LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

19 de Junio de 2023

Apellidos y nombre:____ **D.N.I.:**________________

Indica el grupo al que perteneces: A B C D E F Doble Grado (Inf + ADE)

Todas las respuestas han de estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1

Sean $f, g : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ las funciones booleanas dadas por $f(y, z, t) = (y \uparrow z) \uparrow t$ y $g(y, z, t) = (\overline{y} \downarrow z) \downarrow \overline{t}$, y sea $h : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función:

$$h(x, y, z, t) = \begin{cases} f(y, z, t) & \text{si } x = 0 \\ g(y, z, t) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Calcula la forma canónica conjuntiva de g.
2. Expresa g usando únicamente el operador `NAND`.
3. Calcula todos los implicantes primos de h.
4. Calcula una expresión reducida o minimal, como suma de producto de literales, de la función h.

Ejercicio 2

Nos encontramos en la isla donde hay dos grupos de personas: los que dicen siempre la verdad y los que siempre mienten. Queremos averiguar tres cosas: si hay oro en la isla, si está en la isla Paco López (el entrenador del Granada CF, que está intentando aislarse del mundo después del cansancio de la temporada), y si ha habido buena cosecha.

Los habitantes de la isla conocen la respuesta a nuestras tres preguntas, pero la respuesta que nos dan no siempre nos aclara lo que queremos saber.

Preguntamos a tres nativos, cuyos nombres son (o eso creemos) Ana, Bartolomé y Carmen, y las respuestas que nos dan son:

- Ana: *Hay oro y buena cosecha.*
- Bartolomé: *Si hay oro, no hay buena cosecha.*
- Carmen: *Si está Paco López, hay buena cosecha.*

Después de pensar no llegamos a ninguna conclusión, por lo que les pedimos más información. Entonces, Bartolomé nos dice que *si no hay oro, Paco López no viene por aquí*, a lo que añade Ana *pues no ha venido.*

¿Podrías responder a las tres cuestiones que traíamos?

Ejercicio 3

Interpreta cada una de las siguientes fórmulas en cada una de las estructuras que se describen:

1. $\alpha_1 = \exists x \forall y P(f(y), x)$
2. $\alpha_2 = \forall x \exists y P(f(y), x)$
3. $\alpha_3 = \forall y \exists x P(f(y), x)$

Estructura 1	**Estructura 2**	**Estructura 3**
$D_1 = \mathbb{R}$	$D_2 = \mathbb{Z}_5$	$D_3 = \mathbb{Z}_2$
$f(z) = z^2$	$f(z) = z^2$	$f(z) = z^2$
$P(x, y) \equiv x + y = 0$	$P(x, y) \equiv x + y = 0$	$P(x, y) \equiv x + y = 0$

¿Es alguna de ellas universalmente válida? Razona la respuesta.

Ejercicio 4

Consideramos las fórmulas siguientes de un lenguaje de primer orden:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x \Big(\exists y Q(y, x) \to \neg P(x) \Big) \\
\alpha_2 &= \forall x \Big(Q(x, f(x)) \ \wedge \ \forall y Q(y, g(y)) \Big) \\
\alpha_3 &= \forall x \Big(P(x) \to P(f(x)) \ \vee \ P(g(x)) \Big) \\
\beta &= \forall x \neg P(x).
\end{aligned}$$

Estudia si β es o no consecuencia lógica del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

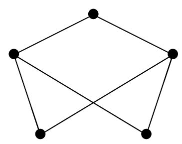
Ejercicio 5

1. Sea x_n la sucesión dada por $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + 2$ para $n \geq 2$.
   a) Expresa x_n mediante una recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes.
   b) Calcula una expresión cerrada para x_n.
2. Demuestra que para cualquier número natural n se verifica que:

$$3^n \cdot 2^0 + 3^{n-1} \cdot 2^1 + \cdots + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 3^0 \cdot 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Ejercicio 6

1. Calcula el polinomio cromático del grafo siguiente:



2. Sea $G = K_{16}$ (el grafo completo con 16 vértices). Determina:
   a) el número mínimo de lados que hay que quitar a G para que el grafo tenga un circuito de Euler.
   b) el número mínimo de lados que hay que quitar a G para que el grafo resultante no tenga un ciclo de Hamilton.
   c) el menor número de lados que hay que quitar a G para tener un grafo bipartido.
   d) el menor número de lados que hay que quitar a G para tener un grafo plano
   e) el menor número de lados que hay que quitar a G para tener un grafo sin ciclos.

   Al eliminar un lado no se elimina ninguno de los vértices que conecta.