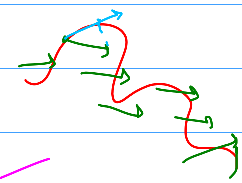
Hoy: (1) Campos conservativos

(2) Superficies parametrizadas.

Clase anterior: C curva $\subseteq \mathbb{R}^3$

F campo vectorial en $\mathbb{R}^3$



$$\int_C F\, d\vec{s} \overset{\substack{\text{parametrizamos } C \\ \text{mediante } \sigma(t),\ A\le t\le B}}{=} \int_A^B F(\sigma(t))\cdot \sigma'(t)\, dt$$

Trabajo realizado por F a lo largo de C

Hoy: Para algunos campos vectoriales F, los llamados campos <u>CONSERVATIVOS</u> podemos calcular $\int_C F\, d\vec{s}$ <u>SIN</u> parametrizar. Estos campos son ubicuos en la física. (Campo gravitacional ó Campo eléctrico)

Def: Sea $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. F es CONSERVATIVO si existe una función escalar $U:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ con

$$\boxed{\nabla U(x,y,z) = F(x,y,z)}$$ para todo (x,y,z).

La función U se llama <u>un</u> POTENCIAL para el campo F.

Ejemplo: $[\,U(x,y,z) = x^2 \sin(z)\, y + 45\,]$

$$\nabla U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\sin(z)\, y \\ x^2 \sin(z) \\ x^2\cos(z)\, y \end{pmatrix}$$

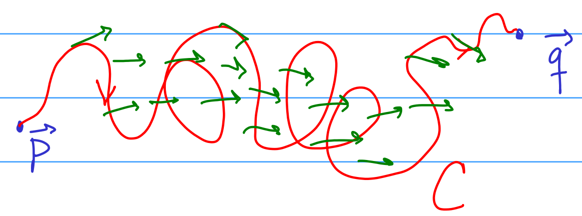
$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(z)\, y \\ x^2\sin(z) \\ x^2\cos(z)\, y \end{pmatrix}$$ es un campo CONSERVATIVO con potencial U.

(1) Es fácil calcular integrales de línea de campos conservativos,

Teorema: [Teo. Fundamental del cálculo para integrales de línea TFCIL]

Sea C una curva desde $\vec{p}$ hasta $\vec{q}$ y sea F un campo conservativo con potencial U.

$$\boxed{\int_C F\, d\vec{s} = U(\vec{q}) - U(\vec{p})}$$



Ejercicio: Sea $\begin{cases} \sigma(t) = (\cos(t)+t^2,\ e^t,\ e^{-t}) \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$, una param de C

Calcule $\int_C F\, d\vec{s} =$
del ejemplo anterior

Sol: FINAL: $\sigma(1) = (\cos(1)+1,\ e,\ e^{-1})$

INICIAL: $\sigma(0) = (1,\ 1,\ 1)$

$U = x^2 \sin(z)\, y$

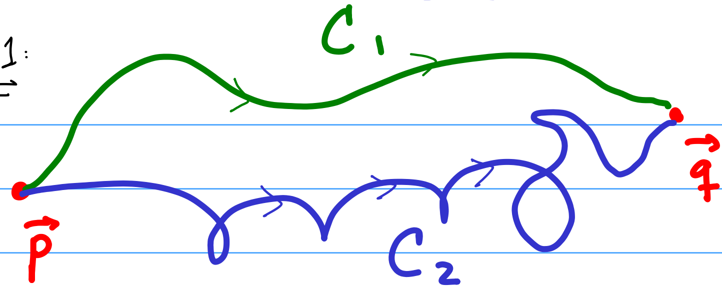
$U(\sigma(1)) = (\cos(1)+1)^2 \sin(e^{-1})\, e$

$U(\sigma(0)) = 1 \sin(1) \cdot 1$

$$\int_C F\, ds = (\cos(1)+1)^2 \sin(e^{-1})\, e - \sin(1)$$

EN CAMPOS CONSERVATIVOS:

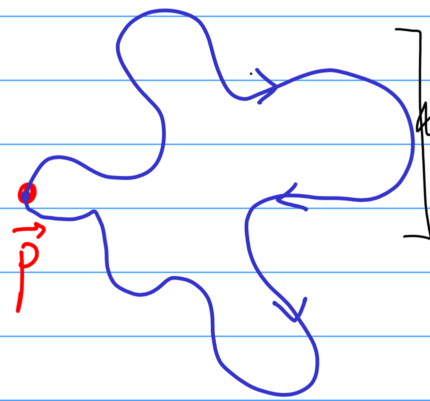
Obs1:



En un campo conservativo el trabajo realizado es el mismo a lo largo de cualquier trayectoria que una $\vec p$ y $\vec q$.

$$\int_{C_1} F\, d\vec s = U(\vec q) - U(\vec p) = \int_{C_2} F\, d\vec s$$

Obs2:



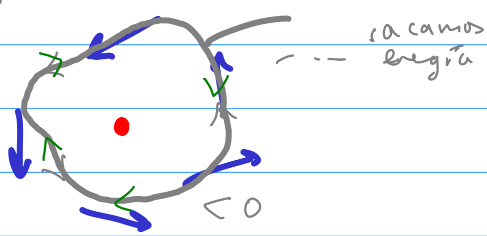
El trabajo realizado a lo largo de CUALQUIER curva cerrada es cero.

$$\oint F\, d\vec s = U(\vec p) - U(\vec p) = 0$$

curva cerrada

Esto explica por qué las leyes de la naturaleza son típicamente campos conservativos.

Si NO es conservativo hay una trayectoria cerrada que produce trabajo > 0



Dado un campo vectorial F queremos:

(1) Chequear si F es conservativo ✓ o no ✗.

(2) Si F es conservativo queríamos poder construir un potencial $U(x,y,z)$.

(1) **Def:** Si F es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ podemos definir un nuevo campo vectorial

$$\underbrace{\nabla \times F}_{\text{"rotacional de F"}} \quad \text{así:}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Lema: (en $\mathbb{R}^3$) Sea $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial.

(1) Si $\nabla \times G \neq \vec{0} \Rightarrow G$ NO ES conservativo

(2) Si $\nabla \times G = \vec{0}$ y G está definido en una región "sin huecos" $\Rightarrow G$ SI ES conservativo.

Ejemplo: Es $G(x,y,z) = (-y, x, 0)$ conservativo?

Calculamos $\nabla \times G =$

NO ES conservativo

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}(-y)\right) + k\left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) = (0,0,2) \neq \vec{0}$$

$\nabla u = G$

Ejemplo: Calcule un potencial para $G(x,y) = (\underbrace{4x+y}, \overset{u(x,y)}{6y^2+x})$

Sol: Qué sabemos sobre $u(x,y)$?

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x+y \\ (2)\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 6y^2+x \end{cases}$$

Resolvemos ...

$$(1)\ \left[u(x,y) = 2x^2 + yx + A(y)\right]$$

De (1) se sigue que $u(x,y)$ tiene que ser así para alguna función $A(y)$

Reemplazamos en (2)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\cancel{x} + A'(y)\right]\right) = 6y^2 + \cancel{x}$$

$$\Rightarrow A'(y) = 6y^2 \Rightarrow \left[A(y) = 2y^3 + C\right]$$

Concluimos que $\left[u(x,y) = 2x^2 + yx + 2y^3 + C\right]$

potencial ✓

II. Superficies Parametrizadas:

$\Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0)$ ~ vector normal del plano tangente a S

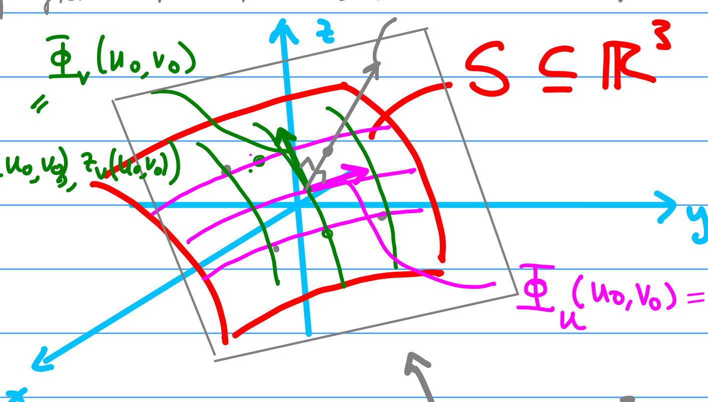
$\Phi_v(u_0,v_0)$

$=$

$(x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0), z_v(u_0,v_0))$

$($

$\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)$



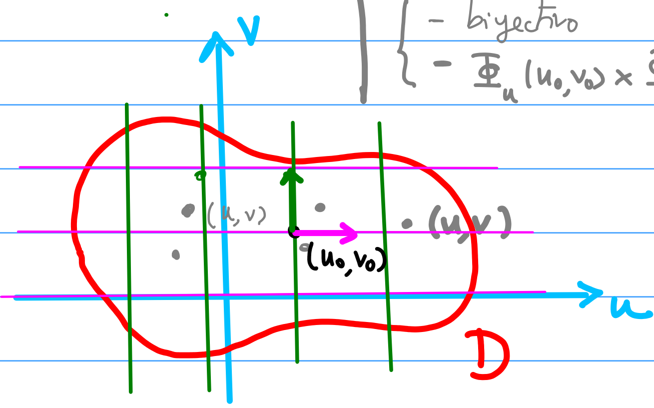
$\Phi_u(u_0,v_0) = (x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), z_u(u_0,v_0))$

