Hoy: Distancias y ángulos en $\mathbb{R}^n$

(Hiper) planos y proyecciones en $\mathbb{R}^n$.

Def: Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_n)$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

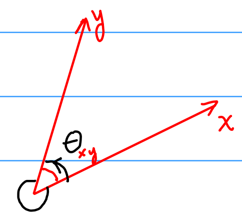
Qué significa y para qué sirve?

(1) Nos permite medir distancias

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ ← Teorema de pitágoras en $\mathbb{R}^n$

(2) Nos permite medir ángulos

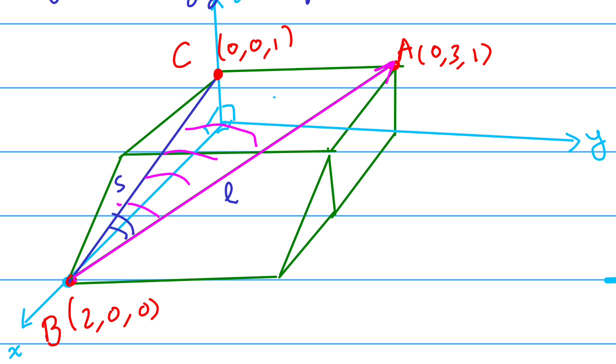
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\theta_{xy})$$



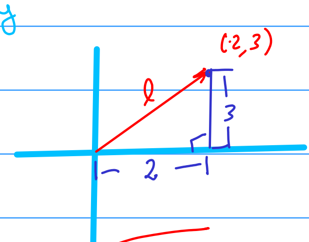
$$\theta_{xy} = \text{Arccos}\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} \right)$$

En particular $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \vec{x}$ y $\vec{y}$ son perpendiculares

Ejemplo:



ℓ, s, θ ??



$\ell = \sqrt{2^2 + 3^2}$

$\|A - B\| = \ell$

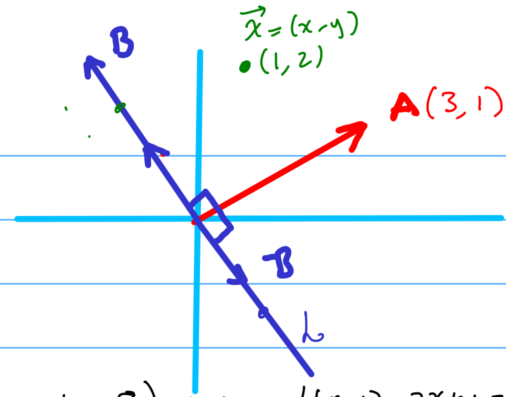
$\|(-2, 3, 1)\| = \sqrt{(-2,3,1) \cdot (-2,3,1)} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$\|C - B\| = s \qquad \cos\theta = \dfrac{(A-B) \cdot (C-B)}{\ell s}$

Pregunta: (a) Qué forma tiene el conjunto de vectores perpendiculares a $A(1,2,3)$?

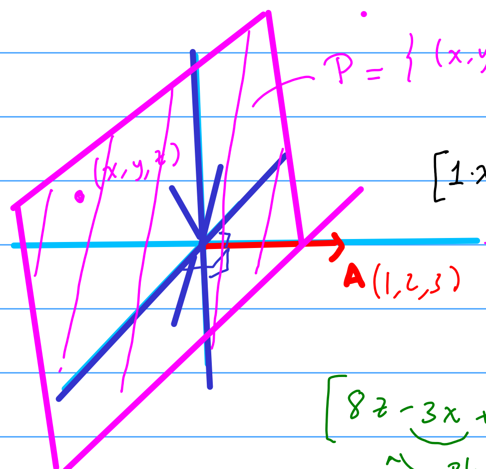
(b) Describa ese conjunto mediante una ecuación.

