Ejemplos del Teorema de Stokes:

[de Stokes]

Teorema: Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y sea C su curva de frontera. Sea $H: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable en Σ. Si las orientaciones de C y de Σ son compatibles (regla de la mano derecha) entonces

$$\int_C H \, d\vec{s} = \iint_\Sigma [\nabla \times H] \, d\vec{S}$$

Ejercicio:

Evalue $\int_C F \cdot d\vec{s}$ donde $F(x,y,z) = -y^2\vec{i} + x\vec{j} + z^2 k$

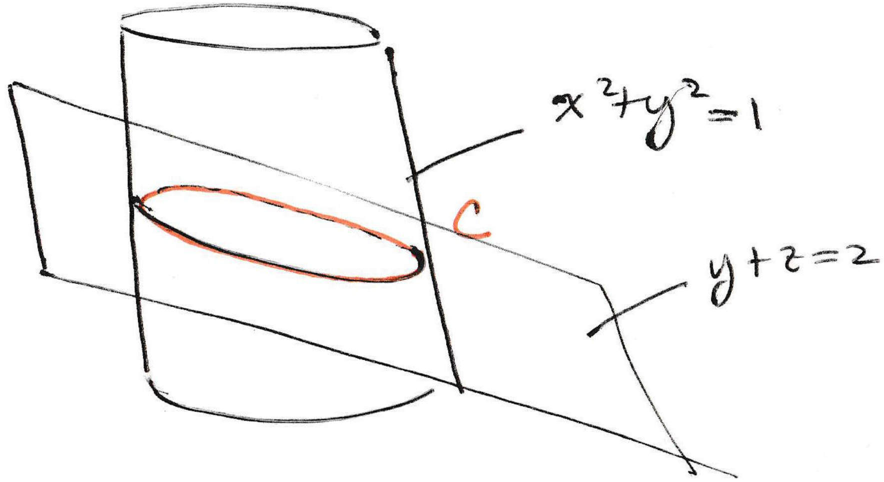
y C es la curva de intersección del plano $y+z=2$

y el cilindro $x^2+y^2=1$ con C orientada en la dirección

de las manecillas del reloj vista desde arriba

Detenga el video y resuélvalo vd. mism@ ...

Sol:



$$F = (-y^2, x, z^2)$$

Sol a: Parametrizamos C y calculamos $\int_C F\,d\vec{s}$

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), 2-\sin(t))$$

$$\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), -\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) = (-\sin^2(t), \cos(t), (2-\sin(t))^2)$$

$$\int_0^{2\pi} F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^3(t) + \cos^2(t) - \cos(t)(2-\sin(t))^2\,dt$$

$$= \dots$$

Sol b:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1+2y)$$

$$\Phi(x,y) = (x, y, 2-y)$$

$$\Phi_x = (1, 0, 0)$$

$$\Phi_y = (0, 1, -1)$$

$$N = (0, 1, 1)$$

$$\iint_D (1+2y)\,dA = \pi + 2\iint_D y\,dA$$

$$= \boxed{\pi} \text{ Joules}$$

Ejercicio: Sea S la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que esta dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ encima del plano $z=0$, orientada hacia arriba.

Sea $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

Calcule
$$\iint_S [\nabla \times F] \, d\vec{S}$$

Detenga el video y resuelva el ejercicio ud mism@.

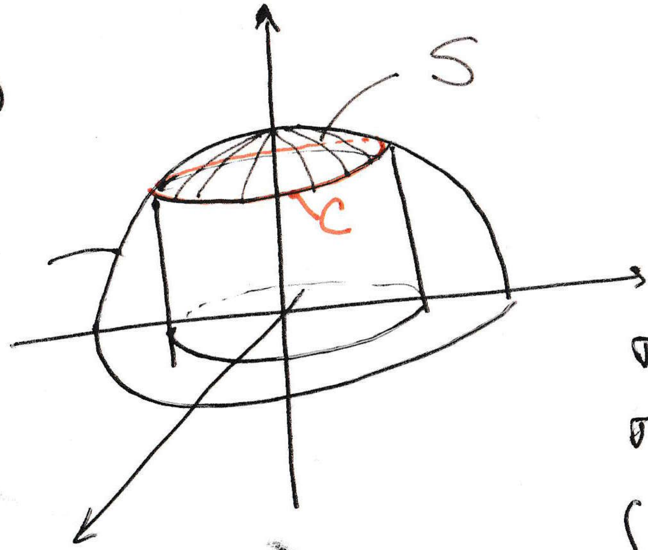
4

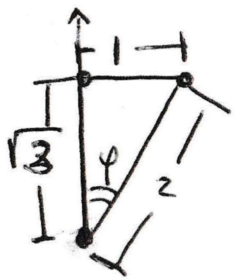
Solución:

(a) Parametrizar la superficie S y hacer la integral

$$F = (yz,\ xz,\ xy)$$

$x^2+y^2+z^2=4$





$$\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\iint_S [\nabla \times F]\, d\vec{S} = \iint_D [\nabla\times F](\Phi(u,v))\cdot \Phi_u\times\Phi_v\, dA = \vdots$$

Φ:

$$\begin{cases} x = 2\sin\varphi\cos\theta \\ y = 2\sin\varphi\sin\theta \\ z = 2\cos\varphi \end{cases}$$

(b) Usar Teo. Stokes.

$$\iint_S [\nabla\times F]\, d\vec{S} = \int_C F\, d\vec{s}$$

Parametrizamos C:

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), \sqrt{3})$$
$$\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$\int_0^{2\pi} F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\, dt =$$

$$F(\sigma(t)) = (\sqrt{3}\sin(t),\ \sqrt{3}\cos(t),\ \sin(t)\cos(t))$$

$$F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t) = -\sqrt{3}\sin^2(t) + \sqrt{3}\cos^2(t)$$

$$\sqrt{3}\int_0^{2\pi}[\cos^2(t)-\sin^2(t)]\, dt = \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\cos(2t)\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin(2t)}{2}\Big|_0^{2\pi} = \boxed{0}$$

6

Solución (a)

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

y por lo tanto $\displaystyle \iint_S [\nabla \times F] \, d\vec{S} = \boxed{0}$