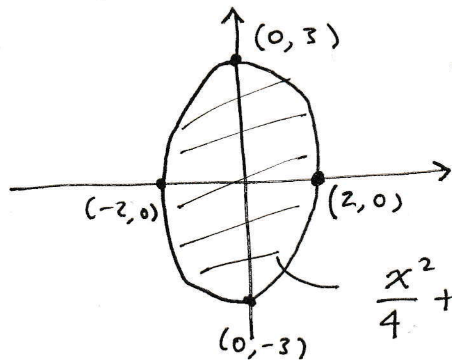
Solución:

(1a) Dibujo



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$$

$$\underset{\substack{\| \\ f(x,y)}}{\min}\ 4x^2 + 2y^2 \quad \text{s.a.}$$

Como la región factible es acotada y la función objetivo $f(x,y)$ es continua existe al menos un punto (x^*, y^*) de la región donde f alcanza su mínimo. Defina $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

Caso 1: (x^*, y^*) en interior. En ese caso

$\nabla f(x^*, y^*) = \vec{0}$. Busco candidatos resolviendo esa ecuación:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x \\ 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff (x,y) = \boxed{(0,0)}$$

interior porque $\frac{0^2}{4} + \frac{0^2}{9} = 0 < 1$

Caso 2: (x^*, y^*) en la frontera. En ese caso existe λ^*:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) = 1 \end{cases}$$

Busco candidatos entre las soluciones a esta ecuación:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 8x \\ 4y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{2x}{4} \\ \frac{2y}{9} \end{bmatrix} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x = \lambda \frac{x}{2} \\ 4y = \lambda \frac{2y}{9} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (16 - \lambda)x = 0 \\ (36 - 2\lambda)y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Casos $(*)$:

$x \neq 0$:

$$\begin{rcases} 16 - \lambda = 0 \\ (36 - 32)y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{rcases} \iff \begin{matrix} \lambda = 16 \\ y = 0 \\ x = \pm 2 \end{matrix}$$

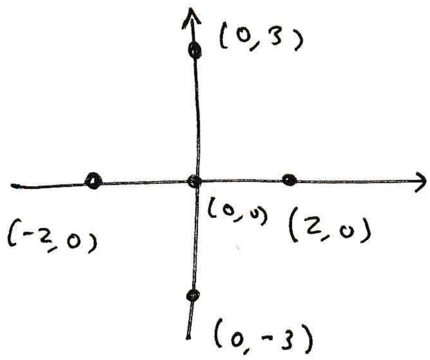
$$\boxed{(-2,0),\ (+2,0)}$$

$x = 0$:

$$\frac{y^2}{9} = 1 \iff y = \pm 3, \quad \lambda = 18$$

$$\boxed{(0,3),\ (0,-3)}$$

Los candidatos a (x^*, y^*) encontrados son:



Evaluamos la función objetivo $f(x,y)$ en todos:

$(0,3) \longmapsto 2\cdot 9 = 18$

$(0,-3) \longmapsto 2\cdot(-3)^2 = 18$

$\boxed{(0,0) \longmapsto 0}$

$(2,0) \longmapsto 16$

$(-2,0) \longmapsto 4(-2)^2 = 16$

Concluimos que el valor mínimo de $f(x,y)$ en la región es 0 y se alcanza en $(0,0)$.

(1b) Si (x^*, y^*, λ^*) satisface

$$\begin{cases} \nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) = 1 \end{cases}$$

entonces: (i) el conjunto de nivel de f que pasa por (x^*, y^*) tiene plano tangente $\perp$ a $\nabla f(x^*, y^*)$

(ii) La curva de frontera tiene plano tangente $\perp$ a $\nabla g(x^*, y^*)$

Por Teo del gradiente, propiedad (2) vista en clase.

así que las dos curvas tienen EL MISMO plano tangente (que como estamos en $\mathbb{R}^2$ es una recta).

(2) $g(u,v) = (\underbrace{\sin(uv)}_{g_1}, \underbrace{\cos(v)e^u}_{g_2})$

(a) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$Dg = \begin{array}{ccc} & u & v \\ g_1 & \left[\dfrac{\partial g_1}{\partial u}\right. & \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\right] \\ g_2 & \left[\dfrac{\partial g_2}{\partial u}\right. & \left.\dfrac{\partial g_2}{\partial v}\right] \end{array} (0,0)$$

evaluado en

$$\begin{bmatrix} \cos(uv)v & \cos(uv)u \\ \cos(v)e^u & -\sin(v)e^u \end{bmatrix}(0,0) = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Dg(0,0)}$$

(b) $h(x,y) = f(g(x,y))$ así que por la regla de la cadena

$$Dh(x,y) = Df(g(x,y))\,Dg(x,y)$$

luego en $(0,0)$

$$Dh(0,0) = Df(g(0,0))\,Dg(0,0)$$, es decir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a}(g(0,0)) & \frac{\partial f}{\partial b}(g(0,0)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $g(0,0) = (0,1)$ (de la fórmula de g)

Luego

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(0,0), & \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \pi \end{bmatrix}}^{\text{de la tabla}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}$$

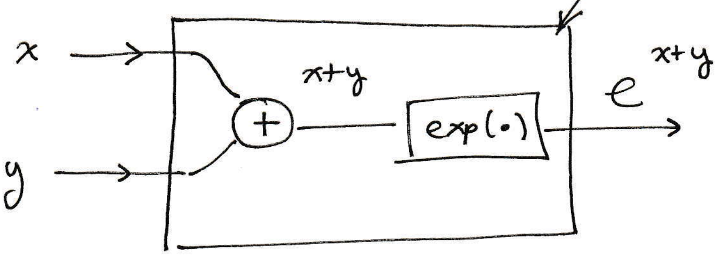
luego $\boxed{\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \pi}$

(3)

$$f(x,y) = e^{x+y} - 1$$

(a) Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}$$



De este diagrama de composición sabemos que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}$$

son CONTINUAS en todo $\mathbb{R}^2$

Por Teorema visto en clase sabemos que $f(x,y)$ es diferenciable

(b) Sabemos que

$$\ell(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

$$= (e^0 - 1) + e^0 \cdot x + e^0 \cdot y = x+y$$

luego $\boxed{\ell(x,y) = x+y}$

(c)

$$f(0.1, 0.2) \approx \ell(0.1, 0.2) = 0.1 + 0.2 = \boxed{0.3}$$

(d)

como (x,y) cerca de $(0,0)$ $f(x,y) \approx \ell(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1}{x+y} = \frac{x+y}{x+y} = \boxed{1}$$