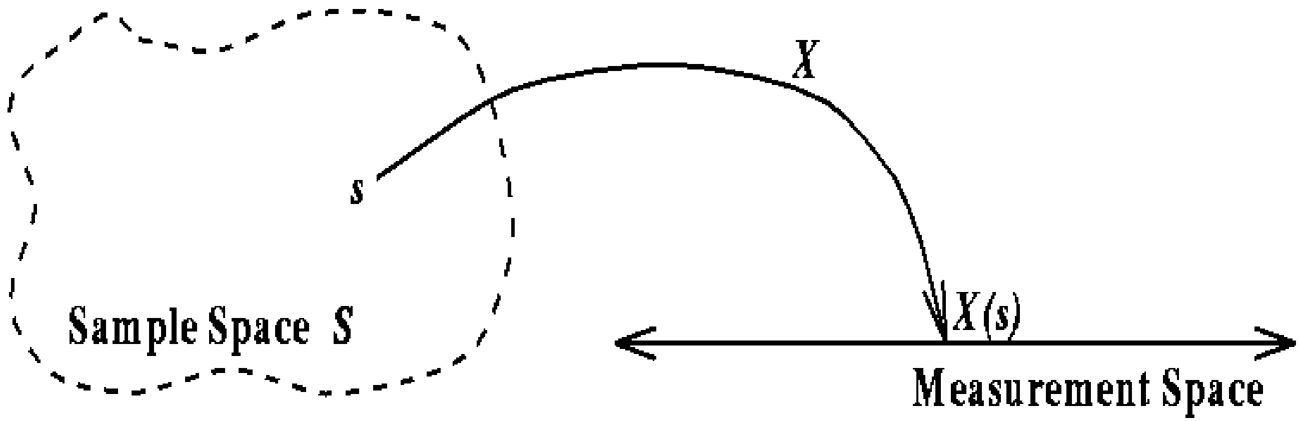
Probabilidad

Clase 11 Curso Propedéutico

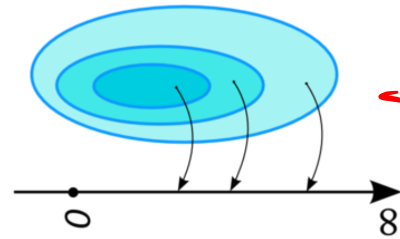
2017/06/28

ITAM



II. Variables Aleatorias

Mediciones

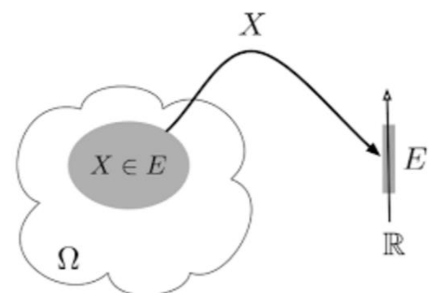


Asignación de valores a observaciones

$\Omega = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$

$$\text{Medición} \begin{cases} \text{cara} \longrightarrow 1 \\ \text{cruz} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Variables Aleatorias

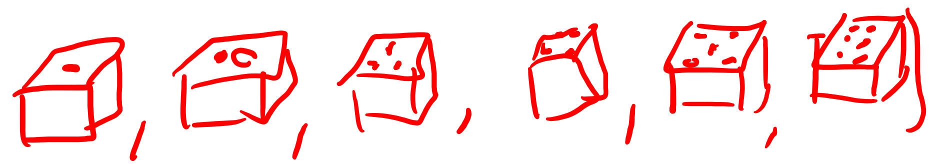


"Es una función del espacio de observaciones"

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

✓ Asigna un valor numérico a cada "observación"

Ejemplo

Lanzamiento dado $\Omega = \{$  $\}$

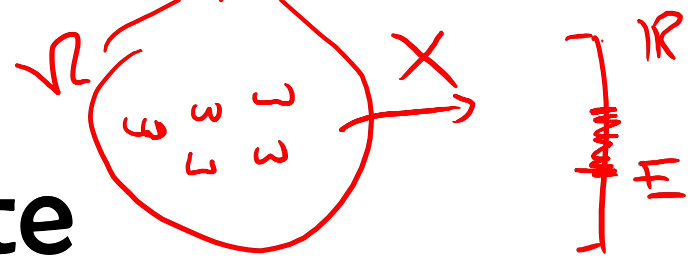
X indicadora de par $X: \; 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$

