academia DOS MOTIVOS



Resumen Tema 1. Álgebras de Boole

Asignatura: Lógica y Métodos Discretos Wuolah: Bl4ckTyson

Voy a intentar hacer un documento resumido de manera enriquecida. El resumen contendrá información de diapositivas, ejercicios, vídeos...

> Bl4ckTyson 2024



Contents

1	Ger	nerali	dades de Algebra de Boole	3
	1.1	Defin	icion	3
	1.2	Princ	ipio de dualidad	3
	1.3	Propi	edades	3
	1.4	Order	n en Álgebras de boole	3
2	Est	ructu	ras de Álgebra de boole finitas	4
			orfismos de álgebras de boole	4
	2.2		os y coátomos	4
		2.2.1	Átomos:	4
		2.2.2	Coátomos:	4
	2.3	Teore	ma de estructura de álgebras de Boole finitas	4
3	Fur	cione	es Booleanas	4
	3.1	Expre	esión para una función de f	4
	3.2	_	esiones booleanas equivalentes	5
	3.3	FORM	MA NORMAL CANÓNICA DISYUNTIVA	5
		3.3.1	Minterms	5
		3.3.2	$egin{aligned} ext{Minterms} \ \mathbb{B}_4 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$	5
		3.3.3	Ejemplo de FNCD	5
	3.4	FORM	MA NORMAL CANÓNICA CONJUNTIVA	6
		3.4.1	Maxterms	6
		3.4.2	$\mathbf{Maxterms} \mathbb{B}_4 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots $	6
		3.4.3	Ejemplo de FNCC	6
	3.5	Puert	as lógicas	6
	3.6	Mapa	s de karnaugh	7
	3.7	Impli	cantes primos	8
	3.8	Quine	e McCluskey	9
		3.8.1	Cálculo de Implicantes Primos	9
		3.8.2	Metodo de petrick	10



1 Generalidades de Algebra de Boole

1.1 Definicion

Sea B un conjunto distinto del vacío, B tiene una estructura lógica si en las operaciones de AND $(x \land y)$ y del OR $(x \lor y)$ se cumplen las siguientes propiedades:

- Asociativa: $\begin{cases} x \lor (y \lor z) = (x \lor y) \lor z \\ x \land (y \land z) = (x \land y) \land z \end{cases}$ Para cualquier valor x,y,z \in B
- Conmutativa: $\left\{ \begin{array}{l} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{array} \right. \text{ Para cualquier valor } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}$
- **Distributiva**: $\begin{cases} x \lor (y \land z) = (x \lor y) \land (x \lor z) \\ x \land (y \lor z) = (x \land y) \lor (x \land z) \end{cases}$ Para cualquier valor x,y,z \in B
- Elementos neutros. $\exists 0,1 \in B \text{ tal que: } \begin{cases} x \lor 0 = x \\ x \land 1 = x \end{cases}$
- Complementarios. Para cualquier $x \in B$, $\exists \overline{x} \in B$ tal que: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ x \wedge \overline{x} = 0 \end{cases}$

1.2 Principio de dualidad

Sea B un algebra de boole, donde tenemos las operaciones \land y \lor consideramos: $\begin{cases} x \lor^d y = x \land y \\ x \land^d y = x \lor y \end{cases}$ Esto verifica que la propiedad dual es un álgebra de boole, además $0^d = 1$ y $1^d = 0$ Un enunciado es **autodual** cuando él es su propio dual.

1.3 Propiedades

- Idempotencia: $x \lor x = x$; $x \land x = x$
- **Dominacion**: $x \lor 1 = 1$; $x \land 0 = 0$
- Absorción: $x \vee (x \wedge y) = x$; $x \wedge (x \vee y) = x$
- $\bullet \quad \text{Cancelativa:} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \vee y = x \vee z \\ x \wedge y = x \wedge z \end{array} \right\} \implies y = z.$
- Doble Complementario: $\overline{\overline{x}} = x$
- Leyes de Morgan: $\left\{\begin{array}{l} \overline{x\vee y} = \overline{x}\wedge \overline{y} \\ \overline{x\wedge y} = \overline{x}\vee \overline{y} \end{array}\right.$

1.4 Orden en Álgebras de boole

En álgebras de boole, $x \le y$ si $x \lor y = y$

Bl4ckTyson



3

Esto no son apuntes pero tiene un 10 asegurado (y lo vas a disfrutar igual).

Abre la **Cuenta NoCuenta** con el código <u>WUOLAH10</u>, haz tu primer pago y llévate 10 €.





Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

NG BANK NV se encuentra adherida di Sistema de Garantía de Depósitas Holandès con una garantía de hasta 100.000 euros par depositante. Consulta más información en ing.es

Lógica y Métodos Discretos

Tema 1. Álgebras de Boole

2 Estructuras de Álgebra de boole finitas

2.1 Isomorfismos de álgebras de boole

Un isomofismo de álgebras de Boole es una funcion f que establece **correspondencia uno a uno** entre los elementos de dos álgebras de Boole.

2.2 Átomos y coátomos

2.2.1 Átomos:

Un átomo es un elemento minimal del cojunto $B \setminus \{0\}$. Un elemento es minimal cuando no hay ningún elemento de menor orden que dicho elemento.

2.2.2 Coátomos:

Un coátomo es un elemento maximal del conjunto $B \setminus \{1\}$. Un elemento es maximal cuando **no hay ningún elemento de mayor orden** que dicho elemento.

2.3 Teorema de estructura de álgebras de Boole finitas

Teorema 1 Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B distinto de 0 se escribe de forma única como disyunción (supremo) de átomos.

Teorema 2 Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces, todo elemento de B distinto de 1 se escribe de forma única como conjunción de coátomos.

3 Funciones Booleanas

Teorema 3 Sea n un número natural mayor o igual que 1. Una función booleana en n variables $f: \mathbb{B}^n \implies \mathbb{B}$. Las funciones f+g y f*g se definen como: $\begin{cases} (f+g)(x_1,x_2,...,x_n) = f(x_1,x_2,...,x_n) + g(x_1,x_2,...,x_n) \\ (f*g)(x_1,x_2,...,x_n) = f(x_1,x_2,...,x_n) * g(x_1,x_2,...,x_n) \end{cases}$ Estas operaciones siquen siendo un algebra de boole

3.1 Expresión para una función de f

Si S es un conjunto, se define:

- Si $x \in S \cup \{0,1\}$ entonces x es una expresión booleana.
- Si e_1 y e_2 son expresiones booleanas, también lo son las operaciones con ambas.

Solo las expresiones que cumplen esto son booleanas.

Bl4ckTyson









Consulta condiciones **aquí**





3.2 Expresiones booleanas equivalentes

Sea S un cojunto con n elementos, dos expresiones booleanas e_1 y e_2 son **equivalentes** si dan lugar a la misma funcion boolena $(e_1 = e_2)$

Por ejemplo, las expresiones de las propiedades, $\overline{1} = 0...$

Los **átomos** son aquellas funciones booleanas que toman el **valor de 1** en un elemento de \mathbb{B}^n , por ende, los **coátomos** son aquellas funciones que toman el **valor de 0**

3.3 FORMA NORMAL CANÓNICA DISYUNTIVA

Toda función booleana puede escribirse de forma única como suma de sus minterms

3.3.1 Minterms

Un minterm es un **producto** de n literales, cada uno con una variable diferente. Un literal es un **elemento** de S o su negado $(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

Ejemplo de minterm: $\{x\overline{z}\}, \{\overline{x}y\overline{z}\}...$ Cada minterm representa un átomo de F_n .

3.3.2 Minterms \mathbb{B}_4

$$m_{0} \leftrightarrow \overline{x} \, \overline{y} \, \overline{z} \, \overline{w} \quad m_{4} \leftrightarrow \overline{x} \, y \, \overline{z} \, \overline{w} \quad m_{8} \leftrightarrow x \, \overline{y} \, \overline{z} \, \overline{w} \quad m_{12} \leftrightarrow x \, y \, \overline{z} \, \overline{w}$$

$$m_{1} \leftrightarrow \overline{x} \, \overline{y} \, \overline{z} \, w \quad m_{5} \leftrightarrow \overline{x} \, y \, \overline{z} \, w \quad m_{9} \leftrightarrow x \, \overline{y} \, \overline{z} \, w \quad m_{13} \leftrightarrow x \, y \, \overline{z} \, w$$

$$m_{2} \leftrightarrow \overline{x} \, \overline{y} \, z \, \overline{w} \quad m_{6} \leftrightarrow \overline{x} \, y \, z \, \overline{w} \quad m_{10} \leftrightarrow x \, \overline{y} \, z \, \overline{w} \quad m_{14} \leftrightarrow x \, y \, z \, \overline{w}$$

$$m_{3} \leftrightarrow \overline{x} \, \overline{y} \, z \, w \quad m_{7} \leftrightarrow \overline{x} \, y \, z \, w \quad m_{11} \leftrightarrow x \, \overline{y} \, z \, w \quad m_{15} \leftrightarrow x \, y \, z \, w$$

3.3.3 Ejemplo de FNCD

• Forma Normal Disyuntiva:

$$f = x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\overline{y}z$$



3.4 FORMA NORMAL CANÓNICA CONJUNTIVA

Toda función booleana puede escribirse de forma única como producto de sus maxterms.

