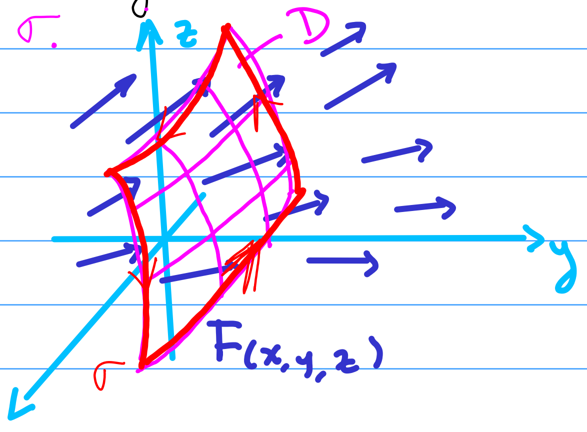
Hoy Teorema de Stokes (Green en 3D)

(1) Enunciado (2) Ejemplo

(3) Qué es el rotacional ?

Teorema: [Stokes] Sea $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ un campo vectorial, sea $\sigma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y sea $D\subseteq\mathbb{R}^2$ una superficie que tiene frontera σ.

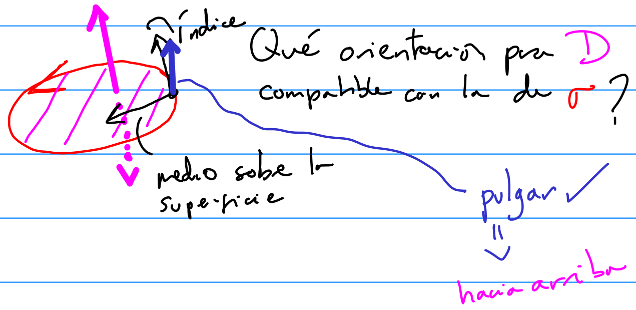


Si (1) F es un campo vectorial diferenciable en D

(2) Las orientaciones de D y de σ son compatibles (de acuerdo a la "regla de la mano derecha")

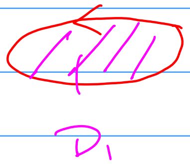
entonces
$$\underbrace{\int_{\sigma} F\, d\vec{s}}_{\text{TRABAJO realizado por F a lo largo de }\sigma} = \underbrace{\iint_{D} (\nabla \times F)\, dS}_{\text{Flujo a través de D del ROTACIONAL de F}}$$

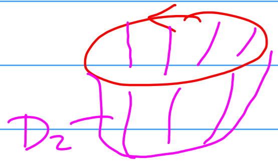
Obs: (1) Regla de la mano derecha



Qué orientación para D es compatible con la de σ ?

(2) Típicamente nos dan **F** y σ ORIENTADA y nosotros escogemos D, ORIENTADA. Hay muchas superficies válidas posibles





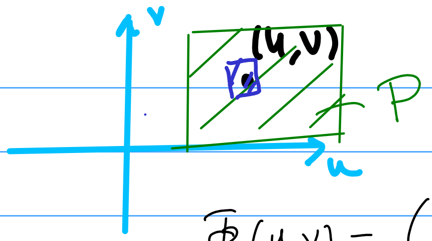
$$\iint_{D_1}(\nabla\times F)\,dS \underset{\substack{\text{POR}\\ \text{Stokes}}}{=} \iint_{D_2}(\nabla\times F)\,dS$$

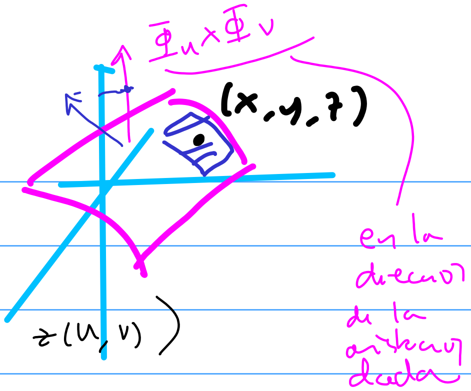
El resultado es el mismo pero el esfuerzo muy distinto.

Repaso: Cómo se calcula $\iint_{A} \overset{\text{campo vectorial}}{G}\, dS$?

