Hoy: Optimización   Qué es?

la de menor costo

"Un método para escoger la "MEJOR" alternativa entre las opciones DISPONIBLES"

Escogemos una función objetivo $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que nos permite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

$\underbrace{f(\vec{a}_1)}_{\text{"Costo"}} < f(\vec{a}_2)$ $\vec{a}_1$ mejor que $\vec{a}_2$.

Disponibles $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen

$g(\vec{a}) \leq c$

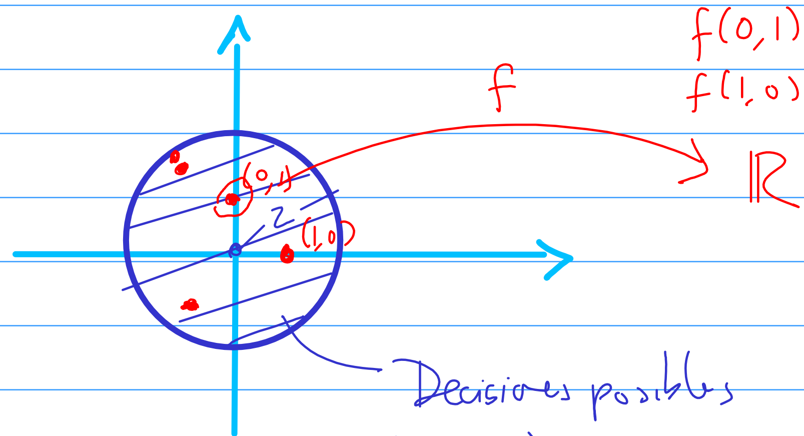
Dados.

$$\min f(\vec{x}) \quad \text{s.a.} \quad g(\vec{x}) \leq c$$

Ejemplo: $\left[\min \underbrace{x^2 - y^2} \quad \text{s.a.} \quad x^2 + y^2 \leq 4\right]$

$f(0,1) = -1$

$f(1,0) = 1$



Decisiones posibles

$(x,y): x^2 + y^2 \leq 4$

Ejemplo: [Portafolio de Markowitz]

$\mathbb{R}^n$ n = # empresas en bolsa

x_i — dinero invertido en la i-ésima

$K = \sum_{i=1}^{n} x_i$ — capital total

Se puede ver que $R(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$ conocida

$\min \left[\text{Riesgo}(x_1, \ldots, x_n) \right]$ s.a. $\left[\begin{array}{l} x_i \geq 0 \\ \sum x_i = K \\ \sum \bar{r}_i x_i \geq M \end{array} \right.$

conocida

fijos

Obs:

Típicamente queremos determinar:

valor óptimo

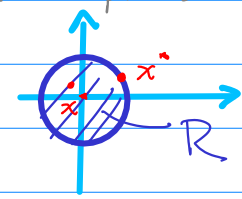
(i) Cuál es el costo mínimo posible? ← $\mathbb{R}$

(ii) En qué lugares se alcanza ese mínimo?

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$. ← los óptimos

sujeto a

$$\left[\min\ f(x,y) \quad \text{s.a.} \quad g(x,y) \le c\right]$$



Método para resolver el problema:

Queremos buscar óptimos $\vec{x}^*$.

Hay dos posibilidades:

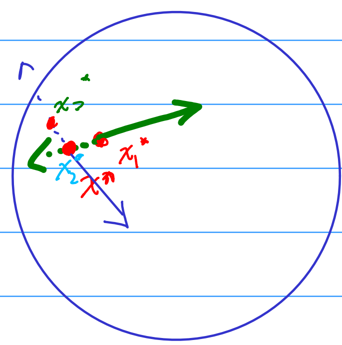
(1) $\vec{x}^*$ en interior de R]

[(2) $\vec{x}^*$ en la frontera de R].

