Taller 1

Julián Gutierrez, Rafael Cano, Mauricio Perea

Septiembre 2020

1 Theory Exercises: Review Stats and OLS

1.1

$$P(X|\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{P(\epsilon_1, \epsilon_2|X)P(x)}{P(\epsilon_1, \epsilon_2)}$$

Si ϵ_1, ϵ_2 son independientes, el problema se puede reescribir como:

$$\frac{P(\epsilon_1|X)P(\epsilon_2|X)P(x)}{P(\epsilon_1, \epsilon_2)}$$

(a)

$$ii.P(\beta_1, \beta_2), P(X), P(\beta_1, \beta_2|X)$$

(b)

$$i.P(\beta_1, \beta_2), P(X), P(\beta_1|H), P(\beta_2|X)$$

1.2

(a)

$$E(\epsilon_i) = E(\epsilon_i|X) = E(0) = 0$$

$$E(X_i\epsilon_i) = E(X_i)E(\epsilon_i) = 0$$

(b)

$$\begin{aligned}
&E(X_i^T\epsilon_i) = 0 \\
&E(X_i^T(Y - X\beta)) = 0 \\
&E(X_i^TY) - E(X_i^TX\beta) = 0 \\
&E(X_i^TY) - E(X_i^TX)\beta = 0 \\
&-E(X_i^TX)\beta = -E(X_i^TY) \\
&\hat{\beta} = E(X_i^TX)^{-1}E(X_i^TY) \\
&\hat{\beta} = [N^{-1}\sum^{N}(X^TX)]^{-1}[N^{-1}\sum^{N}(X^TY)] \qquad (1)
\end{aligned}$$

(c) Bajo el supuesto que

$$X^T X$$

es no singular y que

$$plim[(N^{-1}\sum^{N}(X^T X))^{-1}] = A^{-1}$$

donde

$$A = E(X^T X)$$

Entonces, bajo la anterior expresión (1) puede escribirse como

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

1.3

(a) Dado que

$$R^2 = 1 - \frac{\sum^N (\hat{e}_i)^2}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Y los estimadores de MCO se obtenenen mediante la minimización de la suma de los residuos cuadrados

$$min\sum^{N}(\hat{e}_i)^2$$

Entonces, los estimadores de MCO maximizan el R-cuadrado, pues al observar la fórmula del R-cuadrado se puede apreciar que la suma de los residuos cuadrados está restando a el 1, por lo cual al manimizar la suma de los residuos cuadrados la expresión completa se maximiza.

(b) Teneindo en cuenta que

$$R^2 = 1 - \frac{\sum^N (\hat{e}_i)^2}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2}$$

De (donde los tres términos son no-negativos)

$$\sum^{N}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum^{N}(\hat{e}_i)^2 + \sum^{N}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

Se puede cocluir que

$$\sum^{N}(Y_i - \bar{Y})^2 \geq \sum^{N}(\hat{e}_i)^2$$

Entonces

$$\frac{\sum^N (\hat{e}_i)^2}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} \leq 1$$
$$\frac{\sum^N (\hat{e}_i)^2}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} \geq 0$$

Lo cual implica que

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

(c) Teniendo en cuenta el modelo

$$Y = \alpha + \beta X_i + U_i$$

Donde

$$\beta = \frac{Cov(X,Y)}{Var(x)}$$

Y teniendo en cuenta que

$$R^2 = \frac{SCR}{SCT}$$
$$r^2 = \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(x)Var(Y)}$$

Si solucionamos

$$\begin{aligned}
SCE &= \sum^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\
&= \sum^N (Y_i - (\alpha + \beta X_i))^2 \\
&= \sum^N (Y_i - (\alpha + \beta X_i))^2 \\
&= \sum^N ((Y_i - \bar{Y}) - \beta(X_i - \bar{X}))^2 \\
&= \sum^N (Y_i - \bar{Y})^2 + \beta^2 \sum^N (X_i - \bar{X})^2 - 2\beta^2 \sum^N (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) \\
&= Var(Y) + \beta^2 Var(X) - 2\beta Cov(X,Y) \\
&= Var(Y) + (\frac{Cov(X,Y)}{Var(x)})^2 Var(X) - 2(\frac{Cov(X,Y)}{Var(x)})Cov(X,Y) \\
&= Var(Y) - \frac{(Cov(X,Y))^2}{Var(x)}
\end{aligned}$$

