Hoy: (1) Terminar el ejemplo final de la clase anterior
(plano tangente a la gráfica de una función escalar)

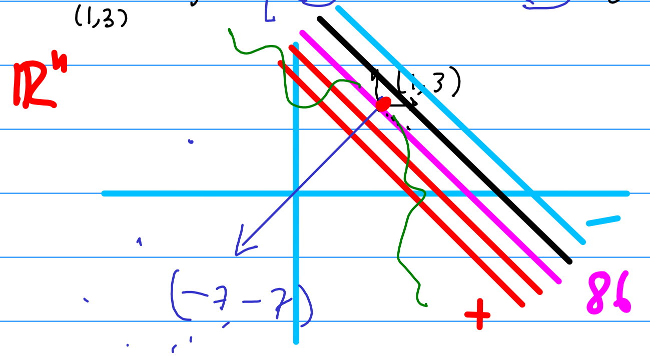
(2) La (MATRIZ) derivada de una función.
$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
(clase anterior $n \le 2$, $m=1$)

(1) Nos dan $f(x,y) = 100 - 2x^2 - xy - y^2$. Cómo se comporta $f(x,y)$ cerca de $(1,3)$?

$$\left[\, Df(1,3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,3), \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)\right) \right]$$

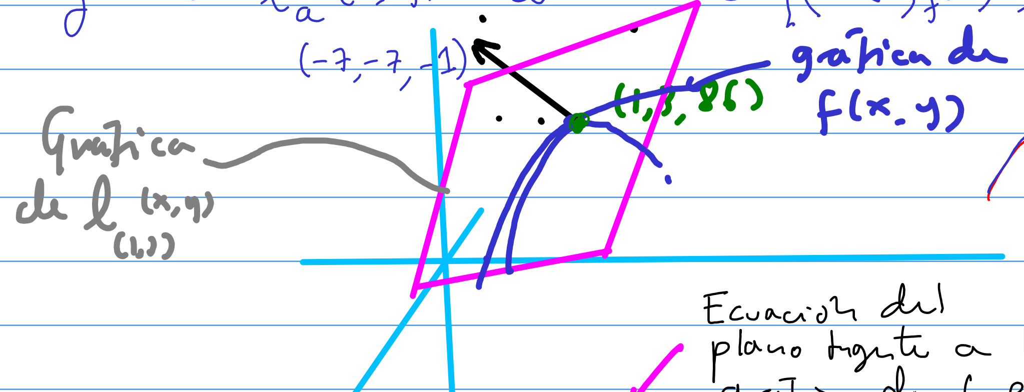
El cálculo vectorial nos permite aproximar una función diferenciable (COMPLICADA) mediante funciones lineales afines (SIMPLE)

$$\ell_{(1,3)}(x,y) = \left[(-7)(x-1) + (-7)(y-3) + 86\right]$$



$$\frac{f(x,y) - \ell_{(1,3)}(x,y)}{\|(x,y)-(1,3)\|} \longrightarrow 0$$

Cómo se relaciona la gráfica de $f(x,y)$ y de $\ell_a(x,y)$ cerca de $[(\vec{a}, f(\vec{a}))]$



$$\boxed{z = -7(x-1) - 7(y-3) + 86}$$

Ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(\vec{a}, f(a))$.

Obs: Esto es verdad para funciones DIFERENCIABLES $g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

La gráfica de $\ell_{\vec{a}}(\vec{x})$ es el plano tangente a la gráfica de $g(\vec{x})$ en $(\vec{a}, f(\vec{a}))$.

$z = -7x - 7y + 114$ $\qquad [0 = -7x - 7y - z + 114]$

$\vec{N} = (-7, -7, -1) \qquad (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{N} = 0$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

(2) Funciones diferenciables en $\mathbb{R}^n$. $\qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Def: Una función $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{a}$ si existe una matriz T de $m \times n$ que satisface

$$\left[\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\left\| g(\vec{x}) - \overbrace{\left[g(\vec{a}) + T(\vec{x} - \vec{a}) \right]}^{\ell_{\vec{a}}(\vec{x})} \right\|}{\| \vec{x} - \vec{a} \|} = 0 \right]$$

Obs: $g(\vec{x}) = (g_1(x), g_2(x), \dots, \underbrace{g_m(x)}_{\text{funciones en valores}})$

(2.1) Usando el razonamiento de la clase anterior es fácil encontrar la matriz derivada $T = Dg(\vec{a})$

$$Dg(\vec{a}) = \begin{array}{c|c} & x_1 \quad x_2 \quad \overset{j}{x_3} \quad \dots \quad x_n \\ \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ i \;\; \vdots \\ g_m \end{array} & \begin{bmatrix} & & \\ & \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \right] & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

se calculan como en la clase pasada

(2.2) La mejor aproximación lineal afín a $g(\vec{x})$ en $\vec{x} = \vec{a}$ es

Matriz x Vector

$$\left[\ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = g(\vec{a}) + Dg(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \right]$$

[(2.3) Todavía no sabemos como verificar si una función es diferenciable .... ?? (ver más adelante)]

$$H:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Ejercicio: Sea $H(x,y) = (xy,\ \sin(x+y),\ x-y)$

(a) Calcule $\left[DH\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(b) Escriba la mejor aprox lineal afín para H cerca de $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

(a) $\left(\underset{x}{\frac{\pi}{4}},\ \underset{y}{\frac{\pi}{4}}\right)$

$$\begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline xy & y & x \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ x-y & 1 & -1 \end{array} = DH(x,y)$$

Sol:

$$\boxed{DH\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

(b) $\ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = H(\vec{a}) + DH(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$

$\vec{a} = \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad H\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi^2}{16},\ 1,\ 0\right)$

$$\ell_{\vec{a}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{16} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{4} \\ y-\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

$$\ell_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}(x,y) = \left[\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{16} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(y-\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left[H(x,y) = (xy,\ \sin(x+y),\ x-y)\right]$$

$$\left[t\ \ell^{22}_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}(x,y) = \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right),\ 1,\ x-y\right)\right]$$

Teorema (¿Cómo chequear que una función dada es diferenciable?)

Sea $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si TODAS las derivadas parciales $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x})$ son funciones continuas en $\vec{a}$ entonces g es DIFERENCIABLE en $\vec{a}$.

Ejemplo:

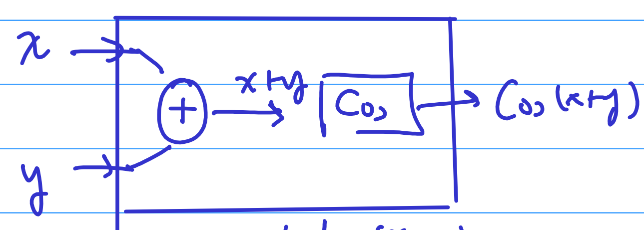
(c) Verifique que $H(x,y)$ del ejercicio anterior es diferenciable en $(1,3)$.

Solución: $\left[H(x,y) = (xy,\ \sin(x+y),\ x-y)\right]$

Sabemos que

$$DH(x,y) = \begin{array}{c} \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} y & x \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} = \cos(x+y)$$



en todo (x,y) es continua porque es composición de continuas.

por el Teo anterior

Así que todas las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ $\Longrightarrow$ $H(x,y)$ sí es diferenciable en $(1,3)$.