Tema 3. Lógica de Predicados

Asignatura: ***Lógica y Métodos Discretos***
Wuolah: Bl4ckTyson

Voy a intentar hacer un documento resumido de manera enriquecida. El resumen contendrá información de diapositivas, ejercicios, vídeos...

Bl4ckTyson

2024

Contents

1 Sintaxis del lenguaje

1.1 Lenguajes de primer orden

1.1.1 Clasificación de sujetos

- El sujeto viene determinado por identificador propio (nombre).
- El sujeto es un objeto genérico.
- El objeto viene identificado por un identificador pero no propio.

1.1.2 Descripción del lenguaje

- Los elementos de $\mathcal{C}$ se les llama símbolos de **constante**. Se emplean minúsculas: $(a, b, c, a_1, a_2, ...)$
- Los elementos de $\mathcal{V}$ se les llama símbolos de **variable**. Se emplean las últimas letras del alfabeto:
$(x, y, z, x_1, x_2, ..)$
- Los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama símbolos de **función**. Cuenta con un número de aridad distinto de 0. Se emplean las letras f,g,h... con subíndices si fuera necesario y superíndices (opcional) para expresar la aridad.
$(f, g, h, f_1, f_2^3, ...)$
- Los elementos de $\mathcal{R}$ se les llama símbolos de **predicado**. Cuenta con un número de aridad. Se emplean letras mayúsculas, siendo posible utilizar superíndices para expresar la aridad:
$(P, Q, R, P^2, Q^1, ...)$
- Los elementos del conjunto $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ se consideran **conectivas**.
- Los elementos del conjunto $\{\forall, \exists\}$ son **cuantificadores**, siendo $\forall$ **cuantificador universal** y $\exists$ el **cuantificador existencial**.
- Consideramos los paréntesis y corchetes como auxiliares pero **NO** como símbolos.

1.2 Sintaxis en lenguajes de primer orden

1.2.1 Términos

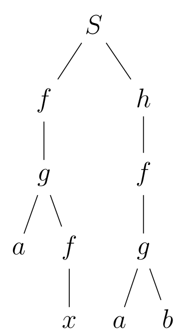
- Todo $\mathcal{C}$ es un término.
- Todo $\mathcal{V}$ es un término.
- Si $\mathcal{F}$ es un n-ario y sus elementos son términos, entonces $\mathcal{F}$ es un término.
- Todo aquello que no siga estas reglas, no es un término.

Unos ejemplos serían: a, f(a), f(f(a))...

1.2.2 Fórmulas atómicas

Para que una fórmula sea atómica, el predicado debe ser n-ario y los elementos del mismo tienen que ser términos. **Un predicado nunca puede ser un elemento de otro**.
Por ejemplo: P(a,x), R(g(x,f(y))....

Representacion de árbol: $S(f(g(a, f(x))), h(f(g(a, b))))$



1.3 Fórmulas de lenguaje de primer orden

- Toda fórmula atómica es fórmula del lenguaje.
- Si α y β son fórmulas de lenguaje, entonces tambien lo son: $\{\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \rightarrow \beta, \alpha \leftrightarrow \beta, \neg\alpha\}$
- Si α es fórmula del lenguaje y x es un símbolo de variable, entonces son fórmulas: $\{\forall x\alpha\}\{\exists x\alpha\}$
- Todo objeto que no siga esto, no es fórmula del lenguaje.
- A la hora de escribir fórmulas, las conectivas **siguen las reglas de prioridad de las conectivas que vimos en lógica proposicional**.
- Los cuantificadores tienen prioridad sobre las conectivas.

1.4 Subfórmulas

Si α es fórmula atómica, entonces $Sub(\alpha) = \{\alpha\}$. Esto ocurre con el resto de conectivas y cuantificadores.

