Hoy: Tipos principales de funciones $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Entre todas las funciones $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ hay TRES clases especiales que debemos conocer bien:

(1) Funciones escalares $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$

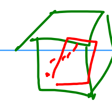
(2) Curvas parametrizadas $\sigma:\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

(3) Campos Vectoriales $G:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

(1) Funciones escalares: $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

[Ejemplo concreto simple: $f(x,y)=x^2-y^2$]

Ejemplo en física: La temperatura (en °C) del punto $(x,y,z)$ en un salón está dada por "$T(x,y,z) = x^3+\sin(y^2z)+z^3$"



Cómo las visualizamos? $\to$ Conjuntos de nivel / Gráfica de $f$

Derivadas:

$$DT = 1\overbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial T}{\partial x_n}\right]}^{n} \rightsquigarrow \nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial T}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema de gradiente. (2 pags.)

(2) Curvas parametrizadas

Def: Una curva parametrizada es una función $\sigma:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Ejemplo muy simple: $\sigma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)})$, $\sigma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$

Ejemplo en física:

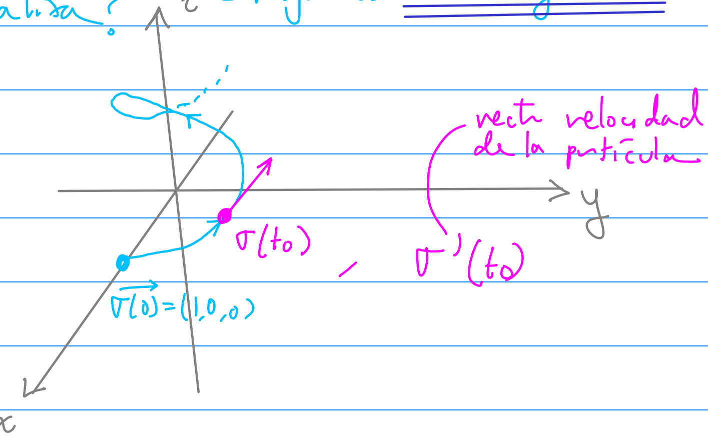
$\sigma(t)$ = "Vector posición de una partícula en el instante $t$"

$= (x(t), y(t), z(t))$

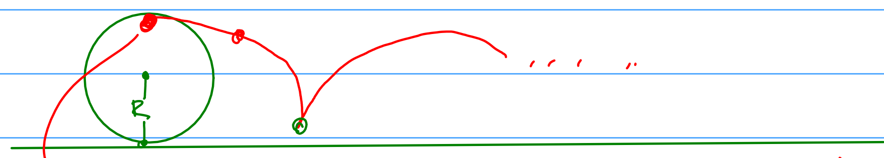
Cómo se visualiza?

$[\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)]$ (with $x$, $y$, $z$ written above the three components)

¿Cómo se visualiza? Dibujamos <u>la trayectoria</u>




Ejercicio:




Encuentre la curva $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ si el círculo gira a velocidad de una vuelta por segundo sin deslizarse

Dibuje $\|\sigma'(t)\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$D\sigma(t_0) = n\left|\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}\right. = \sigma'(t)$$

(with $1$ written above the column)

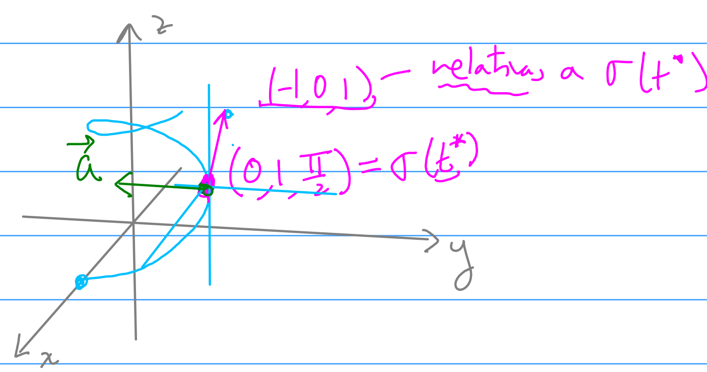
Notación: OJO se puede usar sin ambigüedad porque $\sigma$ depende de una sola variable

Vector velocidad de la curva en el instante $t$.

