

ResumenT3.pdf



BlackTyson



Lógica y Métodos Discretos



1º Grado en Ingeniería Informática



Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada



MÁSTER EN

**Inteligencia Artificial
& Data Management**

MADRID

Formamos
talento para un futuro
Sostenible

saber más





Tema 3. Lógica de Predicados

Asignatura: *Lógica y Métodos Discretos*

Wuolah: Bl4ckTyson

Voy a intentar hacer un documento resumido de manera enriquecida. El resumen contendrá información de diapositivas, ejercicios, vídeos...

Bl4ckTyson

2024

Contents

1	Sintaxis del lenguaje	3
1.1	Lenguajes de primer orden	3
1.1.1	Clasificación de sujetos	3
1.1.2	Descripción del lenguaje	3
1.2	Sintaxis en lenguajes de primer orden	3
1.2.1	Términos	3
1.2.2	Fórmulas atómicas	4
1.3	Fórmulas de lenguaje de primer orden	4
1.4	Subfórmulas	4
1.5	Radio de acción de un cuantificador	4
1.5.1	Variables libres y ligadas	5
1.6	Sentencias	5
2	Semántica del lenguaje	5
2.1	Estructuras	5
2.2	Valoraciones e interpretaciones	6
2.3	Valor de verdad de una fórmula atómica	6
2.3.1	Valor de verdad de las conectivas en una interpretación	7
2.4	Traducciones. Ejemplos	7
2.5	Lema de coincidencia	7
2.5.1	Clasificación semántica de las fórmulas	8
3	Implicación semántica	8
3.1	Conjuntos satisfacibles e insatisfacibles	8
3.2	Implicación Semántica	8
3.3	Silogismos	8
3.4	Teoremas refutación y deducción	8
4	Equivalencia lógica	9
4.1	Negación y cuantificadores	9
4.2	Inclusión de conectivas en el radio de acción de un cuantificador	9
4.3	Eliminación de cuantificadores	9
4.4	Agrupar cuantificadores	10
4.5	Intercambio de cuantificadores	10
5	Formas normales	10
5.1	Forma normal prenexa	10
5.1.1	Ejemplo de cálculo de forma normal prenexa	10
5.2	Forma normal de Skolem	10
5.2.1	Cálculo de forma normal de Skolem	10
5.3	Forma clausulada	11
5.3.1	Clausulas	11
5.3.2	Cálculo de forma clausulada	11

1 Sintaxis del lenguaje

1.1 Lenguajes de primer orden

1.1.1 Clasificación de sujetos

- El sujeto viene determinado por identificador propio (nombre).
- El sujeto es un objeto genérico.
- El objeto viene identificado por un identificador pero no propio.

1.1.2 Descripción del lenguaje

- Los elementos de \mathcal{C} se les llama símbolos de **constante**. Se emplean minúsculas:
(a, b, c, a_1, a_2, \dots)
- Los elementos de \mathcal{V} se les llama símbolos de **variable**. Se emplean las últimas letras del alfabeto:
(x, y, z, x_1, x_2, \dots)
- Los elementos de \mathcal{F} se les llama símbolos de **función**. Cuenta con un número de aridad distinto de 0. Se emplean las letras f,g,h... con subíndices si fuera necesario y superíndices (opcional) para expresar la aridad.
($f, g, h, f_1, f_2^3, \dots$)
- Los elementos de \mathcal{R} se les llama símbolos de **predicado**. Cuenta con un número de aridad. Se emplean letras mayúsculas, siendo posible utilizar superíndices para expresar la aridad:
(P, Q, R, P^2, Q^1, \dots)
- Los elementos del conjunto $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ se consideran **conectivas**.
- Los elementos del conjunto $\{\forall, \exists\}$ son **cuantificadores**, siendo \forall **cuantificador universal** y \exists el **cuantificador existencial**.
- Consideramos los paréntesis y corchetes como auxiliares pero **NO** como símbolos.

