Hoy: ¿Cómo resolver problemas de optimización?

Problema: (a) ¿Cuál es el valor máximo que alcanza la función $f(x,y)$ en la región $g(x,y) \le C$?

(b) En qué puntos se alcanza?

$g(x,y) = C$ [restringición]

[función objetivo]

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y)$

$g(x,y) < C$

Método de solución:

(1) Buscamos candidatos posibles

(1.a) En el interior de la región $g(x,y) < C$

- Encontramos todas las soluciones de la ecuación

Puntos críticos

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \vec{0}}$$

(1.b) En la frontera de la región

- Encontramos todas las soluciones de

Puntos críticos de Lagrange

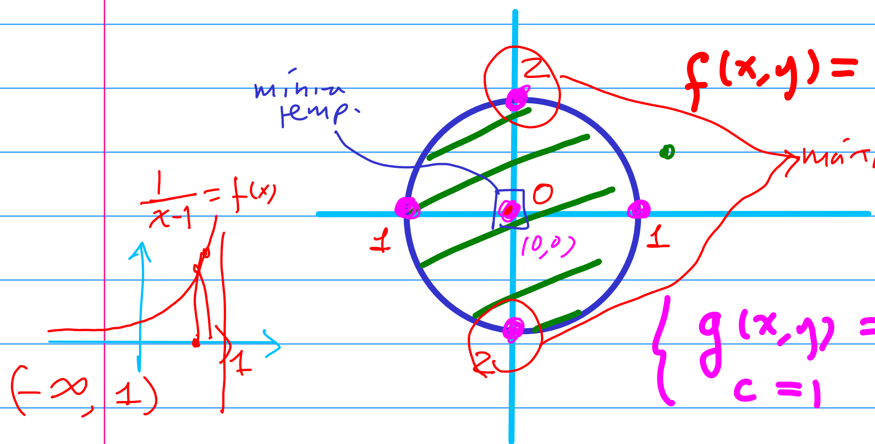
$$\begin{cases} g(x,y) = C \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases}$$

CANDIDATOS $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N$

(2) Comparamos los valores de f en $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N$ y escojo aquellos cuyo $f(w_j)$ es máximo

Teorema: Si f y g son diferenciables ese proceso encuentra todos los puntos en que f es máxima en la región.

[Ejemplo 1] Encuentre el valor máximo de la función x^2+2y^2 en la región $x^2+y^2\leq 1$



$f(x,y)=x^2+2y^2$

$\begin{cases} g(x,y)=x^2+y^2 \\ c=1 \end{cases}$

Solución:

(1) Buscamos candidatos

(1.a) En el interior $x^2+y^2<1$

$$\nabla f(x,y)=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}2x\\4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x=0\\4y=0\end{cases} \iff \boxed{(x,y)=(0,0)}$$

$0^2+0^2<1$ ✓ así que en int.

$\vec{w}_1=(0,0)$ ✓

(1.b) En el borde $x^2+y^2=1$

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda \nabla g(x,y)\\ g(x,y)=c\end{cases} \qquad \begin{cases}\begin{pmatrix}2x\\4y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=\lambda 2x\\4y=\lambda 2y\\x^2+y^2=1\end{cases} \iff \quad 2x-2x\lambda = \boxed{0=2x(1-\lambda)}$$

$x=0$?

NO $x\neq 0$

$x=0$ SI

$x \neq 0$

$0 = 1 - \lambda \iff \lambda = 1$

$\left\{\begin{array}{l} 4y = 2y \iff y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \iff x = \pm 1 \end{array}\right.$

$\vec{w_2} = (-1, 0)$

$\vec{w_3} = (1, 0)$

$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 4y = \lambda 2y \iff \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right.$

$\lambda = 2$

$[y^2 = 1] \iff y = \pm 1$

$\vec{w_4} = (0, 1)$

$\vec{w_5} = (0, -1)$

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$

(2) Comparamos valores de f en los candidatos:

