Taller: Integrales (de ambos tipos) sobre curvas

Ejercicio 6

Un cable tiene la forma de un semicírculo de radio 5 (concretamente la parte con $y \geq 0$ de $x^2 + y^2 = 25$). Suponga que la densidad del cable $\rho(x, y)$ es igual a la distancia entre (x, y) y la recta $y = 10$. Encuentre:

1. La masa total del cable.
2. Las coordenadas del centro de masa.
3. El momento de inercia del cable alrededor de un eje perpendicular al plano (x, y) y que pasa por el punto $x = 1$.
4. (Verdadero o Falso) El centro de masa de un objeto sólido siempre esta adentro del objeto.

Ejercicio 7: Curvas parametrizadas a trozos

Queremos construir una cerca compuesta de los siguientes segmentos:

- El pedazo de la parábola $y = x^2$ en el segmento que va de $(0, 0)$ a $(10, 100)$.
- Los segmentos de recta que unen $(10, 100)$ con $(10, 110)$ y $(10, 110)$ con $(-10, 1)$ y
- El segmento que va de $(-10, 1)$ a $(0, 0)$ siguiendo la parábola $y = \frac{x^2}{100}$.

1. Haga un dibujo de la cerca.
2. Calcule la longitud de alambre que necesitamos para construir la cerca.

Ejercicio 8: Longitud de arco de la rosa de cuatro pétalos.

Sea C la curva dada en coordenadas polares mediante $r(\theta) = \sin(2\theta)$.

1. Encuentre una parametrización en coordenadas cartesianas de la curva C. Explique su respuesta.
2. Utilizando la parte (a) encuentre una fórmula para la longitud de arco de un pétalo de la rosa de arriba. No es necesario evaluar la integral que obtenga sino sĺamente expresar la longitud de la curva cómo una integral $d\theta$.

Ejercicio 9

Considere el campo vectorial

$$H(x, y) = (2xy^2 + 3x^2, 2x^2y + 3y^2)$$

en el plano

1. Verifique que H es un campo gradiente.
2. Encuentre un potencial escalar $u(x, y)$ para H.
3. Calcule la integral de línea $\int_C H ds$ donde C es la espiral $\sigma(t) = (1 + t\cos(t), t\sin(t))$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ejercicio 10

Sea C el círculo unitario centrado en dirección de las manecillas del reloj en el origen en $\mathbb{R}^2$.

1. Calcule

$$\int_C \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx =$$

2. Calcule $\nabla \times G$ donde G es el campo vectorial que integramos en la parte (1)
3. (Verdadero o Falso) Si G es cualquier campo vectorial que satisface $\nabla \times G = 0$ entonces G es conservativo. Justifique su respuesta.