1.2 Sintaxis en lenguajes de primer orden

1.2.1 Términos

- Todo \mathcal{C} es un término.
- Todo \mathcal{V} es un término.
- Si \mathcal{F} es un n-ario y sus elementos son términos, entonces \mathcal{F} es un término.
- Todo aquello que no siga estas reglas, no es un término.

Unos ejemplos serían: $a, f(a), f(f(a))\dots$

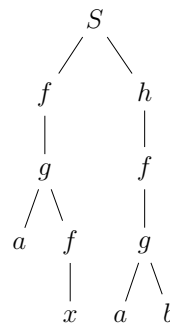


1.2.2 Fórmulas atómicas

Para que una fórmula sea atómica, el predicado debe ser n-ario y los elementos del mismo tienen que ser términos. **Un predicado nunca puede ser un elemento de otro.**

Por ejemplo: $P(a,x)$, $R(g(x,f(y)))$...

Representación de árbol: $S(f(g(a,f(x))), h(f(g(a,b))))$



1.3 Fórmulas de lenguaje de primer orden

- Toda fórmula atómica es fórmula del lenguaje.
- Si α y β son fórmulas de lenguaje, entonces también lo son:
 $\{\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \rightarrow \beta, \alpha \leftrightarrow \beta, \neg \alpha\}$
- Si α es fórmula del lenguaje y x es un símbolo de variable, entonces son fórmulas:
 $\{\forall x \alpha\} \{\exists x \alpha\}$
- Todo objeto que no siga esto, no es fórmula del lenguaje.
- A la hora de escribir fórmulas, las conectivas **siguen las reglas de prioridad de las conectivas que vimos en lógica proposicional.**
- Los cuantificadores tienen prioridad sobre las conectivas.

1.4 Subfórmulas

Si α es fórmula atómica, entonces $Sub(\alpha) = \{\alpha\}$. Esto ocurre con el resto de conectivas y cuantificadores.

1.5 Radio de acción de un cuantificador

El radio de acción de un cuantificador se entiende como la **subfórmula de β que acompaña al cuantificador**. Por ejemplo:

$$\beta = \forall x \neg R(g(x,a)) \rightarrow \exists y (S(g(b,y), f(x)) \wedge \neg Q(x,y, h(x)))$$

$$\forall x \text{ afecta a: } \neg R(g(x,a))$$

$$\exists y \text{ afecta a: } S(g(b,y), f(x)) \wedge \neg Q(x,y, h(x))$$

1.5.1 Variables libres y ligadas

Una variable es **ligada** si está en el **radio de acción de un cuantificador**, en caso contrario, es una variable **libre**.

Dado que la variable puede aparecer más de una vez, puede ser que en algunas ocasiones pueda estar ligada o no. En el ejemplo anterior:

- $\beta = \forall x \neg R(g(x, a)) \rightarrow \exists y (S(g(b, y), f(x)) \wedge \neg Q(x, y, h(x)))$
- $\forall x$ afecta a: $\neg R(g(x, a))$. Como ese para todo x afecta solo a esa subfórmula, por ejemplo los x que encontramos en $S(g(b, y), f(x)) \wedge \neg Q(x, y, h(x))$ no están en el rango de acción y por tanto son libres.
- $\exists y$ afecta a: $S(g(b, y), f(x)) \wedge \neg Q(x, y, h(x))$. Dado que en β son todas las y que encontramos, podríamos afirmar que todas las variables y son ligadas.

1.6 Sentencias

Una sentencia es una fórmula de un lenguaje de primer orden en la cual todas sus variables son ligadas.