$f(0,0) = 0$

$f(-1,0) = 1$

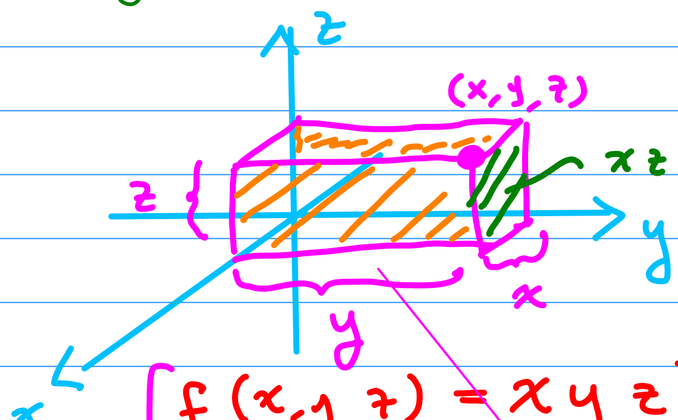
$f(1,0) = 1$

$f(0,1) = 2$

$f(0,-1) = 2$

Concluimos: El valor máximo de f en la región es 2 y se alcanza en $(0,-1)$ y $(0,1)$.

Ejemplo 2: Queremos diseñar una caja sin tapa usando $\leq 12\, m^2$ de cartón. ¿Cómo deberíamos construirla para que su volumen sea lo más grande posible?



$f(x,y,z) = xyz$ ← Queremos maximizar esto.

$\underbrace{2xz + 2yz + xy}_{g(x,y,z)} = 12$

$\max \ f(x,y,z) \quad s.a. \quad g(x,y,z) = 12$

$x,y,z \geq 0$

Solución:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = c \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2z+y \\ 2z+x \\ z(x+y) \end{bmatrix} \\ 2xz + 2yz + xy = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & yz = \lambda(2z+y) \\ (2) & xz = \lambda(2z+x) \\ & xy = \lambda(2(x+y)) \\ & 2xz + 2yz + xy = 12 \end{cases} \iff \begin{matrix} xyz = \lambda x(2z+y) \\ xyz = \lambda y(2z+x) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lambda x(2z+y) = \lambda y(2z+x) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \ \ \| \\ 2\lambda z(x+y) \end{cases}$$

$\lambda \overset{?}{=} 0$

$\lambda = 0$

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$2xz + 2yz + xy = 12$

Volumen 0

$\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x(2z+y) = y(2z+x) \\ y(2z+x) = 2z(x+y) \\ 2xz + 2yz + xy = 12 \end{cases}$$

② $2z\cancel{y} + xy = 2zx + 2z\cancel{y}$

① $\{2zx + \cancel{xy} = 2zy + \cancel{xy}\}$

$[2z(x-y) = 0]$

$z \overset{?}{=} 0$

$z = 0$

$Vol = 0$

$z \neq 0$

$[x - y = 0]$

$xy = 2zx$

$2xz + 2yz + xy = 12$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = 2zx \\ 2xz + 2yz + x^2 = 12 \end{cases}$$

$$\boxed{x(x - 2z) = 0}$$

$x = 0$ → Vol $= 0$ ✗

$x \neq 0$ →

$$\begin{cases} x = 2z \\ x = y \\ 2xz + 2yz + x^2 = 12 \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 + x^2 = 12$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

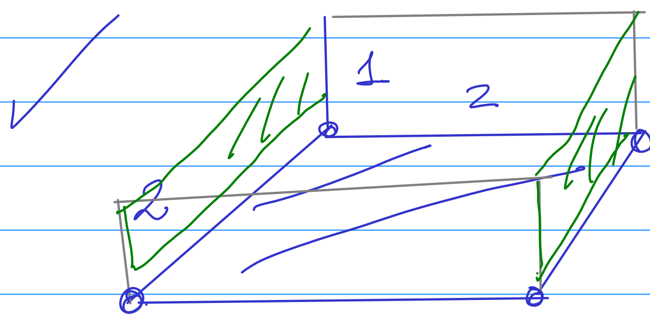
!!

Concluimos que:

El máximo volumen posible es $xyz = 4\ m^3$

y las dimensiones de la caja son:

$x = 2$, $y = 2$, $z = 1$



Área sup.

$$4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12\ cm^2$$