Suspensión Trasera Tipo McPherson, Modelada Mediante Coordenadas de Punto de Referencia.

Mauricio Duque Orozco*
Escuela Politécnica Nacional.
Quito Ecuador.
Mecánica Computarizada.

mauricio.duque@epn.edu.ec

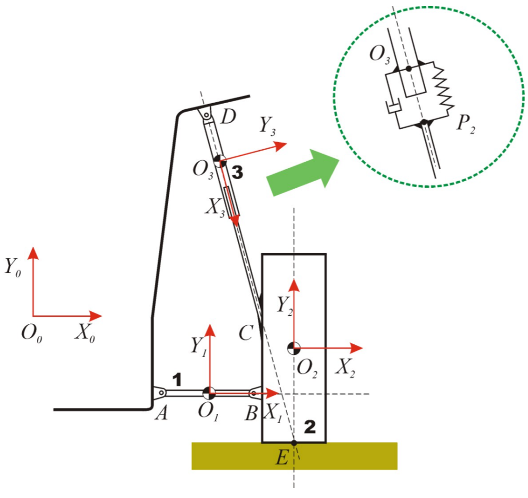
Keywords: *Coordenadas punto de referencia, suspensión, ecuaciones de restricción, ecuaciones de movimiento, Formalismo de Lagrange, Formulación Aumentada, Formulación Compacta.*

Abstract.
Continuamente necesitamos estudiar de manera precisa y clara de ciertos mecanismos, recurriendo al lenguaje universal de la matemática para poder predecir su comportamiento, bajar los precios en prototipos físicos, obtener respuestas rápidas y certeras; por estas razones recurrimos a técnicas especializadas en las que podamos confiar para llevar a cabo nuestros propósitos de análisis; estas necesidades llevan al desarrollo de diferentes técnicas matemáticas para el modelado y mediante recursos computacionales obtener una ecuación que represente nuestro problema en particular, para realizar todos nuestros análisis y pruebas sobre dicho modelo matemático en una simulación computarizada; en esencia en este documento, pretendo desarrollar el modelado matemático que describen el comportamiento de un sistema de suspensión tipo Macpherson, por medio de coordenadas de punto de referencia, planteando las ecuaciones de restricción, y por tanto obtener las ecuaciones de movimiento del sistema a partir del formalismo de Lagrange, formulación aumentada y formulación compacta.

Introducción.

Los procesos de ingeniería actuales necesitan respuestas muy rápidas, toma de decisiones basadas en pruebas fehacientes que permitan estar a la vanguardia del mercado, el modelado y simulación asistida por computador se ha vuelto un factor común en el proceso de desarrollo de la industria; la evolución de la computación y su papel de alto impacto, juegan para crear cada vez algoritmos optimizados para dar solución a las ecuaciones diferenciales que describen la cinemática de dichos mecanismos, de esta manera en este documento haremos uso del algoritmo de Newton-Raphson para la resolución numérica del sistema no lineal de ecuaciones. Que se basa en la linealización del sistema de ecuaciones de restricción; La resolución explícita del sistema no lineal de ecuaciones de restricción no es posible en la gran mayoría de los casos.

Sistema de suspensión
McPherson
[Fig1]



Planteamiento.

Como se puede observar en la figura de número 1, esta designada la coordenada (Xo, Yo) fija en (Oo), así también las coordenadas de punto de referencia (O1, O2 y O3). En el punto “P’” vamos a considerar un sistema “Muelle-Amortiguador” para el análisis cinemático.

A continuación se encuentran los datos geométricos e inerciales.

DATOS GEOMÉTRICOS

$l_1 = 300\ mm$
$l_2 = 600\ mm$
$l_3 = 300\ mm$
$l_4 = 450\ mm$
$d_1 = 50\ mm$
$d_2 = 150 mm$
$d_3 = 150\ mm$
$d_4 = 0\ mm$
$\gamma = 15°$
$A_x = 200\ mm$
$A_y = -200\ mm$
$D_x = 320\ mm$
$D_y = 675\ mm$

DATOS INERCIALES

$m_1 = 2\ kg$
$I_{G1} = 15.000\ kg.mm^2$
$m_2 = 40\ kg$
$I_{G2} = 1.000.000\ kg.mm^2$
$m_3 = 3\ kg$
$I_{G3} = 22.500\ kg.mm^2$
$k = 60\ N/mm$
$s_0 = 200\ mm$
$\mu = 0,4\ N.s/mm$

Objetivos.

