2.5.2.- Use interpretaciones para determinar si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingentes. Si son contingentes, dé una interpretación en la que la fórmula no se evalúa a verdadero.

a) $\Big(\big((p\vee q)\vee r\big)\wedge\big(p\vee(q\vee r)\big)\Big)\rightarrow p\vee q$

b) $\big(p\wedge(q\wedge r)\big)\rightarrow\big(p\rightarrow(q\rightarrow r)\big)$

c) $p\vee q\rightarrow p\vee r$

d) $\big(p\rightarrow(p\rightarrow q)\big)\rightarrow p$

2.5.3.- Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles.

a) $\Gamma=\{(\neg q\wedge r)\vee p\vee q,\ p\wedge r\}$

b) $\Gamma=\{p\wedge\neg q,\ \neg(q\vee\neg p),\ (q\wedge p)\vee q\vee\neg p\}$

c) $\Gamma=\{q\vee r\vee s,\ \neg(q\vee r),\ \neg(r\vee s),\ \neg(s\vee q)\}$

d) $\Gamma=\{\neg(p\wedge q)\wedge\neg(p\wedge r),\ q\vee r,\ \neg(p\vee\neg r)\}$

e) $\Gamma=\{p\leftrightarrow q,\ q\leftrightarrow s,\ p,\ \neg s\}$

2.5.4.- Demuestre la consecuencia lógica en cada caso:

a) $\{p,\ q\}\models p\wedge q$

b) $\{p,\ \neg q\}\models\neg(p\rightarrow q)$

c) $\{r\wedge s\rightarrow t,\ \neg t\}\models t\rightarrow q$

d) $\{\neg q\rightarrow\neg r,\ \neg r\rightarrow\neg p,\ \neg p\rightarrow\neg q\}\models q\leftrightarrow r$

e) $\{p\vee q\ p\rightarrow r,\ q\rightarrow r\}\models r$

2.5.5.- Determine, utilizando interpretaciones, si los siguientes conjuntos de fórmulas de la lógica proposicional son satisfacibles; en caso positivo exhiba un modelo.

a) $\Gamma=\{p\rightarrow q,\ \neg q\vee r,\ p\wedge\neg r\}$

b) $\Gamma=\{(p\vee q)\rightarrow r,\ \neg((\neg p\wedge\neg q)\vee r)\}$

c) $\Gamma=\{(p\vee q)\rightarrow r,\ \neg r,\ \neg p\}$

2.6. Análisis de argumentos

En esta sección aplicamos todos los conocimientos previos de lógica matemática estudiados hasta ahora para cumplir con nuestro propósito fundamental: el análisis de correctud de un argumento lógico proposicional.

2.6.1. Tablas de Verdad

Como ya discutimos antes, un argumento es correcto si y sólo si su fórmula asociada es una tautología; para decidir esta situación podemos construir la tabla de verdad correspondiente tal y como lo hicimos en la sección 2.1.6. Veamos un ejemplo más.

Ejemplo 2.29. El argumento $P\rightarrow Q,\ Q\rightarrow R/\therefore P\rightarrow R$ es correcto.

Basta ver que $\models (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$. La tabla de verdad se muestra en la tabla 2.8 en la siguiente página.

Como se observa de los valores en la quinta columna, en negritas, la fórmula es una tautología, por lo que este argumento, conocido como *silogismo hipotético*, es correcto.

Este ejemplo, junto con los de la sección 2.1.6, deja ver que la tabla de verdad se vuelve más complicada al aumentar el número de variables proposicionales involucradas. La construcción de la tabla de verdad completa, aunque plausible desde el punto de vista teórico, es de "fuerza bruta" en la práctica, pues nos obliga, en los casos interesantes y no triviales, a evaluar un número muy grande de estados para determinar si tenemos o no una tautología (o una contradicción). Aun si lo hiciésemos con una computadora, y suponiendo que a la computadora le llevara un milisegundo evaluar cada estado, si la expresión es muy grande tenemos el crecimiento en el número de estados que vemos en la tabla 2.9.

Tabla 2.8. $\boldsymbol{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R / \therefore P \rightarrow R}$

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$\wedge$	$(Q \rightarrow R)$	$\rightarrow$	$(P \rightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	**1**	1
1	1	0	1	0	0	**1**	0
1	0	1	0	0	1	**1**	1
1	0	0	0	0	1	**1**	0
0	1	1	1	1	1	**1**	1
0	1	0	1	0	0	**1**	1
0	0	1	1	1	1	**1**	1
0	0	0	1	1	1	**1**	1

Como se puede observar en la tabla 2.9, cada vez que se agrega una variable a la expresión, el tiempo que lleva calcular todos sus estados se duplica, siguiendo, como ya mencionamos, a la función 2^n, donde n es el número de variables[8].

