Hoy: (1) Métodos para establecer continuidad
(2) Funciones diferenciables.

[Recuerde que "f es continua en $\vec{x}=\vec{a}$"]

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$

Pregunta: ¿En qué lugares (x,y,z) es continua la función $g(x,y,z) = xy + \sin(xyz)$?

$g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

[¿Cómo verificar si F es continua?]

Teorema: Las siguientes afirmaciones son verdaderas

(1) Las siguientes funciones son continuas:

(1.1) polinomios $p(x)$ (x^2-3x+7)

(1.2) $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x

(1.3) $\sqrt{x}$, si $x \geq 0$

(1.4) Funciones lineales $(3x+7y-5z)$

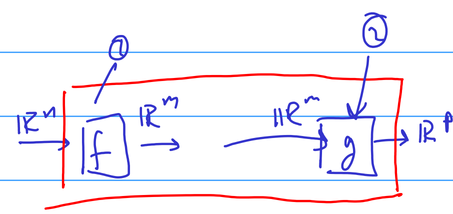
(2) Si las funciones escalares f y g son continuas entonces

$f+g$
$f-g$ son continuas
$f\cdot g$

Adicionalmente $\frac{f}{g}$ es continua en todos los $\vec{x}$ con $g(\vec{x}) \neq 0$.

(3)

$$\begin{tikzcd}
\overset{\vec{a}}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h=g\circ f"'] & \overset{f(\vec{a})}{\mathbb{R}^m} \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}$$



$h(x) = g(f(x))$ $\quad g(f(\vec{a}))$

Si f es continua en $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ y g es continua en $f(\vec{a})$ entonces h es continua en $\vec{x}=\vec{a}$.

(4) Si $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

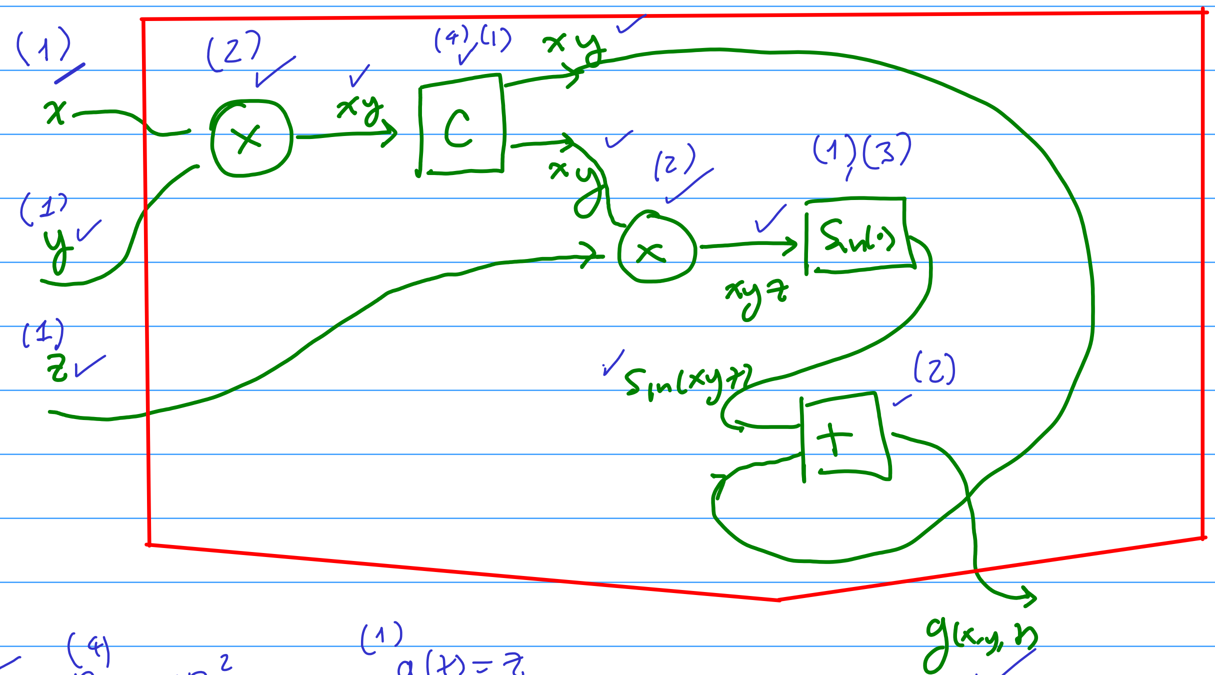
$$F(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, \underbrace{F_m(\vec{x})}_{\text{componentes y son funciones escalares}})$$

