Hoy: ¿Cómo visualizar $Df(\vec{a})$ para funciones de dos tipos?

Recuerde que, si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ entonces

$$f(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n), \quad \dots \quad, f_m(x_1,\dots,x_n))$$

$$Df(\vec{a}) = \begin{array}{cc} & \overbrace{\qquad \quad j \qquad}^{n} \\ m \left\{ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \right. & \begin{bmatrix} & & \\ & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Queremos entender $Df(\vec{a})$ para dos tipos especiales de funciones: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

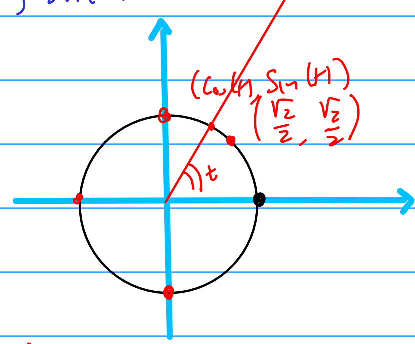
(1) Curvas parametrizadas $(n=1)$

Recuerde que una curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$ es una función $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$$

"Vector posición de una partícula en el instante t"

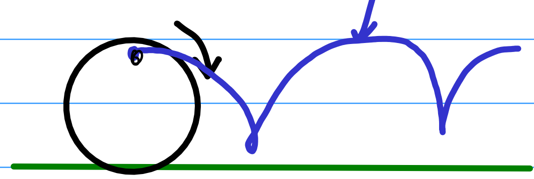
Ejemplo: $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$



$\sigma(0) = (1,0)$ $\quad \sigma(\frac{\pi}{4}) =$

$$\eta(t) = (\cos(t), \sin(t), t).$$

Ejercicio: "Encuentre $\sigma(t)$ que parametrice esta curva"



$$\sigma(t) = (t^2, \operatorname{Sh}(t), \log(1+t))$$

Qué es la derivada de una curva parametrizada?

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$$

$$D\sigma(t^*) = \begin{bmatrix} \sigma_1'(t^*) \\ \sigma_2'(t^*) \\ \sigma_3'(t^*) \end{bmatrix}$$

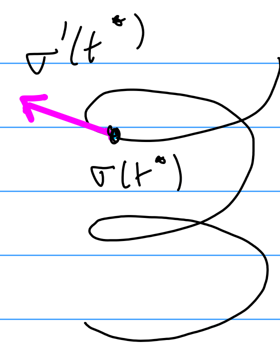
La derivada de σ en t^* es un vector, que denotamos $\overrightarrow{\sigma'(t^*)}$

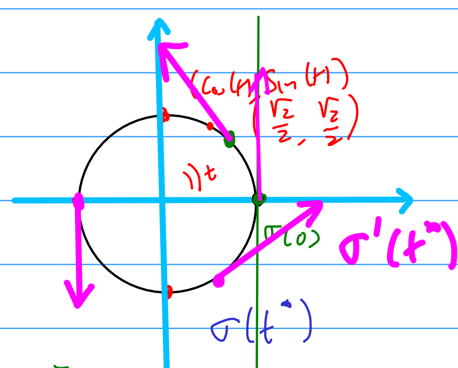
Obs: Como σ depende $\underbrace{\text{sólo de } t}_{\text{1 sola variable!}}$ escribir $\sigma'(t)$ no es ambiguo.

Ejemplo: $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$$\overrightarrow{\sigma'(t)} = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$





$$\sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Hecho: El vector $\sigma'(t^*)$ es el vector velocidad de la curva $\sigma(t)$ en el instante $t = t^*$

(2) Funciones escalares $(m=1)$

Recuerde que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama función escalar

$f(x,y,z) =$ "Temperatura del punto (x,y,z) en °C"

Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Cómo interpretar $Df(\vec{a})$? Vector fila

$$Df(\vec{a}) = f\begin{array}{cc} x_1 \;\cdots & x_n \\ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \right. & \left. \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right] \end{array}$$

