LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

27 de Junio de 2022

Apellidos y nombre:____ **D.N.I.:**______________

Indica el grupo al que perteneces:
Grado en Ingeniería Informática (C)
Grado en Ingeniería Informática (F)
Doble Grado en Ingeniería Informática y Administracion y Dirección de Empresas

Todas las respuestas han de estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1

Sean $f, g : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ *las funciones booleanas definidas como:*

$$f(x,y,z) = (x \uparrow yz)(\overline{x \downarrow (y+z)}); \qquad g(x,y,z) = x \oplus y + \overline{x}\,\overline{z}.$$

Y sea $h : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ *la función dada por:*

$$h(x,y,z,t) = \begin{cases} f(x,y,z) & si\ z = t \\ g(x,y,z) & si\ z \neq t. \end{cases}$$

1. *Calcula todos los implicantes primos de* f*.*
2. *Da la forma normal canónica conjuntiva de* g*.*
3. *Calcula una expresión como suma de productos de literales de* h *lo más reducida posible.*
4. *Expresa* f *usando únicamente los operadores* `NOT` *y* `OR`*.*

Ejercicio 2

Sea n *un número natural. Sabemos que* $D(n)$ *es un álgebra de Boole con* 16 *elementos,* $10 \in D(n)$, $35 \in D(n)$ *y* $21 \notin D(n)$.

1. *Calcula un posible valor de* n*.*
2. *Determina todos los elementos* $x \in D(n)$ *tales que* $2 \vee x = 10$ *y* $70 \wedge \overline{x} = 14$.

Ejercicio 3

Sea $\Gamma = \{b \wedge e \to a \wedge d,\ a \wedge e \to b,\ a \vee b \vee c \vee d,\ a \wedge \neg c \to e \vee \neg b,\ a \wedge e \to c,\ b \to c \vee d\}$.
Estudia si $a \vee b \to c$ *y* $a \wedge b \to c$ *son o no consecuencia lógica de* Γ.

Ejercicio 4

1. *Sea* $\alpha = \exists x M(a,x) \to \forall x \exists y (M(y,x) \wedge Q(y,x))$ *una fórmula de un lenguaje de primer orden. Consideramos la estructura siguiente:*
   - *Dominio: Números naturales (*$\mathbb{N}$*).*
   - *Asignación de constantes:* $a = 1$.

- *Asignación de predicados:* $Q(x,y) \equiv x < y$; $M(x,y) \equiv x$ *es múltiplo de* y.

Calcula el valor de verdad de α *en esta estructura..*

2. *Sea* $\beta = \forall x \forall y(P(x,x) \wedge \neg P(x,f(y)) \to \exists z(Q(x) \vee P(z,x)))$.
   Estudia si β *es universalmente válida, contingente (satisfacible y refutable) o contradicción.*

Ejercicio 5
Consideramos las siguientes fórmulas:

$\alpha_1 = \forall x(R(x) \wedge T(x) \to \exists y(P(x,y) \wedge Q(y)))$.

$\alpha_2 = \forall x(S(x) \to T(x) \wedge \neg Q(x))$.

$\beta = \forall x(S(x) \wedge R(x) \to \neg \forall y(P(x,y) \to S(y)))$.

Estudia si β *es consecuencia lógica de* α_1 *y* α_2.

Ejercicio 6
Sea $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{n}{2^n}$.
Demuestra por inducción que $x_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Ejercicio 7
Sea u_n *la sucesión definida por:*

$$u_0 = -1; \qquad u_n = 2u_{n-1} + 2^n + 3.$$

1. *Calcula los términos* u_1, u_2, u_3, u_4

2. *Encuentra una recurrencia lineal homogénea para* u_n.

3. *Calcula una expresión no recurrente para* u_n.

Ejercicio 8
Sea G *un grafo conexo plano (sin lazos ni lados paralelos).*
El grafo G *tiene* 2 *vértices de grado* 2*,* 3 *vértices de grado* 3*,* 1 *vértice de grado* 5 *y el resto, vértices de grado* 4*.*
Al hacer una representación plana del grafo, se divide el plano en 7 *regiones. ¿Cuántos vértices y cuántos lados tiene* G*?*

Ejercicio 9 *Calcula cuántos lados habría que suprimir (como mínimo) en el grafo* K_{24} *para:*

1. *Tener un grafo de Euler.*

2. *Tener un grafo de Hamilton.*

3. *Tener un grafo bipartido.*

4. *Tener un grafo plano.*

5. *Tener un grafo bipartido y plano.*

6. *Tener un grafo no conexo.*