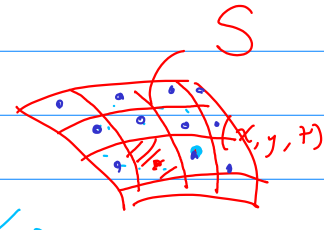
$\boxed{\text{Hoy}}$: Integrales sobre superficies. S — superficie parametrizada

Hay dos tipos:

(a) $\displaystyle\iint_S \underbrace{f}_{\text{función escalar}} \, dS =$ (Problema) clase anterior.
→ Teorema (¿Cómo se calcula?)
→ Ejemplo

(b) $\displaystyle\iint_S \underbrace{F}_{\text{campo vectorial}} \, d\vec{S} =$ Problema
Teorema (cómo se calcula)
Ejemplo

(a) Problema: Tenemos una lámina en $\mathbb{R}^3$



Suponga que $\rho(x,y,z) =$ "densidad en Kg/m^2 del material de (x,y,z)"

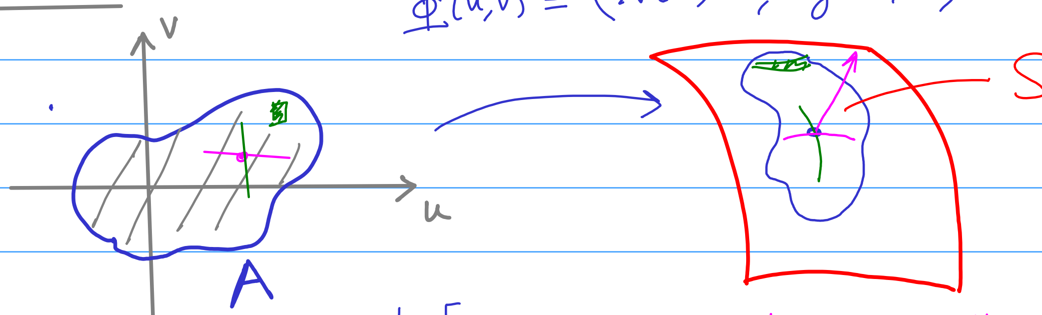
¿Cuál es la masa total?

$$\underbrace{\lim_{N\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\left[\rho(\vec{x}_{ij}^{\,*}) \, \text{Área}(R_{ij}) \right]}_{1} \right]}_{\left[\iint_S \rho \, dS\right]} = \text{Masa total}$$

Teorema: [¿Cómo se calcula?]

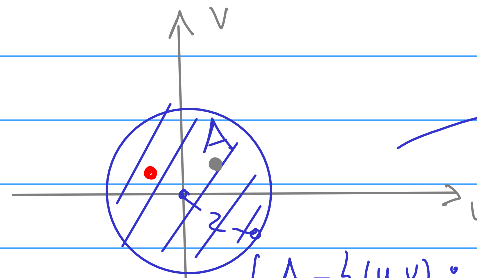
Parametrización

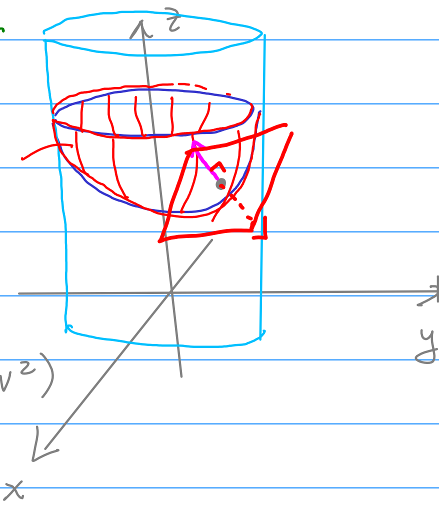
$$\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$



$$\iint_S \rho(x,y,z) \, dS = \underbrace{\left[\iint_A \rho(\Phi(u,v)) \underbrace{\| \Phi_u \times \Phi_v \|}_{\text{longitud del normal de la param.}} \, dA \right]}_{\text{fácil!}}$$

