Tema 6. Teoría de grafos

Asignatura: *Lógica y Métodos Discretos*
Wuolah: Bl4ckTyson

Bl4ckTyson

2024

Contents

1 Generalidades sobre grafos **3**
1.1 Definición de grafo 3
1.2 Caminos en grafos 3
1.3 Grafos conexos 3
1.4 Grafos Ponderados 3

2 Representación matricial de los grafos **4**
2.1 Matriz de adyacencia 4
2.2 Matriz de incidencia 5
2.2.1 Procedimiento 5

3 Isomorfismo en grafos **6**
3.1 Procedimiento para comprobar si dos grafos son isomorfos 6

4 Familias de grafos **7**

5 Sucesiones gráficas **8**
5.1 Algoritmo de Havel-Hakimi 8
5.2 Algoritmo de reconstrucción 9

6 Grafos de Euler **10**
6.1 Particularidades 10
6.2 Algoritmo de fleury 11

7 Grafos de Hamilton **11**
7.1 Particularidades 11

8 Grafos Bipartidos **11**
8.1 Particularidades 11

9 Grafos planos **12**

10 Coloración de grafos **12**
10.1 Polinomio cromático 12

11 Árboles **12**
11.1 Árboles generadores 12
11.1.1 Obtención del arbol generador minimal 12
11.2 Recorridos en árboles 13
11.2.1 Recorrido preorden 13
11.2.2 Recorrido post-orden 14

1 Generalidades sobre grafos

1.1 Definición de grafo

Un grafo es un par (V,E) donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas. Cuenta con una aplicación del tipo:
$\gamma_G : E \to \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. A esto se le conoce como **aplicación de incidencia**.

1.2 Caminos en grafos

Un camino de longitud n es una sucesión de lados junto con una sucesión de vértices tales que $\gamma_g = \{v_{i-1}, v_i\}$
Un camino es de longitud cero cuando su sucesión de vértices es v y su sucesión de lados es vacía.
Un recorrido es un camino para el que no aparecen lados repetidos. Si además no tiene vértices repetidos, se considera camino simple.
Si coincide el primer y el último vértice es un camino cerrado, si además es un recorrido, se llama circuito. Si un circuito es un camino simple es un ciclo. Tabla explicadora:

Vértices Repetidos	Aristas Repetidas	Abierto	Nombre
			Camino
		No	Camino Cerrado
	No		Recorrido
	No	No	Circuito
No	No		Camino Simple
No	No	No	Ciclo

1.3 Grafos conexos

Un grafo es conexo si dados dos vértices $\{u, v\}$ existe al menos un camino de u a v.
Si estamos ante un grafo conexo, la distancia entre dos vértices se define como el mínimo de longitudes de los caminos que empiezan en v y terminan en w

1.4 Grafos Ponderados

Un grafo es ponderado es un grafo cuyas **aristas representan un valor** (peso, distancia, dinero, kilómetros...). Se representa con un número alrededor de la arista.

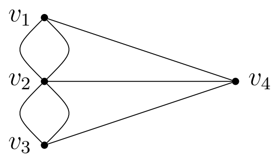
2 Representación matricial de los grafos

2.1 Matriz de adyacencia

Propiedades:

- Es una matriz simétrica, ya que cada lado que une v_i con v_j, une v_j con v_i.
- Un grafo puede tener **varias matrices de adyacencia** en función de la ordenación de vértices. Si tenemos dos matrices A y C de adyacencia de un mismo grafo, existe una tercera matriz de permutación (en cada fila y en cada columna un coeficiente que vale uno y el resto 0) tal que $P^{-}1CP = A$
- Pueden definirse grafos a partir de matrices cuadradas con coeficientes en $\mathbb{N}$

Ejemplo de matriz de adyacencia:



Para calcular la matriz de adyacencia del grafo, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Identificación de vértices y aristas:
   - Los vértices del grafo son v_1, v_2, v_3, v_4.
   - Las aristas conectan estos vértices y se pueden contar directamente del grafo proporcionado en la imagen.
2. Construcción de la matriz de adyacencia:
   - La matriz de adyacencia A es una matriz cuadrada donde cada entrada $A[i][j]$ indica el número de aristas entre los vértices v_i y v_j.
   - Si hay una arista entre v_i y v_j, la entrada correspondiente es 1; si hay dos aristas, la entrada es 2, y así sucesivamente.
   - En el caso de no haber aristas entre v_i y v_j, la entrada correspondiente es 0.

