Hoy: La derivada de una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $\vec{x}=\vec{a}$ es una MATRIZ de $m \times n$.

Preguntas: (1) ¿Cómo se construye?

(2) ¿Para qué sirve?

De la clase anterior... $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

Def. Una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{x}=\vec{a}$ si existe una función lineal afín $\ell_{\vec{a}}(\vec{x})$ que aproxima a f muy bien cerca de $\vec{a}$ en el sentido que

$\ell_a(a)=f(a)$

$$\left[\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\|f(x)-\ell_a(x)\|}{\|x-a\|}=0\right]$$

hace que el numerador vaya a cero muy rápido.

Lineal afín: Cálculo 1.

$$\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad \ell(x)=mx+b$$

si queremos que $\boxed{\ell_a(a)=f(a)}$

$$=m(x-a)+f(a)$$

$$m=f'(a)$$

$$\ell_a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad \ell(x,y)=Ax+By+C$$

$$\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+C$$

Si $\ell(\overset{\vec{a}}{a,b})=f(a,b)$

$$\left[\ell(x,y)=\overset{?}{A}(x-a)+\overset{?}{B}(y-b)+f(a,b)\right]$$

$$\ell_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

matriz de $m\times n$

$$\ell_a(\vec{x})=c+T\vec{x}$$

Si $\left[\ell_{\vec{a}}(\vec{a})=f(\vec{a})\right]$ entonces

$$\left[\ell_a(\vec{x})=f(\vec{a})+T(\vec{x}-\vec{a})\right]$$

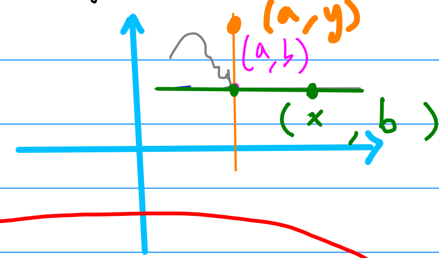
¿Cómo construir T?

Concentrémonos en $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sea diferenciable en $\vec{a}=(a,b)$, queremos encontrar los coeficientes A y B que aseguren que

$$\left[\ell_{\vec a}(x,y) = A(x-a)+B(y-b)+f(a,b)\right]$$

sea la mejor apox. lineal afín para f cerca de $\vec a$

Queríamos que



$$\left[\lim_{\vec x\to\vec a} \frac{f(x,y)-\ell_a(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0\right]$$

En los (x,y) de la horizontal tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-\ell_a(x,b)}{\|(x,b)-(a,b)\|} = \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-(A(x-a)+f(a,b))}{x-a}=0$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} - A\right]=0$$

número

$[y=b]$

Concluimos

$$\boxed{A = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}\right)}$$

$$\|$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ = "Fije $y=b$ y derive sólo contra x."

" "Derive sólo contra x pensando que las demás variables son constantes."

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-\ell_a(a,y)}{\|(a,b)-(a,y)\|}=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-(B(y-b)+f(a,b))}{y-b}$$

$$=\lim_{y\to b}\left[\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}-B\right]=0$$

porque f es dif en (a,b)

$$\boxed{B=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}}$$

$$\| \qquad\qquad //$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) =$$ " Haga $x=a$ y derive contra y", $y=b$

" " Derive contra y pensando que las demás variables son constantes y luego evalúe en $x=a$ $y=b$.

Concluimos:

La mejor aproximación lineal afín para $f(x,y)$ cerca del punto (a,b) ES:

$$\left[\ell_a(x,y)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}_{?}(x-a)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{?}(y-b)+f(a,b)\right]$$

$$\left[f(x,y) = 100 - 2x^2 - xy - y^2 \right]$$

Ejercicio: (1) Calcule todas las derivadas parciales de f en $(1,3)$ (de dos maneras).

(2) Escriba la función lineal afín que mejor aproxima a f cerca de $(1,3)$

Sol: Queremos $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) \stackrel{?}{=}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) \stackrel{?}{=}$

Método 1: (i) Reemplazo $x=1$ en la función

$$f(1,y) = 100 - 2 - y - y^2 = 98 - y - y^2$$

(ii) Derivo contra y obteniendo

$$-1 - 2y$$

(iii) Reemplazo $y = 3$

$$-1 - 2\cdot 3 = \boxed{-7} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)$$

Método 2: (i) Derivo contra y imaginando que x es constante

$$f(x,y) = 100 - 2x^2 - xy - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y$$

$$f(1,3) = 100 - 2\cdot 1^2 - 1\cdot 3 - 3^2 = 86$$

(ii) Evalúo en $x=1$, $y=3$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -1 - 2\cdot 3 = \boxed{-7} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)$$

De manera semejante

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = -7}$$

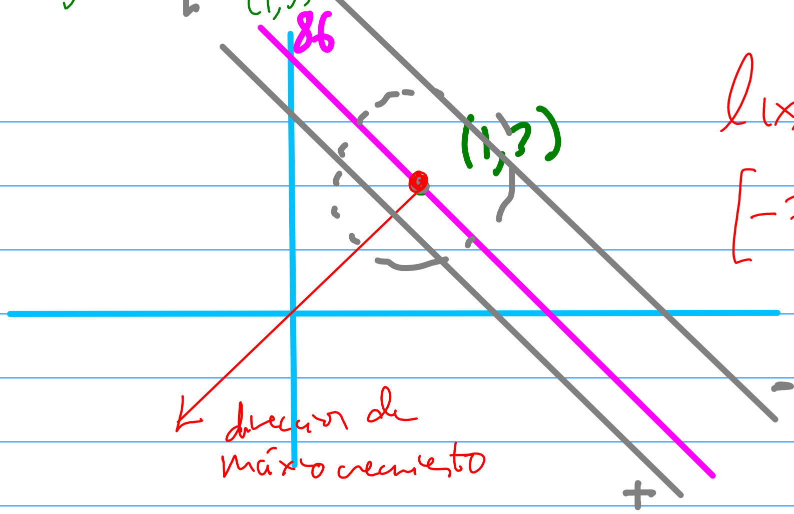
$$\ell_{(1,3)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,3)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)\cdot(y-3) + f(1,3)$$

$$\ell_{(1,3)}(x,y) = -7(x-1) + (-7)(y-3) + 86$$

$$= -7x - 7y + (7 + 21 + 86)$$

$$\boxed{\ell_{(1,3)}(x,y) = [-7x - 7y + 114]}$$

$$f(x,y) \approx \left[\ell_{(1,2)}(x,y) = -7x - 7y + 114\right]$$



$$\ell(x,y) = c$$

$$\left[-7x - 7y + 114 = 86\right]$$