Relacion-5.pdf

Pucherillos

Lógica y Métodos Discretos

1º Grado en Ingeniería Informática

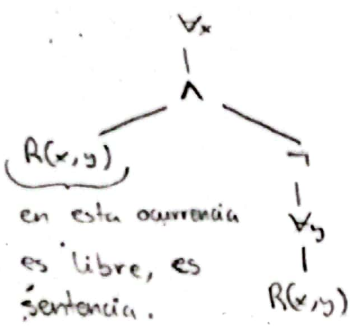
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Pablo Vega Romero
Grupo 1A

Relación 5. Lógica de primer orden con igualdad

Ejercicio 5.1: Dadas las fórmulas, escríbelas en forma de árbol. Calcula sus subfórmulas. Determina las ocurrencias libres de las variables. Halla sus variables libres y ligadas.

1. $\forall x\,(R(x,y) \wedge \neg \forall y\, R(x,y))$



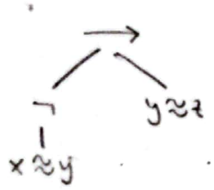
Como en esta ocurrencia la y es libre, es una sentencia.

Subfórmulas: $\{\forall x(R(x,y) \wedge \neg\forall y R(x,y)),\ R(x,y) \wedge \neg\forall y R(x,y),\ R(x,y),\ \neg\forall y R(x,y),\ \forall y R(x,y)\}$

Libres $= \{y\} = Lib\{\varphi\}$

Ligadas $= \{x,y\} = Lig\{\varphi\}$

2. $x \not\approx y \rightarrow y \approx z$



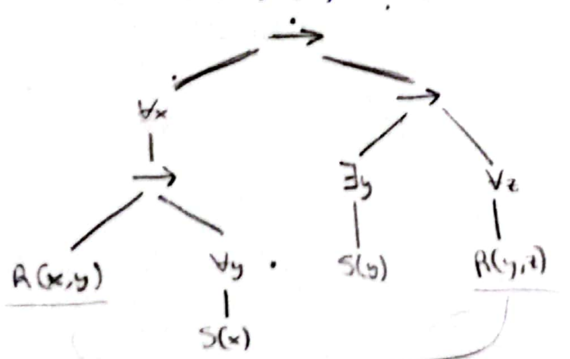
Subfórmulas: $\{x \not\approx y \rightarrow y \approx z,\ x \not\approx y,\ x \approx y,\ y \approx z\}$

Libres: $\{x,y,z\} = Lib\{\varphi\}$

Ligadas: No hay ninguna variable ligada $= Lig\{\varphi\}$

Como no hay cuantificadores, las ocurrencias son libres y por tanto no es una sentencia.

3. $\forall x\,(R(x,y) \rightarrow \forall y\, S(x)) \rightarrow (\exists y\, S(y) \rightarrow \forall z\, R(y,z))$



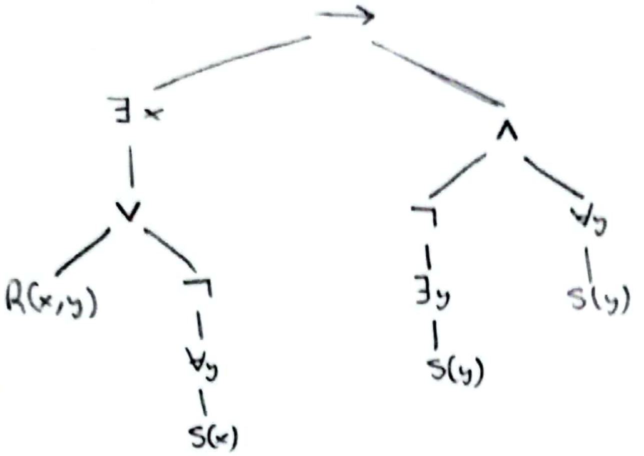
Subfórmulas: $\{\forall x(R(x,y) \rightarrow \forall y S(x)) \rightarrow (\exists y S(y) \rightarrow \forall z R(y,z)),\ R(x,y) \rightarrow \forall y S(x),\ \exists y S(y) \rightarrow \forall z R(y,z),\ R(x,y),\ \forall y S(x),\ \exists y S(y),\ \forall z R(y,z),\ S(x),\ S(y),\ R(y,z)\}$

Libres: $\{y\} = Lib\{\varphi\}$

Ligadas: $\{x,y,z\} = Lig\{\varphi\}$

Como en ambas ocurrencias la y es libre, no es una sentencia.

