Hoy:

(1) Campos vectoriales: $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

(a) F — campo de velocidades

(b) F — campo de fuerza

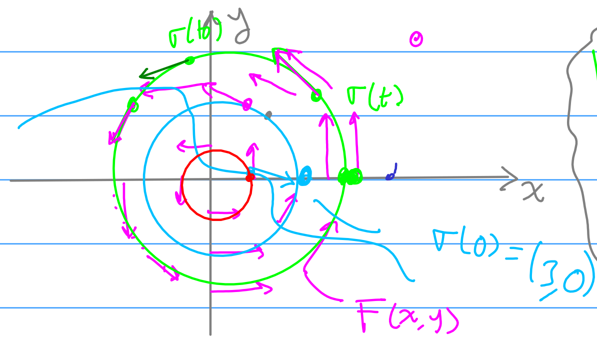
$F(x,y,z) = (y^2, x^2, zx)$

Cómo afecta F una partícula en $\mathbb{R}^n$?

(2) Operaciones con campos vectoriales:

div(F), rot(F)

(1a) Cómo se mueve una partícula bajo la acción del campo de VELOCIDADES $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$?



Vector velocidad de la partícula

||

Valor del campo en el punto.

$F(x,y) = (-y, x)$

Def: La curva parametrizada $\sigma(t)$, $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una línea de campo del campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si cumple para todo t

F campo de velocidades

$$\boxed{\sigma'(t) = F(\sigma(t))}$$

Ejercicio: Demostrar que la curva $\sigma(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ es una línea de campo de $F(x,y) = (-y, x)$

Solución:

$$\sigma'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$$

Como los dos son iguales para cualquier t concluimos que $F(\sigma(t)) = \sigma'(t)$ luego σ sí es una línea de campo de F

Obs: Si nos dieran sólo F podemos plantear ecuaciones que nos permitirían encontrar σ así:

$$\sigma(t) = (\overset{?}{x}(t), \overset{?}{y}(t))$$

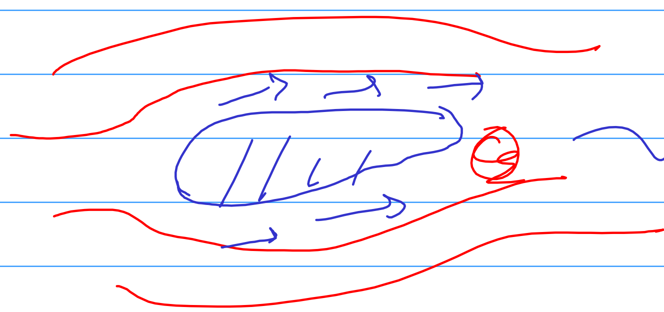
Para que σ sea línea de campo es necesario que $\boxed{\sigma'(t) = F(\sigma(t))}$

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$$
$$F(\sigma(t)) = (-y(t), x(t))$$

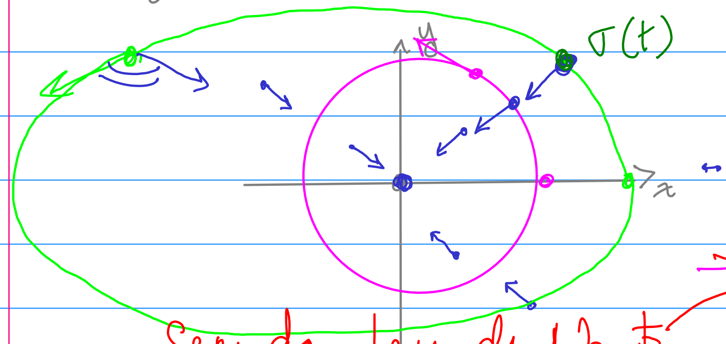
$$\left[\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}\right]$$ Ecuación diferencial

Resolver

$x(t) = A\cos(t)$, $y(t) = A\sin(t)$


Navier-Stokes.

(1b) Cómo se mueve una partícula de masa m bajo la acción del campo de FUERZA F? $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \leq 2,3)$



Qué relación debe haber entre $\sigma(t)$ y F?

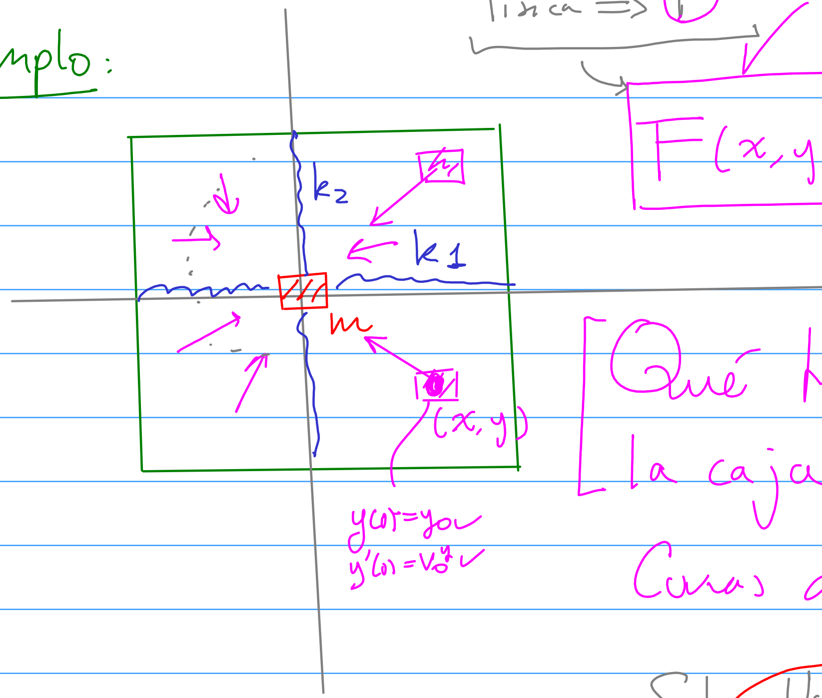
$$\boxed{m\,\sigma''(t) = F(\sigma(t))}$$

