Resumen Tema 1. Álgebras de Boole

Asignatura: ***Lógica y Métodos Discretos***
Wuolah: Bl4ckTyson

Voy a intentar hacer un documento resumido de manera enriquecida. El resumen contendrá información de diapositivas, ejercicios, vídeos...

Bl4ckTyson

2024

Contents

1 Generalidades de Algebra de Boole

1.1 Definicion

Sea B un conjunto distinto del vacío, B tiene una estructura lógica si en las operaciones de AND (x ∧ y) y del OR (x ∨ y) se cumplen las siguientes propiedades:

- **Asociativa**: $\begin{cases} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \end{cases}$ Para cualquier valor x,y,z ∈ B
- **Conmutativa**: $\begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$ Para cualquier valor x,y ∈ B
- **Distributiva**: $\begin{cases} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$ Para cualquier valor x,y,z ∈ B
- **Elementos neutros**. ∃0,1 ∈ B tal que: $\begin{cases} x \vee 0 = x \\ x \wedge 1 = x \end{cases}$
- **Complementarios**. Para cualquier $x \in B$, $\exists \overline{x} \in B$ tal que: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ x \wedge \overline{x} = 0 \end{cases}$

1.2 Principio de dualidad

Sea B un algebra de boole, donde tenemos las operaciones ∧ y ∨ consideramos: $\begin{cases} x \vee^d y = x \wedge y \\ x \wedge^d y = x \vee y \end{cases}$
Esto verifica que la propiedad dual es un álgebra de boole, además $0^d = 1$ y $1^d = 0$
Un enunciado es **autodual** cuando él es su propio dual.

1.3 Propiedades

- **Idempotencia**: $x \vee x = x$; $x \wedge x = x$
- **Dominacion**: $x \vee 1 = 1$; $x \wedge 0 = 0$
- **Absorción**: $x \vee (x \wedge y) = x$; $x \wedge (x \vee y) = x$
- **Cancelativa:** $\left.\begin{cases} x \vee y = x \vee z \\ x \wedge y = x \wedge z \end{cases}\right\} \Longrightarrow y = z.$
- **Doble Complementario**: $\overline{\overline{x}} = x$
- **Leyes de Morgan:** $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \end{cases}$

1.4 Orden en Álgebras de boole

En álgebras de boole, x $\leq y$ si $x \vee y = y$

2 Estructuras de Álgebra de boole finitas

2.1 Isomorfismos de álgebras de boole

Un isomofismo de álgebras de Boole es una funcion f que establece **correspondencia uno a uno** entre los elementos de dos álgebras de Boole.

2.2 Átomos y coátomos

2.2.1 Átomos:

Un átomo es un elemento minimal del cojunto $B \setminus \{0\}$. Un elemento es minimal cuando **no hay ningún elemento de menor orden** que dicho elemento.

2.2.2 Coátomos:

Un coátomo es un elemento maximal del conjunto $B \setminus \{1\}$. Un elemento es maximal cuando **no hay ningún elemento de mayor orden** que dicho elemento.

2.3 Teorema de estructura de álgebras de Boole finitas

Teorema 1 *Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B distinto de 0 se escribe de forma única como disyunción (supremo) de átomos.*

Teorema 2 *Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces, todo elemento de B distinto de 1 se escribe de forma única como conjunción de coátomos.*

3 Funciones Booleanas

Teorema 3 *Sea n un número natural mayor o igual que 1. Una función booleana en n variables* $f : \mathbb{B}^n \implies \mathbb{B}$. *Las funciones f+g y f*g se definen como:*

$$\begin{cases} (f+g)(x_1, x_2, ..., xn) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + g(x_1, x_2, ..., x_n) \\ (f*g)(x_1, x_2, ..., xn) = f(x_1, x_2, ..., x_n) * g(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

Estas operaciones siguen siendo un algebra de boole

3.1 Expresión para una función de f

Si S es un conjunto, se define:

- Si $x \in S \cup \{0, 1\}$ entonces x es una expresión booleana.
- Si e_1 y e_2 son expresiones booleanas, también lo son las operaciones con ambas.

Solo las expresiones que cumplen esto son booleanas.

3.2 Expresiones booleanas equivalentes

Sea S un cojunto con n elementos, dos expresiones booleanas e_1 y e_2 son **equivalentes si dan lugar a la misma funcion boolena** ($e_1 = e_2$)
Por ejemplo, las expresiones de las propiedades, $\overline{1} = 0$...
Los **átomos** son aquellas funciones booleanas que toman el **valor de 1** en un elemento de $\mathbb{B}^n$, por ende, los **coátomos** son aquellas funciones que toman el **valor de 0**

3.3 FORMA NORMAL CANÓNICA DISYUNTIVA

Toda función booleana puede escribirse de forma única como suma de sus minterms

3.3.1 Minterms

Un minterm es un **producto** de n **literales**, cada uno con una variable diferente. Un literal es un **elemento** de S **o su negado** $(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.
Ejemplo de minterm: $\{x\overline{z}\}, \{\overline{x}y\overline{z}\}$... Cada minterm representa un átomo de F_n.

