Hoy: (1) Conjuntos de nivel y gráfica de una función escalar "temperatura"

(2) Ejemplos { * Funciones lineales afines
- Funciones cuadráticas

Ejemplo: Sea $\left[f(x,y) = x^2 - y^2 \right]$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \left(f(3,4) = 3^2 - 4^2 = -7 \right)$

(a) Dibuje los conjuntos de niveles $-4, -1, 0, 1, 4$. $\quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$

✓(b) Describa cómo se comporta f en palabras

(c) Dibuje la gráfica de f

Solución

(a) $x^2 - y^2 = -4$

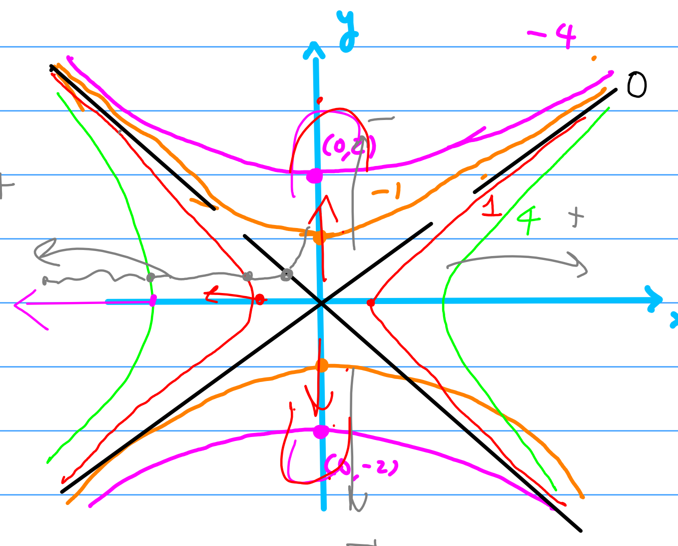
$x^2 - y^2 = -1$

$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow$

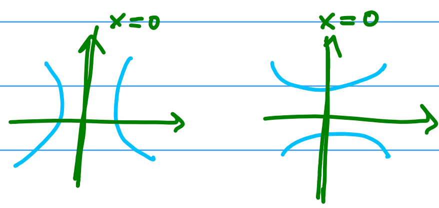
$x - y = 0$ ó $x + y = 0$

$x^2 - y^2 = 1$

$x^2 - y^2 = 4$

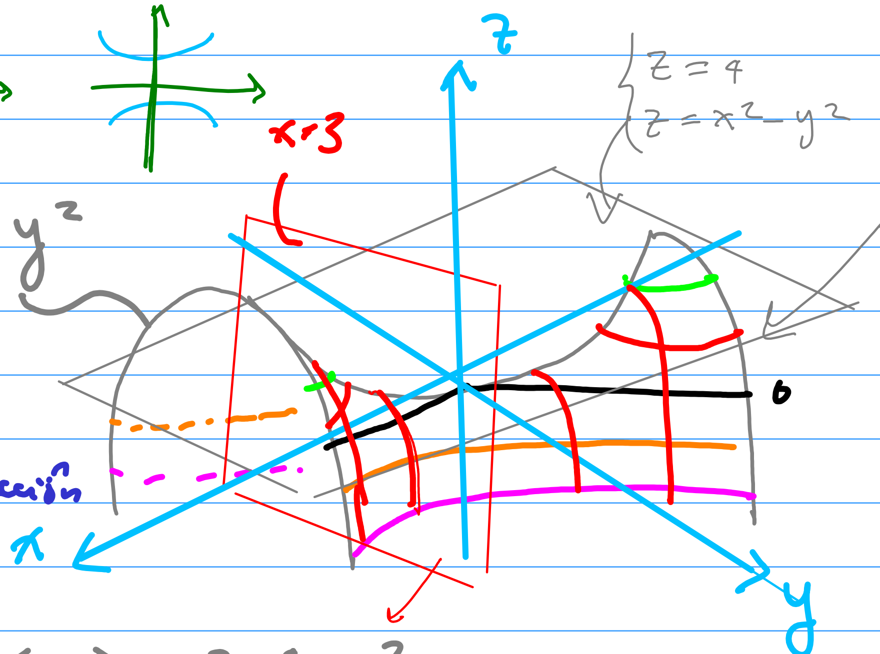


Repaso



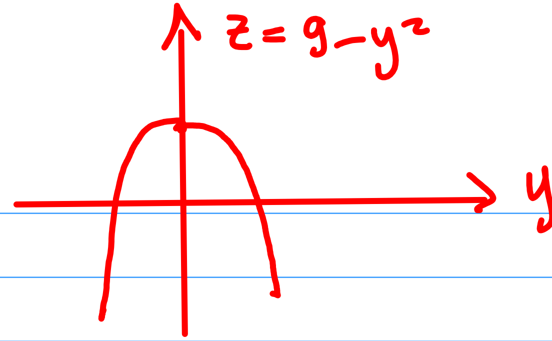
$\begin{cases} z = 4 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$

GRÁFICA: $z = x^2 - y^2$



Sistema de ecuaciones = Intersección de

$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x = 3 \end{cases} \iff \begin{matrix} z = 9 - y^2 \\ x = 3 \end{matrix}$



Ejemplo: (funciones lineales)

Sea $\ell(x,y) = y - 2x + 1$

(a) Dibuje los conjuntos de nivel $-2, -1, 0, 1, 2$.

