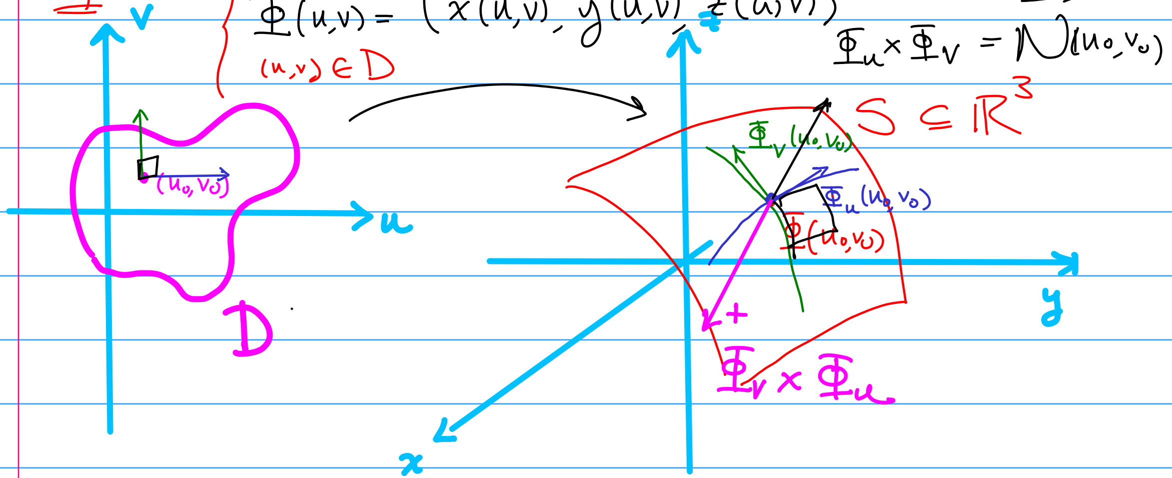
Hoy: Integrales sobre superficies parametrizadas

Def: $\begin{cases} \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ (u,v) \in D \end{cases}$



(1) Φ es biyectiva

(2) $\Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0) \neq \vec{0} \quad \forall (u_0,v_0)$

Hay dos tipos de integrales sobre superficies parametrizadas $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

$\iint_S \bigcirc$ ← qué integramos? — superficie

Integrales de funciones escalares sobre superficies.

(1) Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar

$$\left[\iint_S f\, dS\right] = \left[\underbrace{\iint_D f(\Phi(u,v)) \underbrace{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}_{\|\vec{N}\|}\, du\, dv}_{\text{Integral doble en el plano } uv.}\right]$$

Para qué sirve?

(i) Si $f = 1$ $\quad \iint_S 1\, dS =$ Área superficial de S

(ii) Si $f(x,y,z) =$ densidad sup en Kg/m^2

$$\iint_S f\, dS = \text{masa}(S)$$

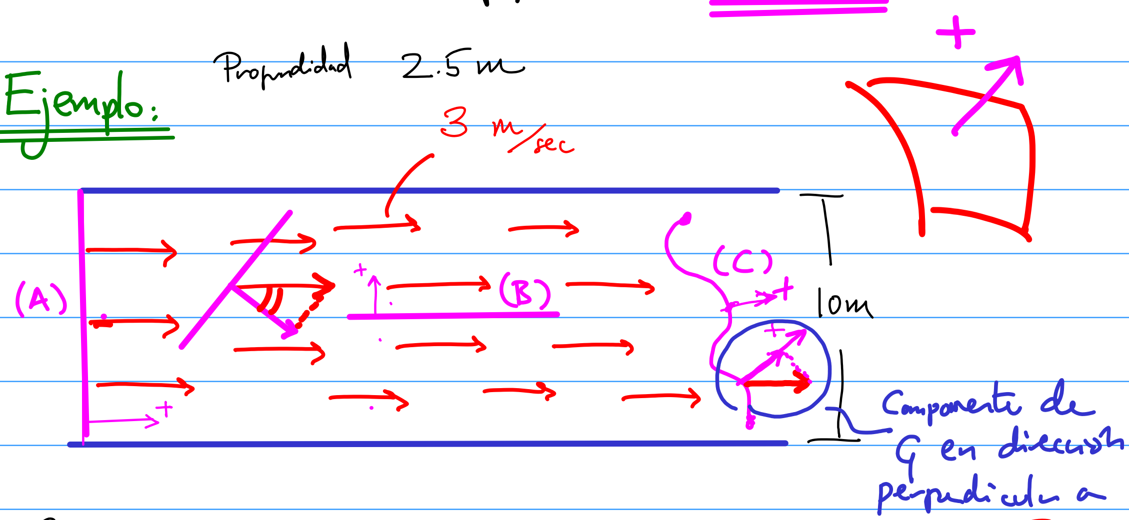
$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ~ cntro de masa

