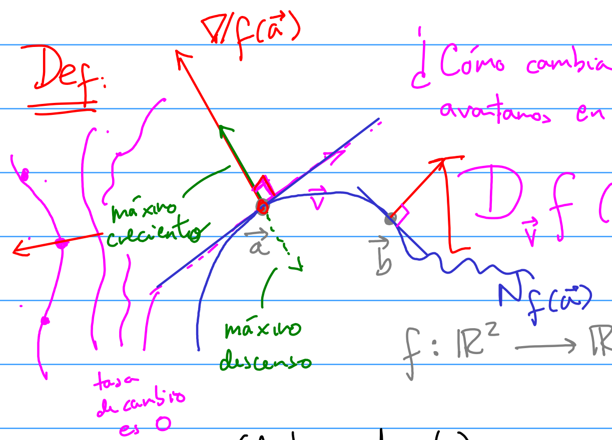
Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar

**Def:** Si $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$ vector gradiente de $f$ en $\vec{a}$

**Def:**




¿Cómo cambia $f$ si estando en $\vec{a}$ avanzamos en la dirección $\vec{v}$?

$$\left[ D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \underbrace{\nabla f(\vec{a})}_{\text{¿Qué propiedades tiene?}} \cdot \vec{v} \right]$$

(del gradiente)

**** Teorema:** Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable y suponga que $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Entonces:

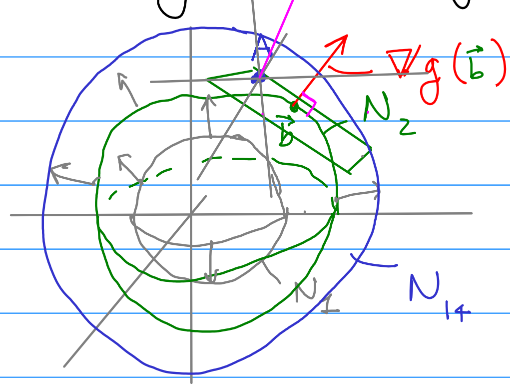
(1) $\dfrac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$ es la dirección de MÁXIMO CRECIMIENTO de $f$ en $\vec{a}$. (y la $\|\nabla f(\vec{a})\|$ es la tasa de cambio en esa dirección).

(2) $\nabla f(\vec{a})$ es "perpendicular" al conjunto de nivel de $f$ que pasa por el punto $\vec{a}$.
(es decir, es normal al plano tangente al conjunto de nivel que pasa por $\vec{a}$).

Ejemplo: $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$N_1 = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 \}$

$N_4 \quad x^2+y^2+z^2 = 4$




$A(1,2,3)$

$g(1,2,3) = 1^2+2^2+3^2 = 14$

$$\nabla g(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}_{\substack{x=1\\y=2\\z=3}} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{normal}}$$

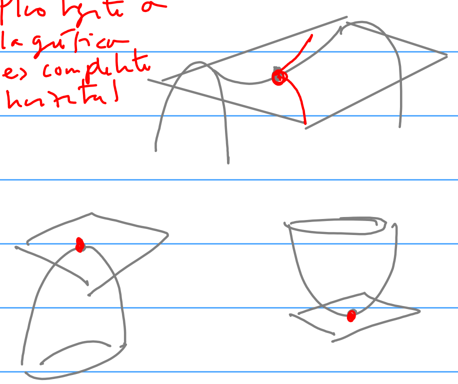
Calcule la ecuación del plano tangente a $N_{14}$ en $(1,2,3)$.

$$\big((x,y,z)-(1,2,3)\big)\cdot(2,4,6)=0$$

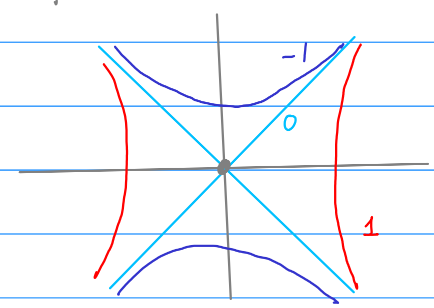
$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0 \checkmark$$

¿Podría ser que $\underbrace{\nabla f(\vec{a})=\vec{0}}$?

