

Vectorial Virtual – Taller 3, parte 3: Aplicaciones de integrales de funciones escalares sobre regiones sólidas

Ejercicio 1

Sea E un cono circular recto con radio de la base R y altura H . Asuma que E tiene como eje de simetría al eje z , que la base circular esta apoyada sobre el plano (x, y) y que la punta esta hacia arriba. Encuentre la posición del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del cono, asumiendo que este tiene densidad constante. (Nota: La respuesta debe ser una función de R y H).

Ejercicio 2 (Distribución Gaussiana en dos dimensiones)

Sea $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

- 1 Calcule $\iint_D f(x, y) dA$ donde D es el disco de radio A centrado en el origen (Nota: La respuesta depende de A).
- 2 Verifique que, cuando $A \rightarrow \infty$ la cantidad calculada en la parte (a) converge a 1.
- 3 Demuestre, utilizando lo que verifico en la parte (2) que $f(x, y)$ es la densidad de probabilidad de un vector aleatorio (X, Y) .
- 4 Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(X)$ y $\text{Cov}(X, Y)$.

Ejercicio 3: Momentos de inercia de cilindros

Calcule la función de densidad y el momento de inercia, alrededor de su eje de simetría de los siguientes sólidos:

- 1 Un cilindro sólido de masa M , radio R y altura L , con densidad constante
- 2 Un cilindro sólido de masa M , radio R y altura L , con densidad proporcional a r (i.e. a la distancia al eje de simetría). Un anillo con masa M radio interior $\frac{R}{2}$, radio exterior R y altura L con densidad constante.

Nota: Las respuestas son funciones de algunas de las variables M , R y L .

Ejercicio 4: Momentos de inercia de esferas

Calcule la función de densidad y el momento de inercia, alrededor de un eje que pasa por el centro de los siguientes sólidos:

- 1 Una esfera sólida de masa M y radio R , con densidad constante
- 2 Un esfera sólida de masa M y radio R con densidad proporcional a ρ (i.e. a la distancia al origen). Un casquete esférico con masa M , radio interior $\frac{R}{2}$ y radio exterior R con densidad constante.

Ejercicio 5: Roller Derby

Si hacemos una carrera entre los objetos de los ejercicios 3 y 4 (todos con masa M y radio R) haciendo que desciendan sobre un plano inclinado rodando sin deslizarse, en qué orden llegan a la meta? Argumente matemáticamente su respuesta usando las fórmulas que calculamos en la magistral.