F es continua $\iff$ F_i son continuas para $i = 1, \dots, m$

Ej ✓

$$F(x,y,z) = (\underbrace{xy + \sin(xyz)}, \underbrace{z^3}_{(1)\,✓})$$

Sol: $g(x,y,z) = xy + \sin(xyz)$



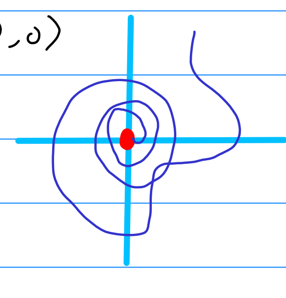
(4) $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(z) = (z,z)$

(1) $a(z) = z$

* Ejercicio:

$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

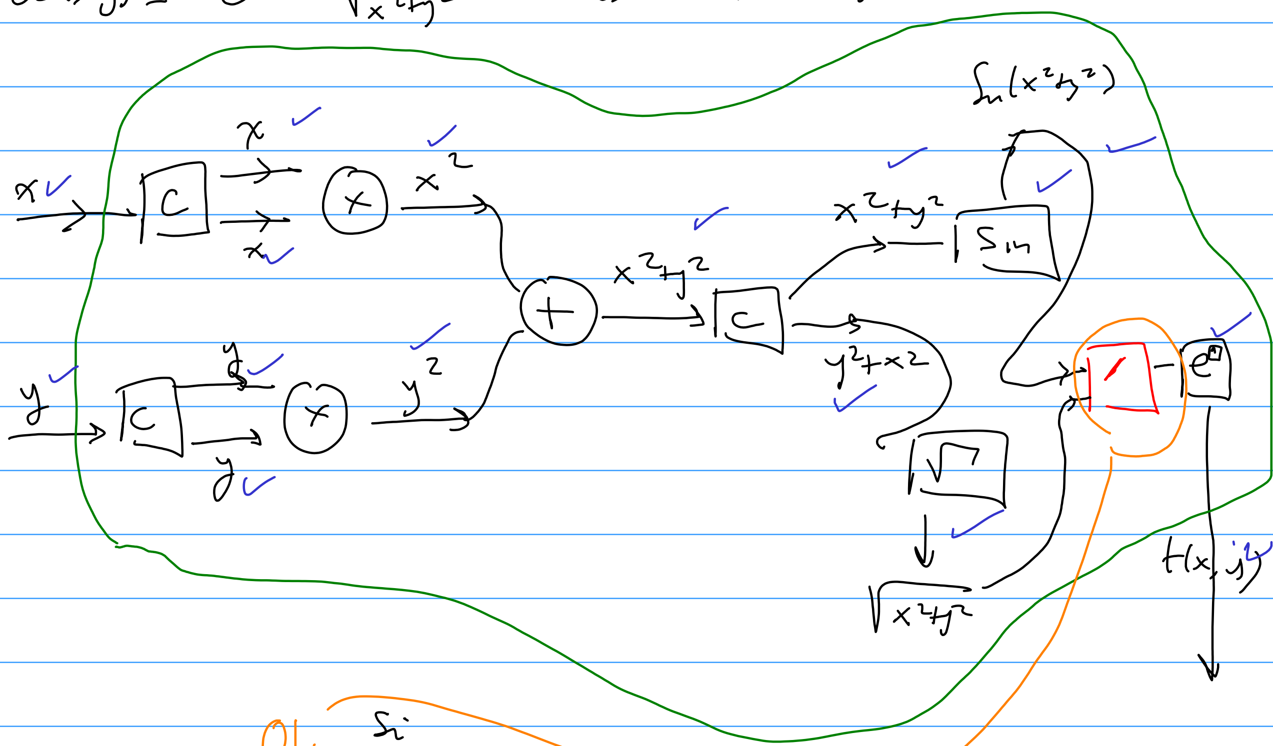
$$t(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Demuestra que t es continua en todos los puntos del plano.

