Relacion3.1.pdf

Pucherillos

Lógica y Métodos Discretos

1º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

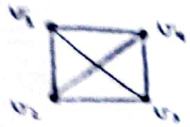
Pablo Vega Romero
Grupo A

Lógica y Métodos Discretos

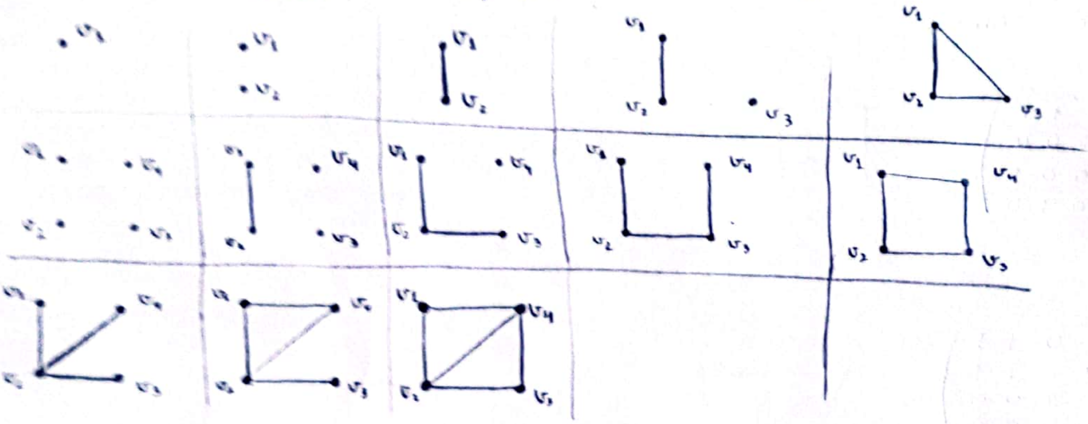
Relación 3.1: Grafos

Ejercicio 3.1. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismos.

Un grafo completo con cuatro vértices sería el siguiente:

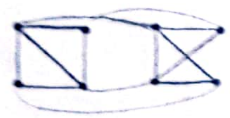


Pasaremos a obtener sus subgrafos evitando isomorfismos:



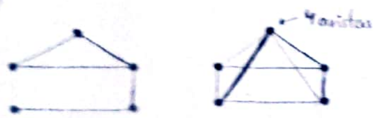
Ejercicio 3.2. ¿Son isomorfos los grafos de la figura 1? ¿Y los de la figura 2? ¿Y los de la 3? ¿Y los de la 4?

(1)



Son isomorfos, ya que existen biyecciones para todos los vértices y el número de aristas por vértice coinciden.

(2)

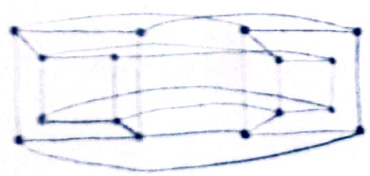


No son isomorfos, ya que en la 2ª figura tenemos un vértice con 4 aristas que no coincide con ningún vértice de la 1ª figura.

(3)

Son isomorfos, si nos fijamos, tanto en una figura como en la otra todos los vértices tienen el mismo número de aristas.

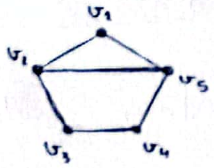
(4)



Son isomorfos, ya que el número de aristas por vértice coinciden.

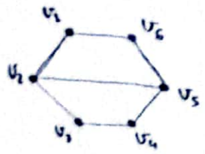
Ejercicio 3.3: Expresa en forma matricial los grafos:

①



$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

②

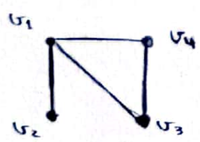


$$\begin{array}{c|cccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Ejercicio 3.4: Representa gráficamente los grafos cuyas matrices de adyacencia son:

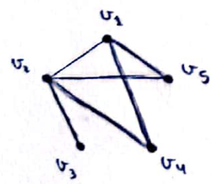
①

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



②

$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

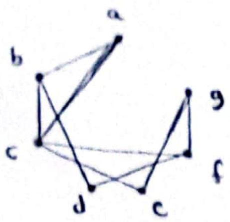


Ejercicio 3.5: Se conocen los siguientes datos sobre las personas a, b, c, d, e, f y g.