Y que sabiendo que

$$
\begin{aligned}
STC &= SCE + SCR \\
SCR &= STC - SCR \\
SCR &= \sum^{N}(Y_i - \bar{Y})^2 - \sum^{N}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\
SCR &= Var(Y) - [Var(Y) - \frac{(Cov(X,Y))^2}{Var(X)}] \\
SCR &= \frac{(Cov(X,Y))^2}{Var(X)}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \frac{SCR}{SCT} \\
&= \frac{(Cov(X,Y))^2}{Var(x)} \frac{1}{Var(Y)} \\
&= \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(x)Var(Y)} \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

En conclusión

$$R^2 = r^2$$

1.4

(a)

Según el teorema FWL, el problema de estimación OLS puede ser escrito como

$$
\begin{aligned}
M_i Y &= M_i X_2 \beta_2 + residuals \\
\hat{\beta}_2 &= (X' M_i X)^- 1 X' M_i Y
\end{aligned}
$$

De forma análoga para $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = (i' M_X i)^- 1 i' M_X Y$$

A partir del teorema de FWL ($M_X = I - P_X, P_X X = X$) podemos reescribir $\hat{\beta}_1$ como:

$$
\begin{aligned}
(i'(I - P_X)i)\hat{\beta}_1 &= i'(I - P_X)Y \\
\rightarrow (N - i' P_X i)\hat{\beta}_1 &= i'Y - i' P_X Y \\
\rightarrow N\hat{\beta}_1 + (i' P_X Y - i' P_X i \hat{\beta}_1) &= i'Y \\
\rightarrow N\hat{\beta}_1 + i' P_X (Y - i\hat{\beta}_1) &= i'Y \\
\rightarrow N\hat{\beta}_1 + i' P_X X \hat{\beta}_2 &= i'Y
\end{aligned}
$$

De este modo, tenemos:

$$
\begin{aligned}
N\hat{\beta}_1 + i'X\hat{\beta}_2 &= (X'M_iX)X'M_iY \\
(X'M_iX)\hat{\beta}_2 &= X'M_iY \\
\begin{pmatrix} N & i'X \\ 0 & X'M_iX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i'Y \\ X'M_iY \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1.5

(a)

$$
\begin{aligned}
R_K^2 &= \frac{\sum^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} \\
&= \frac{\sum^N \sum^K (\hat{\beta}_k X_{ik} - \hat{\beta}_k \bar{X}_k)(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} \\
&= \frac{\sum^N \sum^K \hat{\beta}_k (X_{ik} - \bar{X}_k)(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} \\
&= \sum^K \hat{\beta}_k \frac{\sum^N (X_{ik} - \bar{X}_k)(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
R_K^2 = \sum^{K-1} \hat{\beta}_k \frac{\sum^N (X_{ik} - \bar{X}_k)(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} &+ \hat{\beta}_K \frac{\sum^N (X_{iK} - \bar{X}_K)(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} \\
= R_{K-1}^2 &+ \hat{\beta}_K \frac{\sum^N (X_{iK} - \bar{X}_K)(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2}
\end{aligned}
$$

Sabemos que $R_K^2 \geq R_{K-1}^2$ ya que $\hat{\beta}_K \frac{\sum^N (X_{iK} - \bar{X}_K)(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sum^N (Y_i - \bar{Y})^2} \geq 0$.

