Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un cubo sólido y sea $\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Recuerde que

$$\iiint_E \rho(x,y,z)\, dV = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{\substack{\text{cubitos} \\ R_{ijk} \text{ de lado} \\ \sim \frac{1}{N}}} \rho\left(\vec{c}_{ijk}^{\,*}\right) \mathrm{Vol}(R_{ijk}) \right] \tag{*}$$

PREGUNTA: Cómo calculamos estos límites?

Dependiendo de qué respuesta nos interesa podemos:

(1) Buscar una respuesta APROXIMADA, si disponemos de un computador $(*)$ para N grande

(2) Buscar una respuesta EXACTA, mediante Teoremas de integración.

Teorema (de Fubini)

Suponga que la región E de integración admite la siguiente descripción:

$$\boxed{E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} a \le x \le b \\ l(x) \le y \le u(x) \\ m(x,y) \le z \le M(x,y) \end{array} \right\}}$$

donde $l(x)$, $u(x)$, $m(x,y)$ y $M(x,y)$ son funciones dadas.

Entonces

$$\iiint_E g(x,y,z)\,dV = \underbrace{\int_a^b \int_{l(x)}^{u(x)} \int_{m(x,y)}^{M(x,y)} g(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}$$

Integral iterada, que podemos calcular encontrando primitivas mediante el Teorema Fundamental del cálculo.

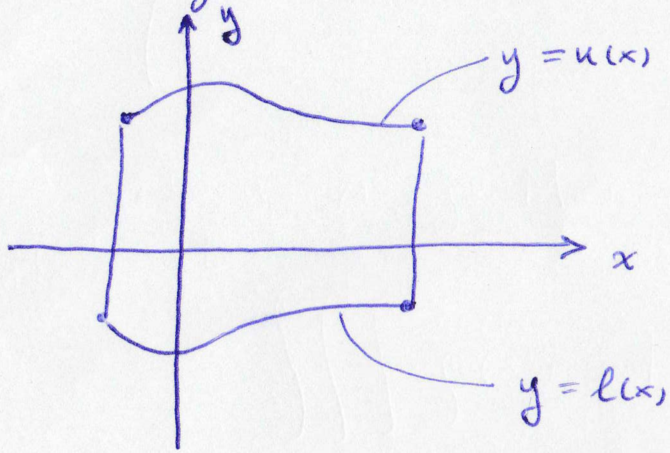
Nota: El mismo resultado es válido si E tiene una descripción simple "en otro orden"

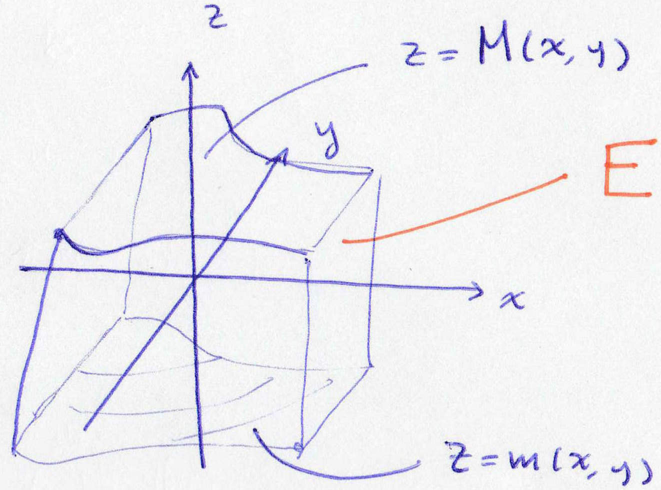
$E = \{ (x,y,z) : a \le z \le b,\ g(z) \le x \le h(z),\ A(x,z) \le y \le B(x,z) \} \rightarrow \iiint_E g\,dV = \int_a^b \int_{g(z)}^{h(z)} \int_{A(x,z)}^{B(x,z)} g(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$

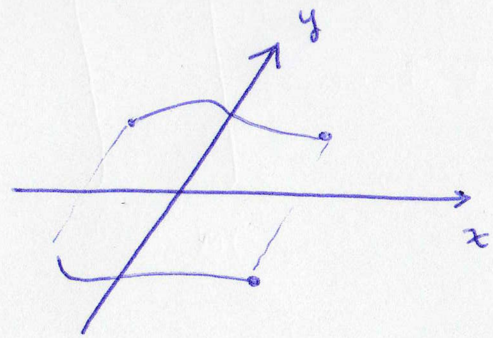
Qué dice el Teorema de Fubni?

