Integrales sobre curvas:

Al leer una integral nuestra atención debe enfocarse en dos lugares

$$\int_{\text{Objeto } M} \text{función } f \; =$$

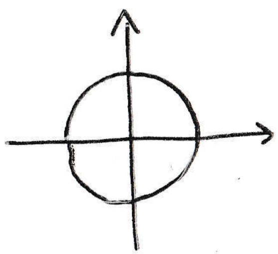
Hasta ahora conocemos básicamente tres tipos

(1) $\displaystyle\int_{[1,2]} \sin(x)\,dx$

$[1,2] \subseteq \mathbb{R}$ 

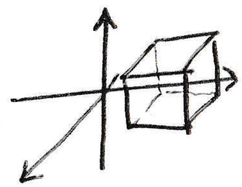
$\sin(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(2) $\displaystyle\iint_A e^{x^2+y^2}\,dA$

 $\subseteq \mathbb{R}^2$

$e^{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(3) $\displaystyle\iiint_E z^2+x^2+y^2\,dV$

 $\subseteq \mathbb{R}^3$

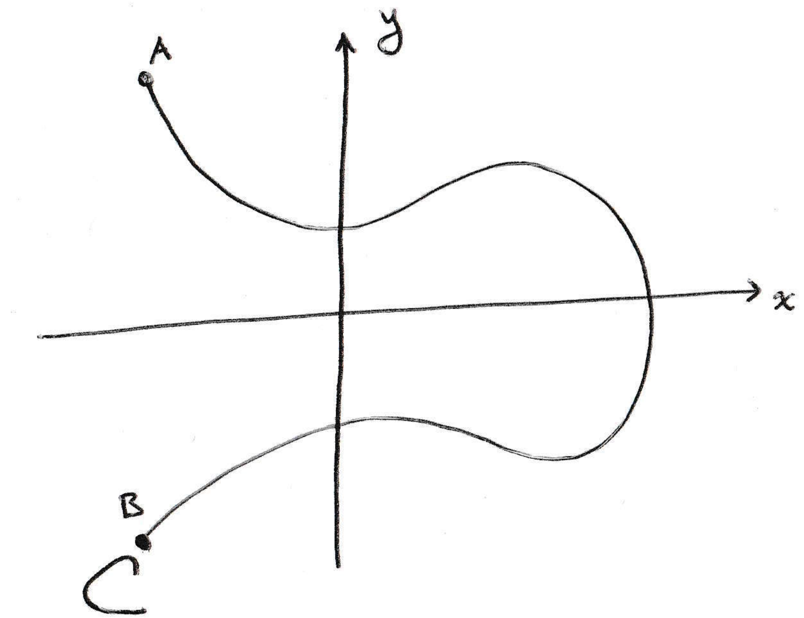
$x^2+y^2+z^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

PREGUNTA:

¿Qué tienen en común estas 3?

En esta clase vamos a responder las siguientes dos preguntas:

Dada la curva C en el plano

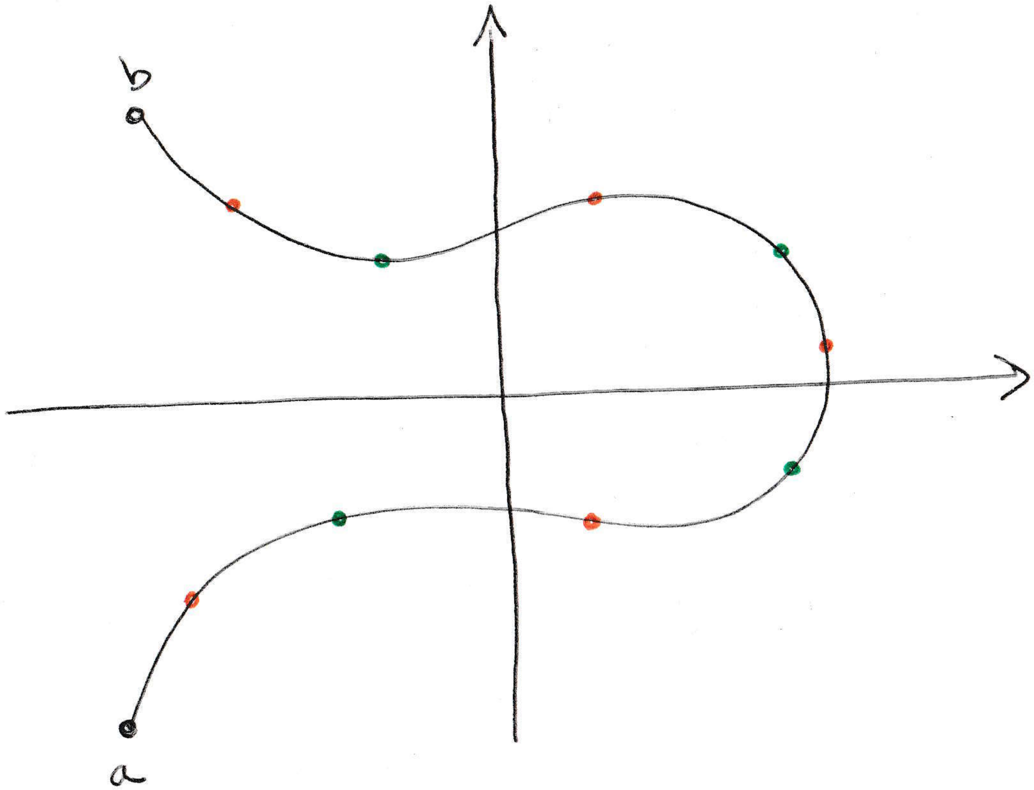


(i) Cuál es la longitud de C ?