1.5 Radio de accion de un cuantificador

El radio de acción de un cuantificador se entiente como la **subfórmula de β que acompaña al cuantificador**. Por ejemplo:
$\beta = \forall x \neg R(g(x, a)) \rightarrow \exists y(S(g(b, y), f(x)) \wedge \neg Q(x, y, h(x)))$
$\forall x$ afecta a: $\neg R(g(x, a))$
$\exists y$ afecta a: $S(g(b, y), f(x)) \wedge \neg Q(x, y, h(x))$

1.5.1 Variables libres y ligadas

Una variable es **ligada** si está en el **radio de acción de un cuantificador**, en caso contrario, es una variable **libre**.
Dado que la variable puede aparecer más de una vez, puede ser que en algunas ocasiones pueda estar ligada o no. En el ejemplo anterior:

- $\beta = \forall x \neg R(g(x,a)) \to \exists y(S(g(b,y), f(x)) \wedge \neg Q(x,y,h(x)))$
- $\forall x$ afecta a: $\neg R(g(x,a))$. Como ese para todo x afecta solo a esa subfórmula, por ejemplo los x que encontramos en $S(g(b,y), f(x)) \wedge \neg Q(x,y,h(x))$ no están en el rango de acción y por tanto son libres.
- $\exists y$ afecta a: $S(g(b,y), f(x)) \wedge \neg Q(x,y,h(x))$. Dado que en β son todas las y que encontramos, podríamos afirmar que todas las variables y son ligadas.

1.6 Sentencias

Una sentencia es una fórmula de un lenguaje de primer orden en la cual todas sus variables son ligadas.

2 Semántica del lenguaje

2.1 Estructuras

Una estructura $\mathcal{E}$ consiste en:

- **Dominio** (D): Conjunto distinto del vacío
- Para cada $a \in \mathcal{C}$ un elemento $a^{\mathcal{E}} \in D$
- Para cada símbolo de función n-ario, una aplicación $f^{\mathcal{E}} : D^n \to D$
- Para cada símbolo de predicado n-ario, una aplicación $P^{\mathcal{E}} : D^n \to \mathbb{Z}_2$
  Ejemplo: Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje dado por $\mathcal{C} = \{s, a\}$, $\mathcal{F} = \{p^1, m^1\}$, y $\mathcal{R} = \{M^1, In^1, T^1, A^2\}$
  Sea $\mathcal{E}$ la $\mathcal{L}$-estructura siguiente:
  - El dominio es el conjunto de todas las personas.
  - $s =$ Sócrates y $a =$ Aurora
  - $p(x) =$ padre de x y $m(x) =$ madre de x
  - Asignación de predicados:

$$M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es mortal.} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
$$In(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es inteligente.} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es trabajador.} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
$$A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es amigo de } y. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2.2 Valoraciones e interpretaciones

Una valoración es una **aplicación de una variable sobre el dominio**.
Una **interpretación es un par**$(\mathcal{E}, v)$ **donde** $\mathcal{E}$ **es una estructura y v es una valoración**.

2.3 Valor de verdad de una fórmula atómica

Consideramos el siguiente lenguaje de primer orden:
$\mathcal{L}$ el lenguaje dado por $\mathcal{C} = \{a, b\}$,$\mathcal{V} = \{x, y, z\}$ $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$, y $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$
Consideramos la $\mathcal{E}$ definida por:

- $D = n$
- $a = 0$
- $b = 1$
- $s(x) = x + 1$
- $m(x, y) = x \cdot y$
- $P(x) \equiv x$ es par
- $Pr(x) \equiv x$ es primo
- $M(x, y) \equiv x < y$
- $Eq(x, y) \equiv x = y$

Consideramos las valoraciones:

- $v(x) = 3$
- $v(y) = 7$
- $v(z) = 5$

Comprobemos las siguientes fórmulas atómicas

- $P(a) \implies I(P(a)) = 1$ ya que $v(a) = 0$ y 0 es un número par.
- $Pr(s(b) \implies I(Pr(s(b))) = 1$ ya que $s(b) = 1 + 1 = 2$ y 2 es primo.
- $M(s(s(y)), m(x, s(b))) \implies I(M(s(s(y)), m(x, s(b)))) = 0$ ya que $s(s(y)) = 9$ y $m(x, s(b)) = 6$, por tanto como $9 >= 6$ es falso.

