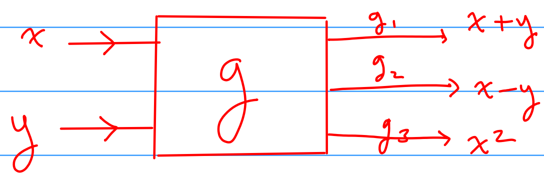
Hoy: (1) Composición de funciones: ["Construir funciones complejas a partir de partes simples"]

(2) Como demostrar continuidad de una función complicada en una región $R \subseteq \mathbb{R}^n$

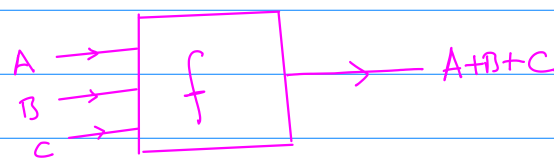
$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

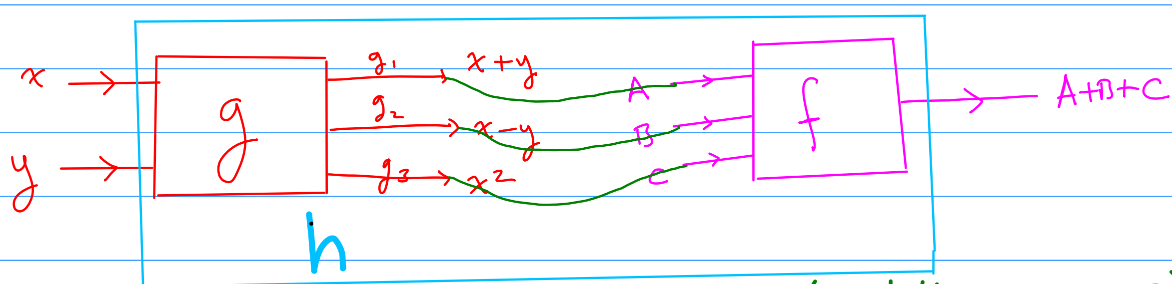
$g(x,y) = (x+y,\ x-y,\ x^2)$



$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(A,B,C) = A+B+C$





$f(A,B,C) = A+B+C$, $g(x,y) = (x+y,\ x-y,\ x^2)$

$h = f \circ g$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{h(x,y) = f(g(x,y))}$$

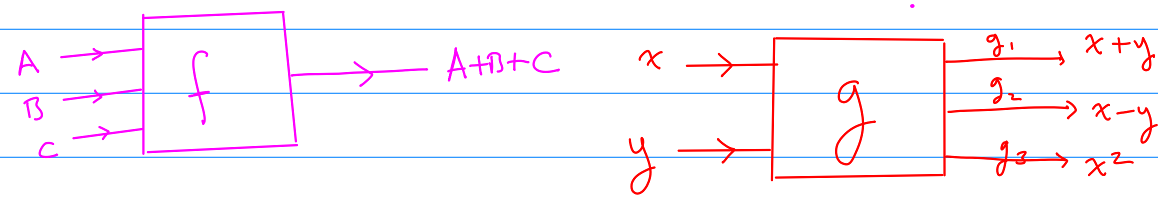
$h(x,y) = f(x+y,\ x-y,\ x^2) = 2x + x^2$

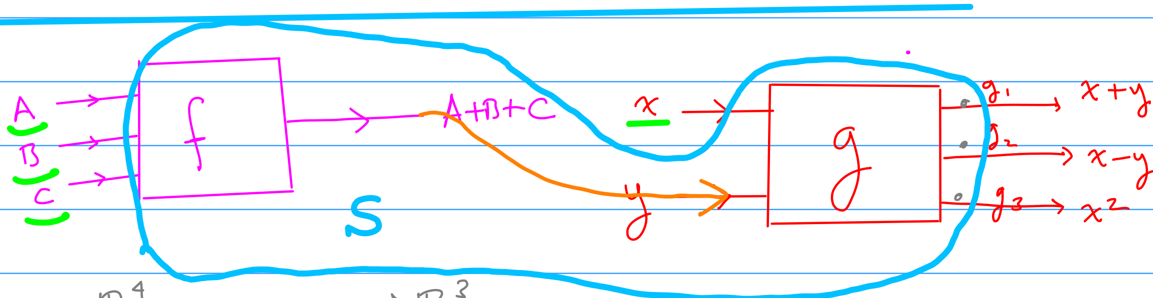
Pregunta: Cómo es $t = g \circ f$?

