Hoy: Hay tres tipos principales de funciones

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, estas son:

(1) Funciones escalares $\quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1 \qquad m=1$

(2) Curvas parametrizadas $\quad \sigma: \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad n=1$

(3) Campos Vectoriales $\quad F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad m=n$

El objetivo de la clase de hoy es describir cada una de estas, dar un ejemplo físico (interpretación física) de cada una y (para ① y ②) hablar de sus derivadas primeras y segundas.

(1) Funciones escalares: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Se visualizan mediante dos métodos
- → Conjuntos de nivel $\subseteq \mathbb{R}^n$
- → Gráfica de $f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$T(x,y,z) =$ "Temperatura en °C del punto (x,y,z)"
$\approx x^2 + y^2 - z^2$

Derivadas:

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Teorema del gradiente

$$Df(\vec{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right] \qquad \nabla f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Permiten calcular aprox lineales.

$$\ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

Segundas derivadas:

$$\mathcal{H}_f(\vec{a}) = \begin{array}{c c} & j \\ i & \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) \right] \end{array}$$

simétrica

Permite calcular aprox cuadráticas

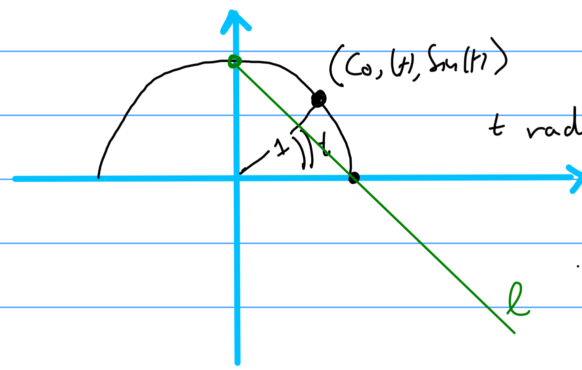
$$q_{\vec a}(\vec x) = f(\vec a) + \nabla f(\vec a)\cdot(\vec x-\vec a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^t H_f(a)(x-a)$$

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

(2) Curvas parametrizadas: $\ell(t) = (0,1) + t\,(1,-1)$

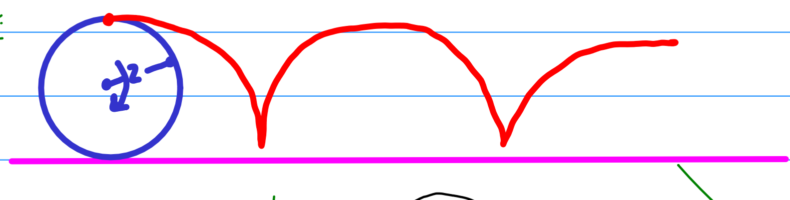
$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $\quad 0 \le t \le \pi$

"Posición de una partícula en el instante t"



Se visualiza dibujando la trayectoria $\{\sigma(t) : a \le t \le b\}$

Ejercicio:



Encuentre una fórmula $\sigma(t)$ que describa la posición del punto rojo en cada instante. (asuma que la velocidad angular ω está fija)

Derivadas: $\sigma : \overset{t}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

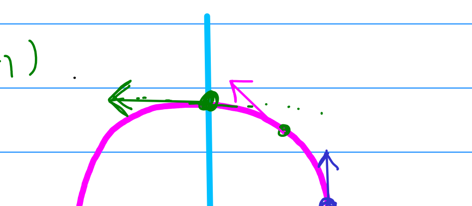
$$D\sigma = \begin{array}{c} \\ n \end{array}\begin{bmatrix} \sigma_1'(t) \\ \vdots \\ \sigma_n'(t) \end{bmatrix}$$

$\sigma'(t)$ es un vector que representa la velocidad instantánea de la partícula.

Como hay una única variable podemos hablar de LA DERIVADA de sigma

Ejemplo: $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

$\sigma'(0) = ?$ $\quad \sigma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$



$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$\sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

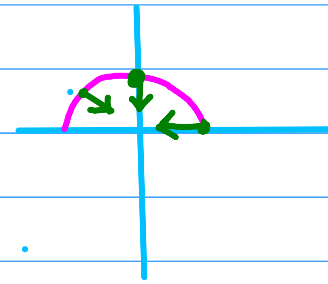
$$\underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{\text{rapidez}} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

[Segunda(s) derivada(s):]

Hay sólo una $\sigma''(t)$ que corresponde al vector aceleración instantánea de la partícula en el instante dado t.

Ejemplo: $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

$\sigma''(0) = ?$, $\sigma''(\frac{\pi}{2}) = ?$



$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \quad \sigma''(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\sigma''(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma''(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pregunta: Por qué la luna no cae sobre la tierra? Respuesta: Sí lo hace, sino que al tener velocidad tangencial queda moviéndose como $\sigma(t)$ del Ejemplo.