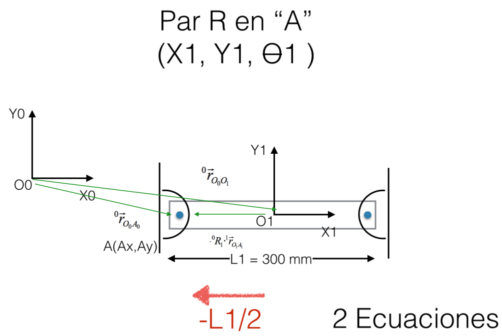
* Modelización del mecanismo mediante coordenadas de punto de referencia.
* Planteamiento de las ecuaciones de restricción.
* Obtención de las ecuaciones del movimiento del sistema a partir del formalismo de Lagrange. Formulación Aumentada y Formulación Compacta.

Consideraciones.

* En el punto "P" hay un sistema de muelle-amortiguador.
* En el punto "C" se considera una union rígida, no articulada.
* Todas las coordenadas están situadas en el centro de inercia de cada objeto.
* Los datos geométricos no concuerdan realmente con los datos constructivos, por tanto se hacen los ajustes necesarios.

Metodologia.

Debemos en primer lugar determinar el numero de grados de libertad del sistema F=1, posteriormente el numero de coordenadas generalizadas N=9, por tanto si M=N-F, el numero de ecuaciones de restricción que tenemos en el sistema son M=8; posteriormente debemos analizar cada uno de los componentes del sistema; para esto vamos a considerar, primero el Par "R" en "A" como lo muestra la figura [Fig2].



$$^{0}\vec{r}_{O_0O_1} + {}^{0}R_1 \cdot {}^{1}\vec{r}_{O_1A_1} = {}^{0}\vec{r}_{O_0A_0}$$

[Fig2]

Para el Par "R" en "A" [Fig2] se obtienen los siguientes vectores y ecuaciones de restricción [Fig3]:

$$rOoO1 := \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$rOoA1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}L1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

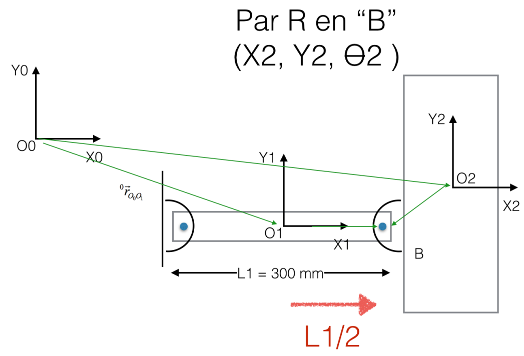
$$oR1 := \begin{bmatrix} \cos(\theta 1) & -\sin(\theta 1) \\ \sin(\theta 1) & \cos(\theta 1) \end{bmatrix}$$

$$rOoAo := \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \end{bmatrix}$$

$$EC1 := \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}\cos(\theta 1)\, L1 - Ax \\ y_1 + \frac{1}{2}\sin(\theta 1)\, L1 - Ay \end{bmatrix}$$

[Fig3]

Para el punto en B, es un para igualmente de revolución, de igual modo se obtiene las ecuaciones de restricción [Fig5], dado el siguiente diagrama [Fig4].



2 Ecuaciones

$$rOoO2 := \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$rO2B2 := \begin{bmatrix} -d1 \\ -d2 \end{bmatrix}$$

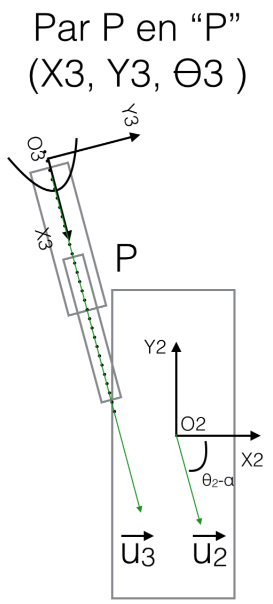
$$oR2 := \begin{bmatrix} \cos(\theta 2) & -\sin(\theta 2) \\ \sin(\theta 2) & \cos(\theta 2) \end{bmatrix}$$

$$rO1B1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, L1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$EC2 := \begin{bmatrix} x_2 - \cos(\theta 2)\, d1 + \sin(\theta 2)\, d2 - x_1 - \frac{1}{2}\cos(\theta 1)\, L1 \\ y_2 - \sin(\theta 2)\, d1 - \cos(\theta 2)\, d2 - y_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta 1)\, L1 \end{bmatrix}$$

[Fig5]

Para el punto en P, es un para prismatico, de igual modo se obtiene las ecuaciones de restricción [Fig7], dado el siguiente diagrama [Fig6].



