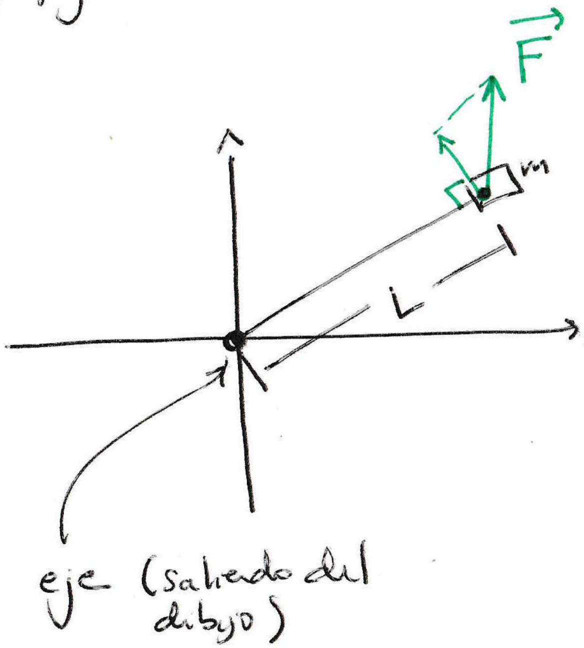
# Momento de Inercia:

Sabemos que si se aplica una fuerza a un objeto que puede rotar libremente alrededor de un eje fijo entonces $\vec{F}$ produce un torque alrededor del eje




$$\boxed{\tau = (m L^2)\, \alpha}$$

magnitud de la fuerza $\perp$ $\times$

Brazo de palanca

Como el movimiento es rectilíneo

$$\theta = \frac{S}{L}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{S}}{L} = \frac{a}{L} \Rightarrow \boxed{a = L\ddot{\theta}}$$

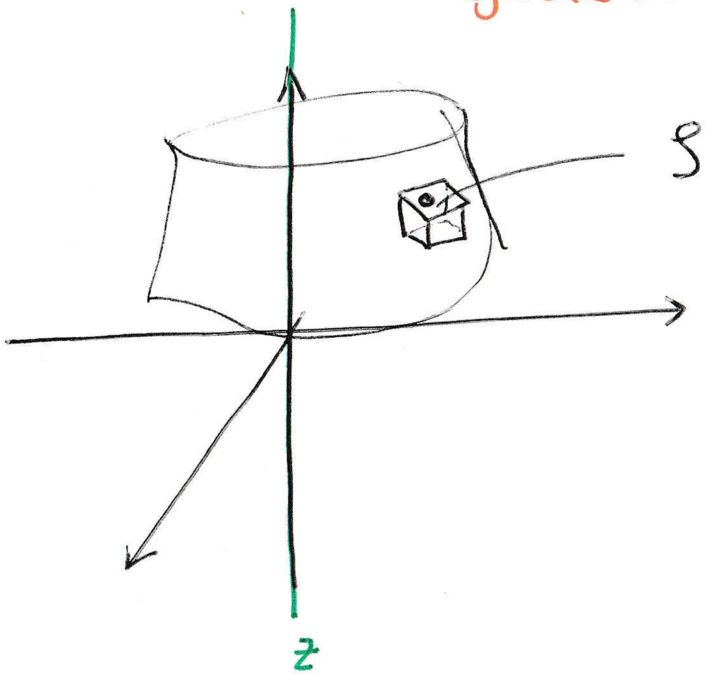
$\alpha$.

$$F = ma \Rightarrow \tau = LF = mL^2\ddot{\theta}$$

Si tenemos un objeto extenso entonces

$$\underbrace{\tau}_{\text{torque total}} = \underbrace{\left(\sum_i m_i L_i^2\right)}_{\text{Momento de inercia alrededor del eje dado.}} \alpha$$

distancia entre el objeto y el eje de rotación



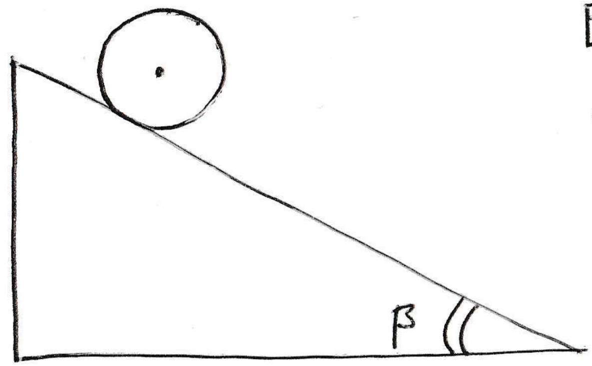

$\rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathrm{Vol}(R_{ijk})\,(x_i^2 + y_i^2)$

**Def:** El momento de inercia del sólido $E$ alrededor del eje $z$ es:

$$\boxed{I = \iiint_E (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dV}$$

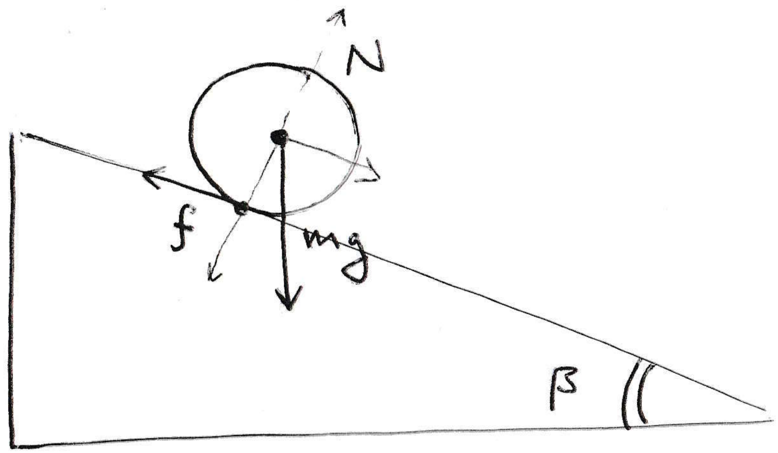
Ejercicio: Un objeto redondo rueda sin deslizarse en un plano inclinado bajo la acción de su propio peso.

