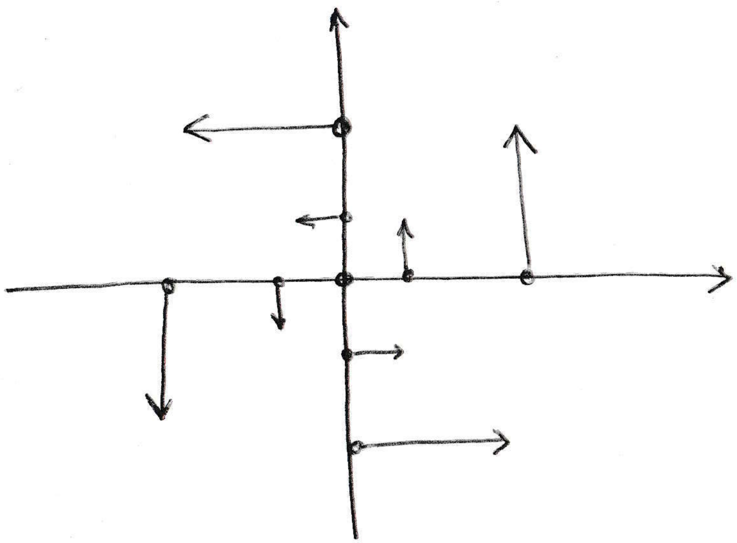
Integrales de campos vectoriales a lo largo de curvas

Recuerde que un campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una "asignación de flechas" en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$: ponemos la flecha $F(\vec{x})$ en el punto $\vec{x}$.

Ejemplo: $\boxed{F(x,y) = (-y, x)}$

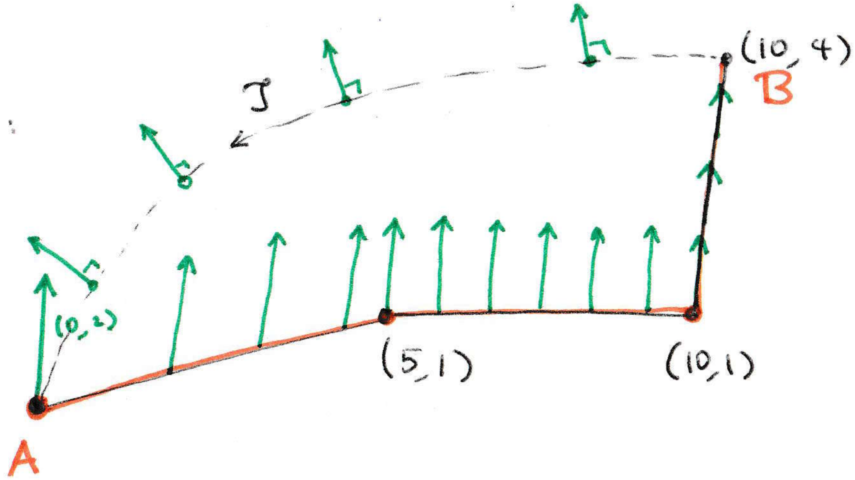


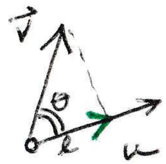
Notemos que las flechas varían "continuamente".

En esta clase queremos responder a la siguiente pregunta:

¿Cuánto trabajo realiza el campo de fuerza F a lo largo de una curva orientada σ?

Ejemplo:





$\cos(\theta) = \dfrac{l}{\|\vec{v}\|}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$

$\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|u\|}\right)\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} =$

$$\boxed{\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}}$$

a) Calcule el trabajo realizado por el campo vectorial F a lo largo de la curva σ desde A hasta B

