1.- demuestre los siguiente mediante inducción matemática;

a) $1^2+3^2+5^2+.....+(2n-1)^2= (n)(2n-1)(2n+1)/3$

r.- $s(k)= 1^2+3^2+5^2+.....+(2k-1)^2=(k)(2k-1)(2k+1)/3$ para $k>=1$; consideramos $S(k+1)$.
$[1^2+3^2+..+(2k-1)^2]+(2k+1)^2= [(k)(2k-1)(2k+1)/3]+(2k+1)^2= (k+1)(2k+1)(2k+3)/3$ asi que $s(k)= s(k+1)$ por lo que $n \varepsilon z^+$

2.- Demuestra, mediante induccion que: $\sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1}) = 3^n - 1$

a) **n = 1.**

$2 \cdot 3^0 = 2 = 3^1 - 1$

(P(n) ⇒ P(n + 1))

Si suponemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1}) = 3^n - 1$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2(3^{i-1}) + 2 * 3^n = 3^n - 1 + 2 * 3^n = 3 * 3^n - 1 = 3^{n+1} - 1$$

3.- la sucesión de enteros a1,a2,a3,...., definida explícitamente por la fórmula an= 5n también puede definirse de forma recursiva como:

1.- a1=5;

2.- an+1= an+5, para n>1

para la sucesión de enteros b1,b2,b3,..., donde bn= n(n+2), también podemos dar la siguiente definición recursiva:

1) b1=3
2) bn+1=bn+2n+3 para n>1:

de una definición recursiva para c1,c2,c3:

a) cn= 7n
b) cn=7^n
c) cn=3n+7
d) cn=11n-8
e) cn=7
f) $cn=n^2$

r.-

1) **c1=7**
   cn+1=cn+7;
2) **c1= 7**
   cn+1=7cn
3) **c1=10;**
   cn+1=cn+3
4) **c1=7;**
   cn+1=cn
5) **c1=1;**
   cn+1=cn+2n+1
6) **c1=3,c2=1;**
   cn+2=cn

4.- Sean a, b y c tres numeros enteros tales que a | bc, ¿ es cierto que a | b o que a | c? ¿ Y si a es primo?

Si a es cualquier entero, la respuesta es que no. Basta tomar a = 6, b = 10 y c = 15. Se tiene que 6 | 150 pero 6 no es un divisor de 10 ni de 15. Si a es primo, s´ı se verifica ya que, en ese caso el m´aximo com´un divisor mcd(a, b) es 1 o a, que son los unicos divisores positivos que tiene a. Si mcd(b, a) = 1, entonces 1 = bx + ay (para ciertos enteros x, y) y c = bxc + ayc = aqx + ayc (si bc = aq), con lo que a | c. Por otro lado, si mcd(b, a) = a, entonces a | b.

5.- Demuestra que, para todo n natural, 3 | 7^n − 4^n .

n = 1

7^1 − 4^1 = 3

dado que (P(n) ⇒ P(n + 1))

suponemos que: 7^ n − 4 ^n = 3 · q; entonces

7^n+1−4^n+1 = 7n ·7−4^n ·4 = 7^n (4+3)−4^n ·4 = 4(7n−4 n)+3·7^n = 3(4q+7^n)

que es un m´ultiplo de 3.

6.- Escribe los siguientes números racionales en forma de fracci´on: 2’3, 2 013b , 5’34ˆ5 y 5’4356

r.- Sea x = 20ˆ3, entonces 10x = 230ˆ3 y 9x = 23’ˆ3 − 2’ˆ3 = 21, con lo que x = 21/9 = 7/3

Sea x = 2´13ˆ , entonces 100x = 213’13ˆ y 99x = 213’13ˆ − θ 2 ‘13 = 211 ˆ , con lo que x = 211/99

Sea x = 5´34ˆ3, entonces 100x = 534´ˆ3, 1000x = 5343´ˆ3 y 900x = 5343´ˆ3 − 5340ˆ3, con lo que x = 4811/900. Sea x = 504356ˆ , entonces 100x = 543056ˆ ,10000x = 54356056ˆ y 9900x = 54356056ˆ − 543056ˆ con lo que x = 53813/9900

7.- Demuestra que, si p es un n´umero primo, √p es irracional.

Supongamos que √p ∈ Q y, por lo tanto, existen m, n naturales tales que mcd(m, n) =1 y √p = m/n.

Como, al elevar al cuadrado, obtenemos que $m^2 = p \cdot n^2$,

se deduce que p | m^2 y, como p es primo, se tiene que p | m es decir m = p·q.

Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene que $p^2 \cdot q^2 = p \cdot n^2$, con lo que $p \cdot q^2$ = n 2 , es decir p | n^2 y, de nuevo p | n. Hemos llegado a una contradicción porque entonces mcd(m, n) 6!=1 al haber demostrado que p es un divisor común de m y n.

8.- Dados los siguientes números, indica cual es el menor de los conjuntos de n´umeros (entre N, Z, Q y R) que lo contiene: −3, 2, √ 4, −10/ 2 , 8 /9 , 1´42, 0´454, √ 5, √−8, π.

Tenemos que −3 ∈ Z, 2 ∈ N, √ 4 = 2 ∈ N (o √ 4 = −2 ∈ Z), −1´2 = −5 ∈ Z, 8 9 ∈ Q, 1´42 ∈ Q, 0´454 ∈ Q, √ 5 ∈ R, √3 −8 = −2 ∈ Z y π ∈ R.

9.- Si A = (1, 2) ⊆ R y B = (2, 3) ⊆ R, determina A, B, A ∪ B, A ∩ B y A ∪ B.

A = (−∞, 1] ∪ [2, +∞) y B = (−∞, 2] ∪ [3, +∞).

A ∪ B = (1, 3) y luego A ∪ B = (−∞, 1]∪[3, +∞).

A∩B = (−∞, 1] ∪ [3, +∞).

A ∩ B = ∅ = R y, finalmente A ∪ B = A ∩ B = R

13.-

10.- Dados los intervalos: $A = \{x \in R \ ; -10 \leq x < 1\}$, $B = \{x \in R \ ; 1/2 < x \leq 3\}$ y $C = R-(1, 2)$ determina

A) $A \cup B$,
B) $A \cap B$,
C) $A \cup C$,
D) $(A \cap C) \cup B$,
E) $A \cup B \cup C$ y
F) $A \cap B \cap C$.

r.-

1) $\mathbf{A \cup B = [-10, 3]}$
2) $\mathbf{A \cap B = (1/2, 1)}$
3) $\mathbf{A \cup C = C}$ **ya que** $\mathbf{A \subseteq C}$
4) $\mathbf{(A \cap C) \cup B = A \cup B = [-10, 3]}$
5) $\mathbf{A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = C \cup B = R}$
6) $\mathbf{A \cap B \cap C = A \cap C \cap B = A \cap B = (1/2, 1)}$.