(1) [Ejercicio clase anterior (Teorema de Gauss)]

(2) Repaso teoría de integración

$\vec{x} = (x, y, z)$

Clase anterior $\quad \underbrace{H(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}} = \overbrace{\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}}$

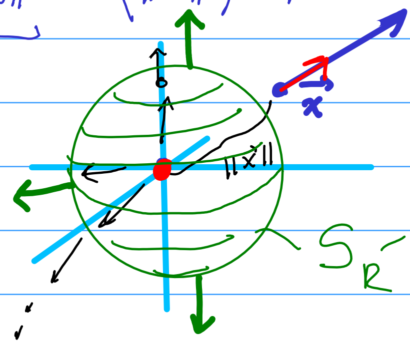
Fuerza expulsada por carga puntual

Causada por carga en el origen

(A)

$$\rightarrow \iint_{S_R} \vec{H}\, d\vec{S} = 4\pi$$

Para todo R



S_R esfera de radio R centrada en $(0,0,0)$.

(B)

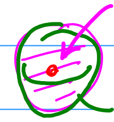
$$\rightarrow \operatorname{div}(\vec{H}) \overset{\text{cálculo}}{=} 0$$

$$H(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3} = \frac{(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} =$$

$$= \left(\frac{x}{\left(\sqrt{}\right)^3}, \frac{y}{\left(\sqrt{}\right)^3}, \frac{z}{\left(\sqrt{}\right)^3} \right)$$

$$\operatorname{div}(H) = \nabla \cdot H = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\left(\sqrt{}\right)^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\left(\sqrt{}\right)^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\left(\sqrt{}\right)^3}\right) = 0$$

Por Teo Gauss,

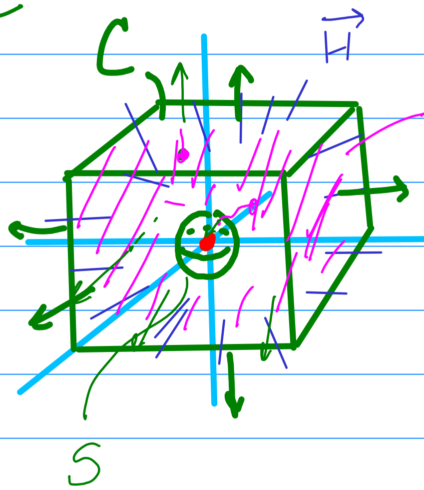


$$\underbrace{\iint_{S_R} \vec{H}\, d\vec{S}}_{=4\pi} \;\cancel{=}\; \iiint_{B_R} \underbrace{\operatorname{div}(H)}_{=0}\, dV$$

porque H no es diferenciable en B_R

(c) Sea C la frontera de $\left\{(x,y,z): \begin{matrix} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \\ -2 \le z \le 2 \end{matrix}\right\}$ orientada hacia afuera

$$\iint_C \vec{H}\, d\vec{S} \stackrel{?}{=}$$



E = Región sólida dentro del cubo y afuera de la esfera

$\vec{0} \notin E$

luego $\vec{H}$ es diferenciable en E

$\Downarrow$

En E sí podemos usar Teo de Gauss

$$\left[\, \underline{\partial E} = \underset{\text{orientación hacia afuera}}{C} \cup \left[\underset{\text{orientados hacia adentro}}{S}\right] \right]$$

$$\iint_{\partial E} \vec{H}\, d\vec{S} = \iiint_E \underbrace{\cancel{\operatorname{div}(\vec{H})}}_{0 \text{ (por (B))}} dV$$

$\parallel$

$$\left[\iint_S \vec{H}\, d\vec{S}\right] + \iint_C \vec{H}\, d\vec{S} = 0$$

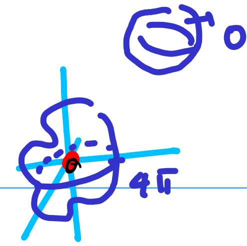
$\downarrow$

$$-4\pi + \iint_C \vec{H}\, d\vec{S} = 0$$

porque S está orientada hacia adentro

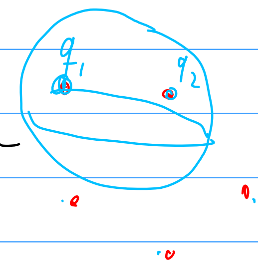
$$\Rightarrow \boxed{\iint_C \vec{H}\, d\vec{S} = 4\pi}$$

Concluimos que si S es una superficie cerrada cualquiera entonces



$$\underset{S}{\iint} \vec{H}\, d\vec{S} = \begin{cases} 0, & \text{si } S \text{ no encierra } \vec{0} \\ 4\pi, & \text{si } S \text{ encierra } \vec{0} \end{cases}$$

S orientada hacia afuera



$$H(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

Ley de Coulomb
"Carga Q en $\vec{0}$"

<u>Teorema</u> [Ley de electromagnetismo de Gauss]
El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por S

(2)

Repaso integración

(2)

$$\iiint\cdots\int F \, d\xi$$

F: función que estás integrando

R: Región de integración

F \ R	Funciones escalares $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$	Campos vectoriales $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
Regiones sólidas $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$	(Parcial 2) $\iiint_E f \, dV$	
Curvas Parametrizadas $\sigma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n=2,3$	$\int_\sigma f \, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \lVert \sigma'(t) \rVert dt$	$\int_\sigma F \, d\vec{s}$ * Aplicación: TRABAJO
Superficies Parametrizadas T $\begin{cases} \Phi(u,v): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \in D \end{cases}$	$\iint_T f \, dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \lVert \Phi_u \times \Phi_v \rVert du\,dv$	$\iint_T F \, d\vec{S}$ * Aplicación: FLUJO

Aplicaciones:
- Masa total
- Longitud, área, Vol
- Centro de masa
- Momentos de inercia
- Probabilidades (esperados, varianzas)

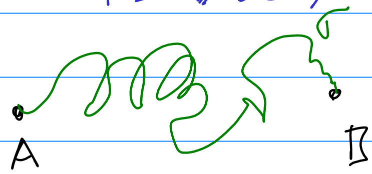
* Técnicas especiales de cálculo

* Técnicas especiales de cálculo

(a) Para calcular trabajo

(a.1) Si F es un campo conservativo

(i.e. existe una función escalar $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $F = \nabla U$)



$$\int_\sigma F\, ds = U(B) - U(A)$$

¿Cómo saber si F es conservativo?

Lema: (1) Si $\nabla \times F \neq \vec{0} \Rightarrow F$ NO ES conservativo

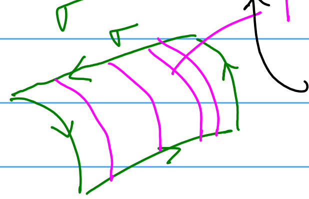
(2) Si $\nabla \times F = \vec{0}$ Y F está definida en región sin huecos $\Rightarrow F$ SÍ ES conservativo.

Obs. $\nabla \times F = \vec{0} \Rightarrow$ Ni idea?

(a.2) Teo de Green y Stokes

Si σ es una curva cerrada que sea frontera de T entonces

$$\int_\sigma F\, d\vec{s} = \iint_T \nabla \times F\, dS$$



si: (1) Las orientaciones de σ y T son compatibles

(2) F es diferenciable en T.

(b) Para cálculo de flujos

Teorema de Gauss:

Si T es la superficie de frontera de una región sólida E entonces

$$\iint_T F\, d\vec{S} = \iiint_E div(F)\, dV$$

si:

(1) T esta orientada hacia afuera de E

(2) F es diferenciable en E