En el grafo dado, se observa lo siguiente:

- v_1 tiene 2 aristas con v_2, 0 con v_3 y 1 con v_4.
- v_2 tiene 2 aristas con v_1, 2 con v_3 y 1 con v_4.
- v_3 tiene 0 aristas con v_1, 2 con v_2 y 1 con v_4.
- v_4 tiene 1 arista con v_1, 1 con v_2 y 1 con v_3.

Por lo tanto, la matriz de adyacencia A se ve así:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada entrada de la matriz $A[i][j]$ representa el número de aristas entre el vértice v_i y el vértice v_j.

2.2 Matriz de incidencia

Es aquella matriz n x m que tiene en la posición (i,j) un 1 si $v_i \in \gamma_G(e_j)$ y 0 en otro caso

2.2.1 Procedimiento

Para calcular la matriz de incidencia del grafo anterior, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Identificación de vértices y aristas
   - Los vértices del grafo son v_1, v_2, v_3, v_4.
   - Las aristas del grafo son
     - e_1: arista entre v_1 y v_2
     - e_2: arista entre v_1 y v_2 (segunda)
     - e_3: arista entre v_2 y v_3
     - e_4: arista entre v_2 y v_3 (segunda)
     - e_5: arista entre v_1 y v_4
     - e_6: arista entre v_2 y v_4
     - e_7: arista entre v_3 y v_4
2. Construcción de la matriz de incidencia
   La matriz de incidencia I es una matriz de dimensiones 4×7, donde cada entrada $I[i][j]$ será 1 si el vértice v_i está conectado por la arista e_j, y 0 en otro caso

La matriz de incidencia para el grafo es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Isomorfismo en grafos

3.1 Procedimiento para comprobar si dos grafos son isomorfos

Consideremos los siguientes dos grafos G y H:

Grafo G:

- Vértices: $V_G = \{A, B, C, D\}$ - Aristas: $E_G = \{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

Grafo H:

- Vértices: $V_H = \{1, 2, 3, 4\}$ - Aristas: $E_H = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

1. Contar vértices y aristas
   - Ambos grafos tienen 4 vértices.
   - Ambos grafos tienen 5 aristas.
2. Comparar grados de los vértices
   - Grados en G:

   $$\deg(A) = 2, \quad \deg(B) = 3, \quad \deg(C) = 3, \quad \deg(D) = 2$$

   - Grados en H:

   $$\deg(1) = 2, \quad \deg(2) = 3, \quad \deg(3) = 3, \quad \deg(4) = 2$$

   Los grados coinciden: ambos tienen dos vértices con grado 2 y dos vértices con grado 3.
3. Buscar una biyección que preserve las aristas
   - Proponemos una posible correspondencia:

   $$f(A) = 1, \quad f(B) = 2, \quad f(C) = 3, \quad f(D) = 4$$

   - Verificamos que esta correspondencia preserve las aristas:

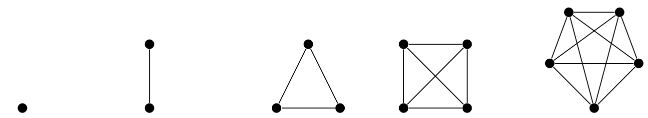
   $$(A, B) \to (1, 2), \quad (A, C) \to (1, 3), \quad (B, C) \to (2, 3),$$

   $$(B, D) \to (2, 4), (C, D) \to (3, 4)$$

Todas las aristas se preservan, por lo que la biyección propuesta es válida. Por lo tanto, los grafos G y H son isomorfos.

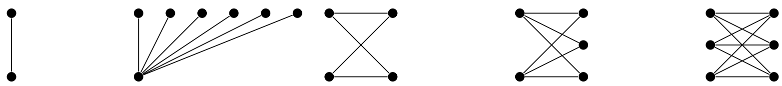
4 Familias de grafos

- Grafo Completo K_n
  Cada vértice está unido mediante un lado a todos los demás vértices que forman el grafo.
  Por ejemplo:



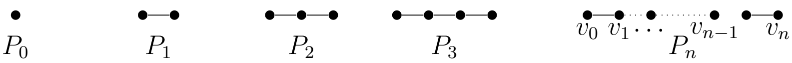
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

