Hoy: (1) Ejemplo: Campos vectoriales integrados sobre curvas (Repaso)

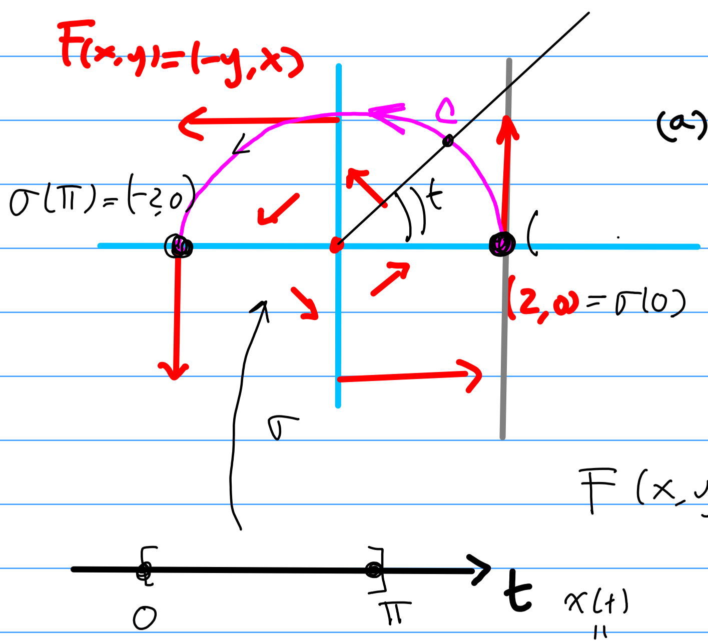
(2) Superficies parametrizadas, integrales de superficie

Ejercicio: $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial en $\mathbb{R}^2$

Sea $[F(x,y) = (-y, x)]$ y sea C la mitad superior del círculo de radio 2 centrado en $(0,0)$ orientado en dirección contraria a las manecillas del reloj.

(a) Calcule el trabajo realizado por el campo F a lo largo de C.

(b) Calcule el trabajo PROMEDIO de F en C.



$F(2,0) = (-0, 2)$

(a) $\int_C F \cdot ds \overset{?}{=}$ Trabajo realizado por F a lo largo de C

(1) ← [si $\sigma(t)$ es parametriz. C en $a \le t \le b$.]

$$\int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$F(x,y) = (-y, x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = (\underbrace{2\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{2\sin(t)}_{y(t)}) \\ 0 \le t \le \pi \end{array} \right.$$

parametrización de C

$$\vec{\sigma'}(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$$

$$F(\sigma(t)) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$$

$$\int_C F\, ds = \int_0^\pi \vec{F(\sigma(t))} \cdot \vec{\sigma'(t)}\, dt = \int_0^\pi 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)\, dt$$

$$4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) = 4(\sin^2(t) + \cos^2(t))$$

$$= \int_0^{\pi} 4\, dt = \boxed{4\pi} \begin{array}{c} \text{Joules} \\ \shortparallel \\ N \cdot m \end{array}$$

(b) PROMEDIOS e integrales:

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ función escalar

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ región sólida

$$\text{Promedio de } f \text{ en } E = \frac{\iiint_E f(x,y,z)\, dV}{\iiint_E 1\, dV}$$

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b 1\, dx}$$

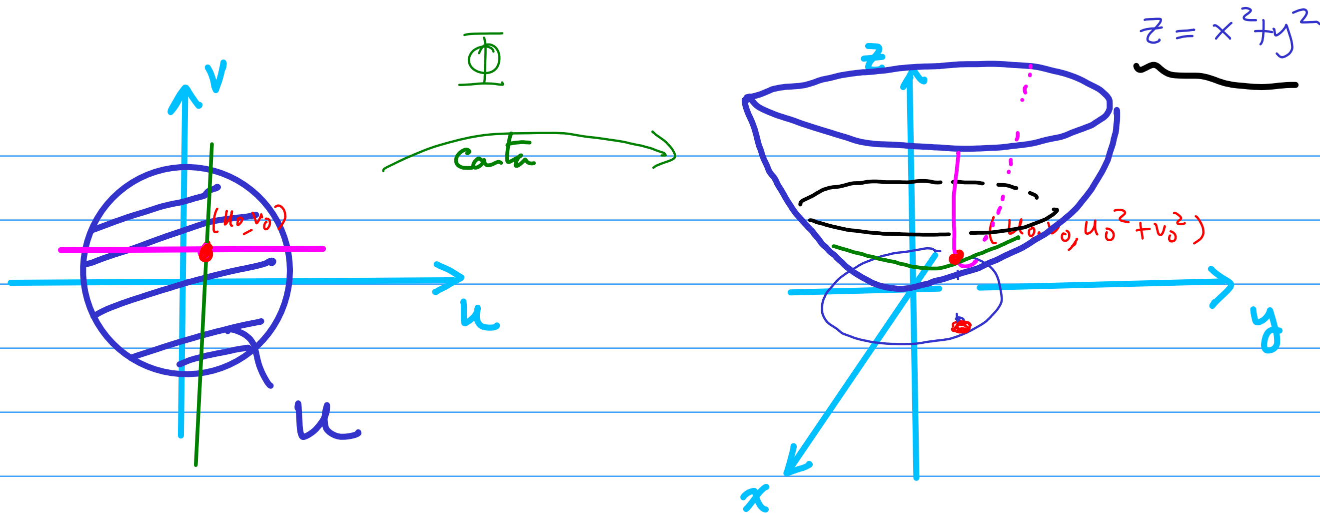
Sol (b): El trabajo PROMEDIO a lo largo de C es