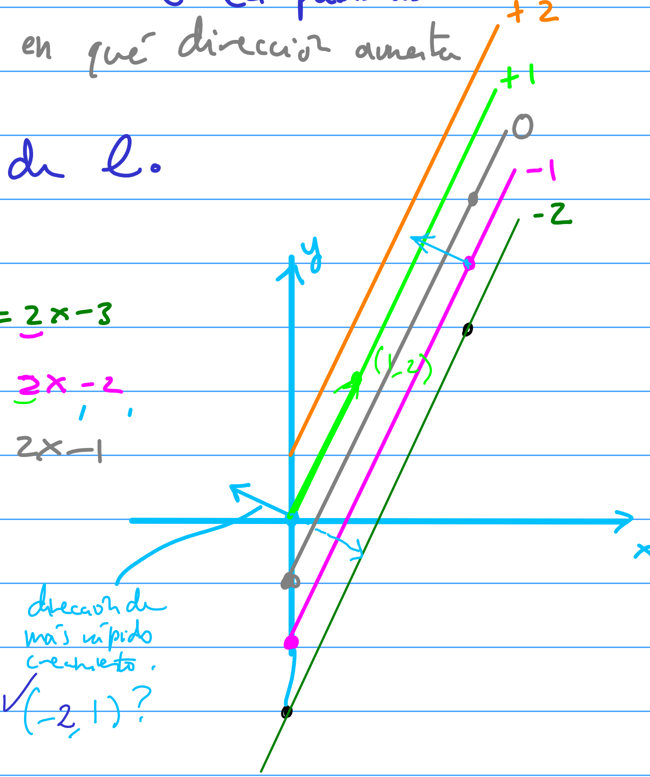
(b) Describa el comportamiento de ℓ en palabras
   (Si estamos en $(0,0)$ en qué dirección aumenta más ℓ?)

(c) Dibuje la gráfica de ℓ.

$y - 2x + 1 = -2 \iff y = 2x - 3$

$y - 2x + 1 = -1 \; (c) \iff y = 2x - 2$

$y - 2x + 1 = 0 \iff y = 2x - 1$



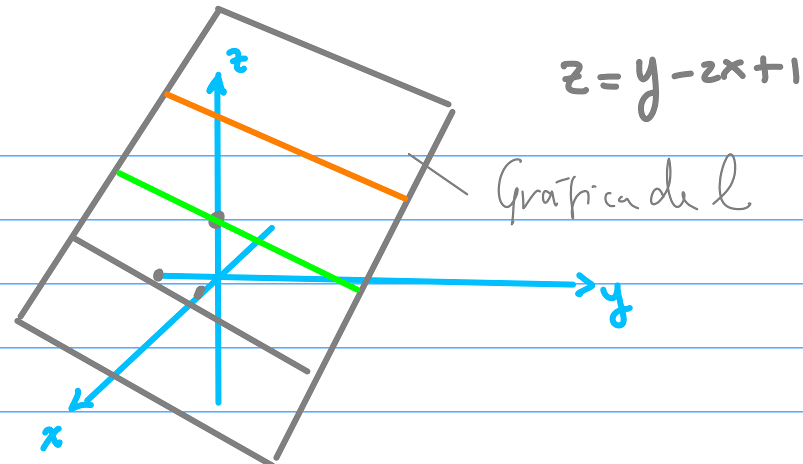
$$\ell(x,y) = y - 2x + 1$$
$$= -2x + y + 1$$

(b) Coeficientes de $\ell(x,y) = -2x + y + 1$

$$(-2, 1)$$

porque esos son el vector normal al plano
$[-2x + y + 1 = c]$

$$\ell(-2,1) = -2(-2) + 1\cdot 1 + 1 = 2^2 + 1^2 + 1 \geq \ell(0,0)$$



(Funciones lineales) $l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Teorema: Si $l(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c$

entonces

(a) Los conjuntos de nivel de l son planos paralelos en $\mathbb{R}^n$

(b) La dirección de máximo crecimiento en cualquier punto es $v = \dfrac{(a_1, \dots, a_n)}{\|(a_1, \dots, a_n)\|}$

(c) La gráfica de l es un hiperplano en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$z = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c$$

$$l : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[\, l(x, y, z) = 2x + y + 1 \,]$$