Hoy: ¿Qué es la derivada de una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$?

Es una MATRIZ de $m \times n$

filas — columnas

∴

→ (1) ¿Qué relación tiene con f?

→ (2) Cómo se calcula

→ (3) Cómo se usa

Ejercicio (de clase anterior $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$)

Sea $f(x,y) = 100 - 2x^2 - xy - 3y^2$ de f

(1) Calcule TODAS las derivadas parciales en $(1,3)$

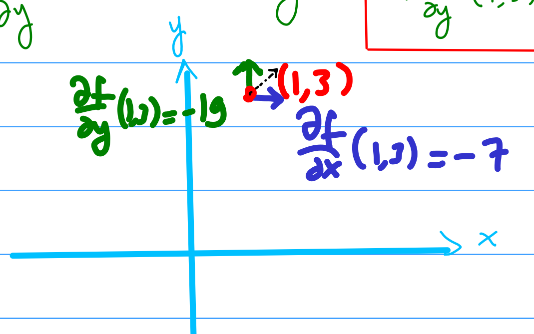
(2) Escriba la función lineal afín $\ell_{(1,3)}(x,y)$ que mejor aproxima a f cerca de $(1,3)$

(3) Qué relación hay entre las gráficas de f y de ℓ? (Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(1,3,f(1,3))$.)

Solución:

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -4x - y$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3) = -7$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x - 6y$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -19$



(2) $$\boxed{\ell_{(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}$$

$$= C + A(x-a) + B(y-b)$$

Si f es diferenciable? este es la mejor aprox lineal

$f(1,3) = 100 - 2\cdot 1^2 - 1\cdot 3 - 3\cdot 3^2 = 68$

$\ell_{(1,3)}(x,y) = \left[f(1,3) + (-7)(x-1) + (-19)(y-3) \right]$

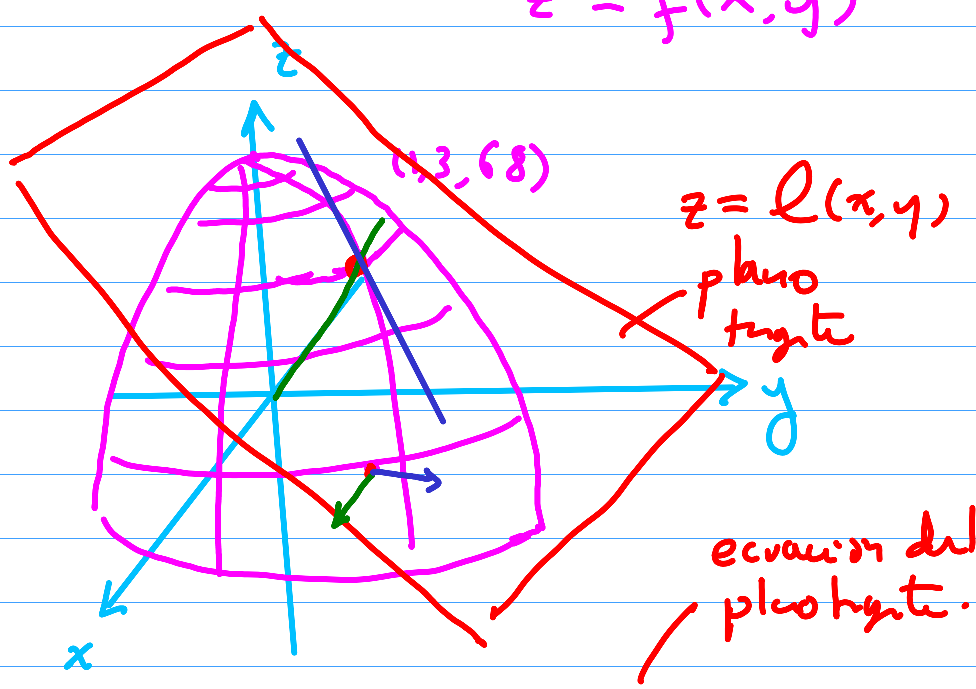
$\ell_{(1,3)}(x,y) = 68 - 7x + 7 - 19y + 57$

$$\boxed{\ell_{(1,3)}(x,y) = 132 - 7x - 19y}$$

Si $f(x,y)$ es dif esta función lineal es una muy buena aprox para $f(x,y)$ cerca de $(1,3)$.