2 Ecuaciones

$\vec{u}_3 \,//\, \vec{u}_2$

$\theta_3 - (\theta_2 - \alpha) = 0$

[Fig6]

$$oR3 := \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix}$$

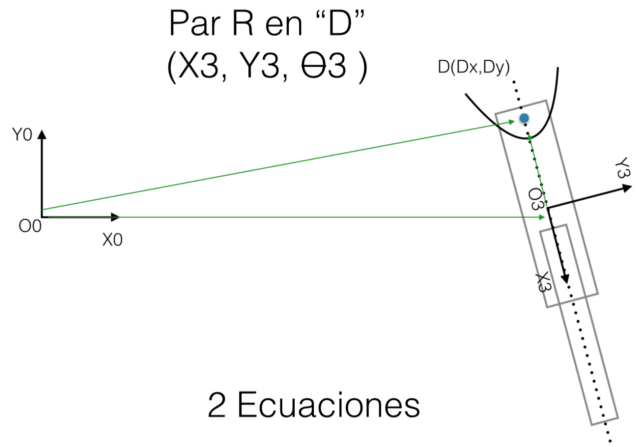
$$EC4 := \theta 3 - \theta_2 + \alpha_1$$

$$u2 := \begin{bmatrix} \cos(\theta_2)\, y_2 \cos(\beta) - \sin(\theta_2)\, y_2 \sin(\beta) \\ \sin(\theta_2)\, y_2 \cos(\beta) + \cos(\theta_2)\, y_2 \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$u3 := \begin{bmatrix} -\sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_3) \end{bmatrix}$$

$$EC3 := -\sin(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\, y_2 \cos(\beta) - \sin(\theta_2)\, y_2 \sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\sin(\theta_2)\, y_2 \cos(\beta) + \cos(\theta_2)\, y_2 \sin(\beta))$$

[Fig7]



[Fig8]

Para el punto en D, es un para igualmente de revolución, de igual modo se obtiene las ecuaciones de restricción [Fig9], dado el siguiente diagrama [Fig8].

$$rO3D3 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\,L3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$rOoO3 := \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$rOoDo := \begin{bmatrix} Dx \\ Dy \end{bmatrix}$$

$$EC5 := \begin{bmatrix} x_3 - \frac{1}{2}\cos(\theta_3)\,L3 - Dx \\ y_3 - \frac{1}{2}\sin(\theta_3)\,L3 - Dy \end{bmatrix}$$

[Fig9]

La matriz de restricciones esta dada por la figura [Fig10]

$$\phi_1 := x_1 - \frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1 - Ax$$

$$\phi_2 := y_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1 - Ay$$

$$\phi_3 := x_2 - \cos(\theta_2)\,d1 + \sin(\theta_2)\,d2 - x_1 - \frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1$$

$$\phi_4 := y_2 - \sin(\theta_2)\,d1 - \cos(\theta_2)\,d2 - y_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1$$

$$\phi_5 := -\sin(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) + \cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta))$$

$$\phi_6 := \theta_3 - \theta_2 + \alpha_1$$

$$\phi_7 := x_3 - \frac{1}{2}\cos(\theta_3)\,L3 - Dx$$

$$\phi_8 := y_3 - \frac{1}{2}\sin(\theta_3)\,L3 - Dy$$

[Fig10

Las Restricciones se asignaron a un vector de restricciones

$$> Restricciones := [seq(\mathrm{phi}[i],\ i = 1..8)]$$

$$Restricciones := \left[x_1 - \frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1 - Ax,\ y_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1 - Ay,\ x_2 - \cos(\theta_2)\,d1 + \sin(\theta_2)\,d2 - x_1 - \frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1,\ y_2 - \sin(\theta_2)\,d1 - \cos(\theta_2)\,d2 - y_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1,\ x_3\sin(\theta_2 + \alpha_1) - y_3\cos(\theta_2 + \alpha_1),\ \theta_3 - \theta_2 + \alpha_1,\ x_3 - \frac{1}{2}\cos(\theta_3)\,L3 - Dx,\ y_3 - \frac{1}{2}\sin(\theta_3)\,L3 - Dy\right]$$

