Álgebra Tensorial: Ejercicios de Clase

Semana 1.

Ejercicio 1.1. Demuestre que existen tensores en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ que no son de rango 1, y caracterice los tensores totalmente descomponibles en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ (es decir, encuentre las ecuaciones que satisfacen los coeficientes de los vectores de rango 1).

Ejercicio 1.2. Teniendo en cuenta que para X, Y y Z variables aleatorias discretas, con $X \in \{1, \dots a\}$, $Y \in \{1, \dots b\}$ y $Z \in \{1, \dots c\}$, se puede construir un tensor de formato $a \times b \times c$, definido en una base, por los coeficientes

$$T_{ijk} = \mathbb{P}\{X = i, Y = j, Z = k\}$$

para $1 \leqslant i \leqslant a$, $1 \leqslant j \leqslant b$ y $1 \leqslant k \leqslant c$. ¿Es verdad que el tensor T_{ijk} es de rango 1 si y sólo si las variables son independientes?

Ejercicio 1.3. Sean U y V espacios vectoriales complejos de dimensión finita. Caracterice los tensores totalmente descomponibles en $U^* \otimes V$ (es decir, encuentre las ecuaciones que satisfacen los vectores de rango 1).

Ejercicio 1.4. Demuestre que para dos espacios vectoriales complejos U y V, el isomorfismo canónico

$$\operatorname{Hom}(U, V) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U^* \otimes V$$

manda las transformaciones lineales con rango $\leqslant k$ (i.e los $T \in \operatorname{Hom}(U, V)$ con $\dim(\operatorname{im}(T)) \leqslant k$) a los tensores que son suma k o menos tensores descomponibles.

Ejercicio 1.5. Demuestre que para todo entero k, el conjunto $\{T \in U^* \otimes V : R(T) \leqslant k\}$ es un conjunto cerrado con la norma euclidea.

Ejercicio 1.6. Demuestre que para U, V y W espacios vectoriales complejos de dimensión finita, existen los siguientes isomorfismos canónicos:

(a) $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$

(b) $U \otimes v \cong V \otimes U$

(c) $(U \otimes V)^* \cong U^* \otimes V^* \otimes W$

Semana 2.

Ejercicio 2.1. Sean V y U espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que el isomorfismo canónico $U^* \otimes V \overset{\varphi}{\cong} \operatorname{Hom}(U, V)$ da una correspondencia biunívoca entre el conjunto de tensores con rango menor a k, $\{T \in U^* \otimes V : R(T) \leqslant k\} \subseteq U^* \otimes V$, con el conjunto de transformaciones lineales $T \in \operatorname{Hom}(U, v)$ tales que el determinante de todos sus menores de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ es igual a 0. Es decir:

$$\{\, T \in V^* \otimes U : R(T) \leqslant k \,\} \xleftrightarrow{\varphi} \{\, T \in \operatorname{Hom}(V, U) : \text{ las menores } (k+1) \times (k+1) \text{ de } T \text{ se desvanecen} \,\}.$$

Ejercicio 2.2. Demostrar el teorema de Strassen

$$\begin{aligned}\hat{M}_{2,2,2} =&(\alpha_1^1+\alpha_2^2)\otimes(\beta_1^1+\beta_2^2)\otimes(c_1^1+c_2^2)+\\ &(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\otimes \beta_1^1 \otimes(c_1^2-c_2^2)+\\ &\alpha_1^1 \otimes(\beta_2^1-\beta_2^2)\otimes(c_2^1+c_2^2)+\\ &\alpha_2^2 \otimes(\beta_1^2-\beta_1^1)\otimes(c_1^2+c_1^1)+\\ &(\alpha_1^1+\alpha_2^1)\otimes \beta_2^2 \otimes(c_2^1-c_1^1)+\\ &(\alpha_1^2-\alpha_1^1)\otimes(\beta_1^1+\beta_2^1)\otimes c_2^2 +\\ &(\alpha_2^1-\alpha_2^2)\otimes(\beta_1^2+\beta_2^2)\otimes c_1^1\end{aligned}$$

Y use el teorema para calcular el producto de $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}$.

Semana 3.

Ejercicio 3.1. ¿Cómo reconocer una suma directa? Sea (U,ρ_U) una representación de G y sean $V_1,V_2\subseteq U$ subespacios invariantes, de dimensiones d_1 y d_2 respectivamente.

1. Verifique que

$$\begin{aligned}V_i,\rho_i :&G\longrightarrow GL(V_i)\\ &g\longmapsto \rho_U(g)\restriction_{V_i}\end{aligned}$$

   es una representación de G $[(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)]$.

