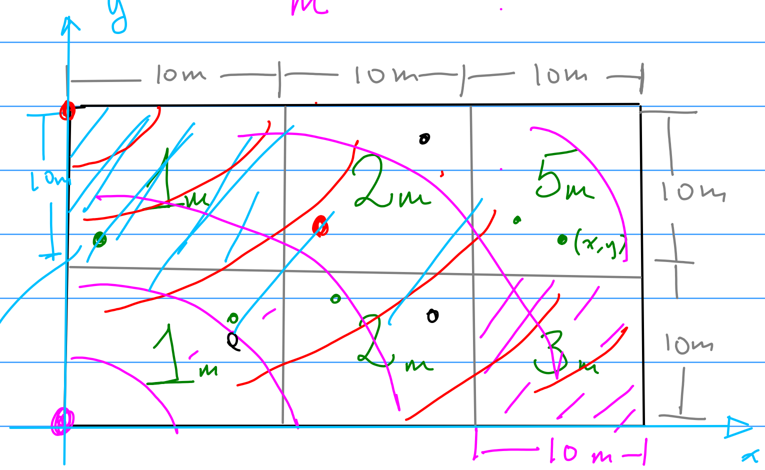
$\boxed{\text{Hoy:}}$ Cálculo Integral en varias variables

¿Qué es y para qué sirve una integral en varias variables?

Problema: ¿Cuánta agua cabe en una piscina? m^3



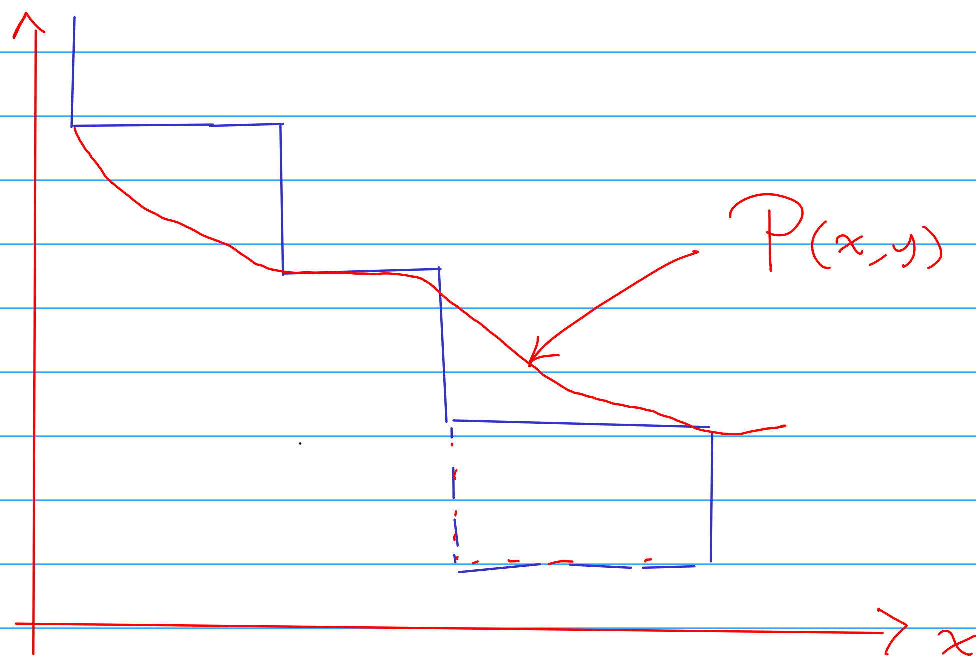
$\left[P(x,y) = \text{"Profundidad de la piscina en } (x,y)\text{"} \right]$

$P(x,y) = x^2+y^2+1$

$(10\times 10\times 1) + \ldots (10\times 10\times 3)$

$(10\times 10\times 1) + \ldots$

$= 1400 m^3$



Def: Si $P(x,y) =$ "Profundidad de la piscina en $(x,y) \in R$"

$$\iint_R p(x,y)\, dA \overset{?}{=} \text{"Volumen de agua contenido en la piscina"}$$

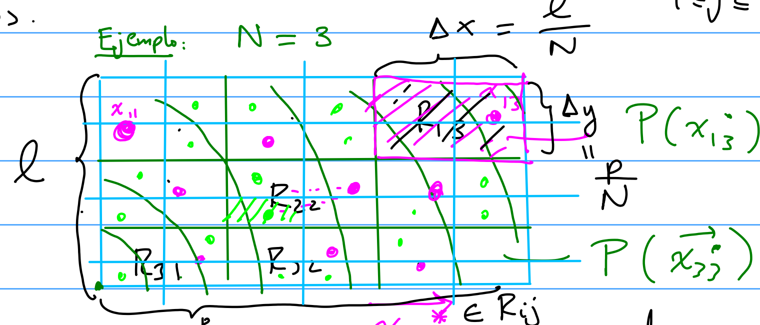
$P(x,y)$

Procedimiento para resolver esta pregunta:

(1) Partimos R en N^2 rectángulos R_{ij} partiendo x en N pedazos y y en N pedazos.

$1 \le i \le N$
$1 \le j \le N$

Ejemplo: $N = 3$



(2) Seleccionamos un punto $x_{ij}^* \in R_{ij}$ en cada uno de los R_{ij}. VAMOS A IMAGINAR que la profundidad de la piscina es CONSTANTE e igual a $P(\vec{x_{ij}^*})$ en R_{ij}.