Tabla 2.9. Crecimiento en el número de estados con respecto a número de variables

Número de variables	Número de estados	Tiempo (segundos)
1	2	.002
2	4	.004
3	8	.008
⋮	⋮	⋮
10	$1,024$	1
11	$2,048$	2
⋮	⋮	⋮
20	$1,048,576$	$1,048(=17min)$
⋮	⋮	⋮

Esta ineficiencia surge, por ejemplo, en problemas de calendarización o búsqueda de rutas, donde ciertas fórmulas lógicas involucradas tienen usualmente cientos de variables. Para estimar la ineficiencia considérese una fórmula con 500 variables, cuya tabla de verdad tendrá 2^{500} renglones, número aproximadamente igual a 10^{150}, los cuales, de acuerdo a nuestra suposición anterior respecto a la velocidad de la computadora, se calcularían en 10^{147} milisegundos. Dado que en un año hay 3.1536×10^{10} milisegundos, la tabla terminaría de calcularse en aproximadamente 3.2×10^{139} años; considerando que la edad de nuestro planeta es aproximadamente 10^9 años, podemos corroborar que el tiempo estimado del método es inadmisible.

Dada esta situación, vamos a utilizar tablas de verdad únicamente para verificar expresiones pequeñas y cuando no podamos recurrir a otras técnicas.

Obsérvese que el método de tablas de verdad puede evitarse al usar esquemas: una vez que se prueba que un argumento es correcto, él mismo genera un esquema, llamado *regla de inferencia*, en el que cada instancia de esta regla será, a su vez, un argumento correcto.

Ejemplo 2.30. Mostrar la correctud del argumento

[8]Cuando tenemos este tipo de cálculo, decimos que la función crece con 2^n, o que tiene un *crecimiento exponencial*. Este tipo de cálculos, en la práctica, no pueden ser evaluados en una computadora cuando la n no es pequeña.

$$
\begin{array}{l}
r \rightarrow s \vee \neg t \\
(r \rightarrow s \vee \neg t) \rightarrow \neg p \wedge (q \vee w) \\
\hline
\therefore\ \neg p \wedge (q \vee w)
\end{array}
$$

La tabla de verdad para este análisis tendría $2^6 = 64$ renglones, dado que tenemos seis variables. Sin embargo, no es necesario el análisis puesto que el argumento corresponde al esquema del modus ponens que ya mostramos que es correcto. Formalmente tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\big(P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q\big)\big[P, Q := r \rightarrow s \vee \neg t, \neg p \wedge (q \vee w)\big] = \\
&\qquad = ((r \rightarrow s \vee \neg t) \wedge \big((r \rightarrow s \vee \neg t) \rightarrow (\neg p \wedge (q \vee w)) \rightarrow (\neg p \wedge (q \vee w))
\end{aligned}
$$

y como $\models P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ podemos concluir que

$$
\models ((r \rightarrow s \vee \neg t) \wedge \big((r \rightarrow s \vee \neg t) \rightarrow (\neg p \wedge (q \vee w)) \rightarrow (\neg p \wedge (q \vee w)).
$$

Este método es útil en algunos casos en los que ya se conoce de antemano un esquema de argumento correcto; sin embargo no es siempre efectivo ni fácil de implementar.

2.6.2. Uso de interpretaciones

Ya estamos convencidos de que el uso de una tabla de verdad para analizar la correctud de un argumento es, en general, una muy mala idea.

Construir la tabla de verdad para una fórmula de la forma $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$, en su totalidad, resulta, en la mayoría de los casos, innecesario. Por ejemplo, al observar nuevamente la tabla 2.8, podemos darnos cuenta que sólo nos interesa la mitad de ésta, a saber los renglones donde la conjunción de las premisas es verdadera. El resto de la tabla puede desecharse, puesto que si la conjunción de las premisas no es verdadera, la implicación será verdadera automáticamente. El concepto de consecuencia lógica toma en cuenta esta observación, al suponer que las premisas son ciertas y bajo este supuesto mostrar que, bajo la misma interpretación, la conclusión también lo es.