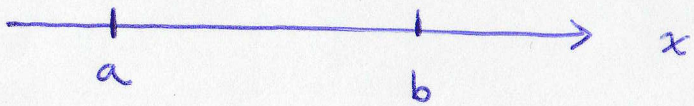
$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} a \le x \le b \\ l(x) \le y \le u(x) \\ m(x,y) \le z \le M(x,y) \end{array} \right\}$$

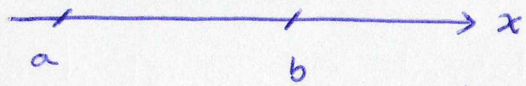
Dibujar la región:











Obs: El orden de integración $dz\,dy\,dx$ significa "Primero elimina la z y luego elimina la y"

Ejercicio: Considere $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^y z e^{-y^2}\, dx\, dy\, dz$

(a) Dibuje la región de integración $E \subseteq \mathbb{R}^3$

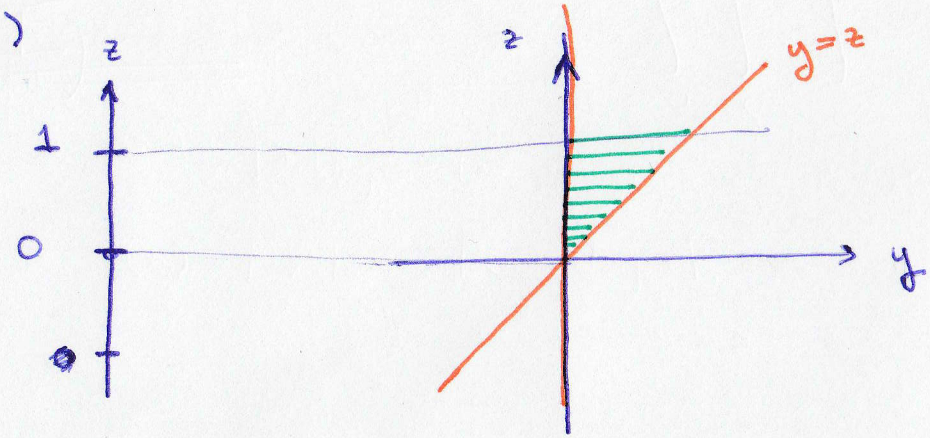
(b) Evalúe la integral.