Encuentre fórmulas para la aceleración angular.




PARE EL VIDEO E INTÉNTELO USTED MISM@...

## Solución:




### Fuerzas:

(i) Traslacionales sobre el centro de masa: $[\vec{F} = m\vec{a}]$

$$N - mg\cos(\beta) = 0$$

$$mg\sin(\beta) - f = ma$$

(ii) Rotacionales: $[\vec{\tau} = I\vec{\alpha}]$

$$Rf = I\alpha$$

(iii) Sin rozamiento $\theta = \frac{s}{R}$

$$\Rightarrow R\theta = s \Rightarrow \boxed{R\alpha = a}$$

$$mg\sin(\beta) - \frac{I\alpha}{R} = mR\alpha$$

$$\alpha\left(mR + \frac{I}{R}\right) = mg\sin(\beta)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{mg\sin(\beta)}{mR + \frac{I}{R}}}$$

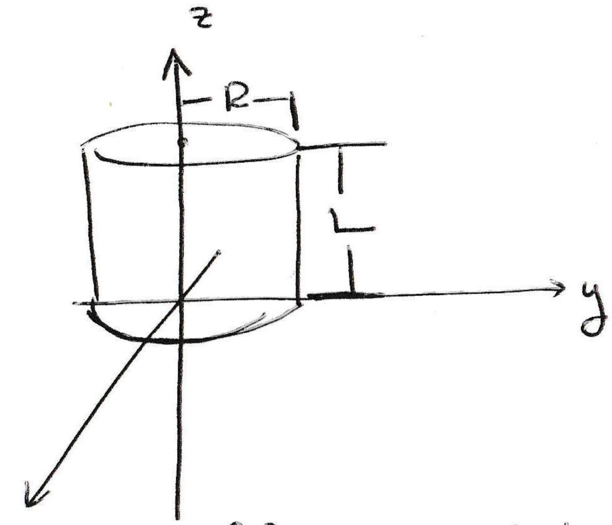
Ejercicio: Calcule el momento de Inercia de un cilindro de altura $L$, de radio $R$, masa $M$ y densidad constante alrededor de su eje de simetría.

POR FAVOR DETENGA EL VIDEO Y RESUÉLVALO USTED MISMO.

## Solución:

Si el cilindro tiene densidad constante $\rho$ entonces

$$\rho = \frac{M}{Vol(E)} = \boxed{\frac{M}{\pi R^2 L} = \rho}$$




$$I = \iiint_E \rho\cdot(x^2+y^2)\,dV = \left[\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L r^2\, r\, dz\,d\theta\,dr\right]\frac{M}{\pi R^2 L}$$

Teo. cambio de variable

$$= 2\pi L\int_0^R r^3\,dr = 2\cancel{\pi} L\,\frac{R^4}{4}\cdot\frac{M}{\cancel{\pi} R^2 L} = \boxed{\frac{M R^2}{2}}$$

$I$

Note que, de nuestros cálculos sobre el cilindro que rueda tendríamos

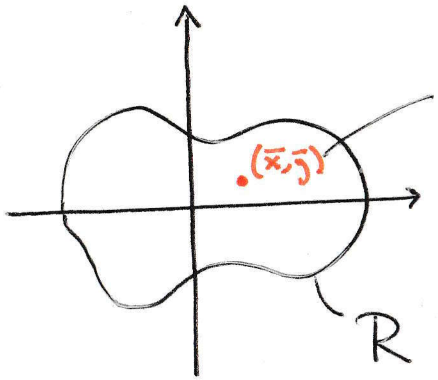
$$\alpha = \frac{mg\sin(\beta)}{mR + \frac{I}{R}} = \frac{mg\sin(\beta)}{mR + \frac{mR}{2}} = \frac{mg\sin(\beta)}{\frac{3mR}{2}} = \frac{2}{3}g\frac{\sin(\beta)}{R}$$

$$\boxed{a = \frac{2}{3}g\sin(\beta)}$$

No importa ni la masa ni el radio! Mientras un cilindro sea sólido llega a la base de la rampa al mismo tiempo.

Qué pasaría si fueran esferas sólidas?

## En Probabilidad:




$f(x,y)$ densidad de $(X,Y)$

[es decir: $f(x,y) \geq 0$ y $\iint_R f(x,y)\,dA = 1$ ]

$$\mathbb{E}[(X,Y)] = (\bar{x},\bar{y})$$

Qué tan "dispersa" alrededor de la media $(\bar{x},\bar{y})$ es $(X,Y)$?

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X-\bar{x})^2\right] = \iint_R (x-\bar{x})^2 f(x,y)\,dA$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left[(Y-\bar{y})^2\right] = \iint_R (y-\bar{y})^2 f(x,y)\,dA$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\bar{x})(Y-\bar{y})\right] = \iint_R (x-\bar{x})(y-\bar{y})\, f(x,y)\,dA$$

Esta información generalmente se escribe en una matriz simétrica:

$$\boxed{W = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{bmatrix}}$$

con $\mathbb{E}\left[(\alpha X + \beta Y)^2\right] = (\alpha \;\; \beta)\, W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Matriz de varianzas-covarianzas.