Para mostrar la correctud del argumento lógico $A_1, \ldots, A_n \ / \therefore\ B$ mediante el uso de interpretaciones, nos servimos de la siguiente proposición, cuya demostración dejamos como ejercicio.

Proposición 2.3 El argumento $A_1, \ldots, A_n \,/ \therefore B$ es lógicamente correcto si y sólo si

$$
\{A_1, \ldots, A_n\} \models B,
$$

es decir, si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

De acuerdo a las propiedades de la consecuencia lógica, existen básicamente dos formas para demostrar la correctud de un argumento, el método directo y el indirecto.

Método directo: Probar la consecuencia $A_1, \dots, A_n \models B$. Para esto se supone la existencia de una interpretación $\mathcal{I}$ que sea modelo de todas las premisas y se argumenta, usando esta información y la definición de interpretación, que la conclusión B también se satisface con $\mathcal{I}$.

Método indirecto (refutación o contradicción): Probar que es insatisfacible el conjunto $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$. Para esto se supone que hay una interpretación $\mathcal{I}$ que hace verdaderas a todas las premisas y a la negación de la conclusión $\neg B$ o bien, equivalentemente, hace falsa a la conclusión B. Apelando a este supuesto y a la definición de interpretación, se trata de mostrar que tal interpretación no puede existir; esto se logra mostrando que cierta fórmula está forzada a ser verdadera y falsa al mismo tiempo.

Es de importancia observar que estos métodos son la base de los métodos usuales de demostración en matemáticas. En un curso cualquiera de matemáticas, cuando se dice que la demostración de un teorema de la forma $A \to B$ es directa es porque estamos probando la consecuencia $A \models B$ con el método directo. Similarmente si hablamos de una demostración indirecta o por contradicción o reducción al absurdo, es porque estamos probando $A \models B$ con el método indirecto.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.31. Mostrar la correctud del argumento $\{p, s \vee \neg s, \neg p \vee q, \neg q \leftrightarrow r\} / \therefore \neg r$.

Sean $\Gamma = \{p, s \vee \neg s, \neg p \vee q, \neg q \leftrightarrow r\}$; debemos mostrar que $\Gamma \models \neg r$, para lo cual tomamos una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}$ es modelo de Γ. Debemos mostrar que $\mathcal{I}(\neg r) = 1$.

Como $\mathcal{I}$ es modelo de Γ entonces $\mathcal{I}(p) = 1$ e $\mathcal{I}(\neg p \vee q) = 1$, de donde $\mathcal{I}(q) = 1$ puesto que $\mathcal{I}(\neg p) = 0$. Como $\mathcal{I}(q) = 1$ e $\mathcal{I}(\neg q \leftrightarrow r) = 1$ entonces $\mathcal{I}(r) = 0$, de donde finalmente se obtiene $\mathcal{I}(\neg r) = 1$. Obsérvese que la prueba no determina un valor para s ya que con esta interpretación el argumento es correcto independientemente del valor de s. En particular, la única fórmula que involucra a s es la tautología $s \vee \neg s$.

Este método puede resultar tedioso o intrincado pero puede escribirse de manera más clara enunciando cada paso de razonamiento, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.32. Mostrar la correctud del argumento $p \to q, \neg q / \therefore \neg p$, conocido como *Modus Tollens*, al que se hace referencia más adelante.

Para lograr esto mostramos la consecuencia lógica $p \to q, \neg q \models \neg p$.

1. $\mathcal{I}(p \to q) = 1$ Hipótesis
2. $\mathcal{I}(\neg q) = 1$ Hipótesis
3. $\mathcal{I}(q) = 0$ por 2, ya que $\mathcal{I}(\neg q) = 1$
4. $\mathcal{I}(p) = 0$ por 1 y 3, ya que si $\mathcal{I}(p \to q) = 1$ e $\mathcal{I}(q) = 0$,
   $\therefore \mathcal{I}(p)$ no puede ser 1.

De manera que el argumento es correcto. El razonamiento paso a paso permite una mayor claridad en el proceso de análisis. Por supuesto que cada paso debe tener una justificación exacta. El análisis terminó aquí al llegar a que la conclusión es verdadera, por lo que se probó la consecuencia lógica de manera directa.