1. La persona a habla inglés.
2. La persona b inglés y español.
3. La persona c inglés, italiano y ruso.
4. La persona d japonés y español.
5. La persona e habla alemán e italiano.
6. La persona f frances, japonés y ruso.
7. La persona g francés y alemán.

¿Es cierto que cada par de personas se pueden comunicar entre ellas utilizando si, es necesario, a otra persona como intérprete?

Ya que tenemos 7 personas, quizá la manera más sencilla de representar este grafo sea con un heptágono:



Según vemos en el grafo, a y b necesitan al menos dos intérpretes, por tanto, no se cumple.

Ejercicio 3.6: Demuestra que en un grafo el número de vértices de grado impar es par.

Por la definición, sabemos que, dado un conjunto de vértices V en un grafo G:

$\sum_{v \in V} gr(v) = 2\ell \rightarrow$ La suma de los grados debe ser par

Esto demuestra que, si tiene dos lados o más, el número de vertices de grado impar será par.

Ejercicio 3.7: Demuestra que en todo grafo simple con más de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

Se tiene que cumplir que:

n vértices $\rightarrow$ $0 \leq gr(v) \leq n-1$

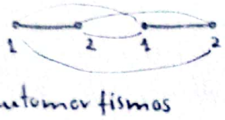
Podemos decir que si hay n vértices y su grado debe ser menor o igual que $n-1$, es seguro que al menos encontramos dos vértices con el mismo grado, ya que si el grado de todos es distinto sobraría alguno con un grado mayor o igual al número de vértices, y por la definición del comienzo, esto no podría ser posible.

Ejercicio 3.8: Un automorfismo de un grafo es un isomorfismo de G en G. Determina el número de automorfismos para cada uno de los grafos siguientes: K_n, P_n, C_n y $K_{m,n}$.

* K_n:

$K_1 \rightarrow 1$ automorfismo

K_2:



2 automorfismos

K_3:

6 automorfismos

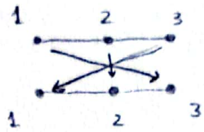
$|Aut(K_n)| = n!$

* P_n:

$P_1 \rightarrow 1$ automorfismo

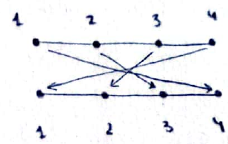
$P_2 \rightarrow 2$ automorfismos

P_3:



$|Aut(P_n)| = 2$

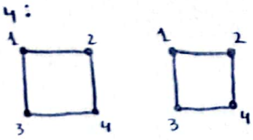
P_4:



* C_n:

C_3: 6 automorfismos

C_4:

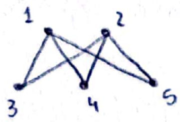


8 automorfismos

$|Aut(C_n)| = 2n$

* $K_{m,n}$:

$K_{2,3}$:

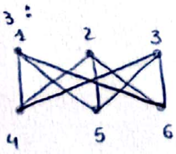


Cuando $m \neq n$:

$\rightarrow$ 12 automorfismos $\Rightarrow |Aut(K_{m,n})| = m!\,n!$

Cuando $m = n$

$K_{3,3}$:



$\rightarrow |Aut(K_{n,n})| = 2 \cdot n! \cdot n!$

Ejercicio 3.9: Existe algún grafo regular de grado cinco con 25 vértices?

No es posible ya que la suma de sus grados es:

$5 \times 25 = 125$, y debería ser par, según la fórmula: $\sum_{v \in G} gr(v) = 2l$

Ejercicio 3.10: ¿Existe un grafo completo con 595 lados?

