Hoy: (1) Dos definiciones: Límite y continuidad de funciones escalares $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

(2) Ejemplos
- Cálculo de límites
- Decidir si una función es continua o no en un punto dado

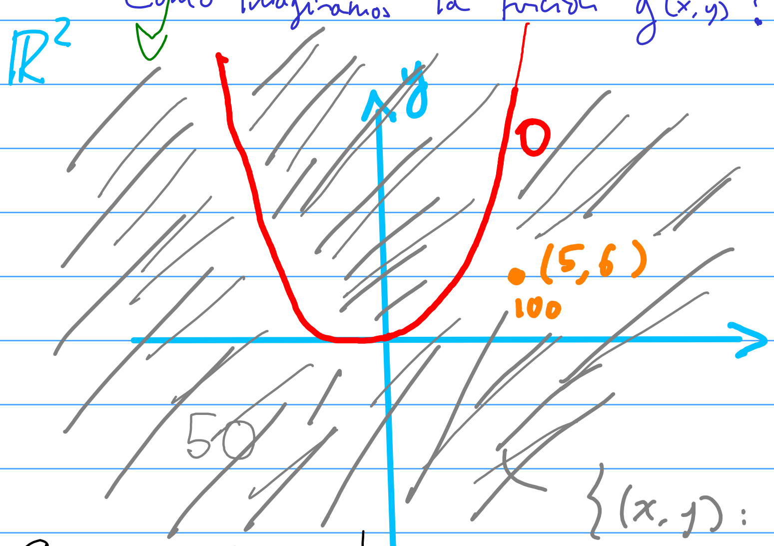
(1) Sea

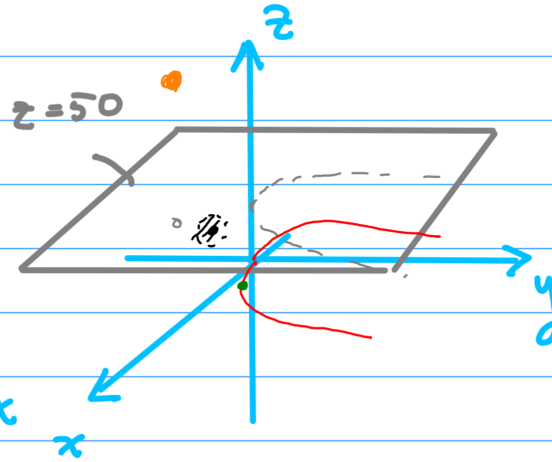
$$g(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{si } y=x^2 \\ 100, & \text{si } (x,y)=(5,6) \\ 50 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

¿Cómo imaginamos la función $g(x,y)$?

$\mathbb{R}^2$





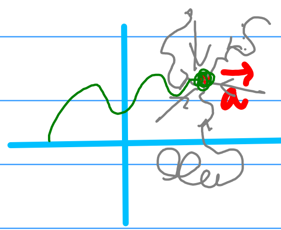
$\{(x,y): g(x,y)=50\}$

Conjunto de nivel $\subseteq\mathbb{R}^2$

Los límites sirven para describir el comportamiento de una función cerca de un punto P sin importar lo que pasa en P_0

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=c}$$

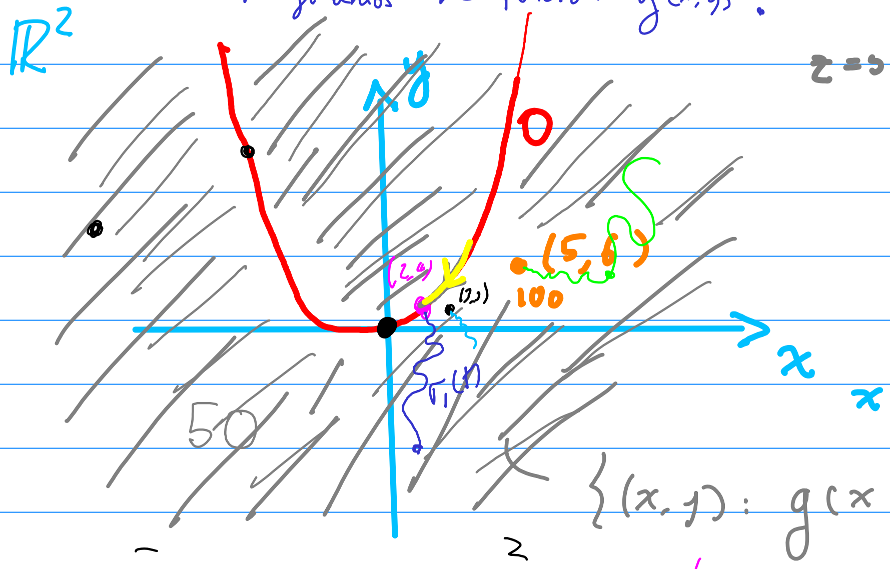
$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})=c$$



"Los valores de la función $g(x,y)$ se acercan a c cuando (x,y) se acerca a (a,b) a lo largo de CUALQUIER trayectoria en $\mathbb{R}^2\setminus\{(a,b)\}$"

$g: \longrightarrow$

¿Cómo imaginamos la función $g(x,y)$?



