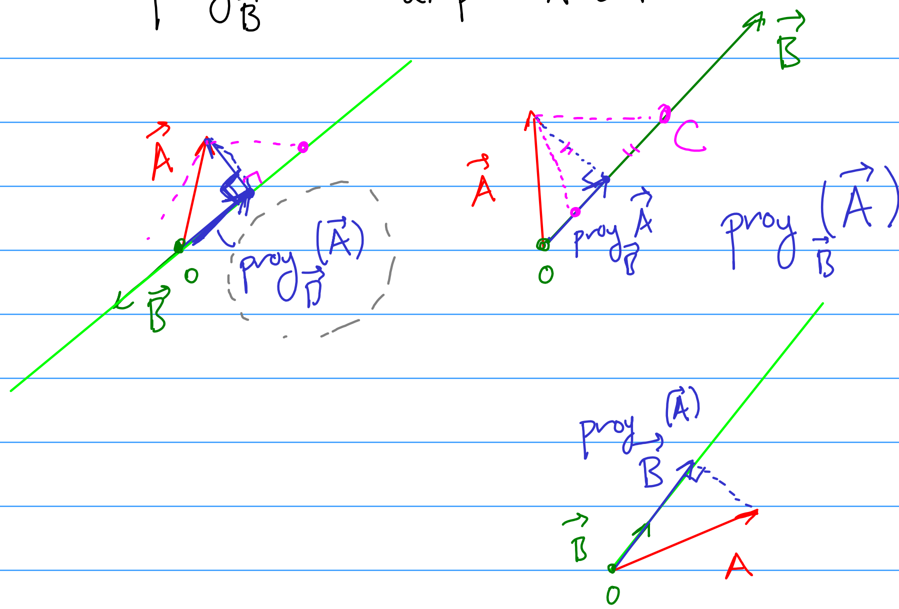
(1) **Proyecciones:**

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, queremos definir

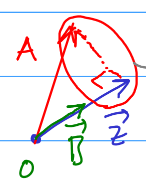
$\text{proy}_{\vec{B}}(\vec{A}) =$ "Es un vector que es el más cercano al punto $\vec{A}$ entre los múltiplos de $\vec{B}$"



Cómo se calcula $\quad \text{proy}_{\vec{B}}(\vec{A}) \overset{?}{=} \vec{z}$

Notamos que: (i) $\vec{z}$ es múltiplo de $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{z} = \lambda \vec{B}$??

(ii)



El vector que une a $\vec{A}$ y a $\vec{z}$ es perpendicular a $\vec{B}$

$$(\vec{A} - \vec{z}) \cdot \vec{B} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{z} = \lambda \vec{B} \\ (\vec{A} - \lambda \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{A} \cdot \vec{B} - \lambda \vec{B} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}}$$

Teorema:

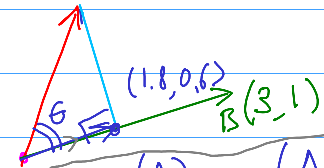
$$\boxed{\text{proy}_{\vec{B}}(\vec{A}) = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \right) \vec{B}}$$

más cercano a $\vec{A}$ entre los múltiplos de $\vec{B}$

$$\|\text{proy}_{\vec{B}}(\vec{A})\| = \left\| \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} \right\| = \left| \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \right| \|\vec{B}\|$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B} = \|B\|^2, \qquad \boxed{\frac{|\vec{A}\cdot\vec{B}|}{\|\vec{B}\|} = \|proy_{\vec{B}}(\vec{A})\|}$$

Ejemplo: A(1,3)



$$\cos\theta = \frac{\ell}{\|A\|} \Rightarrow \ell = \cos\theta\,\|A\|$$

$$\ell\cdot\left(\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}\right) =$$

$$\boxed{proy_B(A) = \left(\frac{A\cdot B}{B\cdot B}\right)\vec{B}} = \frac{6}{10}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.8\\0.6\end{pmatrix}$$

$A\cdot B = 6$

$B\cdot B = 3^2+1^2 = 10$

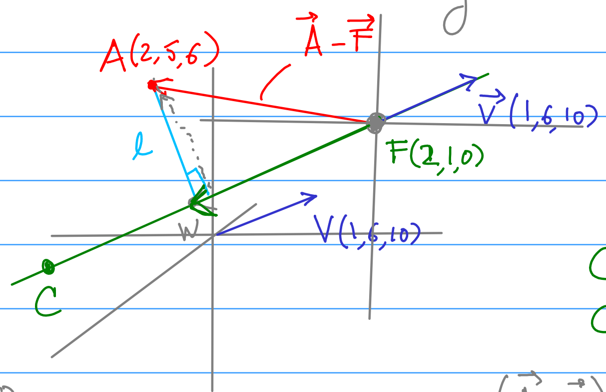
Ejercicios: (Proyecciones y distancia)

(1) Sea $\sigma(t) = \underset{F}{(2,1,0)} + t\,\underset{\vec{V}}{(1,6,10)}$ la parametrización de una recta r

Cuál es la distancia entre r y $A(2,5,6)$?

(2) Sea P el plano $2x+y+z=3$. Encuentre la distancia entre P y el punto $A(1,5,6)$.