b) Cuánto tabajo realiza desde B hasta A a lo largo de σ

c) Cuánto tabajo realiza desde B hasta A a lo largo de J

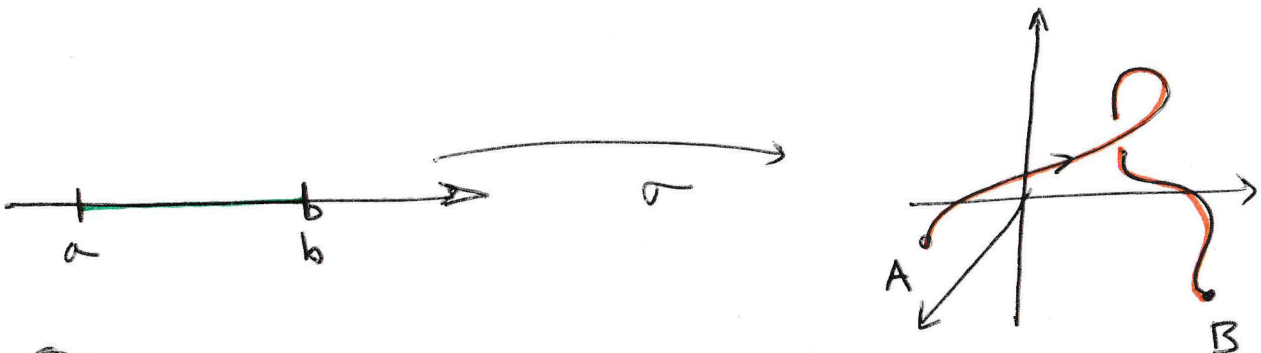
Def:

$$\int_C F\, d\vec{s} =$$

Teorema: Sea C una curva desde A hasta B y sea $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial entonces

$$\int_C F\, d\vec{s} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

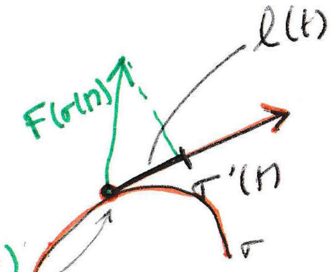
donde $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C con $a \leq t \leq b$ $\sigma(a) = A$ y $\sigma(b) = B$.



Obs:

(1) El resultado de la integral es el mismo para cualquier parametrización de A hasta B.

(2) Si $\mathfrak{J}$ es una parametrización de B hasta A entonces $\boxed{\int_{\mathfrak{J}} F \cdot d\vec{s} = -\int_\sigma F \cdot d\vec{s}}$



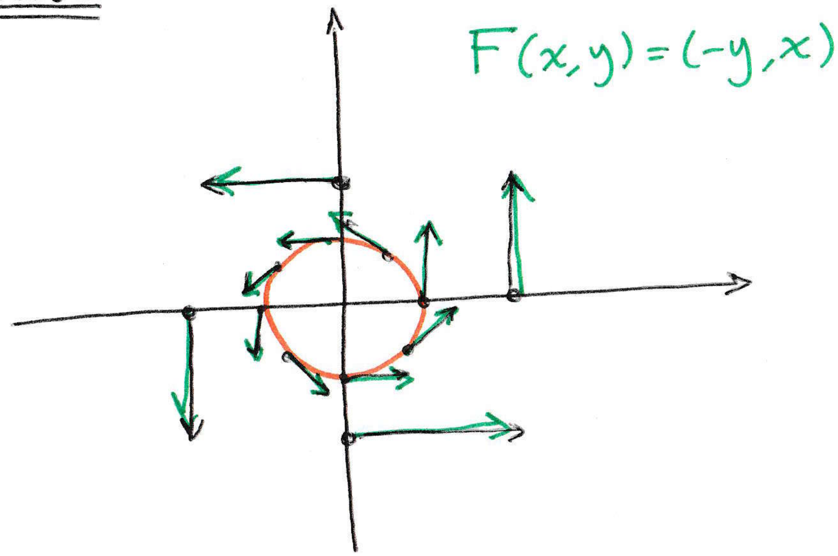
(3) $$\int_C F\, d\vec{s} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_a^b \overbrace{\left[\frac{F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\right]}^{l(t)} \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_C l(t)\, ds$$

Ejercicio:

Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y) = (-y, x)$ en cada vuelta circular iniciando en $(10, 0)$ y regresado despues de haber recorrido un camino circular con centro en el origen.

POR FAVOR DETENGA EL VIDEO E INTENTE RESOLVERLO UD MISMO...

Solución:



$$\begin{cases} \sigma(t) = (10\cos(t),\ 10\sin(t)) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad , \quad \sigma'(t) = (-10\sin(t),\ 10\cos(t))$$

$$\int_C F\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-10\sin(t), 10\cos(t)) \cdot (-10\sin(t), 10\cos(t))\, d$$

$$= \int_0^{2\pi} 100\,[\sin^2(t) + \cos^2(t)]\, dt = \boxed{200\pi} \quad N \cdot m = \text{Joules}$$