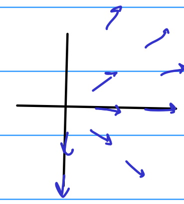
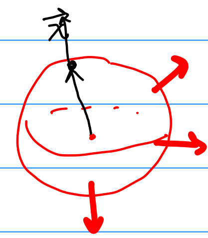
(1) De la clase anterior ....

Ley de Coulomb: Una carga Q en el origen produce el campo eléctrico



$$H(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}$$

(1) Calcule el flujo de H a través de $\underbrace{\text{una esfera de radio } R>0 \text{ centrada en } (0,0,0)}_{S_R}$



$$\iint_{S_R} H\, d\vec{S} = \iint_{S_R} (H \cdot \hat{n})\, dS$$

$$\boxed{\hat{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}} \qquad H\cdot\hat{n} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^4}$$

$$\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R^2} = \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}$$

$$= \iint_{S_R} \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R^2}\, dS = \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R^2}\iint_{S_R} 1\, dS = \frac{Q}{\cancel{4\pi R^2}}\cancel{4\pi R^2} = Q$$

(2) Calcule $\operatorname{div}(H) = 0$ $\quad [\vec{x} = (x,y,z)]$

$$\left[H(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\right] = \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}(x,y,z)$$

Hace cálculo!

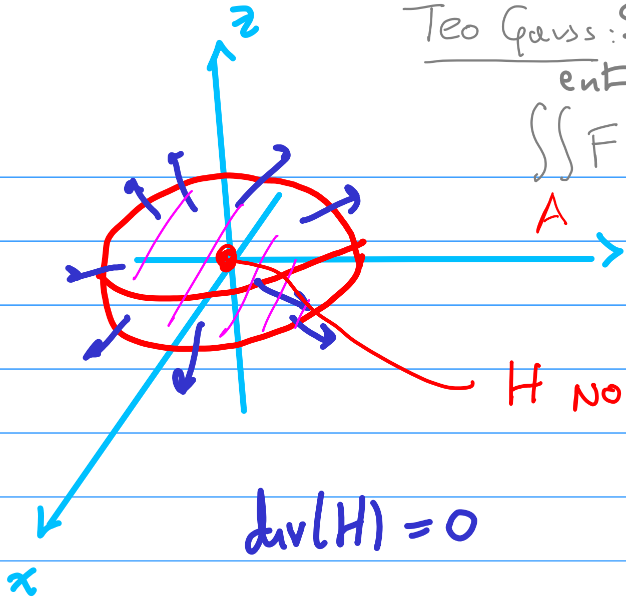
$$\left(\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{(\sqrt{\ })^3}\, x,\ y,\ z\right)$$

$$= \quad H_1 \qquad H_2 \qquad H_3$$

$$\operatorname{div}(H) = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0$$

Teo Gauss: Si F es dif en D
entonces

$$\iint_A F\,d\vec{S} = \iiint_D \mathrm{div}(F)\,dV$$

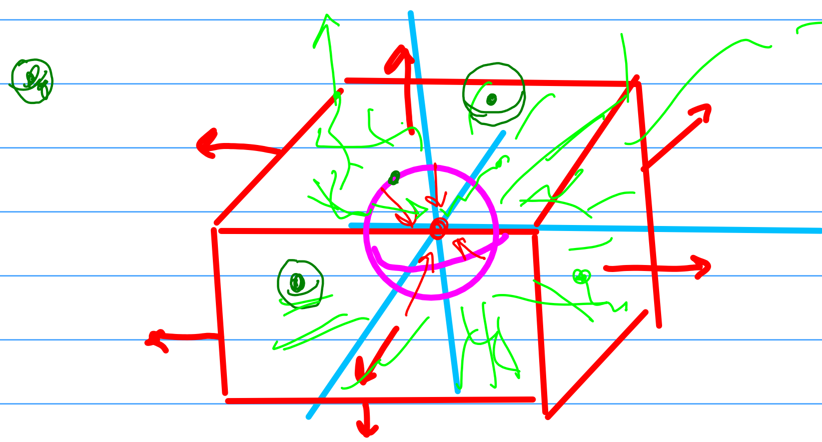


H NO ES dif en (0,0,0)

$$\mathrm{div}(H) = 0$$

$$\iint_{S_R} H\,dS = Q$$

(3) Calcule el flujo de H hacia afuera de la frontera del cubo $-2 \leq x, y, z \leq 2$



D = dentro del cubo y afuera de la esfera

En la región D, que no contiene a $\vec{0}$ el campo H es diferenciable así que

$$\iint_{\text{Frontera de } D} H \cdot d\vec{S} = \iiint_D \mathrm{div}(H)\,dV = 0$$

$$\iint_{S_R} H\,d\vec{S} + \iint_{\partial C} H\,d\vec{S} = 0$$

Teo de div de Gauss

S_R: hacia adentro

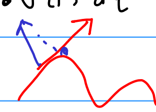
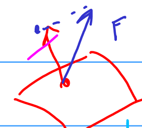
∂C: fuera del cubo hacia afuera

$$-\cancel{Q} + \boxed{\iint H\,d\vec{S} = Q}$$

fuera del cubo hacia afuera

[Teorema:] El flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada S orientada hacia afuera es igual a la carga total encerrada por S.

