**Hoy:** Derivadas de segundo orden + Aproximaciones cuadráticas.

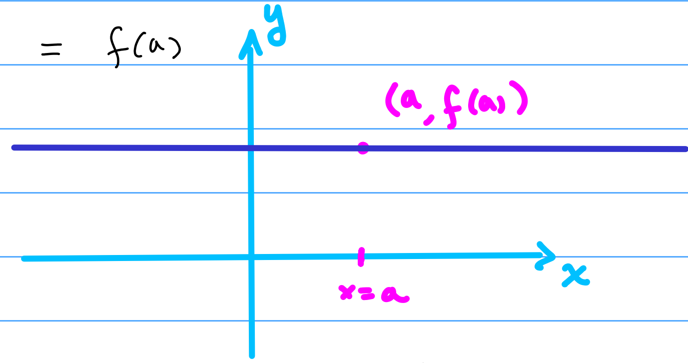
**Problema:** Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $a$ tal que $\underline{f'(a) = 0}$.

¿Cómo se comporta $f$ cerca de $a$?

(1) Aprox lineal:

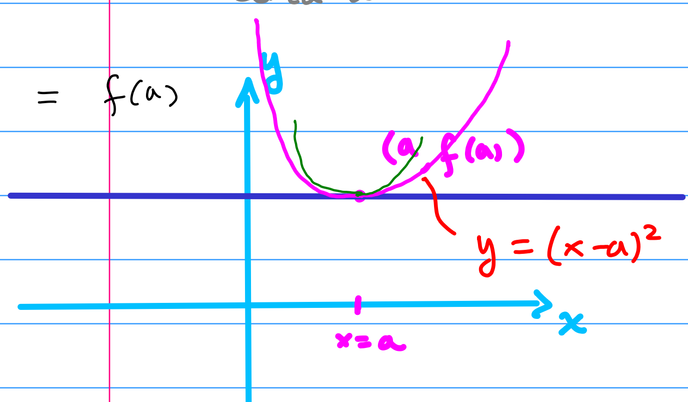
$$\ell_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\ell_a(x) = f(a)$$

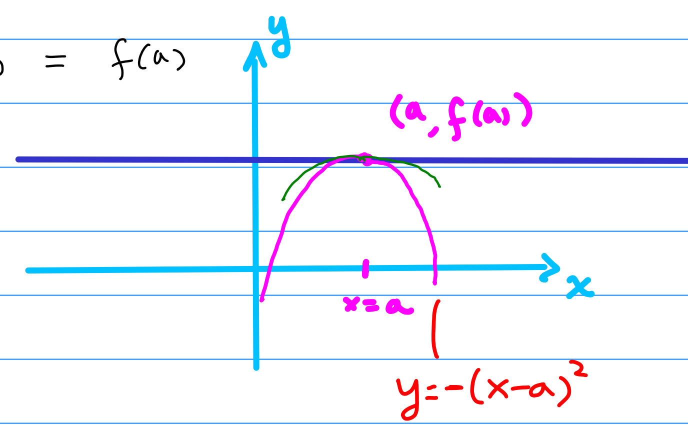



Hay <u>muchos</u> comportamientos posibles para $f$ cerca de $a$

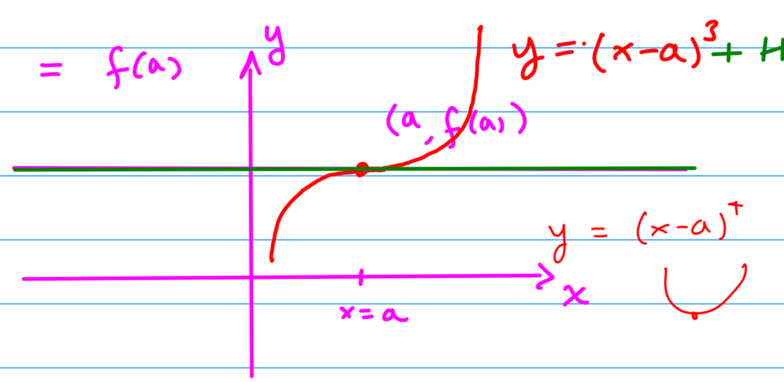
$) = f(a)$




$) = f(a)$




$) = f(a)$



En cálculo 1 aprendimos que podemos obtener una aproximación CUADRÁTICA más precisa de $f$ cerca de $a$ mediante la segunda derivada

?

$$q_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \left(\frac{f''(a)(x-a)^2}{2}\right)$$

Aplicación: Si $f'(a) = 0$

$$q_a(x) = f(a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}$$

$\boxed{\text{CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA}}$

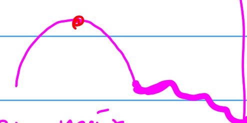
(1) Si $f''(a) > 0$

a es mínimo (LOCAL)

IMP.

mínimo global

(2) Si $f''(a) < 0$



a es máx local

(3) Si $f''(a) = 0$

??

