En $\mathbb{R}^n$ es posible medir distancias y ángulos. ¿Cómo?

**Def.** Si $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ definimos

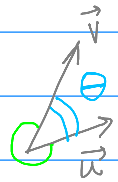
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Para qué sirve?

(1) Permite calcular la longitud de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\|\vec{u}\|}_{\substack{\text{norma de } \vec{u} \\ \text{longitud de } \vec{u}}} = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

(2)

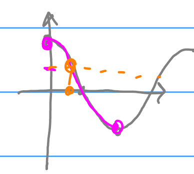


$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\theta)}$$

(a) Así que podemos calcular el ángulo $\theta$ despejando, es decir

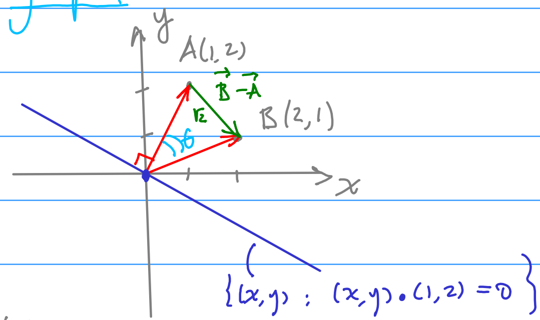
$$\boxed{\theta = \underset{\cos^{-1}(\ )}{\operatorname{Arccos}} \left( \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \right)}$$

resultado entre 0 y $\pi$



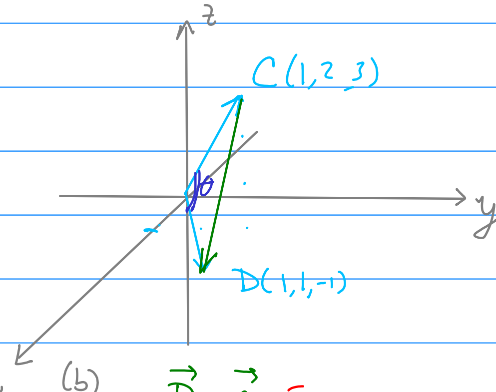
(b) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores perpendiculares.

**Ejemplo:** Calcule la distancia y el ángulo entre los vectores dados:




(a)

$x + 2y = 0$ $\quad y = -\frac{x}{2}$




(b) $\vec{D} - \vec{C} =$

$\|\vec{D} - \vec{C}\| =$ ✓

$$\theta = \operatorname{Arccos}\left( \frac{\vec{D} \bullet \vec{C}}{\|\vec{D}\| \, \|\vec{C}\|} \right)$$ ✓

$2\pi$ rad $\sim 360$

$\vec{B} - \vec{A} = (2, 1) - (1, 2) = (1, -1)$

$\|\vec{B} - \vec{A}\| = \sqrt{(1, -1) \bullet (1, -1)} = \sqrt{2}$

$\vec{A} \bullet \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \cos(\theta)$

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} \bullet \vec{B} &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4 \\ \|\vec{A}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ \|\vec{B}\| &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \end{aligned}\right\} \to \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

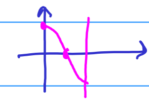
$$\theta = \operatorname{ArcCos}\left(\tfrac{4}{5}\right) \approx 0.643 \text{ rad}$$

rad $\quad$ °/rad

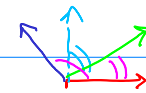
$$0.643 \cdot \frac{360}{2\pi} = {}^\circ$$

Ejercicio: (i) Calcule la distancia y el ángulo entre $A(1,2,3,4)$ y $B(1,1,1,1)$ en $\mathbb{R}^4$

(ii) ¿Son $A$ y $B$ perpendiculares?



[*(iii) Encuentre un vector en $\mathbb{R}^4$ perpendicular a $\vec{B}$.]