2 Semántica del lenguaje

2.1 Estructuras

Una estructura \mathcal{E} consiste en:

- **Dominio** (D): Conjunto distinto del vacío
- Para cada $a \in \mathcal{C}$ un elemento $a^{\mathcal{E}} \in D$
- Para cada símbolo de función n -ario, una aplicación $f^{\mathcal{E}} : D^n \rightarrow D$
- Para cada símbolo de predicado n -ario, una aplicación $P^{\mathcal{E}} : D^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$
Ejemplo: Sea \mathcal{L} el lenguaje dado por $\mathcal{C} = \{s, a\}$, $\mathcal{F} = \{p^1, m^1\}$, y $\mathcal{R} = \{M^1, In^1, T^1, A^2\}$
Sea \mathcal{E} la \mathcal{L} -estructura siguiente:

- El dominio es el conjunto de todas las personas.
- $s = \text{Sócrates}$ y $a = \text{Aurora}$
- $p(x) = \text{padre de } x$ y $m(x) = \text{madre de } x$
- Asignación de predicados:

$$M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es mortal.} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$In(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es inteligente.} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es trabajador.} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es amigo de } y. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

ING BANK NV se encuentra adherido al Sistema de Garantía de Depósitos Holandés con una garantía de hasta 100.000 euros por depositante. Consulta más información en ing.es

Que te den **10 € para gastar**
es una fantasía.
ING lo hace realidad.

Abre la **Cuenta NoCuenta** con el código
WUOLAH10, haz tu primer pago y llévate 10 €.

Quiero el cash

[Consulta condiciones aquí](#)



do your thing

2.2 Valoraciones e interpretaciones

Una valoración es una aplicación de una variable sobre el dominio.

Una interpretación es un par (\mathcal{E}, v) donde \mathcal{E} es una estructura y v es una valoración.

2.3 Valor de verdad de una fórmula atómica

Consideramos el siguiente lenguaje de primer orden:

\mathcal{L} el lenguaje dado por $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$, y $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$

Consideramos la \mathcal{E} definida por:

- $D = n$
- $a = 0$
- $b = 1$
- $s(x) = x + 1$
- $m(x, y) = x \cdot y$
- $P(x) \equiv x$ es par
- $Pr(x) \equiv x$ es primo
- $M(x, y) \equiv x < y$
- $Eq(x, y) \equiv x = y$

Consideramos las valoraciones:

- $v(x) = 3$
- $v(y) = 7$
- $v(z) = 5$

Comprobemos las siguientes fórmulas atómicas

- $P(a) \implies I(P(a)) = 1$ ya que $v(a) = 0$ y 0 es un número par.
- $Pr(s(b)) \implies I(Pr(s(b))) = 1$ ya que $s(b) = 1 + 1 = 2$ y 2 es primo.
- $M(s(s(y)), m(x, s(b))) \implies I(M(s(s(y)), m(x, s(b)))) = 0$ ya que $s(s(y)) = 9$ y $m(x, s(b)) = 6$, por tanto como $9 \geq 6$ es falso.



2.3.1 Valor de verdad de las conectivas en una interpretación

- $I(\alpha \vee \beta) = I(\alpha) + I(\beta) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$
- $I(\alpha \wedge \beta) = I(\alpha) \cdot I(\beta)$
- $I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$
- $I(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\beta)$
- $I(\neg \alpha) = 1 + I(\alpha)$
- $I(\forall x \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si para cualquier elemento se tiene que } I^{\forall x}(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- $I(\exists x \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si para cualquier elemento se tiene que } I^{\exists x}(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

2.4 Traducciones. Ejemplos

Sea \mathcal{L} el lenguaje dado por $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{d^1, s^2, p^2\}$, y $\mathcal{R} = \{Q^1, M^2\}$

- Dominio $D = \mathbb{R}$.
- $a = 0, b = 1$.
- $d(x) = 2x, s(x, y) = x + y, p(x, y) = x \cdot y$.
- $Q(x) \equiv x \in \mathbb{Q}, M(x, y) \equiv x > y$.

Vamos a expresar por ejemplo el enunciado: "El doble de un número irracional es irracional".

1. "El doble de un número irracional es irracional"
2. Si x es un número irracional, su doble es irracional.
3. Si x es irracional, entonces $2x$ es irracional.
4. Si $x \notin \mathbb{Q}$ entonces $d(x) \notin \mathbb{Q}$
5. $\neg Q(x)$ implica $\neg Q(d(x))$
6. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg Q(d(x)))$

Cabe destacar que siempre que hablemos de un enunciado general hay que utilizar el $\forall x$

2.5 Lema de coincidencia

Si α es una sentencia, el **valor** de verdad de α **depende únicamente de la estructura y no de la valoración**.

