Relacion2.1.pdf

Pucherillos

Lógica y Métodos Discretos

1º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Pablo Vega Romero - Grupo 1A

Lógica y Métodos Discretos

Relación 2: Álgebras de Boole

Ejercicio 2.1: Sea I el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[0,1]$. Para todo $a, b \in I$ definimos $a \vee b = \max\{a,b\}$, $a \wedge b = \min\{a,b\}$ y $\bar{a} = 1 - a$. ¿Es I con estas operaciones un álgebra de Boole? Razona la respuesta.

Para que I sea un álgebra de Boole debe cumplir las ocho propiedades que impuso Huntington. En caso de que no cumpla alguna, entonces no será un álgebra de Boole.

Si nos fijamos no se cumple para:

$a \vee a^* = 1$ y $a \wedge a^* = 0$, esto quiere decir que el conjunto I no es un álgebra de Boole.

Puesto que solo se cumple para el máximo y el mínimo que son 0 y 1.

Ejercicio 2.2: Dada un álgebra de Boole demuestra las propiedades asociativas de $\vee$ y $\wedge$ utilizando las ocho propiedades de Huntington.

* $a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c$:

- $a\wedge(a\vee(b\vee c)) = a$

$a\wedge(a\vee(b\vee c)) = (a\wedge((a\vee b)\vee c)) = (a\wedge(a\vee b))\vee(a\wedge c) = a\vee(a\wedge c) = a$

- $a^*\wedge(a\vee(b\vee c)) = \underbrace{(a^*\wedge a)}_{=0}\vee(a^*\wedge(b\wedge c)) = a^*\wedge(b\vee c)$

$a^*\wedge(a\vee(b\vee c)) = a^*\wedge((a\vee b)\vee c) = (a^*\wedge(a\vee b))\vee(a^*\wedge c) \longrightarrow$

$\longrightarrow ((\underbrace{a^*\wedge a}_{=0})\vee(a^*\wedge b))\vee(a^*\wedge c) = (a^*\wedge b)\vee(a^*\wedge c) = a^*\wedge(b\vee c)$

* $a\vee(b\vee c) = 1\wedge(a\vee(b\vee c)) = (a\vee a^*)\wedge(a\vee(b\vee c)) \longrightarrow =$

$\rightarrow = (a\wedge(a\vee(b\vee c)))\vee(a^*\wedge(a\vee(b\vee c))) = (a\wedge((a\vee b)\vee c))\vee(a^*\wedge((a\vee b)\vee c)) \longrightarrow$

$\rightarrow = (a\vee a^*)\wedge((a\vee b)\vee c) = 1\wedge((a\vee b)\vee c) = (a\vee b)\vee c$

Ejercicio 2.3: Si $(A,\vee,\wedge,^*,0,1)$ es un álgebra de Boole. Para todo $a,b,c\in A$ se cumple:

1. Si $a\vee x = 1$ y $a\wedge x = 0$, entonces $x = a^*$.

$a\vee x = 1 \rightarrow (a\vee x)\vee(a\wedge 0) = 1\vee 0 = 1$
$a\wedge x = 0 \rightarrow (a\vee 1)\wedge(a\wedge 0) = 1\wedge 0 = 0$
} Por estas dos demostraciones deducimos que $x = a^*$.

2. $0^* = 1$ y $1^* = 0$.

$(a\wedge a^*)^* = 0^* \Rightarrow a^*\vee a \Rightarrow a\vee a^* = 1$
$(a\vee a^*)^* = 1^* \Rightarrow a^*\wedge a \Rightarrow a\wedge a^* = 0$
} Queda demostrado que $0^* = 1$ y $1^* = 0$

3. $(a^*)^* = a$.

$(a^*)^* = (a^*\wedge 1)^* = (a^*\wedge(a\vee 1))^* = ((a^*\wedge a)\vee(a^*\wedge 1))^* = (0\vee a^*)^* = (a^*\wedge 0)^* \longrightarrow$

$\longrightarrow = a\wedge 1 = a$

4. Si $a^* = b^*$ entonces $a = b$.

$a^* = b^* \Longrightarrow (a^*)^* = (b^*)^* \rightarrow$ Por la demostración anterior llegamos a la conclusión de que $a = b$.