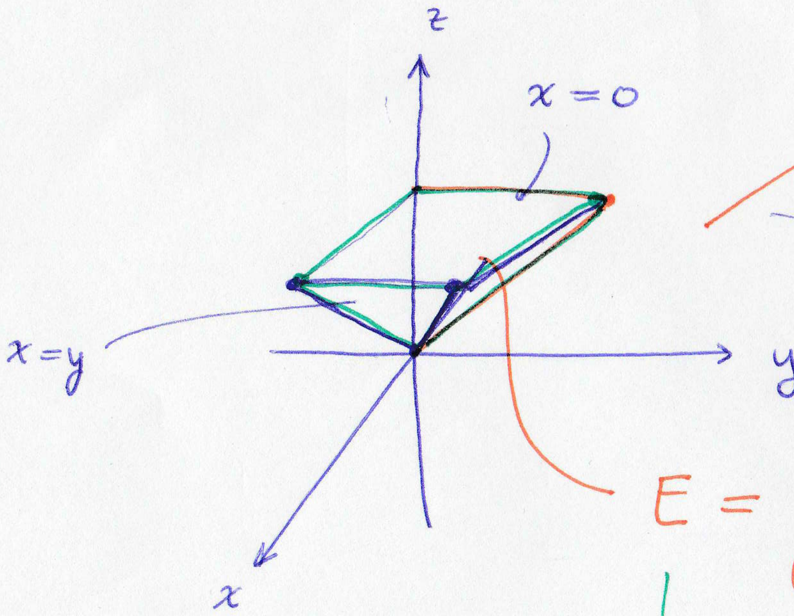
PAUSE EL VIDEO Y

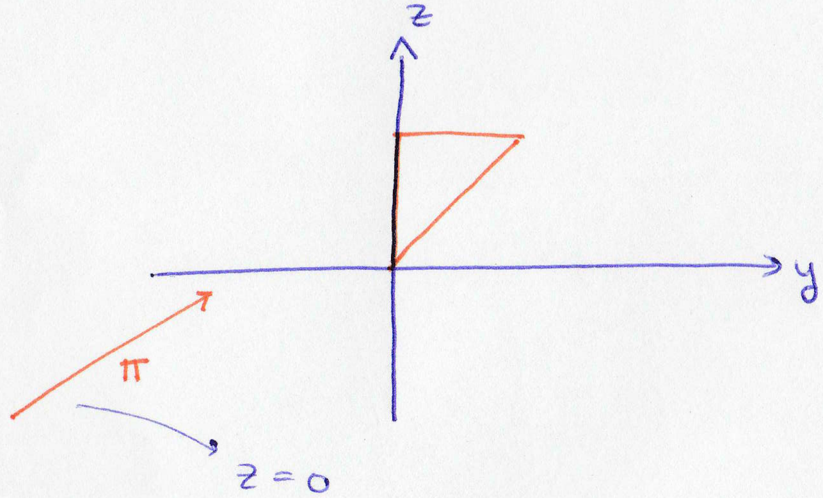
RESUÉLVALO UD MISMO...

Ejercicio: Considere $\int_0^1\int_0^z\int_0^y z e^{-y^2}\,dx\,dy\,dz$.

(a)

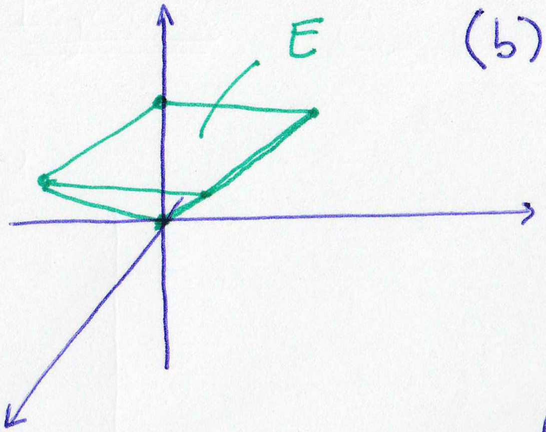






$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \begin{array}{l}0\le z\le 1\\ 0\le y\le z\\ 0\le x\le y\end{array}\right\}$$

Pirámide con base cuadrada.



(b) $$\int_0^1\left(\int_0^z\left(\int_0^y z e^{-y^2}\,dx\right)dy\right)dz = (*)$$

$$\int_0^y z e^{-y^2}\,dx = z e^{-y^2} x \Big|_{x=0}^{x=y} = z e^{-y^2} y$$

$$(*) = \int_0^1\left(\int_0^z z e^{-y^2} y\,dy\right)dz = \int_0^1 z\underbrace{\left(\int_0^z e^{-y^2} y\,dy\right)}\,dz = (*)_2$$

$$\int_0^z e^{-y^2} y\,dy = \frac{e^{-y^2}}{-2}\Big|_{y=0}^{y=z} = -\frac{e^{-z^2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$(*)_2 = \int_0^1 z\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-z^2}}{2}\right)dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (z - z e^{-z^2})\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2} + \frac{e^{-z^2}}{2}\right)\Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-1}}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(0 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{e^{-1}}{4}}$$