(ii) Cual es la masa total de C, si la densidad lineal (en Kg/m) esta dada por

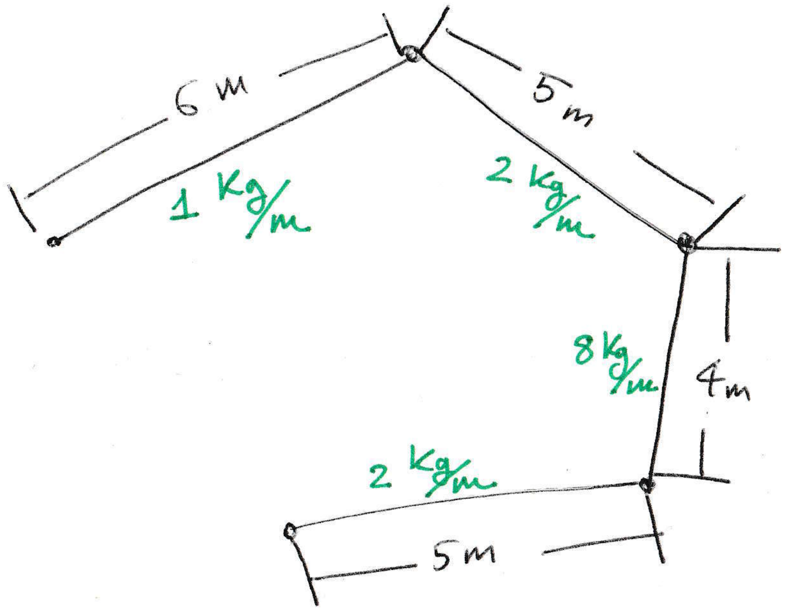
$$g(x,y) = x^2+y^2 \quad ?$$

(iii) Dónde se encuenta el cento de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de C ?



$\rho(x,y) = x^2 + y^2$ $\left(\mathrm{Kg}/\mathrm{m}\right)$

Calcule la masa total del cable.



Motivación:

(0) Calcule la masa total del cable?

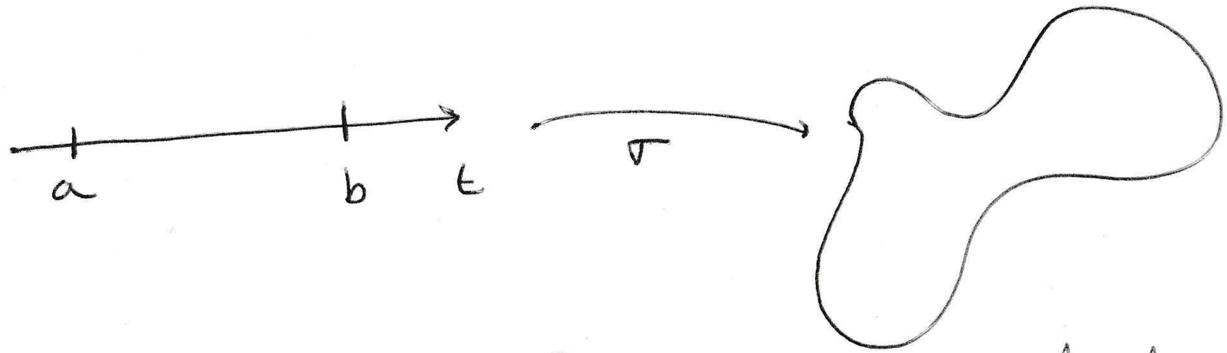
Cómo se calculan ?

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar y $C \subseteq \mathbb{R}^2$ es una curva entonces

