Práctico 2 TEOCOMP: Fundamentos de probabilidad y algoritmos codiciosos.

Mauricio Velasco

1. (*Puntos fijos en permutaciones aleatorias*) Recuerde que los puntos fijos de una permutación $\sigma \in S_n$ son aquellos índices $i \in \{1, \dots, n\}$ con $\sigma(i) = i$.

   a) Para un entero j cualquiera defina la variable aleatoria $Y^{(j)} : S_n \to \mathbb{R}$ con
   $$Y^{(j)}(\sigma) = \begin{cases} 1, \text{ si } \sigma(j) = j \\ 0, \text{ de lo contrario} \end{cases}$$
   Si $\mathbb{P}$ es la medida uniforme en S_n, calcule $\mathbb{E}[Y^{(j)}]$ dando un argumento preciso para su respuesta.

   b) Use la parte (a) para encontrar el número esperado de puntos fijos de una permutación aleatoria de S_n, elegida uniformemente.

2. (*Probabilidad de éxito de construcción de permutaciones aleatorias*) Suponga que $p_1, \dots p_N$ son variables aleatorias independientes, cada una uniforme en $\{1, 2, \dots, N^3\}$.

   a) Demuestre que la probabilidad de que $(p_1, \dots, p_N)$ no tenga repeticiones es por lo menos $1 - 1/n$.

   b) Una moneda cae cara con probabilidad p y sello con probabilidad $q = 1 - p$. Calcule el número esperado de lanzamientos hasta que la moneda caiga cara por primera vez.

   c) Combinando los dos items anteriores, calcule el número esperado de ejecuciones que debe hacer nuestro **Algoritmo de permutación uniforme mediante sorting** antes de que genere una permutación (recuerde que el algoritmo se ejecuta repetidas veces hasta que las prioridades p_i salgan todas distintas asi que el problema pregunta por el número esperado de intentos antes de que esto suceda). (Sugerencia: Mezcle las partes (a) y (b) y note que su respuesta debe depender de N).

3. (**Coincidencias planetarias**) El planeta bajo observación esta habitado por k habitantes $1, 2, \ldots, k$ y dá una vuelta a su estrella cada n días (donde un día es un giro del planeta alrededor de su propio eje).

   a) Sea Para habitantes $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ sea

   $$X^{(ij)} = \begin{cases} 1, \text{ si los habitantes } i \text{ y } j \text{ cumplen años el mismo día} \\ 0, \text{ de lo contrario.} \end{cases}$$

   Calcule $\mathbb{E}[X_{ij}]$ asumiendo que los cumpleaños se distribuyen de manera uniforme en los distintos días. Justifique su respuesta de manera precisa.

   b) Sea X la variable aleatoria que cuenta cuántas parejas de los k individuos cumplen el mismo día. Calcule $\mathbb{E}[X]$ justificando matemáticamente su respuesta.

   c) Use el punto anterior para demostrar que si hay por lo menos $1+\sqrt{2n}$ individuos en un cuarto entonces deberíamos esperar que al menos dos tengan el mismo cumpleaños.