5. Leyes de De Morgan: $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$ $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

$(a \vee b) \vee (a^* \wedge b^*) = (a \vee b \vee a^*) \wedge (a \vee b \vee b^*) = 1 \wedge 1 = 1$

$(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*) = (a \wedge a^* \wedge b^*) \vee (b \wedge a^* \wedge b^*) = 0 \vee 0 = 0$

$a^* \wedge b^* = (a \vee b)^*$

Por el principio de dualidad, podemos afirmar que si $a^* \wedge b^* = (a \vee b)^*$, entonces $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$

Ejercicio 2.4: Si $(A, \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ es un álgebra de Boole. Para todo $a, b, c \in A$ se cumple:

1. $0 \leq a \leq 1$.

$0 \leq a \Rightarrow a \wedge a^* = 0$
$a \leq 1 \Rightarrow a \vee a^* = 1$ } Queda demostrado.

2. Isotonía. Si $a \leq b$, entonces $a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$:

Supongamos que $a = b$, entonces $\begin{cases} a \vee c = c \vee a & \text{y} \quad a \wedge c = c \wedge a \\ b \vee c = c \vee b & \text{y} \quad b \wedge c = c \wedge b \end{cases}$ → Queda demostrado que se cumple.

3. $a \leq b \Longleftrightarrow b^* \leq a^*$:

Supongamos que $a = b$, entonces $\begin{cases} a^* = a^* \\ b^* = b^* \end{cases}$

4. $a \wedge b \leq c \Longleftrightarrow a \leq b^* \vee c$

Supongamos que $a \wedge b = c \rightarrow a = b^* \vee c \rightarrow a = b^* \vee (a \wedge b) = (b^* \vee a) \wedge (b^* \vee b) \rightarrow$

$\rightarrow a = (b^* \vee a) \wedge 1 \rightarrow a = a \vee b^* \Rightarrow a = c$

Ejercicio 2.5. Sea A un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$, definimos la operación diferencia simétrica como $a \oplus b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b)$. Demuestra que se verifican las siguientes identidades:

1. $a \oplus b = b \oplus a$.

$a \oplus b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b) = (b^* \wedge a) \vee (b \wedge a^*) = (b \wedge a^*) \vee (b^* \wedge a) = b \oplus a$

2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

$a\oplus(b\oplus c) = a\oplus((b\wedge c^*)\vee(b^*\wedge c)) = (a\wedge((b\wedge c^*)\vee(b^*\wedge c))^*)\vee(a^*\wedge((b\wedge c^*)\vee(c^*\wedge b))) \to$

$\to = (a\wedge(b^*\vee c)\wedge(b\vee c^*))\vee(a^*\wedge b\wedge c^*)\vee(a^*\wedge b^*\wedge c) \to$

$\to = ((a\wedge b^*)\wedge(b\vee c^*))\vee((a\wedge c)\wedge(b\vee c^*))\vee(a^*\wedge b\wedge c^*)\vee(a^*\wedge b^*\wedge c) \longrightarrow$

$\to (a\wedge b^*\wedge b)\vee(a\wedge b^*\wedge c^*)\vee(a\wedge c\wedge b)\vee(a\wedge c\wedge c^*)\vee(a^*\wedge b\wedge c^*)\vee(a^*\wedge b^*\wedge c)$

$(a\oplus b)\oplus c = ((a\oplus b)\wedge c^*)\vee((a\oplus b)^*\wedge c) = \longrightarrow =$

$\to = (((a\wedge b^*)\vee(a^*\wedge b))\wedge c^*)\vee(((a\wedge b^*)\vee(a^*\wedge b))^*\wedge c) \to =$

$\to = (a\wedge b^*\wedge c^*)\vee(a^*\wedge b\wedge c^*)\vee((a^*\vee b)\wedge(a\vee b^*)\wedge c)$

3. $a\wedge(b\oplus c) = (a\wedge b)\oplus(a\wedge c)$

$a\wedge(b\oplus c) = a\wedge((b\wedge c^*)\vee(b^*\wedge c)) = (a\wedge b\wedge c^*)\vee(a\wedge b^*\wedge c)$

$(a\wedge b)\oplus(a\wedge c) = ((a\wedge b)\wedge(a\wedge c)^*)\vee((a\wedge b)^*\wedge(a\wedge c)) = 0\vee 0 = 0$

