Estructuras discretas 2019-1
Boletín de ejercicios 04

Pilar Selene Linares Arévalo

1. Considera el conjunto S = $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ y las relaciones $R_1, R_2 \subseteq S \times S$, definidas como:
   $R_1 = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\}$ y $R_2 = \{(\alpha, \gamma), (\beta, \alpha)\}$

   - Calcula $R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1, R_1 \circ R_1$ y $R_2 \circ R_2$
   - Comprueba que $R_1 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_1 \circ R_2) \circ R_1$ y que $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

2. Sea $R \subseteq A \times B$, demuestra que:

   - $(R^{-1})^{-1} = R$
   - $(A \times B)^{-1} = B \times A$

3. Sea S un conjunto y R_1, R_2 relaciones tales que $R_1, R_2 \subseteq S \times S$ y $|S| = n$, decidir si las siguientes afirmaciones sobre R_1 y R_2 son verdaderas o falsas. Si son verdaderas explicar por qué, si son falsas dar un contraejemplo.

   - Si R_1 es reflexiva entonces $|R_1| \geq n$
   - Si $|R_1| \geq n$ entonces R_1 es reflexiva.
   - Si $R_1 \subseteq R_2$ y R_1 es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces R_2 también es reflexiva, simétrica y transitiva.

4. Responde y justifica:

   - ¿Puede una relación sobre un conjunto no ser flexiva ni antirreflexiva simultáneamente?
   - ¿Puede una relación sobre un conjunto ser simétrica y antisimétrica simultáneamente?

5. Sean R, S y T relaciones binarias, Demuestra:

   - $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
   - $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$

6. Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R \subseteq S \times S$
   - Considera $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$. Encontrar la cerradura reflexiva y la cerradura transitiva de R.
   - Considera $R = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$. Encuentra la relación más pequeña que contiene a R y es:
     - reflexiva y transitiva.
     - simétrica y transitiva.

7. Sean $R_1 y R_2$ relaciones binarias dadas por las siguientes matrices:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Utilizando el algoritmo de Warshall, obtener la cerradura transitiva de R_1 y R_2, mostrando cada W_i. Dibuje la gráfica de la relación original y de la cerradura transitiva.

8. Sea $S = \{a, b, c, d\}$. Decidir cuáles de las siguientes relaciones son órdenes parciales sobre S. En caso de no serlo, indica qué propiedad no se cumple y por qué.

   a) $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$

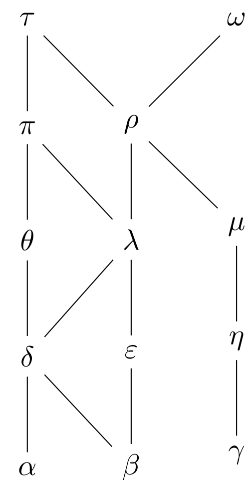
   b) $R_2 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$

   c) $R_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c), (d, d)\}$

9. En el nivel 5 de un videojuego, se requieren completar 7 misiones. Algunas de ellas pueden ser iniciadas únicamente después de que otras han sido finalizadas. En la tabla de abajo se muestran las dependencias de las misiones. Construye el diagrama de Hasse correspondiente al orden parcial que se genera con $M_1 \prec M_2$ si la misión M_1 no puede ser iniciada si antes terminar la misión M_2.

Misión	Dependencias
A = Águila	
B = Boa	A , C
C = Coyote	
D = Dragón	B
E = Escorpión	
F = Flamenco	B , E
G = Gorila	D , F

10. Contesta las siguientes preguntas para el orden parcial representado por este diagrama de Hasse:



a) Encontrar los elementos *maximales* y *minimales*.

b) Si hay elemento *más grande/más pequeño* decir cuáles son.

c) Encontrar los límites superiores para el conjunto $B_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

d) Encontrar los límites inferiores para el conjunto $B_2 = \{\lambda, \mu, \eta\}$.