Ejemplo 2.33. *Si hoy tirila y Chubaka es kismi entonces Chubaka es borogrove y si hoy no tirila entonces hay fefos. Más aún sabemos que no hay fefos y que Chubaka es kismi, luego entonces Chubaka es borogrove.*

La formalización es:

Variable Proposicional	Enunciado
t	hoy tirila
k	Chubaka es kismi
b	Chubaka es borogrove
f	hay fefos

y el argumento queda como sigue:

$t \wedge k \to b$	Si hoy tirila y Chubaka es kismi entonces Chubaka es borogrove
$\neg t \to f$	si hoy no tirila entonces hay fefos
$\neg f \wedge k$	sabemos que no hay fefos y que Chubaka es kismi
$\therefore\ b$	de donde Chubaka es borogrove

Queremos demostrar que $\{t \wedge k \to b, \neg t \to f, \neg f \wedge k\} \models b$.

1.	$\mathcal{I}(t \wedge k \to b) = 1$	Hipótesis.
2.	$\mathcal{I}(\neg t \to f) = 1$	Hipótesis.
3.	$\mathcal{I}(\neg f \wedge k) = 1$	Hipótesis.
4.	$\mathcal{I}(b) = 0$	Refutación.
5.	$\mathcal{I}(k) = 1$	por 3, $\mathcal{I}(p \wedge q) = 1$ si y sólo si $\mathcal{I}(p) = 1$ e $\mathcal{I}(q) = 1$
6.	$\mathcal{I}(t \wedge k) = 0$	por 4 y 1. Como $\mathcal{I}(b) = 0$ y la implicación en 1 es verdadera, entonces la única posibilidad para $t \wedge k$ es que valga 0.
7.	$\mathcal{I}(t) = 0$	por 5 y 6. Por 5, $\mathcal{I}(k) = 1$; si $\mathcal{I}(t \wedge k) = 0$ (por 6) es porque $\mathcal{I}(t) = 0$
8.	$\mathcal{I}(\neg t) = 1$	por 7.
9.	$\mathcal{I}(f) = 1$	por 2 y 8. Como el antecedente es verdadero en (2), para que la implicación sea verdadera el consecuente tiene que serlo.
10.	$\mathcal{I}(\neg f) = 1$	por 3, Tenemos que $\mathcal{I}(\neg f \wedge k) = 1$ y esta interpretación exige $\mathcal{I}(\neg f) = 1$ e $\mathcal{I}(k) = 1$.
11.	$\mathcal{I}(f) = 0$	por 10, lo que nos lleva a una contradicción con 9.

Los pasos 9 y 11 generan una contradicción explícita, de manera que, por el principio de refutación, el conjunto $\Gamma \cup \{\neg b\}$ es insatisfacible y el argumento es correcto.

Ejemplo 2.34. Mostrar la correctud del siguiente argumento conocido como *dilema constructivo simple*: $p \to r,\ \neg p \to r / \therefore r$.

1.	$\mathcal{I}(p \to r) = 1$	Hipótesis
2.	$\mathcal{I}(\neg p \to r) = 1$	Hipótesis
3.	$\mathcal{I}(r) = 0$	Refutación
4.	$\mathcal{I}(p) = 0$	por 3 y 1. Como $\mathcal{I}(p \to r) = 1$ e $\mathcal{I}(r) = 0$, $\mathcal{I}(p)$ tiene que ser 0.
5.	$\mathcal{I}(\neg p) = 0$	por 3 y 2, argumento similar a 4
6.	$\mathcal{I}(p) = 1$	por 5, pero hay contradicción con 4

Por lo tanto el argumento es correcto.

Es importante observar lo siguiente acerca del uso del método de interpretaciones para analizar argumentos:

- Si se usa el método directo, el análisis termina una vez que se logra asignar a la conclusión el valor de verdadero.

- Si se usa el método indirecto, el análisis termina una vez que se logre forzar a que una fórmula tome los dos valores posibles de verdad. Esta fórmula es generalmente una variable proposicional, aunque esto no es la única opción.

- Forzar un valor v para una fórmula A significa que, de acuerdo a la definición de interpretación y a los valores previamente obtenidos de variables o fórmulas, el valor para A es *necesariamente y sin lugar a dudas* el valor v, que puede ser 1 o 0. Por ejemplo, si sabemos que $\mathcal{I}(p \to q) = 1$ e $\mathcal{I}(q) = 0$, entonces necesariamente $\mathcal{I}(p) = 0$, puesto que si tuviésemos $\mathcal{I}(p) = 1$, la definición de interpretación para la implicación nos llevaría a $\mathcal{I}(p \to q) = 0$, lo cual sabemos que no sucede. De esta manera,el valor de p *está forzado* a ser 0.
  Es error común asignar valores que no están forzados; por ejemplo, si sólo sabemos que $\mathcal{I}(r \to s) = 1$, entonces es un error decir que el valor $\mathcal{I}(s) = 0$ está forzado puesto que no hay suficiente información para descartar la posibilidad de que $\mathcal{I}(r) = 0$, en cuyo caso s podría ser verdadero sin afectar el valor conocido de $r \to s$.