4. $a\oplus a = 0,\ a\oplus 0 = a,\ a\oplus a^* = 1,\ a\oplus 1 = a^*$

$*\ a\oplus a = (a\wedge a^*)\vee(a^*\wedge a) = (a\wedge a^*)\vee(a\wedge a^*) = 0\vee 0 = 0]$

$*\ a\oplus 0 = (a\wedge 0^*)\vee(a^*\wedge 0) = (a\wedge 1)\vee 0 = a\vee 0 = a]$

$*\ a\oplus a^* = (a\wedge(a^*)^*)\vee(a^*\wedge a^*) = (a\wedge a)\vee(a^*\wedge a^*) = a\vee a^* = 1]$

$*\ a\oplus 1 = (a\wedge 1^*)\vee(a^*\wedge 1) = (a\wedge 0)\vee a^* = 0\vee a^* = a^*\vee 0 = a^*]$

5. $x\oplus a = b$ si y solo si $x = a\oplus b$

$(a\oplus b)\oplus a = b$

$(a\oplus b) = (a\wedge b^*)\vee(a^*\wedge b) = ((a\wedge b^*)\vee(a^*\wedge b))\oplus a = a\oplus(a^*\wedge b) = \longrightarrow$

$\to = (a\wedge(a^*\wedge b)^*)\vee(a^*\wedge(a^*\wedge b)) = (a\wedge(a\vee b^*))\vee(a^*\wedge b) = \longrightarrow$

$\to = ((a\wedge a)\vee(a\wedge b^*))\vee(a^*\wedge b) = (a\vee 0)\vee(a^*\wedge b) = a\vee(a^*\wedge b) = \longrightarrow$

$\to = (a\vee a^*)\wedge(a\vee b) = 1\wedge(a\vee b) = a\vee b = b$

6. $a = b$ si y solo si $a \oplus b = 0$.

$a \oplus b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b) = 0 \vee (a^* \wedge b) = 0 \vee 0 = 0$

Suponiendo que $a = b$.

Ejercicio 2.6: Sea $D(70)$ el conjunto de los números naturales que son divisores de 70 con las operaciones mcm, mcd, $x^* = 70/x$ y con $0 = 1$ y $1 = 70$.

1. ¿Es un álgebra de Boole? En caso afirmativo encuentra sus átomos y coátomos.

Será álgebra de Boole si 70 se puede formar como producto de números primos de exponente 1.

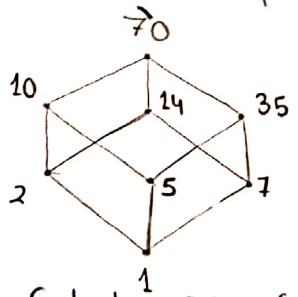
$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \rightarrow \text{Por tanto, es un álgebra de Boole}$$

Sus átomos son los minimales del conjunto: $At(D(70)) = \{2, 5, 7\}$

Sus coátomos son los maximales: $coAt(D(70)) = \{\frac{70}{2}, \frac{70}{5}, \frac{70}{7}\} \rightarrow coAt(D(70)) = \{35, 14, 10\}$

2. Represéntala gráficamente como conjunto ordenado:

Para ello emplearemos un diagrama de Hasse:



3. Calcula $35 \wedge (2 \vee 7)$ y $(2 \vee 7) \wedge (14 \wedge 10)$

Supongo: $\wedge = m.c.d$ y $\vee = m.c.m$

- $35 \wedge (2 \vee 7) = mcd(35, mcm(2,7)) = mcd(35, 14) = 7$

- $(2 \vee 7) \wedge (14 \wedge 10) = mcd(mcm(2,7), mcd(14,10)) = mcd(14, 2) = 2$

Ejercicio 2.7: Justifica que D(210) es un álgebra de Boole y a continuación evalúa las siguientes expresiones:

$30 \vee (15 \wedge 10)$, $14^* \wedge 21$, $(6^* \vee 35)^* \vee 10$, $((3 \vee 10)^* \vee 2)^*$

Expresa los elementos 21 y 35 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$$ Por tanto, es un álgebra de Boole.

