LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

13 de Julio de 2023

Apellidos y nombre:______________________________________ **D.N.I.:**________________

Indica el grupo al que perteneces: A B C D E F Doble Grado (Inf + ADE)

Todas las respuestas han de estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1

1. Determina cuántos números naturales n hay menores que 240 para los que el conjunto $D(n)$ (divisores positivos de n) es un álgebra de Boole (con las operaciones `mcd` y `mcm`) y que cumplen cada una de las siguientes condiciones (por separado):
   a) $6 \in D(n)$.
   b) $6 \in D(n)$, $39 \in D(n)$ y $\overline{6} = 39$.
   c) $6 \in D(n)$, $17 \in D(n)$ y $\overline{17} = 6$.
2. Sea B un álgebra de Boole y $x, y, z \in B$. Estudia si la siguiente afirmación es necesariamente cierta:

   $$\text{Si } x < y \text{ y } z > 0 \text{ entonces } x\,z < y\,z.$$

3. Sean a, b dos números naturales menores que 4, y sean $(xy)_2$ y $(zt)_2$ las expresiones binarias de a y b respectivamente. Definimos la siguiente función booleana $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$:

   $$f(x, y, z, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{si } a > b \end{cases}$$

   Calcula una expresión booleana lo más reducida posible de f como suma de producto de literales.

Ejercicio 2

Sea $\alpha = (a \to \neg b) \to \big[(\neg a \to \neg c) \to \big((\neg c \to b) \to [a \vee \neg b \vee c \to a \wedge \neg b \wedge c]\big)\big]$.

Demuestra, sin hacer uso de las tablas de verdad, que α es una tautología.

Ejercicio 3

1. Expresa en un lenguaje de primer orden el siguiente enunciado:

   Los amigos del abuelo paterno de Antonio son amigos de Begoña.

   Utiliza para ello un lenguaje en el que tengamos dos símbolos de constante a, b y dos símbolos de predicado binario A, P y la estructura siguiente:
   - Dominio: Personas.
   - Asignación de constantes: $a = \mathrm{Antonio}$, $b = \mathrm{Begoña}$.
   - Asignación de predicados: $P(x, y) \equiv x$ es padre de y, $A(x, y) \equiv x$ es amigo de y.
2. Consideramos el siguiente lenguaje de primer orden $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$, donde:
   - $\mathcal{C} = \{\}$.
   - $\mathcal{F} = \{s^2\}$.
   - $\mathcal{R} = \{M^2, P^2\}$.

   Y consideramos la siguiente estructura $\mathcal{E}$:
   - **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
   - **Asignación de funciones:** $s(x, y) = x + y$.
   - **Asignación de predicados:** $M(x, y) \equiv x < y$; $P(x, y) \equiv x = y$.

   Calcula el valor de verdad de la fórmula $\forall x \forall y (\exists z P(s(x, z), y) \to M(x, y))$.

Ejercicio 4

Sean:

1. $\alpha_1 = \forall x(\exists y(R(x, y) \wedge T(x, y)) \to P(x))$.
2. $\alpha_2 = \exists x(\neg Q(x) \wedge \forall y(\neg S(y) \to T(x, y)))$.
3. $\alpha_3 = \forall x(\forall y(S(y) \vee \neg R(x, y)) \to Q(x))$.

4. $\alpha_4 = \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

Comprueba que α_4 es consecuencia lógica de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$.

Ejercicio 5

1. Sea f_n la sucesión de Fibonacci (es decir, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$). Demuestra que f_{4n} es múltiplo de 3 para cualquier $n \geq 0$.
2. Sea x_n la sucesión dada por $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 5 \cdot (-1)^n$ para $n \geq 2$. Calcula una expresión cerrada, en la que sólo aparezcan números reales, para x_n.

Ejercicio 6

Sea G el grafo cuya matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Constesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. ¿Tiene G un camino o un circuito de Euler?
2. ¿Tiene G un ciclo de Hamilton?
3. ¿Es G un grafo plano?
4. ¿Cuál es el número cromático de G?
5. ¿Es G un grafo bipartido?
6. ¿Cuántos caminos de longitud 2 hay del vértice v_3 al vértice v_6?