Ejercicio: Sea E la región acotada por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$. Haga un dibujo de $E \subseteq \mathbb{R}^3$ y:

(a) Escriba $\mathrm{Vol}(E)$ como una integral iterada en orden $dx\,dy\,dz$

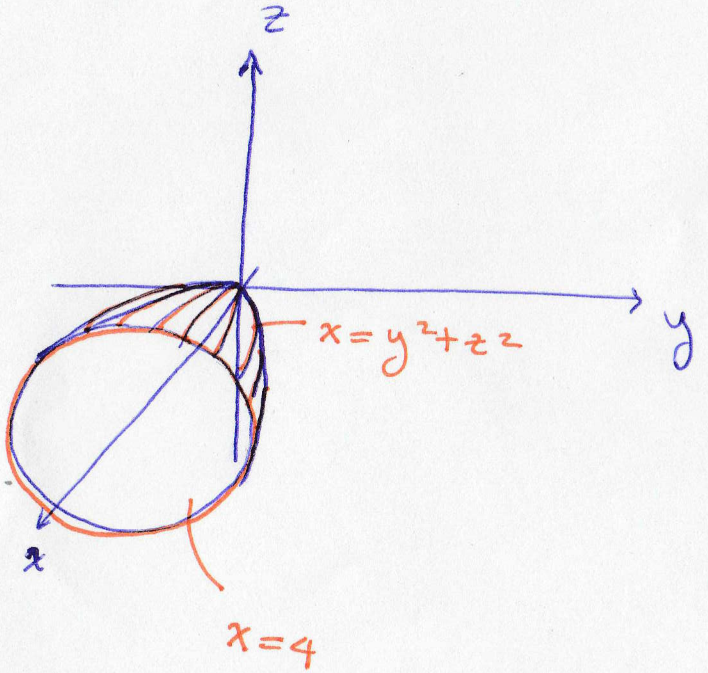
(b) Escriba $\mathrm{Vol}(E)$ como una integral iterada en orden $dz\,dx\,dy$

(c) Calcule $\mathrm{Vol}(E)$.

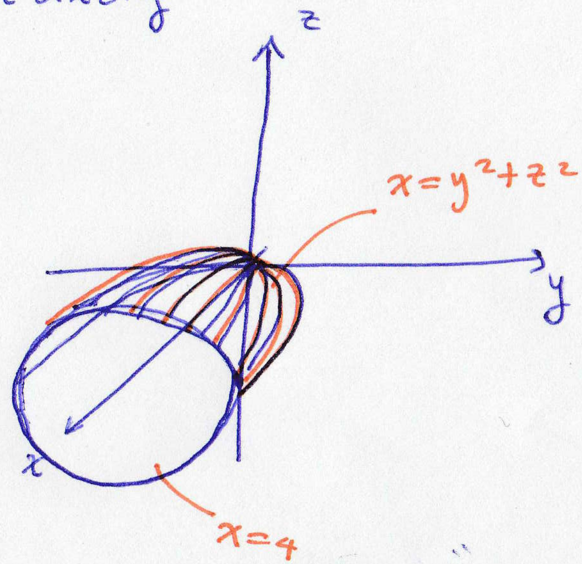
PARE EL VIDEO Y RESUÉLVALO USTED MISMO . . .