Escojo las variables dependientes como un vector de secundarias, [Fig11], al igual que la variable dependiente [Fig12].

$$Independientes := [\theta_1]$$

[Fig11]

Por consiguiente se obtiene el Jacobiano [Fig12], con respecto a las variables dependientes y las ecuaciones de restricción.

$$\Big[[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$
$$[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$
$$[-1, 0, 1, 0, \sin(\theta_2)\,d1 + \cos(\theta_2)\,d2, 0, 0, 0],$$
$$[0, -1, 0, 1, -\cos(\theta_2)\,d1 + \sin(\theta_2)\,d2, 0, 0, 0],$$
$$\Big[0, 0, 0, -\sin(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\sin(\theta_2)\cos(\beta) + \cos(\theta_2)\sin(\beta)), -\sin(\overline{\theta_3})\,(-\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)), 0, 0, -\cos(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3} + \frac{2\,\mathrm{abs}(1, \theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)) - \sin(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3} + \frac{2\,\mathrm{abs}(1, \theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) + \cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta))\Big],$$
$$[0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1],$$
$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}\sin(\theta_3)\,L3\right],$$
$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -\frac{1}{2}\cos(\theta_3)\,L3\right]\Big]$$

[Fig12]

Se calcula también el jacobiano con respecto a la variable dependiente y el vector de restricciones [Fig13].

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1 \\ -\frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1 \\ \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1 \\ -\frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Fig13]

Asigno los valores conocidos por la geometría del sistema, aclaro que se hacen algunos cambios en los datos para asemejarlos a la realidad del caso, como medida de ajustes para tratar de prevenir problemas futuros de singularidad, como se puede observar en el vector de "Datos" [Fig14], que serán usados para reemplazar y evaluar en el vector de "Restricciones" y mediante el algoritmos de 'Newton_Raphson (NR)" encontrar una convergencia.

$$Datos := \left\{L1 = 0.3, Ax = 0.2, Ay = -0.2, d1 = 0.05, d2 = 0.15, L3 = 0.3, L4 = 0.45, Dx = 0.350, Dy = 0.661, \text{alpha}[1] = \frac{15 \cdot Pi}{180}, \beta = \frac{15 \cdot Pi}{180}\right\}$$

$$Datos := \left\{Ax = 0.2, Ay = -0.2, Dx = 0.350, Dy = 0.661, L1 = 0.3, L3 = 0.3, L4 = 0.45, \beta = \frac{1}{12}\pi, d1 = 0.05, d2 = 0.15, \alpha_1 = \frac{1}{12}\pi\right\}$$

[Fig14]

Los datos obtenidos por la evaluación antes mencionada cuyo resultado es el siguiente en la figura [Fig15].

$$Restricciones := \Big[x_1 - \frac{1}{2}\cos(\theta_1)\, L1 - Ax, y_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\, L1 - Ay, x_2 - \cos(\theta_2)\, d1 + \sin(\theta_2)\, d2 - x_1 - \frac{1}{2}\cos(\theta_1)\, L1, y_2 - \sin(\theta_2)\, d1 - \cos(\theta_2)\, d2 - y_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1)\, L1, -\sin(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\, y_2 \cos(\beta) - \sin(\theta_2)\, y_2 \sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\sin(\theta_2)\, y_2 \cos(\beta) + \cos(\theta_2)\, y_2 \sin(\beta)), \theta_3 - \theta_2 + \alpha_1, x_3 - \frac{1}{2}\cos(\theta_3)\, L3 - Dx, y_3 - \frac{1}{2}\sin(\theta_3)\, L3 - Dy\Big]$$

[Fig15]

Asumimos una "Estimación Inicial" para darle como punto de partida al algoritmo de convergencia de NR, obteniendo como resultado que se muestra en la siguiente figura [Fig16].