Necesitamos que el # de salidas de f = # entradas de g.

NO TIENE SENTIDO

Qué hacer??





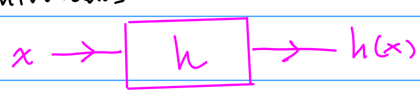
$S: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$S(A,B,C,x) = \left(x + f(A,B,C),\ x - f(A,B,C),\ x^2\right).$$

Conocemos las siguientes funciones "simples":

Univariadas

(1)



$h(x) = \left.\begin{array}{l} \sin(x) \\ \cos(x) \\ \tan(x) \\ \sec(x) \end{array}\right\}$ trig.

e^x

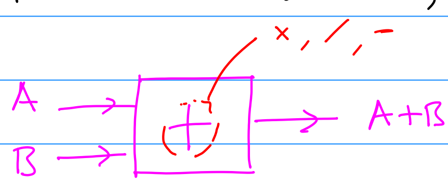
$\sqrt{x}$

c − constante

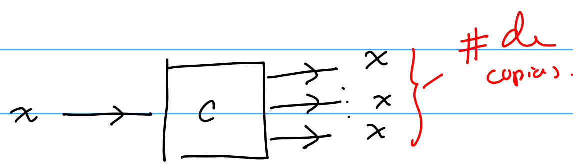
$\arctan(x)$

$\cosh(x)$

(2) Funciones binarias de suma, resta, mult, div.

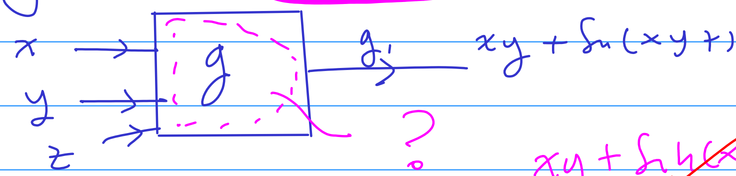


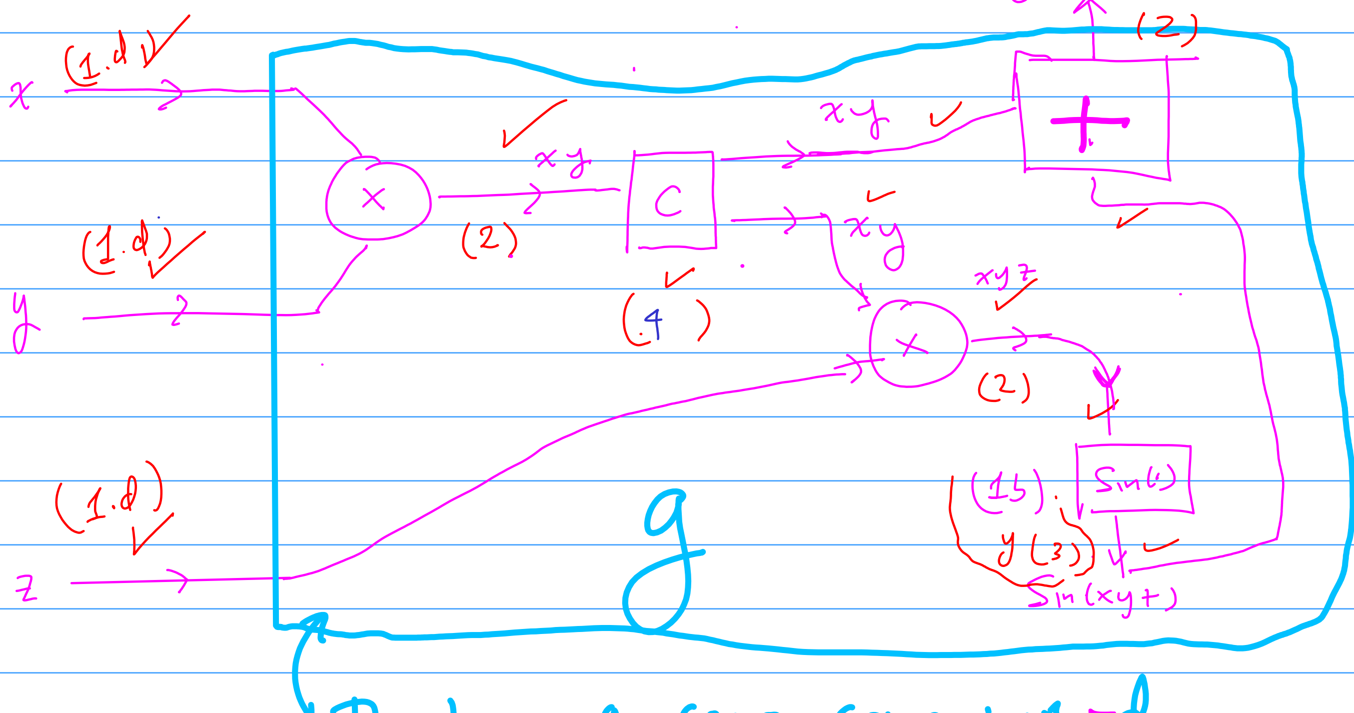
(3) Funciones "copiadoras"