- Grafo bipartido completo $K_{m,n}$
  Se define como un grafo cuyo conjunto de vértices que para cada i,j hay un lado que une los vértices v_i con v_j
  Por ejemplo:



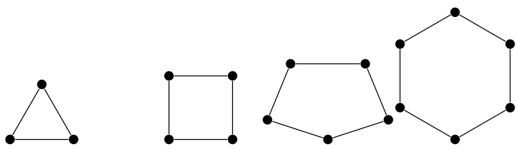
$K_{1,1}$ $K_{1,6}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

- Grafo camino P_n
  Son aquellos grafos los cuales un vértice v_i es unido con un vértice i_{+1} hasta llegar a n y con un v_{i-1} si n es > 0
  Por ejemplo:



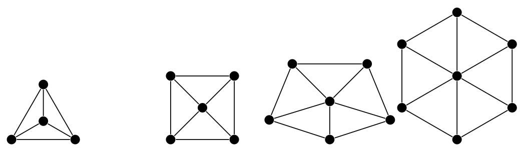
P_0 P_1 P_2 P_3 P_n

- Gafo ciclo C_n Son aquellos grafos de tipo camino P_n en el cual el último vértice se une con el primero.
  Por ejemplo:



$C_3 = K_3$ $C_4 = K_{2,2}$ C_5 C_6

- Grafo rueda W_n Es un grafo ciclo C pero además exise un vértice unión con todos los vértices del grafo.
  Por ejemplo:



$W_3 = K_4$ W_4 W_5 W_6

5 Sucesiones gráficas

Una sucesión $d_1, d2, ..., d_n$ es una sucesión gráfica si existe un grafo G sin lazos ni lados paralelos con un conjunto de vértices tales que $d_i = gr(v_i)$

5.1 Algoritmo de Havel-Hakimi

Vamos a tomar la sucesión $S = \{4, 3, 3, 3, 3, 2, 2\}$

1. Ordenamos la secuencia en orden decreciente(ya está ordenada)
2. Eliminamos el primer elemento y reducimos los siguientes:
   - Eliminamos el 4:
     $\{3, 3, 3, 3, 2, 2\}$
   - Reducimos los primeros 4 elementos en 1:
     $\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$
3. Repetimos el proceso:
   - Ordenamos (ya está ordenado):
   - Eliminamos el 2:
     $\{2, 2, 2, 2, 2\}$
   - Reducimos los dos primeros elementos en 1:
     $\{1, 1, 2, 2, 2\}$
4. Volvemos a repetir:
   - Ordenamos:
     $\{2, 2, 2, 1, 1\}$
   - Eliminamos el dos:
     $\{2, 2, 1, 1\}$
   - Reducimos los dos primeros elementos en 1:
     $\{1, 1, 1, 1\}$
5. Volvemos a repetir:
   - Ordenamos (ya está ordenado)
   - Eliminamos el primer valor (1)
     $\{1, 1, 1\}$
   - Reducimos en 1 el primer valor:
     $\{0, 1, 1\}$

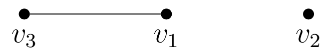
6. Volvemos a repetir el proceso:
   - Ordenamos de manera decreciente:
     $\{1, 1, 0\}$
   - Eliminamos el primer valor:
     $\{1, 0\}$
   - Decrementamos el primer valor:
     $\{0, 0\}$
7. Como hemos llegado a $\{0, 0\}$, podemos afirmar que la secuencia original puede ser secuencia de grados de los vértices de un grafo simple.

5.2 Algoritmo de reconstrucción

Ahora nos planteamos encontrar un grafo de forma que los grados de sus vértices sean los términos de la sucesión.
El objetivo es recorrer las distintas sucesiones que nos han ido apareciendo.

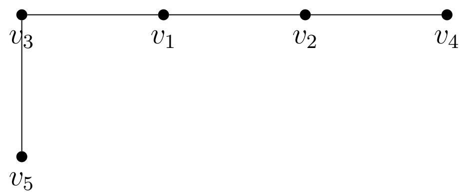
1. Comenzamos con la sucesión: $\{0, 0\}$, formando un grafo con 2 vértices:

2. Usamos ahora la siguiente sucesión: $\{1, 1, 0\}$
   Añadimos un vértice nuevo al lado de uno que no tuviera grado y los unimos:

