Soluciones:

$$f(x,y) = \sin\left(x^2+y^2+5x+y\right)$$

(a) Sabemos que $\boxed{D_{\hat{v}} f(0,0) = \hat{v} \cdot \nabla f(0,0)}$

Así que calculamos el gradiente de f en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(x^2+y^2+5x+y\right) \cdot \left[2x+5\right]$$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 5}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(x^2+y^2+5x+y\right)\left[2y+1\right]$$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1}$ así que

$$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$ y por ello

$$D_{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(0,0) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -5\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -4\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-2\sqrt{2}}$$

medida en $°C/m$ (grados centígrados por metro)

(b)

$$l(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y$$

$$l(x,y) = 0 + 5x + 1\cdot y = \boxed{5x + y = l(x,y)}$$

(c) La dirección opuesta al $\nabla f(0,0)$, es decir

$$u = -\frac{\nabla f(0,0)}{\|\nabla f(0,0)\|} = -\frac{(5,1)}{\sqrt{25+1}} = \boxed{\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}}\right)}$$

Solución Problema 2:

(a) $g(u,v) = (\sin(uv),\ \cos(v)\,e^{u})$

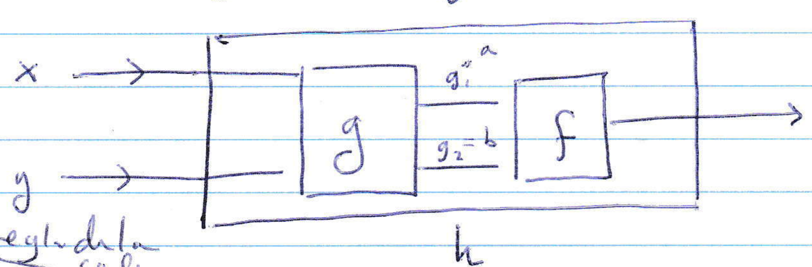
así que $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ luego

$$Dg(0,0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\begin{array}{c|cc} & u & v \\ \hline \sin(uv) & \cos(uv)\,v & \cos(uv)\,u \\ \cos(v)\,e^{u} & \cos(v)\,e^{u} & -\sin(v)\,e^{u} \end{array} = Dg(u,v)$$

$$\boxed{Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

(b) $h(x,y) = f(g(x,y))$. Calcule $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$?



Por regla de la cadena

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial a}(g(0,0))\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}(g(0,0))\frac{\partial g_2}{\partial x}$$

$g(0,0) = (0,1)$ así que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial a}(0,1)\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial b}(0,1)\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0)$$

de la tabla ... II

$$1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) + \pi\,\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0)$$

de la parte (a) concluimos

Soluciones problema 3:

(a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{x^4+3y^4} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^4\cos^2\theta\,\sin^2\theta)}{r^4[\cos^4\theta+3\sin^4\theta]}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(r^4 C_\theta^2 S_\theta^2)\,\cancel{4r^3}\,C_\theta^2 S_\theta^2}{\cancel{4r^3}[\quad]} = \frac{C_\theta^2 S_\theta^2}{\cos^4\theta+3\sin^4\theta}$$

L'Hôpital porque es de la forma $\frac{0}{0}$

No es independiente de θ así que el Límite NO EXISTE.

(b) "La función $h(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(1,2)$ si existe una función lineal afín $\ell_{(1,2)}(x,y) = A+Bx+Cy$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{|h(x,y)-\ell_{(1,2)}(x,y)|}{\|(x,y)-(1,2)\|} = 0$$"

(c) Verificaremos que TODAS las derivadas parciales de $g(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\cos(x^2y^2)\,2xy^2\,[x^4+2y^4] - \sin(x^2y^2)\,4x^3}{[x^4+2y^4]^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\cos(x^2y^2)\,2x^2y\,[x^4+2y^4] - \sin(x^2y^2)\,8y^3}{[x^4+2y^4]^2}$$

Cociente de funciones continuas (num y den son composiciones de polinomios senos y cosenos) y el denominador se desvanece sólo en $x=0,\ y=0$.

Usamos el Teorema que dice que si todas las derivadas

Rúbrica:

PROBLEMA 1

(1.a) +2 Fórmula derivada direccional
+1 Cálculo del gradiente
+1 Unidades $°C/m$.

(1.b) +2 Fórmula que describe la mejor aprox lineal
+2 Cálculo correcto $\ell = 5x + y$.

(1.c) +1 Decir que es la dirección opuesta al gradiente
+1 Cálculo correcto. $\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$.

Problema 2

(2.a) +2 Si el resultado es una matriz de 2×2
+2 Cálculo correcto de $Dg(x, y)$
+1 Cálculo correcto de $Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2.b) +3 Uso de la regla de la cadena para calcular $Dh(x, y)$.
+1 Escoger la entrada correcta de la tabla $\frac{\partial f}{\partial a}(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial b}(0,1)$.
+1 Cálculo correcto. de $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$.

PROBLEMA 3

(3.a) +2 Decir que el límite no existe
+2 Calidad del argumento.

(3.b) $+3/+0$ Verificar si sabe la definición formal de diferenciabilidad.

(3.c) +2 Decir que si todas las derivadas parciales def son continuas entonces f es diferenciable
+1 Argumentar la continuidad de $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.