NO SABEMOS

Cómo generalizar esto al caso de funciones escalares $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ?

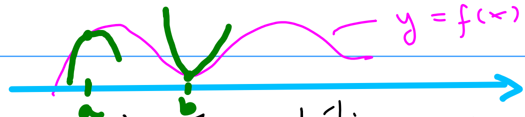
Def:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\dots,x_n) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\right)$$

Hay muchas segundas derivadas parciales, estas se organizan en una matriz (que es simétrica por Teorema de Clairaut)

$$H_f(a_1,\dots,a_n) = \begin{array}{c|c} & j \\ & n \\ \hline n,\ i & \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})\right] \end{array}$$

La matriz Hessiana de $f$ permite calcular aproximaciones cuadráticas para $f$ así:




**Def:** La mejor aproximación cuadrática para $f$ cerca de $\vec{x} = \vec{a}$ es:

$$q_{\vec{a}}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2}\cdot(\vec{x} - \vec{a})^t \mathcal{H}_f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

polinomio cuadrático en $\vec{x}$
$x_1, \dots x_n$

**Teorema:** Si $f$ tiene TODAS las segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x})$ CONTINUAS cerca de $\vec{a}$ entonces $q_a(\vec{x})$ aproxima a $f(\vec{x})$ MUY BIEN cerca de $\vec{x} = \vec{a}$, es decir:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - q_a(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^2} = 0$$

**Ejemplo:** Sea $f(x,y) = \cos(x-y) + 1$

(a) Calcule $\mathcal{H}_f(0,0)$

(b) Encuentre la mejor aproximación cuadrática para $f$ cerca de $(0,0)$.

Solución:

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & \quad y \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{0}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{0}) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin(x-y)\right] = \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin(x-y)\right] = -\cos(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x-y)(-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

Evaluamos en $(0,0)$:

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$q_{(0,0)}(x) = \underbrace{f(0,0)}_{2} + \overset{0}{\cancel{Df(0,0)}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$q_{(0,0)}(x,y) = 2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \; x(-x+y) + y(x-y)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \left[ -x^2 + xy + yx - y^2 \right]$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \left[ -x^2 + 2xy - y^2 \right]$$

$$\boxed{q_{(0,0)}(x) = 2 - \frac{(x-y)^2}{2}}$$

Como todas las derivadas parciales segundas de $f(x,y)$ son continuas en $(0,0)$ concluimos que $q_{(0,0)}$ es una MUY BUENA aproximación para $f$ cerca de $(0,0)$.

**Def:** Sea $A$ una matriz simétrica (de $n \times n$)

$A \succ 0$ (A es POSITIVA DEFINIDA) $\iff \vec{x}^t A \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

$A \prec 0$ (A es NEGATIVA DEFINIDA) $\iff \vec{x}^t A \vec{x} < 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

**Teorema** (de álgebra lineal)

$A \succ 0 \iff$ valores propios de $A$ son $> 0$

$A \prec 0 \iff$ valores propios de $A$ son $< 0$

## Teorema: [CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA]

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar con segundas derivadas parciales continuas. ?

Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ con $Df(\vec{a}) = \vec{0}$.

(1) Si $\mathcal{H}_f(\vec{a}) > 0 \Rightarrow \vec{a}$ es mín local

(2) Si $\mathcal{H}_f(\vec{a}) < 0 \Rightarrow \vec{a}$ es máx local

(3) de resto NO SABEMOS.

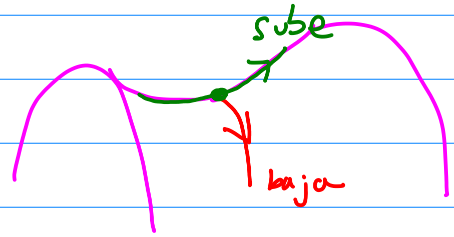
## Caso especial: [Matrices $2 \times 2$]

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \mathcal{H}_f(\vec{a}), \quad Df(\vec{a}) = \vec{0}$$

(1) Si $A > 0$ y $\det(H) > 0 \Rightarrow \vec{a}$ mínimo local

(2) Si $A < 0$ y $\det(H) > 0 \Rightarrow \vec{a}$ máx local

(3) Si $\det(H) < 0 \Rightarrow \vec{a}$ es UN PUNTO DE SILLA.




$x^2 - y^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(4) Si $\det(H) = 0 \Rightarrow$ NI IDEA