Ejercicio: Construya $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x,y,z) = xy + \sin(xyz)$





Describe a g como composición de funciones simples.

Ejemplo: "¿Cuál es la utilidad de la composición?"

Pregunta: ¿Es $g(x,y,z)$ una función continua?

Solución: Si en todo $\mathbb{R}^3$ por Teo y composición

Teorema [Reglas de continuidad]

(1) Las funciones univariadas siguientes son continuas

(a)- polinomios $p(x)$ ✓

(b)- $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x ✓

(c)- $\sqrt{x}$ si $x \geq 0$

(d)- lineales $3x + 5y - 7z + 8$] funciones escalares

(2) Suma, resta y mult de f continuas es continua

[división f/g es continua EN LOS LUGARES $\vec{x}$ DONDE $g(\vec{x}) \neq 0$]

(3)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h=g\circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Si f es continua en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y g a continua en $f(\vec{a}) \in \mathbb{R}^m$ entonces $h = g\circ f$ es continua en $\vec{a}$

("Composición de continuas es continua")

(4) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

$C(x) = (\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{x}})$ f es continua ssi $f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$ son continuas

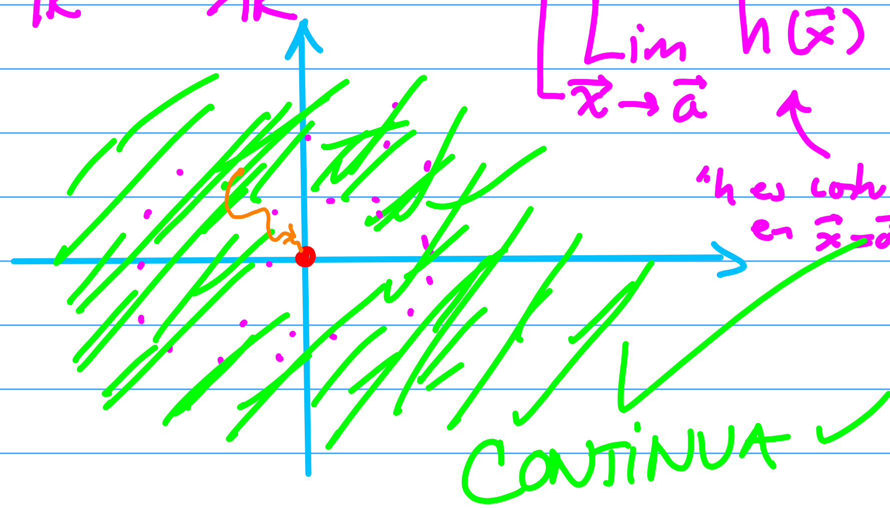
Ejercicio: Demuestre que $h(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

$$h(x,y) = \begin{cases} \underbrace{e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

