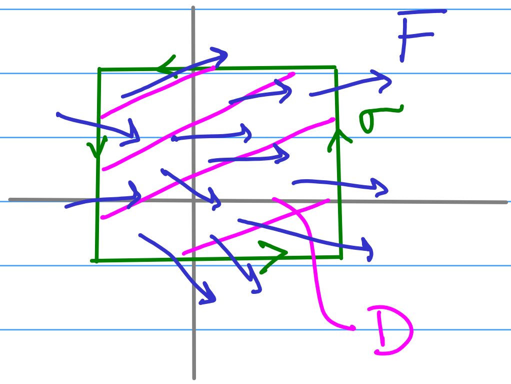
Hoy: (1) De dónde viene el Teo de Green
(2) Teo de Green $\subseteq$ Teo de Stokes
(3) Ejemplo Stokes.

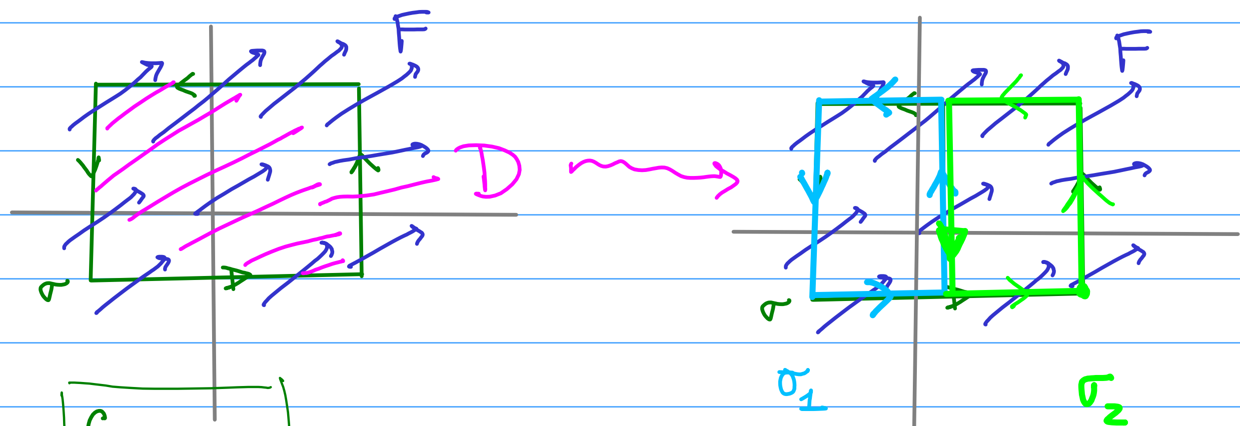
$F = (P, Q)$



$$\int_\sigma F\, ds = \left[\iint_D \underbrace{\nabla \times F}_{\text{rotacional}}\, dA \right]$$

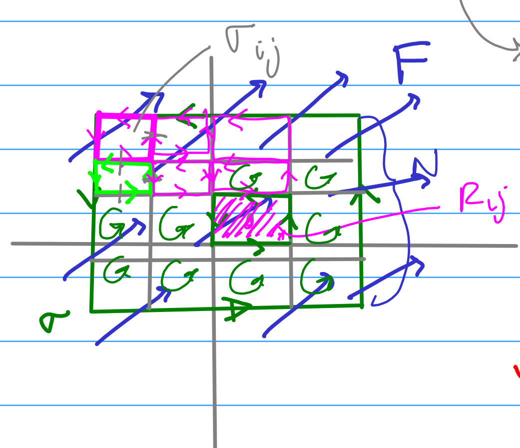
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

De dónde viene?



$$\boxed{\int_\sigma F\, d\vec{s}} = \int_{\sigma_1} F\, d\vec{s} + \int_{\sigma_2} F\, d\vec{s}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\sigma_{ij}} F\, ds \right]$$

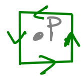


$$\int_{\sigma_{ij}} F\, ds \overset{(*)}{=} \iint_{R_{ij}} \overset{\text{rotacional}}{\text{Algo}(F)}\, dA$$

Teo green!

