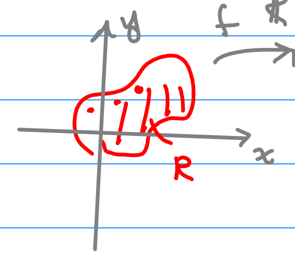
2 Ideas:

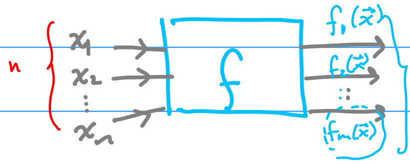
(1) Construir funciones complejas a partir de combinar funciones sencillas — Composición

(2) Cómo demostrar que una función es continua en una región $R \subseteq \mathbb{R}^2$



① Composición:

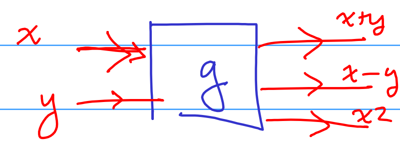
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x})$$



Las $f_i(\vec{x})$ son funciones escalares y se llaman las "componentes" de f

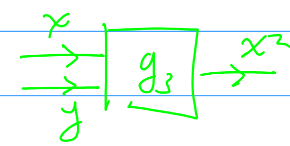
Ejemplo:

$$g(x,y) = (x+y,\ x-y,\ x^2)$$



$$g_2(x,y) = x-y$$

$$g_3(x,y) = x^2$$



Componer funciones quiere decir "conectar" las cajas.

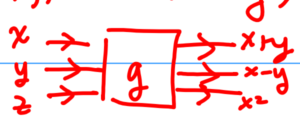
"Conectar salidas de g en las entradas de f y en orden"

$$f(g(x,y,z))$$

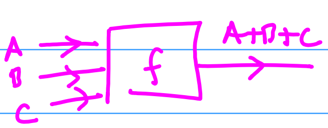
$$\boxed{h := f \circ g}$$

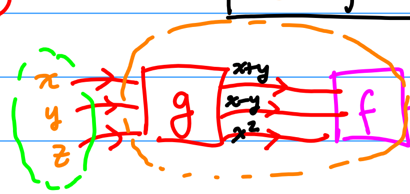
Ejemplo:

$$g(x,y,z) = (x+y,\ x-y,\ x^2)$$



$$f(A,B,C) = A+B+C$$



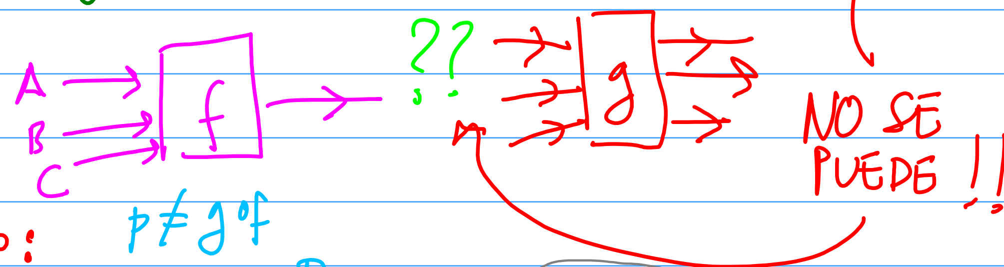


$$(x+y)+(x-y)+x^2$$
$$\shortparallel$$
$$2x+x^2$$

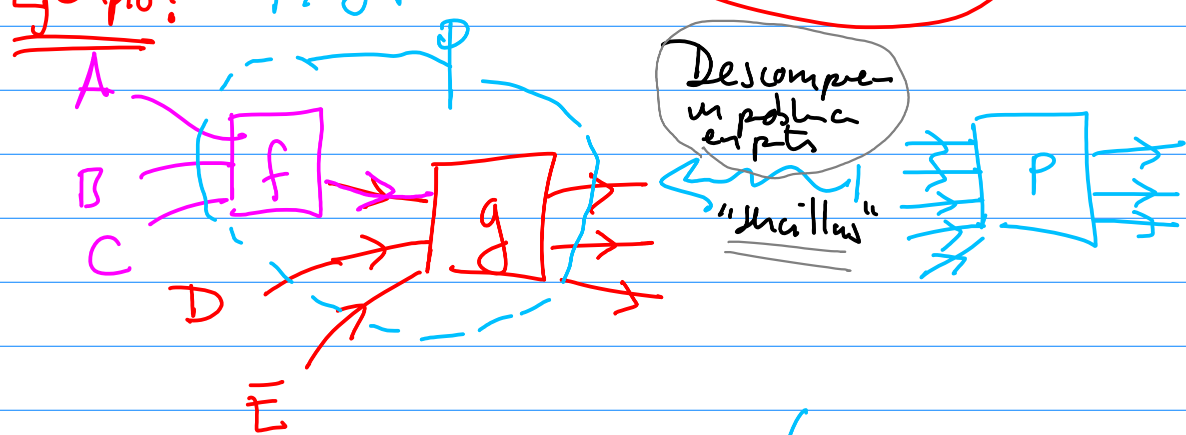
$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h(x,y,z) = 2x + x^2$$

Qué pasaría si hacemos $\ell = g \circ f$

$g(f(A,B,C))$



Ejemplo: $p \neq g \circ f$

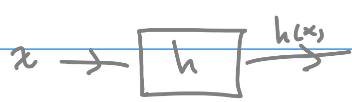


$$p(A,B,C,D,E) = g\left(f(A,B,C),\ D,\ E\right)$$

Qué funciones "sencillas" conocemos?

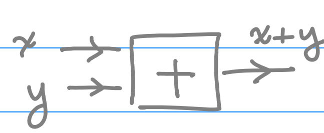
Lista:

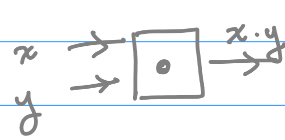
1. Funciones unarias elementales



con $h(x) =$
- $\sin(x)$, $\cos(x)$ } trig. y trig inversas.
- e^x } exponencial
- $p(x)$ } polinomios
- $\sqrt{x}$ } raíz enésima
- $\sinh(x)$ } hiperbólicas
- c } constante

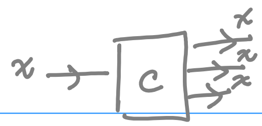
2. Funciones binarias elementales





Suma, resta

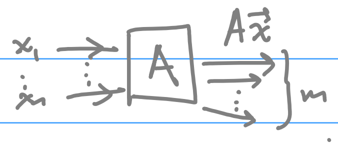
multip. división

③ 

"copiadora"