(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(5,6)} g(x,y) = 50$ ✓ $\neq$ $g(5,6)=100$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} g(x,y) =$ **NO EXISTE** $g(2,4)=0$

A lo largo de la curva azul el límite vale 50

A lo largo de la amarilla el límite es 0

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,7)} g(x,y) = 50$ $=$ ✓ $g(3,7)=50$

Def: $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\vec{a}$ ssi

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$

Obs: Esto significa:

(i) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(x)$ existe

(ii) $f(\vec{a})$ existe (f está definida en $\vec{a}$)

(iii) (i) y (ii) coinciden.

Obs: $g(x,y)$ es continua si (x,y) no es $(5,6)$ y no está en la parábola

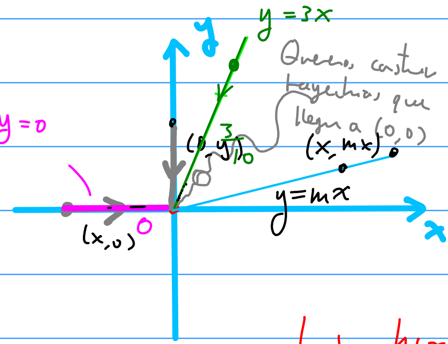
$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

2)

Ejercicios. (2.1) Sea $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) $\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) \right] \overset{?}{=}$

(b) Es h continua en $(0,0)$?



A lo largo de la curva marcada $(x,y) = (x,0)$

$\lim_{x\to 0} h(x,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = 0$ ✓

De la misma forma a lo largo de la curva que el límite vale 0. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$\lim_{x\to 0} h(x,3x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x\cdot 3x}{x^2+9x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{3\cancel{x^2}}{10\cancel{x^2}} = \dfrac{3}{10}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ $\|$ NO EXISTE

$\lim_{x\to 0} h(x,mx) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(mx)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{m\cancel{x^2}}{(1+m^2)\cancel{x^2}} = \dfrac{m}{1+m^2}$

Obs: Para decir que el límite tiene un valor c dado NO BASTA verificar que eso se cumple para toda recta (ver $(0,0)$ en ejemplo anterior en el que el límite no existe y a lo largo de toda recta da uno).

En $\mathbb{R}^2$ hay un método muy útil para cálculo de límites

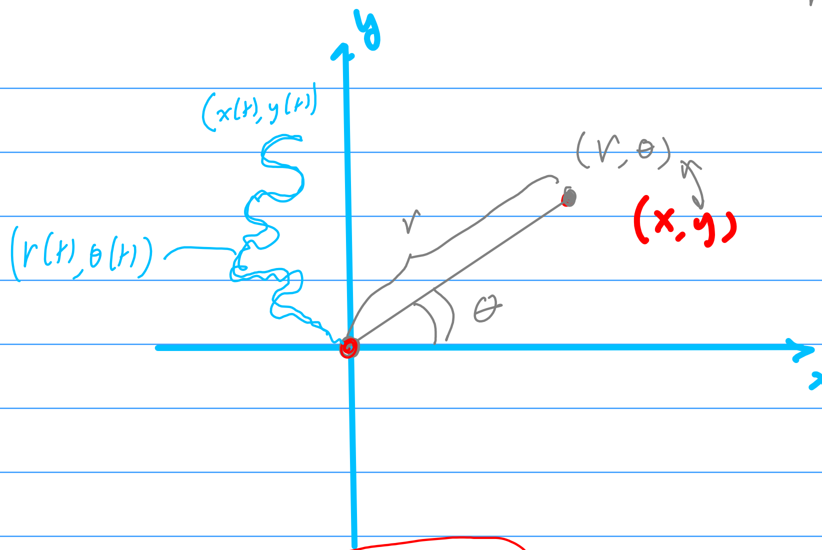
$\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \right] = \lim_{r\to 0} g(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases}$

Pasar a polares y ver

$r \geq 0$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



Sea

$$t(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ c, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} t(\vec{x}) \overset{?}{=}$

(b) Existe un número c que haga que $t(x,y)$ sea continua en $(0,0)$?

<u>Sol:</u> Pasamos a polares y estudiamos Límite cuando $r \to 0$

$$t(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 + \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}$$

$$= 1 + \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2}}$$

$$= 1 + r\cos\theta\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0}\left(1 + r\cos\theta\sin\theta\right) = 1 \quad ✓$$

(b) Tome $c = 1$ ✓

También sirve para notar que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ NO EXISTE

$$h(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{r\to 0} h(r\cos\theta, r\sin\theta) =$$

Paso a polares

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}} = \cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{\sin(2\theta)}{2}$$

así que el límite NO EXISTE porque el valor no es independiente de la trayectoria