* $At(D(210)) = \{2, 3, 5, 7\}$

* $coAt(D(210)) = \left\{\frac{210}{2}, \frac{210}{3}, \frac{210}{5}, \frac{210}{7}\right\} \rightarrow coAt(D(210)) = \{105, 70, 42, 30\}$

Para resolver las expresiones tenemos en cuenta: $\wedge = mcd$ y $\vee = mcm$

* $30 \vee (15 \wedge 10) = mcm(30, mcd(15,10)) = mcm(30,5) = 30]$

* $14^* \wedge 21 = mcd\left(\frac{210}{14}, 21\right) = mcd(15,21) = 3]$

* $(6^* \vee 35^*) \vee 10 = mcm(mcm(\frac{210}{6}, 35)^*, 10) = mcm(35^*, 10) = mcm(6,10) = 30]$

* $((3 \vee 10)^* \vee 2)^* = (mcm((mcm(3,10))^*, 2))^* = (mcm(\frac{210}{30}, 2))^* = (mcm(7,2))^* \longrightarrow$
$\rightarrow = 14^* = \frac{210}{14} = 15]$

21:

* $21 = mcm\{3,7\} = 3 \vee 7 \rightarrow$ Supremo de átomos
* $21 = mcd\{105, 42\} = 105 \wedge 42 \rightarrow$ Ínfimo de coátomos

35:

* $35 = mcm\{5,7\} = 5 \vee 7 \rightarrow$ Supremo de átomos.
* $35 = mcd\{105, 70\} = 105 \wedge 70 \rightarrow$ Ínfimo de coátomos.

Ejercicio 2.8: Consideremos el álgebra de Boole de los divisores de 2310.

1. Calcula los átomos y los coátomos.

2310	2
1155	3
385	5
77	7
11	11
1	

$2310 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$

$At(D(2310)) = \{2,3,5,7,11\}$

$coAt(D(2310)) = \{\frac{2310}{2}, \frac{2310}{3}, \frac{2310}{5}, \frac{2310}{7}, \frac{2310}{11}\} \longrightarrow$

$\rightarrow coAt(D(2310)) = \{1155, 770, 462, 330, 210\}$

2. Evalua las expresiones:

* $21 \vee (165 \wedge 77^*) = mcm(21, mcd(165, 77^*)) = mcm(21, mcd(165,30)) = \longrightarrow$

$\rightarrow = mcm(21,15) = \boxed{105}$

* $770 \wedge (3 \vee 14)^* = mcd(770, (mcm(3,14))^*) = mcd(770, 42^*) = mcd(770,55) = \boxed{55}$

* $(15 \vee 110)^* = (mcm(15,110))^* = 330^* = \boxed{7}$

* $15^* \wedge 110^* = 154 \wedge 21 = mcd(154,21) = \boxed{7}$

* $385 \vee (1155 \wedge 42) = mcm(385, mcd(1155,42)) = mcm(385,21) = \boxed{1155}$

* $(385 \vee 1155) \wedge (385 \vee 42) = mcd(mcm(385,1155), mcm(385,42)) \longrightarrow$

$\rightarrow = mcd(1155, 2310) = \boxed{1155}$

3. Expresa 5, 35, 154, 231, 1155 como supremos de átomos y como ínfimo de coátomos.

5:
- Átomos $\rightarrow 5 \vee 5 = mcm(5,5) = 5$
- Coátomos $\rightarrow 210 \wedge 330 \wedge 770 \wedge 1155 = mcd(210, mcd(330, mcd(770,1155))) = 5$

35:
- Átomos $\rightarrow 5 \vee 7 = mcm(5,7) = 35$
- Coátomos $\rightarrow 210 \wedge 770 \wedge 1155 = mcm(210, mcm(770,1155)) = 35$

154:
- Átomos $\rightarrow 2 \vee 7 \vee 11 = mcm(2, mcm(7,11)) = 154$
- Coátomos $\rightarrow 462 \vee 770 = mcm(462,770) = 154$

231:
- Átomos $\rightarrow 3 \vee 7 \vee 11 = mcm(3, mcm(7,11)) = 231$
- Coátomos $\rightarrow 462 \vee 1155 = mcm(462,1155) = 231$

1155:
- Átomos $\rightarrow 3 \vee 5 \vee 7 \vee 11 = mcm(3, mcm(5, mcm(7,11))) = 1155$
- Coátomos $\rightarrow 1155 \wedge 1155 = mcd(1155,1155) = 1155$

Ejercicio 2.9.

1. Sea B un álgebra de Boole con 32 elementos. ¿Cuántos átomos tiene?

32 elementos $\longrightarrow 2^5$ elementos

Como ya sabemos, por teoría, el número de átomos de B es 5.