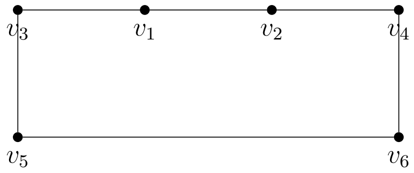


3. La siguiente sucesión es :$\{1, 1, 1, 1\}$ lo que implica que todos los vértices tienen que tener grado 1:
   Añadimos un vértice al lado de v_2

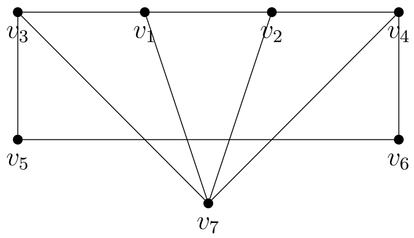
4. La siguiente sucesión es: $\{2, 2, 2, 1, 1\}$, por lo que tenemos que tener 3 vértices de grado 2 y 2 de grado 1.
   Un ejemplo podría ser:



5. El siguiente paso sería la secuencia $\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$
   Para ello vamos a añadir un vértice que una v4 con v5:



6. Finalmente, nos queda la sucesión original:
   $\{4, 3, 3, 3, 3, 2, 2\}$
   Y nos quedará de esta forma:



7. Tenemos que:
   - v_7 es de grado 4 $(v_3, v_1, v_2, v_4,)$
   - v_3 es de grado 3 (v_5, v_1, v_7)
   - v_1 es de grado 3 (v_3, v_2, v_7)
   - v_2 es de grado 3 (v_1, v_4, v_7)
   - v_4 es de grado 3 (v_2, v_6, v_7)
   - v_6 es de grado 2 (v_4, v_5)
   - v_5 es de grado 2 (v_3, v_5)
   - Se ha cumplido la sucesión original: $\{4, 3, 3, 3, 3, 2, 2\}$

6 Grafos de Euler

Sea G un grafo conexo, un camino de euler es un recorrido en el que aparecen todos los lados.
Un circuito de Euler es un camino de Euler cerrrado.

6.1 Particularidades

Si G es un circuito de Euler, entonces el grado de cada vértice es par.
Si G tiene un camino de Euler, G tiene exactamente dos vértices de grado impar (donde empieza y termina el camino)
Lo que nos queda que dado cualquier grafo G, G es un grafo de Euler si todos sus vértices tienen grado par.

6.2 Algoritmo de fleury

1. Si todos los vértices son pares, elegimos cualquiera. Si G tiene 2 vértices de grado impar, elegimos uno de estos.
2. Hacemos que $S_V = v$ y $S_E = []$
3. Si G solo tiene a v, devuelve S_V y S_E y termina.
4. Si hay un único lado que incida en v, llamamos w al otro vértice de dicho lado, quitamos de G el vértice y el lado y avanzamos al paso 6.
5. Si hay más de un lado que incida en v, elegimos uno de estos de forma que el grafo siga siendo conexo al quitarlo. LLamamos e a dicho lado y w al otro vértice que incide en e.
6. Añadimos w al final de S_V y e al final de S_E
7. Cambiamos v por w y volvemos al paso 3

7 Grafos de Hamilton

Un camino de hamilton es un camino que recorre todos los vértices de un grafo de una sola vez.
Un circuito de hamilton es un camino cerrado que recorre todos los vértices una sola vez.
Un grafo con un circuito de Hamilton se denomina grafo Hamiltoniano

7.1 Particularidades

- Si el número de lados es mayor o igual que $\frac{1}{2}(n-1)\cdot(n-2)+2$ es un grafo hamiltoniano.
- Si $n \geq 3$ y para cada par de vértices **no** adyacentes se verifica que el $gr(v)+gr(w) \geq n$ entonces es un grafo hamiltoniano.

8 Grafos Bipartidos

G es un grafo bipartido si se puede descomponer V en dos subconjuntos distintos V_1 y V_2 de forma que todo lado incide en un vértice de V_1 y en un vértice de V_2

8.1 Particularidades

G es bipartido si y solo sí G no contiene ciclos de longitud impar.