X el número del dado $X: \; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

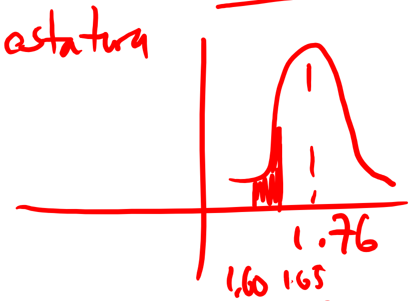
X cero siempre $X: \; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Distribución y Soporte

ley



Def La distribución o ley de probabilidad es la medida de probabilidad que induce una v.a. X



$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in E\})$$

notación — definición

Def Soporte: todos los posibles que puede tomar una variable aleatoria X

$$\mathrm{Supp}(X) = \{x : \exists \omega \; X(\omega) = x\} = X(\Omega)$$

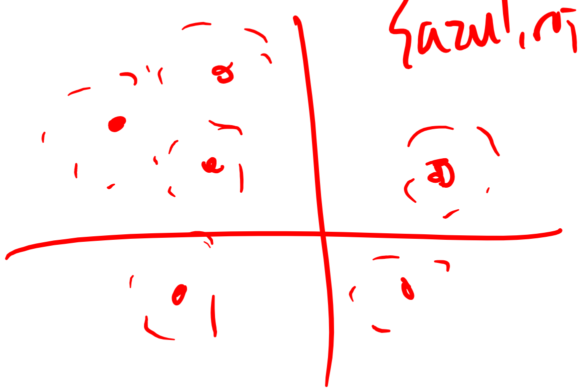
Variables Discretas vs Variables Continuas

- Def: v.a. discretas tienen soporte discreto
- Def v.a continuas " " "continuo"

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

Discreto $\{0,1,2,3\}$

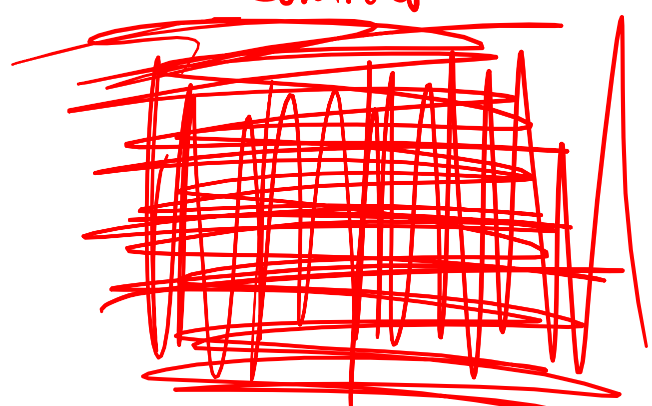
$\{azul, rojo\}$



$\{-1,-2,1,\dots\}$

$\mathbb{Z}$

Continuo



$[0,\infty)$

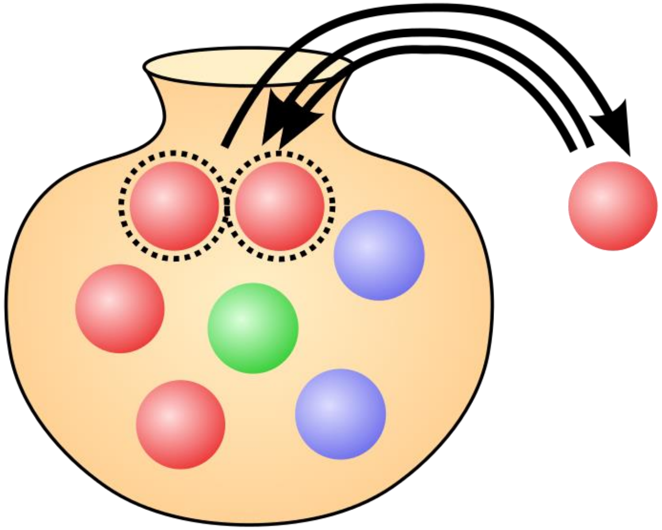
$\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