2. Sea B un álgebra de Boole cuyos átomos son a_1, a_2, a_3 y a_4. ¿Cuáles son sus coátomos?

Sería de la siguiente manera:

$$coÁt(B) = \frac{D(B)}{a_1}, \frac{D(B)}{a_2}, \frac{D(B)}{a_3}, \frac{D(B)}{a_4}$$

2.10. Determina un número natural n sabiendo que el conjunto D(n) de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales, y que 105 y 42 son dos coátomos. Además obtén todos los $x \in D(n)$ tales que $105^* \vee x = 42$.

$$\left.\begin{array}{l} 105 = \frac{n}{p_1} \longrightarrow n = p_1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 42 = \frac{n}{p_2} \longrightarrow n = p_2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p_1 = 2 \\ p_2 = 5 \end{array} \Longrightarrow n = 210$$

$$105^* \vee x = 42 \Longrightarrow 2 \vee x = 42 \Longrightarrow mcm(2, x) = 42$$

- Para que el resultado sea $42 \Longrightarrow \boxed{x = 21}$

2.11. Obtén una expresión de la función booleana $f(x,y,z) = x \cdot y + z^*$ en la que solo aparezcan las operaciones suma y complemento. A continuación obtén otra expresión de f en la que solo aparezcan las operaciones producto y complemento.

* $f(x,y,z) = x \cdot y + z^* = (x \wedge y) \vee z^* = (x \wedge y)^{**} \vee z^* = (x^* \vee y^*)^* \vee z^* = (x^* + y^*)^* + z^*$

* $f(x,y,z) = x \cdot y + z^* = (x \cdot y + z^*)^{**} = ((x \cdot y)^* \cdot z^{**})^* = ((x \cdot y)^* \cdot z)^*$

Ejercicio 2.12: Justifica que cualquier función booleana puede ser expresada usando exclusivamente las operaciones suma y complemento. Análogamente, usando operaciones producto y complemento.

Para ello tendremos en cuenta las leyes de De Morgan.

$(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$ $\qquad$ $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

Por ejemplo:

$f(x,y,z) = x^* + y \cdot z = x^* + (y \cdot z)^{**} = x^* + (y^* + z^*)^*$

$f(x,y,z) = x^* + y \cdot z = (x^* + y)^{**} \cdot z = (x \cdot y^*)^* \cdot z$

Ejercicio 2.13 Sea A un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$, definimos las operaciones binarias:

- a NAND $b = a \uparrow b = (a \wedge b)^*$.
- a NOR $b = a \downarrow b = (a \vee b)^*$.

Demuestra que todas las operaciones del álgebra de Boole se pueden expresar en función de NAND. Pruébalo también para NOR.

a NAND $b = a \uparrow b = (a \wedge b)^*$

$a^* = (a \wedge a)^* = a \uparrow a$

$a \vee b = (a \vee b)^{**} = (a^* \wedge b^*)^* = a^* \uparrow b^* = (a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b)$

$a \wedge b = (a \wedge b)^{**} = (a \uparrow b)^* = (a \uparrow b) \uparrow (a \uparrow b)$

Teniendo en cuenta el principio de dualidad, podemos confirmar que esto también se cumple para NOR:

a NOR $b = a \downarrow b = (a \vee b)^*$

Ejercicio 2.14: Expresa la función booleana del ejercicio 2.11 en términos únicamente de la operación NAND. Pruébalo también para la operación NOR.

$$f(x,y,z) = x\cdot y + z^* = (x\cdot y + z^*)^{**} = ((x\cdot y)^*\cdot z)^* = (x\cdot y)^* \uparrow z = (x\uparrow y)\uparrow z$$

$$f(x,y,z) = x\cdot y + z^* = (x\cdot y)^{**} + z^* = (x^* + y^*) + z^* = (x^*\downarrow y^*) + z^* = \longrightarrow$$

$$\rightarrow = ((x^*\downarrow y^*) + z^*)^{**} = ((x^*\downarrow y^*)\downarrow z^*)^* = (((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y))\downarrow(z\downarrow z))^* = \longrightarrow$$

$$\rightarrow = (((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y))\downarrow(z\downarrow z))\downarrow(((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y))\downarrow(z\downarrow z))$$