2.3.1 Valor de verdad de las conectivas en una interpretación

- $I(\alpha \vee \beta) = I(\alpha) + I(\beta) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$
- $I(\alpha \wedge \beta) = I(\alpha) \cdot I(\beta)$
- $I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$
- $I(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\beta)$
- $I(\neg\alpha) = 1 + I(\alpha)$
- $I(\forall x\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si para cualquier elemento se tiene que } \mathrm{I}^{\forall x}(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- $I(\exists x\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si para cualquier elemento se tiene que } \mathrm{I}^{\exists x}(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

2.4 Traducciones. Ejemplos

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje dado por $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{d^1, s^2, p^2\}$, y $\mathcal{R} = \{Q^1, M^2\}$

- Dominio $D = \mathbb{R}$.
- $a = 0$, $b = 1$.
- $d(x) = 2x$, $s(x, y) = x + y$, $p(x, y) = x \cdot y$.
- $Q(x) \equiv x \in \mathbb{Q}$, $M(x, y) \equiv x > y$.

Vamos a expresar por ejemplo el enunciado: "El doble de un número irracional es irracional".

1. "El doble de un número irracional es irracional"
2. Si x es un número irracional, su doble es irracional.
3. Si x es irracional, entonces 2x es irracional.
4. Si $x \notin \mathbb{Q}$ entonces $d(x) \notin \mathbb{Q}$
5. $\neg Q(x)$ implica $\neg Q(d(x))$
6. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg Q(d(x)))$

Cabe destacar que siempre que hablemos de un enunciado general hay que utilizar el $\forall x$

2.5 Lema de coincidencia

Si α es una sentencia, el **valor** de verdad de α **depende únicamente de la estructura y no de la valoración**.

2.5.1 Clasificación semántica de las fórmulas

- α es universalmente válida si para cualquier estructura $\mathcal{E}$ y para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 1$
- α es válida en $\mathcal{E}$ si para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 1$
- α es satisfacible en $\mathcal{E}$ si existe una valoración la cual $I(\alpha) = 1$
- α es refutable en $\mathcal{E}$ si existe una valoración la cual $I(\alpha) = 0$
- α no es válida en $\mathcal{E}$ si para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 0$
- α es una contradicción si para cualquier estructura $\mathcal{E}$ y para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 0$

3 Implicación semántica

3.1 Conjuntos satisfacibles e insatisfacibles

Decimos que Γ es **satisfacible** si existe una **interpretacion** para que **todas las fórmulas** de Γ son **verdaderas**.
Γ es insatisfacible si para cualquier interpretación existe una $\gamma_1 = 0$

3.2 Implicación Semántica

Decimos que α es **consecuencia lógica** de Γ si para **cualquier interpretación** para la que sean **verdaderas** todas las fórmulas de γ se tiene que $I(\alpha) = 1$

3.3 Silogismos

Un silogismo es un argumento formado por tres enunciados, el cual el tercero se deduce de los dos anteriores. Los dos primeros son **premisas** y el tercero el **consecuente**.
Existe dos términos (S y P) y un término medio (M). Las dos premisas relacionan los términos S y P con el término medio M.
Ejemplo

- Todo hombre es mamífero (premisa 1)
- Todo hombre es inteligente (premisa 2)
- Existen mamíferos inteligentes si existen hombres (consecuente).

3.4 Teoremas refutación y deducción

Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden y α una fórmula del lenguaje, si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.
Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden, y α y β dos fórmulas del mismo lenguaje, si $\Gamma \models \alpha \to \beta$ entonces $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

4 Equivalencia lógica

En un lenguaje de primer orden, decimos que α y β son **lógicamente equivalentes si para cualquier interpretación se tiene que** $I(\alpha) = I(\beta)$

- α y β son lógicamente equivalentes.
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ es universalmente válida.
- $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \alpha$ son universalmente válidas.
- $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$.
- Los conjuntos $\{\alpha, \neg\beta\}$ y $\{\neg\alpha, \beta\}$ son insatisfacibles.

Es posible sustituir variables **libres** por términos. Ejemplo:
$\alpha = \forall x(\exists y R(x, f(y)) \to P(y, x))$
Por ejemplo, para sustituir y por z, podremos sustituir la sección de $\to P(y, x)$ ya que esa variable y es una variable libre, pero no podremos sustituir f(y) por f(z) ya que está ligada al $\exists y$

4.1 Negación y cuantificadores

Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden, entonces $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$
De forma análoga, $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$

4.2 Inclusión de conectivas en el radio de acción de un cuantificador

Si x no aparece libre en β

- $\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
- $\forall x \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$
- $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$
- $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$
- $\forall x\alpha \to \beta \equiv \exists x(\alpha \to \beta)$
- $\exists x\alpha \to \beta \equiv \forall x(\alpha \to \beta)$
- $\alpha \to \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \to \beta)$
- $\alpha \to \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \to \beta)$

4.3 Eliminacion de cuantificadores

- Si **no existe ninguna aparicion libre** del símbolo de una variable libre, **se puede quitar sus cuantificadores**.
- Esto si afecta a la aparición de cuantificadores. Por ejemplo $\forall x\forall x\alpha \equiv \forall x\alpha$. Igual con $\exists$. Siempre que haya 2 cuantificadores de este estilo, se mantiene el que aparezca en segundo lugar.