3.4.1 Maxterms

Un maxterm es una **suma** de *n* literales, cada uno con una variable diferente. Un literal es un **elemento** de *S* o su negado $(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

Ejemplo de maxterm: $\{x + \overline{z}\}, \{\overline{x} + y + \overline{z}\}...$ Cada maxterm representa una cláusula de F_n .

3.4.2 Maxterms \mathbb{B}_4

$$\begin{array}{llll} M_0 \leftrightarrow x + y + z + w & M_4 \leftrightarrow x + \overline{y} + z + w & M_8 \leftrightarrow \overline{x} + y + z + w & M_{12} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + z + w \\ M_1 \leftrightarrow x + y + z + \overline{w} & M_5 \leftrightarrow x + \overline{y} + z + \overline{w} & M_9 \leftrightarrow \overline{x} + y + z + \overline{w} & M_{13} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + z + \overline{w} \\ M_2 \leftrightarrow x + y + \overline{z} + w & M_6 \leftrightarrow x + \overline{y} + \overline{z} + w & M_{10} \leftrightarrow \overline{x} + y + \overline{z} + w & M_{14} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + w \\ M_3 \leftrightarrow x + y + \overline{z} + \overline{w} & M_7 \leftrightarrow x + \overline{y} + \overline{z} + \overline{w} & M_{11} \leftrightarrow \overline{x} + y + \overline{z} + \overline{w} & M_{15} \leftrightarrow \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + \overline{w} \end{array}$$

3.4.3 Ejemplo de FNCC

• Forma Normal Conjuntiva:

$$f = (x+y)(x+\overline{y})(\overline{x}+y)(\overline{x}+\overline{y})$$

3.5 Puertas lógicas

• Puerta XOR: $x \oplus y = \overline{x}y + x\overline{y}$

• Puerta XNOR: $\overline{x \oplus y} = xy + \overline{x}\,\overline{y}$

• Puerta NAND: $x \uparrow y = \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

• Puerta NOR: $x \downarrow y = \overline{x+y} = \overline{x} \overline{y}$

Bl4ckTyson 6





academia DOS MOTIVOS

Lógica y Métodos Discretos

Tema 1. Álgebras de Boole

3.6 Mapas de karnaugh

El objetivo de los mapas de Karnaugh es el de **simplificar funciones booleanas**. El proceso sería el siguiente:

1. El mapa de karnaugh será una matriz $\mathbf{M}\mathbf{x}\mathbf{N}$ como combinación de literales para M y para N, dependiendo del \mathbb{B} en el que estemos. Por ejemplo, para $\mathbb{B}^4(x,y,z,t)$ tendremos un mapa 4x4, donde las columnas corresponderán a \mathbf{z} y \mathbf{t} , y las filas a \mathbf{x} y a \mathbf{y} (por ejemplo)

x,y	z,t	00	01	11	10
	00	m0	m1	m3	m2
	01	m4	m5	m7	m6
	11	m12	m13	m15	m14
	10	m8	m9	m11	m10

2. El siguiente paso será pasar la función booleana a reducir como suma de minterms, es decir, pasarla a **FNCD**.

Por ejemplo: $f = m_1 + m_4 + m_5 + m_9 + m_{12} + m_{13}$

3. Ahora hay que sustituir en el mapa de karnaugh por 1 aquellas casillas correspondientes a sus minterms

x,y z,t	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10		1		



4. Ahora hay que hacer agrupaciones. El criterio a seguir es que se deben de agrupar 2^n casillas. Se tiene que intentar agrupar el mayor número de casillas. Se pueden repetir casillas seleccionadas solo si agrupa nuevas casillas.

x,y z,t	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10		1		

5. Por último, formamos la función reducida. Para ello **escogemos los unos cuyas** variables se mantienen en toda la agrupación.

En nuestro caso sería: $f(x, y, z, t) = y\overline{z} + \overline{z}t$

6. Este proceso tiene su versión dual. Se pueden **agrupar Maxterm** siguiendo el mismo proceso, solo que reduciremos como suma de Maxterm, **agrupando 0 en lugar de 1**, extrayendo la **FNCC**.

3.7 Implicantes primos

G es un implicante de F si G < F.

Un implicante primo es un tipo de implicante primo si al suprimir cualquiera de los literales del implicante, deja de serlo.