4. $\exists x(R(x,y) \vee \neg \forall y S(x)) \to (\neg \exists y S(y) \wedge \forall y S(y))$



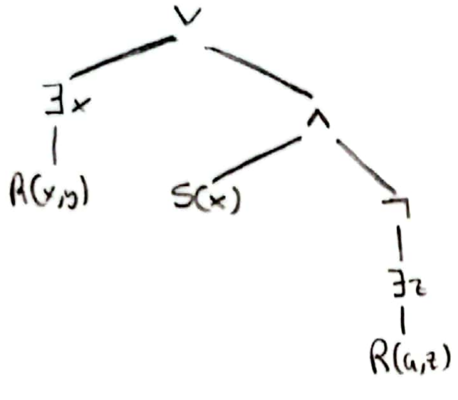
Subfórmulas: $\{\exists x(R(x,y) \vee \neg\forall y S(x)) \to (\neg\exists y S(y) \wedge \forall y S(y)),$
$\exists x(R(x,y) \vee \neg \forall y S(x)), \neg\exists x S(y) \wedge \forall y S(y),$
$R(x,y) \vee \neg \forall y S(x), \neg \exists x S(y), \forall y S(y),$
$R(x,y), \neg \forall y S(x), \exists x S(y), S(y), \forall y S(x),$
$S(x)\}$

$Lib\{\varphi\} = \{y\}$

$Lig\{\varphi\} = \{x, y\}$

No es una sentencia

5. $\exists x R(x,y) \vee [S(x) \wedge \neg \exists z R(a,z)]$



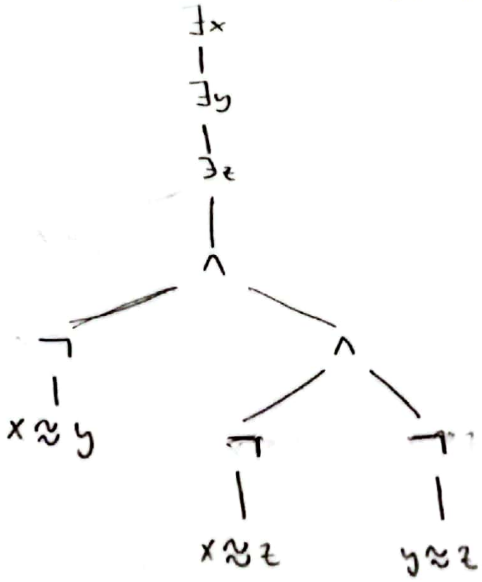
Subfórmulas $= \{\exists x R(x,y) \vee [S(x) \wedge \neg\exists z R(a,z)], \exists x R(x,y),$
$S(x) \wedge \neg \exists z R(a,z), R(x,y), S(x), \neg \exists z R(a,z),$
$\exists z R(a,z), R(a,z)\}$

$Lib\{\varphi\} = \{y, x, a\}$

$Lig\{\varphi\} = \{x, z\}$

No es una sentencia

6. $\exists x \exists y \exists z (x \not\approx y \wedge x \not\approx z \wedge y \not\approx z)$



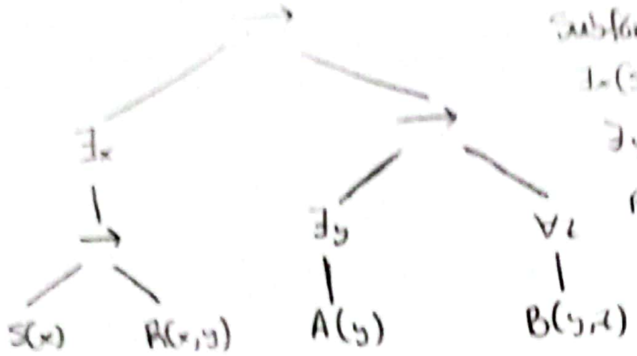
Subfórmulas: $\{\exists x \exists y \exists z (x \not\approx y \wedge x \not\approx z \wedge y \not\approx z), \exists y \exists z (x \not\approx y \wedge x \not\approx z \wedge y \not\approx z),$
$\exists z (x \not\approx y \wedge x \not\approx z, y \not\approx z), x \not\approx y \wedge x \not\approx z \wedge y \not\approx z, x \not\approx y, x \approx y,$
$x \not\approx z \wedge y \not\approx z, x \not\approx z, x \approx z, y \not\approx z, y \approx z\}$

$Lib\{\varphi\} = \emptyset$

$Lig\{\varphi\} = \{x, y, z\}$

Es una sentencia.

