# La <u>derivada</u> de una función $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

**Ejercicio:** Sea $f(x,y) = 100 - 3x^2 - y^2$. Calcule:

(1) TODAS las derivadas parciales de $f$ en $(1,2)$

(2) La mejor aproximación <u>lineal</u> para $f$ cerca de $(1,2)$

$\ell_{(1,2)}(x,y)$

(3) Qué relación hay entre la gráfica de $f$ y de $\ell_{(1,2)}$.

**Solución:** $f(x,y) = 100 - 3x^2 - y^2$

(1) Tiene dos derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$$

← evaluado en $x=1$, $y=2$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -4}$$

Ejemplos extra:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot 7) = 7$$

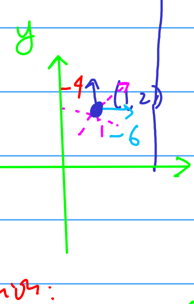
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(x^2y)\right) = \cos(x^2y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = \cos(x^2y)\, x^2$$

**Método 2:**

$f(x,y) = 100 - 3x^2 - y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

Fijar $x=1$ y derivo con respecto a $y$ y evalúo




$f(1,y) = 100 - 3\cdot 1^2 - y^2$

derivo con respecto a $y$ y evalúo

$-2y$ en $y = 2$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -4}$$

**Interpretación:**

Empezamos en $x=1$, $y=2$

"Al aumentar $y$ en una unidad el valor de la función <u>baja</u> en 4 unidades"

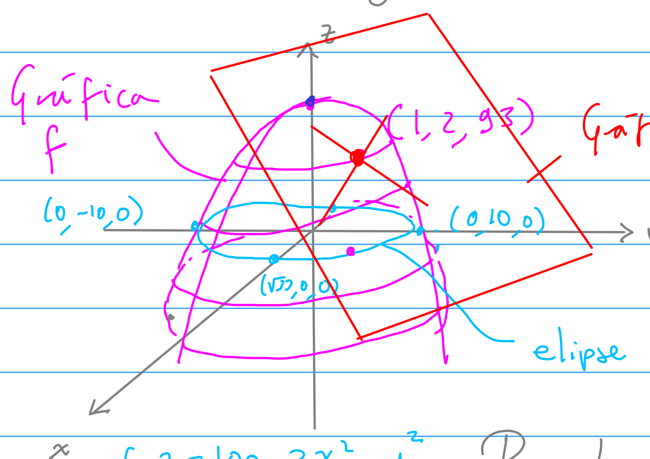
dejando las demás variables fijas

(2) $\left[\underbrace{\ell_{(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)}\right]$

$f(1,2) = 100 - 3\cdot 1^2 - 2^2 = 93$

$$\ell_{(1,2)}(x,y) = 93 + (-6)(x-1) + (-4)(y-2)$$
$$= (93+6+8) - 6x - 4y$$
$$\boxed{\ell_{(1,2)}(x,y) = 107 - 6x - 4y}$$

(3) ¿Relación entre gráficas de $f$ y de $\ell$?




$z = 100 - 3x^2 - y^2$

$z = 107 - 6x - 4y$ ] → plano

$0 = 107 - 6x - 4y - z$

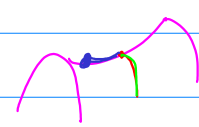
Normal $= (-6,-4,-1)$
Punto $(1,2,93)$

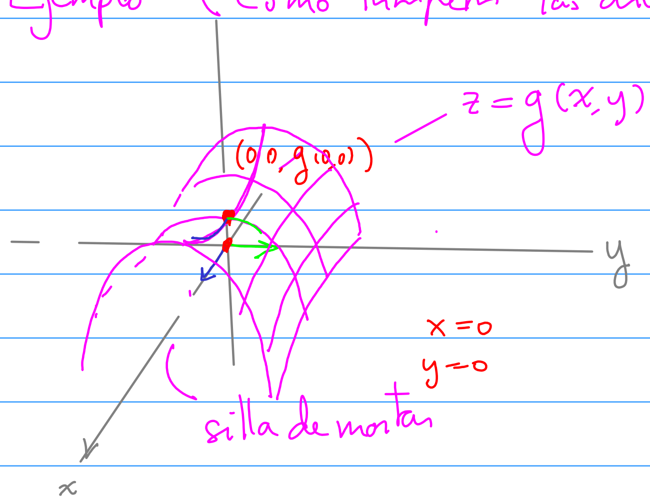
$\begin{cases} z = 100 - 3x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} z = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$

R: La gráfica de $\ell_{(1,2)}$ es el plano tangente a la gráfica de $f$ en $(1,2,93)$.

Ejemplo (¿Cómo interpretar las derivadas parciales?)






$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) < 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) > 0$

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

**Def:** $f$ es diferenciable en $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ si existe una matriz $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que:

función lineal de $\vec{x}$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\| f(\vec{x}) - \left( T(\vec{x}-\vec{a}) + f(\vec{a}) \right) \|}{\| \vec{x} - \vec{a} \|} = 0$$

**Teorema:** $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Si $f$ es diferenciable en $\vec{a}$ entonces la matriz $T$ es única y se llama la derivada de $f$ en $\vec{a}$, $Df(\vec{a})$ ← notación

y se calcula así:

$$Df(\vec{a}) = \begin{array}{c|c} & \overset{j}{\longleftarrow n \longrightarrow} \\ m & \begin{bmatrix} \\ i \rightarrow \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \\ \\ \end{bmatrix} \end{array}$$

útil:

$$(*) \quad \ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = Df(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + f(\vec{a})$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Producto de matriz y vector

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$

$g(x,y) = 100 - 3x^2 - y^2$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial x} , \frac{\partial g}{\partial y} \right]$$

$$Df(a,b) = \begin{array}{c} \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

* **Teorema:** (¿Cómo chequear si $f$ es diferenciable?)

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si TODAS las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ son CONTINUAS en $\vec{a}$ entonces $f$ es diferenciable en $\vec{a}$

**Ejercicio:** $f(x,y) = 100 - 3x^2 - y^2$

(a) Calcule $Df(1,2)$

(b) Calcule $\ell_{(1,2)}(x,y)$ usando la fórmula (*)

(c) Demuestre que $f$ es diferenciable en $(1,2)$

**Sol:** (a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Df \in \mathbb{R}^{1\times 2}$

$$Df(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \end{bmatrix}$$

$$Df(1,2) = \begin{bmatrix} -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$g(x,y) = (\underbrace{x-y}_{g_1}, \underbrace{xy}_{g_2})$

(b)

$$\ell_{(1,2)}(x,y) = Df(1,2) \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + f(1,2)$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} + 93$$

**Nota:** Repasar mult de matrices

$$\boxed{\ell_{(1,2)}(x,y) = -6(x-1) + (-4)(y-2) + 93}$$

(c) Demuestre que $f(x,y) = 100 - 3x^2 - y^2$ es diferenciable en $(1,2)$

Pasos: (i) Calculo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

(ii) Chequeo que son continuas

(iii) Invoco Teorema ✓

(i) $\frac{\partial f}{\partial x} = -6x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

(ii) Las dos son lineales así que son continuas ✓

(iii) Como las derivadas parciales son funciones continuas en todo el plano concluimos por el Teorema de clase que la función es diferenciable en TODOS los puntos del plano y en particular en $(1,2)$.

"Así que $\ell_{(1,2)}(x,y)$ es una excelente aproximación para $f(x,y)$ cerca de $(1,2)$".

Ejemplo: $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x,y,z) = x^2$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$

$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))$