Ejemplo: Calcule el área superficial de la parte de la superficie ($z = x^2+y^2+5$) que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2 = 4$.





$$\begin{cases} A = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 4\} \\ \Phi(u,v) = (\underbrace{u}_{x}, \underbrace{v}_{y}, \underbrace{5+u^2+v^2}_{z}) \end{cases}$$

$$\text{Área}(S) = \iint_S 1 \, dS$$

$\boxed{\text{Obs:}}$ Si $\rho(x,y,z) = xyz$

$$\iint_S \rho \, dS = \iint_A uv(5+u^2+v^2) \cdot \| \, \|$$

$\sqrt{1+4u^2+4v^2}$ dA

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_u = (& 1, & 0, & 2u) \\ \Phi_v = (& 0, & 1, & 2v) \end{array}$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = (-2u)i - j(2v) + k(1)$$

$$= (-2u, -2v, 1) = N(u,v)$$

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{1^2 + 4u^2 + 4v^2}$$

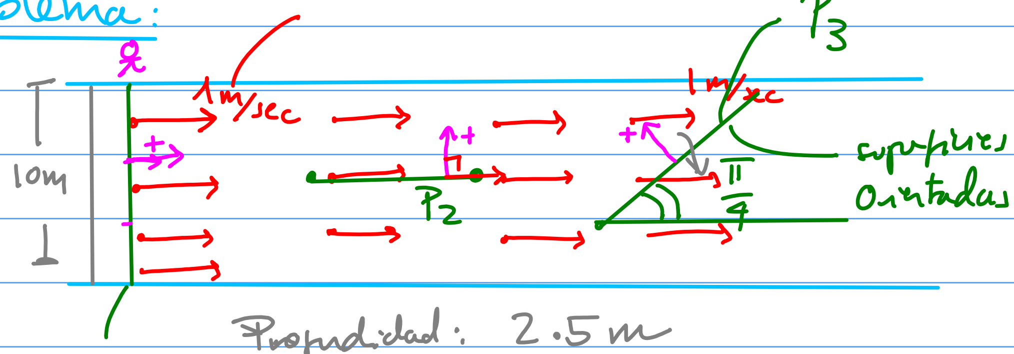
$$\iint_S 1 \, dS = \left[\iint_A \sqrt{1+4u^2+4v^2} \, dA \right] = \ldots$$

!!

Pasar a polares y seguir...

(b) Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

Problema:



Profundidad: 2.5 m en todas partes

m^3/seg − GASTO?

Cuánta agua cruza la red cada segundo?

(P1): $\underbrace{10\,m \times 2.5\,m}_{\text{Área}} \times \underbrace{1\,m/sec}_{\text{velocidad a través de la red}} = \underbrace{25\,m^3/sec}_{\text{GASTO.}}$

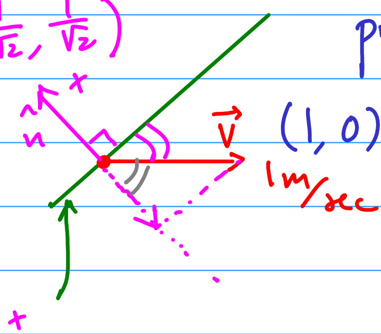
(P2): $\overbrace{10\,m \times 2.5\,m} \times \overbrace{0\,m/sec} = 0$

(P3): $\overbrace{10\,m \times 2.5\,m}^{\text{Área}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{25}{\sqrt{2}}\,m^3/seg$

$\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

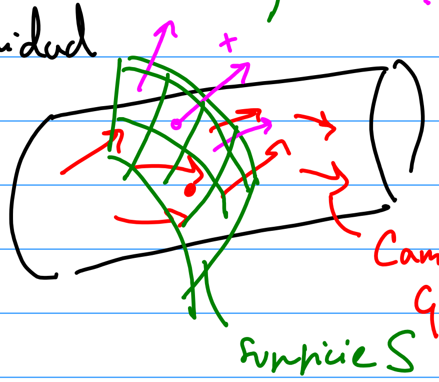
$\hat{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\operatorname{proy}_{\hat{n}} \vec{v} = \left(\underbrace{\vec{v}\cdot\hat{n}}_{=\,-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\hat{n}$



En cada pedazo medimos cuánto del campo va en dirección normal.

