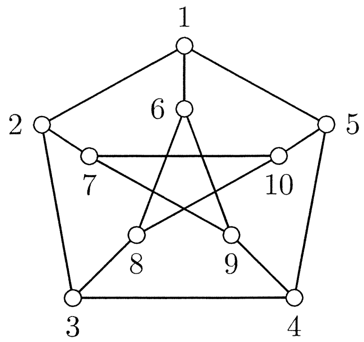
Ejercicios de desarrollo

1. Sea X un conjunto infinito. Un subconjunto de X se denomina *cofinito*, si su complementario en X es finito. Sea $\mathcal{A}(X)$ el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X que son finitos ó cofinitos. ¿Es $\mathcal{A}(X)$ un álgebra de Boole respecto de la unión y la intersección de dos conjuntos, y el complementario respecto de X?

2. Sea d un número natural arbitrario. ¿Es cierto que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^d \leq n^{d+1}$ para todo número natural $n \geq 1$?

3. Sea la sucesión de números reales definida por la recurrencia
$$\begin{cases} f(0) = 1, \ f(1) = 1, \ f(2) = 1, \\ f(n) - f(n-1) - 4f(n-2) = 6f(n-3), \quad \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$
Encuentre una fórmula cerrada para $f(n)$ en términos de números reales.

4. Enuncie el Teorema de Kuratowski sobre grafos planos, y utilice dicho teorema para estudiar si el grafo siguiente es plano:



Ejercicios tipo test

1. Sea la función booleana $f(x, y, z, t) = \sum m\Big(0, 1, 2, 5, 8, 9, 11, 13, 15\Big)$. Entonces:
   (a) $f(x, y, z, t) \leq (\overline{x} + y + \overline{z} + t) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + \overline{t})$.
   (b) La expresión xyt es un implicante primo de f.
   (c) $\overline{x} \cdot \overline{z} \cdot t + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{t} \leq f(x, y, z, t)$.
   (d) f tiene exactamente dos implicantes primos de dos literales y dos implicantes primos de tres literales.

2. Consideramos las siguientes afirmaciones donde Ω y Ω' denotan conjuntos arbitrarios de proposiciones lógicas y α una proposición lógica:
$$A_1 : \quad \Omega \not\models \alpha \ \Rightarrow \ \Omega \models \neg\alpha.$$
$$A_2 : \quad \Omega \models \alpha \ \text{ y } \ \Omega' \subseteq \Omega \ \Rightarrow \ \Omega' \models \alpha.$$
Entonces:

(a) A_1 es verdadera y A_2 es verdadera.

(b) A_1 es verdadera y A_2 es falsa.

(c) A_1 es falsa y A_2 es verdadera.

(d) A_1 es falsa y A_2 es falsa.

3. Un país está habitado por dos tipos de personas, los *veraces* que siempre dicen la verdad, y los *mendaces* que siempre mienten, es decir, si se les pregunta por algo que ellos saben que es verdad, responden diciendo que es mentira, y si ellos saben que es mentira, responden diciendo que es verdad. Un turista viaja a dicho país y se encuentra con tres lugareños que denominamos A, B y C, cada uno de los cuales afirma lo siguiente:

   A dice: "B y C son personas del mismo tipo".

   B dice: "Si A es veraz, entonces C también es veraz".

   C dice: "Si A es mendaz, entonces B también es mendaz".

   ¿Qué información se deduce sobre el tipo de persona al que pertenecen A, B y C?

   (a) A y B son del mismo tipo, aunque éste no se puede determinar, y C es veraz.

   (b) A y C son del mismo tipo, aunque éste no se puede determinar, y B es veraz.

   (c) B y C son veraces, y no se puede determinar el tipo de A.

   (d) A y C son veraces, y B es mendaz.

4. Sea el conjunto de proposiciones lógicas $\Omega = \{P \to \neg(R \to Q),\ (T \to Q) \to \neg(P \to S)\}$ y las proposiciones $\alpha = Q \to T$ y $\beta = Q \to R$. Entonces:

   (a) $\Omega \models \alpha$ y $\Omega \models \beta$.