Plano tangente a la gráfica es completamente horizontal



$f(x,y)=x^2-y^2$




$$\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}2x\\-2y\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

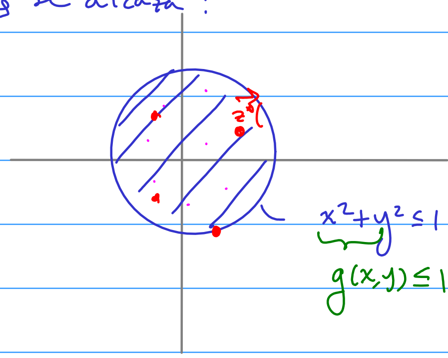
$$\left[\ell_{\vec{a}}(x,y)=\underline{f(\vec{a})}\right]+0$$

Esto es muy útil porque nos permite resolver problemas de optimización como el siguiente:

Problema: Encuentre el máximo valor que alcanza la función $xy$ $f$ en la región $x^2+y^2\leq 1$.
¿En qué puntos se alcanza?

$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$f(x,y)=xy$



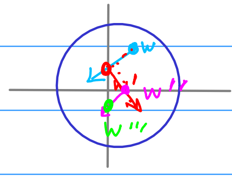

$\underbrace{x^2+y^2}\leq 1$

$g(x,y)\leq 1$

Queremos buscar los maximizadores $\vec{z}^*$

Partimos el problema en dos partes.

(1) Buscamos candidatos en el interior $x^2+y^2<1 \sim g(x,y)<1$




Si $\nabla f(w)\neq\vec{0}$ ¿podría alcanzarse el máximo en $w$?

$\nabla f(w')\neq\vec{0}$  $\nabla f(w'')\neq\vec{0}$

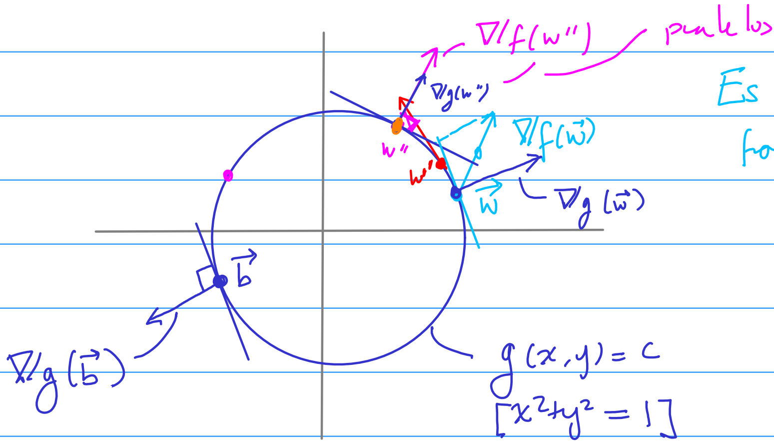
→ Si $\nabla f(\vec w) \neq \vec 0 \implies \vec w$ NO PUEDE ser un maximizador $\vec z^*$

Se sigue que $\boxed{\nabla f(\vec z^*) = \vec 0}$ $(*)_1$

Así que para encontrar $\vec z^*$ basta buscar entre los puntos que satisfacen $\boxed{\nabla f(\vec w) = \vec 0}$

(Podría haber otros puntos distintos a $\vec z^*$ acá pero igual nos ayuda a reducir la búsqueda)

(2) Buscamos candidatos en el borde de la región




Es $\vec w$ máximo en la frontera?

$\vec w'$

$\vec w''$

→ Si $\nabla f(\vec w)$ no es perpendicular a la región $g(x,y)=c$ entonces $\vec w$ NO PUEDE ser un máximo en la frontera.

Así que para encontrar los $\vec z^*$ en la frontera basta buscar soluciones de

$$(*)_2 \begin{cases} g(\vec w) = c \\ \nabla f(\vec w) = \lambda \nabla g(\vec w) \end{cases}$$

Método de Multiplicadores de Lagrange.

(1) Encuentra ptos críticos en interior $(*)_1$

(2) Encuentra sols $(*)_2$ (en la frontera)

(3) Evalúa $f(\vec w)$ en esos candidatos

Teorema: El valor más grande de estos es el valor máximo y se alcanza en esos puntos ✓