Tema 5. Inducción y recurrencia

Asignatura: ***Lógica y Métodos Discretos***
Wuolah: Bl4ckTyson

Voy a intentar hacer un documento resumido de manera enriquecida. El resumen contendrá información de diapositivas, ejercicios, vídeos...

Bl4ckTyson

2024

Contents

1 Inducción

1.1 Principio de Inducción

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ para el que:

- $0 \in A$
- Si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$

Entonces, $A = \mathbb{N}$
Si queremos demostrar que una propiedad es cierta para todos los números naturales, este es el procedimiento:

1. Caso base: demostramos que P(0) es cierto.
2. Hipótesis de inducción: Asumimos que P(n) es cierto para un número natural n.
3. Paso inductivo: Demostramos que P(n−1) es cierto para un número natural $n \geq 1$
4. Si esto se demuestra, P(n) es cierto para cualquier n

1.1.1 Ejemplo principio de inducción

$2^0 = 1 = 2^1 - 1$
$2^0 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1$
$2^0 + 2^1 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15 = 2^4 - 1$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31 = 2^5 - 1$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63 = 2^6 - 1$

$$2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Comprobemos por inducción

1. Caso base: $2^0 = 2^1 - 1$. Cierto.
2. Hipótesis de inducción: $2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$
3. Paso inductivo: ¿$2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$?
   $2^0 + 2^1 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

1.2 Segundo principio de inducción

Consideramos la siguiente sucesión:
$x_0 = 0$
$x_1 = 1$
$x_2 = 1 = 1 + 2 \cdot 0$
$x_3 = 3 = 1 + 2 \cdot 1$
$x_4 = 5 = 3 + 2 \cdot 1$
$x_5 = 11 = 5 + 2 \cdot 3$
$x_6 = 21 = 11 + 2 \cdot 5$
$x_7 = 43 = 21 + 2 \cdot 11$
$x_n = x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2}$ Comprobemos que $x_n < 2^n$

- Caso base: $x_0 = 0$ y $2^0 = 1$. Cierto.
- Hipótesis de inducción: $x_n < 2^n$
- Paso inductivo: ¿$x_{n+1} < 2^{n+1}$?
  $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} < 2^n + 2x_{n-1} <?$

Como no sabemos nada sobre x_{n-1} no podemos seguir. Necesitamos modificar el principio de inducción.

Teorema 1 *Para cada número natural n tenemos un enunciado $P(n)$. Si :*
P(0) es cierto.
Para cada $n \geq 1$, p(0), P(1), ... ,P(n-1) $\implies$ P(n)
Entonces $P(n)$ es cierto para cualquier $n \in \mathbb{N}$

Volvamos a comprobar la cuestion anterior
Vamos a comprobar que $x_n < 2^n$.

- Casos base: $x_0 = 0$ y $2^0 = 1$. Es claro que $x_0 < 2^0$. Cierto.
  $x_1 = 1$ y $2^1 = 2$. Es claro que $x_1 < 2^1$. Cierto.
- Hipótesis de inducción: $x_{n-1} < 2^{n-1}$ y $x_{n-2} < 2^{n-2}$ (para $n \geq 2$)
- Paso Inductivo: ¿$x_n < 2^n$?

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} < 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

2 Recurrencias lineales homogéneas:

2.1 Definición

Definimos tipo de recurrencia lineal homogénea como:
$x_n = -a_1 x_{n-1} - ... - a_{k-1} x_{n-k+1} - a_k x_{n-k}$; $n \geq k$.

- Se llama **lineal** porque todos los términos de la sucesión **aparecen elevados a uno.**
- Se llama homogénea porque **no aparece ningún otro término además de los de la sucesión**.
- Se dice con coeficientes constantes porque **lo que multiplica a cada término es siempre lo mismo** (no depende de n)

2.2 Extracción de su polinomio característico

Partimos por ejemplo de $f_n = fn - 1 + fn - 2$
Su polinomio característico sería $p(x) = x^2 - x - 1$

