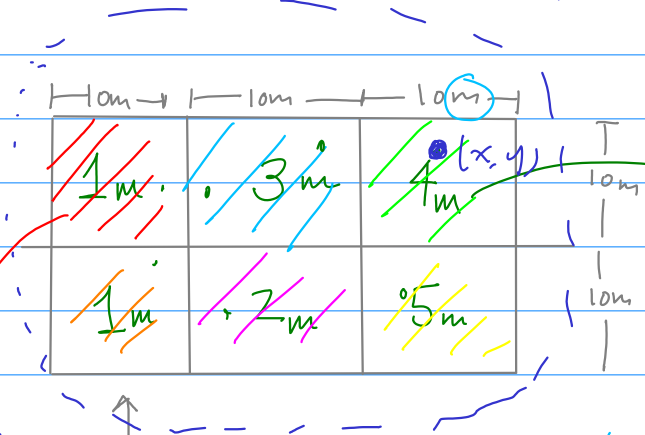
Cálculo Integral en varias variables:

(1) Problema sencillo (¿Qué se puede hacer con integrales?)



$P(x,y)$?

Profundidad

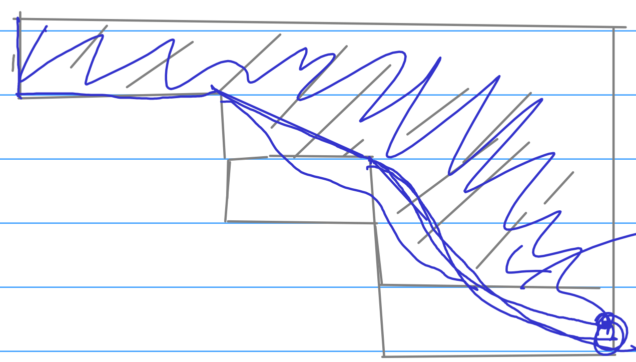
en m^3

Cuánta agua hay en la piscina?

$$(1\,m \times 10\,m \times 10\,m) + (3\,m \times 10\,m \times 10\,m) +$$

$$(\qquad) + (\qquad) +$$

$$(\qquad) + (\qquad) = 1600\,m^3$$



Gaudí

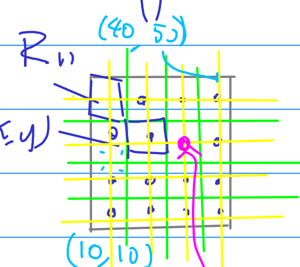
Si conocemos $P(x,y)$. Cuánta agua habrá en la piscina?

Procedimiento para resolver la pregunta:

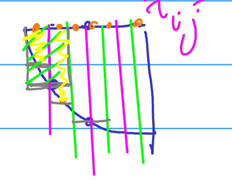
(1) Partimos la piscina en N^2 rectángulos R_{ij} dividiendo x y y en N pedazos cada uno

$\Delta y = \frac{50-10}{N}$

$\Delta x = \frac{40-10}{N}$



$N = 4$



(2) Seleccionamos un punto cualquiera del rectángulo ($\vec{x_{ij}}$). Vamos a imaginarnos que la profundidad de la piscina es $P(\vec{x_{ij}})$ en todo el rectángulo R_{ij}

(3) Calculamos el agua contenida en cada rectángulo y sumamos

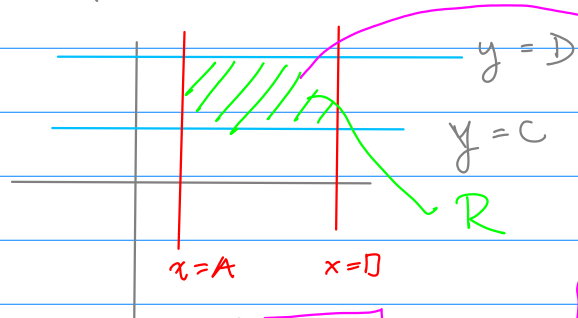
$$\left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(P(\vec{x_{ij}}) \cdot \underbrace{\Delta x^{(N)} \cdot \Delta y^{(N)}}_{\text{Area}(R_{ij})} \right)\right] \leftarrow \text{Estimado del Volumen}$$

$N = 1000$

$N = 1100$

(4) Dejamos $N \longrightarrow \infty$

Def: Sea $p(x,y)$ una función escalar en un rectángulo $R = \{(x,y) : A \le x \le B,\ C \le y \le D\}$



¿Cuánta agua cabe en la piscina rectangular R si la profundidad es $p(x,y)$?

$\Delta x = \frac{B-A}{N}, \quad \Delta y = \frac{D-C}{N}$

$$\iint_{R} \boxed{p(x,y)}\, dA := \left[\lim_{N\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p(\vec{x_{ij}})\, \Delta x \Delta y \right] \right]$$

$\vec{x} = (x, y)$

Cómo se calculan analíticamente ?