2.5.1 Clasificación semántica de las fórmulas

- α es universalmente válida si para cualquier estructura \mathcal{E} y para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 1$
- α es válida en \mathcal{E} si para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 1$
- α es satisfacible en \mathcal{E} si existe una valoración la cual $I(\alpha) = 1$
- α es refutable en \mathcal{E} si existe una valoración la cual $I(\alpha) = 0$
- α no es válida en \mathcal{E} si para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 0$
- α es una contradicción si para cualquier estructura \mathcal{E} y para cualquier valoración se tiene que $I(\alpha) = 0$

3 Implicación semántica

3.1 Conjuntos satisfacibles e insatisfacibles

Decimos que Γ es **satisfacible** si existe una **interpretación** para que **todas las fórmulas** de Γ son **verdaderas**.

Γ es insatisfacible si para cualquier interpretación existe una $\gamma_1 = 0$

3.2 Implicación Semántica

Decimos que α es **consecuencia lógica** de Γ si para **cualquier interpretación** para la que sean **verdaderas** todas las fórmulas de γ se tiene que $I(\alpha) = 1$

3.3 Silogismos

Un silogismo es un argumento formado por tres enunciados, el cual el tercero se deduce de los dos anteriores. Los dos primeros son **premisas** y el tercero el **consecuente**.

Existe dos términos (S y P) y un término medio (M). Las dos premisas relacionan los términos S y P con el término medio M.

Ejemplo

- Todo hombre es mamífero (premisa 1)
- Todo hombre es inteligente (premisa 2)
- Existen mamíferos inteligentes si existen hombres (consecuente).

3.4 Teoremas refutación y deducción

Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden y α una fórmula del lenguaje, si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden, y α y β dos fórmulas del mismo lenguaje, si $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ entonces $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

4 Equivalencia lógica

En un lenguaje de primer orden, decimos que α y β son **lógicamente equivalentes** si **para cualquier interpretación se tiene que** $I(\alpha) = I(\beta)$

- α y β son lógicamente equivalentes.
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ es universalmente válida.
- $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \alpha$ son universalmente válidas.
- $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$.
- Los conjuntos $\{\alpha, \neg\beta\}$ y $\{\neg\alpha, \beta\}$ son insatisfacibles.

Es posible sustituir variables **libres** por términos. Ejemplo:

$$\alpha = \forall x(\exists y R(x, f(y)) \rightarrow P(y, x))$$

Por ejemplo, para sustituir y por z , podremos sustituir la sección de $\rightarrow P(y, x)$ ya que esa variable y es una variable libre, pero no podremos sustituir $f(y)$ por $f(z)$ ya que está ligada al $\exists y$

4.1 Negación y cuantificadores

Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden, entonces $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$

De forma análoga, $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$

4.2 Inclusión de conectivas en el radio de acción de un cuantificador

Si x no aparece libre en β

- $\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
- $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$
- $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$
- $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$
- $\forall x\alpha \rightarrow \beta \equiv \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$
- $\exists x\alpha \rightarrow \beta \equiv \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$
- $\alpha \rightarrow \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$
- $\alpha \rightarrow \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$

4.3 Eliminación de cuantificadores

- Si **no existe ninguna aparición libre** del símbolo de una variable libre, **se puede quitar sus cuantificadores**.
- Esto si afecta a la aparición de cuantificadores. Por ejemplo $\forall x\forall x\alpha \equiv \forall x\alpha$. Igual con \exists . Siempre que haya 2 cuantificadores de este estilo, se mantiene el que aparezca en segundo lugar.

Esto no son apuntes pero **tiene un 10 asegurado** (y lo vas a disfrutar igual).

Abre la Cuenta NoCuenta con el código **WUOLAH10**, haz tu primer pago y llévate 10 €.

