Práctico 1 TEOCOMP: Algoritmos codiciosos.

Mauricio Velasco

1. *Scheduling avaricioso* Suponga que tenemos $N = 100$ trabajos que deben compartir un mismo recurso. La longitud y la prioridad del t-ésimo trabajo estan dadas por $\ell_t := (t-1)^2 + 4$ y $w_t = (t-5)^2$.

   a) Escriba una implementación de un algoritmo que calcule el mínimo tiempo total requerido para cuplir esas tareas.

   b) Escriba tablas con los tiempos mínimos requeridos y las listas de las primeras 5 y últimas 5 tareas para $N = 10$,$N = 100$, $N = 1000$.

2. Implemente una clase `Grafo_no_dirigido` que represente un grafo `G` como lista de adyacencia. La clase debe recibir sólo el número de vértices del grafo e implementar las operaciones `G.nueva_arista(i,j)` , `G.nuevo_vertice()` y `G.print()`.

   a) Escriba el código de su implementación.

   b) Cuánta memoria (como función de n) requiere su clase para representar:

      1) Un grafo completo K_n.
      2) Un grafo bipartito completo $K_{n,n}$
      3) Un ciclo de longitud n.
      4) Un árbol con n vértices.

3. (*Árboles*) Recuerde que un **árbol** es un grafo conexo y acíclico. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Todo árbol con n vértices tiene exáctamente $n-1$ aristas.

   b) Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes para todo grafo no dirigido G:

      1) G es un árbol.
      2) G es minimal conexo (es decir G es conexo y quitarle cualquier arista lo vuelve disconexo).

3) G es maximal acíclico (es decir G no contiene ningún ciclo y adicionarle cualquier arista nueva hace aparecer al menos un ciclo en G).

4. (*Cuántos árboles generadores tiene un grafo?*) El teorema de Birkhoff dice que el número de árboles generadores de un grafo no dirigido G es igual al producto $(\lambda_1 \dots \lambda_{n-1})/n$ donde los λ_i denotan los valores propios diferentes de cero de la matriz $L = D - A$ donde D es la matriz diagonal cuyas entradas son los grados de los vértices de G y A es la matriz de adyacencia de G. Realice los siguientes ejericios:

   a) Si $G = K_4$ es el grafo completo de 4 vértices, escriba la matriz L, calcule los valores propios y aplique la formula de Birkhoff. Dibuje todos los árboles generadores de K_4 y verifique que la fórmula de Birkhoff se cumple en este caso.

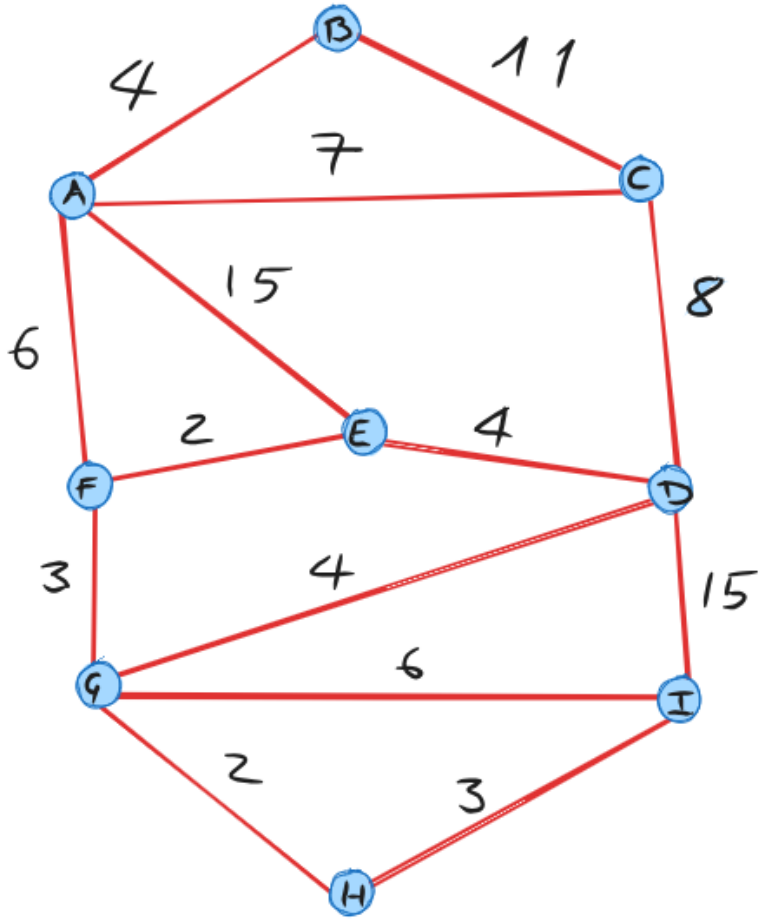
   b) Como es la matriz L para el grafo K_n completo con n vértices?