Ejercicio: Sea E la región acotada por $x = 4y^2+4z^2$ y el plano $x=4$

(a) $dx\,dy\,dz$

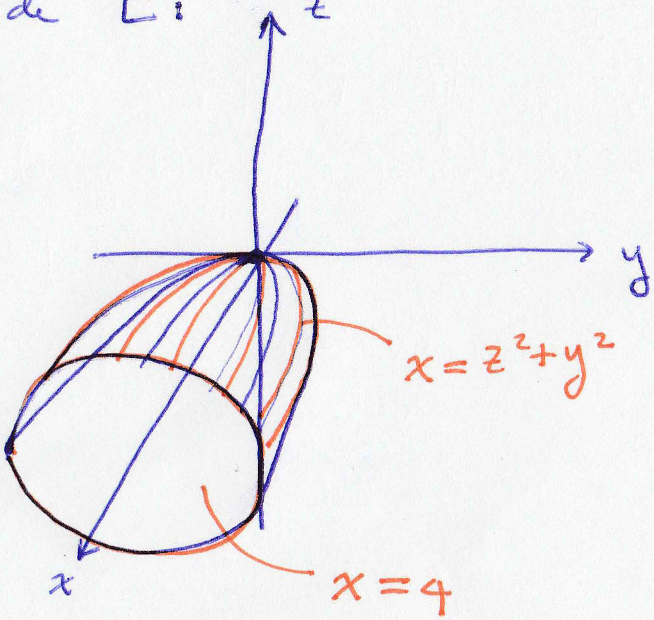


(b) $dz\,dx\,dy$



Ejercicio: Sea E la región acotada por $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$.

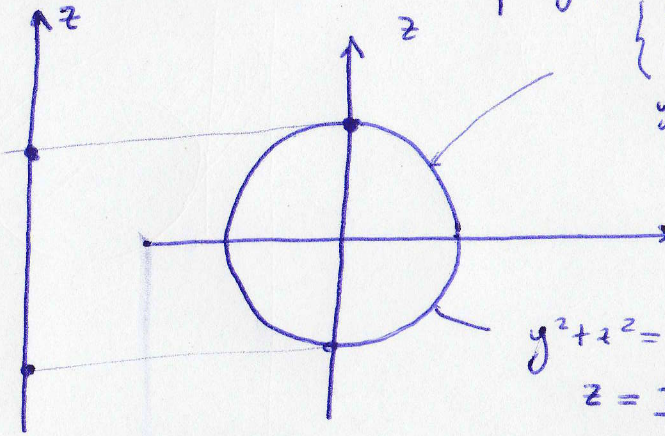
Dibujo de E:



(a) Orden $dx\,dy\,dz$ quiere decir que primero eliminamos x proyectando sobre yz

$\begin{cases} x = z^2 + y^2 \\ x = 4 \end{cases}$

$y^2 + z^2 = 4$



$y^2 + z^2 = 4$

$z = \pm\sqrt{4 - y^2}$

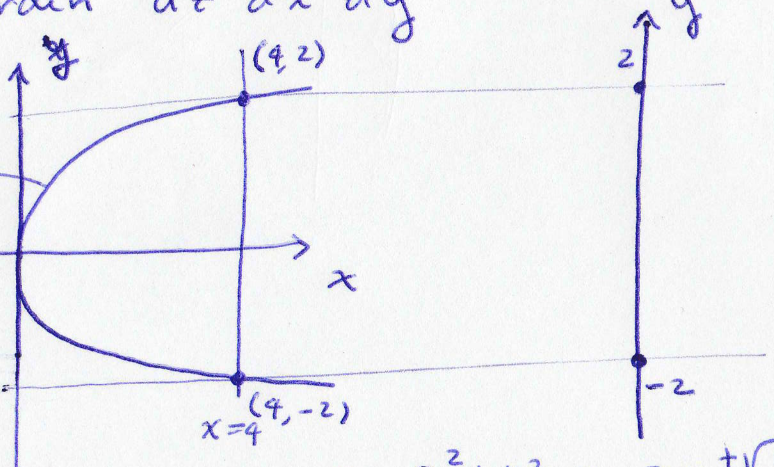
$y = \pm\sqrt{4 - z^2}$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{y^2+z^2}^{4} 1\, dx\, dy\, dz = \iiint_E 1\, dV = \mathrm{Vol}(E).$$

(b) Orden $dz\,dx\,dy$

$\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ z = 0 \end{cases}$

$\boxed{x = y^2}$



$x = z^2 + y^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{x - y^2}$

$$\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_{-\sqrt{x-y^2}}^{\sqrt{x-y^2}} 1\, dz\, dx\, dy = \mathrm{Vol}(E)$$