Sabemos que en los grafos completos: $l = \frac{n(n-1)}{2}$, por tanto $\rightarrow$

$\rightarrow 595 = \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow n(n-1) = 1190 \rightarrow n^2 - n - 1190 = 0$

$n^2 - n - 1190 = 0 \rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1+4760}}{2}$ $\nearrow \frac{1+69}{2} = 35$ ✓ $\rightarrow$ Sí existe. $\searrow \frac{1-69}{2} = -34$ ✗

El grafo tendría 35 vértices.

Ejercicio 3.11: Si G es un grafo simple con n vértices, l lados y r componentes conexas, entonces $n-k \leq l \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$

Para los grafos conexos: $n-1 \leq l$

Si $n=1 \Rightarrow 0 \leq l \rightarrow$ Como G es •, se cumple

Para $n+1$, al grafo le quitamos un vértice y s lados $1 \leq s \leq n$ y así obtenemos G' con n vértices y $l-s$ lados.

Teniendo en cuenta que cumple la desigualdad, tenemos que $n-1 \leq l-s \rightarrow$

$\rightarrow n \leq l-s+1 \leq l$.

$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_r$ $\quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ $\quad l = l_1 + l_2 + \dots + l_r$

$n_i - 1 \leq l_i$

$n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_r - 1 = n - r \leq l_1 + l_2 + \dots + l_r = l$

$l \leq \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$ • Vemos que se cumple $l \leq \frac{n(n-1)}{2}$ ya que sabemos que $\frac{n(n-1)}{2}$ es el número de lados de K_n.

$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots G_r$ $\quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ $\quad l = l_1 + l_2 + \dots + l_r$

$l_1 \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2}$ $\quad l_2 \leq \frac{n_2(n_2-1)}{2}$ $\quad n_1' = n_1 + n_2 - 1$ $\quad l_1' = \frac{(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)}{2}$

$l_1' \geq l_1 + l_2$

$$\frac{(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)}{2} - \frac{n_1(n_1-1)}{2} - \frac{n_2(n_2-1)}{2} = n_1 n_2 - n_1 - n_2 + 1 = (n_1-1)(n_2-1) \longrightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(n-(r-1))(n-r)}{2} = \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$$

Ejercicio 3.12: ¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un grafo simple con 1000 lados?

$\sum_{v \in G} gr(v) = 2l = 2000$ $\quad$ El menor número de vertices se dará si estos tienen el mayor grado posible, es decir $\rightarrow gr(v_n) = v-1$

$v - 1 = \frac{2000}{v} \rightarrow v^2 - v - 2000 = 0$

$\rightarrow v = 45,22$ ✓ $= 46$

$\rightarrow v = -44,22$ ✗

Ejercicio 1.13. ¿Cuál es el mayor número de vertices que puede tener un grafo conexo con 1000 lados?

Al contrario que en el ejercicio anterior, los vértices del grafo serán del menor grado posible, es decir, $gr(v_n) = 1$.

Por tanto el mayor número de vértices será 2000.

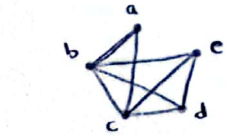
Ejercicio 1.14: Determina cuales de las secuencias siguientes son gráficas, y para aquellas que lo sean encuentra una realización correcta.

* 2,4,4,3,3

Demolición:

a	b	c	d	e
2	4	4	3	3
1	0	3	2	2
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

Reconstrucción:

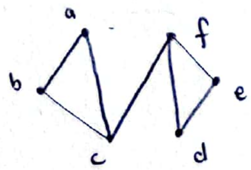


* 2,2,3,2,2,3

Demolición:

a	b	c	d	e	f
2	2	3	2	2	3
0	1	2	2	2	3
0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0

Reconstrucción:

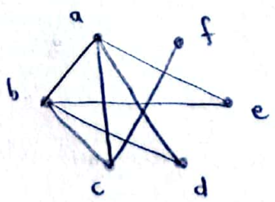


* 4,4,3,2,2,1

Demolición:

a	b	c	d	e	f
4	4	3	2	2	1
0	3	2	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0

Reconstrucción:



* 7,6,5,4,3,3,2:

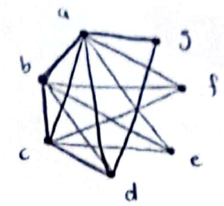
No es una sucesión gráfica, ya que si nos fijamos, el grado de uno de los vértices es mayor al número de vértices.

