Vectorial Virtual – Taller 2, parte 1: Derivadas direccionales y optimización.

Problema 1. Regla de la cadena

1. Dada $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ y $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$ calcule la (matriz) derivada de $f \circ g$ en el punto $(1,1)$ usando la regla de la cadena.
2. (Derivadas parciales en coordenadas polares) Dada la función $f(x,y)$, haga la sustitución $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y encuentre, mediante la regla de la cadena, una fórmula para las derivadas $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial f}{\partial r}$ en el punto (r,θ) (Nota: el resultado debe ser en términos de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ evaluadas en $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y funciones de r y θ)

Problema 2. Teorema del gradiente

Un insecto vuela en un cuarto cuya temperatura esta dada por la función $T(x, y, z) = x^2 + y^4 + 2z^2$ (medida en grados centígrados y x, y, z en centímetros).

1. El insecto se encuentra en el punto $(1, 1, 1)$ y nota que tiene frío. En qué dirección debería moverse para que la temperatura aumente lo más rápidamente posible? A qué tasa cambia su temperatura cuándo se mueve en esa dirección? Qué unidades tiene su respuesta?
2. Encuentre:
    1. La ecuación que define al conjunto de nivel de la temperatura que pasa por el punto $(1, 1, 1)$. Llame a ese conjunto S
    2. Encuentre la ecuación del plano tangente al conjunto S en el punto $(1, 1, 1)$
    3. De un ejemplo de una dirección de movimiento en la que la derivada direccional de la temperatura sea cero.

Problema 3. Multiplicadores de Lagrange

1. Encuentre los valores máximos y mínimos de la función $2xy$ en la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. En qué puntos se alcanzan estos valores?
2. Encuentre los valores máximos y mínimos de la función xyz en la región dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En qué puntos se alcanzan estos valores?

Problema 4. Optimización

1. Encuentre el punto de la curva $y\sqrt{x} = \sqrt{2}$ más cercano al origen.
2. Se quiere hacer una caja "rectangular" (sin tapa pero con piso) usando $12m^2$ de cartón. Encuentre el máximo volumen que puede tener la caja y las dimensiones que debe tener.