7. $\exists_x(S(x)\to R(x,y))\to(\exists_y A(y)\to\forall_z B(y,z))$



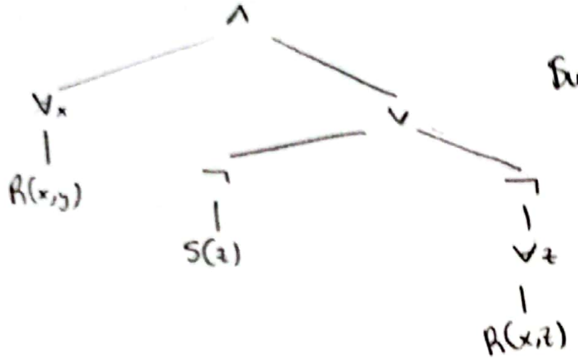
Subfórmulas: $\{\exists_x(S(x)\to A(x,y))\to(\exists_y A(y)\to\forall_z B(y,z)),$ $\exists_x(S(x)\to R(x,y)),$ $\exists_y A(y)\to\forall_z B(y,z),$ $S(x)\to R(x,y),$ $\exists_y A(x),$ $\forall_z B(y,z),$ $S(x),$ $R(x,y),$ $A(x),$ $B(y,z)\}$

$Lib\{\varphi\}=\{y\}$

$Lig\{\varphi\}=\{x,y,z\}$

Es una sentencia.

8. $\forall_x R(x,y)\wedge(\neg S(z)\vee\neg\forall_z R(x,z))$



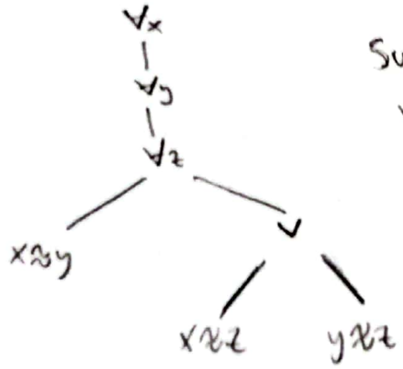
Subfórmulas: $\{\forall_x R(x,y)\wedge(\neg S(z)\vee\neg\forall_z R(x,z));$ $\forall_x R(x,y),$ $\neg S(z)\vee\neg\forall_z R(x,z),$ $R(x,y),$ $\neg S(z),$ $\neg\forall_z R(x,z),$ $S(z),$ $\forall_z R(x,z),$ $R(x,z)\}$

$Lib\{\varphi\}=\{x,y,z\}$

$Lig\{\varphi\}=\{x,z\}$

No es una sentencia

9. $\forall_x\forall_y\forall_z(x\not\approx y\vee x\not\approx z\vee y\not\approx z)$



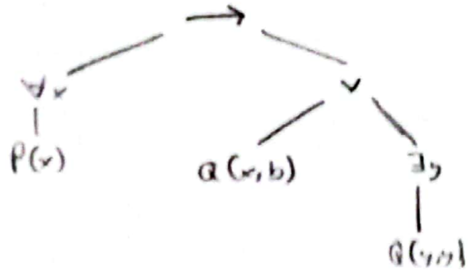
Subfórmulas: $\{\forall_x\forall_y\forall_z(x\not\approx y\vee x\not\approx z\vee y\not\approx z),$ $\forall_y\forall_z(x\not\approx y\vee x\not\approx z\vee y\not\approx z),$ $\forall_z(x\not\approx y\vee x\not\approx z\vee y\not\approx z),$ $x\not\approx y\vee x\not\approx z\vee y\not\approx z,$ $x\not\approx y,$ $x\not\approx z\vee y\not\approx z,$ $x\not\approx z,$ $y\not\approx z\}$

$Lib\{\varphi\}=\emptyset$

$Lig\{\varphi\}=\{x,y,z\}$

Es una sentencia.

10. $\forall_x P(x)\to Q(x,b)\vee\exists_y Q(y,y)$.



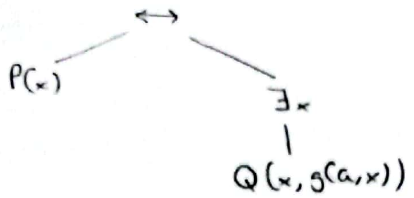
Subfórmulas: $\{\forall_x P(x)\to Q(x,b)\vee\exists_y Q(y,y),$ $\forall_x P(x),$ $Q(x,b)\vee\exists_y Q(y,y),$ $P(x),$ $Q(x,b),$ $\exists_y Q(y,y),$ $Q(y,y)\}$

$Lib\{\varphi\}=\{x\}$

$Lig\{\varphi\}=\{x,y\}$

No es sentencia

11. $P(x) \leftrightarrow \exists_x Q(x, g(a,x))$



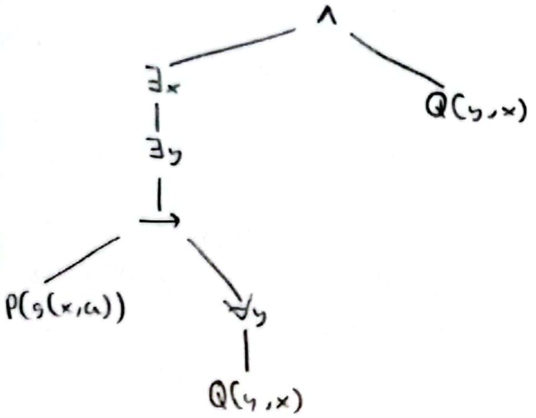
Subfórmulas: $\{P(x) \leftrightarrow \exists_x Q(x, g(a,x)), P(x), \exists_x Q(x, g(a,x)), Q(x, g(a,x))\}$