Esto pasado a un mapa de karnaugh, serían aquellos implicantes que no pertenecen a un bloque más grande, por eso al agrupar siguiendo esta técnica se obtiene funciones reducidas.





3.8 Quine McCluskey

3.8.1 Cálculo de Implicantes Primos

- 1. Se toman los minterm de f y se agrupan según el número de 1s Ejemplo: $f=m_3+m_5+m_7+m_{11}+m_{13}+m_{15}$
- 2. Se ordenan en una columna de orden decreciente según el número de unos.

15 1111
13 1101
11 1011
7 0111
5 0101
з 0011

3. Se comparan las cadenas de un bloque con el inferior. Si se diferencian en **solo un bit** las marcamos, llevándolas a una columna a la derecha, dejando un espacio en el bit que difieren.

En el ejemplo, tendríamos de primera mano

```
(13,15) 11-1

(11,15) 1-11

(7,15) -111

(5,13) -101

(3,11) -011

(5,7) 01-1

(3,7) 0-11
```

Y en segunda instancia tendríamos:

```
(5,7,13,15) -1-1
(3,7,11,15) -11
```

- 4. Las cadenas no marcadas son los implicantes primos
- 5. Estos implicantes primos se llevan a una tabla, donde se ve que minterms cubre. Aquellos minterms que solo se cubran con un implicante primo los conocemos como **implicantes primos esenciales**, y formarán parte de todas las versiones de la expresión reducida.

Estos implicantes primos esenciales cubren también aquellos minterms de los cuales no son implicantes primos esenciales. Es decir, si xz es implicante primo que cubre m14, y además comparte con otro implicante para m5 (por ejemplo), m5 se considera cubierto también.

El resto de minterms se estudian aparte, se simplifican aquellos dominados, y se tienen tantas versiones de expresión reducida como implicantes queden.

Bl4ckTyson



9

Esto no son apuntes pero tiene un 10 asegurado (y lo vas a disfrutar igual).

Abre la **Cuenta NoCuenta** con el código <u>WUOLAH10</u>, haz tu primer pago y llévate 10 €.



Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

G BANK NV se encuentra adherido Sistema de Garantía de Depósitos siondês con una garantía de hasta 10.000 euros por depositante, insulta más información en ing.es

Me interesa

Lógica y Métodos Discretos

Tema 1. Álgebras de Boole

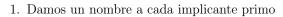




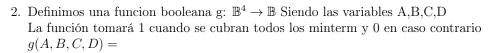
Partimos de la función booleana $f=m_0+m_1+m_5+m_7+m_8+m_{10}+m_{11}+m_{13}+m_{14}+m_{15}$ Tenemos como implicantes primos esenciales: xz e yt que cubren: $m_5+m_7+m_{10}+m_{11}+m_{13}+m_{14}+m_{15}$

Nos quedan por cubrir $m_0 + m_1 + m_8$

Tenemos los implicantes primos $x\overline{y}\overline{t},\overline{xz}t,\overline{yz}\overline{t},\overline{xyz}$

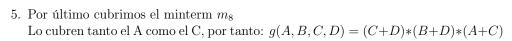


- $\bullet \ \mathbf{A} = x\overline{y}\overline{t}$
- $B = \overline{xz}t$
- $C = \overline{yz}\overline{t}$
- $D = \overline{xyz}$



3. Cubrimos minterm m_0 . Lo cubren tanto el C como el D, por tanto: g(A, B, C, D) = (C + D)

4. Cubrimos minterm m_1 . Lo cubren tanto el B como el D, por tanto: g(A, B, C, D) = (C + D) * (B + D)





$$g(A, B, C, D) = (C + D) * (B + D) * (A + C)$$

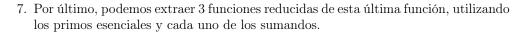
$$g(A, B, C, D) = (CB + CD + DB + DD) * (A + C)$$

$$g(A, B, C, D) = (D + CB) * (A + C)$$

$$g(A, B, C, D) = DA + DC + CBA + CB$$

$$g(A, B, C, D) = DA + DC + CB$$

$$g(A, B, C, D) = AD + CD + BC$$



•
$$f(x, y, z, t) = xz + yt + x\overline{y}\overline{t} + \overline{xyz}$$
 (AD)

•
$$f(x, y, z, t) = xz + yt + \overline{yz}\overline{t} + \overline{xyz}$$
 (CD)

•
$$f(x, y, z, t) = xz + yt + \overline{xz}t + \overline{yz}\overline{t}$$
 (BC)



10 A