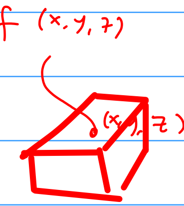
(0) Entrega y parcial (detalles en página web...)

Hoy: Aplicaciones y ejemplos de integración:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ una región sólida y



$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar

$f(x,y,z)$ = "densidad en Kg/m^3 del material de (x,y,z)"

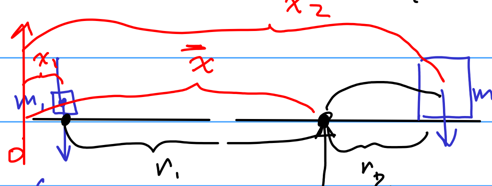
PREGUNTAS:

(1) ¿Cuál es la masa total de E?

$$\left[\ \text{masa}(E) = \iiint_E f(x,y,z)\, dV \ \right]$$

Caso especial:
Si $f(x,y,z) \geq 0$ y $\iiint_E f(x,y,z)\, dV = 1$
entonces
$$\mathbb{P}\big((X,Y,Z) \in B\big) = \iiint_B f(x,y,z)\, dV$$

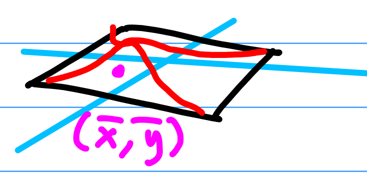
(2) ¿Dónde queda el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$?



$$\left[\ \bar{x} = \frac{\int_0^1 x\, f(x)\, dx}{\int_0^1 f(x)\, dx}\ \right] = \int x \left(\frac{f(x)}{\int_0^1 f(x)\,dx} \right) dx$$

$r_1 m_1 = r_2 m_2 \rightsquigarrow$ $\quad m_1(\bar{x} - x_1) = (x_2 - \bar{x}) m_2 \iff \bar{x}\,\cancel{(m_1+m_2)} = \dfrac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$

(3) ¿Cómo se calcula el momento de inercia de E alrededor de un eje dado?

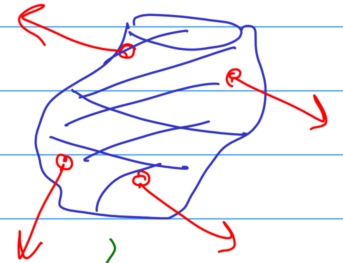


(2) Si $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región sólida esta tiene un centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

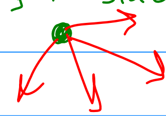
$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\iiint_E x\, f(x,y,z)\, dV}{\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)\, dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\iiint_E y\, f(x,y,z)\, dV}{\text{masa}(E)}$$

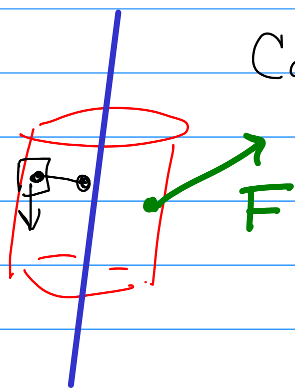
$$\bar{z} = \frac{\displaystyle\iiint_E z\, f(x,y,z)\, dV}{\text{masa}(E)}$$



simplifica $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ traslaciones



(3) Cómo rota el objeto alrededor del eje?



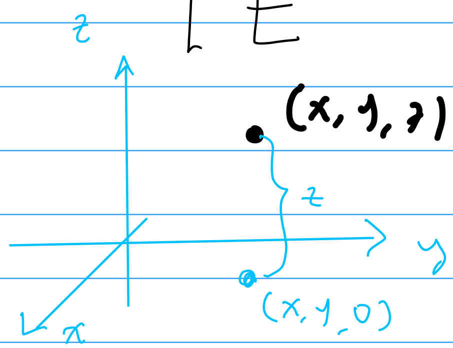
$$\Big[\underbrace{\tau}_{r\times F} = \overbrace{I}^{\text{momento de inercia}} \underbrace{\alpha}_{\text{aceleración angular}}\Big]$$