Variables Aleatorias Independientes

Notación

Def: $\mathbb{P}(X \in E, Y \in F) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in E\} \cap \{\omega : Y(\omega) \in F\})$

$= \mathbb{P}(X \in E)\,\mathbb{P}(Y \in F)$



III. Variables Discretas

Conjutos Discreto y Funciones Masa

Función masa de probabilidad de una v.a X es

$$f_X(x) := \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)=x\})$$

La ley de X se escribe en función de su función masa:

$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X\in E) = \sum_{x\in E} f_X(x) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}(X=x)$$

Principales Variables Discretas

$X \sim Ber(p)$ p es un parámetro

•) Bernoulli: sirve para modelar fracaso - éxito

Soporte $= \{0,1\}$ Masa: $\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1-p & \text{si } x=0 \end{cases}$

$\hookrightarrow f_{\underline{X}}(x) = p^x (1-p)^{1-x}$

" p mide la proba de que a un individuo le guste una película, a Netflix le interesa estimar p y recomendarle la película si p es alta "

•) $X \sim Bin(n,p)$: Binomial, cuenta de éxitos en n intentos independientes con proba de éxito p

Soporte $= \{0,1,\ldots,n\}$ $f_{\underline{X}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

Otras que tienen que saber: $X \sim Po(\lambda)$ $\quad f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$

-) Poisson : "ley de eventos raros"
-) Uniforme : "todos las observaciones misma proba"
-) Geométrica : $\begin{cases} \text{" \# fracasos antes del primer éxito"} \\ \text{" \# intentos " " " "} \end{cases}$

IV. Variables Continuas

Conjuntos "continuos" y Funciones de densidad

En conjuntos continuos la proba de cualquier punto es 0

$\mathbb{P}(X=x)=0$ "ningún punto tiene masa"

La función de densidad de una v.a. X es la única función f_X tal que

$$\mathbb{P}(X\in E)=\int_E f_X(x)\,dx$$

(En particular $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1$)

En particular

$$\mathbb{P}(a<X\leq b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$$

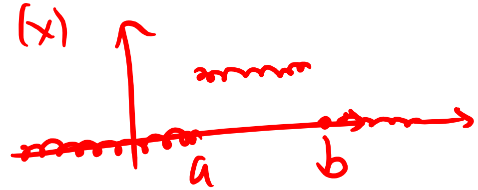
La función de acumulación, también llamada distribución, es $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx=\mathbb{P}(X\leq x)$. Obs $\mathbb{P}(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

Algunas distribuciones continuas importantes...

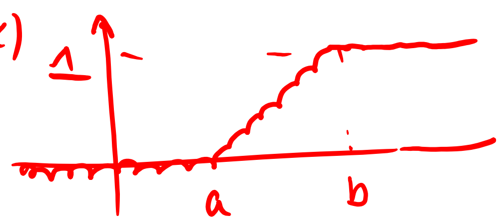
1) $X \sim unif(a,b)$

$$\int_a^b c = (b-a)c$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$



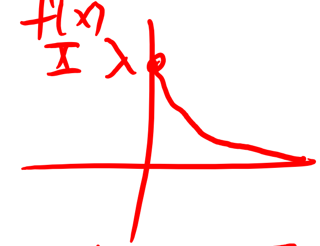
$$\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [a,b] \\ 0 & si\ x \notin [a,b] \end{cases}$$

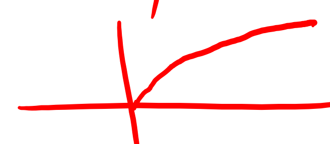


$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \le x \le b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$

2) $X \sim exp(\lambda)$ exponencial

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$





ej: tiempos de supervivencia

- Gamma ✓
- No paramétrica: Beta

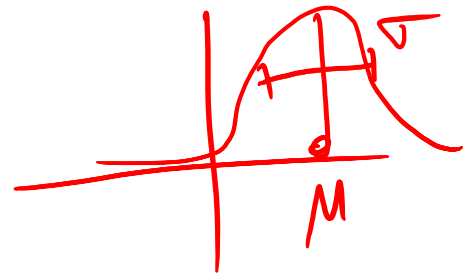
La distribución más importante que hay:

- Distribución Normal / Gaussiana

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

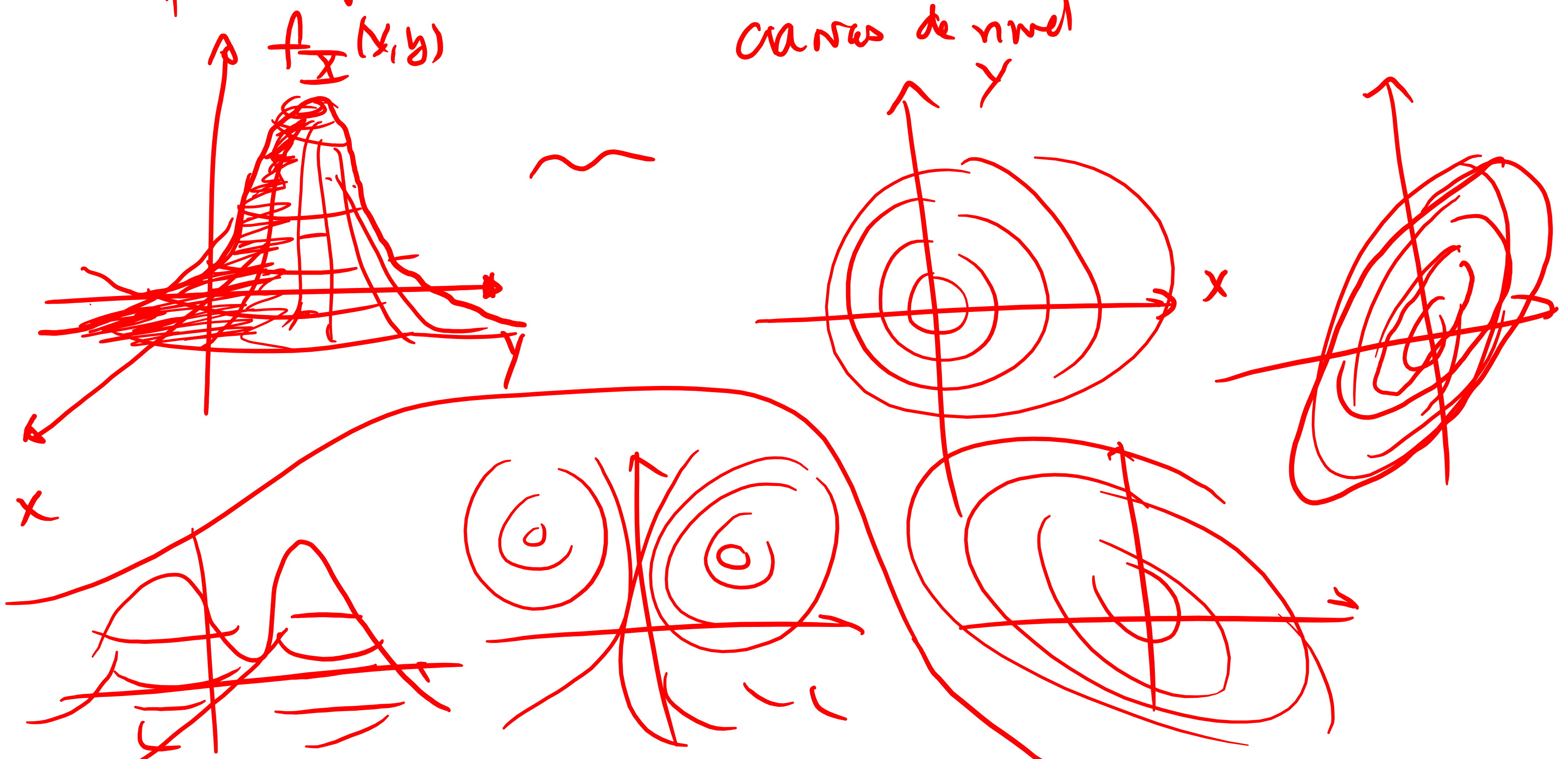
Soporte: $(-\infty, \infty)$



V. Distribuciones Conjuntas y Marginales

¿Qué pasa si tengo más de una variable aleatoria?

