Funciones (Hoy)

Def: Una función f de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector $f(\vec{x})$.

Notación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(\vec{x})$$

Ejemplo: "$f(x,y) = x^2 - y^2$" $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

$$(2,3) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow 2^2 - 3^2 = -5$$

$x=2$ $y=3$

$\cancel{x^2 - y^2 = 0}$ ecuación

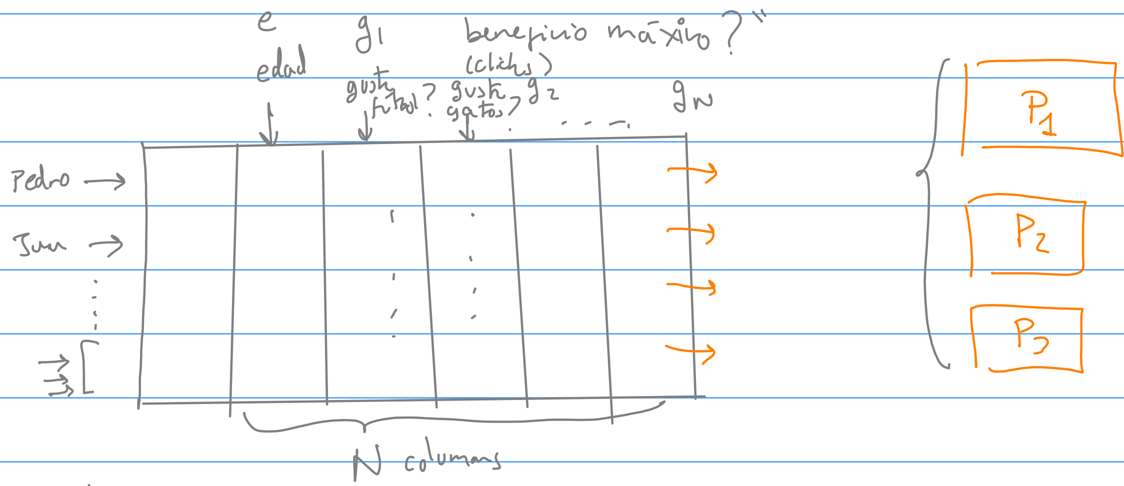
$f(x,y) = x^2 - y^2$ función

Pregunta: Cómo visualizar funciones?

Pregunta: Por qué importan?

Ejemplo: (FACEBOOK)

Vende publicidad: "Dado un ad (pauta publicitaria) a qué usuarios debo mostrarlo para obtener beneficio máximo?" (clicks)



Lo que quería encontrar FB es:

$$f(e, g_1, g_2, g_3, \dots, g_N) = \text{"Probabilidad de hacer click en } P\text{"}$$

machine learning

$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^1$ FACEB está en esta función.

② Cómo visualizar funciones? $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Empecemos por funciones escalares $(m=1)$

$g(x,y) = x^2 - y^2 \qquad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{①}$

Hay dos métodos principales para visualizar funciones escalares g:
① Conjuntos de nivel de g
② Gráfica de g

① **Def:** El conjunto de nivel c (número) de g es
$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

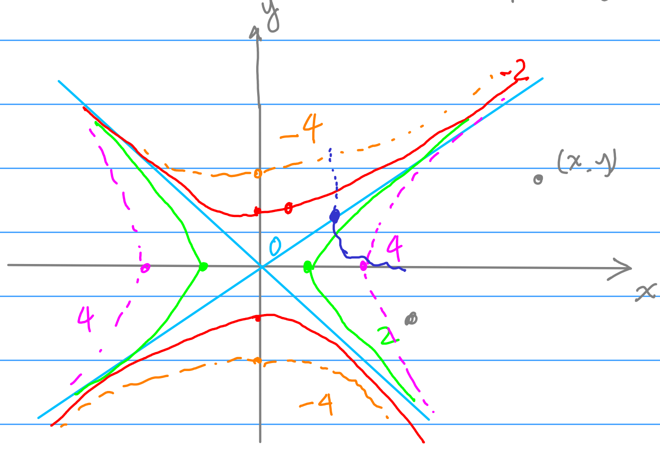
$$N_c(g) = \{ \underline{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} : (g(\vec{x}) = c) \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Una forma de visualizar una función escalar es dibujando algunos conjuntos de nivel en diferentes colores.