$Lib\{\varphi\} = \{x\}$

$Lig\{\varphi\} = \{x\}$

No es una sentencia

12. $\exists_x \exists_y (P(g(x,a)) \rightarrow \forall_y Q(y,x)) \wedge Q(y,x)$



Subfórmulas: $\{\exists_x \exists_y (P(g(x,a)) \rightarrow \forall_y Q(y,x)) \wedge Q(y,x),$
$\exists_x \exists_y (P(g(x,a)) \rightarrow \forall_y Q(y,x)), Q(y,x),$
$\exists_y (P(g(x,a)) \rightarrow \forall_y Q(y,x)), P(g(x,a)) \rightarrow \forall_y Q(y,x),$
$P(g(x,a)), \forall_y Q(y,x), Q(y,x)\}$

$Lib\{\varphi\} = \{x,y\}$

$Lig\{\varphi\} = \{x,y\}$ No es una consetura

Ejercicio 5.2: Expresa con este lenguaje los siguientes enunciados:

1. Begoña es la madre de Carmen:

$m(b,c)$

2. Begoña es tía de Antonio:

$M(b) \wedge H(a) \wedge \exists_x H_r(b, m(x,a))$

3. Antonio es abuelo de Begoña

$H(a) \wedge M(b) \wedge \exists_x p(a, p(x,b))$

4. Begoña es nieta de Antonio.

$M(b) \wedge H(a) \wedge \exists_x p(a, p(x,b))$

5. Todo el mundo tiene padre.

$\forall_x \exists_y \cdot p(y,x)$

6. Todo el mundo tiene dos progenitores:

$\forall_x (\exists_z \exists_y (P(y,x) \wedge P(z,x) \wedge y \neq z \wedge ((H(z) \wedge M(y)) \vee (H(y) \wedge M(z)))$

7. Nadie es progenitor de sí mismo.

$\neg \exists_x (P(x,x))$

8. Hay gente que no tiene hermanos:

$\exists x (\neg \exists y\, Hr(x,y))$

9. Los antepasados de Begoña son antepasados de Carmen:

$\forall x (A(x,b) \rightarrow A(x,c))$

10. Hay quien tiene hijos y quien no.

$\exists x (\exists y\, P(x,y)) \land \exists x (\neg \exists y\, P(x,y))$

11. Dos personas son hermanas si, y sólo si, tienen los mismos progenitores:

$\forall x \forall y (Hr(x,y) \leftrightarrow (\exists z (P(z,x) \land P(z,y))))$

12. Begoña es hermana de un hijo de Antonio:

$\exists x (Hr(b,x) \land p(a,x))$

13. Un progenitor de un antepasado es un antepasado:

$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land A(y,z) \rightarrow A(x,z))$

14. Los padres son antepasados:

$\forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow A(x,y))$

15. Nadie es progenitor de sus hermanos:

$\forall x \neg \exists y\, P(x, Hr(x,y))$

16. Toda persona tiene una única madre.

$\forall x \exists y (M(y) \land P(y,x))$

17. Begoña es abuela materna de Carmen:

$\exists x (m(b,x) \land m(x,c))$

18. Carmen es bisabuela de Antonio:

$\exists x \exists y (m(c,x) \land P(x,y) \land P(y,a))$

19. Todos tenemos abuelos.

$\forall x \exists y \exists z (P(y,z) \land P(z,x))$

20. Todos tenemos bisabuelos:

$\forall x \exists y \exists z \exists t (P(y,z) \land P(z,t) \land P(t,x))$

21. Algunos antepasados de Begoña no son antepasados de Carmen:

$\exists x (A(x,b) \land \neg A(x,c))$

22. Begoña tiene al menos dos hermanos:

$\exists x \exists y (Hr(x,b) \land Hr(y,b) \land x \neq y)$

Ejercicio 5.3: Estudia cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas para esta estructura. ($\mathbb{Z}_4$)