* 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2

Demolición:

a	b	c	d	e	f	g
6	5	5	4	3	3	2
0	4	4	3	2	2	1
0	0	3	2	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

Reconstrucción:



* 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1

Demolición:

a	b	c	d	e	f	g
6	6	5	4	3	3	1
0	5	4	3	3	2	0

Nos fijamos que no es una gráfica ya que:

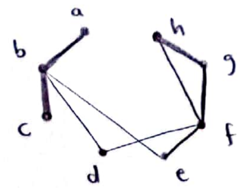
⟶ 5 ≥ nº vértices no nulos

* 1, 4, 1, 2, 2, 4, 2, 2

Demolición:

a	b	c	d	e	f	g	h
1	4	1	2	2	4	2	2
0	0	0	1	1	4	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Reconstrucción:

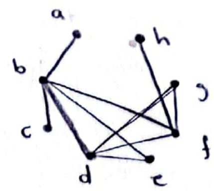


* 1, 5, 1, 4, 2, 4, 2, 3

Demolición:

a	b	c	d	e	f	g	h
1	5	1	4	2	4	2	3
0	0	0	3	1	3	2	1
0	0	0	0	0	2	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Reconstrucción:

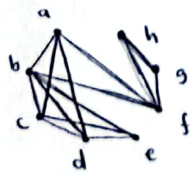


* 5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2

Demolición:

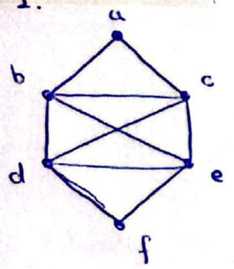
a	b	c	d	e	f	g	h
5	5	4	4	4	4	2	2
0	4	3	3	3	3	2	2
0	0	2	2	2	2	2	2
0	0	0	1	1	2	2	2
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Reconstrucción:

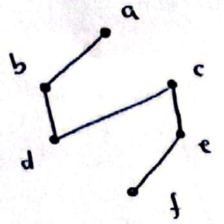


Ejercicio 3.15: Encuentra un camino de Euler para los grafos:

1.

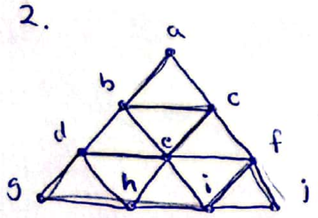


$\longrightarrow$

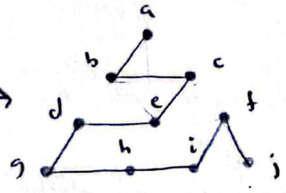


Sería:
abdcefecdba

2.

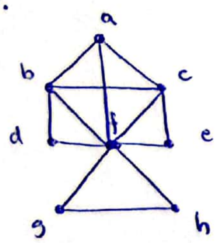


$\longrightarrow$

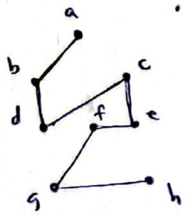


Sería:
ábcedghifjfihgdecba

3.

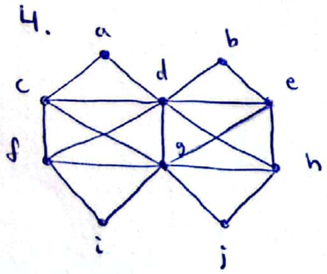


$\longrightarrow$

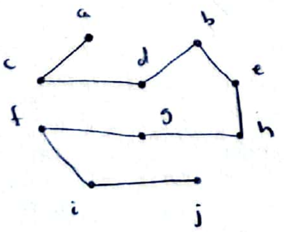


Sería:
abdcefghgfecdba

4.



