Estructuras Discretas 2019-1
Boletín de Ejercicios 3

Pilar Selene Linares Arévalo

Inducción sobre naturales.

1. Demuestra que $n^2 + n$ es divisible entre 2, para todo n natural.

2. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Demuestra que para todo m natural positivo par, se cumple que
$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & 0 \\ 0 & b^m & 0 \\ 0 & 0 & a^m \end{pmatrix}$$

3. Demuestra que $\neg(p_0 \vee p_1 \vee ... \vee p_k) \equiv \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge ... \wedge \neg p_k$, para toda k natural mayor o igual a 1.

1. Definiciones recursivas e Inducción estructural.

1. Para los siguientes incisos, calcula el resultado de aplicar la función al argumento recibido. Muestra cada paso realizado hasta obtener el resultado final.
   a) long(['b','d','f','c'])
   b) reversa([4,5,2])

2. Encuentra $f(3) y f(4)$ si f se define recursivamente por:
$f(0) = -1$
$f(1) = 2$
y para $n = 2, 3, ...$
   a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$
   b) $f(n+1) = (f(n))^2 * f(n-1)$

3. Para los siguientes incisos da una definición recursiva que los genere y enuncia el principio de inducción estructural asociado a estas definiciones.
   a) El conjunto de términos de la lógica de primer orden.
   b) El conjunto de fórmulas de la lógica de primer orden.
   c) El conjunto de los naturales impares.
   d) El conjunto S de cadenas w de ceros y unos definido como
$$S = \{w \mid w = 0^i 1^j \text{ donde } i \geq 1, j \geq 0\}.$$

4. Define recursivamente las siguientes funciones:

   a) $ctes(t)$ regresa la lista de constantes que aparecen en el término t.
      $ctes(f(a, c, g(x, y, b))) = [a, c, b]$

   b) $fv(Q)$ regresa la lista de variables libres que aparecen en la fórmula Q.
      $fv(\forall x P(x, y) \wedge \exists w Q(z, w)) = \{y, z\}$

   c) *sconc* que recibe una cadena w del conjunto S y un natural n mayor que 0. La función regresa la concatenación de n copias de w.
      $sconc\ 011\ 3 = 011011011$

5. Queremos representar árboles binarios cuyos únicos nodos etiquetados (con elementos del conjunto A) son las hojas. Para ello utilizaremos la siguiente definición recursiva de árboles:

   - Si $a \in A$, entonces $hoja(a)$ es un árbol.
   - Si t_1, t_2 son árboles, entonces $mkt(t_1, t_2)$ es un árbol.
   - Son todos.

   Observa que en esta definición no existe el árbol vacío.

   a) Define las funciones recursivas nh, nni que calculan el número de hojas y el número de nodos internos (los que no son hojas) en un árbol respectivamente.

   b) Enuncia el principio de inducción estructural para estos árboles y utilízalo para mostrar que:

   $$nh(t) = nni(t) + 1$$

6. Considera el conjunto L generado por la siguiente definición recursiva:

   - a está en L
   - b está en L
   - Si S está en L entonces aSa está en L
   - Si S está en L entonces bSb está en L
   - Son todas.

   Demuestra que $L \subset PAL$ donde

   $$PAL = \{\ w \mid w = w^R\}$$

   y la reversa de una cadena $w = s_1 s_2 ... s_n$ (cadena w formada por n símbolos) se define como sigue:

   - $s^R = s$
   - $(sw)^R = w^R s$

   Similarmente a la reversa en listas, sobre cadenas se cumple que:
   $(w_1 w_2)^R = w_2^R w_1^R$

7. Prueba que cualquier fórmula proposicional ψ que tiene únicamente disyunciones, es verdadera si alguna de sus variables proposicionales es verdadera o si tiene alguna presencia de la constante $\top$.