1. $P(c)$: Verdad
2. $\neg P(d)$: Verdad
3. $P(c) \wedge P(d)$: Falsa
4. $P(c) \to Q(d)$: Verdad
5. $\exists x\, Q(x)$: Falsa
6. $\neg(\exists x\, Q(x))$: Verdad
7. $\exists x \neg Q(x)$: Verdad
8. $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$: Falsa
9. $\forall x\, Q(x)$: Falsa
10. $\forall x (P(x) \to Q(x))$: Falsa
11. $\forall x (Q(x) \to \neg P(x))$: Verdad
12. $\forall x (Q(x) \to \exists y (P(x) \vee Q(y)))$: Verdad
13. $\forall x\, R(c,x)$: Falsa
14. $\forall x\, S(c,x)$: Verdad
15. $\forall x (R(c,x) \to S(c,x))$: $(0 \to 1 \wedge 1 \to 1) = 1 \wedge 1 = 1 \to$ Verdad

   ‖

16. Verdad.
17. $\forall x \exists y \exists z\, R(x,y)$:

x	y	R(x,y)	$\exists_y R(x,y)$
0	0	0	1
	1	1	
	2	1	
	3	0	
1	0	0	1
	1	0	
	2	1	
	3	0	
2	0	0	1
	1	0	
	2	1	
	3	1	
3	0	1	1
	1	0	
	2	0	
	3	0	

Verdad

18. $\forall_x \exists_y S(x,y)$:

x	y	$S(x,y)$	$\exists_y S(x,y)$
0	0	1	1
	1	1	
	2	1	
	3	1	
1	0	0	0
	1	0	
	2	0	
	3	0	
2	0	0	1
	1	0	
	2	0	
	3	1	
3	0	0	0
	1	0	
	2	0	
	3	0	

Falsa

19. $\exists_y \forall_x R(x,y)$

y	x	$R(x,y)$	$\forall_x R(x,y)$
0	0	0	0
	1	0	
	2	0	
	3	1	
1	0	1	0
	1	0	
	2	0	
	3	0	
2	0	1	0
	1	1	
	2	1	
	3	0	
3	0	0	0
	1	0	
	2	1	
	3	0	

Falsa

20. $\exists_y \forall_x S(x,y)$: Falsa

21. $\exists_y \forall_x R(y,x)$

y	x	$R(y,x)$	$\forall_x R(y,x)$
0	0	0	0
	1	1	
	2	1	
	3	0	
1	0	0	0
	1	0	
	2	1	
	3	0	
2	0	0	0
	1	0	
	2	1	
	3	1	
3	0	1	0
	1	0	
	2	0	
	3	0	

Falsa

22. $\forall_x \forall_y (R(x,y) \rightarrow S(x,y))$: Falsa

25. $\forall_x (P(x) \rightarrow \exists_y R(x,y))$

x	$P(x)$	$\exists_y R(x,y)$	$P(x) \rightarrow \exists_y R(x,y)$
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	1	1
3	0	1	1

Verdad

26. $\forall_x (P(x) \rightarrow \exists_y R(y,x))$: Verdad

27. $\forall_x ((x \not\approx c) \rightarrow \exists_y R(y,x))$

x	$x \not\approx c$	$\exists_y R(y,x)$	$(x \not\approx c) \rightarrow \exists_y R(y,x)$
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1

Verdad

28. $\forall_x (Q(x) \rightarrow \exists_y (P(x) \vee Q(y))) \longrightarrow$

$\rightarrow \forall_x (0 \rightarrow \exists_y (P(x) \vee Q(y))) \longrightarrow$

$\rightarrow : 0 \rightarrow 0 \wedge 0 \rightarrow 1 = 1 \wedge 1 = 1$

Verdad

29. $\forall x \forall y \forall z((S(x,y) \wedge S(y,z)) \to R(x,z))$

x	y	S(x,y)
0	0	1
	1	1
	2	1
	3	1
1	0	0
	1	0
	2	0
	3	0
2	0	0
	1	0
	2	0
	3	1
3.	0	0
	1	0
	2	0
	3	0

y	z	S(y,z)
0	0	1
	1	1
	2	1
	3	1
1	0	0
	1	0
	2	0
	3	0
2	0	0
	1	0
	2	0
	3	1
3	0	0
	1	0
	2	0
	3	0

x	z	R(x,z)
0	0	0
	1	0
	2	0
	3	1
1	0	1
	1	0
	2	0
	3	0
2	0	1
	1	1
	2	1
	3	0
3	0	0
	1	0
	2	1
	3	0

Falsa.

30. $\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$: Falsa

x	y	R(x,y)	¬R(y,x)	R(x,y) → ¬R(y,x)
0	0	0	1	1
	1	1	1	1
	2	1	1	1
	3	0	0	1
1	0	0	0	1
	1	0	1	1
	2	1	1	1
	3	0	1	1
2	0	0	0	1
	1	0	0	1
	2	1	0	0
	3	1	1	1
3	0	1	1	1
	1	0	1	1
	2	0	0	1
	3	0	1	1

Ejercicio 5.4: Estudia cuáles de las siguientes consecuencias lógicas son ciertas:

1. $\{\forall x P(x)\} \models P(a)$ → Es verdadera.
2. $\{\exists x P(x)\} \models P(a)$ → Es falsa.
3. $\emptyset \models \exists x P(x) \to P(a)$ → Es falsa.