$\longrightarrow$



Sería:
acdbehgfijifghebdca

Ejercicio 3.16: ¿Para qué valores de n el grafo K_n es un circuito de Euler?

Sabemos que cada vertice está unido con los demás, por tanto el grado de cada vértice es $n-1$. De tal manera que el grado es par para todo n impar.

Ejercicio 3.17: Obtén una fórmula para el número de lados de $K_{m,n}$.

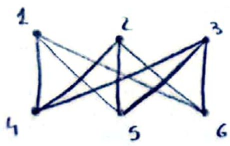
$K_{2,3}$

6 lados

$K_{3,4}$

12 lados

$K_{3,3}$



9 lados

Cada vértice del grupo de arriba debe estar conectado con todos los de abajo y viceversa. Teniendo los ejemplos y esta afirmación en cuenta, podemos deducir que:

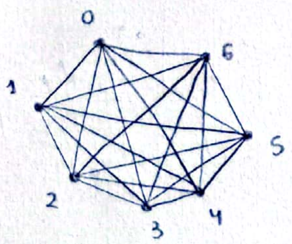
$$n^{o}\ \text{lados}(K_{m,n}) = m \cdot n$$

Ejercicio 3.18: ¿Para qué valores de m y n el grafo $K_{m,n}$ es un circuito de Euler?

Para que $K_{m,n}$ sea un circuito de Euler todos los grados de los vértices deben ser pares, por tanto m y n deberán ser un número par para que $K_{m,n}$ sea un circuito de Euler.

Ejercicio 3.19: Demuestra que si colocamos las 28 fichas del dominó en fila, de forma que si una ficha está junto a otra los cuadrados adyacentes son del mismo valor, entonces los valores de los cuadrados inicial y final son el mismo.

Si tuviéramos un dominó con 36 fichas, en la que los valores marcados en cada una fueran de 0 a 7, ¿sería posible colocarlas todas en fila como hemos explicado en el apartado anterior?



Grado 8 ⟶ Lazo 2 veces

36 fichas ⟶ de 0 a 7 ⟶ K_8 con lazo
↓
grado 7 ⇒ No se puede.

Ejercicio 3.20: Demuestra que si $n \geq 3$ entonces K_n contiene un circuito hamiltoniano.

Para que sea un circuito de Hamilton tiene que pasar todos los vértices 1 sola vez y volver al inicial.

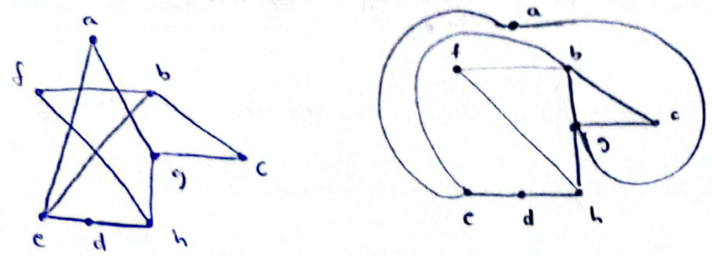
Es obvio que si queremos formar un circuito, el número de vértices debe ser mayor o igual a 3.

Ejercicio 3.21: ¿Cuándo $K_{m,n}$ contiene un circuito de Hamilton?

$K_{m,n}$

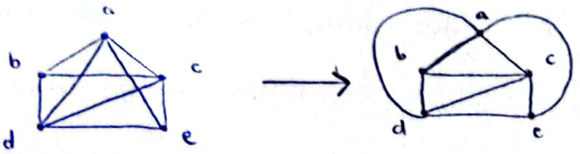
$$v_1 v_2 v_3 \dots v_{m+n} v_1 \longrightarrow \begin{cases} m+n \text{ debe ser par} \\ m = n \end{cases}$$

Ejercicio 3.22: ¿Es plano el grafo siguiente?



