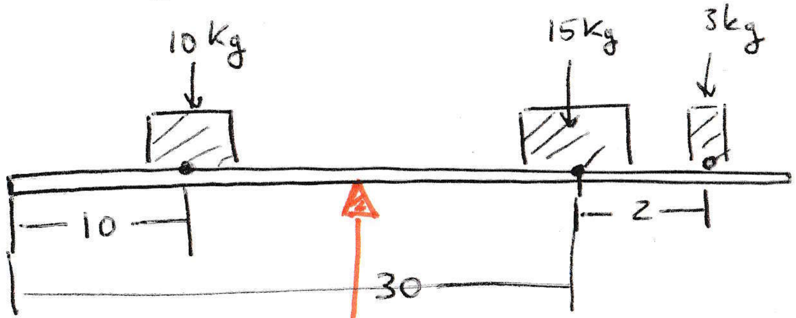
Aplicaciones físicas (y probabilistas) de las integrales :

En esta clase estudiaremos ~~tres~~ dos usos claves de las integrales en física mecánica y en probabilidad. Estas ideas son muy importantes porque permiten pasar de objetos "PUNTUALES" a objetos "EXTENSOS" permitiéndonos aplicar las ideas básicas de la mecánica a situaciones reales. Estas son:

	FÍSICA	PROBABILIDAD.
(1)	Cálculo de centros de masa /	Cálculo de valores esperados
(2)	Cálculo de momentos de Inercia	/ Cálculo de matrices de Varianza/Co-varianza.

Centro de masa:

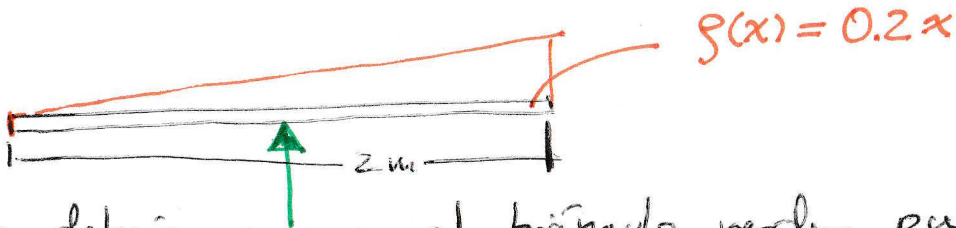
Problema: (a) Tenemos una barra metálica homogénea con pesos (ver figura)



POR FAVOR DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLO UD MISM@...

Dónde debería ponerse el triángulo anaranjado para que la barra quede perfectamente balanceada?

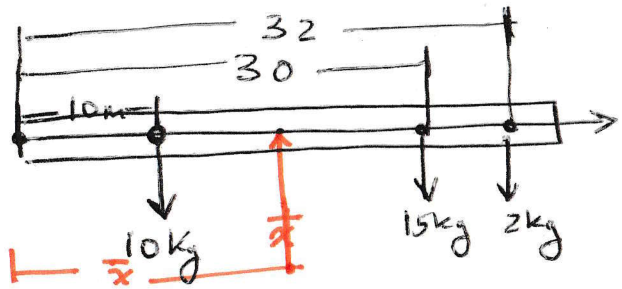
(b) Tenemos una barra metálica de densidad creciente



Dónde debería ponerse el triángulo verde para que la barra quede perfectamente balanceada?

Solución:

(a)



Si la barra está perfectamente balanceada entonces el torque total alrededor del punto $\bar{x}$ es 0.

Calculamos los torques:

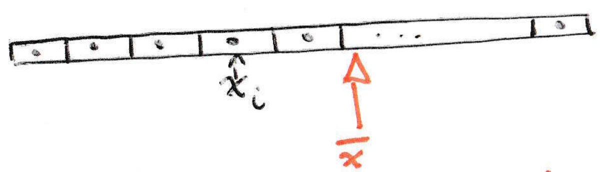
$$(10-\bar{x})\cdot 10 + (30-\bar{x})\,15 + (32-\bar{x})\cdot 2 = 0$$

y despejando:

$$10\cdot 10 + 30\cdot 15 + 32\cdot 2 = \bar{x}\,(10+15+2)$$

luego
$$\bar{x} = \frac{10\cdot 10 + 30\cdot 15 + 32\cdot 2}{10+15+2} \approx \boxed{22.74\,m}$$

