Hoy: (1) Ejercicio de clase anterior → Ley de Gauss electromagnetismo
(2) Repaso (estructura de la última parte)
* (3) Ejemplo final de Stokes.

Eléctrico
Gravitacional

(1) Sea $H(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \left(\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\cdot \dfrac{1}{\|\vec{x}\|^2}$

(a) Sea T la esfera de radio R centrada en $\vec{0}$. probando

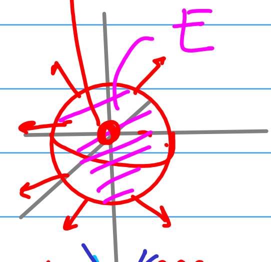
$$\iint_T H\,d\vec{S} = 4\pi \checkmark$$

Para cualquier R

Ver clase anterior

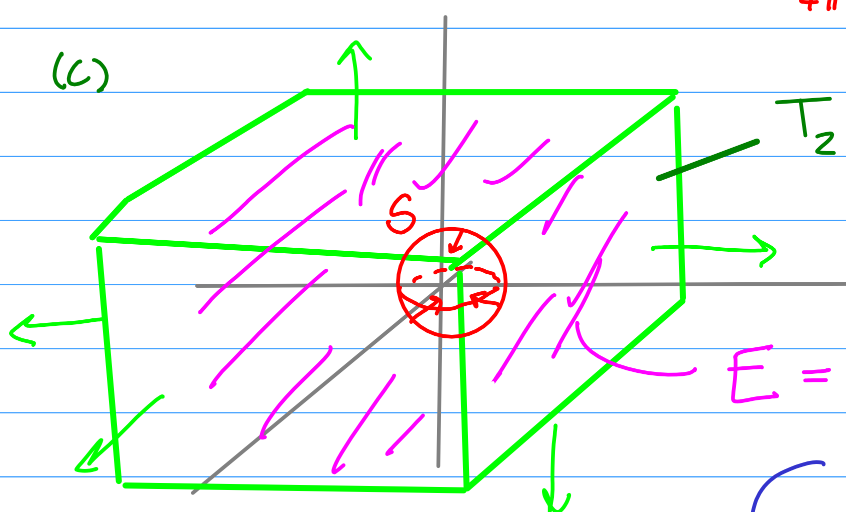
(b) $\nabla \cdot H = 0$ ✓

H no dif en $\vec{0}$



$$4\pi = \iint_T H\,dS \cancel{=} \iiint_E \nabla\cdot H = 0$$

(c)



T_2 (superficie del cubo) $-2 \le x, y, z \le 2$

E = Región sólida
Cubo sólido − Esfera sólida

(¿¿) $\iint_{T_2} H\,dS$

El campo H es diferenciable en TODOS los puntos de E y por ello podemos aplicar Teo de Gauss

$$\iint_{\text{Frontera de } E} H\,dS = \iiint_E \nabla\cdot H\,dV = 0$$

Frontera de E $=$ T_2 (hacia afuera) $\cup$ S (hacia adentro de S)

determinadas por "hacia afuera de E"

$$\iint_{T_2} H\, dS + \iint_{S} H\, dS = 0$$

$$\iint_{T_2} H\, ds = -\iint_{S} H\, dS = -\left(-4\pi\right) = 4\pi$$

porque es con orientación contraria a la de (a)

Ley de Coulomb.

Concluimos que para

$$H(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}\right]$$

ocurre que

$$\frac{Q}{\cancel{4\pi}}\ \cancel{4\pi}$$

cualquier superficie cerrada

$$\iint_{L} H\, d\vec{S} = \begin{cases} Q, & \text{si } L \text{ encierra a } \vec{0} \\ 0, & \text{si } L \text{ no encierra a } \vec{0} \end{cases}$$

Teorema (Ley electromag. de Gauss)

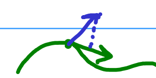
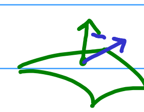
El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada L es igual a la carga encerrada por la superficie L.

