Tema 4. Lógica de primer orden

Asignatura: ***Lógica y Métodos Discretos***
Wuolah: Bl4ckTyson

Voy a intentar hacer un documento resumido de manera enriquecida. El resumen contendrá información de diapositivas, ejercicios, vídeos...

Bl4ckTyson

2024

Contents

1 Unificacion

1.1 Introducción

Queremos estudiar si $\{\forall x P(x)\} \models P(a)$
Pasamos todo a forma clausulada, y comprobamos si el conjunto $\{\forall x P(x), \neg P(a)\}$ es insatisfacible.
Necesitamos una manera de transformar estas cláusulas de forma que una sea el negado de la otra.
Para ello necesitaremos sustituir x por a (ya que está cuantificada universalmente), y podríamos obtener $\square$ como resolvente.
Esto es la **unificación**

1.2 Sustitución

Sea $\alpha = R(f(x), a, g(h(x), y))$ vamos a intentar realizar $\sigma = (x|g(a, y)$ y $\tau = (y|g(a, h(a)))$
$R(f(g(a, g(a, h(a)))), a, g(h(g(a, g(a, h(a))))), g(a, h(a)))$
Pero es **diferente a si se aplica primero τ y luego σ**
Por lo tanto:
Una sustitución es una **transformación que consiste en sustituir algunos símbolos de variable que aparecen en el literal**

1.3 Unificadores

Un **unificador** para literales es una **sustitución** σ tal que $\sigma(\alpha_1) = (\alpha_2)$
Un conjunto de literales es **unificable** si **existe un unificador** para ellos.
Ejemplo unificable: $P(x) y P(a)$ es unificable con $\sigma = (x|a)$ ya que si aplicamos la sustitución nos queda $P(a) = P(a)$
Ejemplo no unificable: $P(x)$ y $P(f(x))$. Por ejemplo con $\sigma = (x|t)$ tenemos $P(t) \neq P(f(t))$

1.3.1 Unificador principal

El **unificador principal** es aquel unificador del cual se pueden obtener todos, y acompañará al resto de unificaciones.
Ejemplo: $R(a, x, f(g(y)))$ y $R(z, f(z), f(u))$

- $\alpha = R(a, x, f(g(y)))$ y $\beta = R(z, f(z), f(u))$
- Aplicamos (z|a):
  $\alpha = R(a, x, f(g(y)))$ y $\beta = R(a, f(a), f(u))$
- Aplicamos (x|f(a))
  $\alpha = R(a, f(a), f(g(y)))$ y $\beta = R(a, f(a), f(u))$
- Aplicamos (u|g(y))
  $\alpha = R(a, f(a), f(g(y)))$ y $\beta = R(a, f(a), f(g(y)))$
- De esta forma nos quedamos con el unificador principal: $\sigma(z|a; x|f(a); u|g(y))$

1.4 Resolución sistemas de ecuaciones en términos

Busquemos un unificador para los literales R(a,x,f(g(y))) y R(z,f(z),f(u))

$$\begin{cases} a = z \\ x = f(z) \\ f(g(y)) = f(u) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = a \\ x = f(z) \\ f(g(y)) = f(u) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = a \\ x = f(a) \\ f(g(y)) = f(u) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = a \\ x = f(a) \\ g(y) = u \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z = a \\ x = f(a) \\ u = g(y) \end{cases}$$

A la izquierda hay solo símbolos de variable, así que el sistema está resuelto con:
$\sigma(z|a; x|f(a); u|g(y))$
Vamos a comprobar si P(x,y), P(f(z),x) y P(u,f(u)) son unificables:

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = x \\ f(z) = u \\ x = f(u) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = f(z) \\ y = f(z) \\ f(z) = u \\ x = f(u) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = f(z) \\ y = f(z) \\ u = f(z) \\ x = f(u) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = f(z) \\ y = f(z) \\ u = f(z) \\ f(z) = f(u) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = f(z) \\ y = f(z) \\ u = f(z) \\ f(z) = f(f(z)) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = f(z) \\ y = f(z) \\ u = f(z) \\ z = f(z) \end{cases}$$

1.5 Algoritmo de unificación

1. Vamos a considerar los literales P(x) y P(y). El conjunto de discordancia es {**x,y**}, de **tipo 3**
2. Vamos a considerar los literales R(g(x)) y R(f(y)). El conjunto de discordancia es {**g(x),f(y)**}, de tipo **1**
3. Vamos a considerar los literales R(a,f(x),g(y)) y R(a,f(g(x)),g(z)), el primer conjunto de disonancia {**x,g(x)**} es de **tipo 2**

2 Resolucion

2.1 Deducciones y principio de resolución

Sea un conjunto de cláusulas un lenguaje de primer orden, el conjunto es insatisfacible si y solo sí existe una deducción de $\square$ a partir del conjunto.