A superficie ORIENTADA

(1) Construya una parametrización de **A**:





$$\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

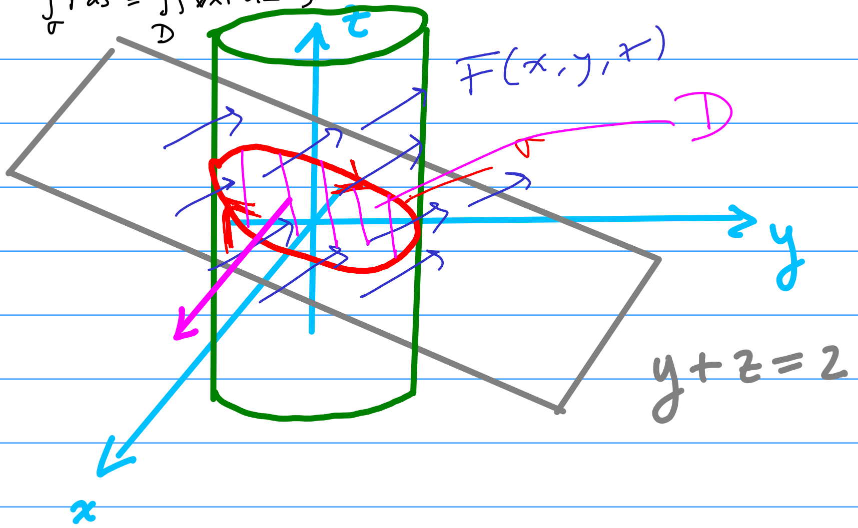
(2)

$$\iint_A G\,dS = \iint_P \left(G(\Phi(u,v))\cdot \Phi_u\times\Phi_v\right) dA$$

Ejemplo:* Sea $F(x,y,z)=(-y^2,x,z^2)$ y sea σ la curva de intersección entre $y+z=2$ y $x^2+y^2=4$ orientada en dirección de las manecillas del reloj vista desde arriba.

Calcule $\int_\sigma F\,d\vec{s} =$

(Stokes: $\int_\sigma F\,ds = \iint_D \nabla\times F\,dS$)



Sea **D** la parte del plano encerrada por la curva **CON ORIENTACIÓN HACIA ABAJO.** Como las componentes de $F(x,y,z)$ son polinomios sabemos que el campo es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y en particular en D así que podemos aplicar el Teo de Stokes:

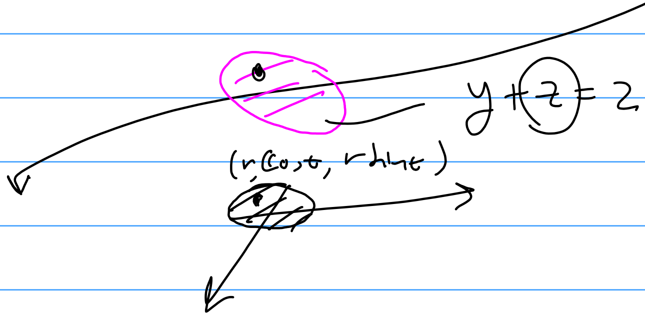
$$\int_{\sigma} F\, d\vec{s} = \iint_{D} \nabla \times F \, dS = \left[\iint_{D} (0, 0, 1+2y)\, dS \right]$$

σ ORIENTADA $\qquad$ D ORIENTADA

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1+2y) \checkmark$$

$$* \begin{cases} \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2 - r\sin\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi(u,v) = (u, v, 2-v) \\ u^2+v^2 \le 4 \end{cases}$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2} (0, 0, 1+2r\sin\theta) \cdot (\Phi_r \times \Phi_\theta)\, dr\, d\theta =$$

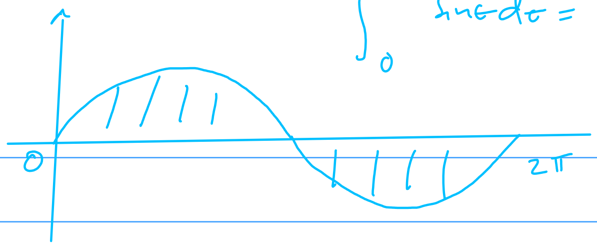
$$\Phi_r = (\cos\theta, \sin\theta, -\sin\theta)$$
$$\Phi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, -r\cos\theta)$$
$$= (m, m, r(\cos^2\theta + \sin^2\theta))$$
$$\| $$
$$\left[(m, m, r) = N(r,\theta) \right]$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (0,0,1+2r\sin\theta) \cdot \underbrace{\left[-(m, m, r)\right]}_{\text{pa que la orientacion sea correcta}} dr\, d\theta =$$

$$- \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r + 2r^2\sin\theta \, dr\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3}\sin\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}$$

$$- \int_0^{2\pi} \frac{4}{2} + \frac{2\cdot 8}{3}\sin\theta \, d\theta = -\frac{4\cdot 2\pi}{2} = \boxed{-4\pi}$$

trabajo



$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0))$$

$$= \cos(0) - \cos(2\pi) = 0$$