Cuadro de repaso (Teoría de integración)

Qué? función

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{\substack{\text{Región } T \\ \text{Sobre qué?}}} A \; d\cdots =$$

(densidad)

	Función Escalar $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$	Campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
Región sólida $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$	$\iiint_E f \, dV$ (Parcial II)	
Curva Parametrizada $\sigma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$	$\int_\sigma f \, ds =$	$\int_\sigma F \, d\vec{s} =$ * Aplicación: • Trabajo 
Superficie Parametrizada T $\{\Phi(u,v)=(x,y,z)$	$\iint_T f \, dS =$	$\iint_T F \, d\vec{S} =$ * Aplicación: • Flujo 

Aplicaciones:

- masa total (probabilidades)
- centro de masa
- Momento de inercia

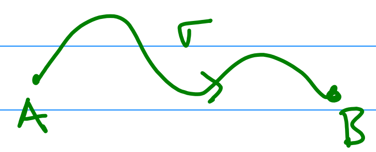
(*) Técnicas especiales de cálculo.

Técnicas especiales de cálculo.

(1) Trabajo:

(a) Si F es conservativo (i.e. $F = \nabla u$ para algún potencial u) entonces

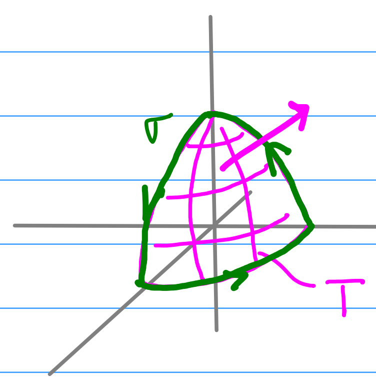
construir u



$$\int_\sigma F\, ds = u(B) - u(A)$$

(b)

Si σ es cerrada y es frontera de una superficie T entonces (Stokes ó Green)



$$\boxed{\int_\sigma F\, ds \overset{\text{(Stokes ó Green)}}{=} \iint_T \nabla \times F\, d\vec{S}}$$

(Asumiendo F diferenciable en T y orientaciones compatibles en T y en σ)

(2) Flujo a través de superficies cerradas

Si T es la frontera de una región sólida E orientada hacia afuera

$$\iint_T F\, d\vec{S} \overset{\text{(Teo de Gauss)}}{=} \iiint_E \nabla \cdot F\, dV$$

(Asumiendo que F es diferenciable en todos los puntos de la región sólida E).

VERDADERO Ó FALSO:

Sea H diferenciable en $\mathbb{R}^3$ FALSO

(1) Si $\nabla \cdot H = 0 \Rightarrow H$ es conservativo.

[Teorema] (1) Si $\nabla \times H \neq \vec{0} \Rightarrow H$ NO ES conservativo.

(2) Si $\nabla \times H = \vec{0}$ y H es dif en $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow H$ es conservativo.

(1) FALSO

$H(x,y,z) = (-y, x, 0)$

$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\,0 + \hat{j}\,0 + 2\hat{k} = (0,0,2) \neq \vec{0}$$

Así que H NO es conservativo.

$$\nabla \cdot H = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (-y, x, 0) = 0$$

Sea H un campo vect diferenciable en $\mathbb{R}^3$

(2) Si $\nabla \times H = \vec{0} \Rightarrow H$ es conservativo.

(verdadero porque H es diferenciable en $\mathbb{R}^3$)

(3) Si $H = \nabla \times F$ para F campo vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow H$ es conservativo. FALSO

$$\to F = (xyz,\ yz,\ xz)$$

$$\nabla \times F = (-y,\ z - xy,\ -xz) = H$$

$$\nabla \times H = (\quad ,\quad , -y+1) \neq 0 \Rightarrow H \text{ NO es conservativo}$$