- Si tenemos más de una variable aleatoria, conjuntamente tienen una ley de probabilidad en un espacio multidimensional, que captura toda la interacción

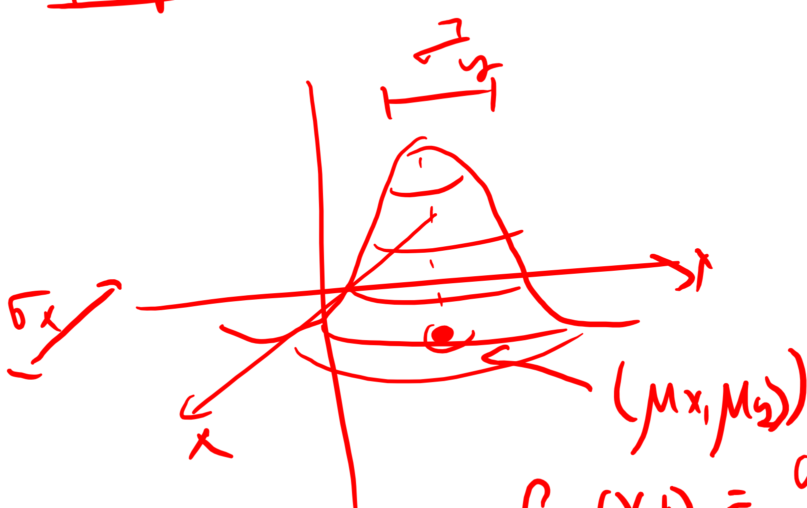


Función de densidad conjunta de variables $X_1, \dots, X_k$

es una función $f_{X_1,\dots,X_k} : \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_{k \text{ veces}} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$\mathbb{P}(X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_k \in E_k) = \int_{E_1}\int \dots \int_{E_k} f_{X_1,\dots,X_k}(x_1,\dots,x_k)\,dx_1 \dots dx_k$$

Ejemplo Normal bivariada $(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xy}^2 \end{pmatrix}\right)$



σ_{xy} está asociado a las forma de las curvas de nivel

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\det(\Sigma)^{-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left((\vec{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\vec{x}-\mu)\right)}$$

$\vec{x} = (x, y)$

$\mu = (\mu_x, \mu_y)$

VI. Esperanza, Varianza y Covarianza

Esperanza

$\mathbb{E}$

Propiedades

$\mathbb{E}(aX) = a\,\mathbb{E}(X)$

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,d\mathbb{P}$$

Caso discreto

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Soporte}(X)} x\,\mathbb{P}(X=x)$$

Ej 1 $X \sim \begin{cases} 10 & \text{con proba } \frac{1}{3} \\ -5 & \text{con proba } \frac{2}{3} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = (10)\frac{1}{3} + (-5)\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

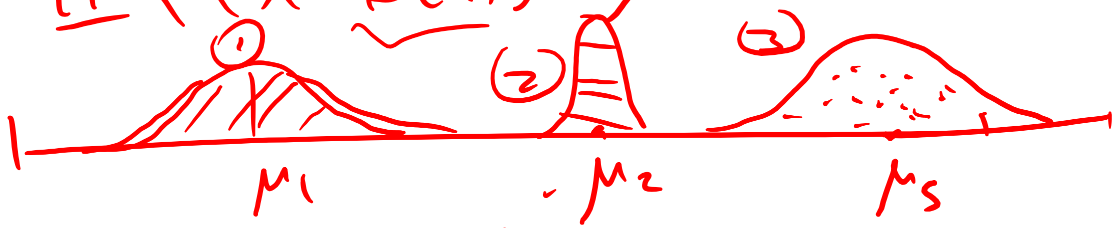
Ej 2 $X \sim Exp(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza y Covarianza

- $Var(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2 \right)$ ← Medidas de tendencia central

3 muestras



Desviación Estándar $(X) = \sqrt{Var(X)}$

- $Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)) \right)$

suerte

$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Correlación

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{(X-E(X))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \frac{(Y-E(Y))}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \right)$$

Propiedades

$$-1 \leq \mathrm{Corr}(X,Y) \leq 1$$

Independencia y Distribuciones Conjuntas

Recordatorio X indep de Y si $\mathbb{P}(X\in E, Y\in F) = \mathbb{P}(X\in E)\,\mathbb{P}(Y\in F)$

Por otro lado

$$\mathbb{P}(X\in E) = \int_E f_X(x)\,dx \qquad \mathbb{P}(Y\in F) = \int_F f_Y(y)\,dy$$

La distribución conjunta $f_{X,Y}$ debe cumplir

$$\int\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_E f_X(x)\,dx \int_F f_Y(y)\,dy$$

para todos E, F. Matemáticamente implica

$$\boxed{X, Y \text{ indep} \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)}$$

No siempre se cumple, de hecho, por eso necesitamos conocer las conjuntas.