4.21132743501060691

0.201581097809097748

0.0120558220306941841

0.0000325717230191597241

$1.61559745001830057\ 10^{-11}$

Converge

[Fig16]

Podemos observar que la solución converge de una manera muy aceptable, obtenemos la siguiente solución [Fig17].

$$\{\theta_2 = 0.721584572909045, \theta_3 = 0.459785185109045, x_1 = 0.275000000000000, x_2 = 0.288451726964912, x_3 = 0.484422176527245, y_1 = -0.0700961894000000, y_2 = 0.205450369329542, y_3 = 0.727563341695681\}$$

[Fig17]

Aplicando las ecuaciones de Lagrange, la energía cinética y potencial están dadas por "T" y "U" y la función Lagrangiana por "L".

$$T := \frac{m[1]}{2} \cdot (xp[1]^2 + yp[1]^2) + IG[1] \cdot \text{omega}[1] + \frac{m[2]}{2} \cdot (xp[2]^2 + yp[2]^2) + IG[2] \cdot \text{omega}[2] + \frac{m[3]}{2} \cdot (xp[3]^2 + yp[3]^2) + IG[3] \cdot \text{omega}[3]$$

$$T := \frac{1}{2} m_1 (xp_1^2 + yp_1^2) + IG_1\, \omega_1 + \frac{1}{2} m_2 (xp_2^2 + yp_2^2) + IG_2\, \omega_2 + \frac{1}{2} m_3 (xp_3^2 + yp_3^2) + IG_3\, \omega_3$$

$$V := m[1] \cdot g \cdot y[1] + m[2] \cdot g \cdot y[2] + m[3] \cdot g \cdot y[3]$$

$$V := m_1\, g\, y_1 + m_2\, g\, y_2 + m_3\, g\, y_3$$

$$L := T - U$$

$$L := \frac{1}{2} m_1 (xp_1^2 + yp_1^2) + IG_1\, \omega_1 + \frac{1}{2} m_2 (xp_2^2 + yp_2^2) + IG_2\, \omega_2 + \frac{1}{2} m_3 (xp_3^2 + yp_3^2) + IG_3\, \omega_3 - U$$

Vector de coordenadas generalizadas [Fig18], pero transpuesto.

$$\vec{q} = [x_1, y_1, x_2, y_2, \theta_2, x_3, y_3, \theta_3]$$

[Fig18]

Primera derivada

de las restricciones con respecto al tiempo [Fig19], todas igualadas a cero.

$$\dot{\Phi}_1 = \dot{x}_1 + \frac{L1}{2} sin(\theta_1)\dot{\theta}_1$$
$$\dot{\Phi}_2 = \dot{y}_1 - \frac{L1}{2} cos(\theta_1)\dot{\theta}_1$$
$$\dot{\Phi}_3 = \dot{x}_2 + d1 sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 + d2 cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 - \dot{x}_1 + \frac{L1}{2} sin(\theta_1)\dot{\theta}_1$$
$$\dot{\Phi}_4 = \dot{y}_2 - d1 cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 + d2 sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 - \frac{L1}{2} Sin(\theta_1)\dot{\theta}_1$$

$\dot{\Phi}_5 =$ Primera derivada de la EC5 con respecto al tiempo

$$\dot{\Phi}_6 = \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2$$
$$\dot{\theta}_7 = \dot{x}_3 + \frac{L1}{2} sin(\theta_3)\dot{\theta}_3$$
$$\dot{\theta}_8 = \dot{y}_3 - \frac{L1}{2} cos(\theta_3)\dot{\theta}_3$$

[Fig19]

$$\ddot{\Phi}_1 = \ddot{x}_1 + \frac{L1}{2} sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + \frac{L1}{2} cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^{\,2}$$
$$\ddot{\Phi}_2 = \ddot{y}_1 - \frac{L1}{2} cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + \frac{L1}{2} sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^{\,2}$$
$$\ddot{\Phi}_3 = \ddot{x}_2 + d1 sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + d1 cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} + d2 cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 - d2 sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} - \ddot{x}_1 + \frac{L1}{2} sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + \frac{L1}{2} cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^{\,2}$$
$$\ddot{\Phi}_4 = \ddot{y}_2 + d1 cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + d1 sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} + d2 sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + d2 cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^{\,2} - \ddot{y}_1 - \frac{L1}{2} cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + \frac{L1}{2} sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^{\,2}$$

$\ddot{\Phi}_5 =$ Segunda derivada de la EC5 con respecto al

$$\ddot{\Phi}_6 = \ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_2$$
$$\ddot{\Phi}_7 = \ddot{x}_3 + \frac{L3}{2} sin(\theta_3)\ddot{\theta}_3 + \frac{L3}{2} cos(\theta_3)\dot{\theta}_3$$
$$\ddot{\Phi}_8 = \ddot{y}_3 - \frac{L3}{2} cos(\theta_3)\ddot{\theta}_3 + \frac{L3}{2} sin(\theta_3)\dot{\theta}_3$$

