Hoy: Distancias, ángulos e hiperplanos.

Def: Si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

definimos

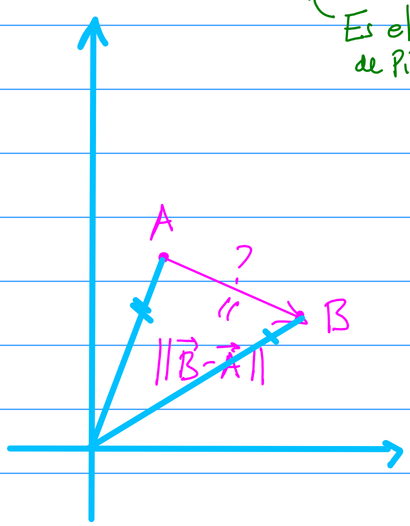
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n$$

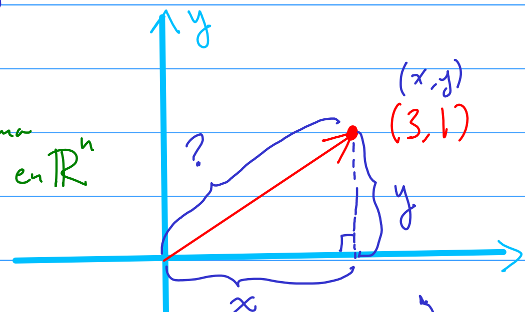
¿Qué significa? ¿Para qué sirve?

(1) Permite medir longitudes de vectores:

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

Es el Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$





$$? = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x,y) \cdot (x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

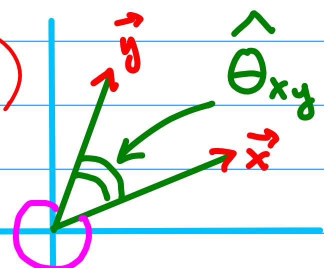
$$\|(3,1)\| = \sqrt{(3,1) \cdot (3,1)} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

(2) Permite medir ángulos gracias a la forma polar

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\hat{\theta}_{xy})$$

$$\cos^{-1}(\quad)$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{xy} = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \right)}$$ Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$



Obs: El producto punto nos permite hablar de vectores perpendiculares en $\mathbb{R}^n$

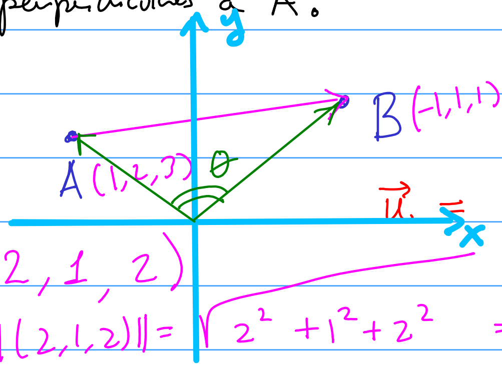
$\vec{x}, \vec{y}$ son vectores perpendiculares $\iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

(1) Ejercicio:
→ (a) $A(1,2)$ $B(2,1)$
→ (b) $A(1,2,3)$ $B(-1,1,1)$

Calcule la distancia entre los puntos A y B y el ángulo entre los vectores A y B.

(2) Ejercicio: $A(1,2,3,4)$ $B(1,1,1,1)$
(a) Son A y B perpendiculares?
(b) Encuentre C que sea perpendicular a A
(c) Encuentre TODOS los vectores de $\mathbb{R}^4$ que son perpendiculares a $\vec{A}$.

Sol 1:



$\|B-A\| =$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

distancia

$B - A = (2, 1, 2)$

$\|B-A\| = \|(2,1,2)\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \frac{-1+2+3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{3}}$$

$$\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\right) = 0.905\ldots \text{ RADs.}$$

$$51.88^\circ = 0.905\ldots \frac{180}{\pi} \quad \cancel{rads} \cdot \frac{{}^\circ}{\cancel{rads}}$$

Sol 2: (a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \neq 0$

NO perp.

(b) $\vec{A}(1,2,3,4)$, $\vec{C} = (-1,-1,1,0)$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = -1 - 2 + 3 + 0 = 0 \quad ✓$$

(G) $\vec{C} = (\overset{?}{c_1}, \overset{?}{c_2}, \overset{?}{c_3}, \overset{?}{c_4})$

$$0 = \vec{A}\cdot\vec{C} = (1,2,3,4)\cdot(c_1,c_2,c_3,c_4)$$

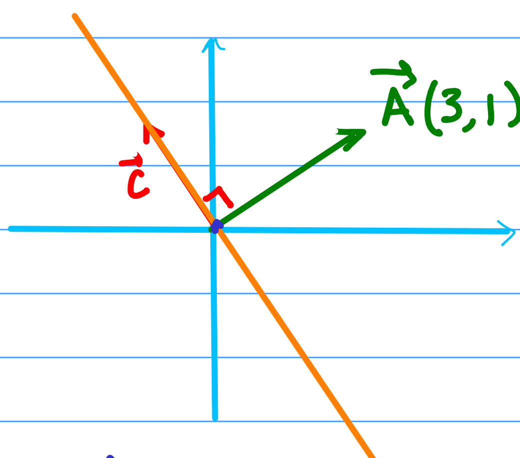
$$\boxed{0 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4} \leftarrow \text{Ecuaciones lineales}$$