(3) Campos Vectoriales:

Def: Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Intuitivamente, ponemos una flecha $F(\vec{x})$ en cada punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

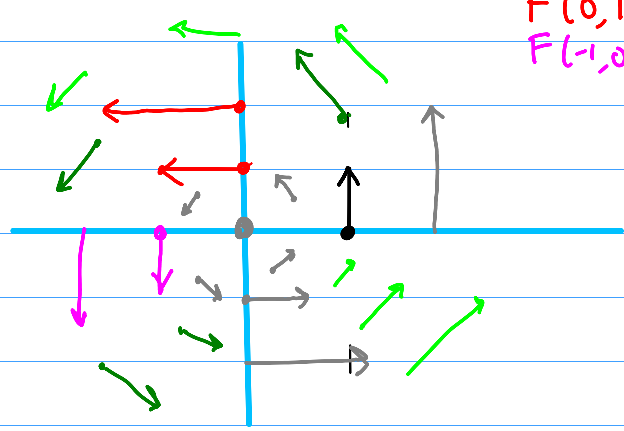
$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = (-y, x)$

$F(1,0) = (+0, 1)$

$F(0,1) = (-1, 0)$

$F(-1,0) = (0, -1)$



Hay dos interpretaciones físicas principales:

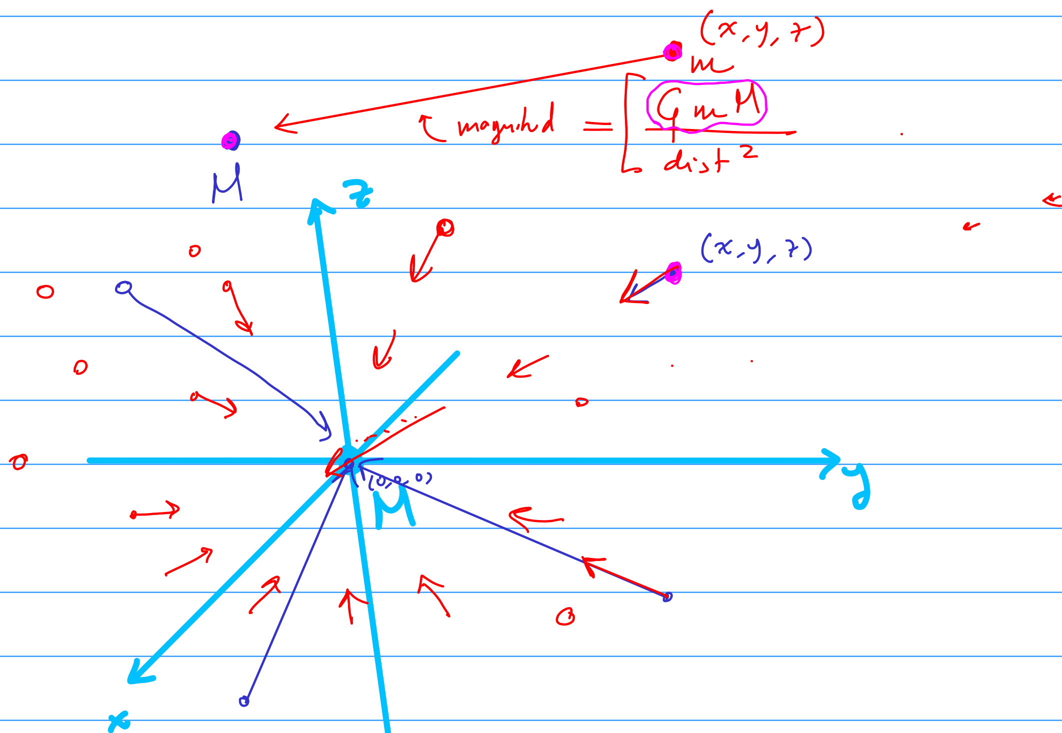
Campo de velocidades

(a) $F(x,y) =$ "Velocidad de un fluido en el punto (x,y)"

(b) $F(x,y) =$ "Fuerza que existe en (x,y)"

Ejemplo: [Ley de gravitación universal].

Si hay una masa M en el origen, la fuerza experimentada por una masa m en (x,y,z) es $\dfrac{GmM}{\text{distancia al cuadrado}}$.



$$F(x,y,z) = \left(\frac{(0,0,0)-(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}\right)\left(\frac{GmM}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$F(\vec{x}) = \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{GmM}{\|\vec{x}\|^2} = \boxed{-\frac{\vec{x}}{\|x\|^3}GmM = F(\vec{x})}$$

Campo de fuerza gravitacional