   $A = \{1,2\}$; $P(x)$ = x es par

   $\models \exists x P(x) \to P(a) \Leftrightarrow \exists x P(x) \models P(a)$
4. $\emptyset \models \forall x P(x) \to P(a)$ → Es verdadera.

   $\models \forall x P(x) \to P(a) \Leftrightarrow \forall x P(x) \models P(a)$

5. $\emptyset \models \forall x(P(x) \rightarrow P(a)) \rightarrow$ Es falsa

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \rightarrow P(a)$	$\forall x(P(x) \rightarrow P(a))$
1	0	0	1	0
2	1	0	0	

6. $\emptyset \models P(a) \rightarrow \exists x P(x) \rightarrow$ Es verdadera, puede ser $a=2$.

$\Updownarrow$

$P(a) \models \exists x P(x)$

7. $\{\exists x \forall y R(x,y)\} \models \forall x \exists y R(x,y) \rightarrow$ Es falsa

$D=\{2,3\}$; $R=\{(2,2),(2,3)\}$

x	y	$R(x,y)$	$\forall y R(x,y)$	$\exists x \forall y R(x,y)$	$\exists y R(x,y)$	$\forall x \exists y R(x,y)$
2	2	1	1	1	1	0
2	3	1				
3	2	0	0		0	
3	3	0				

8. $\{\forall x \exists y R(x,y)\} \models \exists x \forall y R(x,y) \rightarrow$ Es falsa

$D=\{2,3\}$; $R=\{(2,2),(3,3)\}$

x	y	$R(x,y)$	$\exists y R(x,y)$	$\forall x \exists y R(x,y)$	$\forall y R(x,y)$	$\exists x \forall y R(x,y)$
2	2	1	1	1	0	0
2	3	0				
3	2	0	1		0	
3	3	1				

Ejercicio 5.5:

1. $\forall x(R(x,y) \wedge \neg \forall y R(x,y))$

Prenexa: $\forall x(R(x,y) \wedge \neg \forall y R(x,y)) \rightarrow \forall x(R(x,y) \wedge \exists y \neg R(x,y)) \rightarrow \forall x(R(x,y) \wedge \exists z \neg R(x,z)) \rightarrow$

$\rightarrow \forall x \exists z(R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$

Skolem: $\forall x(R(f(x),y) \wedge \neg R(x,f(x)))$

2. $x \not\models y \rightarrow y \not\models z \rightarrow$ Ya está en forma prenexa y de Skolem

3. $\forall x(R(x,y) \rightarrow \forall y S(x)) \rightarrow (\exists y S(y) \wedge \forall z R(y,z))$

$\forall x(R(x,y) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists u(S(u) \wedge \forall z R(y,z)) \rightarrow$

$\rightarrow \forall x \exists u \forall z(R(x,y) \rightarrow S(x)) \rightarrow (S(u) \wedge R(y,z))$: Prenexa

Skolem: $\forall x \forall z(R(x,y) \rightarrow S(x)) \rightarrow (S(f(x)) \wedge R(y,z))$

4. $\exists x(R(x,y) \vee \neg \forall y S(x)) \rightarrow (\neg \exists y S(y) \wedge \forall y S(y)) \rightarrow$

$\rightarrow \exists x \forall z(R(x,y) \vee \neg S(x)) \rightarrow (\neg S(z) \wedge S(z))$: Prenexa

Skolem: $\forall z(R(a,y) \vee S(a)) \rightarrow (\neg S(z) \wedge S(z))$

5. $\exists_x R(x,y) \vee [S(x) \wedge \neg \exists_z R(a,z)]$

$\exists_u R(u,y) \vee [S(x) \wedge \neg \exists_z R(a,z)]$

$\exists_u \forall_z (R(u,y) \vee [S(x) \wedge \neg R(a,z)])$ → Prenexa

Skolem: $\forall_z (R(b,y) \vee [S(x) \wedge \neg R(a,z)])$

6. $\exists_x \exists_y \exists_z (x \not\approx y \wedge x \not\approx z \wedge y \not\approx z)$ → Prenexa

Skolem: $(a \not\approx b \wedge a \not\approx c \wedge b \not\approx c)$

7. $\exists_x (S(x) \rightarrow R(x,y)) \rightarrow (\exists_y A(y) \rightarrow \forall_z B(y,z))$

$\exists_x \exists_u \forall_z ((S(x) \rightarrow R(x,y)) \rightarrow (A(u) \rightarrow B(y,z)))$ → Prenexa