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \, \|\sigma'(t)\| \, dt$$

$$\boxed{\int_{\text{Curva}} \text{función escalar} \; ds}$$

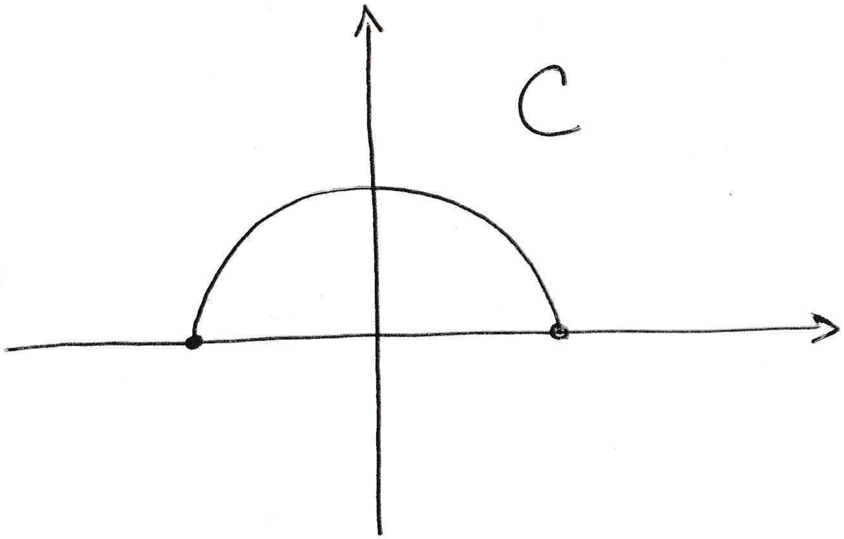
Donde $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización diferenciable de C.



$\boxed{\text{Ejemplo:}}$ Calcule $\int_C (2 + x^2 y) \, ds$ donde C sea la mitad superior del círculo de radio 10 centrado en el origen.

POR FAVOR INTÉNTELO UD MISM@...

Sol Ejemplo 1:



$\sigma(t) = (\qquad , \qquad), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_C (2 + x^2 y)\, ds = \int_0^{2\pi} [2 + \cos^2(t)\sin(t)]\, 10\, dt$$

$$= 4\pi + \left[\left(-\frac{\cos^3(t)}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \right]$$

$$= \boxed{4\pi}$$

$\sigma'(t) = (-10 \sin(t), 10 \cos(t))$

$\|\sigma'(t)\| = 10$

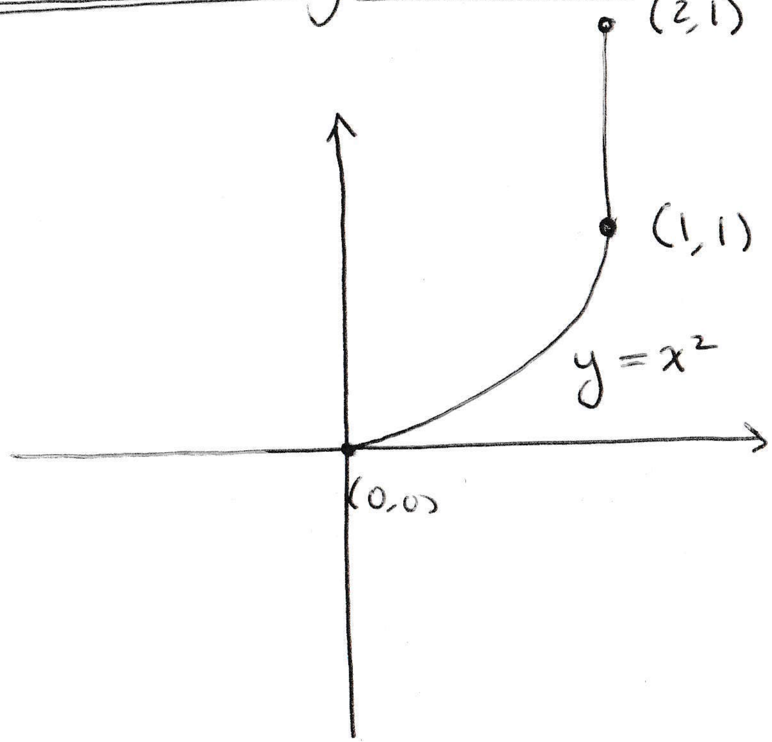
Ejercicio 2:

Sea C el arco de parábola $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ seguido por el segmento de recta que va de $(1,1)$ a $(1,2)$.

Calcule $\displaystyle\int_C 2x \, ds =$

DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVER EL PROBLEMA UD MISM@

Solución del Ejercicio 2:



$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds =$$

Obs: Podemos construir una parametrización "a trozos". En este caso

(a) Parábola C_1: $\sigma(t) = (\quad , \quad)$, t

$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2t \,\|\sigma'(t)\|\,dt, \quad \sigma'(t) = (1, 2t)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,(2t)\,dt = \frac{\frac{2}{3}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{4} = \frac{2}{3}\frac{1}{4}5^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{6}\left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

(b) Recta C_2: $\sigma(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$

$\sigma(t) = (1+t, 1)$ $\quad \|\sigma'(t)\| = 1$, $\quad \int_{C_2} 2x\,ds = \int_0^1 (1+t)\,dt = 1 + \frac{1}{2}$

Ejemplo:

Un cable tiene la forma del semicírculo $x^2+y^2=25$ con $y \geq 0$ y es más ancho en la base que en la punta.
Encuentre, suponiendo que la densidad del cable $\rho(x,y)$ es igual a la distancia entre (x,y) y la recta $y=10$

(a) La masa total del cable

(b) La posición del centro de masa

(c) El momento de inercia alrededor de un eje que pasa por $x=1$, $y=0$ y es $\perp$ al plano (x,y).

POR FAVOR INTÉNTELO UD MISM@