3.3.2 Minterms $\mathbb{B}_4$

$m_0 \leftrightarrow \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	$m_4 \leftrightarrow \overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$	$m_8 \leftrightarrow x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$	$m_{12} \leftrightarrow x\,y\,\overline{z}\,\overline{w}$
$m_1 \leftrightarrow \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	$m_5 \leftrightarrow \overline{x}\,y\,\overline{z}\,w$	$m_9 \leftrightarrow x\,\overline{y}\,\overline{z}\,w$	$m_{13} \leftrightarrow x\,y\,\overline{z}\,w$
$m_2 \leftrightarrow \overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	$m_6 \leftrightarrow \overline{x}\,y\,z\,\overline{w}$	$m_{10} \leftrightarrow x\,\overline{y}\,z\,\overline{w}$	$m_{14} \leftrightarrow x\,y\,z\,\overline{w}$
$m_3 \leftrightarrow \overline{x}\,\overline{y}\,z\,w$	$m_7 \leftrightarrow \overline{x}\,y\,z\,w$	$m_{11} \leftrightarrow x\,\overline{y}\,z\,w$	$m_{15} \leftrightarrow x\,y\,z\,w$

3.3.3 Ejemplo de FNCD

- **Forma Normal Disyuntiva:**

$$f = x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\overline{y}z$$

3.4 FORMA NORMAL CANÓNICA CONJUNTIVA

Toda función booleana puede escribirse de forma única como producto de sus maxterms.

3.4.1 Maxterms

Un maxterm es una **suma** de n **literales**, cada uno con una variable diferente. Un literal es un **elemento** de S **o su negado** $(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.
Ejemplo de maxterm: $\{x + \overline{z}\}, \{\overline{x} + y + \overline{z}\}$... Cada maxterm representa una cláusula de F_n.

3.4.2 Maxterms $\mathbb{B}_4$

$M_0 \leftrightarrow x + y + z + w$	$M_4 \leftrightarrow x + \overline{y} + z + w$	$M_8 \leftrightarrow \overline{x} + y + z + w$	$M_{12} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + z + w$
$M_1 \leftrightarrow x + y + z + \overline{w}$	$M_5 \leftrightarrow x + \overline{y} + z + \overline{w}$	$M_9 \leftrightarrow \overline{x} + y + z + \overline{w}$	$M_{13} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + z + \overline{w}$
$M_2 \leftrightarrow x + y + \overline{z} + w$	$M_6 \leftrightarrow x + \overline{y} + \overline{z} + w$	$M_{10} \leftrightarrow \overline{x} + y + \overline{z} + w$	$M_{14} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + w$
$M_3 \leftrightarrow x + y + \overline{z} + \overline{w}$	$M_7 \leftrightarrow x + \overline{y} + \overline{z} + \overline{w}$	$M_{11} \leftrightarrow \overline{x} + y + \overline{z} + \overline{w}$	$M_{15} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + \overline{w}$

3.4.3 Ejemplo de FNCC

- **Forma Normal Conjuntiva:**

$$f = (x + y)(x + \overline{y})(\overline{x} + y)(\overline{x} + \overline{y})$$

3.5 Puertas lógicas

- **Puerta XOR:** $x \oplus y = \overline{x}y + x\overline{y}$
- **Puerta XNOR:** $\overline{x \oplus y} = xy + \overline{x}\,\overline{y}$
- **Puerta NAND:** $x \uparrow y = \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$
- **Puerta NOR:** $x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$

3.6 Mapas de karnaugh

El objetivo de los mapas de Karnaugh es el de **simplificar funciones booleanas**.
El proceso sería el siguiente:

1. El mapa de karnaugh será una **matriz MxN** como **combinación de literales** para M y para N, dependiendo del $\mathbb{B}$ en el que estemos.
   Por ejemplo, para $\mathbb{B}^4(x, y, z, t)$ tendremos un mapa 4x4, donde las columnas corresponderán a **z** y **t**, y las filas a **x** y a **y** (por ejemplo)

x,y \ z,t	00	01	11	10
00	m0	m1	m3	m2
01	m4	m5	m7	m6
11	m12	m13	m15	m14
10	m8	m9	m11	m10

2. El siguiente paso será pasar la función booleana a reducir como suma de minterms, es decir, pasarla a **FNCD**.
   Por ejemplo: $f = m_1 + m_4 + m_5 + m_9 + m_{12} + m_{13}$

3. Ahora hay que sustituir en el mapa de karnaugh por 1 aquellas casillas correspondientes a sus minterms

x,y \ z,t	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10		1		

4. Ahora hay que hacer agrupaciones. El criterio a seguir es que se deben de agrupar $\mathbf{2}^n$ casillas. Se tiene que intentar agrupar el mayor número de casillas. Se pueden repetir casillas seleccionadas solo si agrupa nuevas casillas.

x,y \ z,t	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10		1		

5. Por último, formamos la función reducida. Para ello **escogemos los unos cuyas variables se mantienen en toda la agrupación**.
   En nuestro caso sería: $f(x, y, z, t) = y\overline{z} + \overline{z}t$

6. Este proceso tiene su versión dual. Se pueden **agrupar Maxterm** siguiendo el mismo proceso, solo que reduciremos como suma de Maxterm, **agrupando 0 en lugar de 1**, extrayendo la **FNCC**.