Ejemplo: Dibuje los conjuntos de niveles $-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4$ de $g(x,y) = x^2 - y^2 \qquad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$c = -2 \qquad N_{-2}(g) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = -2 \}$

$\boxed{x^2 - y^2 = -2}$ ← Dibujar las soluciones (x,y) de la ecuación.
~~Resolvemos~~



$x=0 \qquad -y^2 = -2 \quad \pm\sqrt{2}$
$y^2 = 2 \Rightarrow y:$

$N_2(g) = \{ (x,y) : g(x,y) = 2 \}$
$x^2 - y^2 = 2$

$N_0(g) = \{ (x,y) : x^2 - y^2 = 0 \}$
$x^2 - y^2 = 0$
$(x-y)(x+y) \Rightarrow \quad y = x$ ó $y = -x$

Nota: El ejemplo más común de una función escalar en física es $T(x,y) =$ "Temperatura del punto (x,y)"

Ejercicio: $h(x,y) = x^2+y^2$ dibuje los conjuntos de nivel $4, 1, 0, -1$.

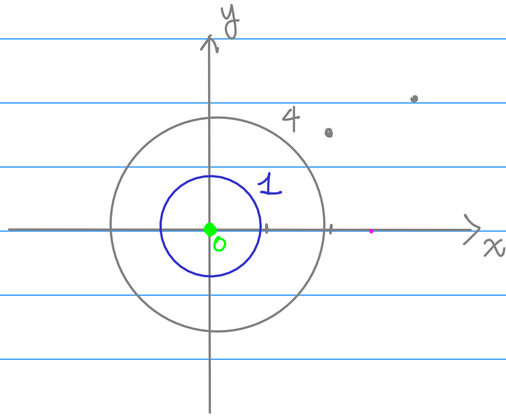
$$N_4(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 4\}$$

$$x^2+y^2 = 4$$

$$N_1(h) = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$$

$N_0(h)$ $\quad x^2+y^2=0$

$N_{-1}(h)$ $\quad x^2+y^2 = -1$ $\quad \emptyset$



② **Def:** Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$ una función (escalar)

la gráfica de f es

nueva variable

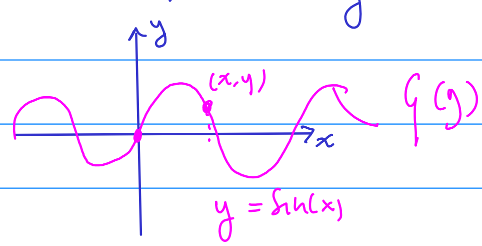
$$G(f) = \{(\underbrace{\vec{x}, w}_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : w = f(\vec{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Una forma de visualizar una función escalar es dibujando $G(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $(n = 1, 2)$

Ejemplo 0: $g(x) = \sin(x)$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}$$

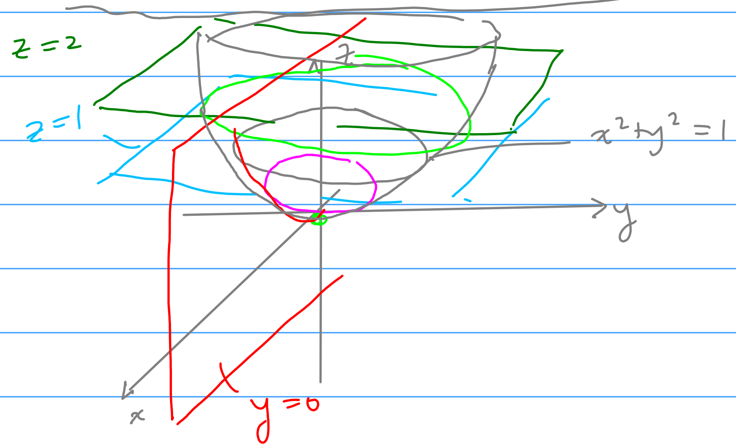


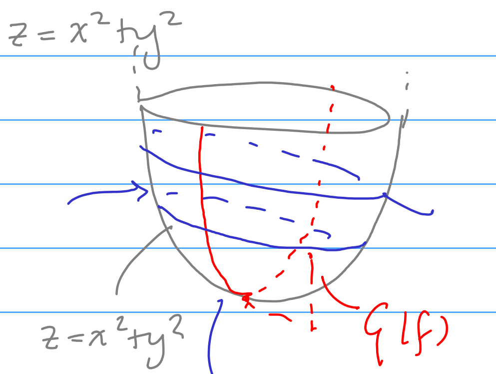
$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Ejemplo 1: Dibuje $G(h)$ si $h(x,y) = x^2 + y^2$

$$G(h) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = h(x,y) \}$$

$$G(h) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \}$$





La gráfica se obtiene "subiendo" el $N_c(f)$ a altura $w = c$

Método: Intersecta la superficie con planos que uno conozca.

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 = (\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Pregunta: Dibujar $G(g)$, $g(x,y) = x^2 - y^2$?