2. $(U,\rho_U)\cong(V_1,\rho_1)\bigoplus(V_2,\rho_2)$ si y solo si:
   Existe una base $B=\{\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_{d_1}},\overrightarrow{b_1},\ldots,\overrightarrow{b_{d_2}}\}$ de U tal que

   a) $B_1:=\{\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_{d_1}}\}$ es una base de V_1.

   b) $B_2:=\{\overrightarrow{b_1},\ldots,\overrightarrow{b_{d_2}}\}$ es una base de V_2.

   c) $\forall g\in G$, se tiene la siguiente igualdad:

$$[\rho_{V_1}(g)]_B=\left(\begin{array}{c|c}[\rho_{V_1}(g)]_{B_1} & 0\\ \hline 0 & [\rho_{V_2}(g)]_{B_2}\end{array}\right)$$

Ejercicio 3.2. Sea $S_3\circlearrowright U=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$

$$\begin{aligned}\rho :&S_3\longrightarrow GL(U)\\ &\sigma\longmapsto(e_i\mapsto e_{\sigma(i)})\end{aligned}$$

1. Demuestre que $V_1=\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ y $V_2=\{a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3 : a_1+a_2+a_3=0\}$ son subespacios invariantes.

2. Demuestre que $U\cong V_1\bigoplus V_2$.

3. Demuestre que V_2 no tiene subespacios invariantes propios no triviales, es decir es una representación irreducible.

Ejercicio 3.3. Fije bases $B_A=\{\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_{d_A}}\}$ del espacio vectorial A, $B_B=\{\overrightarrow{b_1},\ldots,\overrightarrow{b_{d_B}}\}$ del espacio vectorial B, $B_C=\langle\overrightarrow{a_i}\otimes\overrightarrow{b_j} : i\in\{1,..,d_A\}, j\in\{1,...,d_B\}\rangle$ de $A\bigotimes B$. ¿Cómo es $[T_{(g_A,g_B)}]_{B_C}$ en términos de $[g_A]_{B_A}$ y $[g_B]_{B_B}$?

Ejercicio 3.4.

Lema 3.1. $(\mathrm{Sym}^k(V), \mu)$ satisface la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd} \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k\text{-copias}} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "T\ k\text{-lineal simétrica}"'] & \mathrm{Sym}^k(V) \arrow[dl, "!\varphi\ \text{lineal}"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Esto es, para todo espacio vectorial W y para toda T k-lineal y simétrica, existe una única φ lineal tal que $\varphi \circ \mu = T$. Es decir, $\varphi(v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k) = T(v_1, \ldots, v_k)$. Más aún, esta propiedad universal determina $(\mathrm{Sym}^k(V), \mu)$ de manera única módulo isomorfismo.

1. Demuestre el lema.

2. Para $V = \langle e_1, e_2 \rangle$, calcule $\mathrm{Sym}^3(V)$.

Semana 4.

Ejercicio 4.1. Dado V un espacio vectorial de dimensión n, muestre que si $F \in Sym^k(V)$ entonces, el rango de Waring de F, $R_w(F)$, cumple que $R_w(F) \leqslant \binom{k+n-1}{k}$.

Ejercicio 4.2. (Ejercicio 2.5.2.1 de [1]) Sean A, B, C espacios vectoriales de dimensión, a, b, c respectivamente, y sea $M_{a,b,c}$ es el tensor de multiplicación de matrices correspondiente, muestre que, visto como una forma trilineal en bases dadas, $M_{a,b,c}$ manda una tripla de matrices (X, Y, Z) en $tr(XYZ)$, y es por lo tanto invariante bajo cambios de base en A, B y C. Muestre además que la familia de algoritmos de nueve parámetros para $M_{2,2,2}$ es la acción de $SL(A) \times SL(B) \times SL(C)$ sobre la expresión del tensor. (La acción de escalares multiplicados por la identidad no afectara expresión de manera significativa pues identificamos $\lambda v \otimes w = v \otimes (\lambda w)$ para un escalar λ).

Ejercicio 4.3. (Ejercicio 2.6.6.3 de [1]) Dado $F \in Sym^k(V)$, sea $F_{s,k-s} \in Sym^s(V) \otimes Sym^{k-s}(V)$ su polarización parcial se define por : si $F = v_1^k + ... + v_n^k$ entonces $F_{s,k-s} = v_1^s \otimes v_1^{k-s} + ... + v_n^s \otimes v_n^{k-s}$. Sea $\underline{R}_w(F)$ el border rank simétrico de F. Muestre que si $\underline{R}_w(F) \leqslant k$, entonces $rango(F_{s,k-s})$ como aplicación lineal de $Sym^s(V)^*$ en $Sym^{k-s}(V)$ cumple que $rango(F_{s,k-s}) \leqslant k$ para todo s.

