Parcial 1: Hasta la clase de hoy (incluida)

Hoy: (1) Teorema del gradiente

(2) Problemas de optimización (Intro: Qué son?)

Recuerda que si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar diferenciable en $\vec{a}$

vector fila

$$Df(\vec{a}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underbrace{\nabla f(\vec{a})}_{\text{gradiente de } f \text{ en } \vec{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Obs: Sólo las funciones escalares tienen gradientes y esto tiene la misma información que su derivada

y la mejor aprox lineal afín para f cerca de $\vec{a}$ es

$$\ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a}) \overset{\text{matriz} \times \text{vect}}{\cdot} (\vec{x} - \vec{a})$$

$$\boxed{\ell_a(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \underset{\text{producto punto}}{\bullet} (\vec{x} - \vec{a})}$$

Ejemplo: $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + xy$

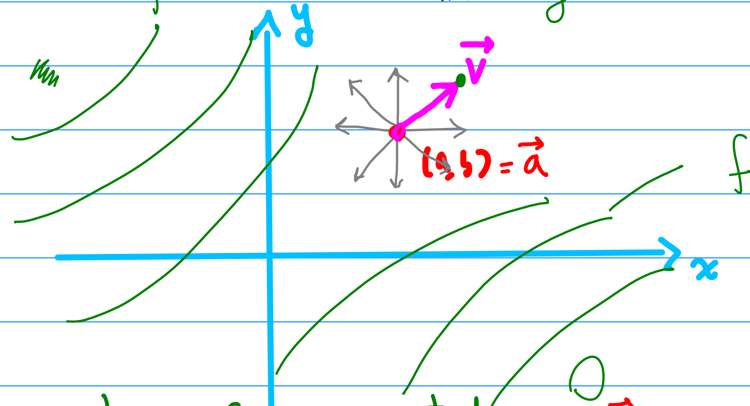
$$\ell_{(1,2)}(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2) \bullet \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} + y \\ \frac{2y}{9} + x \end{bmatrix}(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2 \\ \frac{4}{9} + 1 \end{bmatrix}$$

$$f(1,2) = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} + 2$$

$$\ell_{(1,2)}(x,y) = \left[\frac{1}{4} + \frac{4}{9} + 2\right] + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{13}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = [\quad] + \frac{5}{2}(x-1) + \frac{13}{9}(y-2)$$

Nos dan $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b)\in\mathbb{R}^2$



Cómo cambia f si, estando en $\vec a$, avanzamos en la dirección de $\vec v$?

$[f(\vec a+\vec v) - f(\vec a)]$ muy difícil

en términos de su apox lineal afín

$$\ell_{\vec a}(\vec x) = f(\vec a) + \nabla f(\vec a)\cdot(\vec x - \vec a)$$

$$\underbrace{[\ell_{\vec a}(\vec a+\vec v) - \ell_{\vec a}(\vec a)]} = \underbrace{[f(\vec a) + \nabla f(\vec a)\cdot(\cancel{\vec a}+\vec v-\cancel{\vec a})]} - [f(\vec a)+\underbrace{\nabla f(\vec a)\cdot(\vec a-\vec a)}_{0}]$$

$$f(\vec a+\vec v)-f(\vec a) \approx \underbrace{\nabla f(\vec a)\cdot\vec v}_{\text{muy simple}}$$

Def: La tasa de cambio de $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ en $\vec a$ en la dirección de $\vec v$ unitario es

$$\underbrace{D_{\vec v} f(\vec a)} = \nabla f(\vec a)\cdot\vec v$$

la derivada direccional de f en $\vec a$ en la dirección de $\vec v$.

número 8 (-45)

"por cada unidad que me muevo en dirección de v arrancando en $\vec a$ aumenta f en 8"

(disminuyo f en 45

Obs: Para calcular derivadas direccionales es necesario que el vector $\vec v$ sea unitario.