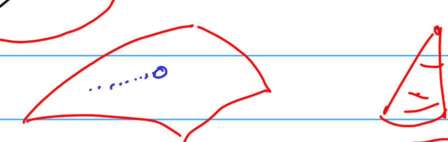
(1) Cómo se comporta $t(x,y)$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$?

$$t(x,y) = e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$ es continua?



Obs: Si $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ es continua, entonces $t(x,y)$ ✓

Gráfica (f)



(2) Cómo se comporta $t(x,y)$ cerca de $(0,0)$

$$t(0,0) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} t(x,y) = \left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right] =$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

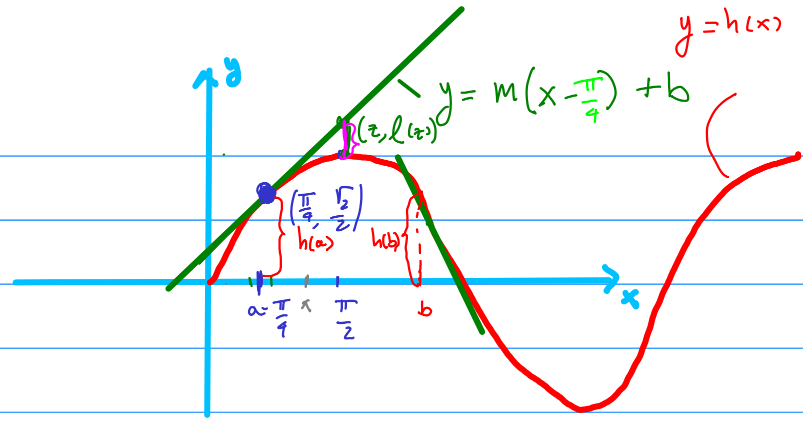
$$\| \quad \lim_{r\to 0} e^{\frac{\sin(r^2)}{r}}$$

$$= \exp\left(\lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r}\right) \underset{\text{L'Hopital}}{=} \exp\left(\lim_{r\to 0} \frac{\cos(r^2)\,2r}{1}\right)$$

$$\| \quad \exp(0) = e^0 = 1$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h(x) = \operatorname{Sin}(x)$



La IDEA CENTRAL del cálculo diferencial es que hay muchas funciones que pueden aproximarse muy bien mediante funciones lineales afines cerca de un punto.

Nos explica como construir esas aproximaciones...

$\ell(x) = m(x - \frac{\pi}{4}) + b$?

Problema: Encuentre la función lineal afín que mejor aproxima a $h(x) = \operatorname{Sin}(x)$ cerca de $x = \frac{\pi}{4}$.

Sol. $\ell(x) = m\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ← $\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{4})$ porque la recta pase por $(\frac{\pi}{4}, \operatorname{Sin}(\frac{\pi}{4}))$

m: $h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\ell(x) = \Big[\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{lineal}}\Big] \approx \operatorname{Sin}(x)$ cerca de $x = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + 0.0001\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(0.0001)$

¿Qué quiere decir que $\ell(x)$ aproxima a $h(x)$ muy bien cerca de $x = a$?

$$\left[\lim_{x \to a} \frac{|h(x) - \ell(x)|}{|x - a|} = 0\right]$$

$\ell(x) = m(x - a) + h(a)$??

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - [m(x-a) + h(a)]}{(x - a)} = \lim_{x \to a}\left(\frac{h(x) - h(a)}{x - a} - \frac{m\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$h'(a) \quad \text{"} \quad \left[\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}\right] = m$$