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

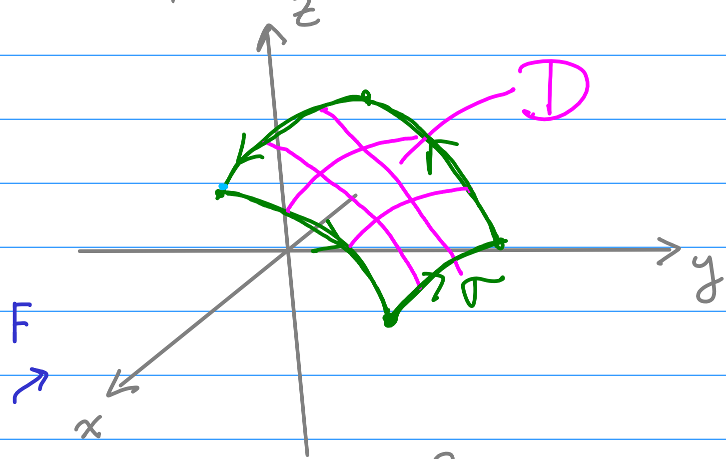
2

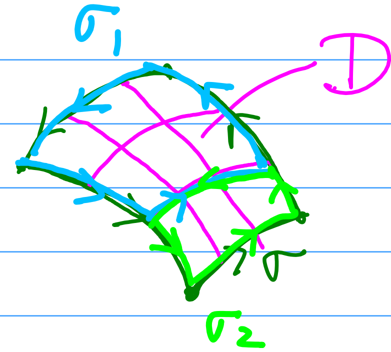


Nota: $\left[\operatorname{rot}(F)(P) = \dfrac{\text{Trabajo realizado por } F \text{ en la ruta de un rectángulo pequeño } R \text{ alrededor de } P}{\text{Área}(R)} \right]$

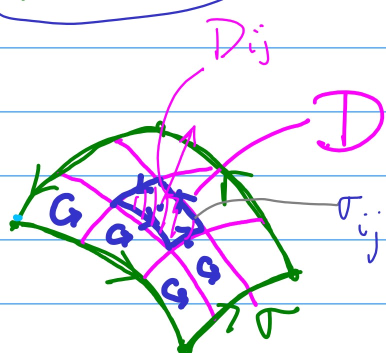
Qué tanto gira F cerca de P. "rotacional" de F.

Qué pasa en 3D?





$$\int_\sigma F\,ds \overset{?}{=} \int_{\sigma_1} F\,ds + \int_{\sigma_2} F\,ds$$



$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_{\sigma_{ij}} F\,ds$$

$$\xrightarrow{(1)} \iint_{D_{ij}} \underbrace{(\nabla \times F)}_{\text{Algo}(P)}\, d\vec{S}$$

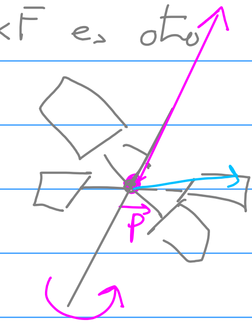
$$\iint_D \nabla \times F\, d\vec{S} =$$

Para un campo vectorial F en $\mathbb{R}^3$

$\left[\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F \text{ es un VECTOR} \right]$

$\left[(\nabla \times F) \cdot \hat{N} = \lim_{R \to 0} \left[\text{Trabajo realizado por } F \text{ a lo largo de un círculo de radio } R \text{ en el plano } \perp \text{ a } \vec{N} \Big/ \text{Área círculo} \right] \right]$

Si F es campo vectorial rot(F) = ∇×F es otro



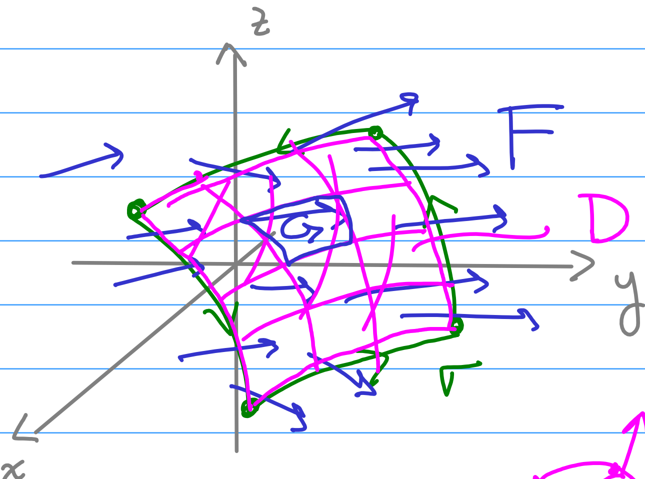
$\|\nabla\times F(p)\| \sim$ velocidad de rot