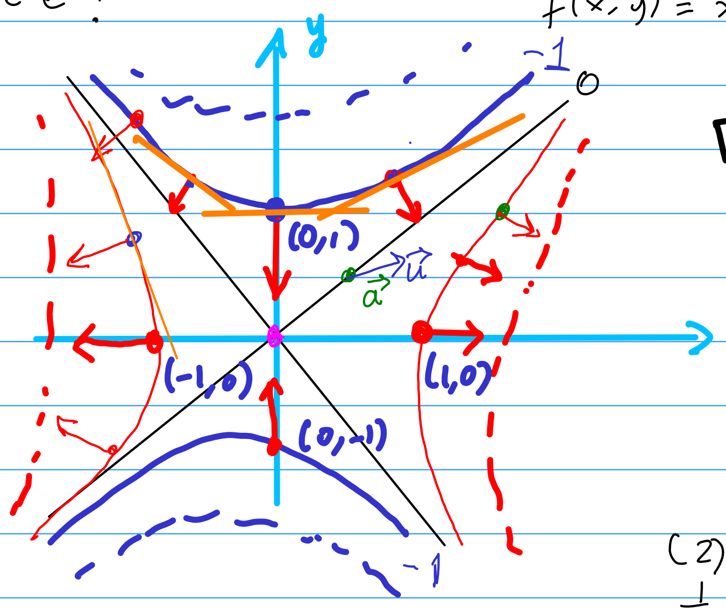
Def: El gradiente de una función escalar f en el punto $\vec{a}$ es

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

vector columna con n componentes.

Cómo visualizar $\nabla f(\vec{a})$ y qué propiedades tiene?

$f(x,y) = x^2 - y^2$



$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

Obs:

(1) El gradiente de f en $\vec{a}$ apunta hacia donde la función crece desde $\vec{a}$

(2) El gradiente de f en $\vec{a}$ es $\perp$ al conjunto de nivel por $\vec{a}$.

* <u>Teorema</u> [del gradiente] Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable y $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$.
entonces

(1) $\nabla f(\vec{a})$ apunta a la dirección de MÁXIMO crecimiento de f iniciando en $\vec{a}$

(2) $\nabla f(\vec{a})$ es el vector normal al plano tangente en $\vec{a}$ del conjunto de nivel de f que pasa por $\vec{a}$.

<u>Obs:</u> Más generalmente que (1), conocer el gradiente nos permite calcular cómo cambia la función en cualquier dirección unitaria $\vec{u}$ arrancando en $\vec{a}$

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \text{Derivada direccional de } f \text{ en dirección } \vec{u} \text{ iniciando en } \vec{a}$$

$$\| $$

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a})$$

*

Ejercicio:

posición $(x(t), y(t))$ de una partícula

Sea $\sigma(t)$ una curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$

y f una función escalar en $\mathbb{R}^2$

temperatura de (x,y)

$$\begin{tikzcd} t \in \mathbb{R} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\#"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$h(t) = f(\sigma(t))$$

"Temperatura de la partícula en el instante t"

$h(t) = f(\sigma(t))$

(a) Use regla de la cadena para calcular

$$h'(t^*) = Dh(t^*) = Df\left(\sigma(t^*)\right) D\sigma(t^*)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\sigma(t^*)) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\sigma(t^*)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1'(t^*) \\ \sigma_2'(t^*) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\sigma(t^*))\,\sigma_1'(t^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\sigma(t^*))\,\sigma_2'(t^*)$$

$$= \nabla f\left(\sigma(t^*)\right) \bullet \sigma'(t^*)$$

PRODUCTO PUNTO

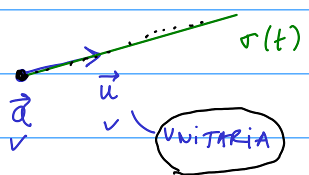
$$\boxed{h'(t^*) = \nabla f(\sigma(t^*)) \cdot \sigma'(t^*)}$$

Cómo varía f a lo largo de σ ?

$$\sigma(t) = \vec{a} + t\,\vec{u}$$

$$\sigma'(t) = \vec{u}$$

$$\boxed{h(t) = f(\sigma(t))}$$



$$\boxed{h'(0) \overset{?}{=} \left[\nabla f(\vec{a}) \bullet \vec{u}\right]}$$

$$\|\nabla f(\vec{a})\| \|\vec{u}\| \cos\theta$$

<u>Concluimos:</u> $$\boxed{D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}.}$$

unitario