Ejercicio 4.4. Pruebe el siguiente lema.

Lema 4.1. Existe una única función lineal

$$\pi_{sgn} : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k} \tag{1}$$

tal que $\pi_{sgn}(v_1 \otimes ... \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)[v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(k)}]$. Además, se cumple que

1. Si $T \in V \otimes k$ es alternante, entonces $\pi_{sgn}(T) = T$.

2. $Im(\pi_{sgn}) = \{T \in V^{\otimes k} : \sigma(T) = sgn(\sigma)T\}$.

Ejercicio 4.5. Sea $\bigwedge$ la transformación canónica, $\bigwedge : V^k \longrightarrow \bigwedge^k(V)$.Muestre el siguiente lema.

Lema 4.2.

1. $\bigwedge$ es k-lineal y alternante.

2. Dada $T : V^k \longrightarrow W$ multilineal y alternante, existe una única transformación lineal $\varphi : \bigwedge^k(V) \longrightarrow W$ que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "T"'] & \bigwedge^k(V) \arrow[dl, "\varphi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Ejercicio 4.6.

(a) Demuestre el siguiente lema

Lema 4.3. $\bigwedge^k(V)$ tiene una base dada por $\{e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < i_2 < .. < i_k \leqslant n\}$ con $n = dim(V)$, y por lo tanto $dim(\bigwedge^k(V)) = \binom{n}{k}$.

(b) Escriba $v_1 \wedge ... \wedge v_k$ en la base descrita en el lema, es decir, $v_1 \wedge ... \wedge v_k = \sum\limits_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} C_I e_{i_1} \wedge ... e_{i_k}$

(c) Muestre que $v_1 \wedge ... \wedge v_k = 0$ si y solo si $\{v_1, ...v_k\}$ es un conjunto linealmente dependiente en V.

Ejercicio 4.7. (Ejercicio 2.6.10 de [1])

1. Muestre que el subespacio $\bigwedge^k(V) \subset V^{\otimes k}$ es invariante bajo la acción de $GL(V)$.

2. Dado v un espacio vectorial de dimensión n, como consecuencia del Lema 4.3, muestre que $\bigwedge^n(V) \cong \mathbb{C}, \bigwedge^l(V) = 0$ para $l > n$ y $\mathrm{Sym}^3 V \otimes \bigwedge^3 V \neq V^{\otimes 3}$ para $n > 1$.

3. Sea $\alpha \in V^*$ y $T \in V^{\otimes k}$, denotamos por $\alpha \lrcorner T$ a la contracción de α con T,definida en descomponibles por

$$V^* \times V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k-1}$$

$$\alpha \times (v_1 \otimes ... \otimes v_k) \mapsto \alpha \lrcorner (v_1 \otimes ... \otimes v_k) = \alpha(v_1) v_2 \otimes ... \otimes v_k$$

Calcule explicitamente $\alpha \lrcorner (v_1 v_2 ... v_k)$ y muestre que es, en efecto, un elemento de $\mathrm{Sym}^{k-1} V$ y de manera similar para $\alpha \lrcorner (v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k)$.

4. Muestre que la composición $\alpha \lrcorner \circ \alpha \lrcorner : \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k-2} V$ es el mapa 0.

5. Muestre que si $V = A \otimes B$ entonces existe una descomposición inducida en suma directa

$$\bigwedge^k V = \bigwedge^k A \oplus (\bigwedge^{k-1} A \otimes \bigwedge^1 B) \oplus ... \oplus (\bigwedge^1 A \otimes \bigwedge^{k-1} B) \oplus \bigwedge^k B$$

de $\bigwedge^k V$ como $GL(A) \otimes GL(B)$-módulo.

6. Muestre que un subespacio $A \subset V$ determina una filtración inducida bien definida de $\bigwedge^k V$ dada por $\bigwedge^k A \subset \bigwedge^{k-1} A \wedge \bigwedge^1 V \subset \bigwedge^{k-2} A \wedge \bigwedge^2 V \subset ... \subset \bigwedge^k V$. Si $P_A = \{g \in GL(V) : g \cdot v \in A \ \forall \ v \in A\}$ entonces cada filtrando es un P_A-submódulo.

7. Muestre que si V está equipado con una *forma volumétrica*, es decir, un elemento $\phi \in \bigwedge^n V$ no cero, entonces se tiene una identificación $\bigwedge^k V \cong \bigwedge^{n-k} V^*$.

