Hoy: (1) Campos vectoriales conservativos (PARTE 2)
(2) Superficies Parametrizadas.

Repaso, clase anterior:

Si $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ es un campo vectorial y $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\{a \le t \le b\}$ es una curva parametrizada entonces:

TRABAJO DE F a lo largo de σ

$$\left[\int_\sigma F\, d\vec{s}\,\right] = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt$$

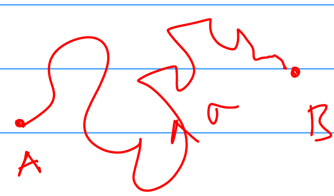
Obs: Para algunos campos vectoriales **(CONSERVATIVOS)** se puede calcular TRABAJO sin parametrizar.

Def: El campo $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es conservativo si existe $U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable que satisface

$$\nabla U(x,y,z) = F(x,y,z).$$

y U se llama un POTENCIAL para F

Teorema (TFCIL):



$$\int_\sigma F\, d\vec{s} = U(B) - U(A)$$

Preguntas: (1) Cómo saber si un F dado es conservativo?
(2) Cómo calcular un potencial.

Def: Si $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lo podemos escribir así:

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), \ F_2(x,y,z), \ F_3(x,y,z))$$

$F_i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$

ROTACIONAL DE F

$$\overbrace{\nabla \times F}^{\text{rot}(F)} := \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

NABLA

$$i\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

vector "Rotacional de F"

Lema: Sea F un campo vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^3$

(1) Si $\nabla \times F \neq \vec{0} \Rightarrow F$ **NO ES** conservativo.

(2) Si $\nabla \times F = \vec{0}$ y F está definido en una región sin huecos ("simplemente conexa") $\Rightarrow F$ **SI ES** conservativo.

Ejemplo: $F(x,y,z) = (xy, \ y, \ \sin(z))$

¿Es F conservativo?

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y & \sin(z) \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(0-x) =$$

$$= (0, \ 0, \ -x) = \nabla \times F$$

Por lema, parte (1) F NO ES conservativo.

$F(x,y) = (-y, x)$ en $\mathbb{R}^2$? Extendemos el campo vectorial a $\mathbb{R}^3$ y usamos nuestra info de $\mathbb{R}^3$. así

$$G(x,y,z) = (-y,\ x,\ 0)$$

$$\nabla \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(1-(-1)\right) + \hat{i}\,(\ + \hat{j}\,0$$

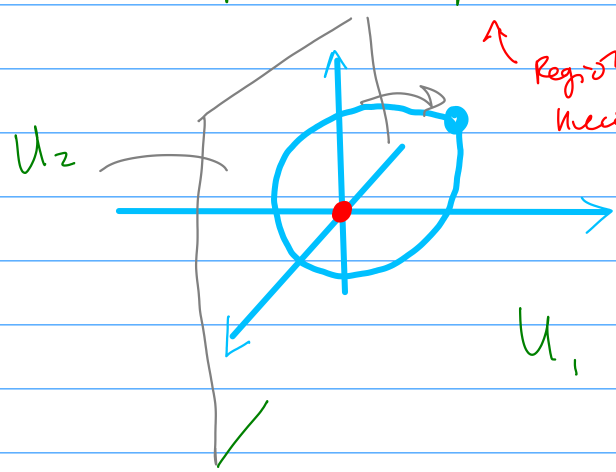
$$= (m,\ m,\ 2) \neq \vec{0}$$

no conservativo !

$$F(x,y,z) = -\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$$

está definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

Región con huecos.



Ej: $G(x,y) = (4x+y,\ 6y^2+x)$

(a) Es G conservativo ?

(b) En tal caso construya un potencial.

(c)

$(1,0)$ $(7,3)$ σ

$\int_\sigma F\, d\vec{s} = ?$

(a) Defina $F(x,y,z) = (4x+y,\ 6y^2+x,\ 0)$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4x+y & 6y^2+x & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(0) - \hat{j}\,(0) + \hat{k}\,(1-1) = (0,0,0)$$

El campo está definido en todo $\mathbb{R}^3$ que es una región sin huecos luego F y por lo tanto G son conservativos.

(b) $G(x,y) = (4x+y,\ 6y^2+x)$

Queremos $U(x,y)$ con

"Cons.te respecto a x"

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 4x+y \longrightarrow \left[U(x,y) = 2x^2 + xy + \underbrace{A(y)} \right] \quad (*) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 6y^2 + x \end{cases}$$

Sustituyendo $(*)$ en (2) tenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \boxed{x + A'(y) = 6y^2 + x}$$

$$\left[A'(y) = 6y^2 \right] \Rightarrow A(y) = 2y^3 + K$$

De ahí

$$\boxed{U(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^3 + K}$$

$$\int_\sigma F\,d\vec{s} = U(7,3) - U(1,0)$$
$$= 2\cdot 49 + 3\cdot 7 + 2\cdot 27 - 2$$