Ejercicio 1:

Sea $g(x, y) = e^{x-1} + e^{ysin(3x-3)} + xy + 8$.

1. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0)$ mediante los dos métodos. Verifique que ambos cálculos dan el mismo resultado.
2. Encuentre la función $\ell(x, y)$ que mejor aproxima a $g(x, y)$ cerca de $(x, y) = (1, 0)$.
3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica de g en el punto $(1, 0, 10)$.
4. Iniciando en $(1, 0)$, en qué dirección deberiamos movernos para que g aumente lo más rápidamente posible?

Ejercicio 2:

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calcule $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial h}{\partial y}$ en $(0,0)$.
2. Calcule la función $\ell(x,y)$ que mejor aproxima a $h(x,y)$ cerca del origen.
3. Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y) - \ell(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Es h diferenciable en $(0,0)$?

Ejercicio 3:

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Es h continua en $(0,0)$?
2. Demuestre que las derivadas parciales de $h(x,y)$ son continuas cuando $(x,y) \neq (0,0)$.
3. En qué puntos del plano es $h(x,y)$ diferenciable?

Ejercicio 4: (Curvas Parametrizadas)

Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la función dada por $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$.

1. Haga un dibujo de la curva en el espacio parametrizada por σ para $0 \leq t \leq 2$. Llámela C.
2. Calcule $D\sigma(\pi)$. Qué interpretación física tiene?
3. Pasa por $(0, 1, \frac{\pi^2}{4})$? Qué rapidez tiene la partícula descrita por σ en ese momento?
4. Encuentre otra parametrización de la curva C que la recorra en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 5: (Campos Vectoriales)

1. Sea $F(x, y) = (-y, x)$ (asi que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial). Dibuje los vectores correspondientes a $F(1, 0)$, $F(0, 1)$, $F(-1, 0)$, $F(0, -1)$, $F(1, 1)$ y $F(-1, 1)$.
2. (Construyendo campos vectoriales)
    1. La ley de gravitación universal dice: Si hay un cuerpo de masa M en el origen entonces la fuerza experimentada por un objeto de masa m en el punto (x, y, z) es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Escriba una fórmula para el campo de fuerzas $G(x, y, z)$ experimentado por un objeto de masa m.
    2. Escriba la fuerza resultante si hay un cuerpo de masa M_1 en el origen y otro de masa M_2 en $(1, 2, 3)$ (La fuerza total es la suma de las fuerzas individuales).

Ejercicio 6: (Campos Vectoriales y Curvas parametrizadas)

1. Imagine que F (del ejercicio anterior) mide la velocidad de un fluido en el plano. Si soltamos una partícula en el punto $(1, 0)$, qué trayectoria cree usted que debería seguir esa partícula?
2. Dibuje la curva $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ en el mismo plano que hizo en la parte (1). Qué relación hay entre $F(\sigma(0))$ y $\sigma'(0)$?
3. Escriba una ecuación diferencial para buscar la trayectoria $\phi(t) = (x(t), y(t))$ que debe seguir una partícula iniciando en $(1, 1)$ movida por F.
4. ** Resuélva la ecuación que encontró en el punto anterior.

Ejercicio 7: Composición de funciones.

Defina las funciones $G(x_1, x_2) = (\sin(\pi(x + y)), \cos(x - y))$ y $f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$.

1. Calcule la función $h(x_1, x_2) = f(G(x_1, x_2))$.
2. Es posible calcular $\phi(y_1, y_2) = G(f(y_1, y_2))$? Explique su respuesta.
3. Calcule la matriz $Dh(1, 1)$ de dos maneras (y verifique que el resultado es el mismo)
    1. Derivando la función que calculó en la parte (1).
    2. Utilizando la regla de la cadena.
4. Si G es el campo de velocidades de un fluido en el plano, qué representa la cantidad $h(a, b)$?

Ejercicio 8: (Para qué la cadena?)

Suponga que la función $T(x,y)$ mide la temperatura (en grados centígrados) del punto (x,y) y satisface :

(a,b)	$\frac{\partial T}{\partial x}(a,b)$	$\frac{\partial T}{\partial y}(a,b)$	$T(a,b)$
$(1,0)$	3	-2	10
$(0,1)$	-3	5	20

Suponga además que una partícula sigue la curva parametrizada $\sigma(t) = (\cos(t/2), \sin(t/2)()$.

1. Escriba una expresión para la función $h(t)$ que mide la temperatura de la partícula en el instante t.
2. Calcule la tasa de cambio de la temperatura de la partícula en el instante $t = \pi$ (medida en metros/seg).
3. * Iniciando en $(0,1)$, en qué dirección deberiamos movernos (con rapidez unitaria) para que la temperatura *disminuya* lo más rápido posible?

Ejercicio 9: Cálculos con regla de la cadena

1. Suponga que

$$\phi(x, z) = f(g_1(x, h), g_2(t(x, z), z)).$$

   donde f, g_1, g_2 y t son funciones dadas. Encuentre una expresión para $\frac{\partial \phi}{\partial x}(a, b)$ (asegúrese de escribir en qué punto debe evaluarse cada derivada).

2. Suponga que $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función escalar $U(x, y)$ y defina $W(r, \theta) = U(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Calcule $\frac{\partial W}{\partial r}(r = 1, \theta = \frac{\pi}{4})$ y $\frac{\partial W}{\partial \theta}(r = 1, \theta = \frac{\pi}{4})$ en términos de las derivadas parciales de U (contra x y contra y).