2.3 Cálculo de expresión explícita

Partimos por ejemplo de: $x_n = 2x_{n-1} + 5x_{n-2} - 6x_{n-3}$
Ademas: $x_0 = 4$, $x_1 = 1$. $x_2 = 7$
Vamos a sacar la forma de la solución: Tenemos $x_n = 2x_{n-1} + 5x_{n-2} - 6x_{n-3}$
Sacamos las raices pasando todos los términos a un lado y quedandonos con los coeficientes y la r:
$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$
Calculamos por ruffini:
Con $r = 1$ tenemos una solución:

	1	-2	-5	6
1		1	-1	6
	1	-1	-6	**0**

Ahora mismo tenemos $(r - 1) \cdot (r^2 - r - 6)$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6}}{2}$$

Aqui extraemos que las raices son:

- $r = 1$
- $r = 3$
- $r = -2$

Con esto ya podemos sacar la solucion general:
$x_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n + C \cdot 1^n$

- Para $n = 0$:
  $4 = x_0 = a \cdot 3^0 + b \cdot (-2)^0 + c = a + b + c$
- Para $n = 1$:
  $1 = x_1 = a \cdot 3^1 + b \cdot (-2)^1 + c = 3a - 2b + c$
- Para $n = 2$
  $7 = x_2 = a \cdot 3^2 + b \cdot (-2)^2 + c = 9a + 4b + c$

La solución de este sistema es $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$
Por tanto $x_n = 0 \cdot 3^n + 1 \cdot (-2)^n + 3$

3 Recurrencias lineales no homogéneas

3.1 Ejemplo de cálculo

Sea x_n la sucesión dada por $x_0 = 2$, $x_n = 3x_{n-1} + 2^n - 6$

1. Hallamos polinomio característico de la parte homogénea:
   $x_n - 3x_{n-1} = 0$
   De aqui extraemos que el polinomio característico es $(x - 3)$
2. La función no homogénea la vamos a escribir como
   $1 \cdot 2^n + (-6) \cdot 1^n$ç
3. El polinomio característico general es
   $(x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)$
4. Esto se puede escribir como
   $x_n = a \cdot 3^n + b \cdot 2^n + c$
5. Calculamos a,b,c hallando los 3 primeros términos de la sucesión y planteamos un sistema de ecuaciones.
   - $x_0 = 2$
   - $x_1 = 3 \cdot x_0 + 2 - 6 = 2$
   - $x_2 = 3 \cdot x_1 + 2^2 - 6 = 4$

   $$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ 3a + 2b + c = 2 \\ 9a + 4b + c = 4 \end{array}\right\}$$

   De aqui extraemos que la solución es $a = 1$, $b = -2$ y $c = 3$

Por tanto la experesión es $x_n = 3^n - 2^{n+1} + 3$

Vamos a calcular otro ejemplo
La sucesion es dada por
$x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_n = 4x_{n-2} + n \cdot 2^{n+2}$

1. Sacamos el polinomio característico de la parte homogénea:
   $x^2 - 4 = (x+2) \cdot (x-2)$
2. Como la parte no homogénea es $f(n) = n \cdot 2^n$, que es un polinomio de grado 1(4n) por u nexponencial, esto equivale a $(x-2)^{1+1}$
3. De aqui extraemos que el polinomio característico es:
   $(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-2)^2 = (x+2) \cdot (x-2)^3$
4. Entonces x_n la podemos escribir como:
   $x_n = a \cdot (-2)^n + b \cdot 2^n + cn \cdot 2^n + dn^2 \cdot 2^n$
5. Ya que tenemos las 2 primeras soluciones. Vamos a resolver las siguientes y planteamos el sistema.
   - $x_0 = 1$
   - $x_1 = 0$
   - $x_2 = 4 \cdot x_0 + 2 \cdot 2^{2+2} = 36$
   - $x_3 = 2 + 2^{3+2} = 96$

   De aqui podemos extraer el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 1 \\ -2a + 2b + 2c + 2d = 0 \\ 4a + 4b + 8c + 16d = 0 \\ -8a + 8b + 24c + 72d = 96 \end{array}\right\}$$

   Resolviendo este sistema, obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -2 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

   Por tanto, la expresión es $x_n = 3 \cdot (-2)^n - 2 \cdot 2^n + n^2 \cdot 2^n$.