$\sigma''(t_0)$ — Vector aceleración de la partícula en el instante $t_0$

Ejercicio: Encuentre velocidad, rapidez y aceleración de una partícula cuya trayectoria está dada por $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ en el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

Sol:



(1) En qué instante $t^*$, tenemos $\boxed{\sigma(t^*) = (0, 1, \frac{\pi}{2})}$

$$(\cos(t^*), \sin(t^*), t^*) = (0, 1, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} \cos(t^*) = 0 \checkmark \\ \sin(t^*) = 1 \checkmark \\ [t^* = \frac{\pi}{2}] \longrightarrow t^* = \frac{\pi}{2} \approx 1.5 \text{ secs después} \end{cases}$$

(2) Velocidad $= \sigma'(t^*) = (-\sin(\frac{\pi}{2}), \cos(\frac{\pi}{2}), 1)$

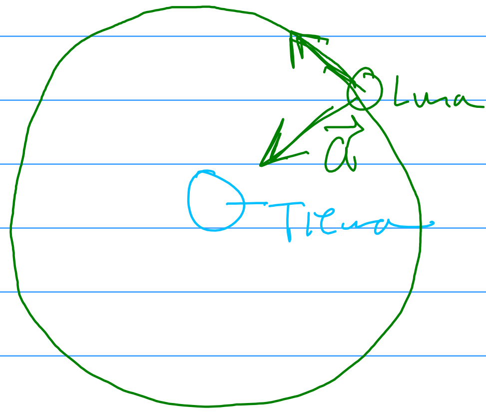
$\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ $\quad \underline{(-1, 0, 1)}$ ✓ m/sec

Rapidez $= \|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ m/sec

Aceleración $= \sigma''(t^*)$

$\sigma''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$

$\sigma''(t^*) = (-\cos(\frac{\pi}{2}), -\sin(\frac{\pi}{2}), 0) = (0, -1, 0)$




(3) Campos vectoriales

Def: Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función $G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Para cada punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ asignamos una flecha $G(\vec{x})$ en $\mathbb{R}^n$ anclada en $\vec{x}$.

Ejemplo en física: Hay dos tipos principales

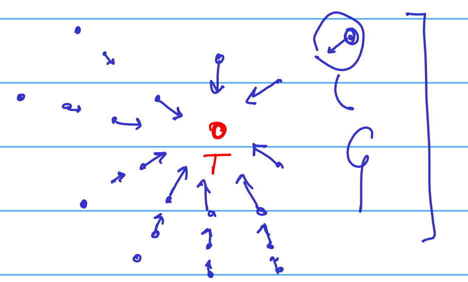
(a) El campo de velocidades de un fluido

$G(x,y,z) =$ "Velocidad del agua en ese punto"

Navier-Stokes

$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

(b) El campo de fuerzas generado por un objeto (cargas, masas, ...)



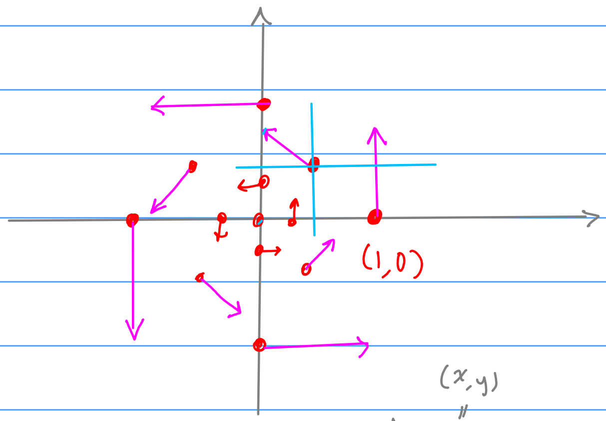

Mecánica clásica + Electr

Ejemplo muy simple $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (-y, x)$$

Cómo se visualiza? "Ponemos la flecha $F(x,y)$ en el punto $(x,y)$"

(a)



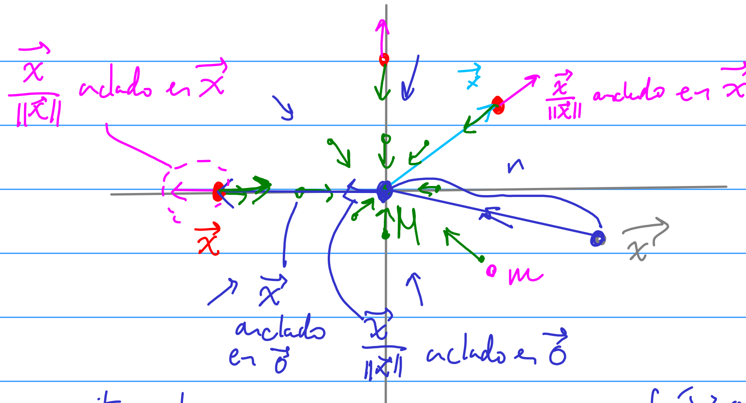

$F(1,0) = (-0,1) = (0,1)$

$F(0,1) = (-1,0)$

$F(-1,0) = (-0,-1) = (0,-1)$

$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(b) Cómo visualizar $A(\vec{x}) = -\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ ?




Ejercicio:

Escriba el campo gravitacional según la ley de grav universal!

Campo gravitacional causado por masa $M$ en $\vec{0}$ sobre un objeto de masa $m$ en $\vec{x}$

apunta hacia el origen

física

magnitud $\left[\dfrac{GMm}{r^2}\right]$ constante conocida

Qué es $r$?

apuntando hacia el origen

Sol:

$$\boxed{H(\vec{x}) = \left(-\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\left[\frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot GMm\right]}$$