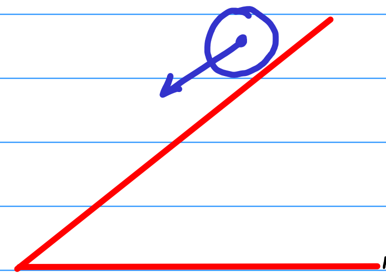
$$I \approx \sum \text{masa}(C_{ijk}) \cdot d(\vec{x}_{ijk}, \text{eje})^2$$

$$I = \iiint_E f(x,y,z)\, d((x,y,z), \text{eje})^2\, dV$$

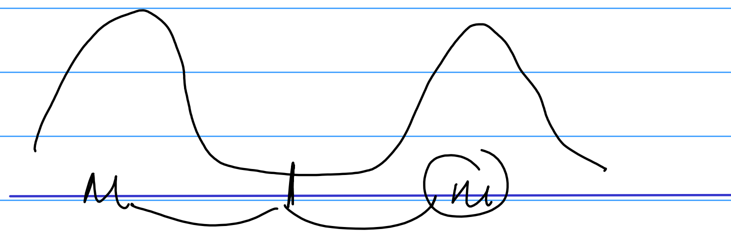
Si el eje es el eje z la fórmula se convierte en

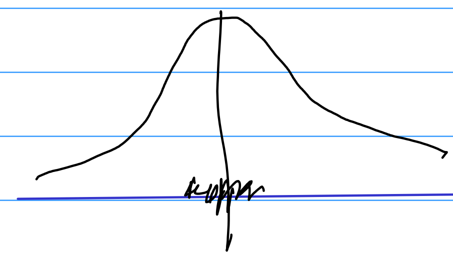
$$I_z := \iiint_E f(x,y,z)\,(x^2+y^2)\,dV$$

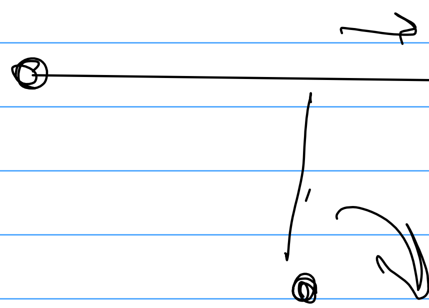




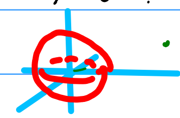
Material extra
sobre momento, de inercia







Ejemplo 1: Sea $B \subseteq \mathbb{R}^3$ la bola de radio 2 centrada en $(0,0,0)$. Si la densidad está dada por $\rho(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ en Kg/m^3.



(a) Calcule la masa de B

(b) Encuentre el centro de masa de B

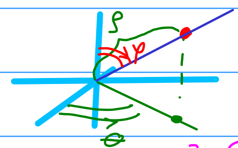
(c) Plantee una integral que calcule el momento de inercia alrededor del eje z.

Solución:

Plantee en cartesianas

(a) $$\text{masa}(B) = \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz\,dy\,dx =$$

Cambio de variable a esféricas



$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$J = \rho^2 \sin\varphi$$

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

en esféricas $$B = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi\, d\theta\, d\rho = \ldots \text{cálculos sencillos} = \ldots$$

(b) Como la región y la densidad son simétricas alrededor del origen

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0,0,0)$$

$$\bar{x} = \frac{\left[\iiint_B x\, e^{(\ )^{\frac{3}{2}}}\, dV\right]}{\text{masa}(B)}$$

integrando es impar luego la int da cero.

(c) $I_z \overset{\text{pto en cartesianas}}{=} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x^2+y^2)\, dV$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$x^2+y^2 = \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta$

$= \rho^2 \sin^2\varphi \left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]$

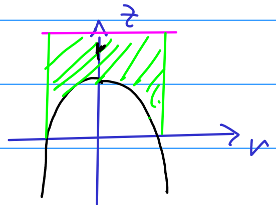
$= \underline{\rho^2 \sin^2\varphi}$

$$\underset{\text{Teo cambio de variable}}{=} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[e^{\rho^3} \rho^2 \sin^2\varphi\right] \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi\, d\theta\, d\rho \underset{\text{Pto dp}}{=} \ldots$$

Ejemplo 2: Sea E el sólido adentro de $x^2+y^2 = 1$ debajo de $z = 4$ y encima de $[z = 1 - x^2 - y^2]$.