Resumen Integración: $\displaystyle\int_A \cdots \int F \, d\xi$

F \ A	Funciones escalares $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$	Campos vectoriales $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$
Regiones sólidos $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\iiint_A f\,dV$	
Curvas parchadas $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $a \le t \le b$, $n = 2, 3, \ldots$	$\int_\sigma f\,ds = \int_a^b f(\sigma(t))\,\lVert\sigma'(t)\rVert\,dt$	$\int_\sigma \mathbf{F}\,d\vec{s} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt$ APLICACIÓN: TRABAJO. 
Superficies T parchadas $\Phi(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \in D$	$\iint_T f\,dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \cdot \underbrace{\lVert \Phi_u \times \Phi_v \rVert\,dA}$	$\iint_T F\,d\vec{S} = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v\,dD$ APLICACIÓN: FLUJO 

$f(x,y,z) =$ "densidad $\left(\begin{array}{c}\text{lineal}\\ \text{superficial}\\ \text{de volumen}\end{array}\right)$ del punto (x,y,z)"

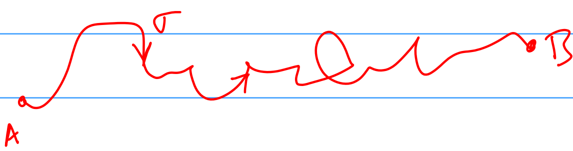
Aplicaciones:

- Masa total $\approx$ Probabilidades
- Centro de masa $\approx$ Valores esperados
- Momentos de inercia $\approx$ Varianza/Covarianza

* Métodos especiales de cálculo:

(a) TRABAJO:

(a.1) **TFCIL:** Si $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es CONSERVATIVO y $U:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un potencial para F (i.e. $\nabla U = F$) entonces



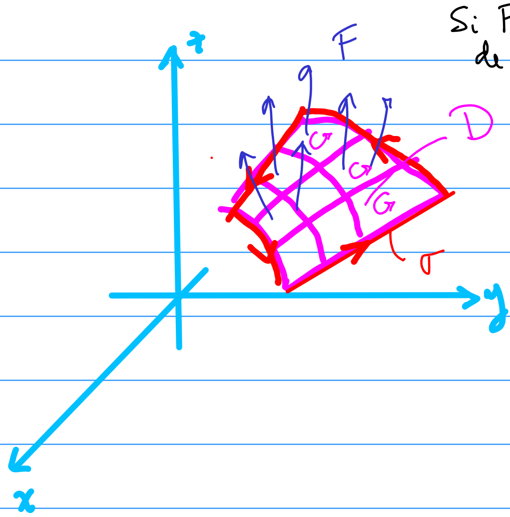
$$\int_\sigma F\, d\vec{s} = U(B) - U(A)$$

Cómo saber si F es conservativo?

Lema: Si $\boxed{\nabla \times F \neq \vec{0}} \Rightarrow F$ NO ES conservativo

Si $\nabla \times F = \vec{0}$ y F está def en región sin huecos $\Rightarrow F$ SI ES

(a.2) Teorema de Stokes (incluye green)

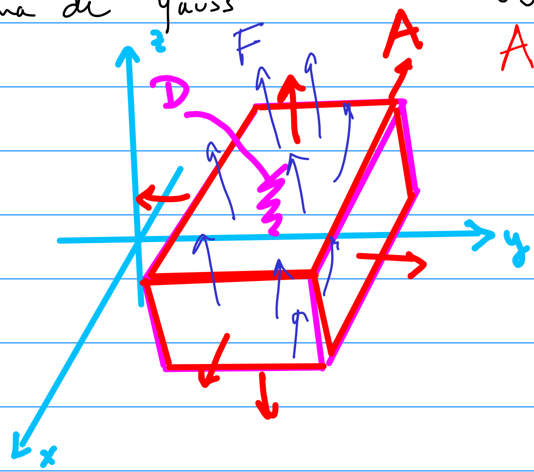


Si F es dif en D y orientaciones de σ y D compatibles entonces

$$\int_\sigma F\, d\vec{s} = \iint_D \nabla \times F\, d\vec{S}$$

(b) Cálculo de flujos

Teorema de Gauss



Si F es diferenciable en D y A orientada hacia afuera de D

$$\iint_A F\, d\vec{s} = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV$$

$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$