(1)



$\|A-W\|$ ✓

$C = F + t\vec{V}$

$C - F = t\vec{V}$

Queremos encontrar $proy_{\vec{V}}(\vec{A}-\vec{F})$,

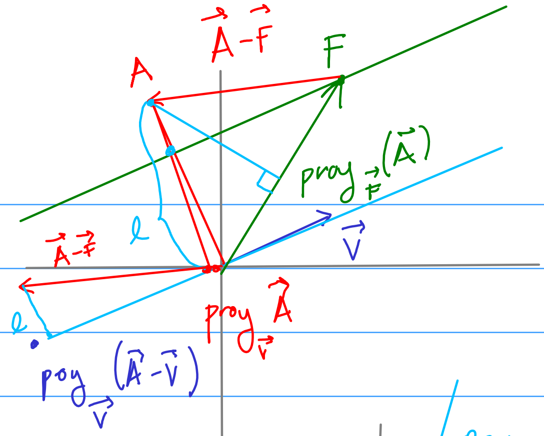
$$\ell = \|(A-F) - proy_{\vec{V}}(\vec{A}-\vec{F})\|$$

$\vec{A}-\vec{F} = (2,5,6)-(2,1,0) = (0,4,6)$, $V=(1,6,10)$

$$proy_{\vec{V}}(\vec{A}-\vec{F}) = \left(\frac{(A-F)\cdot\vec{V}}{\vec{V}\cdot\vec{V}}\right)\vec{V} = \frac{6\cdot4+6\cdot10}{1^2+6^2+10^2}\begin{pmatrix}1\\6\\10\end{pmatrix}$$

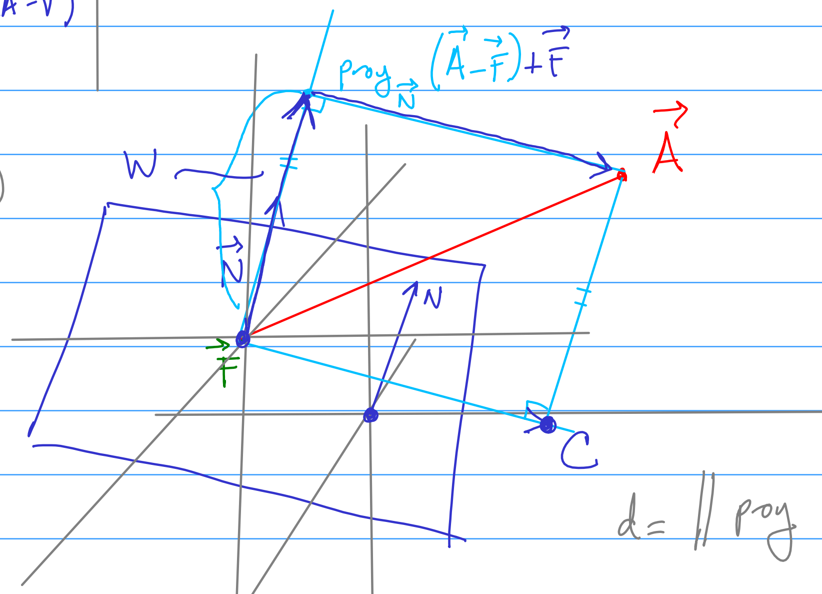
$$= \frac{84}{137}\begin{pmatrix}1\\6\\10\end{pmatrix} =$$

Por qué es importante $proy_{\vec{V}}(\vec{A}-\vec{F})$ vs $\cancel{proy_{\vec{V}}(\vec{A})}$ incorrecto



$\mathrm{proy}_{\vec{V}}\vec{A}$

②



$d = \|\mathrm{proy}_{\vec{N}}(\vec{A}-\vec{F})\|$

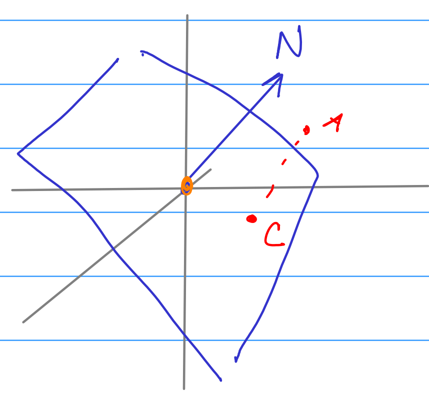
$W = \overbrace{\mathrm{proy}_{\vec{N}}(A-F) + \vec{F}}$

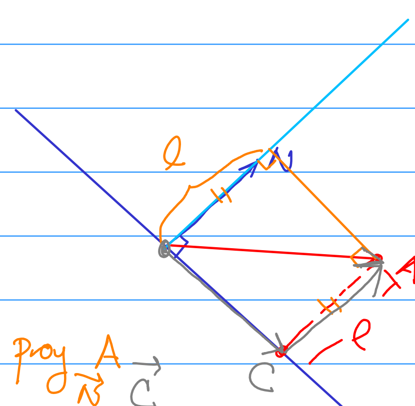
el punto del plano más cercano a $\vec{A}$

$W = \mathrm{proy}_{\vec{N}}(A-F) + \vec{F}$

$$\boxed{\begin{aligned} C &= F + (A - W) \\ &= F + A - (\mathrm{proy}_{\vec{N}}(A-F) + F) \\ &= A - \mathrm{proy}_{W}(A-F) \end{aligned}}$$

punto del plano más cercano a A





$\mathrm{proy}_{\vec{N}}A$ $\vec{C}$

$A = \underbrace{\mathrm{proy}_{\vec{N}}A}_{W} + \underbrace{\left(A - \mathrm{proy}_{\vec{N}}A\right)}_{}$