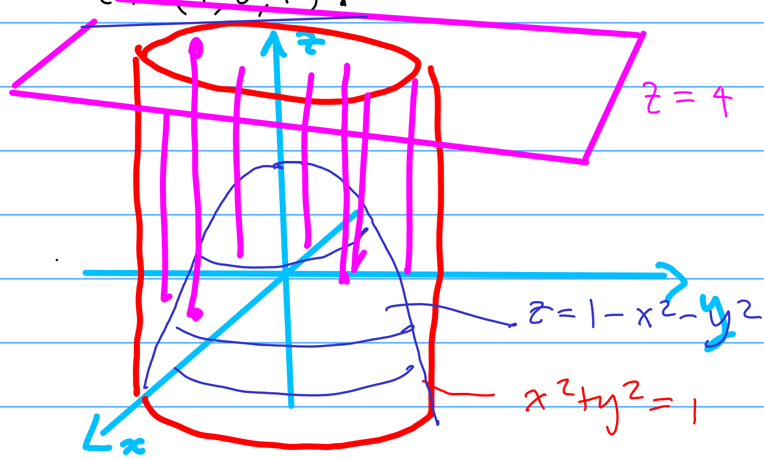
Calcule

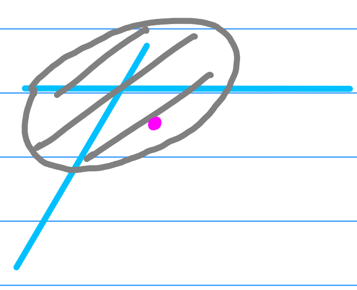
$z = 1 - r^2$



(a) Vol(E)

(b) masa(E) si la densidad es proporcional a la distancia con el eje z y vale 10 kg/m³ en (1, 0, 1).





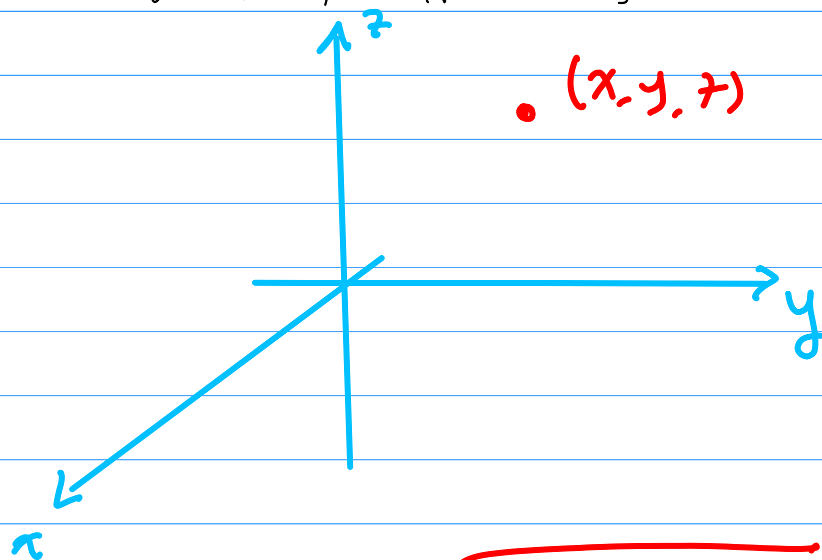
$$Vol(E) = \iiint_E 1 \, dV$$

$$E = \left\{ (r, \theta, z) : \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1-r^2 \le z \le 4 \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{1-r^2}^{4} 1 \; r \; dz \, d\theta \, dr = \dots =$$

final.

Cambio a coordenadas cilíndricas



$$\rho(x, y, z) = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left[10 = \lambda \sqrt{1^2 + 0^2} = \lambda \right]$$

$$\rho(x, y, z) = 10 \sqrt{x^2 + y^2}$$

punto en cartesianas

$$\text{masa}(E) = \iiint_E 10\sqrt{x^2+y^2}\, dV =$$

pasamos a cilíndricas

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{1-r^2}^{4} 10r \cdot r \; dz\, dr\, d\theta = \text{fácil} \ldots =$$