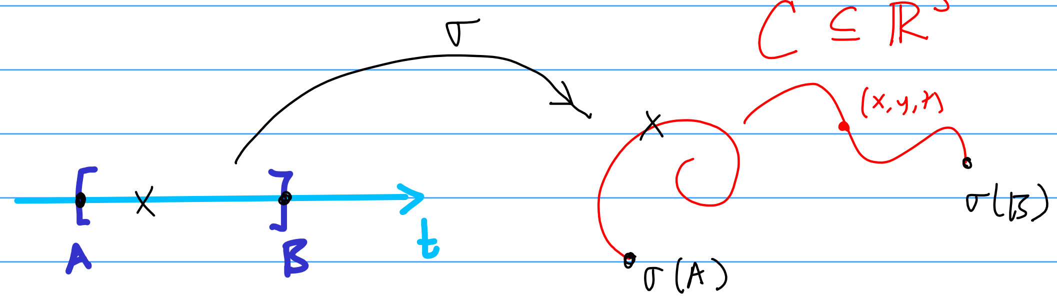
Anuncios Administrativos:

(1) Entrega Mayo 3 Talleres (2 y 3 (todas las partes)) a sus complementarios por Sicua a medianoche.

(2) Parcial 2 Miércoles Mayo 5.

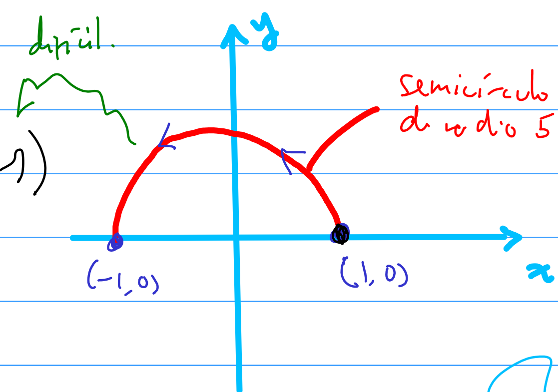
Hoy: Integrales sobre curvas.

Def: Una parametrización de una curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una función $\sigma : [A,B] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable biyectiva con los puntos de C

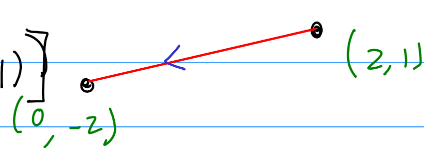


Ejemplo:

$$\begin{cases} \sigma(t) = (5\cos(t), 5\sin(t)) \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$



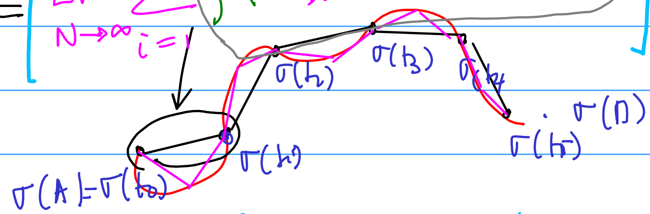
$$\begin{cases} \sigma(t) = (2,1) + t\left[(0,-2)-(2,1)\right] \\ \quad = (2-2t,\ 1-3t), \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Sea $C \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Hay dos tipos de integrales sobre la curva C

(1) Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar

→ $$\int_C f\, ds = \left[\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \overbrace{f(\sigma(t_i))}^{\text{valor de } f} \cdot \overbrace{\|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|}^{\text{distancia}} \right]$$



- Para qué sirve?

$$\int_C 1\, ds = \text{longitud}(C)$$

- Si $f(x,y,z) = \text{Kg}/\text{m}$ del material de (x,y,z)

$$\int_C f\, ds = \text{Masa}(C)$$

- Centro de masa $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \dfrac{\int_C x f\, ds}{\text{masa}(C)}$

