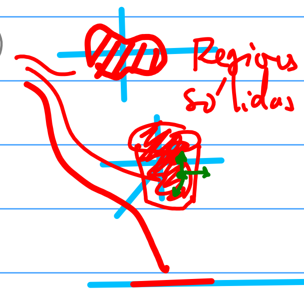
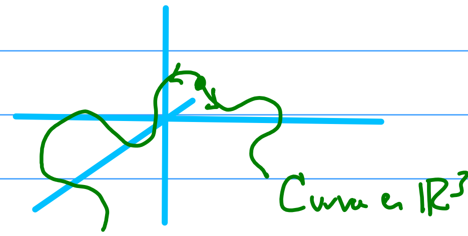
(1) Aplicaciones de integración (2D, 3D)

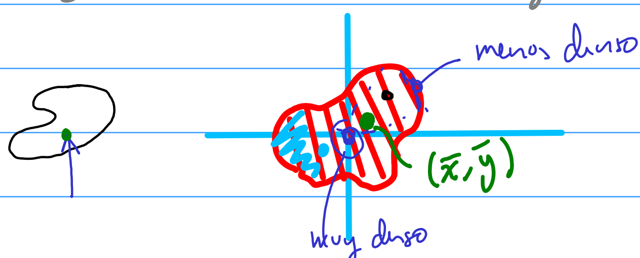


(2) <u>Integrales</u> sobre curvas



Hay cantidades muy importantes en física que son fácilmente expresables (y calculables!) con integrales:

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región sólida



calcula (conocidas)

$$\left[f(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)} \right]$$

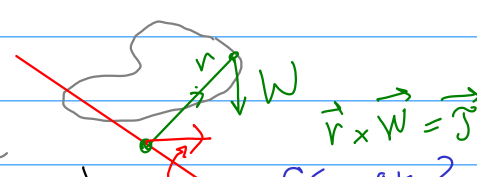
(1) Suponga que $f(x,y)$ = "densidad en Kg/m^2 del material de (x,y)"

Preguntas: (0) Probabilidades $\boxed{\mathbb{P}(\vec{X} \in E) = \iiint_E p(x,y,z)\,dV}$

(1) Cuando es la masa total de D? masa(D) en kg

(2) Dónde es el centro de masa de D? $(\bar{x},\bar{y})$

(3) Cuál es el momento de inercia de D alrededor de un eje dado?



$F = ma$ para "rotaciones" $\sim \left[\tau = I \alpha \right]$

torque

momento de inercia

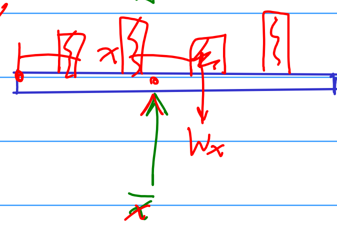
aceleración angul.

(1) $\quad \text{masa}(D) = \iint_D f(x,y)\,dA$ ✓

(2) $(\bar{x}, \bar{y})$ están dadas por:

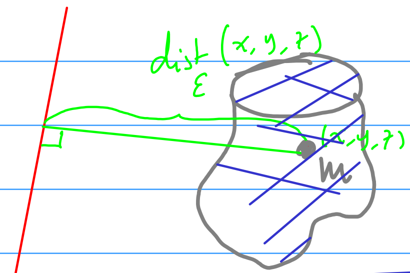
$\mathbb{E}[X]$

$$\bar{x} = \frac{\iint_E x\, f(x,y)\, dA}{\text{masa}(D)}$$



$$\bar{y} = \frac{\iint_E y\, f(x,y)\, dA}{\text{masa}(D)}$$

(3)



$$\boxed{I = \underbrace{dist_{eje}(x,y,z)}^{2} \cdot m}$$

$$\boxed{I_{eje} = \iiint_E dist_{eje}(x,y,z)^2\, f(x,y,z)\, dV}$$

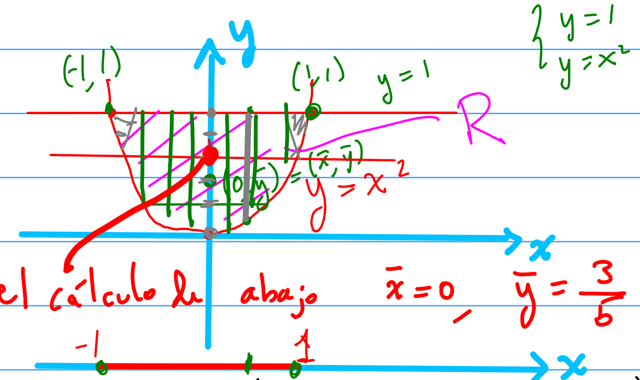
$$\left[m^2 \cdot Kg\right] \quad \frac{}{\cancel{m^3}} \quad \cancel{m^3}$$

Ejercicio: (a) Encuentre el centro de masa de la placa plana R limitada por $y = x^2$ y $y = 1$ asumiendo que la densidad es constante.

(b) (V ó F) El centro de masa de R está sobre el eje $x=0$ sin importar la densidad porque R es simétrica.