1.6

E($_{test} - Y_{test}$)
$= E(\hat{Y}_{test}) - E(Y_{test})$
$= E(\hat{\alpha}_N + \hat{\beta}_N X_{test}) - E(\alpha + \beta X_{test} + \epsilon)$
$= E(\hat{\alpha}_N) + E(\hat{\beta}_N X_{test}) - [E(\alpha) + E(\beta X_{test}) + E(\epsilon)]$
$= \alpha + E(\hat{\beta}_N) X_{test} - (\alpha_N + \beta_N X_{test} + 0)$
$= \alpha + \beta X_{test} - (\alpha_N + \beta_N X_{test})$
$= 0$

E($Y_{test} - \hat{Y}_{test})^2$
$= E[\alpha + \beta X_{test} - (\hat{\alpha}_N + \hat{\beta}_N X_{test})]^2 + Var(\epsilon)$
$= E[(\alpha - \hat{\alpha}_N) + (\beta - \hat{\beta}_N) X_{test}]^2 + Var(\epsilon)$
$= E(\alpha - \hat{\alpha}_N)^2 + E[(\beta - \hat{\beta}_N) X_{test}]^2 + Var(\epsilon)$
$= E(\alpha - \hat{\alpha}_N)^2 + E(\beta - \hat{\beta}_N)^2 (X_{test} - \bar{X})^2 + Var(\epsilon)$
$= \frac{\sigma}{N} + \frac{\sigma}{\sum^N (X - \hat{X})} (X_{test} - \bar{X})^2 + \sigma$
$= \sigma(\frac{1}{N} + \frac{(X_{test} - \bar{X})^2}{\sum^N (X - \hat{X})} + 1)$
$= \sigma(1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_{test} - \bar{X})^2}{\sum^N (X - \hat{X})})$

1.7

Considere el estimador "ridge"

$$\hat{\beta}^{\gamma} = \frac{\hat{\beta}^{ols}}{1+\gamma} = (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T Y$$

(a) Sesgo del estimador "ridge"

$$\begin{aligned}
&E(\hat{\beta}^{\gamma} - \beta) \\
&= E(\hat{\beta}^{\gamma}) - E(\beta) \\
&= E[(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T Y] - \beta \\
&= E[(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T (X\beta - \epsilon)] - \beta \\
&= E[(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X\beta] + E[(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T \epsilon] - \beta \\
&= (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X\beta + (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T E[\epsilon] - \beta \\
&= (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X\beta - \beta \\
&= [(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X - I]\beta
\end{aligned}$$

Varianza del estimador "ridge"

Var($^{\gamma}$)
$= E[(\hat{\beta}^{\gamma} - \beta^{\gamma})(\hat{\beta}^{\gamma} - \beta^{\gamma})^T]$
$= E[((X^T X + \gamma I)^{-1} X^T \hat{Y} - (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T Y)((X^T X + \gamma I)^{-1} X^T \hat{Y} - (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T Y)^T]$
$= E[((X^T X + \gamma I)^{-1} X^T (\hat{Y} - Y))((X^T X + \gamma I)^{-1} X^T (\hat{Y} - Y))^T]$
$= E[((X^T X + \gamma I)^{-1} X^T \epsilon)((X^T X + \gamma I)^{-1} X^T \epsilon)^T]$
$= E[(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T \epsilon \epsilon^T X (X^T X + \gamma I)^{-1}]$
$= (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T E[\epsilon \epsilon^T] X (X^T X + \gamma I)^{-1}$
$= (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T \sigma^2 X (X^T X + \gamma I)^{-1}$
$= \sigma^2 (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X (X^T X + \gamma I)^{-1}$
$= \sigma^2 (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X (X^T X + \gamma I)^{-1}$

El sesgo del estimador "ridge" es:

$$E(\hat{\beta}^{\gamma} - \beta) = [(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X - I]\beta$$

Y el del estimador MCO es:

$$E(\hat{\beta}^{-}\beta) = 0$$

Por lo cuál, el estimador "ridge" tine un sesgo mayor al estimador MCO, el cual es insesgado. Lo anterior, pues gamma es un escalar positivo.

La varianza del estimador "ridge" es:

$$Var(\hat{\beta}^{\gamma}) = \sigma^2 (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X (X^T X + \gamma I)^{-1}$$

Y la varianza MCO es:

$$Var(\hat{\beta}^{-}\beta) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

Por lo cuál, la variaza "ridge" es menor a la de MCO. Lo anterior, pues gamma es un escalar positivo.

