Hoy: Dos aplicaciones (ejercicios) de la regla de la cadena y el Teorema del gradiente (✱✱) ← Lo más importante del Cálculo diferencial multivariado

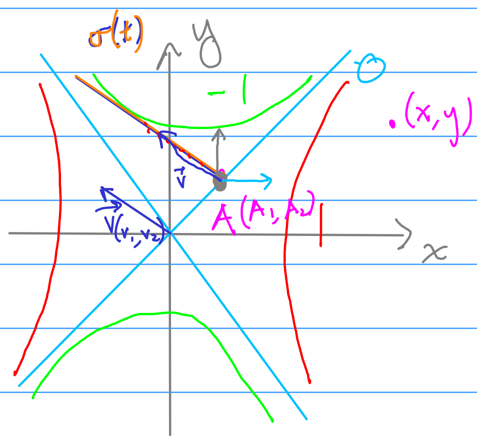
Ejercicio 1: Sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función escalar diferenciable y sean $\vec{A},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ dados.

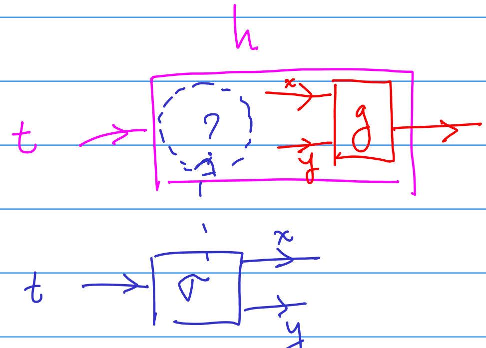
Calcule $\frac{d}{dt}\left(g(\vec{A}+t\vec{v})\right)\Big|_{t=0} = ?$ siguiendo:

(1) Escriba $g(\vec{A}+t\vec{v})=h(t)$ como una composición de dos funciones. ✓

(2) Calcule $h'(0)$ mediante la regla de la cadena ✓

(3) De una interpretación geométrica }





$$\boxed{\sigma(t) = (A_1+tv_1,\ A_2+tv_2)}$$

$$\boxed{\sigma(t)=\vec{A}+t\vec{v}} = (A_1,A_2)+t(v_1,v_2)$$

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\qquad \frac{d}{dt}\left(g(\vec{A}+t\vec{v})\right)\Big|_{t=0}$

Ideas (No necesariamente correctas)

$\sigma(t)=(t^2,t^2)$

$g(\sigma(t))=g(t^2,t^2)\overset{?}{\cancel{=}}g(\vec{A}+t\vec{v})$

$g(\sigma(t))=g(\vec{A}+t\vec{v})=h(t)$

posición de una partícula en el instante t

(1) Defina $\boxed{\sigma(t)=\vec{A}+t\vec{v}}$ $\quad \sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

y note que $h(t)=g(\sigma(t))$. ✓

Con velocidad constante

$\sigma(0) = \vec{A}$ ✓, $\quad \sigma'(t) = \vec{V}$

(2) $\overset{h'(0)}{\overset{\shortparallel}{Dh(0)}} = \underline{Dg(\sigma(0))} \cdot \underline{D\sigma(0)}$

Regla de la cadena

$\sigma(t) = (A_1 + t v_1, \; A_2 + t v_2)$

$D\sigma(t) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $\quad \boxed{D\sigma(0) = \vec{V}}$

$\sigma(0) = \vec{A}$

$Dg(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{A}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{A}) \end{bmatrix}$

$h'(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{A}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

!!

$$\boxed{h'(0) = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(\vec{A})\, v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{A})\, v_2}}$$

$\shortparallel$

$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{A}) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{A}) \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

el lado derecho depende sólamente de

(i) Las derivadas parciales de g en $\vec{A}$

(ii) El vector $\vec{V}$

$h(t)$
$\shortparallel$

(3) $g(r(t))$ = "Como se comporta g a lo largo de los puntos de la recta que empieza en $\vec{A}$ y tiene dirección $\vec{v}$"

$h'(0)$ = "Tasa de cambio de g empezando en $\vec{A}$ si avanzamos una unidad en la dirección de $\vec{v}$"

Def: Si $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar diferenciable definimos el gradiente de g en $\vec{a}$ como el vector:

$$\nabla g(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

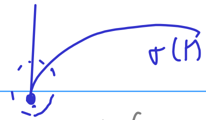
Teorema: Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Sea $\vec{A}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{v}$ unitario.

$$\underbrace{D_{\vec{v}}\, g(\vec{A})}_{\text{Derivada direccional de } g \text{ en } \vec{A} \text{ en dirección } \vec{v}.} = \text{"Tasa de cambio de } g \text{ al avanzar una unidad en dirección de } \vec{v} \text{ iniciando en } \vec{A}\text{"} \rightsquigarrow {}^{\circ}C/m$$

$$\boxed{D_{\vec{v}}\, g(\vec{A}) := \nabla g(\vec{A}) \cdot \vec{v}}$$

Por qué unitario? $h(t) = g(\vec{A} + t\vec{v})$ = "Temperatura en el instante t"