Para la monetización de las ecuaciones del movimiento, obtenemos el Jacobiano con respecto a todas las coordenadas generalizadas de restricciones [Fig20].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^{ext}; \quad i = 1,2,\ldots,N$$

> JacobTrans

$$\Big[\Big[1, 0, \tfrac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 1, -\tfrac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[-1, 0, \tfrac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1, 1, 0, \sin(\theta_2)\,d1 + \cos(\theta_2)\,d2, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, -1, -\tfrac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1, 0, 1, -\cos(\theta_2)\,d1 + \sin(\theta_2)\,d2, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, -\sin(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\sin(\theta_2)\cos(\beta) + \cos(\theta_2)\sin(\beta)), -\sin(\overline{\theta_3})\,(-\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)), 0, 0, -\cos(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3} + \frac{2\,\mathrm{abs}(1, \theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)) - \sin(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3} + \frac{2\,\mathrm{abs}(1, \theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) + \cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta))\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \tfrac{1}{2}\sin(\theta_3)\,L3\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -\tfrac{1}{2}\cos(\theta_3)\,L3\Big]\Big]$$

[Fig20]

Por tanto usando la ecuación del movimiento para la formulación aumentada, será:

> JacobTrans := Transpose(JacobTrans)

$$JacobTrans := \Big[\Big[1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[\tfrac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1, -\tfrac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1, \tfrac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1, -\tfrac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 1, -\sin(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\sin(\theta_2)\cos(\beta) + \cos(\theta_2)\sin(\beta)), 0, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, \sin(\theta_2)\,d1 + \cos(\theta_2)\,d2, -\cos(\theta_2)\,d1 + \sin(\theta_2)\,d2, -\sin(\overline{\theta_3})\,(-\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)) + \cos(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)), -1, 0, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\Big],$$
$$\Big[0, 0, 0, 0, -\cos(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3} + \frac{2\,\mathrm{abs}(1, \theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) - \sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)) - \sin(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3} + \frac{2\,\mathrm{abs}(1, \theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta) + \cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta)), 1, \tfrac{1}{2}\sin(\theta_3)\,L3, -\tfrac{1}{2}\cos(\theta_3)\,L3\Big]\Big]$$

Conjunto de ecuaciones de masa e inercia.

$$Q = [\ 0\ \ 0\ \ T_1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = IG_1\dot{\theta}_1 \xrightarrow{d/dt} IG_1\cdot\ddot{\theta}_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \xrightarrow{d/dt} m_1\ddot{x}_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = m_2\dot{y}_1 \xrightarrow{d/dt} m_2\ddot{x}_2 = 0$$

$$\begin{array}{l} m_1\cdot\ddot{x}_1 \\ m_1\cdot\ddot{y}_1 + m_1\cdot g \\ IG_1\cdot\ddot{\theta}_1 \\ m_2\cdot\ddot{x}_2 \\ m_2\cdot\ddot{y}_2 + m_2\cdot g \\ IG_2\cdot\ddot{\theta}_2 \\ m_3\cdot\ddot{x}_3 \\ m_3\cdot\ddot{y}_3 + m_3\cdot g \\ IG_3\cdot\ddot{\theta}_3 \end{array}$$

El vector "Q" representan las fuerzas externas generalizadas.

Fuerzas disipativas

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\mu\left(\sqrt{(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))^2 + (xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))^2} - \sqrt{xp_3^2 + yp_3^2}\right)\left(2\,(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))\cos(\gamma) + 2\,(xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))\sin(\gamma)\right)}{\sqrt{(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))^2 + (xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))^2}} \\ \dfrac{\mu\left(\sqrt{(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))^2 + (xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))^2} - \sqrt{xp_3^2 + yp_3^2}\right)\left(2\,(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))\cos(\beta) - 2\,(xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))\cos(\gamma)\right)}{\sqrt{(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))^2 + (xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))^2}} \\ 0 \\ -\dfrac{\mu\left(\sqrt{(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))^2 + (xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))^2} - \sqrt{xp_3^2 + yp_3^2}\right)xp_3}{\sqrt{xp_3^2 + yp_3^2}} \\ -\dfrac{\mu\left(\sqrt{(xp_2\cos(\gamma) + yp_2\cos(\beta))^2 + (xp_2\sin(\gamma) - yp_2\cos(\gamma))^2} - \sqrt{xp_3^2 + yp_3^2}\right)yp_3}{\sqrt{xp_3^2 + yp_3^2}} \\ 0 \end{array}\right]$$

