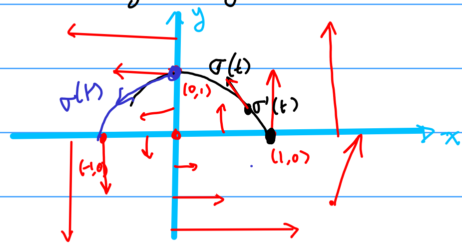
Hoy: (1) * Campos vectoriales y curvas parametrizadas

(2) Ejemplo uso criterio de la 2^{da} derivada

Los campos vectoriales $\left(F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ n=2,3\right)$ tienen dos interpretaciones físicas distintas:

- Como campo de velocidades
- Como campo de fuerzas

Ej: $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (-y, x)$ $\qquad F(1,0) = (-0,1)$



Problema 1: Qué trayectoria sigue una partícula que inicia en $(0,1)$ y sigue el campo de velocidades $F(x,y) = (-y, x)$?

Sol: Sea $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ la trayectoria.

Queremos encontrar las funciones $x(t)$ y $y(t)$.

"inicia en $(0,1)$" $\rightsquigarrow$ $\sigma(0) = (0,1)$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

"sigue el campo de velocidades $F(x,y)$" $\rightsquigarrow$ $\boxed{\vec{\sigma'(t)} = \vec{F(\sigma(t))}}$ ← CAMPO DE VELOCIDADES

Para encontrar $\sigma(t)$ tenemos que resolver el problema

$$\begin{cases} \sigma'(t) = F(\sigma(t)) \ \forall t & \leftarrow \text{ec. diferencial} \\ \sigma(0) = (0,1) & \leftarrow \text{condición inicial} \end{cases}$$

En nuestro ejemplo $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $F(x,y) = (-y, x)$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

← El planteamiento es lo más importante *

Resolver ... ✓

$x' = -y$

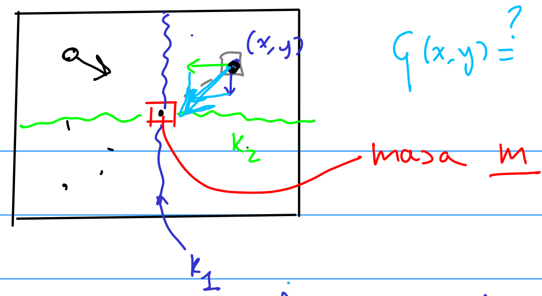
$x'' = -y' = -x$

$y = -x'$ ↖ con $x(t)$ se calcula

$x'' = -x$

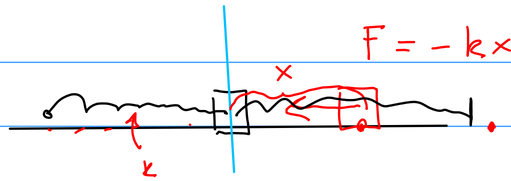
igual que en prob. 2

Problema 2:



$$C(t) \overset{?}{=} (x(t), y(t))$$

¿Qué trayectoria sigue el centro de masa de la caja si empieza desde el reposo en posición $(1,1)$ y sigue el campo de fuerzas dado por la Ley de Hooke.



Por ley de Hooke nuestro campo de fuerzas es

$$G(x,y) = (-k_2 x \,,\, -k_1 y)$$

"empieza desde el reposo en posición $(1,1)$" $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} C(0) = (1,1) \\ C'(0) = (0,0) \end{array}\right\}$

Campo de fuerzas.

"tiene masa m y sigue el campo de fuerzas $G(x,y)$"

$$\boxed{m\,C''(t) = G(C(t))}$$

2^{da} ley de Newton!!

Resolver: $C(t) = (x(t), y(t))$ **

$$\left\{ m \begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_2\, x(t) \\ -k_1\, y(t) \end{bmatrix} \right.$$

$x(0) = 1$

$\rightarrow y(0) = 1$

$x'(0) = 0$

$\rightarrow y'(0) = 0$

$\rightarrow \boxed{m y'' = -k_1 y}$ ← $y = e^{rt}$?

$$m r^2 e^{rt} = -k_1 e^{rt} \qquad \underbrace{(m r^2 + k_1)}_{= 0} e^{rt} = 0$$

$$m r^2 + k = 0 \implies r = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$$y(0) = 1 = A \checkmark$$

$$y'(t) = -A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\sqrt{\frac{k}{m}} + B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y'(0) = B\sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \implies B = 0 \checkmark$$

$$\boxed{y(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}\, t\right)}$$

Mismo razonamiento $\quad x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

$$c(t) = \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{m}}\, t\right), \cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}\, t\right)\right)$$