(b)
Si

$$W_{\gamma} = (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X$$

Entonces

$$\hat{\beta}^{\gamma} = (X^T X + \gamma I)^{-1} X^T Y = W_{\gamma} \hat{\beta}^{OLS}$$

$MSE(\hat{\beta}^{\gamma})$
$= E[(\hat{\beta}^{\gamma} - \beta)^T (\hat{\beta}^{\gamma} - \beta)]$
$= E[(W_{\gamma}\hat{\beta} - \beta)^T (W_{\gamma}\hat{\beta}^{-}\beta)]$
$= E(\hat{\beta}^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\hat{\beta}) - E(\beta^T W_{\gamma}\hat{\beta}) - E(\hat{\beta}^T W_{\gamma}^T \beta) + E(\beta^T \beta)$
$= E(\hat{\beta}^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\hat{\beta}) - E(\beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\hat{\beta}) - E(\hat{\beta}^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta) + E(\beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta) - E(\beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta)$
$+ E(\beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\hat{\beta}) + E(\hat{\beta}^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta) - E(\beta^T W_{\gamma}\hat{\beta}) - E(\hat{\beta}^T W_{\gamma}^T \beta) + E(\beta^T \beta)$
$= E((\hat{\beta} - \beta)^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}(\hat{\beta} - \beta)) - \beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta - \beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta + \beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta + \beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta$
$+ \beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta - \beta^T W_{\gamma}\beta - \beta^T W_{\gamma}^T \beta + \beta^T \beta$
$= E((\hat{\beta} - \beta)^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}(\hat{\beta} - \beta)) + \beta^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}\beta - \beta^T W_{\gamma}\beta - \beta^T W_{\gamma}^T \beta + \beta^T \beta$
$= E((\hat{\beta} - \beta)^T W_{\gamma}^T W_{\gamma}(\hat{\beta} - \beta)) + \beta^T (W_{\gamma} - I)(W_{\gamma} - I)\beta$
$= tr[Var(\hat{\beta}^{\gamma})] + Bias(\hat{\beta}^{\gamma})^T Bias(\hat{\beta}^{\gamma})$

Reemplazando la varianza y el sesgo que ya encontramos nos queda:

$$MSE(\hat{\beta}^{\gamma}) = \sigma^2 tr((X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X (X^T X + \gamma I)^{-1})$$
$$+[(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X - I]^T [(X^T X + \gamma I)^{-1} X^T X - I]$$

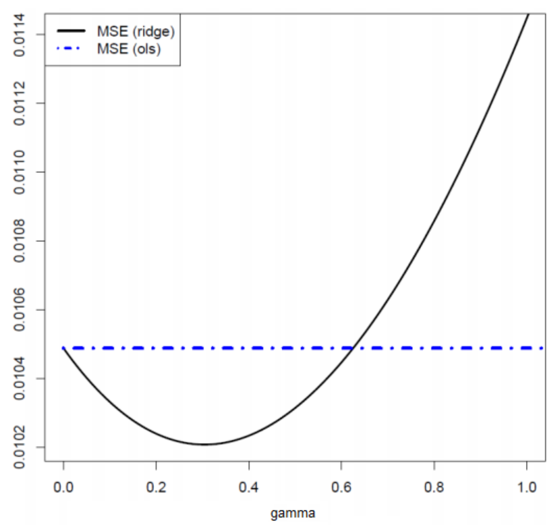
Así pues, teniendo en cuenta que el MSE de MCO es:

$$MSE(\hat{\beta}^{OLS}) = \sigma^2(X^TX)^{-1}$$

Se puede concluir que el MSE de la estimación "ridge" puede ser mayor o menor al MSE de MCO dependiendo de que valor tome gamma.

En la siguiente gráfica se puede aprecir que exite un gamma para el cual:

$$MSE(\hat{\beta}^{\gamma}) < MSE(\hat{\beta}^{OLS})$$



(c)

Con respecto a la práctica econométrica clásica de preferir estrictamente estimadores insesgados se puede sacar la conlusión de dicha preferencia estricta es problemática e incluso detrimental si con la estimación se pretende generar predicciones acertadas y no simplemente relaciones causales. Es así, que si se busca crear un modelo predictivo puede ser mejor sacrificar insesgadez a cambio de un varianza menor del estimador, así pues la preferencia estricta por estimadores insesgados pierde fuerza cuando obtener un estimador insesgado no es fundamental para la necesidades de la estimación y para el propósito para el cual será utilizada.