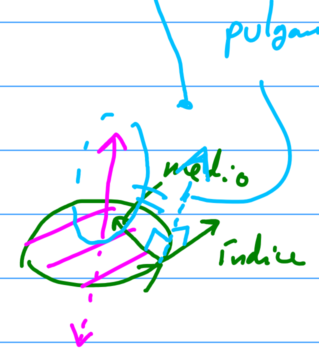
$\nabla\times F(p) \sim$ eje rotación

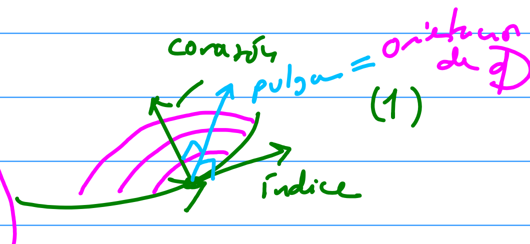
en $\mathbb{R}^3$

Teorema [de Stokes] Sea σ una curva cerrada orientada y sea F un campo vectorial. Si D es una superficie con frontera σ y las orientaciones de σ y D son compatibles y F es diferenciable en D entonces

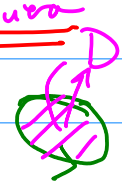
$$\left[\int_\sigma F\,ds = \iint_D \underbrace{[\nabla\times F]}_{\text{rotacional}}\,dS\right]$$







Obs: Hay muchos D's posibles, cualquiera funciona

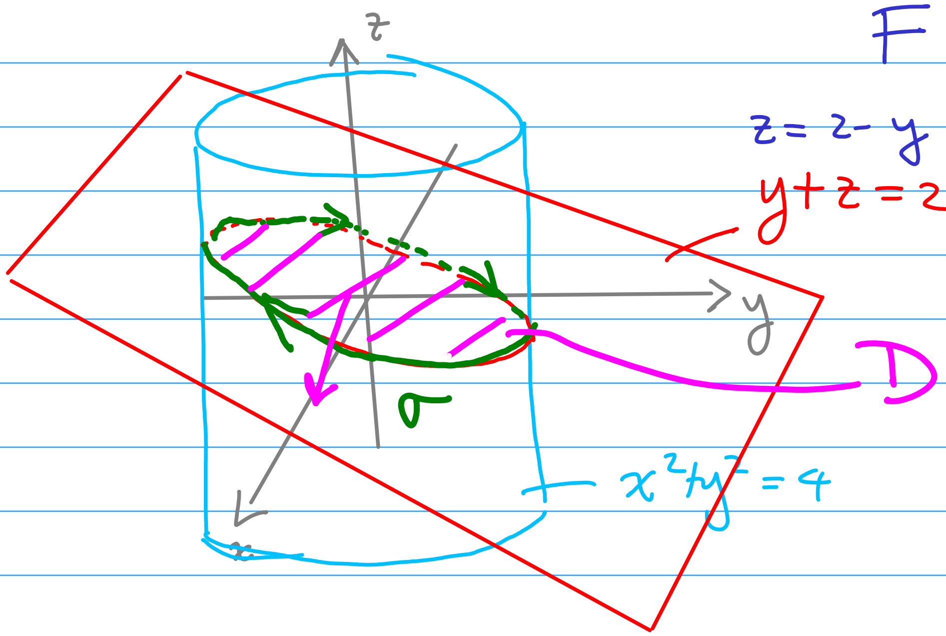


Ejemplo (básico Teo de Stokes).

Calcule $\int_\sigma F\, d\vec{s} =$ donde

$F(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$ y

σ es la curva de intersección del plano $y+z=2$ y el cilindro $x^2+y^2=4$ orientada en la dirección de las manecillas del reloj vista desde encima.



Sol:

Sea D la parte del plano $y+z=2$ encerrada por σ con la orientación del dibujo.
Como F tiene componentes polinomiales es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y por ello en D así que podemos aplicar Stokes.

$$\int_\sigma F\, ds = \underbrace{\iint_D \nabla \times F \, d\vec{S}}_{\text{calculamos esto.}}$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(1+2y)$$

$$= (0, 0, 1+2y)$$

Parametrizamos D así:

$(x,y,z) \in \underline{D}$ $\quad [x^2+y^2 \leq 4]$ $\quad [z = 2-y]$

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = (x, y, 2-y) \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases} \qquad A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_x = & (1, & 0, & 0) \\ \Phi_y = & (0, & 1, & -1) \end{array}$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (0, 1, 1)$$

$$\iint_A (0, 0, 1+2y) \cdot (0, 1, 1)\, dA =$$

$$\iint_A (1+2y)\, dA = \iint_A 1\, dA + \underbrace{2 \iint_A y\, dA}_{0}$$

$$= \pi 2^2 = 4\pi$$

Joules