Formulación Compacta

Matriz de masas

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & IG_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & IG_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & IG_3 \end{bmatrix}$$

Jacobiano Transpuesto

EC5 transpuesta y derivada 2 veces -> t

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}L1\sin\theta_1 & -\frac{1}{2}L1\cos\theta_1 & \frac{1}{2}L1\sin\theta_1 & -\frac{1}{2}L1\cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_2+\alpha_1) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta_2+\alpha_1) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}L3\sin\theta_3 & -\frac{1}{2}L3\cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

EC5 derivada 2 veces -> t

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}L1\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}L1\cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2}L1\sin\theta_1 & 1 & 0 & \sin\theta_2 d1+\cos\theta_2 d2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}L1\cos\theta_1 & 0 & 1 & -\cos\theta_2 d1+\sin\theta_2 d2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}L3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}L3\cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

Jacobiano (

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Por tanto la formulación aumentada esta dada por:

Jacobiano Transpuesto mas la expresión a continuación.

$$:\vec{Q}-(\Phi_q)^T\cdot\vec{\lambda}$$

`> Q − JacobTrans.multLagrange`

$$\Big[[-\lambda_1+\lambda_3],$$
$$[-\lambda_2+\lambda_4],$$
$$\left[T1-\frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1\,\lambda_1+\frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1\,\lambda_2-\frac{1}{2}\sin(\theta_1)\,L1\,\lambda_3+\frac{1}{2}\cos(\theta_1)\,L1\,\lambda_4\right],$$
$$[-\lambda_3],$$
$$\left[-\lambda_4-\left(-\sin(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\cos(\beta)-\sin(\theta_2)\sin(\beta))+\cos(\overline{\theta_3})\,(\sin(\theta_2)\cos(\beta)+\cos(\theta_2)\sin(\beta))\right)\lambda_5\right],$$
$$\left[-(\sin(\theta_2)\,d1+\cos(\theta_2)\,d2)\,\lambda_3-(-\cos(\theta_2)\,d1+\sin(\theta_2)\,d2)\,\lambda_4-\left(-\sin(\overline{\theta_3})\,(-\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta)-\cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta))+\cos(\overline{\theta_3})\,(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta)-\sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta))\right)\lambda_5+\lambda_6\right],$$
$$[-\lambda_7],$$
$$[-\lambda_8],$$
$$\left[-\left(-\cos(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3}+\frac{2\,\mathrm{abs}(1,\theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\cos(\theta_2)\,y_2\cos(\beta)-\sin(\theta_2)\,y_2\sin(\beta))-\sin(\overline{\theta_3})\left(-\frac{\overline{\theta_3}}{\theta_3}+\frac{2\,\mathrm{abs}(1,\theta_3)}{\mathrm{signum}(\theta_3)}\right)(\sin(\theta_2)\,y_2\cos(\beta)+\cos(\theta_2)\,y_2\sin(\beta))\right)\lambda_5-\lambda_6-\frac{1}{2}\sin(\theta_3)\,L3\,\lambda_7+\frac{1}{2}\cos(\theta_3)\,L3\,\lambda_8\right]\Big]$$

Problema de velocidades.
Para el par en A de revolución derivamos con respecto al tiempo.

rOoAo = rOoO1+OR1*rO1A1 -> d/(dt) -> rOoO1'+w1*oR1*rO1A1+oR1*r01A1' - rOoAo' = 0

$$EC1 := \left[xp_1+\frac{1}{2}\,\omega_1\sin(\theta_1)\,L1\right]$$

$$EC2 := \left[yp_1-\frac{1}{2}\,\omega_1\cos(\theta_1)\,L1\right]$$

Con respecto al punto ‘B’ también tenemos un par de revolución y derivando con respecto al tiempo.