2 Empirical Problems

2.1 Predicting House Prices in Colombia

2.1.1

2.1.2

Observando la base de datos, y teniendo en cuenta el objetivo de construir modelos que intenten explicar el precio de apartamentos, se decidió considerar las siguientes variables como posibles variables explicativas: Número de habitaciones, Número de baños, longitud, Latitud, superficie total, superficie cubierta y tipo de propiedad. Por otro lado, la base de datos presenta un número muy grande de observaciones vacias. Para solucionar este problema, sin perder una cantidad considerable de informacioón util, se utilizó el método de "predictive mean matching" para reemplazar los datos faltantes de las variables de interés.

	Overall (N=239343)
bedrooms	
Mean (SD)	3.08 (3.00)
Median [Min, Max]	3.00 [0, 336]
bathrooms	
Mean (SD)	2.92 (1.63)
Median [Min, Max]	3.00 [1.00, 20.0]
lon	
Mean (SD)	-75.0 (0.959)
Median [Min, Max]	-74.8 [-81.7, -73.6]
lat	
Mean (SD)	5.73 (2.46)
Median [Min, Max]	4.71 [3.22, 12.6]
surface_total	
Mean (SD)	1140 (6110)
Median [Min, Max]	220 [-36.0, 198000]
surface_covered	
Mean (SD)	929 (67900)
Median [Min, Max]	172 [1.00, 12000000]
property_type	
Apartamento	111930 (46.8%)
Casa	69225 (28.9%)
Depósito	824 (0.3%)
Finca	777 (0.3%)
Local comercial	4492 (1.9%)
Lote	2840 (1.2%)
Oficina	5362 (2.2%)
Otro	43564 (18.2%)
Parqueadero	311 (0.1%)
PH	18 (0.0%)

2.1.3

Los modelos a estimar son los sigueintes:

$$(1) y_i = \beta 0$$

$$(2) y_i = \beta 0 + \beta 1(x_1 i^2) + \beta 2(x_2 i^2) + \beta 3(x_3 i) + \beta 4(x_4 i) + \beta 5(x_5 i^2) + \beta 6(x_6 i^2)$$

$$(3) y_i = \beta 0 + \beta 1(x_1 i) + \beta 2(x_2 i) + \beta 3(x_3 i) + \beta 4(x_4 i) + \beta 5(x_5 i) + \beta 6(x_6 i)$$

$$(4) y_i = \beta 0 + \beta 1(x_1 i^2) + \beta 2(x_2 i^2) + \beta 3(x_3 i) + \beta 4(x_4 i) + \beta 5(x_5 i^2)$$

$$(5) y_i = \beta 0 + \beta 1(x_1 i * x_2 i) + \beta 5(x_5 i) + \beta 6(x_6 i)$$

Donde:

$[y_i]$es el precio del producto i

x_{1i}es Número de habitaciones del producto i

x_{2i}es Número de baños del producto i

x_{3i}es la longitud producto i

x_{4i}es la latitud del producto i

x_{5i}es la superficie total del producto i

x_{6i}es la superficie cubierta del producto i

Error cuadrático medio (out of sample)				
modelo 1	modelo 2	modelo3	modelo 4	modelo 5
5,12E+18	4,89E+18	4,89E+18	4,89E+18	4,72E+18

La tabla anterior muestra los errores cuadráticos medios afuera de muestra de los 5 modelos estimado. Es posible notar que el modelo 5 es el modelo con menor error caudrático medio. Este modelo muestra una relación creciente entre el precio y el número de baños, el número de habitaciones, la interacción entre ambos y la superficie cubierta. En adición a esto, presenta un R cuadrado de 0.45, lo qe implica que la varianción en las variables explicativas explica en un 45 porciento la variación del precio.