$z = f(x,y)$

(3)



$z = 132 - 7x - 19y$

Suponga que $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función. $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

Def: f es diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ si existe una matriz $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left[\frac{\| f(\vec{x}) - \overbrace{[f(\vec{a}) + T(\vec{x} - \vec{a})]}^{\ell_{\vec{a}}(\vec{x})} \|}{\| \vec{x} - \vec{a} \|} \right] = 0$$

Teorema: Si f es diferenciable ?? entonces la matriz T es única y se llama la derivada de f en $\vec{a}$

$$\underset{\substack{\| \\ T}}{Df(\vec{a})} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline m, \; i & \left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{a}) \right] \\ & n \end{array}$$

... derivada parcial

Útil:

$$*\quad \left[\ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \right]$$

Teorema: [Cómo verifica que f sea diferenciable]

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si TODAS las derivadas parciales $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right]$ son CONTINUAS cerca de $\vec{x} = \vec{a}$ entonces f es diferenciable en $\vec{a}$.

Ejercicio: (Continuación del anterior)

(1) Sea $f(x,y) := 100 - 2x^2 - xy - 3y^2$

(a) Calcule $Df(1,3)$

(b) Calcule $\ell_{(1,3)}(x,y)$ usando fórmula $*$

(c) Demuestre que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{(2)}$ $H(x,y,z) = (xyz,\ 100 - 2x^2 - xy - 3y^2)$

Calcule $DH(1,1,1)$

Solución:

(1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

(a) $$Df(1,3) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Df(1,3) = [-7, -19]$$

$\vec{x} = (x,y) \qquad \vec{a} = (1,3)$

(b) $$f(\vec{a}) + Df(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = \ell_{\vec{a}}(\vec{x})$$

$$\ell_{(1,3)}(\vec{x}) = f(1,3) + [-7, -19] \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= 68 + (-7, -19) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}$$

$(*)$ $$\boxed{\ell_{(1,3)}(x,y) = 68 + (-7)(x-1) + (-19)(y-3)}$$

(c) Para demostrar que f es diferenciable

(1) Calculamos TODAS las $m \cdot n$ derivadas parciales

(2) Verificamos que cada una sea CONTINUA (árbol de descripción) ✓

(3) Por el Teo de clase $\Rightarrow$ f es diferenciable

En nuestro caso:

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x - y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y - x$

(2) Ambas derivadas parciales son funciones lineales y por ello automáticamente continuas en todo $\mathbb{R}^2$

(3) Como las parciales son continuas, por el Teorema de clase podemos concluir que $f(x,y)$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y en particular en $(1,3)$ luego (✱) es una MUY BUENA aproximación lineal para $f(x,y)$ cerca de $(1,3)$.

$$\boxed{f(x,y) = \ell_{(1,3)}(x,y) + \underbrace{\text{error}}_{o(\|(x,y)-(1,3)\|)}}$$

$$H(x,y,z) = (xyz,\ 100-2x^2-xy-3y^2)$$

(2) $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$H(x,y,z) = (H_1(x,y,z),\ H_2(x,y,z))$$

$$DH(1,1,1) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial H_1}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial H_1}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial H_2}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial H_2}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial H_2}{\partial z}(1,1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

$H_1(x,y,z) = xyz$

$$DH = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ -4x-y & -x-6y & 0 \end{bmatrix}$$

$$DH(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ell_{(1,1,1)}(x,y,z) = H(1,1,1) + DH(1,1,1)\cdot(\vec{x}-\vec{a})$$

$$= H(1,1,1) + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{bmatrix}$$

$$\ell_{(1,1,1)}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 94 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (x-1)+(y-1)+(z-1) \\ -5(x-1)-7(y-1) \end{bmatrix}$$

$$\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\ell_{(1,1,1)}(x,y,z) = \big(1+(x-1)+(y-1)+(z-1),\ 94-5(x-1)-7(y-1)\big)$$

lineal

Note que H es diferenciable porque TODAS sus derivadas parciales son polinomios y por lo tanto continuas.