8. Muestre que $V^* \cong \bigwedge^{n-1} V \otimes \bigwedge^n V^*$ como $GL(V)-$módulos.

9. Muestre que las álgebras tensorial, simétrica y exterior son asociativas.

Ejercicio 4.8. (Ejercicio 2.6.12 de [1]). Sea $f : V \longrightarrow V$,con $n = \dim(V)$, $f^{\wedge n} : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$ se llama el determinante de f

1. Verifique que si f tiene rango $n-1$ entonces $f^{\wedge n-1}$ tiene rango 1, y si $rango(f) \leqslant n-2$ entonces $f^{\wedge n-1}$ es cero.

2. Más generalmente, muestre que si f tiene rango r entonces $f^{\wedge s}$ tiene rango $\binom{r}{s}$.

3. Muestre que los autovalores de $f^{\wedge k}$ son los productos de k de los autovalores de f

4. Dado $f : V \longrightarrow V$,con $n = \dim(V)$, $f^{\wedge n} : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n V$ es una transformación lineal de un espacio de dimensión 1 en sí mismo y por lo tanto es una multiplicación por un escalar, muestre que si escogemos una base para representar f con una matriz, entonces el determinante de dicha matriz es el escalar que representa a $f^{\wedge v}$.

5. Dado $f : V \longrightarrow V$ asuma que V admite una base de autovectores de f,muestre que $\bigwedge^k V$ admite una base de autovectores de $f^{\wedge k}$ y encuentre los autovalores y autovectores de $f^{\wedge k}$ en términos de los de f. En particular muestre que el coeficiente t^{n-k} de $det(f - tI)$, el polinomio característico de f, es $(-1)^k tr(f^{\wedge k})$, donde $tr(f^{\wedge k})$ es la suma de los autovalores de $f^{\wedge k}$.

6. Sea $f : V \longrightarrow W$ invertible con $dim(V) = dim(W) = n$, verifique que $f^{\wedge n-1} = f^{-1} \otimes det(f)$.

7. Fije $det \in \bigwedge^n V^*$. Sea
$$SL(V) = \{g \in GL(V) : g \cdot det = det\}$$
Muestre que $SL(V)$ es un grupo, este es llamado el *grupo lineal especial*.Muestre que si uno fija una base $\alpha^1, ..., \alpha^n$ de V^* tal que $det = \alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^n$ y usa esta base y su dual para escribir los $g : V \longrightarrow V$ como matrices $n \times n$ entonces $SL(V)$ corresponde con las matrices de determinante 1.

8. Dados E, F espacios vectoriales n-dimensionales, fije $\Omega \in \bigwedge^n E^* \otimes \bigwedge^n F$, dado que $dim(\bigwedge^n E^* \otimes \bigwedge^n F) = 1$, Ω es único salvo un factor de escala.Dado $f : V \longrightarrow W$ es posible escribir $f^{\wedge n} = c_f \Omega$ para algún escalar c_f. Muestre que si uno escoge bases $e_1, ...e_n$ para E y $f_1, ...f_n$ para F tal que $\Omega = e_1 \wedge ... \wedge e_n \otimes f_1 \wedge ... \wedge f_n$ y expresa f como una matriz M_f respecto a estas bases, entonces $c_f = det(M_f)$.

9. Muestre que Ω determina un vector $\Omega^* \in \bigwedge^n F^* \otimes \bigwedge^n E$ dado por $< \Omega, \Omega* >= 1$. Recuerde que $f : V \longrightarrow W$ determina un mapa lineal $f^T : W^* \longrightarrow V^*$. Use Ω^* para definir det_{f^T}, muestre que $det_f = det_{f^T}$.

Ejercicio 4.9. Muestres que $\bigwedge^k (T : U \longrightarrow V) = \bigwedge^k T : \bigwedge^k U \longrightarrow \bigwedge^k V$ es un funtor de la categoría de espacios vectoriales en si misma.

Ejercicio 4.10. Sean A, B, C espacios vercotiales con bases $a_1, a_1; b_1, b_2 y c_1, c_2$ respectivamente, y sea
$$S = a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_2 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_2$$
.

(a) Muestre que $R(S) \geqslant 3$.

(b) Verifique que ocurre en $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k$ para $k \geqslant 3$ con $dim(V_i) > 1$.

Ejercicio 4.11. Verifique que $\{T \in V_1 \otimes ... \otimes V_k : \underline{R}(T) \leqslant s\}$ es un conjunto cerrado en $V_1 \otimes ... \otimes V_k$.

Referencias

[1] Joseph M Landsberg. Tensors: geometry and applications. *Representation theory*, 381(402):3, 2012.