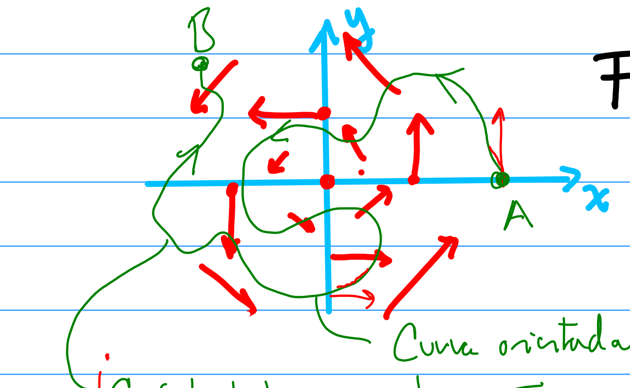
- Momento de inercia

- Cómo se calculan?

Teorema: Si $\sigma(t)$ $A \le t \le B$ es una parametrización cualquiera de C entonces

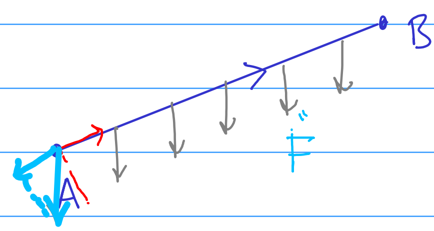
→ $$\int_C f\, ds = \underbrace{\int_A^B \underbrace{f(\sigma(t))}\ \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{\text{rapidez}}\, dt}_{\text{de cálculo 1}}$$

(2) Suponga que $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un CAMPO VECTORIAL

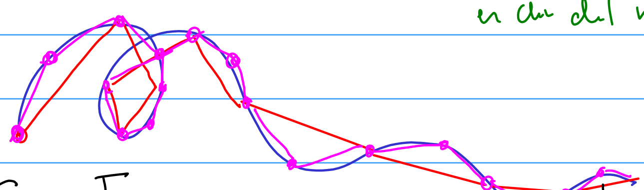


$F(x,y) = (-y, x)$

¿Cuánto trabajo realiza F a lo largo de la curva C?



$$\left[\underbrace{\vec{F} \cdot \frac{(\vec{B}-\vec{A})}{\|\vec{B}-\vec{A}\|}}_{\text{parte de } \vec{F} \text{ en dir del movimiento}}\right] \underbrace{\|\vec{B}-\vec{A}\|}_{\text{distancia recorrida}}$$



Def: Si F es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y $C \subseteq \mathbb{R}^3$ curva ORIENTADA

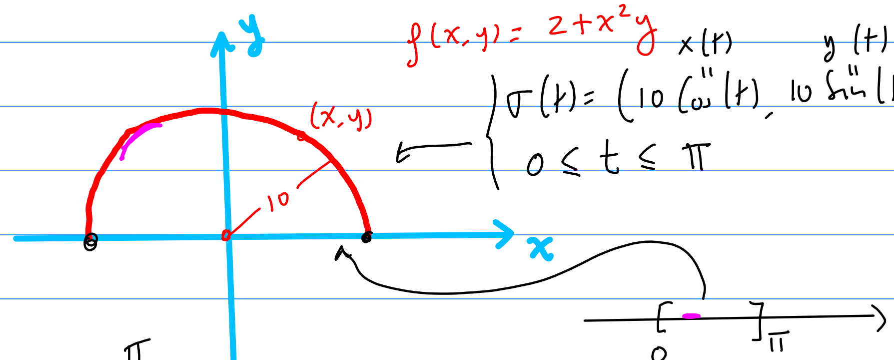
$$\int_C F\, d\vec{s} = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} F(\sigma(t_j)) \cdot (\sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j))$$

Para qué sirven? Permiten calcular el trabajo realizado por un campo de fuerza a lo largo de la curva ORIENTADA $\mathcal{C}$.

Cómo se calculan? **Teorema:** Si $\sigma(t)$, $A \le t \le B$ es una parametrización de la curva C con la orientación dada entonces

$$\int_C F\, d\vec{s} = \underbrace{\int_A^B F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt}_{\text{integral de Cálculo I}}$$

Ejemplo: La densidad lineal del punto (x,y) de un cable está dada por $\rho(x,y) = 2 + x^2y$ kg/m. Si el cable tiene forma de semicírculo con centro $(0,0)$, radio 10 para $y \geq 0$. Calcule la masa total del cable.



