

LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

Examen de Incidencias

22 de Junio de 2023

Apellidos y nombre: _____ D.N.I.: _____

Indica el grupo al que perteneces: A B C D E F Doble Grado (Inf + ADE)

Todas las respuestas han de estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1

Sean $f, g : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$ las funciones booleanas dadas por $f(y, z, t) = y \cdot z + y \cdot t + \bar{y} \cdot \bar{t} + z \cdot \bar{t}$; y la función $g(y, z, t) = y + \bar{t}$, y sea $h : \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ la función:

$$h(x, y, z, t) = \begin{cases} f(y, z, t) & \text{si } x = 0 \\ g(y, z, t) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de h , es decir, como suma de productos.
2. Enumera todos los implicantes primos de h .
3. Proporciona una expresión reducida o minimal, como suma de productos de literales.
4. Encuentra todas las minimizaciones posibles de la función h como suma de productos de literales.

Ejercicio 2

Sea $\Gamma = \{a \rightarrow c \vee d; b \wedge \neg c \rightarrow c; c \rightarrow a \vee d; \neg d \wedge \neg e \rightarrow a; a \rightarrow \neg c; b \rightarrow \neg a; d \rightarrow a \vee b; e \rightarrow a \vee e\}$.

1. Estudia si $\alpha = a \wedge d \rightarrow b$ es o no es consecuencia lógica del conjunto Γ , es decir $\Gamma \models \alpha$?
2. ¿Es $\neg \alpha$ consecuencia lógica de Γ ? Es decir, $\Gamma \models \neg \alpha$?

Ejercicio 3

Sea $\alpha = \forall x \exists y (Q(x, y) \wedge Q(y, s(x)))$ una fórmula de un lenguaje de primer orden. Consideramos la estructura siguiente:

- Dominio: Números naturales (\mathbb{N}).
- Asignación de funciones: $s(z) = z + 1$.
- Asignación de predicados: $Q(x, y) \equiv x < y$.

Calcula el valor de verdad de α en esta estructura. Si cambiamos el dominio por los números reales \mathbb{R} , ¿qué valor de verdad tiene ahora la fórmula α ?

Sea $\beta = \forall x \forall y (\forall z (\neg Q(z, x) \wedge \neg P(x)) \longrightarrow \neg Q(x, x) \vee Q(x, f(y)))$.

Estudia si β es universalmente válida, contingente (satisfacible y refutable) o contradicción.

Ejercicio 4

1. Dadas las fórmulas

- $\alpha = P(g(f(x), u), f(a), g(z, f(y)))$
- $\beta = P(g(f(f(y)), g(v, a)), f(v), g(g(v, b), x))$

de un lenguaje de primer orden. Donde:

- Símbolos de constante: a, b .
- Símbolos de variable: x, y, z, u, v .
- Símbolos de función: f, g .
- Símbolos de predicado: P .

Decide si son unificables las fórmulas α y β , y en caso de serlo proporcione un unificador principal.

2. Consideramos las fórmulas siguientes de un lenguaje de primer orden:

$$\alpha_1 = \forall x \neg Q(x) \rightarrow \forall y (P(y) \rightarrow M(y))$$

$$\alpha_2 = \exists x Q(x) \rightarrow \neg \exists y Q(y)$$

$$\alpha_3 = \forall x (P(x) \leftrightarrow M(x))$$

$$\beta = \forall x (\neg P(x) \vee M(x)).$$

Estudia si β es o no consecuencia lógica del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

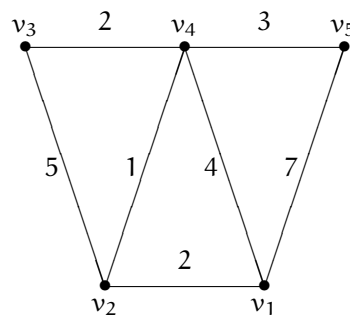
Ejercicio 5

1. Suponga que tenemos una alberca y que en ella dejamos un nenúfar con la capacidad, tanto suya como de sus descendientes, de producir dos nuevos por cada día. Si la alberca queda cubierta en 60 días, ¿Cuánto tardaría en quedar cubierta si se hubiese dejado en la alberca el primer día cuatro nenúfares en lugar de uno?
2. Demuestra, aplicando inducción sobre n , que el polinomio cromático del grafo ciclo C_n es:

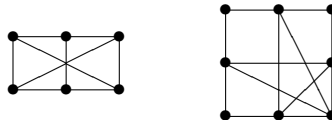
$$p(C_n, x) = (x - 1)^n + (-1)^n (x - 1), \text{ para } n \geq 3.$$

Ejercicio 6

1. Aplica el algoritmo de Dijkstra al grafo ponderado siguiente utilizando el vértice v_1 y determina el camino más corto que une v_1 con v_5 :



2. Encuentra un árbol generador de peso mínimo para el grafo ponderado del apartado anterior.
3. Determina cuáles de los siguientes grafos son planos, y en caso de serlo proporcione una representación plana del mismo:



4. Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer $(4, 4, 5, 4, 2, 2)$.
5. Un grafo bipartido completo tiene 1643 lados. ¿Cuántos vértices puede tener?