$$\frac{\int_C F\, ds}{\int_C 1\, ds} = \frac{4\pi}{\text{longitud}(C)} = \frac{4\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 2 \ N$$

2) Superficies:

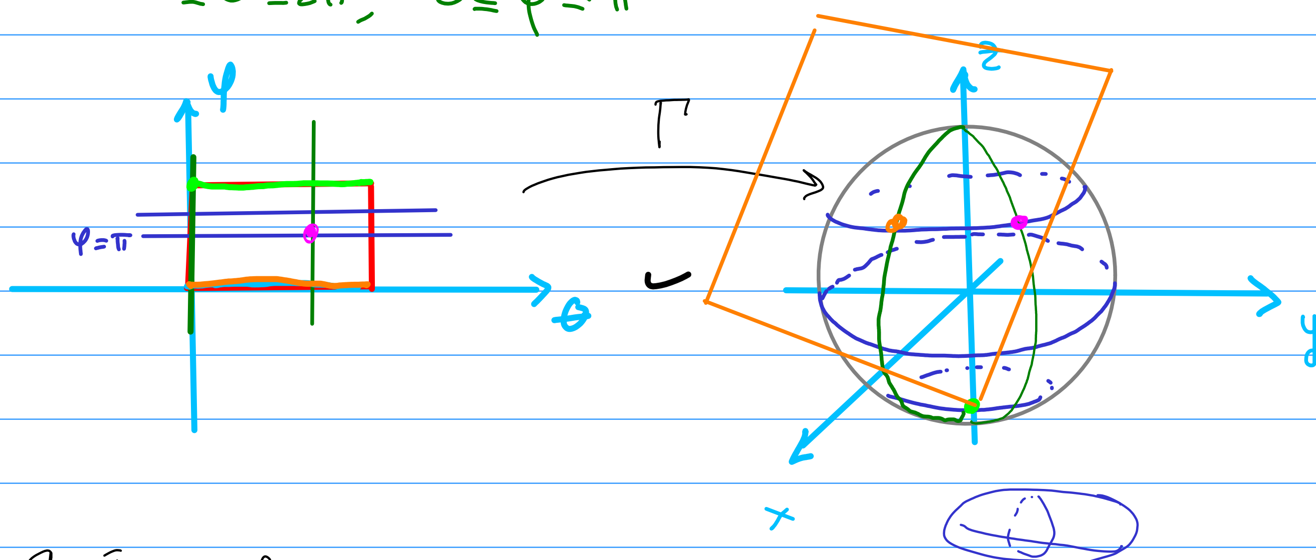
Def: Una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^3$ es una función $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que es diferenciable e inyectiva en casi todas partes.

Ejemplo:
$$\begin{cases} \Phi(u,v) = \left(\overset{x(u,v)}{\overset{\shortparallel}{u}} , \overset{y(u,v)}{\overset{\shortparallel}{v}} , \overset{z(u,v)}{\overset{\shortparallel}{u^2+v^2}} \right) \\ u^2+v^2 \le 4 \end{cases}$$



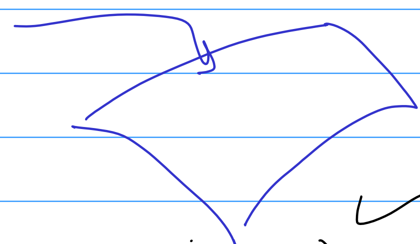
Ejemplo 2:

$$\begin{cases}\Gamma(\theta,\varphi) = \left(\overset{A}{3\sin\varphi\cos\theta},\ \overset{B}{3\sin\varphi\sin\theta},\ \overset{C}{3\cos\varphi}\right) \\ 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\pi\end{cases}$$



Construcción de parametrizaciones:

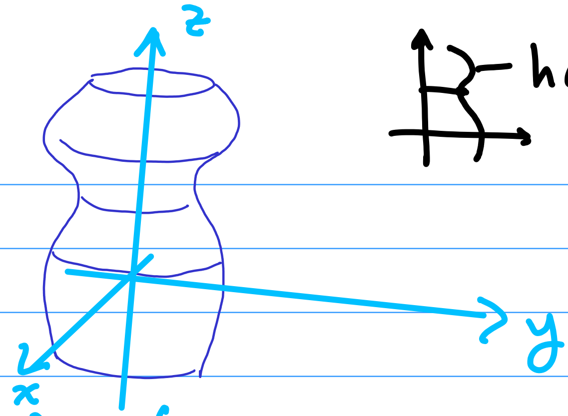
Fácil $\quad z = \sin(x^2-y^2)$



$$\Phi(u,v) = \left(u,\ v,\ \sin(u^2-v^2)\right)$$

Ejercicio:

Verifique que es una parametrización del sólido de revolución indicado.



