Análisis teórico del modelo

Se estudia la función objetivo polinómica

$$f(x,y) = 4\,(x+y+xy)^2 + x^4, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sin restricciones sobre las variables; en consecuencia, se trata de un problema de optimización sin restricciones. La función es de grado cuatro y puede describirse como suma de cuadrados, hecho que resultará clave para identificar su mínimo global; la discusión de convexidad global se pospone hasta después de caracterizar los puntos estacionarios.

Para aclarar su estructura se introduce la abreviatura

$$z = x + y + xy.$$

Con esta notación la función se reescribe como

$$f(x,y) = \bigl(2z\bigr)^2 + \bigl(x^2\bigr)^2.$$

Dicha expresión muestra que f es suma de cuadrados reales. De aquí se deduce la no negatividad en todo el dominio,

$$f(x,y) \ge 0 \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

y además se verifica

$$f(0,0) = 4 \cdot 0^2 + 0^4 = 0.$$

El valor 0 es, por tanto, un cota inferior global de f. Para alcanzar dicha cota es necesario anular simultáneamente los dos sumandos cuadrados. La igualdad $(x^2)^2 = 0$ implica

$$x = 0,$$

y sustituido en z se obtiene

$$z\big|_{x=0} = y,$$

de modo que $(2z)^2 = 0$ fuerza

$$y = 0.$$

Se concluye que el conjunto de ceros de f es exactamente $\{(0,0)\}$, por lo que el valor óptimo global es

$$f^\star = 0,$$

alcanzado de forma única en

$$(x^\star, y^\star) = (0,0).$$

Obsérvese que este argumento no depende de compacidad del dominio ni de coercividad: basta con la identidad $f \ge 0$ y con la exhibición de un punto donde $f = 0$ para certificar el mínimo global y su unicidad.

El cálculo diferencial es directo. Usando $\partial z/\partial x = 1 + y$ y $\partial z/\partial y = 1 + x$, el gradiente resulta

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8z(1+y) + 4x^3 \\ 8z(1+x) \end{pmatrix},$$

y la Hessiana viene dada por

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 8(1+y)^2 & 8+16z \\ 8+16z & 8(1+x)^2 \end{pmatrix}.$$

En el origen se cumple

$$\nabla f(0,0) = \mathbf{0}, \qquad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker para un problema sin restricciones se reducen a la estacionariedad. Los puntos KKT satisfacen

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0}.$$

A partir de la segunda componente del gradiente se obtiene

$$8z(1+x) = 0,$$

lo que implica las alternativas

$$z = 0 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

En el caso $z = 0$, la primera componente del gradiente se reduce a

$$4x^3 = 0,$$

de donde se infiere

$$x = 0,$$

y la condición $z = 0$ con $x = 0$ impone

$$y = 0.$$

En el caso $x = -1$ se tiene

$$z = x + y + xy = -1 + y - y = -1,$$

y la primera componente del gradiente adopta la forma

$$8(-1)(1+y) + 4(-1)^3 = 0,$$

equivalente a

$$-8(1+y) - 4 = 0,$$

cuyas soluciones vienen dadas por

$$y = -\tfrac{3}{2}.$$

En consecuencia, los únicos puntos estacionarios son

$$(0,0) \qquad \text{y} \qquad \left(-1, -\tfrac{3}{2}\right).$$

La clasificación local se realiza con el criterio de la Hessiana de segundo orden. En el origen ya se había obtenido una Hessiana semidefinida positiva con autovalores 16 y 0; la presencia de un autovalor nulo indica una dirección plana de orden superior. En efecto, sobre la recta

$$x = -t, \qquad y = t,$$

se cumple

$$z = -t + t - t^2 = -t^2, \qquad f(-t,t) = 4t^4 + t^4 = 5t^4,$$

lo cual exhibe crecimiento de cuarto orden y confirma que el origen es un mínimo local estricto que, por el argumento previo de suma de cuadrados y unicidad del cero, es además global. En el punto $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ la Hessiana toma la forma

$$\nabla^2 f\left(-1, -\tfrac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya determinante vale

$$\det = -64 < 0.$$

La indefinición de la Hessiana implica que la forma cuadrática asociada toma valores positivos en algunas direcciones y negativos en otras. Esto es precisamente lo que se entiende por curvaturas de signo opuesto en distintas direcciones del espacio tangente: el desarrollo de Taylor de segundo orden presenta curvatura ascendente en ciertos vectores y descendente en otros, lo que caracteriza un punto silla. Por tanto,

$$\left(-1, -\tfrac{3}{2}\right)$$

es un punto silla.

El modelo es polinómico y, por tanto, pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, lo que garantiza suavidad en todo el dominio. La convexidad global se descarta aplicando el criterio de la Hessiana para funciones C^2: la convexidad equivaldría a que $\nabla^2 f(x,y)$ fuese semidefinida positiva para todo (x,y). La evaluación precedente en $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$, donde la Hessiana es indefinida, refuta dicha posibilidad y muestra que la función no es convexa en todo $\mathbb{R}^2$.

La existencia de extremos globales se analiza separadamente de la convexidad. La continuidad es inmediata por ser f polinómica. La función no es coerciva, ya que sobre la recta

$$x = -1$$

se verifica

$$f(-1,y) = 4(-1+y-y)^2 + (-1)^4 = 5 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R},$$

de modo que $\|(x,y)\| \to \infty$ no implica $f(x,y) \to \infty$. El teorema de Weierstrass no puede invocarse directamente al no ser el dominio compacto; sin embargo, la identidad $f \geq 0$ junto con $f(0,0) = 0$ basta para concluir que existe un mínimo global alcanzado, que ya se ha identificado como único. No existe máximo global, puesto que

$$f(x,y) \to \infty \quad \text{cuando} \quad |x| \to \infty$$

debido al término x^4. En cuanto a extremos locales, la clasificación de los únicos puntos estacionarios determina que el origen es un mínimo local (además de global) y que $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ es un punto silla; no aparecen máximos locales.