Si fueran muchos pesos: N, de longitud $\frac{1}{N}$



$$(x_1-\bar{x}_3)\left[\rho(x_1)\frac{1}{N}\right] + \dots + (x_N-\bar{x})\left[\rho(x_N)\frac{1}{N}\right] = 0$$

$$\boxed{x_1\,\rho(x_1)\frac{1}{N} + x_2\,\rho(x_2)\frac{1}{N} + \dots + x_N\,\rho(x_N)\frac{1}{N} = \bar{x}\left(\rho(x_1)\frac{1}{N} + \dots + \rho(x_N)\frac{1}{N}\right)}$$

(b)

$$\int_R x\,\rho(x)\,dx = \bar{x}\left(\int_R \rho(x)\,dx\right) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \_\_\_\_\_\_\_\_}$$

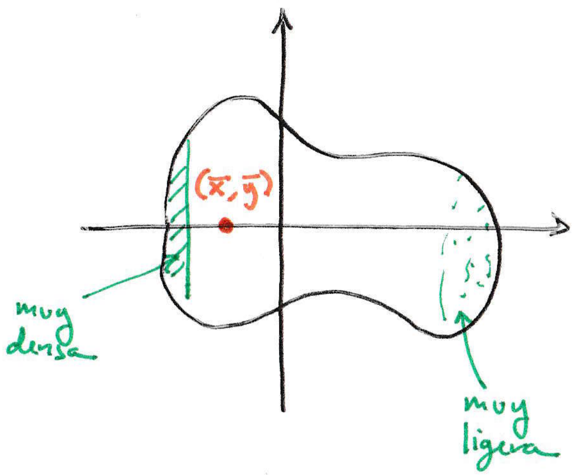
Ejemplo:

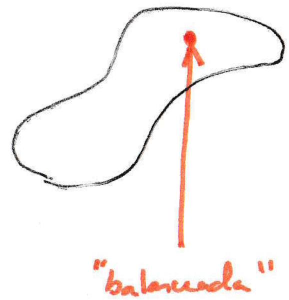
$$\int_0^2 x\,(0.2x)\,dx = \frac{0.2\,x^3}{3} = \frac{8\times 0.2}{3} \approx 0.53$$

$$\int_0^2 (0.2)\,x\,dx = \frac{0.2\cdot 4}{2} = 0.4\,, \quad \bar{x} = \frac{0.53}{0.4}$$

$$\boxed{\bar{x} = 1.325\ m}$$

De la misma manera, podemos preguntar, encuentre el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ en el cual podamos "balancear" a la región plana $R \subseteq \mathbb{R}^2$, si su densidad es $\rho(x,y)$ (en Kg/m^2)





Def: Las coordenadas cartesianas del centro de masa son:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\iint\limits_R x\,\rho(x,y)\,dA}{\iint\limits_R \rho(x,y)\,dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint\limits_R y\,\rho(x,y)\,dA}{\iint\limits_R \rho(x,y)\,dA}}$$

y de manera semejante si R es una región sólida en $\mathbb{R}^3$.

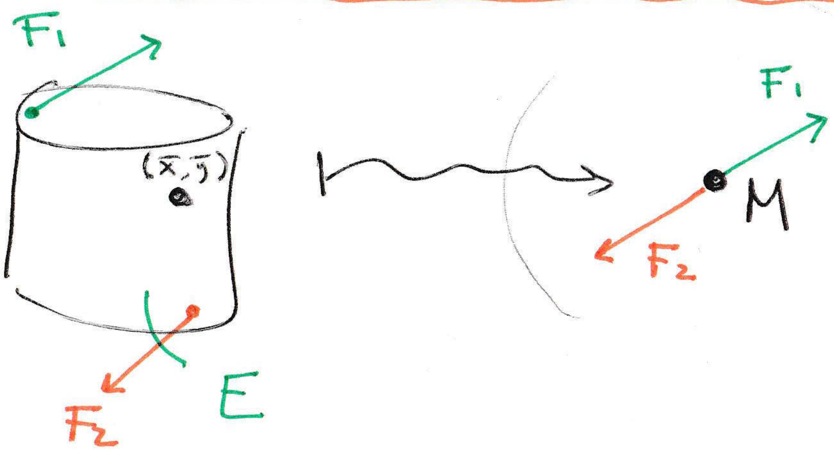
Observaciones:

(1) Para calcular el centro de masa basta conocer un múltiplo cualquiera de la densidad (que la densidad sea "proporcional" a $f(x,y)$) porque

si $\rho(x,y) = K f(x,y)$ entonces

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, \rho(x,y)\, dA}{\iint_R \rho(x,y)\, dA} = \frac{\iint_R \cancel{K} f(x,y)\, dA}{\iint_R \cancel{K} f(x,y)\, dA}$$

(2) El centro de masa es importante porque, si un grupo de fuerzas actuan sobre un cuerpo E rígido entonces



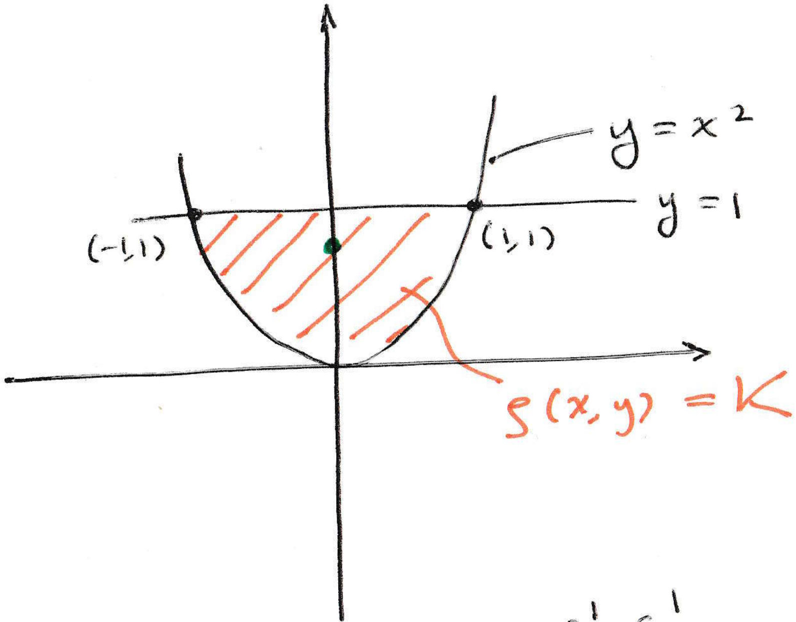
el movimiento del centro de masa es como si fuera un objeto "puntual" de la misma masa concentrada en $(\bar{x},\bar{y})$.

Ejercicio: (a) Encuentre el centro de masa de la placa plana limitada por $y = x^2$ y $y = 1$ asumiendo que la placa tiene densidad constante.

(b) (Verdadero o Falso) Como la región es simétrica el centro de masa siempre está en algún punto del eje y, sin importar la densidad.

POR FAVOR DETENGA EL VIDEO y resuélvalo USTED mism@...

Solución:



$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\,\rho(x,y)\,dA}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\,\rho(x,y)\,dA}{M}$$

con $M = \iint_R \rho(x,y)\,dA$

$$M = \iint_R K\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} K \;dy\,dx = \int_{-1}^{1} K(1-x^2)\,dx =$$

$$= K\left[2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1}\right] = K\left[2 - \frac{2}{3}\right] = K \cdot \frac{4}{3}$$

$$\iint_R x\,K\,dA = 0 \quad \text{(por simetría)}$$

$$\iint_R y\,K\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} K\,y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left(K\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=1}\right)dx = \int_{-1}^{1}\frac{K}{2}(1-x^4) =$$

$\boxed{\text{(b) F}}$

$$= \frac{K}{2}\left(2 - \frac{2}{5}\right) = \frac{K}{2}\left(\frac{8}{5}\right) = K\,\frac{4}{5} \implies \boxed{\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{K\frac{4}{5}}{K\frac{4}{3}} = \frac{12}{20}}$$

En Probabilidad:

Sea $f(x,y)$ la función de densidad de un vector aleatorio (X,Y)

(es decir: (i) $f(x,y) \geq 0$
(ii) $\left.\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dA = 1\right]$) "densidad" con masa total 1.

Recuerde que $\mathbb{P}\{(X,Y)\in R\} := \iint_R f(x,y)\,dA.$

Def. El valor esperado del vector (X,Y)

$$\mathbb{E}[(X,Y)] = (\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$$

$$\mathbb{E}[X] = \iint_R x\, f(x,y)\,dA \quad , \quad \mathbb{E}[Y] = \iint_R y\, f(x,y)\,dA$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x f(x,y)\,dA}{\iint_R f(x,y)\,dA} = \mathbb{E}[X] \quad , \quad \bar{y} = \mathbb{E}[Y].$$

Calcular valores esperados es encontrar centros de masa.