Skolem: $\forall_z ((S(a) \rightarrow R(a,y)) \rightarrow (A(b) \rightarrow B(y,z)))$

8. $\forall_x R(x,y) \wedge (\neg S(z) \vee \neg \forall_z R(x,z))$

$\forall_x R(x,y) \wedge (\neg S(z) \vee \exists_z \neg R(x,z))$

$\forall_x \exists_u (R(x,y) \wedge (\neg S(z) \vee \neg R(x,u)))$ ⟶ $\forall_w \exists_u (R(w,y) \wedge (\neg S(z) \vee \neg R(x,u)))$: Prenexa

Skolem: $\forall_{xu} (R(w,y) \wedge (\neg S(z) \vee \neg R(x, f(u)))$

9. $\forall_x \forall_y \forall_z (x \not\approx y \vee x \not\approx z \vee y \not\approx z)$: Prenexa = Skolem

11. $P(x) \leftrightarrow \exists_x Q(x, g(a,x))$

$(P(x) \rightarrow \exists_x Q(x, g(a,x))) \wedge (\exists_x Q(x, g(a,x)) \rightarrow P(x))$

$\exists_y (P(x) \rightarrow Q(y, g(a,y))) \wedge \forall_y (Q(y, g(a,y)) \rightarrow P(x))$

$\exists_y \forall_z (P(x) \rightarrow Q(y, g(a,y))) \wedge (Q(z, g(a,z)) \rightarrow P(x))$: Prenexa

Skolem: $\forall_z (P(x) \rightarrow Q(b, g(b,y))) \wedge (Q(z, g(a,z)) \rightarrow P(x))$

10. $\forall_x P(x) \rightarrow Q(x,b) \vee \exists_y Q(y,y)$

$\exists_y \forall_x (P(x) \rightarrow Q(x,b) \vee Q(y,y))$

$\exists_y \forall_z (P(z) \rightarrow Q(x,b) \vee Q(y,y))$: Prenexa

Skolem: $\forall_z (P(z) \rightarrow Q(x,b) \vee Q(a,a))$

12. $\exists_x \exists_y (P(g(x,a)) \rightarrow \forall_y Q(y,x)) \wedge Q(y,x)$.

Prenexa: $\exists_x \exists_z \forall_z (P(g(x,a)) \rightarrow Q(z,u) \wedge Q(y,x))$

$\forall_z (P(g(b,a)) \rightarrow Q(z,b) \wedge Q(y,x))$

Ejercicio 5.6:

1. $\forall_x S(x) \rightarrow \exists_z \forall_y R(z,y)$

Prenexa: $\exists_z \forall_x \forall_y (S(x) \rightarrow R(z,y))$

Skolem: $\forall_x \forall_y (S(x) \rightarrow R(a,y))$

Clausular: $\forall_x \forall_y (\neg S(x) \vee R(a,y))$

2. $\exists_x [R(x) \rightarrow \neg \exists_y T(x,y)] \wedge \neg \exists_z [\forall_u P(u,z) \rightarrow \forall_v Q(v,z)]$

$\exists_x \forall_y (R(x) \rightarrow \neg T(x,y)) \wedge \forall_z \exists_v \forall_u \neg (P(u,z) \rightarrow Q(v,z))$

$\exists_x (\forall_y (R(x) \rightarrow \neg T(x,y)) \wedge \forall_z \exists_v \forall_u \neg (P(u,z) \rightarrow Q(v,z)))$

$\exists_x \forall_z ((R(x) \rightarrow \neg T(x,z)) \wedge \exists_v \forall_u \neg (P(u,z) \rightarrow Q(v,z)))$

Prenexa: $\exists_x \forall_z \exists_v \forall_u ((R(x) \rightarrow \neg T(x,z)) \wedge \neg (P(u,z) \rightarrow Q(v,z)))$

Skolem: $\forall_z \forall_u ((R(a) \rightarrow \neg T(a,z)) \wedge \neg (P(u,z) \rightarrow Q(f(z),z)))$

Clausular: $\forall_z \forall_u (R(a) \rightarrow \neg T(a,z)) \wedge \forall_z \forall_u P(u,z) \wedge \forall_z \forall_u Q(f(z),z)$

3. $\forall_x [P(x) \rightarrow (Q(x) \vee \neg R(x))] \wedge \exists_y Q(y)$.