(3) Calculamos el volum. de agua

En R_{ij}: $\left[P(x_{ij}^*) \cdot \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y}_{\text{Area}(R_{ij})} \right]$

Volumen.

$$A_N := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P(x_{ij}^*) \, \Delta x \, \Delta y$$

(4) Dejamos $N \to \infty$

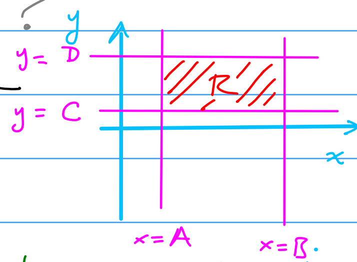
$$\iint_R P(x,y)\, dA = \lim_{N \to \infty} \left[A_N \right]$$

Qué es ?

(2) Cómo se calculan analíticamente?

Teorema (Fubini) Suponga que

$$R = \{ (x,y) : \begin{array}{l} A \le x \le B \\ C \le y \le D \end{array} \}$$



y sea $P(x,y)$ una función escalar continua

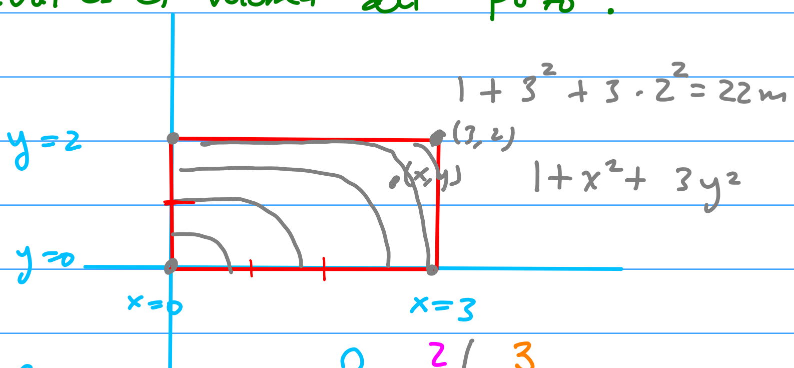
Integrales de cálculo I !

$$\iint_R P(x,y)\, dA = \left[\int_A^B \left(\int_C^D P(x,y)\, dy \right) dx \right.$$

$$= \int_C^D \left(\int_A^B P(x,y)\, dx \right) dy$$

Ejemplo: La profundidad de un pozo rectangular es $P(x,y) = \underbrace{1 + x^2 + 3y^2}$. El rectángulo del pozo está dado por $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$.

Cuál es el volumen del pozo?



$$\iint_R P(x,y)\, dA \overset{?}{=} \int_0^2 \left(\underbrace{\int_0^3 1 + x^2 + 3y^2\, dx}_{12 + 9y^2} \right) dy$$

Por Teo Fubini

$$\int_0^3 1 + x^2 + 3y^2\, dx = \int_0^3 (1 + 3y^2 + x^2)\, dx =$$

$$\int_0^3 (1+3y^2)\,dx + \int_0^3 x^2\,dx$$

$$\|$$

$$(1+3y^2)\int_0^3 dx + \int_0^3 x^2\,dx = 3(1+3y^2) + \frac{27}{3}$$

$$= 12+9y^2$$

$$\int_0^2 12+9y^2\,dy = 12\int_0^2 dy + 9\int_0^2 y^2\,dy$$

$$= 24 + 9\,\frac{2^3}{3} = \boxed{48\ m^3}$$

Cambiando el orden de integración

$$\iint_R 1+x^2+3y^2\,dA = \int_0^3 \underbrace{\int_0^2 (1+x^2+3y^2)\,dy}_{(1)}\,dx$$

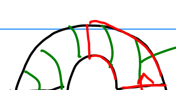
$$(1) = (1+x^2)\int_0^2 dy + \int_0^2 3y^2\,dy = 2(1+x^2) + \cancel{3}\cdot\frac{2^3}{\cancel{3}}$$

$$= 10+2x^2$$

$$\iint_R 1+x^2+3y^2\,dA = \int_0^3 10+2x^2\,dx = 10\cdot 3 + 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=3}$$

$$= 30 + 2\cdot 9 = 30+18 = \boxed{48\ m^3}$$

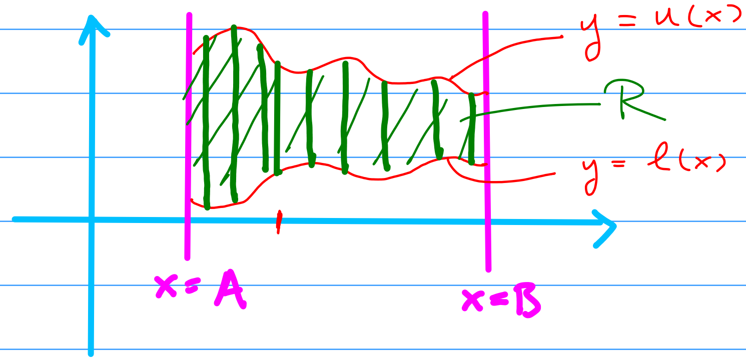
Qué hacemos si la piscina es así ?



Cómo partirla en trozos más simples ?

Hay versiones del Teorema de Fubini útiles para integrar en regiones más complejas

(1)



$$\iint_R P(x,y)\,dA = \int_A^B \left(\int_{\ell(x)}^{u(x)} P(x,y)\,dy \right) dx$$

(2) Próxima clase: leen

Empiezan Taller 3 parte 1 en la página web.