PARCIAL I: OPTIMIZACION CONVEXA 2

Reglas:

- Puede discutir el parcial con sus compañeros asi como consultar cualquier libro o referencia en linea (asegúrese, eso si de citar sus fuentes de manera precisa).
- Debe entregar los ejercicios por escrito de manera individual (un solo documento por cada estudiante).
- El propósito de este examen es que aprenda cosas nuevas. Actue consecuentemente para lograr este objetivo.
- Los parciales deben entregarse el Viernes 12 de Septiembre a Magneli antes de las 5pm (si no estan en Bogota, deben entregarlo por e-mail a mi en esa misma fecha). NO se aceptaran examenes entregados en otras fechas.
- Los problemas numerados se refieren al libro [DGL] "A probabilistic theory of pattern recognition" de Devroye, Györfi y Lugosi. Los problemas más dificiles estan acompañados por hints en el libro.

Ejercicios:

(1) Demuestre que, si $Z = f(X, Y)$ entonces la variable aleatoria $W = \mathbb{E}[Z|X]$ se calcula a.s., siguiendo los siguientes dos pasos:
  (a) Calcule $g(x) = \mathbb{E}[f(x, Y)]$
  (b) Defina $W = g(X)$.

(2) Problema 8.2 (generalización de la desigualdad de Hoeffding).

(3) Problema 12.10 (si sabemos que $X \geq 0$ y que $\mathbb{P}(X > t)$ decrece muy rápido en t entonces podemos acotar $\mathbb{E}[X]$)

(4) Problema 12.15 (Version mejorada de la desigualdad principal)

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{A\in\mathcal{A}} |\nu_n(A) - \nu(A)| > \epsilon\right\} \leq cs(\mathcal{A}, n^2)e^{-2n\epsilon^2}$$

para $c \leq 4e^{4(\epsilon+\epsilon^2)}$).

(5) Demuestre que la dimension de Vapnik-Chervonnenkis de la colección de half-spaces cerrados de $\mathbb{R}^d$ es $d + 1$.

(6) Encuentre una familia de funciones $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con un solo parámetro real t tal que la dimension VC de la clase de conjuntos $\mathcal{A} := \{\{x : f_t(x) \geq 0\} : t \in \mathbb{R}\}$ sea infinita (asi que el número de parámetros no esta directamente relacionado con la dimension VC en general, salvo por clases definibles en estructuras o-minimales).

(7) Problema 17.1 (construcción de un conjunto ortonormal completo en $\mathbb{R}^d$ a partir de uno en $\mathbb{R}$).