2.1.4

2.1.5

(a)
Para estimar el error por el método de LOOCV del modelo (5), se calculó la siguiente expresión:

$$CV = \frac{1}{n}\sum^{N} MSE_i$$

Se encontró un error de LOOCV de 9,64E+18
(b)

$$h_i = X_i(X'X)^{-1}X_i'$$

$$\sum^{N} TX_t'X_t = X'X$$

$$\begin{aligned}(X_i'X_i)^{-1} &= (X'X - X_i'X_i)^{-1}\\ &= (X'X)^{-1} + \frac{(X'X)^{-1}X_i'X_i(X'X)^{-1}}{1 - X_i(X'X)^{-1}X_i'}.\end{aligned}$$

$$(X_i'X_i)^{-1}X_t' = (X'X)^{-1}X_i' + (X'X)^{-1}X_i'\left(\frac{X_i(X'X)^{-1}X_i'}{1-X_i(X'X)^{-1}X_i'}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{1-h_i}\right)(X'X)^{-1}X_i'.$$

$$X'X\hat{\beta} = X'y,$$

$$(X_i'X_i + X_i'X_i)\hat{\beta} = X_i'y_i + X_i'y_i,$$

$$\left\{I_k + (X_i'X_i^{-1}X_t'X_i\right\}\hat{\beta} = \hat{\beta}_i + (X_i'X_i^{-1}Xi'(X_i\hat{\beta} + \hat{u}_i).$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_i + (X_i'X_i^{-1}X_i'\hat{u}_i$$
$$= \hat{\beta}_{(i)} + (X'X)^{-1}X_i'\frac{\hat{u}_i}{1-h_i},$$

$$\hat{u}_i = \hat{u}_i + \left(\frac{\hat{u}_i}{1-h_i}\right)h_i$$

$$\hat{u}_i = \frac{\hat{u}_i}{1-h_i}$$

$$CV = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\hat{y}_i}{1-h_i}\right)^2$$

(c)

A continuación se muestra los errores cuadráticos medios de cada uno de los 5 modelos. Es posible evidenciar que estos errores son mayores que los errores calculados afuera de muestra, con una partición de datos 70-30 entre entrenamiento y prueba. Esto puede querer decir que se estaba subestimando el error de predicción al no probarse el modelo a estimar en la totalidad de la muestra, lo que es correguido por el método LOOCV.

Error cuadrático medio LOOCV				
modelo 1	modelo 2	modelo3	modelo 4	modelo 5
1,01E+19	1,13E+19	9,86E+18	9,96E+18	9,64E+18

2.1.6

	Descomposición QR	Modelo lineal
intercept	1,65E+16	1,65E+16
bedrooms2	2,56E+11	2,56E+11
bathrooms2	2,52E+13	2,52E+13
lon	2,10E+14	2,10E+14
lat	-2,77E+13	-2,77E+13
surface_total2	1,27E+05	1,27E+05

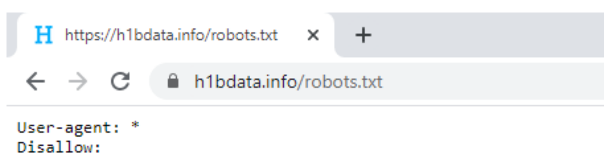
Tal como se puede observar, los resultados obtenidos entre la regresión lineal lm y los obtenidos por la descomposición QR son iguales. Esto es debido a que la estimación QR se logra a traves de una trasformación de matrices que no afecta los betas de las estimaciones. Esto mismo se observa al realizar la descomposición QR en subgrupos (por ciudades) y compararlos con los resultados del modelo lineal.

2.2 Reverend Bayes meets web scraping

2.2.1

2.2.2

Al revisar archivo robots.txt, que se puede apreciar en la siguiente image, se observa que no hay ningun tipo de restricción para hacer "scraping" a los datos.