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x f \, dS}{\text{masa}(S)}$$

$$\underset{(\text{Momento de inercia})}{I} = \iint_S \text{dist}\big((x,y,z), \text{eje}\big)^2 f \, dS$$

(2) Flujo de un campo vectorial G a través de una superficie S ORIENTADA

Ejemplo:



Cuánta agua fluje a través de la red en cada segundo? GASTO

(A) $\underbrace{10m \times 2.5m}_{\text{Área de la red}} \times 3 \, m/sec = 75 \, m^3/sec$

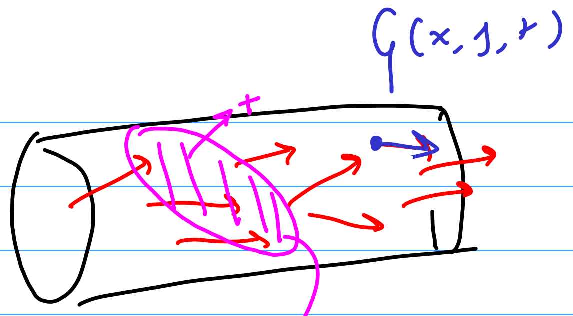
(B) $0 \, m^3/sec$

(C) Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada y G es un campo vectorial

$$\left[\iint_S G \, d\vec{S} = \iint_D \underbrace{G(\Phi(u,v)) \cdot \underbrace{\Phi_u \times \Phi_v}}_{\text{componente de } G \text{ a través de } S} \, du \, dv\right.$$

$$\left[\left(\vec{G} \cdot \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right)\right] \cdot \cancel{\|\vec{N}\|}$$

CON LA ORIENTACIÓN QUE DIGA EL ~~EJERCICIO~~.

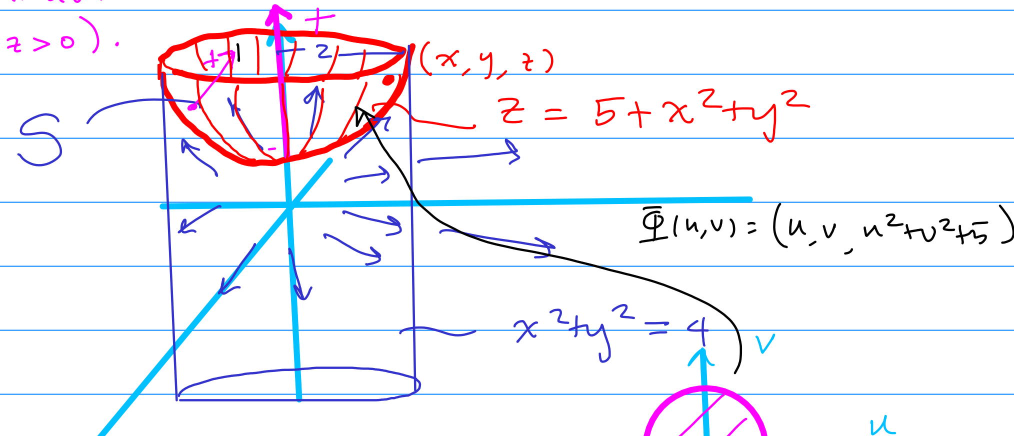


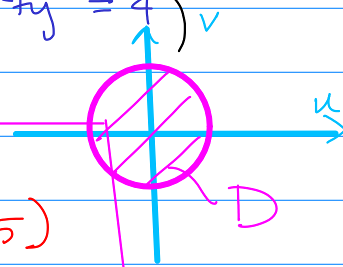
$$\iint_S G\, d\vec{S} = \text{Flujo de } G \text{ a través de } S \quad \ldots m^3/\text{sec.}$$

Ejercicio: Sea S la parte de la superficie $z = x^2+y^2+5$ contenida dentro del cilindro $x^2+y^2=4$.