Ejemplo:



En $\mathbb{R}^2$ $\{\text{vectores} \perp \text{a } \vec{A}\} = L = \{(x,y) : 3x + y = 0\}$

$0 = (x,y) \cdot A = (x,y) \cdot (3,1) = 3x + y$



$P = \{(x,y,z) : (x,y,z) \cdot A = 0\}$

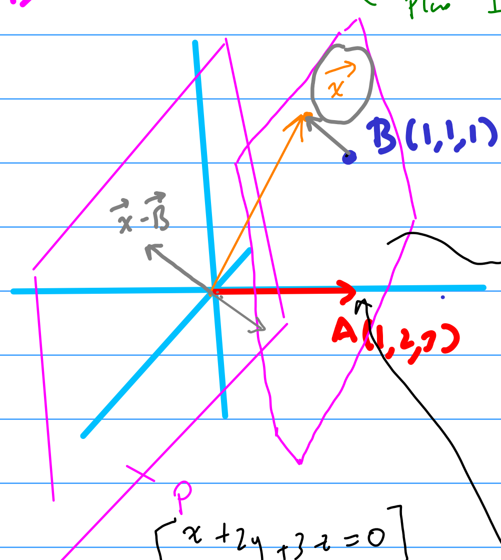
$[1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0]$

?

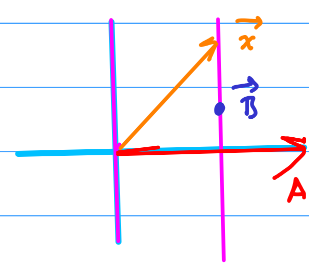
$[8z - 3x + 5y = 0]$ ~ plano $\perp$ a $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

PREGUNTA

Encuentra una ecuación para el plano perpendicular a $\vec{A}$ que pasa por $\vec{B}$.



$Q = P + B$



$[x + 2y + 3z = 0]$

$(\vec{x} - \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0$

$[(x,y,z) - (1,1,1)] \cdot (1,2,1) = 0$

$\boxed{x + 2y + 3z = 6}$

$x - 1 + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$

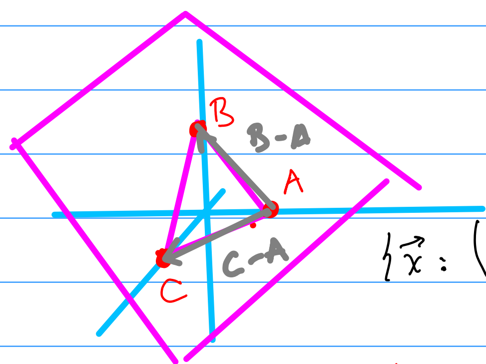
Def: El plano que pasa por $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$ y tiene vector normal $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ es

$$\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{(\vec{x} - \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0}_{1 \text{ ecuación lineal}} \}$$

Recíprocamente, $3x + 5y - z = 8$ describe la ecuación del plano normal a $(3,5,-1)$ que pasa por $(0,0,-8)$.

Ejercicio: (a) Encuentra una ecuación para el plano que es $\perp$ a $(1,1,1)$ y pasa por $(1,2,3)$. $[(x,y,z) - (1,2,3)] \cdot (1,1,1) = 0$

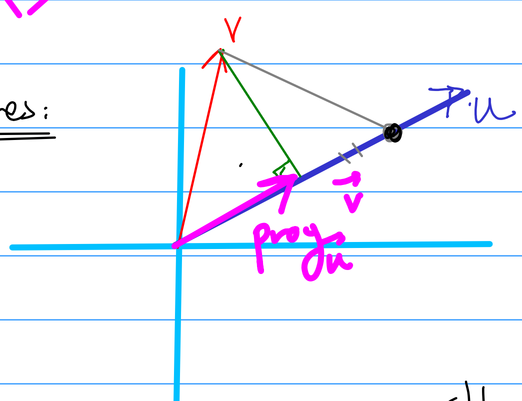
(b) Encuentra una ecuación para el plano que pasa por $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$



$$\vec{N} = (B-A) \times (C-A)$$

$$\{ \vec{x} : (\vec{x} - \vec{A}) \cdot [(B-A) \times (C-A)] = 0 \}$$

Proyecciones:



$$\vec{v} = \underbrace{(\vec{v} - \text{proy}_{\vec{u}} \vec{v})}_{\vec{u}^{\perp}} + \underbrace{\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}}_{\vec{u}}$$

$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}$:
(1) es múltiplo de $\vec{u}$
(2) $\left[(\vec{v} - \text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \right]$ ←
(3) $\| \vec{v} - \text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} \|$ es mínima entre los múltiplos de $\vec{u}$

Af: $\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u}$ ← fácil de calcular.

Dem:

$$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

$$(\vec{v} - \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} - \lambda \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$