   (b) $\Omega \models \alpha$ y $\Omega \not\models \beta$.

   (c) $\Omega \not\models \alpha$ y $\Omega \models \beta$.

   (d) $\Omega \not\models \alpha$ y $\Omega \not\models \beta$.

5. Sea la fórmula lógica $\alpha = \forall x(R(f(x), f(y)) \to R(x, y))$ de un lenguaje de predicados $\mathfrak{L}$ tal que $\mathrm{Func}(\mathfrak{L}) = \{f^1\}$ y $\mathrm{Pred}(\mathfrak{L}) = \{R^2\}$. Consideramos la estructura $\mathcal{E}$ para $\mathfrak{L}$ tal que:

$$\begin{cases} \mathrm{D}_{\mathcal{E}} = \mathbb{Z}_6 \\ f^{\mathcal{E}}(r) = 4 \cdot r \\ R^{\mathcal{E}}(r, s) = \mathbf{1} \text{ si y sólo si } r = s. \end{cases}$$

   Entonces:

   (a) α es satisfacible en $\mathcal{E}$, pero no es válida en $\mathcal{E}$.

   (b) α es universalmente válida, pues su cierre universal, es decir, la fórmula $\forall y\alpha$, es universalmente válida.

   (c) α no es satisfacible en $\mathcal{E}$, pero sí lo es en otras estructuras de $\mathfrak{L}$ distintas de $\mathcal{E}$.

   (d) α es válida en $\mathcal{E}$, pero no es universalmente válida.

6. Consideramos la fórmula $\alpha = \Big(\forall x_1 R(x_1, a) \to \forall x_2 R(x_2, x_1)\Big) \to \exists x_1 Q(x_1)$ de un lenguaje de predicados, donde como es usual a es un símbolo de constante y x_1, x_2 son símbolos de variable. ¿Cuál de las fórmulas siguientes es una forma prenexa de α?

   (a) $\forall x_2 \exists x_3 \Big(\neg Q(x_3) \to \neg(R(x_2, a) \to R(x_3, x_1))\Big)$.

   (b) $\forall x_2 \exists x_1 \Big((\neg Q(x_1) \to R(x_2, a)) \wedge (R(x_2, x_1) \to Q(x_1))\Big)$.

   (c) $\exists x_3 \exists x_2 \Big((R(x_3, a) \to R(x_3, x_1)) \to Q(x_2)\Big)$.

   (d) $\forall x_3 \forall x_2 \exists x_4 \Big((R(x_3, a) \vee Q(x_4)) \wedge (\neg R(x_2, x_1) \vee Q(x_4))\Big)$.

7. Sea $\Gamma = \Big\{\neg R(x, y) \vee S(x, y),\ R(g(x), a) \vee \neg S(y, x),\ \neg S(f(y), y) \vee \neg S(y, a)\Big\}$ un conjunto de cláusulas. Entonces:

   (a) Γ es satisfacible, y si le añadimos la cláusula $R(f(f(y)), x) \vee R(f(z), x)$, el conjunto que resulta es insatisfacible.

   (b) Γ es satisfacible, y si le añadimos la cláusula $R(f(f(y)), x) \vee R(f(z_1), z_2)$, el conjunto que resulta es satisfacible.

   (c) Γ es insatisfacible, y podemos llegar a esta conclusión aplicando el Principio de resolución guiado por una estrategia de búsqueda primero en profundidad con retroceso.

   (d) Γ es insatisfacible, y existe una refutación lineal-input para él ya que es un conjunto de Horn.

8. Sea G un grafo, sin autolazos ni lados paralelos, cuya matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Entonces las respuestas a las preguntas siguientes,

   (1.) ¿Existe en G algún camino de Euler?

   (2.) ¿Existe en G algún ciclo de Hamilton?

   son:

   a) (1.) NO; (2.) NO. *b*) (1.) NO; (2.) SÍ. *c*) (1.) SÍ; (2.) NO. *d*) (1.) SÍ; (2.) SÍ.