(a) Calcule el área superficial de S

(b) Sea $G(x,y,z) = (x,y,z)$ ~~m/sec~~. Calcule el flujo de G a través de S con orientación hacia arriba (i.e. vector normal con $z>0$).





en S
$$\boxed{(x,y,z) = (x,y,x^2+y^2+5)}$$

Defina
$$\begin{cases} \Phi(u,v) = (\overset{x}{u}, \overset{y}{v}, \overset{z}{u^2+v^2+5}) \\ u^2+v^2 \leq 4 \end{cases}$$

(a) $$\text{Area}(S) = \iint_S \underbrace{1}_{f(x,y,z)} \, dS = \iint_D 1 \, \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, dA_{(u,v)}$$

función escalar

$\shortparallel$

Derive todas las componentes contra u (parciales)

$\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2+5)$

$\Phi_u = (1, 0, 2u)$

$\Phi_v = (0, 1, 2v)$

$\Phi_u \times \Phi_v = (-2u, -2v, 1)$

$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{4u^2+4v^2+1}$

$$= \iint_D \sqrt{1+4(u^2+v^2)}\, dA =$$

Cambio a Polares

$0 \le r \le 2$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\sqrt{1+4r^2}\right) r \, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \, \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=2} = \frac{2\pi}{4\cdot 3}(17)^{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{6}(17)^{\frac{3}{2}}}$$

(b) $\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2+5)$

$\Phi_u = (1, 0, 2u)$

$\Phi_v = (0, 1, 2v)$

$[\Phi_u \times \Phi_v = (-2u, -2v, 1)]$

NORMAL CORRECTA "Orientación del ejercicio".

Positiva así que es una normal "hacia arriba"

$$\iint_S G\, d\vec{S} = \iint_D G(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v \, dA_{(u,v)}$$

$G(x,y,z) = (x, y, z)$

$G(\Phi(u,v)) = (u, v, u^2+v^2+5)$

$\Phi_u \times \Phi_v = (-2u, -2v, 1)$

$$G(\Phi(u,v))\cdot \Phi_u \times \Phi_v = -2u^2 - 2v^2 + u^2 + v^2 + 5$$

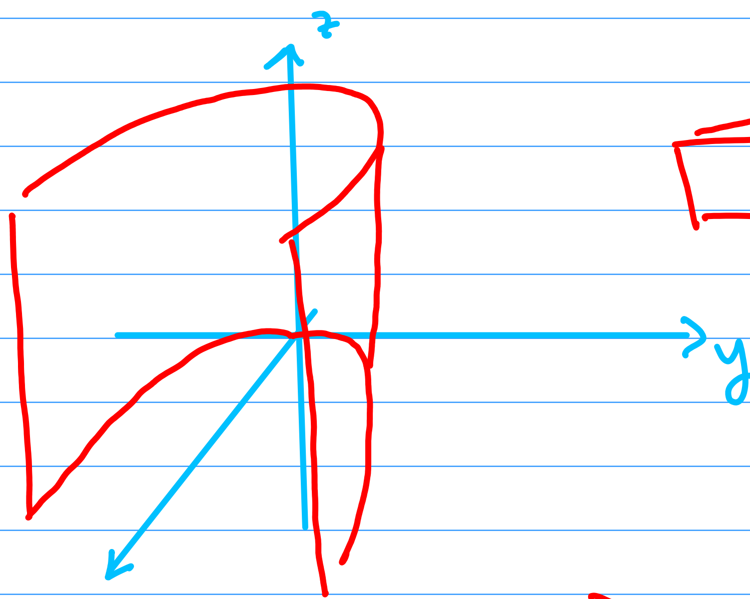
$$= 5 - u^2 - v^2$$

$$= \iint_D 5-(u^2+v^2)\,dA \overset{\text{Coord Polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (5-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{5}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} = 2\pi\left[5\cdot 2 - \frac{2^4}{2^2}\right]$$

$$= 2\pi\left[5\cdot 2 - 2^2\right] = 4\pi\left[5-2\right]$$

$$= \boxed{12\pi} \quad m^3/sec$$



x = z