4.4 Agrupar cuantificadores

- $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
- $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$

4.5 Intercambio de cuantificadores

- $\forall x\forall y\alpha \equiv \forall y\forall x\alpha$
- $\exists x\exists y\alpha \equiv \exists y\exists x\alpha$

5 Formas normales

5.1 Forma normal prenexa

Decimos que α está en forma normal prenexa si **todos sus cuantificadores aparecen al principio de la fórmula**.
Por ejemplo: $\exists x\exists y(S(x,y) \to R(b))$

5.1.1 Ejemplo de cálculo de forma normal prenexa

Sea $\alpha = \forall xS(x) \to \exists z\forall yR(z,y) \equiv$
$\equiv \neg\forall xS(x) \vee \exists z\forall yR(z,y) \equiv$
$\equiv \exists x\neg S(x) \vee \exists z\forall yR(z,y) \equiv$
$\equiv \exists x(\neg S(x) \vee \exists z\forall yR(z,y) \equiv$
$\equiv \exists x\exists z(\neg S(x) \vee \forall yR(z,y) \equiv$
$\equiv \exists x\exists z\forall y(\neg S(x) \vee R(z,y)$
Ya está en forma normal prenexa

5.2 Forma normal de Skolem

α está en **forma normal de Skolem** si está en **forma prenexa** y **no** existe ningún **cuantificador existencial**.
Ejemplo: $\forall x\forall y(P(x,f(x)) \vee (Q(y,b))$
La forma normal de Skolem **no es única**, por lo que hablaremos como una forma normal de Skolem y no la única.

5.2.1 Cálculo de forma normal de Skolem

Partimos de la forma normal prenexa que teníamos anteriormente:
$\equiv \exists x\exists z\forall y(\neg S(x) \vee R(z,y) \equiv$
Dado que el $\exists x$ no tiene cuantificador universal a la izquierda podemos sustituir x por a
$\equiv \exists z\forall y(\neg S(a) \vee R(z,y)) \equiv$
Hacemos lo mismo con $\exists z$
$\equiv \forall y(\neg S(a) \vee R(b,y))$
Ya esta en forma normal de Skolem

5.3 Forma clausulada

5.3.1 Clausulas

- Un literal es una fórmula atómica o su negada. Ejemplo: $Q(g(a, b)$
- El cierre universal de una fórmula sin cuantificadores es la fórmula resultante de cuantificar universalmente todas las variables.
  Ej: El cierre de $\neg P(x, f(a)) \vee Q(y)$ es $\forall x \forall y(\neg P(x, f(a)) \vee Q(y))$
- **Una cláusula es el cierre universal de una disyunción de literales**.
  Ej: $\forall x(\neg Q(x) \vee P(a, b))$
- **Una fórmula está en forma clausulada si está escrita como conjunción de cláusulas**.
  Ej: $\forall x \forall y(\mathbf{Q(x)} \vee \neg \mathbf{P(g(f(x),b),y))} \wedge \forall x \mathbf{P(x,x)}$

5.3.2 Cálculo de forma clausulada

$\alpha = \exists x P(x) \to \exists x R(x, a) \equiv$
$\equiv \neg \exists x P(x) \vee \exists x R(x, a) \equiv$
$\equiv \forall x \neg P(x) \vee \exists x R(x, a) \equiv$
$\equiv \forall x(\neg P(x) \vee \exists x R(x, a)) \equiv$
$\equiv \exists x(\forall x \neg P(x) \vee R(x, a)) \equiv$
$\equiv \exists x(\forall y \neg P(y) \vee R(x, a)) \equiv$
$\equiv \exists x \forall y(\neg P(y) \vee R(x, a))$ Forma prenexa
$\equiv \forall y(\neg P(y) \vee R(b, a))$ Una forma normal de skolem y además forma normal clausulada