$C(x) = (x, x, x)$

$c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

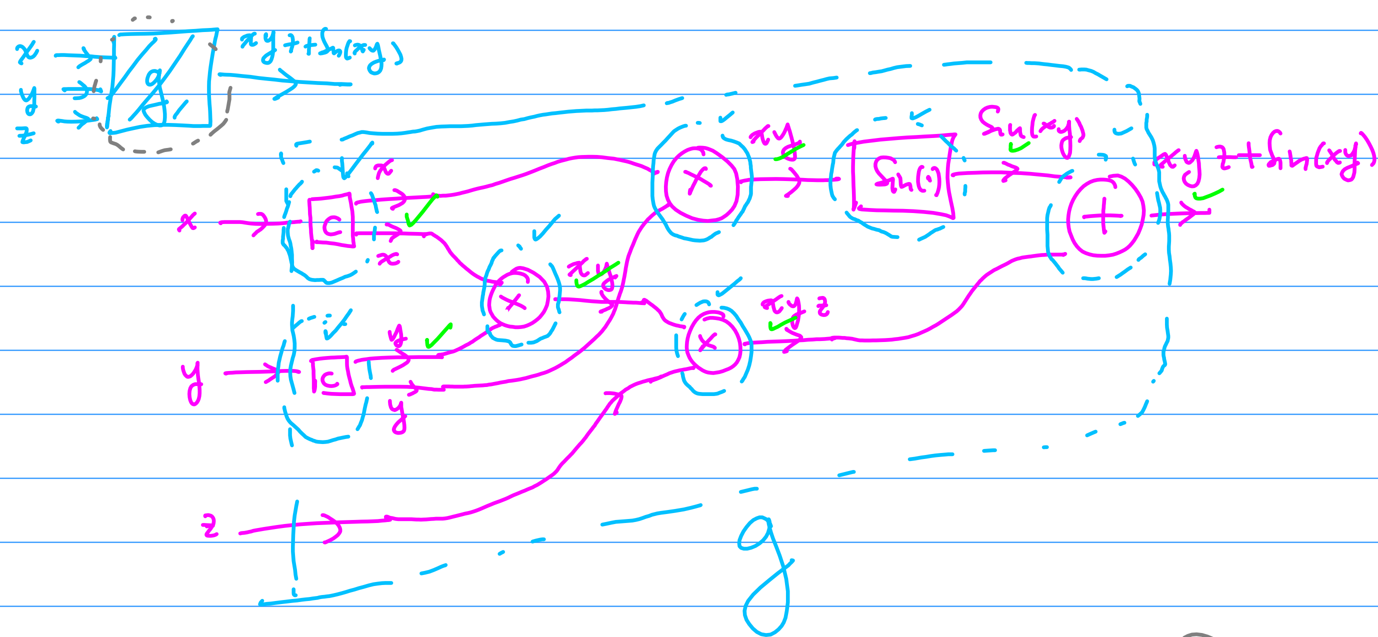


$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ~ "Transformaciones lineales"

Ejercicio:

$g(x,y,z) = xyz + \sin(xy)$. ?

Escriba g como composición de funciones sencillas.



Pregunta: Es $g(x,y,z)$ continua en $\mathbb{R}^3$?

Teorema: (reglas de continuidad)

① Las siguientes funciones "simples" son continuas: $\forall x$

Cálculo dif → ⓐ - polinomios $p(x)$, - $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$

Alg lineal — ⓑ suma, resta, mult. (div si el denominador es dif de cero)

ⓒ Lineales ✓

② Si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $\vec{a}$ y $g:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es continua en $f(\vec{a})$

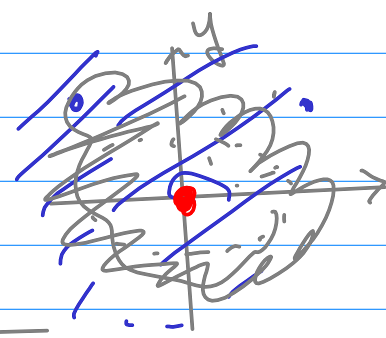
$\Rightarrow h(\vec{x}) := g(f(\vec{x}))$ es continua en $\vec{a}$

("se sigue que composición de funciones continuas es continua").

Sol a la pregunta:

Sí porque se obtiene como composición de funciones simples continuas como muestra el siguiente árbol de composición

$$\boxed{\text{DIBUJO DE ARRIBA.}}$$



$h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Ejercicio:

$$h(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

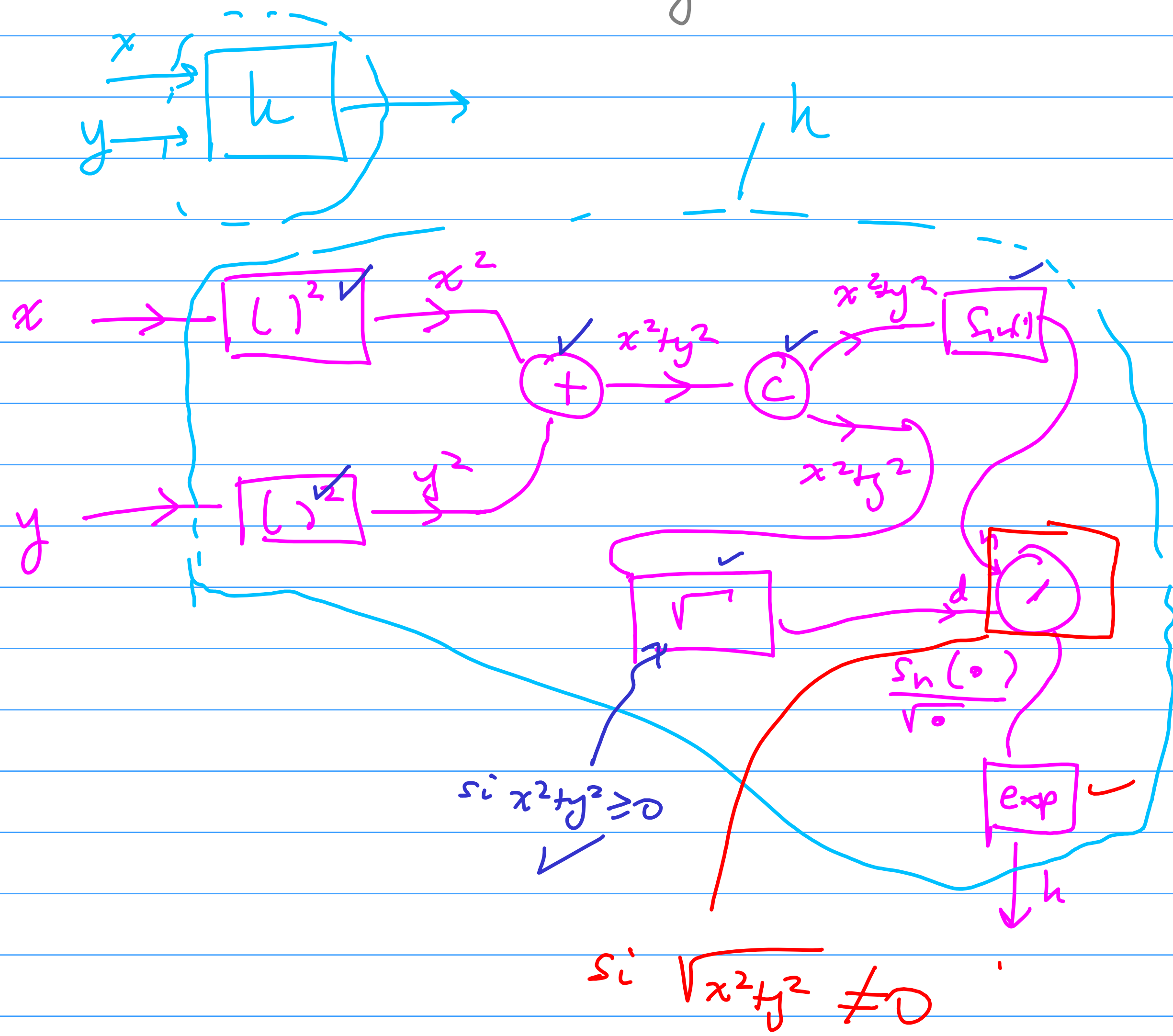
Demuestre que $h(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Recuerde que $h(x,y)$ es continua en $(0,0)$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = h(0,0)$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$h(x,y) = \exp\left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$



Concluimos que $h(x,y)$ es continua cuando $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$, es decir, si $(x,y) \neq (0,0)$

En el origen no sabemos...

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{r\to 0} \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r}\right)$$

Pasamos a polares

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$$

$x^2+y^2 = r^2$

Como exp(x) es continua

$$= \exp\Big(\underbrace{\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r}}\Big) = \exp(0) = 1$$

L'hopital:

$$= \left[\lim_{r\to 0} \frac{\cos(r^2)\, 2r}{1} = 0\right]$$

Como $h(0,0) = 1$ la funcion también es continua en $(0,0)$.