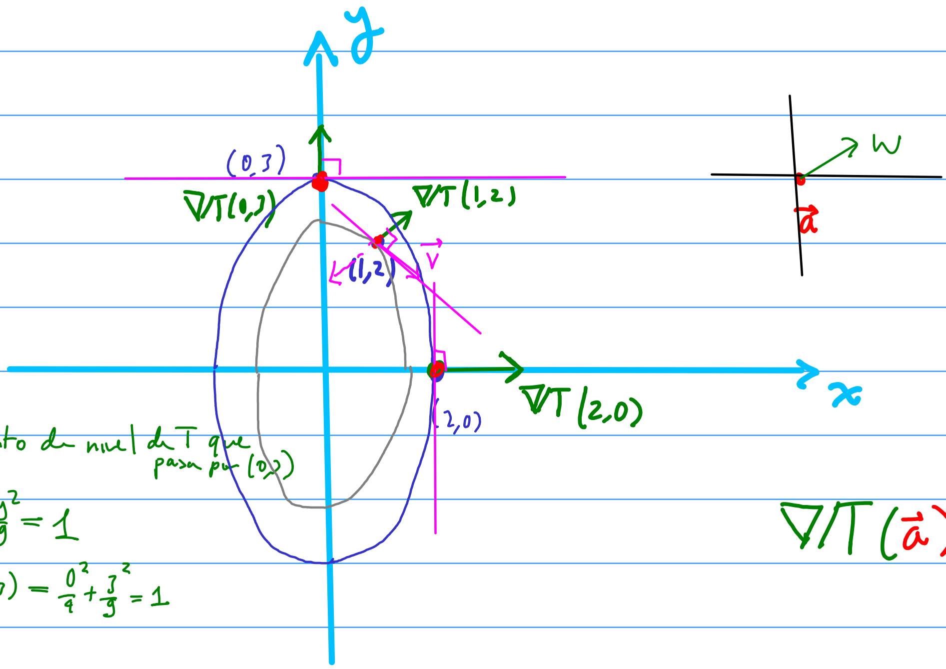
$T(x,y)=$ "Temperatura en °C de (x,y)"

Ejercicio: $T(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ $\qquad T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) Calcule $\nabla f(2,0)$, $\nabla f(0,3)$, $\nabla f(1,2)$ y dibújelos.

(b) En qué dirección $\vec{v}$ iniciando en $(1,2)$ deberíamos avanzar para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible?

(c) Dibuje los conjuntos de nivel que pasan por $(2,0)$, $(0,3)$ y $(1,2)$. Qué relación tienen con los gradientes que calculó en (a)?



conjunto de nivel de T que pasa por (0,3)

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$T(0,3) = \dfrac{0^2}{4} + \dfrac{3^2}{9} = 1$

$\nabla T(\vec{a}) = \vec{w}$

(a) $T(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

$\nabla T(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{2y}{9} \end{bmatrix}$

$\nabla T(2,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[\nabla T(0,3)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$\nabla T(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$

(b)

$D_{\vec{v}} f(1,2) = \overset{g}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$= \| [g] \| \cdot \| [\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}] \| \cos(\theta_{g\vec{v}})$

tasa de cambio es:

0, si $[\vec{v} \perp \nabla T(\vec{a})]$

máxima, si $\vec{v} = \dfrac{\nabla T(\vec{a})}{\|\nabla T(\vec{a})\|}$

mínima, si $\vec{v} = -\dfrac{\nabla T(\vec{a})}{\|\nabla T(\vec{a})\|}$

Teorema [del gradiente]

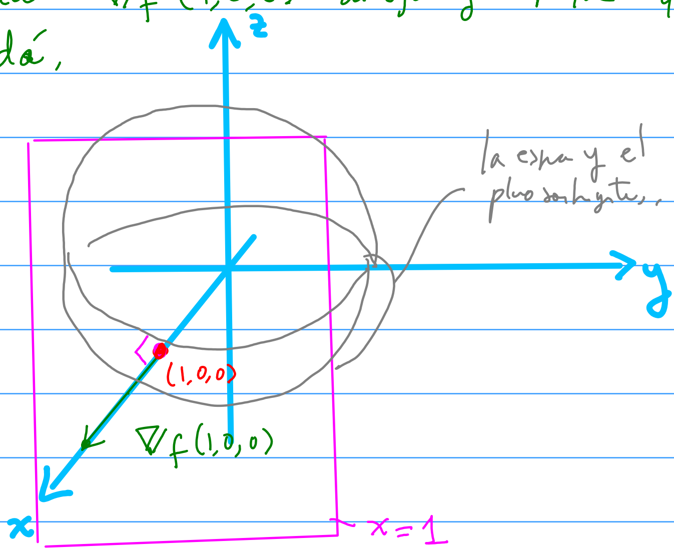
Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable en $\vec{a}$ y suponga que $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Entonces:

(1) $\vec{v} = \dfrac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$ es la dirección de máximo crecimiento para f en $\vec{a}$.

(2) $\nabla f(\vec{a})$ es el vector normal del hiperplano tangente al conjunto de nivel de f que pasa por $\vec{a}$.

Ejemplo: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \qquad f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) Calcule $\nabla f(1,0,0)$ dibújelo y explique qué información nos dá,



$[x^2+y^2+z^2=1]$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$2(x-1) = 0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\left[\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}\right] \qquad \nabla f(1,0,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$