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$(\bar{x}, \bar{y})$



Del cálculo de abajo $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{3}{5}$

$f(x,y) = K$ (constante desconocida)

$$\text{masa}(R) = \iint_R K\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} [K]\,dy\,dx$$

$$= K\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = K\left(2 - \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1}\right)$$

$$= K\left(2 - \frac{1}{3} + \frac{-1}{3}\right)$$

$$= K\left(\frac{6}{3} - \frac{2}{3}\right) = \boxed{K\,\frac{4}{3}}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{masa}(R)}\iint_R y\,K\,dA = \frac{\cancel{K}}{\cancel{K}\frac{4}{3}}\iint_R y\,\cancel{K}\,dA$$

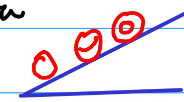
$$= \frac{3}{4}\iint_R y\,dA = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=1} = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}(1-x^4)\,dx$$

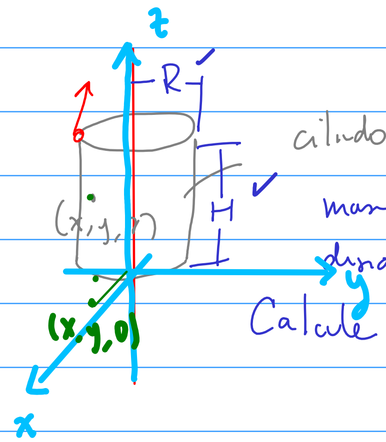
$$= \frac{3}{8}\left(2 - \frac{x^5}{5}\Big|_{x=-1}^{x=1}\right) = \frac{3}{8}\left(2-\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{\cancel{8}}\cdot\frac{8}{5} = \frac{3}{5}$$

Momento de inercia (clase asincrónica extra VOLUNTARIA)

*



Ejemplo



cilindro sólido
masa M y
densidad constante.

Calcule $I_{eje} = ?$

Sol:

$$I_{eje} = \iiint_E \underbrace{dist(eje,(x,y,z))^2}_{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \underbrace{K}_{\frac{M}{\pi R^2 H}} \, dV$$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le H \\ 0 \le r \le R \end{cases}$$

Jacobiano

$$\frac{M}{\pi R^2 H}\iiint_E x^2+y^2 \, dV = \left[\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{H} r^2 \, r \, dz\, dr\, d\theta\right]\frac{M}{\pi R^2 H}$$

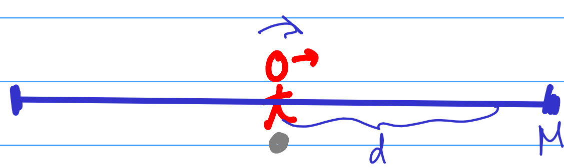
$$= 2\pi \cancel{H}\left(\int_0^R r^3\, dr\right)\frac{M}{\pi R^2 \cancel{H}} = \frac{2\pi R^4 M}{4\pi R^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}R^2 M}$$

momento de inercia de un cilindro sólido alrededor del eje.

$$\iiint (x^2+y^2)\, f(x,y,z)\, dV$$

$$\boxed{J = I\,\underline{\omega}}$$



$2Md^2$

B) Integrales sobre curvas.

SIEMPRE

$$\int \cdots \int\int_{E} f \; d$$

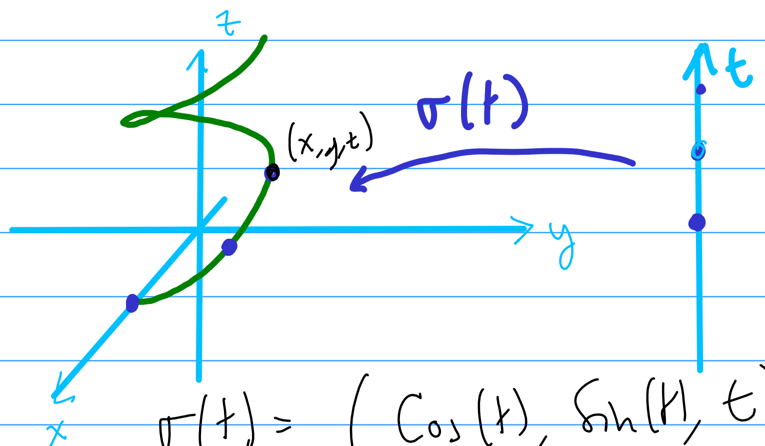
Qué objeto estamos integrando?

Funciones: - Funciones escalares - Campos vectoriales

sobre qué integramos?

Conjunto: - Región sólida - Curva - superficie ⋮

Si C es una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$



$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar

$f(x,y,t)$ = "densidad en kg/m del material del punto (x,y,t) del alambre"

Preguntas:

(1) Cuál es la masa total del alambre?

(2) Dónde queda el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del alambre?

(3) Cuál es el momento de inercia del alambre respecto a un eje dado?

(1) $\int_C f(x,y,z)\, ds = \text{masa}(C)$

(2) $\bar{x} = \dfrac{\int_C x f(x,y,t)\, ds}{\text{masa}(C)}$

$I = \int_C \text{dist}_{\text{eje}}^2 f(x,y,t)\, ds$

Teorema Si $\sigma(t)$ es una parametrización de C para $A \leq t \leq B$ entonces

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_A^B f(\sigma(t))\underbrace{\|\sigma'(t)\|}\,dt}$$

Integral de cálculo 1 ✓