Ej: Otra vez la normal bivariada

Si $\vec{X}=(X,Y)\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$ $\quad \vec{\mu}=(\mu_x,\mu_y)$ $\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{pmatrix}$

esperanzas

Varianza

Covarianza

$$f_{x,y}(x,y)=f_{\vec{X}}(\vec{x})=\frac{\det(\Sigma)^{-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

$$\neq f_x(x)f_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2}(y-\mu_y)^2}$$

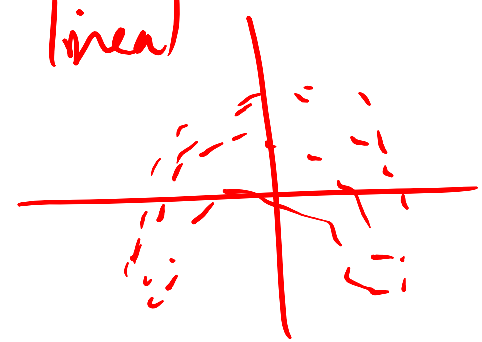
La igualdad solo se da si $\sigma_{xy}=0$

pues $\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1/\sigma_x^2 & 0\\ 0 & 1/\sigma_y^2\end{pmatrix}$ y $\det(\Sigma)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}}$

Fact de la vida: La distribución normal es la única distribución continua en donde covarianza cero e independencia cero son equivalentes. Pero en general es falso.

Tarea: Buscar ejemplo donde no sean independientes pero tengan covarianza cero

Hint: la covarianza solo mide asociación lineal



Pero.... independencia sí implica covarianza cero. ¿Por qué?

Tarea 2:
- Argumentar porque X inde de $Y \Rightarrow \mathbb{E}(h(X)g(Y)) = \mathbb{E}(h(X))\mathbb{E}(g(Y))$
- En consecuencia $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$

Tarea Normal multivariada.

Covarianza e independencia

Independencia $\Rightarrow$ covarianza cero

VIII. Ley de los Grandes Números

(LGN)

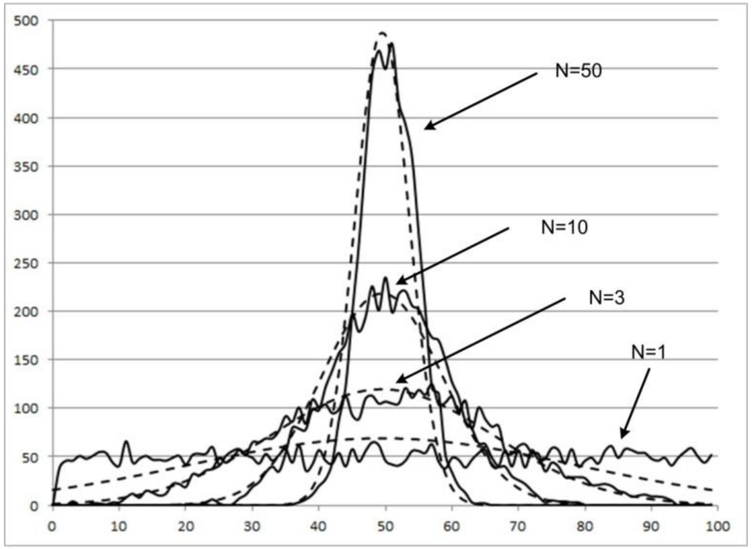
LGN

Supongan $X_1, X_2, X_3, \ldots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media común μ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu = \mathbb{E}(X_1)$$

"Si tiro muchos volados y promedio los ceros y unos obtengo $1/2$ en el largo plazo"

"Media muestral converge a media poblacional"



IX. Teorema Central del Límite

TCL

LCT

$X_1, X_2, \ldots$ v.a. iid con media y varianza común μ y σ^2, entonces

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

o equivalente

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$