Sol: $\vec{A}-\vec{B} = (0,1,2,3)$, $\quad \|\vec{A}-\vec{B}\| = \sqrt{0^2+1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

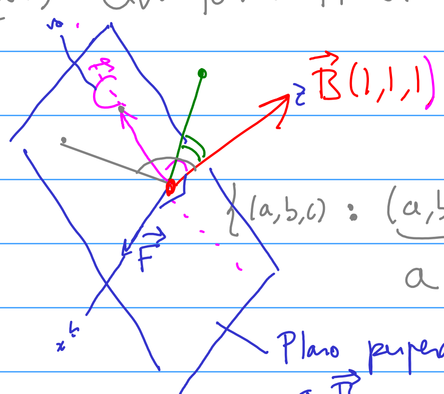
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|} = \frac{1+2+3+4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}\,\sqrt{4}} = \frac{10}{2\sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$$\sqrt{30} = \sqrt{2\cdot3\cdot5} \qquad \theta = \operatorname{ArcCos}\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right) \approx 0.42 \text{ rad}$$

$\frac{\pi}{2}$ rad

$\vec{C} = (1,-1,1,-1)$, $\quad \vec{C}\cdot\vec{B} = 1+(-1)+1+(-1) = 0$

(iv) ¿Qué forma tienen TODOS los vectores perpendiculares a $\vec{B}$?




$\vec{D}(a,b,c)$

$$\{(a,b,c) : \underbrace{(a,b,c)\cdot(1,1,1)}_{a+b+c} = 0\}$$

$$a+b+c=0$$

Plano perpendicular a $\vec{B}$ = Plano que tiene vector NORMAL $\vec{B}$

En $\mathbb{R}^4$: Los vectores perpendiculares a un vector dado

$$\{(a,b,c,d) : (a,b,c,d)\cdot(1,1,1,1) = 0\}$$

$$a+b+c+d=0$$

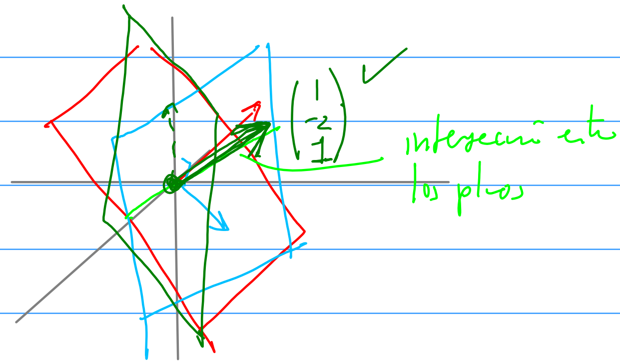
Una ecuación del plano perpendicular a $B(1,1,1,1)$ en $\mathbb{R}^4$

$2x - 3y + 1z = 0$ en $\mathbb{R}^3$

$\|$

Plano perpendicular a $(2,-3,1)$

Pregunta: Qué es la colección de vectores simultáneamente perpendicular a $(1,2,3)$ y $(1,1,1)$.



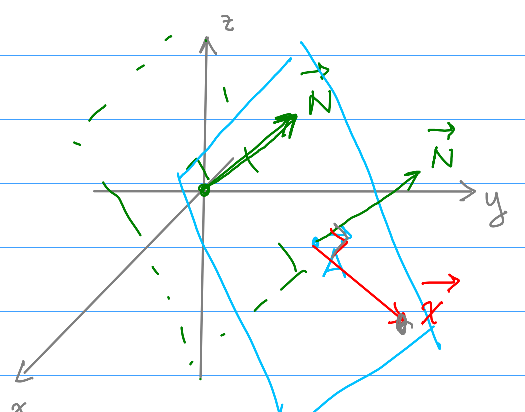

$$\left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l}(x,y,z)\cdot(1,1,1)=0\\ (x,y,z)\cdot(1,2,3)=0\end{array} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_1 \to R_1 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} z \\ -2z \\ z \end{matrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$




Def: Sea $\mathcal{P}$ el plano que pasa por un punto $\vec{A}$ y tiene vector normal $\vec{N}$. Una ecuación para $\mathcal{P}$ es:

$$\boxed{\mathcal{P} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{(\vec{x} - \vec{A})\cdot\vec{N} = 0}_{\text{ecuación lineal}} \right\}}$$

Ejemplo: Encuentre una ecuación del plano $P$ que pasa por $A(1,2,3)$ y es perpendicular a $\vec{N}(1,1,1)$

$$P = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\big((x,y,z) - (1,2,3)\big) \cdot (1,1,1)}_{} = 0 \right\}$$

$$(x-1, y-2, z-3) \cdot (1,1,1) = 0$$

$$(x-1) + (y-2) + (z-3) = 0$$

$$\boxed{x + y + z = 6}$$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Proyección}}$