

Práctico 2 TEOCOMP: Fundamentos de probabilidad y algoritmos codiciosos.

Mauricio Velasco

1. (*Puntos fijos en permutaciones aleatorias*) Recuerde que los puntos fijos de una permutación $\sigma \in S_n$ son aquellos índices $i \in [n]$ con $\sigma(i) = i$.

a) Defina la variable aleatoria $Y^{(i)} : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$Y^{(i)}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Si \mathbb{P} es la medida uniforme en S_n , calcule $\mathbb{E}[Y^{(i)}]$ dando un argumento preciso para su respuesta.

b) Use la parte (a) para encontrar el número esperado de puntos fijos de una permutación aleatoria de S_n , elegida uniformemente.

2. (*Probabilidad de éxito de construcción de permutaciones aleatorias*) Suponga que p_1, \dots, p_N son variables aleatorias independientes, cada una uniforme en $\{1, 2, \dots, N^3\}$.

a) Demuestre que la probabilidad de que (p_1, \dots, p_N) no tenga repeticiones es por lo menos $1 - 1/n$.

b) Una moneda cae cara con probabilidad p y sello con probabilidad $q = 1 - p$. Calcule el número esperado de intentos antes de que la moneda caiga cara por primera vez.

c) Calcule el número esperado de ejecuciones que debe hacer nuestro **Algoritmo de permutación uniforme mediante sorting** antes de que genere una permutación (recuerde que el algoritmo se ejecuta repetidas veces hasta que las prioridades p_i salgan todas distintas así que el problema pregunta por el número esperado de intentos antes de que esto suceda). (Sugerencia: Mezcle las partes (a) y (b)).

3. (**Coincidencias planetarias**) El planeta bajo observación esta habitado por k habitantes y dá una vuelta a su estrella cada n días (un día es un giro del planeta alrededor de su propio eje).

a) Sea Para $i, j \in \{1, \dots, k\}$ sea

$$X^{(ij)} = \begin{cases} 1, & \text{si las personas } i \text{ y } j \text{ cumplen años el mismo día} \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}[X_{ij}]$ asumiendo que los cumpleaños se distribuyen de manera uniforme en los distintos días. Justifique su respuesta de manera precisa.

- b) Sea X la variable aleatoria que cuenta cuántas parejas de los k individuos cumplen el mismo día. Calcule $\mathbb{E}[X]$ justificando matemáticamente su respuesta.
- c) Use el punto anterior para demostrar que si hay por lo menos $\sqrt{2n} + 1$ individuos en un cuarto entonces deberíamos esperar que al menos dos tengan el mismo cumpleaños.