$h'(0)$ = "Tasa de cambio de la temperatura en el tiempo" $\rightsquigarrow$ ${}^{\circ}C/seg$ a vel de $1\ m/seg$ ${}^{\circ}C/m$



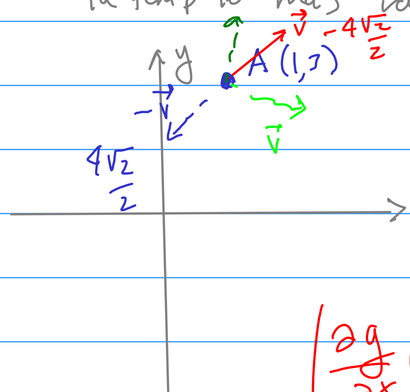
$$\frac{d}{dt} g(\sigma(t))\Big|_{t=0} = \nabla g(A)\cdot \sigma'(0)$$

Ejercicio: $g(x,y) = x^2 - y^2$ temp en °C

en $A = (1,3)$

(a) Si nos movemos en dirección $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ iniciando en $\vec{A}$ que tasa de cambio de temperatura experimentamos?

(b) Iniciando en $\vec{A}$, en qué dirección $\vec{v}$ disminuye la temp lo más rápido posible?



$$D_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} g(1,3) = \nabla g(1,3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -4\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(1,3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(b) Buscamos dirección donde baje lo máximo posible

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ desconocidas

$$D_{\vec{v}} g(1,3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2v_1 - 6v_2$$ ← lo más pequeño posible

$\|\vec{v}\| = 1$

$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\theta)$$

$$\nabla g(1,7)\cdot\vec{V} = \|\nabla g(1,7)\|\cdot\cancel{\|\vec{V}\|}\cos(\theta)$$

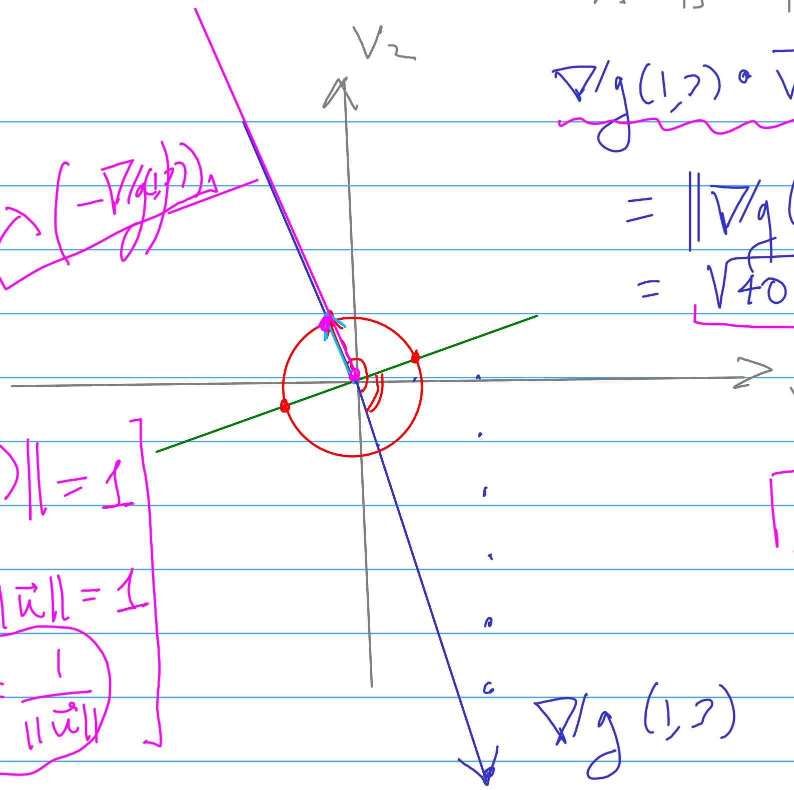
$$= \|\nabla g(1,7)\|\cos\theta$$

$$= \underbrace{\sqrt{40}\,\cos(\theta)}_{\pi\ ?}$$

¿Cuál ángulo escoger?

$$\boxed{\theta = \pi}$$

$\lambda(-\nabla g(1,7))$



$$\|\lambda(-\vec{u})\| = 1$$

? ||

$$|\lambda|\|\vec{u}\| = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$$

Respuesta: La dirección de máximo decremento es

$$\vec{V} = -\frac{\nabla g(1,7)}{\|\nabla g(1,7)\|} = \frac{-\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}}{\left\|-\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}}{\sqrt{40}} = \boxed{\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{40}}\\ \frac{6}{\sqrt{40}}\end{pmatrix}}$$!!