Teorema: (Fubini -- Cómo se calcula la integral sobre un rectángulo ?)

integramos dos veces como en C. Integral

Si $R = \{ (x,y) : A \le x \le B,\ C \le y \le D \}$

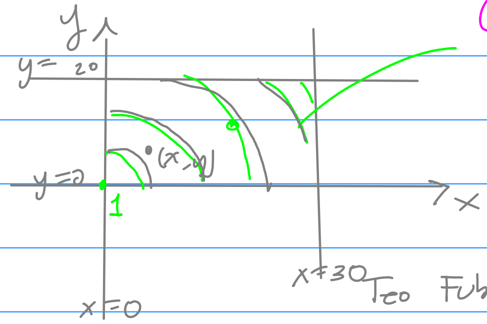
entonces:

$$\iint_R p(x,y)\, dA = \int_A^B \left[\left(\int_C^D p(x,y)\, dy \right) \right] dx$$

$$= \int_C^D \left[\int_A^B p(x,y)\, dx \right] dy$$

Ejemplo: $R = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 0 \le x \le 30 \\ 0 \le y \le 20 \end{array} \right\}$

$p(x,y) = 1 + x^2 + y^2$



Cuanta agua cabe?

$$\int_0^{30} \left[\int_0^{20} (1+x^2+y^2)\, dy \right] dx$$

Teo Fubini ——— (||)

$$\iint_R p(x,y)\, dA = \underbrace{\int_0^{20} \left[\int_0^{30} (1+x^2+y^2)\, dx \right]}\, dy$$

$$\int_0^{30} (1+x^2+y^2)\, dx = x + \frac{x^3}{3} + y^2 x \Big|_{x=0}^{x=30}$$

$$= 30 + \frac{30^3}{3} + y^2 \cdot 30 = \frac{27090}{3} + 30y^2$$

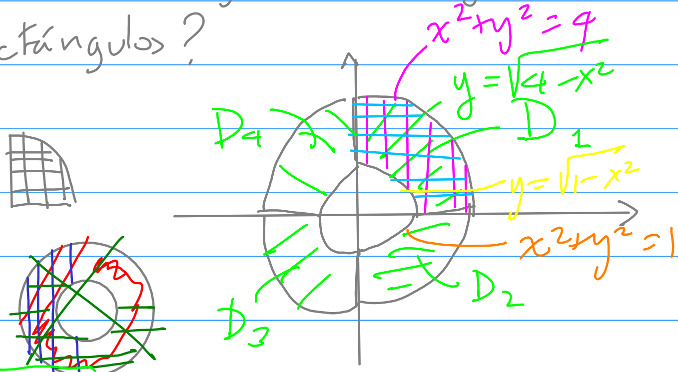
$$= \int_0^{20} \left(\frac{27090}{3} + 30y^2 \right) dy$$

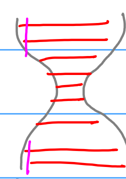
$$= \frac{27090}{3} y + \frac{30}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=20} =$$

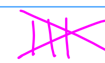
$$= \left[\frac{27090}{3} \cdot 20 + 10 (20^3) \right] m^3$$

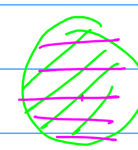
Cómo se integra sobre regiones más generales que rectángulos?

$$\iint_D P(x,y)\, dA = ?$$



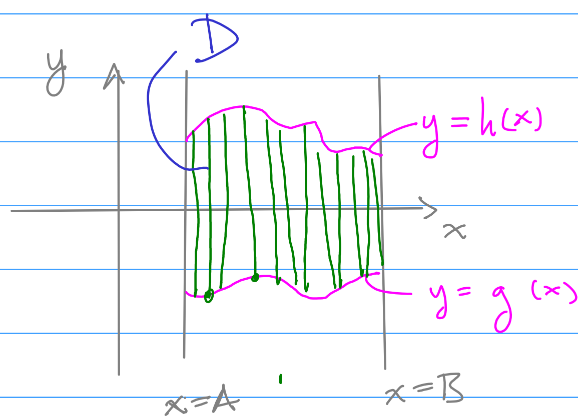






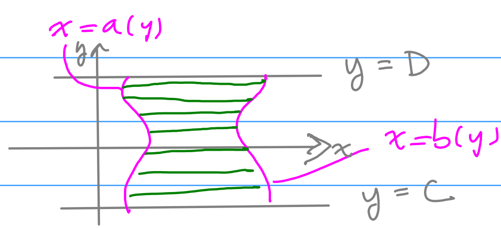
Teorema: (Fubini para regiones más generales)

(1) Si $D = \{ (x,y) : A \le x \le B,\ g(x) \le y \le h(x) \}$

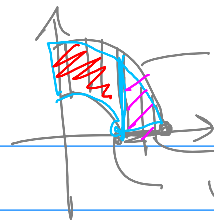


$$\iint_D P(x,y)\, dA = \int_A^B \left[\int_{g(x)}^{h(x)} P(x,y)\, dy \right] dx$$

(2) Si $R = \{ (x,y) : C \le y \le D,\ a(y) \le x \le b(y) \}$



$$\iint_D P(x,y)\, dA = \int_C^D \left[\int_{a(y)}^{b(y)} P(x,y)\, dx \right] dy$$



$$= \underbrace{\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} p(x,y)\,dy\,dx}_{\boxed{}} + \underbrace{\int_1^2 \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} p(x,y)\,dy\right] dx}_{\boxed{}}$$