2} \nabla \times F \, d\vec{S}$$