2.2.3

2.2.4

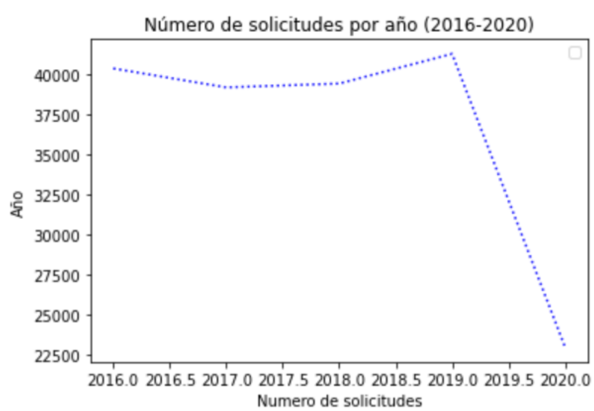
Para limpiar la base de datos primero reemplazamos todas las observaciones que que contenían valores missings NAN (NA), y segundo eliminamos todos los NAN de la base de datos. Posterior a la limpieza de la base de datos, la base de datos contiene información acerca de la promoción de empleos en 26492 compañias estadounidenses entre el año 2016 y 2020. La información que se dispone es la de las ciudades: Chicago, Houston, San Francisco, Los Angeles y New York.

count	2.283030e+05
mean	9.593226e+04
std	5.069068e+04
min	3.100000e+02
25%	6.700000e+04
50%	8.550000e+04
75%	1.150000e+05
max	1.100000e+07

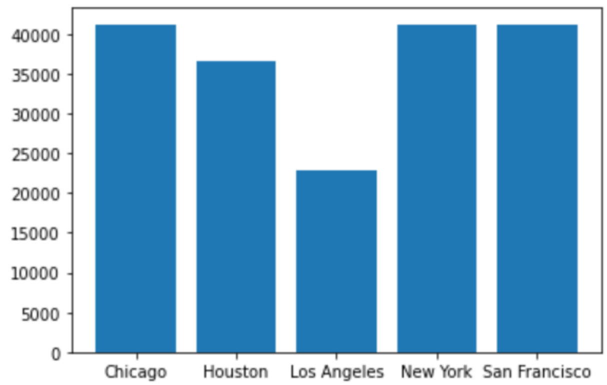
location	count	mean	std	min	25%	50%	75%	max
Chicago	49998.0	88445.349974	65777.969852	450.0	65000.0	80000.0	100000.0	11000000.0
Houston	49993.0	85971.124077	40610.175568	600.0	63000.0	77273.0	98821.0	1308000.0
Los Angeles	28325.0	87300.893769	43778.936260	603.0	60000.0	77200.0	102206.0	1200000.0
New York	49991.0	102282.847413	45685.182501	310.0	71700.0	92500.0	125000.0	1600000.0
San Francisco	49996.0	111920.138111	45734.450467	1777.0	80000.0	105000.0	135000.0	1826000.0

Las tablas anteriores muestran las estadísticas descriptivas del salario base en general y por ciudades.

2.2.5



En la anterior gráfica se puede apreciar que del año 2016 hasta el primer semestre del 2019 el número de solicitudes estuvo realivamente estable, con un pequeño aumento en el primer semetre del 2019. Sin embrago, en el segundo semestre del 2019 y el primer semestre del 2020 se ve un reducción bastante prounciada en la cantidad de solicitudes.



En la anterior gráfica se puede apreciar que la ciudades con mayor número de solicitudes son, en orden, Chicago, Nueva York y San Franciso. En cuarto lugar se encuentra Houston con una cantidad inferior, y en último y quiento lugar está Los Angeles, que recibió muchas menos solicitudes que las otras cuatro ciudades.

2.2.6

El top 3 de empresas por número de aplicaciones cambia ligeramente en el timpo, sin embargo, la mayoría de los años las siguintes empresas ocupan el podio.

ERNST YOUNG US LLP
EY, como también es conocida es una de las más importantes firmas de servicios profesionales del mundo. La empresa, una de las Cuatro Grandes Auditoras, se remonta a principios del siglo XX. El escocés Arthur Young y el estadounidense Alwin Ernst fundaron sus empresas independientes en 1906 y 1903, respectivamente. Las empresas se fusionaron en 1989. Actualmente, EYa emplea a más de 200.000 personas y opera en más de 150 países.

DELOITTE CONSULTING LLP
Deloitte es la firma privada servicios profesionales que más factura en el mundo(36.800 millones de dólares en 2016). Es una de las llamadas Cuatro Grandes Auditoras. The firm was founded by William Welch Deloitte in London in 1845 and expanded into the United States in 1890.