Me interesa



1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

ING BANK NV se encuentra adherido al Sistema de Garantía de Depósitos Holandés con una garantía de hasta 100.000 euros por depositante. Consulta más información en [ing.es](https://www.ing.es)

4.4 Agrupar cuantificadores

- $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
- $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$

4.5 Intercambio de cuantificadores

- $\forall x\forall y\alpha \equiv \forall y\forall x\alpha$
- $\exists x\exists y\alpha \equiv \exists y\exists x\alpha$

5 Formas normales

5.1 Forma normal prenexa

Decimos que α está en forma normal prenexa si **todos sus cuantificadores aparecen al principio de la fórmula**.

Por ejemplo: $\exists x\exists y(S(x, y) \rightarrow R(b))$

5.1.1 Ejemplo de cálculo de forma normal prenexa

$$\begin{aligned}\text{Sea } \alpha &= \forall xS(x) \rightarrow \exists z\forall yR(z, y) \equiv \\ &\equiv \neg\forall xS(x) \vee \exists z\forall yR(z, y) \equiv \\ &\equiv \exists x\neg S(x) \vee \exists z\forall yR(z, y) \equiv \\ &\equiv \exists x(\neg S(x) \vee \exists z\forall yR(z, y)) \equiv \\ &\equiv \exists x\exists z(\neg S(x) \vee \forall yR(z, y)) \equiv \\ &\equiv \exists x\exists z\forall y(\neg S(x) \vee R(z, y))\end{aligned}$$

Ya está en forma normal prenexa

5.2 Forma normal de Skolem

α está en **forma normal de Skolem** si está en **forma prenexa** y **no existe ningún cuantificador existencial**.

Ejemplo: $\forall x\forall y(P(x, f(x)) \vee (Q(y, b)))$

La forma normal de Skolem **no es única**, por lo que hablaremos como una forma normal de Skolem y no la única.

5.2.1 Cálculo de forma normal de Skolem

Partimos de la forma normal prenexa que teníamos anteriormente:

$$\equiv \exists x\exists z\forall y(\neg S(x) \vee R(z, y)) \equiv$$

Dado que el $\exists x$ no tiene cuantificador universal a la izquierda podemos sustituir x por a

$$\equiv \exists z\forall y(\neg S(a) \vee R(z, y)) \equiv$$

Hacemos lo mismo con $\exists z$

$$\equiv \forall y(\neg S(a) \vee R(b, y))$$

Ya está en forma normal de Skolem

5.3 Forma clausulada

5.3.1 Clausulas

- Un literal es una fórmula atómica o su negada. Ejemplo: $Q(g(a, b))$
- El cierre universal de una fórmula sin cuantificadores es la fórmula resultante de cuantificar universalmente todas las variables.
Ej: El cierre de $\neg P(x, f(a)) \vee Q(y)$ es $\forall x \forall y (\neg P(x, f(a)) \vee Q(y))$
- Una cláusula es el cierre universal de una disyunción de literales.
Ej: $\forall x (\neg Q(x) \vee P(a, b))$
- Una fórmula está en forma clausulada si está escrita como conjunción de cláusulas.
Ej: $\forall x \forall y (Q(x) \vee \neg P(g(f(x), b), y)) \wedge \forall x P(x, x)$

5.3.2 Cálculo de forma clausulada

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \exists x P(x) \rightarrow \exists x R(x, a) \equiv \\
 &\equiv \neg \exists x P(x) \vee \exists x R(x, a) \equiv \\
 &\equiv \forall x \neg P(x) \vee \exists x R(x, a) \equiv \\
 &\equiv \forall x (\neg P(x) \vee \exists x R(x, a)) \equiv \\
 &\equiv \exists x (\forall x \neg P(x) \vee R(x, a)) \equiv \\
 &\equiv \exists x (\forall y \neg P(y) \vee R(x, a)) \equiv \\
 &\equiv \exists x \forall y (\neg P(y) \vee R(x, a)) \text{ Forma prenexa} \\
 &\equiv \forall y (\neg P(y) \vee R(b, a)) \text{ Una forma normal de skolem y además forma normal clausulada}
 \end{aligned}$$