2.1.1 Ejemplo de resolución

$\alpha_1 = \forall x(P(x) \land \neg Q(x) \to \exists y(r(x,y) \land S(y)))$
$\alpha_2 = \exists y \forall x((R(x,y) \to T(x)) \land T(y) \land P(y))$
$\beta = \exists x(T(x) \land (Q(x) \lor S(x)))$
Queremos ver si $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \beta$
Vamos a pasar a clausulas cada una de las fórmulas
$\alpha_1 = \forall x(P(x) \land \neg Q(x) \to \exists y(r(x,y) \land S(y))) \equiv$
$\equiv \forall x(\neg(P(x) \land \neg Q(x) \lor \exists y(r(x,y) \land S(y)))$
$\equiv \forall x(\neg P(x) \lor Q(x) \lor \exists y(r(x,y) \land S(y))) \equiv$
$\equiv \forall x \exists y(\neg P(x) \lor Q(x) \lor (r(x,y) \land S(y)))$ Forma prenexa
$\equiv \forall x(\neg P(x) \lor Q(x) \lor (r(x,f(x) \land S(f(x)))))$ Una forma de skolem
$\equiv \forall x(\neg P(x) \lor Q(x) \lor (r(x,f(x)) \land (\neg P(x) \lor Q(x) \lor S(f(x)))$ Forma clausulada

$\alpha_2 = \exists y \forall x((R(x,y) \to T(x)) \land T(y) \land P(y)) \equiv$
$\equiv \exists y \forall x((\neg R(x,y) \lor T(x)) \land T(y) \land P(y))$ Forma de prenexa (ya estaba previamente)
$\equiv \forall x((\neg R(x,a) \lor T(x)) \land T(a) \land P(a))$ Una Forma de skolem y clausulada

$\neg(\beta) = \neg(\exists x(T(x) \land (Q(x) \lor S(x)))) \equiv$
$\equiv \neg\exists x(T(x) \land (Q(x) \lor S(x))) \equiv$
$\equiv \forall x \neg(T(x) \land (Q(x) \lor S(x))) \equiv$
$\equiv \forall x(\neg T(x) \lor \neg(Q(x) \lor S(x))) \equiv$
$\equiv \forall x(\neg T(x) \lor (\neg Q(x) \land \neg S(x)))$ Forma normal prenexa y forma una forma de skolem
$\equiv (\neg Q(x) \lor \neg T(x)) \land (\neg S(x) \lor \neg T(x))$ Forma clausulada

Agrupamos todas las clausulas en un Γ^{**}
$\Gamma^{**} = \{(\neg P(x) \lor Q(x) \lor (r(x,f(x)); (\neg P(x) \lor Q(x) \lor S(f(x))); (\neg R(x,a) \lor T(x)); (T(a)); (P(a)); (\neg Q(x) \lor \neg T(x)); (\neg S(x) \lor \neg T(x)); (\neg S(x) \lor \neg T(x))\}$
Para ver si es insatisfacible hay que intentar deducir la $\square$

Vamos a partir de la cláusula:

1. $\{(\neg P(x) \vee Q(x) \vee (r(x, f(x))\}$
2. hacemos sustitución de (x|a) y la juntamos con P(a):
   $Q(a) \vee R(a, f(a))$
3. Cogemos ahora $\{\neg R(x, a) \vee T(x)\}$ cambiando x por f(a)
   $Q(a) \vee T(f(a))$
4. Cogemos ahora $\{(\neg S(x) \vee \neg T(x))\}$, cambiando x por f(a)
   $Q(a) \vee \neg S(f(a))$
5. Cogemos ahora $\{\neg P(x) \vee Q(x) \vee S(f(x))\}$ y cambiamos x por a
   $\neg P(a) \vee Q(a)$
6. Cogemos ahora $\{\neg Q(x) \vee \neg T(x)\}$ cambiando x por a
   $\neg P(a) \vee \neg T(a)$
7. Cogemos ahora $\{P(a)\}$
   $\neg T(a)$
8. Finalmente cogemos $\{T(a)\}$
   $\square$

Como hemos llegado a $\square$; Γ^{**} es **insatisfacible**, por lo que β **es consecuencia lógica** de α_1 y de α_2

2.2 Consejo para Gestión de Cláusulas

Cuando no tenemos claro muy bien que cláusulas coger, vamos generando todos los resolventes posibles hasta, o encontrar que un $\Sigma_n = \Sigma_{n-1}$, hasta llegar a $\square$ o si encontramos algún bucle infinito. Ejemplo
$\Sigma_0 = \{A(b), \neg M(y) \vee P(b, y), \neg P(x, z), M(a), C(a)\}$
Solo podemos generar resolventes cuyas cláusulas tengan literales en común
$\Sigma_1 = \{A(b), \neg M(y) \vee P(b, y), \neg P(x, z), M(a), C(a) \neg M(z), P(b, a)\}$
Como no hemos llegado a ninguna de las posibilidades, seguimos
$\Sigma_2 = \{A(b), \neg M(y) \vee P(b, y), \neg P(x, z), M(a), C(a) \neg M(z), P(b, a), \square\}$
Hemos llegado a la clausula vacía, Σ no es satisfacible.

2.3 Deducciones lineales

Una deducción es lineal si en el cálculo de cada una de las resolventes se ha usado la resolvente obtenida en el paso anterior.

2.4 Estrategias inicio deducción

- Estrategia **Unit**. El objetivo es hacer resolventes con las cláusulas pequeñas.
- Estrategia **input**. En el cálculo de cada resolvente hay que utilizar una cláusula del conjunto Σ
- Estrategia **cláusulas de Hornn**. Si tenemos una conjunto como conjunto de Hornn, si seguimos una estrategia lineal-input llegamos siempre a la $\square$