9 Grafos planos

Una representación se dice plana si los vértices y los planos se concentran en el plano, es decir, los lados no se cortan
Si en un poliedro, v es el número de vértices, l es el número de aristas y c es el número de caras, entonces $v - l + c = 2$
Si el grafo es conexo, sin lazos ni vértices de grado 1, entonces $3c \geq 2l$ y $l \geq 3v - 6$

10 Coloración de grafos

Cuando el conjunto C sea un conjunto de colores, lo que realiza una aplicacion f para aplicar la coloración es asignar un color a cada vértice de G, de manera que dos vértices adyacentes no pueden tener el mismo color.
Se llama número cromático al cardinal del menor conjunto C para el que existe coloración de G

10.1 Polinomio cromático

Dado que es difícil determinar el número cromático, nos valemos del polinomio cromático.
Vamos a denotar $p(G, x)$ al número de coloraciones distintas, con x colores, que tiene el grafo G
Nos vamos a limitar a estudiar las coloraciones en grafos conexos.
El polinomio cromático del grafo P_n es el $p(P_n, x) = x(x - 1)^n$
El polinomio de un grafo camino es $x(x - 1)(x - 2)...(x - n_{-1})$ siendo n el número de vértices

11 Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos.

- G es un árbol si y solo sí tiene n-1 lados.
- Son los mayores grafos conexos o los menores grafos sin ciclos.

11.1 Árboles generadores

Un árbol es un subgrafo de G que contiene todos los vértices y cumple las propiedades de árbol.
Para obtener uno, comprobamos si G tiene ciclos, si no los tiene tenemos ya el árbol generador. Si tiene ciclos, eliminamos un lado de ese ciclo y volvemos al inicio.

11.1.1 Obtención del arbol generador minimal

Dado un grafo, se extraen la unión de los vértices ordenados de menor a mayor (creciente) siguiendo el siguiente formato:
$v_0v_3; v_1v_4; v_0v_2...$
Solo habría que reconstruir siguiendo el orden.

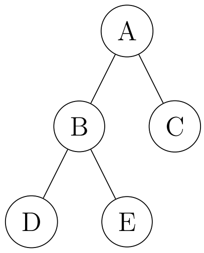
11.2 Recorridos en árboles

11.2.1 Recorrido preorden

El recorrido en preorden visita los nodos en el siguiente orden: raíz, subárbol izquierdo, subárbol derecho. Aquí tienes un ejemplo del procedimiento para recorrer un árbol en preorden:

1. Visitar la raíz del árbol.
2. Recorrer el subárbol izquierdo en preorden.
3. Recorrer el subárbol derecho en preorden.

Supongamos que tenemos el siguiente árbol binario:



El procedimiento correcto para recorrer este árbol en preorden es:

1. Visitar la raíz: A
2. Recorrer el subárbol izquierdo de A:
   (a) Visitar la raíz: B
   (b) Recorrer el subárbol izquierdo de B:
      i. Visitar la raíz: D
      ii. El nodo D no tiene subárboles, por lo que volvemos a B.
   (c) Recorrer el subárbol derecho de B:
      i. Visitar la raíz: E
      ii. El nodo E no tiene subárboles, por lo que volvemos a A.
3. Recorrer el subárbol derecho de A:
   (a) Visitar la raíz: C
   (b) El nodo C no tiene subárboles, por lo que el recorrido en preorden está completo.

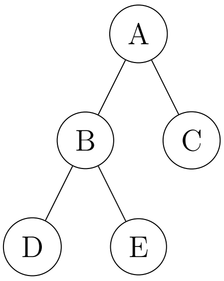
El recorrido en preorden para este árbol es: A, B, D, E, C.

11.2.2 Recorrido post-orden

El recorrido en postorden visita los nodos en el siguiente orden: subárbol izquierdo, subárbol derecho, raíz. Aquí tienes un ejemplo del procedimiento para recorrer un árbol en postorden:

1. Recorrer el subárbol izquierdo en postorden.
2. Recorrer el subárbol derecho en postorden.
3. Visitar la raíz del árbol.

Supongamos que tenemos el siguiente árbol binario:



El procedimiento correcto para recorrer este árbol en postorden es:

1. Recorrer el subárbol izquierdo de A:
   (a) Recorrer el subárbol izquierdo de B:
      i. El nodo D no tiene subárboles, por lo que lo visitamos: D
   (b) Recorrer el subárbol derecho de B:
      i. El nodo E no tiene subárboles, por lo que lo visitamos: E
   (c) Visitar la raíz: B
2. Recorrer el subárbol derecho de A:
   (a) El nodo C no tiene subárboles, por lo que lo visitamos: C
3. Visitar la raíz: A

El recorrido en postorden para este árbol es: D, E, B, C, A.