3.7 Implicantes primos

G es un implicante de F si G $\leq$ F.
Un implicante primo es un tipo de implicante primo si al suprimir cualquiera de los literales del implicante, deja de serlo.
Esto pasado a un mapa de karnaugh, serían aquellos implicantes que no pertenecen a un bloque más grande, por eso al agrupar siguiendo esta técnica se obtiene funciones reducidas.

3.8 Quine McCluskey

3.8.1 Cálculo de Implicantes Primos

1. Se toman los minterm de f y se agrupan según el número de 1s
   Ejemplo: $f = m_3 + m_5 + m_7 + m_{11} + m_{13} + m_{15}$

2. Se ordenan en una columna de orden decreciente según el número de unos.

15	1111
13	1101
11	1011
7	0111
5	0101
3	0011

3. Se comparan las cadenas de un bloque con el inferior. Si se diferencian en **solo un bit** las marcamos, llevándolas a una columna a la derecha, dejando un espacio en el bit que difieren.
   En el ejemplo, tendríamos de primera mano

(13,15)	11-1
(11,15)	1-11
(7,15)	-111
(5,13)	-101
(3,11)	-011
(5,7)	01-1
(3,7)	0-11

   Y en segunda instancia tendríamos:

(5,7,13,15)	-1-1
(3,7,11,15)	–11

4. Las cadenas no marcadas son los implicantes primos

5. Estos implicantes primos se llevan a una tabla, donde se ve que minterms cubre.
   Aquellos minterms que solo se cubran con un implicante primo los conocemos como **implicantes primos esenciales**, y formarán parte de todas las versiones de la expresión reducida.
   Estos implicantes primos esenciales cubren también aquellos minterms de los cuales no son implicantes primos esenciales. Es decir, si xz es implicante primo que cubre m14, y además comparte con otro implicante para m5 (por ejemplo), m5 se considera cubierto también.
   El resto de minterms se estudian aparte, se simplifican aquellos dominados, y se tienen tantas versiones de expresión reducida como implicantes queden.

3.8.2 Metodo de petrick

Partimos de la función booleana $f = m_0+m_1+m_5+m_7+m_8+m_{10}+m_{11}+m_{13}+m_{14}+m_{15}$
Tenemos como implicantes primos esenciales: xz e yt que cubren: $m_5+m_7+m_{10}+m_{11}+m_{13}+m_{14}+m_{15}$
Nos quedan por cubrir $m_0+m_1+m_8$
Tenemos los implicantes primos $x\overline{y}\overline{t}, \overline{x}\overline{z}t, \overline{y}\overline{z}\overline{t}, \overline{x}\overline{y}\overline{z}$

1. Damos un nombre a cada implicante primo
   - A $= x\overline{y}\overline{t}$
   - B $= \overline{x}\overline{z}t$
   - C $= \overline{y}\overline{z}\overline{t}$
   - D $= \overline{x}\overline{y}\overline{z}$
2. Definimos una funcion booleana g: $\mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ Siendo las variables A,B,C,D
   La función tomará 1 cuando se cubran todos los minterm y 0 en caso contrario
   $g(A,B,C,D) =$
3. Cubrimos minterm m_0.
   Lo cubren tanto el C como el D, por tanto: $g(A,B,C,D) = (C+D)$
4. Cubrimos minterm m_1.
   Lo cubren tanto el B como el D, por tanto: $g(A,B,C,D) = (C+D)*(B+D)$
5. Por último cubrimos el minterm m_8
   Lo cubren tanto el A como el C, por tanto: $g(A,B,C,D) = (C+D)*(B+D)*(A+C)$
6. Escribimos la función g como suma de productos literales
   $g(A,B,C,D) = (C+D)*(B+D)*(A+C)$
   $g(A,B,C,D) = (CB+CD+DB+DD)*(A+C)$
   $g(A,B,C,D) = (D+CB)*(A+C)$
   $g(A,B,C,D) = DA+DC+CBA+CB$
   $g(A,B,C,D) = DA+DC+CB$
   $g(A,B,C,D) = AD+CD+BC$
7. Por último, podemos extraer 3 funciones reducidas de esta última función, utilizando los primos esenciales y cada uno de los sumandos.
   - $f(x,y,z,t) = xz+yt+x\overline{y}\overline{t}+\overline{x}\overline{y}\overline{z}$ (AD)
   - $f(x,y,z,t) = xz+yt+\overline{y}\overline{z}\overline{t}+\overline{x}\overline{y}\overline{z}$ (CD)
   - $f(x,y,z,t) = xz+yt+\overline{x}\overline{z}t+\overline{y}\overline{z}\overline{t}$ (BC)