TATA CONSULTANCY SERVICES LIMITED
Tata Consultancy Services es una empresa multinacional india de consultoría y servicios de tecnología de la información con sede en Mumbai, India. Es la segunda empresa india más grande por capitalización de mercado. La compañia fue fundada en 1968.

2.2.7

$$\pi(\theta|v) = \frac{f(v|\theta)P(\theta)}{m(v)}$$

We know that:

$$f(v|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{n}}} exp(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(v-\theta)^2)$$
$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} exp(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2)$$

So:

$$\pi(\theta|v) = \frac{1}{m(v)\sqrt{4\pi^2\tau^2\frac{\sigma^2}{n}}} exp(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}(v-\theta)^2 - \frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2)$$
$$= \frac{1}{m(v)\sqrt{4\pi^2\tau^2\frac{\sigma^2}{n}}} exp(-\frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}(v^2-2v\theta+\theta^2) + \frac{1}{\tau^2}(\theta^2-2\theta\mu+\mu^2)))$$

De este modo, podemos sugerir que $\pi(\theta|v)$ se distribuye $N(m, V)$, donde:

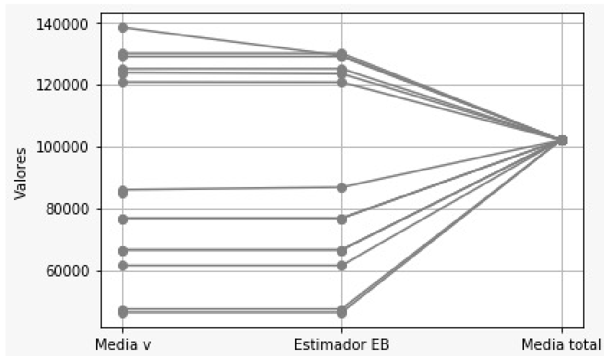
$$m = (\frac{\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}}{\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}} + \frac{1}{\tau^2}})v + (\frac{\frac{1}{\frac{1}{\tau^2}}}{\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}} + \frac{1}{\tau^2}})\mu$$
$$V = (\frac{1}{\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}} + \frac{1}{\tau^2}})$$

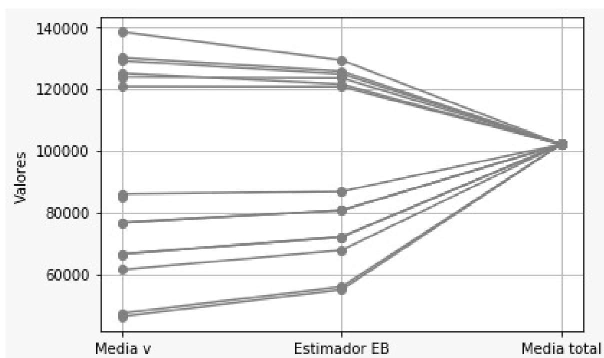
2.2.8

$$m(v) = \int \frac{1}{m(v)\sqrt{4\pi^2\tau^2\frac{\sigma^2}{n}}} exp(-\frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}(v^2-2v\theta+\theta^2) + \frac{1}{\tau^2}(\theta^2-2\theta\mu+\mu^2)))d\theta$$
$$= \frac{1}{m(v)2\pi\tau\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \int exp(K_0\frac{|Z|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tau})$$

Donde K_0 es una función Bessel modificada.

2.2.9





La primera estimación resulta en la aproximación a la media de solo algunas variables. Específicamente, aquellas variables que tienen varianza cero permanecen iguales. Esto es debido a que la estimación bayeciana resulta en una suma ponderada por las varianzas de la media prior y la media observada. Dado que hay empresas con una una observación, la varianza de la media observada resulta en cero y la estimación bayesiana de la media de estas compañias resulta siendo la misma que la media observada. Sin embargo, en una segunda estimación, se remplazó la varianza de estas compañias con una sola observación con el promedio de varianzas de toda la muestra. De este modo, se le da más peso a la media prior en la estimación bayesiana y, por lo tanto, se observa un encogimiento más pronunciado en este segundo escenario.

3 Pedes in terra ad sidera visus