   c) Use el Teorema de Birkhoff y la matriz que calculó en la parte (*b*) para demostrar que K_n tiene n^{n-2} árboles generadores posibles (para $n = 50$ esto es más que el número estimado de átomos en el universo).

   d) Escriba el código en Python de un algoritmo que calcule el número de árboles generadores de un grafo de la clase `Grafo_no_dirigido` del punto (1) mediante la fórmula de Birkhoff. Verifique la validez de su implementación para grafos completos comparando con la fórmula del numeral anterior. Cuál es el n más grande al que puede llegar antes de que su computador sea incapaz de terminar el cálculo?

5. Sea G un grafo no dirigido con pesos en las aristas. Escriba un algoritmo para construir un árbol generador de **máximo peso** para G que pueda ejecutarse en tiempo $O((n + m)\log(n))$. Justifique la validez de su respuesta.

6. (*El algoritmo de Prim.*) Sea G el grafo con costos en las aristas del siguiente dibujo:



   a) Ejecute a mano el algoritmo de Prim para encontrar el mínimo árbol generador para G con vértice inicial A. Escriba el vector X que representa el orden en el que se incluyen los vértices y el vector T de las aristas que lo constituyen. Dibuje el árbol generador obtenido.

   b) Ejecute a mano el algoritmo de Kruskal para encontrar el mínimo árbol generador para G con vértice inicial A.

7. (*La propiedad de corte*) Sea G un grafo no dirigido con costos en las aristas y suponga que los costos de todas las aristas son distintos. Un **corte** en G es una partición de los vértices en dos conjuntos disjuntos A y B. Una arista **cruza** el corte (A, B) si tiene un vértice en A y el otro en B.

a) Demuestre la siguiente afirmación (llamada la propiedad de corte): Si una arista e es la más barata que cruza un corte (A, B) entonces e pertenece a todo arbol generador de mínimo costo de G.

b) Utilice la propiedad del corte para dar una demostración alternativa de que el algoritmo de Prim produce un árbol generador de mínimo costo.

8. (*Kruskal vs Prim*) El objetivo de este ejercicio es hacer una comparación empírica entre los algoritmos de Prim y Kruskal.

   a) Sea G_n el grafo completo con n-vértices con pesos $1, 2, 3, \ldots, \binom{n}{2}$ en las aristas (las aristas estan ordenadas de la manera que uds quieran, esto lleva a grafos distintos pero no cambia el análisis).

   b) Implemente los algoritmos de Prim y Kruskal.

   c) Escriba tablas que midan el tiempo de ejecución y la memoria utilizada para encontrar el MST para los grafos G_n para diferentes valores de n (cuál es el máximo n en el que su algoritmo funciona?).

   d) Escriba un párrafo que resuma sus conclusiones: Es alguno de los dos algoritmos mejor que el otro en algún aspecto? Argumente su respuesta.

9. (*Hacia un Kruskal eficiente*) Investigue los siguientes puntos:

   a) Describa de manera precisa la estructura de datos `union_find`.

   b) Escriba el código en python de una implementación eficiente del algoritmo de Kruskal usando `union_find`.

   c) Cálcule el tiempo $O(\bullet)$ requerido por su implementación argumentando la validez de su respuesta de manera precisa.