$\rho(x,y) = 2 + x^2y$

$$\begin{cases} \sigma(t) = (\underbrace{10\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{10\sin(t)}_{y(t)}) \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

función escalar

$$\int_C \rho(x,y)\, ds = \int_0^\pi \rho(\sigma(t))\, \|\sigma'(t)\|\, dt =$$

curva

$\sigma'(t) = (-10\sin(t), 10\cos(t))$, $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{100\sin^2(t) + 100\cos^2(t)}$

$= \sqrt{100} = 10$

$$\rho(\sigma(t)) = 2 + x(t)^2 y(t) = 2 + 100\cos^2(t)\, 10\sin(t)$$

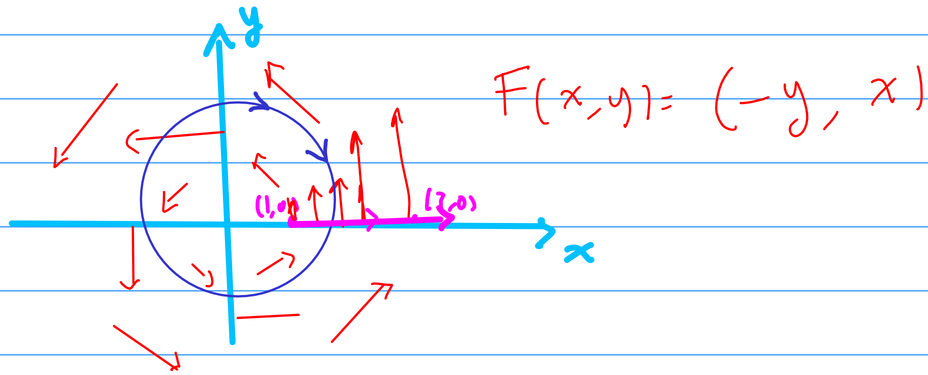
$$= 2 + 1000\cos^2(t)\sin(t).$$

$$\int_C \rho(x,y)\, ds = \int_0^\pi \left[2 + 1000\cos^2(t)\sin(t)\right] 10\, dt =$$

Ejemplo: Calcule el trabajo realizado por el campo $F(x,y) = (-y, x)$ a lo largo de las curvas siguientes:

(a) Círculo de radio 2 centrado en $(0,0)$ en la dirección de las manecillas del reloj

(b) Segmento de recta de $(1,0)$ hasta $(3,0)$.



(a) $\begin{cases} \sigma(t) = (2\cos(-t), 2\sin(-t)) \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

$$\int_C F \, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt$$

$$\sigma'(t) = (2\sin(-t), -2\cos(-t))$$

$$F(\sigma(t)) = (-2\sin(-t), 2\cos(-t))$$

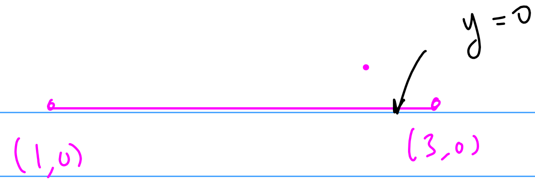
$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = -4\sin^2(-t) - 4\cos^2(-t)$$
$$= -4[\sin^2(-t) + \cos^2(-t)]$$
$$= -4$$

$$= \int_0^{2\pi} -4 \, dt = \boxed{-8\pi}$$

Joules
$=$ N $\cdot$ m

Si cambiamos la orientación el trabajo sería 8π Joules

(b)



$$\begin{cases} \sigma(t) = (1,0) + t\,[(3,0) - (1,0)] = \\ \quad = (1+2t,\ 0), \qquad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$F(\sigma(t)) = (-0,\ 1+2t)$$

$$\sigma'(t) = (2,\ 0)$$

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 0$$

$$\int_C F\,ds = \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0 \text{ Joules}$$