$h(z) = r$

$$\Phi(z, \theta) = \left(h(z)\cos\theta,\ h(z)\sin\theta,\ z\right)$$

(2.1) Derivadas de parametrizaciones $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$D\Phi = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \frac{\partial \Phi_x}{\partial v} \\ \cdot & \vdots \\ \cdot & \vdots \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} | & | \\ \Phi_u & \Phi_v \\ | & | \end{bmatrix}$$

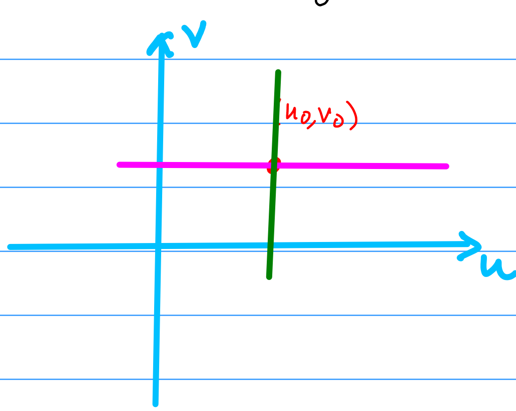
$$\Phi(u,v) = \left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right)$$

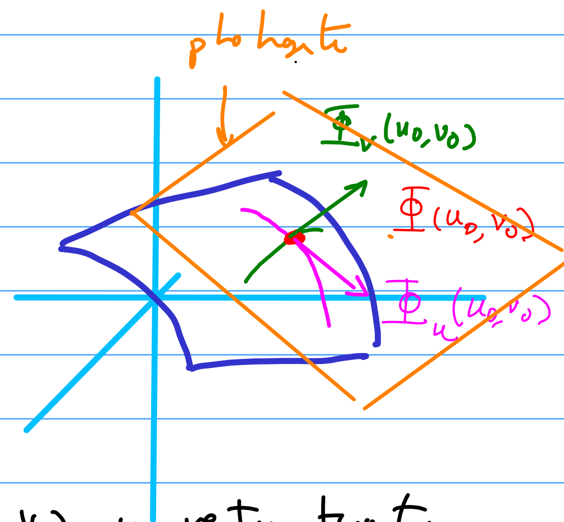
$$\vec{\Phi}_u := \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\vec{\Phi}_v := \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

vectores columnas de $D\Phi$.

Interpretación geométrica





Obs: (1) $\Phi_u(u_0,v_0)$ y $\Phi_v(u_0,v_0)$ son vectores tangentes a la superficie en $\Phi(u_0,v_0)$.

(2) En general no son entre sí perpendiculares

(3) Permiten encontrar un vector perpendicular a la superficie

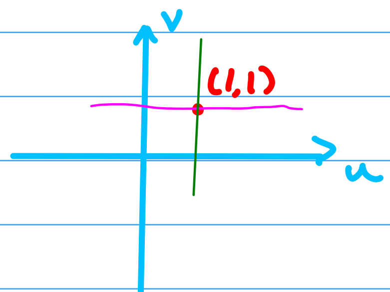
$$N(u_0,v_0) := \Phi_u(u_0,v_0) \times \Phi_v(u_0,v_0)$$

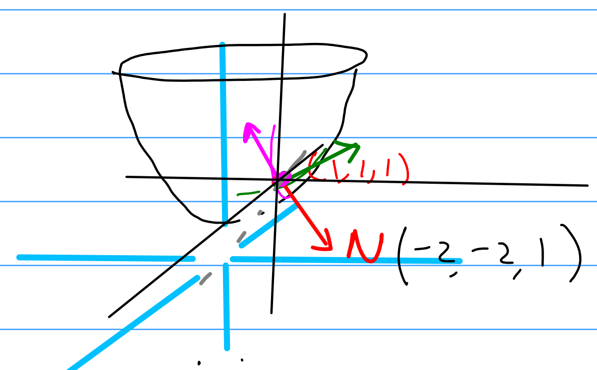
Ejercicio: Encuentre una ecuación para el plano tangente a $z = x^2+y^2$ en $(1,1,2) = P$

Sol: Sabemos que

$\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ parametriza S

$\Phi(1,1) = (1,1,2) = P$ ✓





$$\Phi_u = (1, 0, 2u) \qquad \Phi_u(1,1) = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \end{array} (1, 0, 2)$$

$$\Phi_v = (0, 1, 2v) \qquad \Phi_v(1,1) = (0,1,2)$$

$$\bar{N} = (-2,-2,1)$$

Ec plano tangente a S en $(1,1,2)$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$