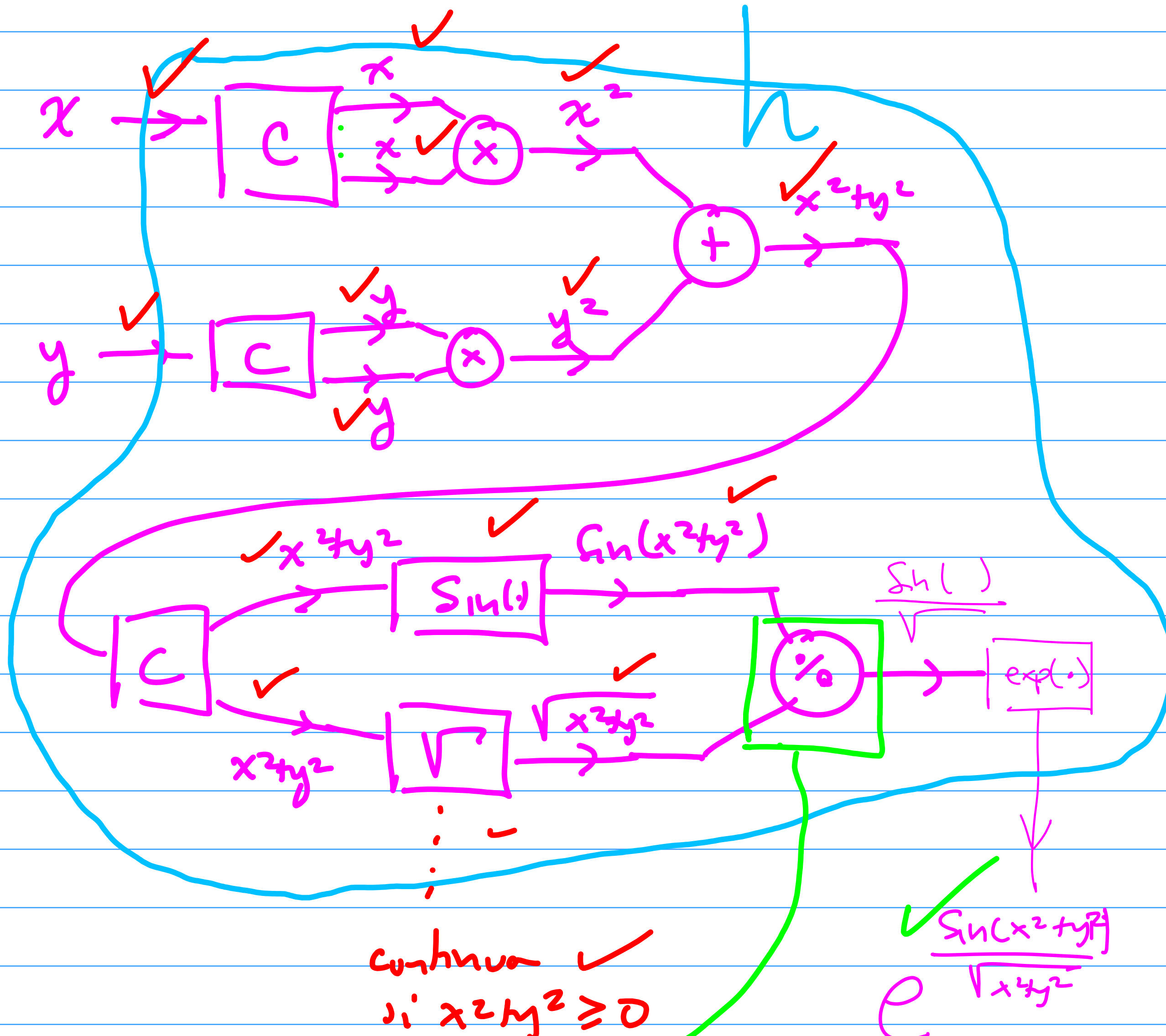
$$\left[\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} h(\vec{x}) = h(\vec{a})\right]$$

"h es continua en $\vec{x} = \vec{a}$"



Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$h(x,y) = \left[e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right]$$ Circuito de composición



Es continua si DEN $\underset{\displaystyle \|(x,y)\|}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{x^2+y^2}}} \neq 0$

Conclimos que $h(x,y)$ es CONTINUA para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

En $(0,0)$ NO SABEMOS!

En $(0,0)$ analizamos continuidad mediante la definición, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) \overset{?}{=} h(0,0) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \left[\lim_{r\to 0^+} e^{\frac{\sin(r^2)}{r}}\right]$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

$$= \exp\left(\underbrace{\lim_{r\to 0^+} \frac{\sin(r^2)}{r}}_{=}\right)$$

L'Hopital

$$\exp\left(\lim_{r\to 0^+} \frac{\cos(r^2)\,2r}{1}\right) = \exp(0)$$

$$= e^0 = 1$$

Concluimos que $h(x,y)$ sí es continua en $(0,0)$ luego es continua en todas partes como queríamos demostrar ✓