Caso 1:

$\nabla f(x^*)$

$\nabla f(x^*)$



Si x^* es un punto óptimo interior a R entonces

$$\boxed{\nabla f(x^*) = \vec{0}}$$

Así que podemos restringir nuestra búsqueda a aquellos puntos con $\nabla f(x) = \vec{0}$

Def: $\vec{x}$ es un punto crítico si

$$\left[\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}\right]$$

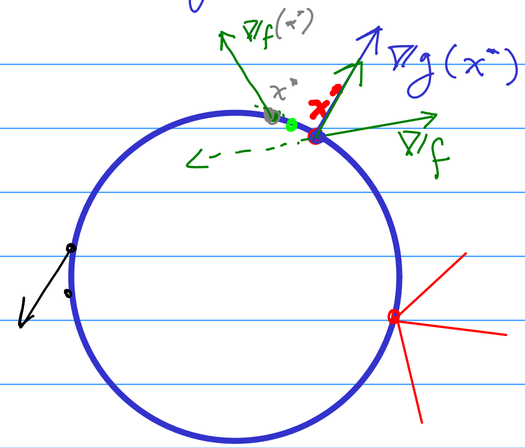
Teorema: Si $\vec{x}^*$ es un punto óptimo interior a R entonces $\vec{x}^*$ es un punto crítico.

Obs: Óptimos $\subset$ Críticos

pero no necesariamente son todos.

[min x^2-y^2 s.a. $x^2+y^2=4$]

Caso 2: x^* óptimo con $g(x^*)=c$ $\nabla f(x^*)$



Para que x^* sea óptimo en la frontera

"$\nabla f(x^*)$ perpendicular a la frontera"

$$\boxed{\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*)}$$

Todo óptimo que esté en la frontera tiene que satisfacer

$$\left\{\begin{array}{ll} \nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*) & \text{— n ecuaciones} \\ g(x^*) = C & \text{— 1 ecuación} \end{array}\right.$$

(n+1)-vars y (n+1)-ecuaciones — generalmente tiene finitas soluciones!

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Método: min $f(x,y)$ s.a. $g(x,y) \le C$

(1) Encuentro los ptos críticos en el interior resolviendo

$$\nabla f(x,y) = \vec{0}$$

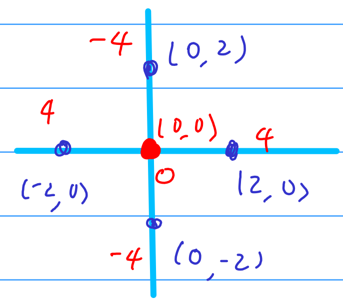
y seleccionando candidatos con $g(x,y) < C$. $\{\vec{a}_1, \dots \vec{a}_m\}$

(2) Encuentro los ptos críticos de la frontera resolviendo

$$\text{MULT LAGRANGE}\left\{\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = c \end{array}\right\} \to \{\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_L\}$$

(3) Evalúo $f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_L)$ y escojo el valor mínimo y los puntos en los que el mínimo se alcanza.

Ejemplo: min $\underline{x^2 - y^2}$ s.a. $\underline{x^2+y^2 \leq 4}$.



(1) Calculamos puntos críticos en el interior

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \iff \boxed{(x,y) = (0,0)} \checkmark$$

(2) Calculamos Mult de Lagrange en frontera

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = c \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \\ x^2+y^2 = 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \boxed{2(1-\lambda)x = 0} \\ -2(1+\lambda)y = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad 1-\lambda = 0$$

$$-2y = \lambda 2y$$
$$0 = \lambda 2y + 2y$$
$$= 2(\lambda+1)y$$

Si $x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2(1+\lambda)y = 0 \\ y^2 = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda = -1 \\ y = \pm 2 \end{bmatrix} \quad (0,2),\ (0,-2)$$

Si $\lambda = 1$

$$\begin{cases} -4y = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2,0) \\ (-2,0) \end{matrix}$$

(3) Evaluamos $f(x,y)$ y concluimos que:

el valor mínimo es -4
y se alcanza en $(0,-2)$ y $(0,2)$.