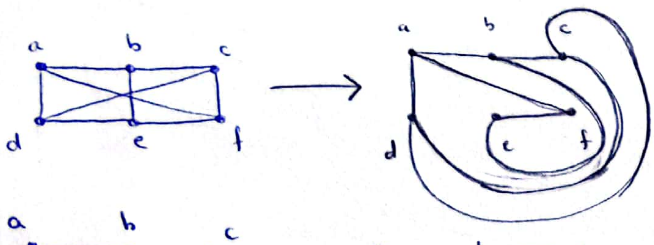
⟹ Es plano, ya que se puede construir de manera que ningún lado corte a otro.

Ejercicio 3.23: Determina cuales de los siguientes grafos son planos.

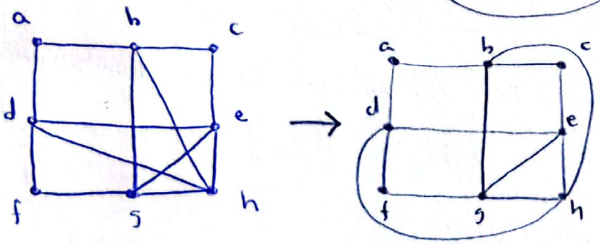


→ Es plano

→ Es plano



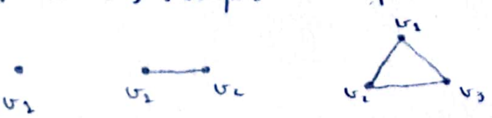
→ Es plano



→ No es plano ya que (b, g) y (d, e) intersecan.

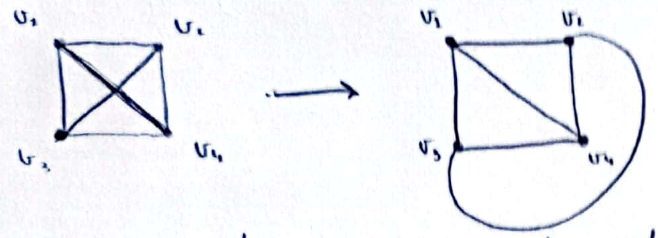
Ejercicio 3.24: Demuestra que cualquier grafo con cuatro vértices o menos es siempre plano.

Para grafos de 1, 2 y 3 vértices es imposible que se crucen sus lados; por tanto, siempre son planos:



Sus lados nunca intersecan.

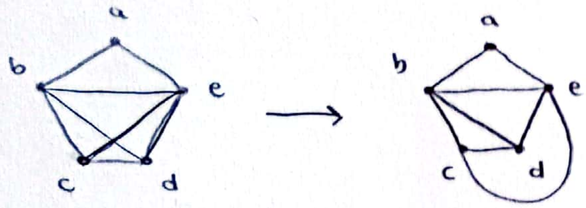
Para demostrarlo con 4 vértices utilizaremos como ejemplo K_4, es decir, un grafo completo de 4 vértices:



Como vemos, es plano, por tanto los demás grafos de 4 vértices también lo serán.

Ejercicio 3.25: Demuestra que si un grafo tiene a lo sumo cinco vértices y uno de ellos es de grados dos entonces es plano.

Para demostrarlo usaremos K_5 pero quitaremos 2 lados para dejar un vértice de grado 2:



Como vemos, es plano, por tanto, todo aquel grafo de 5 vértices con alguno de grado 2 es plano.

Ejercicio 3.26: Sea un grafo plano y conexo con nueve vértices de grado dos (tres veces), tres (tres veces), cuatro (dos veces) y cinco. ¿Cuántos lados hay? ¿Y caras?

Grados: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

$$\sum_{v \in G} gr(v) = 2\ell \rightarrow 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5 = 2\ell \rightarrow \ell = \frac{28}{2} \rightarrow \ell = 14$$

$v - \ell + c = 2$:

$$9 - 14 + c = 2 \rightarrow c = 2 + 5 \rightarrow c = 7$$

Por tanto, el grafo tiene 14 lados y 7 caras.