En realidad



$$= \iint_S q\, dS.$$

superficie orientada

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[G(\vec{x_{ij}^*}) \cdot \frac{N}{\|N\|} \right] \text{Area}(R_{ij})$$

con la orientación correcta

$$= \iint_S G \, d\vec{S}$$

Flujo de G a través de la superficie S.

<u>Teorema</u> (¿Cómo se calculan int de flujo?)

Si $\Phi(u,v)$ es una parametrización de S para (u,v) en A y $\Phi_u \times \Phi_v$ tiene la orientación que queremos entonces:

Función escalar sobre región sólida en $\mathbb{R}^2$

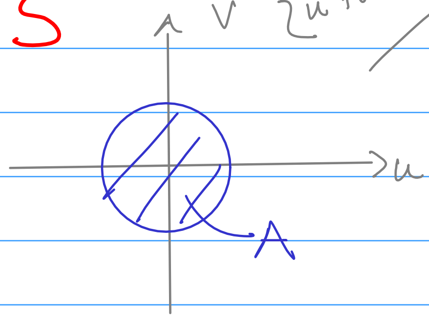
$$\iint_S G \, d\vec{S} = \left[\iint_A G(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v \, dA \right]$$

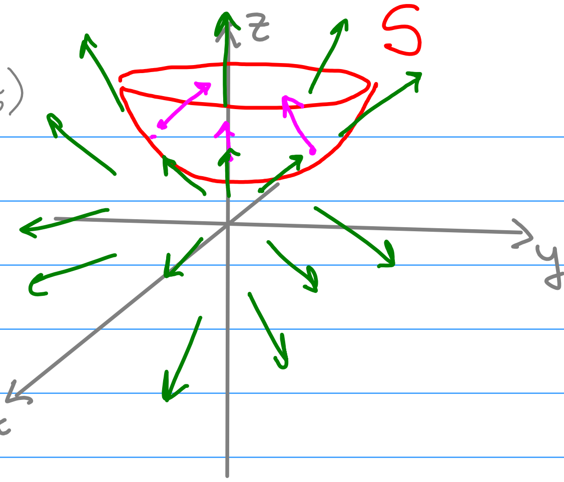
<u>Ejercicio:</u> Sea S la superficie del ejercicio anterior y sea $G(x,y,z) = (x,y,z)$.
Calcule el flujo de G a través de S con la orientación hacia arriba (i.e. con $z>0$).

$$\iint_S G \, d\vec{S} = ?$$

G

$$\begin{cases} \Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2+5) \\ u^2+v^2 \le 4 \end{cases}$$





$$\iint_S G(x,y,z)\, dS = \iint_A \underbrace{\left(G(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v \right)} dA$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \Phi_u = & (1, & 0, & 2u) \end{array}$$

$$\Phi_v = (0, 1, 2v)$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = (-2u, -2v, 1)$$

Tiene la orientación correcta (porque $z>0$)

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ \Phi(u,v) = & (u, & v, & 5+u^2+v^2) \end{array}$$

$$G(x,y,z) = (x, y, z)$$

$$G(\Phi(u,v)) = (u, v, 5+u^2+v^2)$$

$$G(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v = (-2u, -2v, 1) \cdot (u, v, 5+u^2+v^2)$$

$$= -2u^2 - 2v^2 + 5 + u^2 + v^2$$

$$= 5 - u^2 - v^2$$

$$= \iint_A (5-u^2-v^2)\, dA = \ldots$$