$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

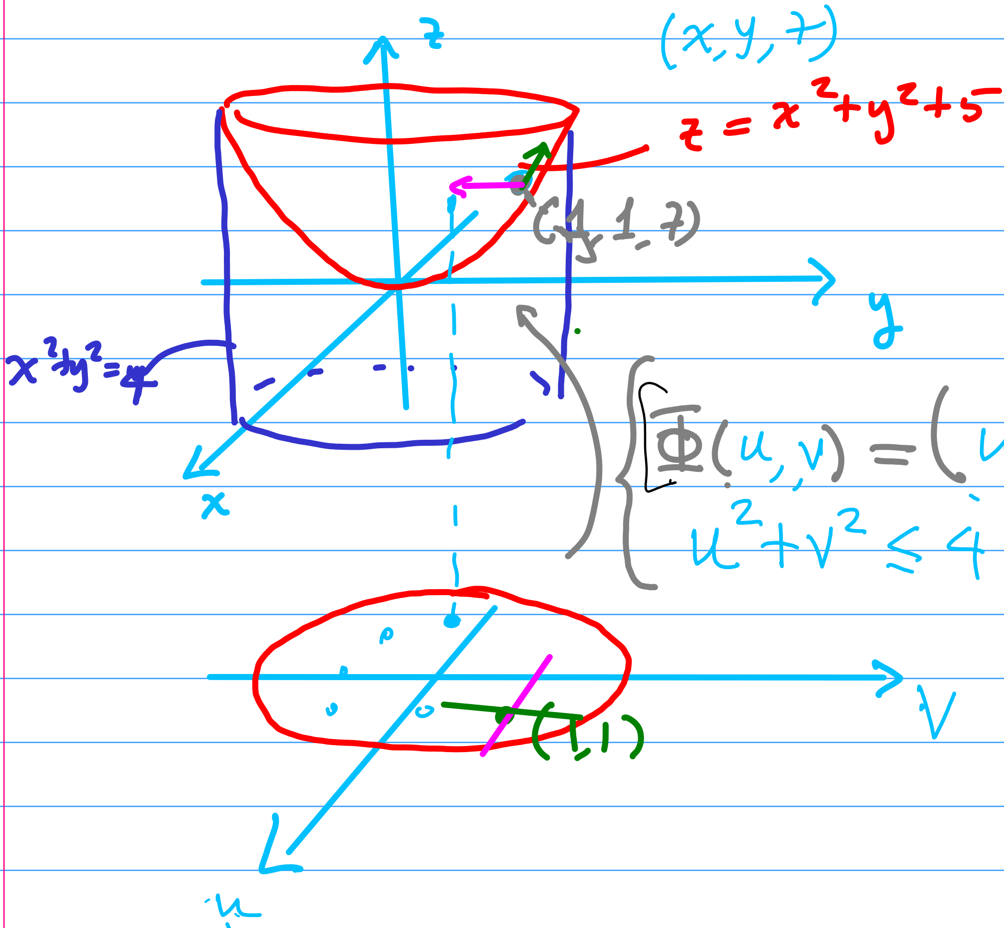
$$\begin{cases} \text{- biyectivo} \\ -\ \Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0) \neq \vec{0} \end{cases}$$

Parametrizar una superficie S permite "integrar" funciones en S (de la misma manera que con curvas)



Ejemplo: (a) Halle una parametrización de la parte de la superficie $z = x^2+y^2+5$ dentro del cilindro $x^2+y^2=4$

(b) Halle un vector normal al plano tangente a S en $(1,1,7)$.



$$\begin{cases} \Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2+5), \\ u^2+v^2 \le 4 \end{cases}$$

(b) $\Phi(1,1) = (1,1,7)$

$$\begin{cases} \Phi_u = (1, 0, 2u) \\ \Phi_v = (0, 1, 2v) \end{cases}$$

$\Phi_u(1,1) = (1, 0, 2)$

$\Phi_v(1,1) = (0, 1, 2)$

$N = (1,0,2) \times (0,1,2) =$