Hoy: Método de Newton 2:

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

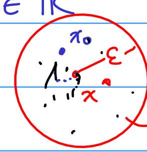
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ punto inicial cualquiera} \\ x_{k+1} = x_k - \mathcal{H}_f(x_k)^{-1}\left[\nabla f(x_k)\right] \end{cases}$$

análogo $- \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

Teorema: Suponga que $f \in C^3$ ($f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$) y $x^* \in \mathbb{R}^n$

con (i) $\nabla f(x^*) = \vec{0}$

(ii) $\mathcal{H}_f(x^*)$ es invertible.



abierta

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\forall x_0 \in \mathring{B}_\varepsilon(x^*)$

tenemos que el método de Newton converge a x^* y más aún existe $r > 0$ tal que

? $\longrightarrow \left[\, \|x_{k+1} - x^*\| \leq r \|x_k - x^*\|^2 \,\right]$ ← Convergencia cuadrática

Ejercicio: Si hay convergencia cuadrática entonces,

$\exists\ a \quad 0 < a < 1$

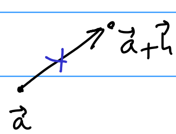
$$\|x_k - x^*\| \approx a^{2^k}$$

"El número de dígitos correctos se duplica en cada iteración"

Recuerde que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^{k+1} ((k+1)-veces diferenciable con continuidad) entonces

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \underbrace{\sum_{\alpha : |\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(\vec{a})}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{polinomio de Taylor hasta orden } k} + R_{\vec{a},k}(\vec{h})$$



donde

$$R_{\vec{a},k}(h) = \sum_{\alpha : |\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f}{\alpha!}(\vec{a} + c\vec{h})\, h^\alpha$$

para algún $c \in (0,1)$

En particular, si $f \in C^{2=1+1}$

$h_1^2,\ h_1h_2,\ h_2^2$

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{h} + R_{\vec{a},1}(\vec{h})$$

$$\left|\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f(\vec{a}+c\vec{h})}{\alpha!} h^\alpha\right| \leq \Big[\underbrace{\sum_{|\alpha|=2}\left|\frac{\partial^\alpha f(\vec{a}+c\vec{h})}{\alpha!}\right|}_{\leq K}\Big]\underbrace{|h^\alpha|}_{\leq \|\vec{h}\|^2}$$

$$\left\|f(\vec{a}+h) - \left[f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a})\vec{h}\right]\right\| \leq K\,\|\vec{h}\|^2$$

Dem: $\|x_{k+1} - x^*\| = \|x_k - H_f(x_k)^{-1}\nabla f(x_k) - x^*\|$

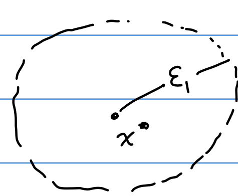
$$= \|x_k - x^* - H_f(x_k)^{-1}\nabla f(x_k)\|$$

$$= \|H_f(x_k)^{-1}\left[H_f(x_k)[x_k - x^*] - \nabla f(x_k)\right]\|$$

$$\leq \|H_f(x_k)^{-1}\|\,\|\nabla f(x_k) \underbrace{\ }_{-\nabla f(x^*)} - H_f(x_k)[x_k - x^*]\|$$

$$= \underbrace{\|H_f(x_k)^{-1}\|}_{\substack{\text{si estamos}\\ \text{cerca de } x^*\\ H_f(x_k)\\ \text{es invertible}\\ \text{y tiene cota.}\\ O(1)}}\ \underbrace{\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) - H_f(x_k)[x_k - x^*]}_{\substack{\text{expansión de Taylor de}\\ \nabla f \text{ cerca de } x_k\\ O(\|x_k - x^*\|^2)}}\|$$

Dado x^* sea $\varepsilon_1 > 0$



Cómo $f \in C^3$ la función $\nabla f \in C^2$ y por ello, tenemos que $\exists\ C_1 > 0 \quad \forall\ x_0, x \in B_{\varepsilon}(x^*)$

Remind formula

(1) $$\| \nabla f(x) - \nabla f(x_0) - H_f(x_0)(x - x_0) \| \leq C_1 \, \|x - x_0\|^2$$

(2) $\exists\ \varepsilon_2, C_2 > 0 \ : \ \forall x \in B_{\varepsilon_2}(x^*)$

$H_f(x)$ es invertible y $\left[\underline{\| H_f(x)^{-1} \| \leq C_2} \right]$

(3) Sea $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ $\quad x_0 \in B_{\varepsilon}(x^*)$

$$\| \underbrace{\nabla f(x^*)}_{=0} - \nabla f(x_0) - H_f(x_0)(x^* - x_0) \| \leq C_1 \, \|x^* - x_0\|^2$$

$$\| H_f(x_0)[x_0 - x^*] - \nabla f(x_0) \| \leq C_1 \, \|x^* - x_0\|^2$$

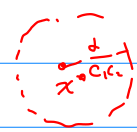
$$\|x_1 - x^*\| = \| x_0 - x^* - H_f(x_0)^{-1} \nabla f(x_0) \|$$

$$= \| H_f(x_0)^{-1} [H_f(x_0)(x_0 - x^*) - \nabla f(x_0)] \|$$

$$\leq \| H_f(x_0)^{-1} \| \, \| \quad \| \leq C_2 C_1 \, \|x^* - x_0\|^2$$

Si $\quad x_0 \in B_{\varepsilon}(x^*)$

$\quad \|x_1 - x^*\| \leq C_1 C_2 \|x_0 - x^*\|^2 \Big]$ — Af: El algoritmo converge y lo hace cuadráticamente.



Supongamos que $\quad 0 < \alpha < 1 \quad$ y $\quad x_0 \in B_{\frac{\alpha}{C_1C_2}}(x^*)$

entonces $\quad x_1 \in B_{\frac{\alpha^2}{C_1C_2}}(x^*) \subseteq B_{\frac{\alpha}{C_1C_2}}(x^*)$

$$\|x_1 - x^*\| \leq C_1 C_2 \left[\frac{\alpha}{C_1 C_2} \right]^2 = \frac{\alpha^2}{C_1 C_2} < \frac{\alpha}{C_1 C_2}$$

luego $\quad x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x^* \quad$ y las desigualdades aseguran convergencia cuadrática.