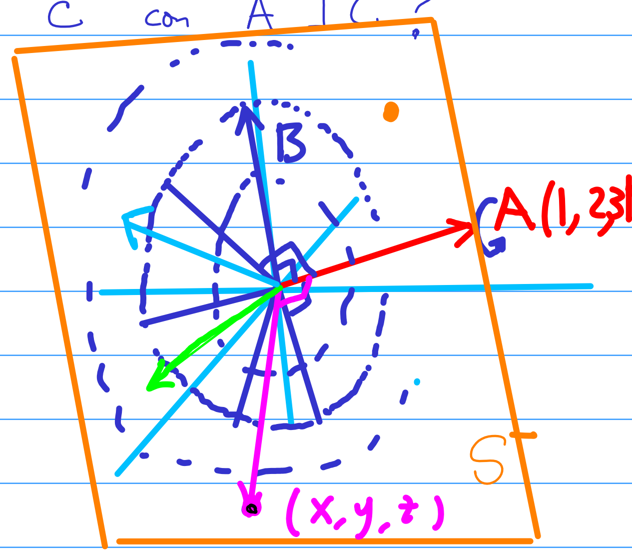
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 - 3c_3 - 4c_4 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{C} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

soluciones

Pregunta: Dado $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$. Qué forma tiene el conjunto de todos los vectores $\vec{C}$ con $\vec{A} \perp \vec{C}$?





$$\vec{C} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = 0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{3x + y = 0}$$

Encuentre una ecuación para los puntos de S

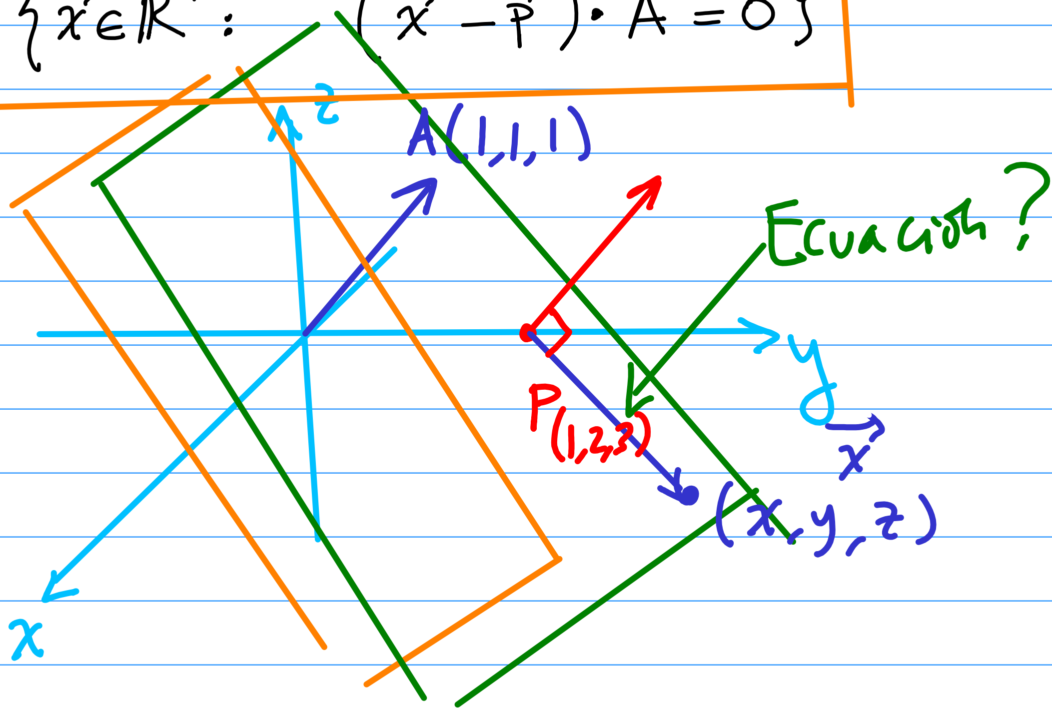
$$D = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = x+2y+3z$$

$$\to \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \underbrace{x+2y+3z=0}_{\text{soluciones}}\right\} =$$ Plano constituido por los vectores perpendiculares a $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\to \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2y-3z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Def: El plano que pasa por el punto $\vec{P}$ con vector normal $\vec{A}$ es

$$\boxed{\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : (\vec{x}-\vec{P})\cdot\vec{A} = 0\right\}}$$



Concretamente en el ejemplo tenemos

$$\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$(x-1)+(y-2)+(z-3)=0$$

$$\boxed{x+y+z=6}$$

Ejercicio: *

(a) Encuentre una ecuación para el plano que pasa por $(1,1,1)$ y es perpendicular a $(1,2,3)$

(b) Encuentre una ecuación para el plano que pasa por $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.