Segunda Ley de Newton

Ejemplo:

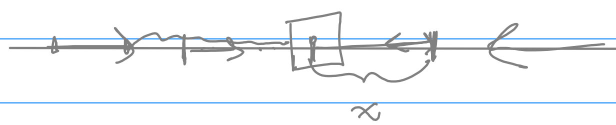
Física $\Rightarrow$ F ✓

$$\boxed{F(x,y)=(-k_1 x, -k_2 y)}$$



¿Qué trayectoria sigue la caja?

Curvas de Lissajous



$F=-kx$

Ley de Hooke

Sol: Usamos la segunda ley de Newton

$$\sigma(t)=(x(t), y(t))$$

$$m\,\sigma''(t) = F(\sigma(t)) \quad \text{para todo } t$$

$$m\,\sigma''(t) = (m\,x''(t),\ m\,y''(t))$$

$$F(\sigma(t)) = (-k_1 x(t),\ -k_2 y(t))$$

$$\begin{cases} m\,x''(t) = -k_1 x(t) \\ m\,y''(t) = -k_2\, y(t) \end{cases}$$

Resolvemos las ecuaciones...

$$\boxed{y'' = -\frac{k_2}{m} y} \qquad y'' + \frac{k_2}{m} y = 0 \qquad y = e^{at}$$

$$a^2 e^{at} + \frac{k_2}{m} e^{at} = 0$$

$$\left(a^2 + \frac{k_2}{m}\right) e^{at} = 0 \iff a^2 = -\frac{k_2}{m} \Rightarrow a = \pm i\sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

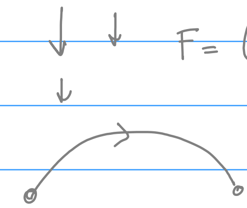
$$e^{i\sqrt{\frac{k_2}{m}}t} = \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}}\,t\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}}\,t\right)$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}}\,t\right), \quad \mathrm{Sen}\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}}\,t\right)$$

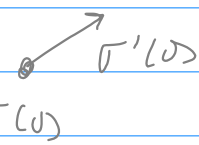
$$\begin{cases} y(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}}\, t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}}\, t\right) \\ x(t) = C \cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}\, t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}\, t\right) \\ [\sigma(0), \ \sigma'(0)] \end{cases}$$

Trayectoria de la caja

$F = (0, -g)$



$$\begin{cases} x(0) = C \\ y(0) = A \\ x'(t) = -\sqrt{\frac{k_1}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}\, t\right) C + D \cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}\, t\right) \sqrt{\frac{k_1}{m}} \\ x'(0) = D\sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad y'(0) = B\sqrt{\frac{k_2}{m}} \end{cases}$$



③ Operaciones sobre campos vectoriales:

$$\underset{\text{nabla}}{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Def: Si $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial definimos

rotacional de F

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F$$ ~ nuevo campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

Mide como rota F cerca de un punto (x,y,z) "Circularidad"

divergencia de F

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$$ ~ nueva función escalar en $\mathbb{R}^3$

Qué tan rápido se expande o se contrae cerca de un punto.

Ejercicio. Sea $F(x,y,z) = (y^2, x^2, z^2)$. Calcule $\operatorname{div}(F)$ y $\operatorname{rot}(F)$.

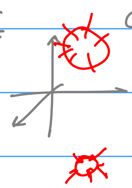
$$\frac{\partial}{\partial z} z^2 = \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2z$$

Sol:

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (y^2, x^2, z^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 2z$$



$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

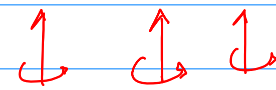
$h(x,y,z) = 2z$

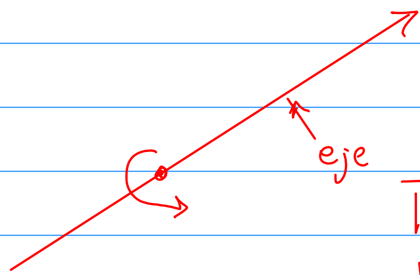
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right) - j\left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2)\right) + k\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right)$$

$$= \boxed{(0, 0, 2x - 2y)}$$

campo vectorial





eje $\dfrac{\mathrm{rot}(F)}{\|\mathrm{rot}(F)\|}$

magnitud es la velocidad de rotación.