Prenexa: $\exists_y \forall_x ([P(x) \rightarrow (Q(x \vee \neg R(x))] \wedge Q(y))$

Skolem: $\forall_x ([P(x) \rightarrow (Q(x \vee \neg R(x))] \wedge Q(a))$

Clausular: $\forall_x ([\neg P(x) \wedge (Q(x \vee \neg R(x))] \wedge Q(a))$

4. $\forall_x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall_y P(y) \rightarrow \forall_z Q(z))$

$\forall_x \forall_y \forall_z ((P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(y) \rightarrow Q(z)))$: Prenexa = Skolem

$\forall_x \forall_y \forall_z (\neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg P(y) \vee Q(z)))$

Clausular: $\forall_x \forall_y \forall_z ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\neg P(y) \vee Q(z)))$

5. $\forall_x P(x) \rightarrow \exists_x Q(x)$

Prenexa: $\exists_x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Skolem: $P(a) \rightarrow Q(a)$

Clausular: $\neg P(a) \vee Q(a)$

6. $\forall_x \forall_y [\exists_z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists_u Q(x,y,u)]$

Prenexa: $\forall_x \forall_y \exists_u \exists_z [(P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow Q(x,y,u)]$

Skolem: $\forall_x \forall_y [(P(x,f(x,y)) \wedge P(y,f(x,y)) \rightarrow Q(x,y,g(x,y))]$

Clausular: $\forall_x \forall_y [\neg P(x,f(x,y)) \vee \neg P(y,f(x,y)) \vee Q(x,y,g(x,y))]$

7. $\forall_x [P(x) \wedge \forall_y (\neg Q(x,y) \rightarrow \forall_z R(a,x,y))]$

Prenexa: $\forall_x \forall_y [P(x) \wedge (\neg Q(x,y) \rightarrow R(a,x,y))]$: Skolem

Clausular: $\forall_x \forall_y [P(x) \wedge (Q(x,y) \vee R(a,x,y))]$

8. $\forall_x \forall_y [\exists_z P(z) \wedge \exists_u (Q(x,u) \rightarrow \exists_v Q(y,v))]$

Prenexa: $\forall_x \forall_y \exists_z \exists_u \exists_v [P(z) \wedge (Q(x,u) \rightarrow Q(y,v))]$

Skolem: $\forall_x \forall_y [P(a) \wedge (Q(x,b) \rightarrow Q(y,c))]$

Clausular: $\forall_x \forall_y [P(a) \wedge (\neg Q(x,b) \vee Q(y,c))]$

9. $\exists_x \forall_y (\forall_x \forall_y R(a,x) \rightarrow \neg \forall_z ((\neg R(z,y)) \rightarrow \forall_x S(g(x),z)))$

Prenexa: $\forall_x \forall_y \forall_w \exists_z (R(a,w) \rightarrow \neg((\neg R(z,y) \rightarrow S(g(x),z)))$

Skolem: $\forall_x \forall_y \forall_w (R(a,w) \rightarrow \neg((\neg R(b,y) \rightarrow S(g(x),b)))$

10. $\exists_x R(x, f(x)) \rightarrow \exists_y \forall_x R(y,x)$

Prenexa: $\exists_x \exists_y \forall_z (R(x, f(x)) \rightarrow R(y, z))$

Skolem: $\forall_z (R(a, f(a)) \rightarrow R(b,z))$

Clausular: $\forall_z (\neg R(a, f(a)) \vee R(b,z))$

11. $\neg \exists_x (P(x) \wedge C(x))$

Prenexa = Skolem: $\forall_x \neg (P(x) \wedge C(x))$

Clausular: $\forall_x (\neg P(x) \vee \neg C(x))$

12. $\forall_x (P(x) \rightarrow \neg V(x))$

Prenexa = Skolem: $\forall_x (P(x) \rightarrow \neg V(x))$

Clausular: $\forall_x (\neg P(x) \vee \neg V(x))$

13. $\exists_x [P(x) \wedge E(x) \wedge \forall_y (S(x,y) \wedge P(y))]$

Prenexa: $\exists_x \forall_y [P(x) \wedge E(x) \wedge (S(x,y) \wedge P(y))]$

Skolem: $\forall_y [P(a) \wedge E(a) \wedge (S(a,y) \wedge P(y))]$ = Clausular

14. $\forall_x [(E(x) \wedge \neg V(x)) \rightarrow \exists_y (S(x,y) \wedge C(y))]$

Prenexa: $\forall_x \exists_y [(E(x) \wedge \neg V(x)) \rightarrow (S(x,y) \wedge C(y))]$

Skolem: $\forall_x [(E(x) \wedge \neg V(x)) \rightarrow (S(x,f(x)) \wedge C(f(x)))]$

$\forall_x [\neg (E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (S(x,f(x)) \wedge C(f(x)))]$

$\forall_x [(\neg E(x) \vee V(x)) \vee (S(x,f(x)) \wedge C(f(x)))]$

Clausular: $\forall_x (\neg E(x) \vee V(x) \vee S(x,f(x))) \wedge \forall_x (\neg E(x) \vee V(x) \vee C(f(x)))$