"rOoO1+ oR1.rO1B1 = rOoO2+oR2*rO2B2 -> d/(dt)"

rOoO1p + (w1 oR1) . rO1B1 + oR1 . rO1B1p - rOoO2 p

- w2 o R2 rO2B2 - o R2 rO2B2p = 0

$$(oR2.uU2)^T.(rOoP - ROoO3) \rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow .$$

$$(w2.oR2.uU2)^T.(rOoP-rOoO3)+(oR2.uU2)^T.(rOoPp - rOoO3p)$$

$$EC3 := \left[xp_1-\frac{1}{2}\,\omega_1\sin(\theta_1)\,L1-xp_2-\omega_2\sin(\theta_2)\,d1-\omega_2\cos(\theta_2)\,d2\right]$$

$$EC4 := \left[yp_1+\frac{1}{2}\,\omega_1\cos(\theta_1)\,L1-yp_2+\omega_2\cos(\theta_2)\,d1-\omega_2\sin(\theta_2)\,d2\right]$$

Para el par “P”
Tenemos lo siguiente:

theta2 -theta3 = alpha -> d/(dt) -> thetap2 - theta3p = 0

Donde alpha es 90 grados.

$$(oR2.uU2)^T.(rOoP - ROoO3) \rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow .$$

$$(w2.oR2.uU2)^T.(rOoP-rOoO3)+(oR2.uU2)^T.(rOoPp - rOoO3p)$$

Y finalmente en el par de revolución en “D”:

$$rOoDo = rOoO3+oR3\cdot rO3D3 \;\frac{d}{dt}\rightarrow\; rOoO3p+w3\cdot oR3\cdot rO3D3+oR1\cdot rO3D3p\; - rOoAop=0$$

$$EC7 := \left[xp_3+\frac{1}{2}\,\omega_3\sin(\theta_3)\,L3\right]$$

$$EC8 := \left[yp_3-\frac{1}{2}\,\omega_3\cos(\theta_3)\,L3\right]$$

Por consiguiente las fuerzas externas están dadas por lo siguiente:

Fuerzas Externas

$$s := \sqrt{\left(x_2 \sin(\gamma) - x_3\right)^2 + \left(y_2 \cos(\gamma) - y_3\right)^2}$$

$$Fe = \frac{1}{2} K \left(\sqrt{\left(x_2 \sin(\gamma) - x_3\right)^2 + \left(y_2 \cos(\gamma) - y_3\right)^2} - So\right)$$

$$Independientes := \left[\theta_1, \omega_1\right]$$

$$Posiciones := \left[x_1, y_1, x_2, y_2, \theta_2, x_3, y_3, \theta_3\right]$$

$$Velocidades := \left[xp_1, yp_1, xp_2, yp_2, \omega_2, xp_3, yp_3, \omega_3\right]$$

$$\begin{bmatrix} m_1\, xp_1 \\ m_1\, yp_1 \\ m_2\, xp_2 \\ m_2\, yp_2 \\ IG_2 \\ m_3\, xp_3 \\ m_3\, yp_3 \\ IG_3 \end{bmatrix}$$

Conclusiones.

Se puede concluir que para hacer el modelado de un mecanismo, es casi fundamental formular el problema desde el punto de vista de coordenadas generalizadas, y aplicar las metodologías vistas, principalmente por su simplicidad y eficiencia.

La aplicación de métodos y algoritmos que resuelvan ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, como lo es el de Runge-Kutta, e incluso el de Newton-Raphson son básicos para la solución del problema planteado.

El sistema Mcpherson, son bastante usados en la actualidad en la industria automovilística, por tanto su estudio a profundidad es de vital importancia para futuras mejoras y aplicaciones relacionadas con este modelo.

Una buena selección de las coordenadas generalizadas, pueden simplificar o complicar la solución del problema.

Básicamente la metodología de vista, de coordenadas generalizadas, simplifican muchos análisis que anteriormente se hacían de manera separada; aquí, con una sola formulación de ecuaciones de restricción, podemos obtener mucha información, desde velocidades, aceleraciones, movimientos; todas estas pueden verse de manera general o por componentes.

El modelo no precisaba en que punto se estaba aplicando la fuerza externa y en donde se producía el momento de torque, por tanto se asumió que era en “O3”, producido por el movimiento de la rueda.

Referencias.

Modelado computacional para el análisis dinámico, mediante método matricial, de sistemas multicuerpo de seis elementos, Juan Carlos Fortes Garrido,Huelva, 2009 Universidad de Huelva Departamento de Ingeniería Minera, Mecánica y Energética http://rabida.uhu.es/dspace/

bitstream/handle/10272/197/b15208369.pdf?sequence=1

Alex S. Poznyak(2005), Modelado Matemático de los Sistemas Mecánicos, Electricos y Electromecánicos,, México, Avandaro, http://www.ctrl.cinvestav.mx/~coordinacion/documents/modelado_matematico.pdf