- Si al usar el método indirecto no es posible hallar una contradicción o si en el método directo no se forzó a que la conclusión sea verdadera, entonces el argumento resulta incorrecto y la interpretación asignada será un *contraejemplo* a la correctud del argumento, puesto que las premisas serán ciertas y la conclusión falsa.

Analizaremos ahora un par de argumentos incorrectos.

Ejemplo 2.35. Analizar el argumento $q \to p,\ r \vee s / \therefore r \to p$.

Procedemos directamente:

1. $\mathcal{I}(q \to p) = 1$ Hipótesis
2. $\mathcal{I}(r \vee s) = 1$ Hipótesis

En este momento no hay manera de forzar ningún valor puesto que tanto la implicación como la disyunción son verdaderas en tres estados. Esta libertad nos permite asignar valores que causen que la conclusión sea falsa, lo que sucede como sigue:

3. $\mathcal{I}(r) = 1$ Supuesto
4. $\mathcal{I}(p) = 0$ Supuesto

Aún no terminamos, puesto que debemos dar valores a q y s, los cuales pueden obtenerse como sigue:

5. $\mathcal{I}(q) = 0$ por 1 y 4
6. $\mathcal{I}(s) = 0$ Supuesto

De manera que la interpretación dada por $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(s) = 0$ e $\mathcal{I}(r) = 1$ es un contraejemplo al argumento, pues con esta interpretación tenemos $\mathcal{I}(r \to p) = 0$, ya que $1 \to 0$ es 0. Esto es, en el estado $\{p = 0, q = 0, s = 0, r = 1\}$, tenemos que

$$((q \to p) \wedge (r \vee s)) \to (r \to p)$$

se evalúa a 0.

				(2)	(3)	(1)	(5)	(4)
p	q	r	s	$q \to p$	$\wedge$	$r \vee s$	$\to$	$r \to p$
0	0	1	0	1	1	1	**0**	0

Obsérvese que s también pudo haber sido verdadero, lo cual habría generado otro contraejemplo.

El método indirecto puede ser de más ayuda en algunos casos, pues obliga, desde el principio, a forzar algunos valores, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.36. Analizar el argumento $q \to p,\ r \to p / \therefore r \vee s$.

Procedemos indirectamente:

1. $\mathcal{I}(q \to p) = 1$ Hipótesis
2. $\mathcal{I}(r \to p) = 1$ Hipótesis
3. $\mathcal{I}(r \vee s) = 0$ Refutación
4. $\mathcal{I}(r) = 0$ por 3
5. $\mathcal{I}(s) = 0$ por 3

Obsérvese que falta asignar los valores de p y q. Puede ser que con la asignación $\mathcal{I}(r) = 0$ ya aseguramos que la segunda premisa se mantiene cierta, por lo que el valor de p está libre. Asimismo, el valor de q sólo afecta a la primera premisa y puede elegirse libremente. Un contraejemplo es entonces $\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s) = \mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(p) = 0$. Con estos valores aseguramos que las premisas son verdaderas pero que la conclusión es falsa, por lo que el argumento no es correcto. Otro contraejemplo es $\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s) = \mathcal{I}(q) = 0,\ \mathcal{I}(p) = 1$, como se puede verificar de manera muy sencilla.

Algunas observaciones son pertinentes.

- Al usar valores supuestos –no forzados– no es posible afirmar la correctud del argumento al llegar al valor verdadero para la conclusión o al llegar a una contradicción. En este caso esto sólo indica que el valor supuesto debe reconsiderarse. Si se llega al mismo resultado para todos los posibles valores supuestos entonces podremos afirmar la correctud del argumento, pero sólo hasta ese momento.
- En el caso de llegar a un contraejemplo con un valor supuesto, con éste basta. No es necesario reconsiderar valores supuestos pues el contraejemplo ya está construido.

El método de interpretaciones, si bien es más eficiente en general que el uso de tablas de verdad, requiere de una gran interacción con el usuario, por lo que se antoja difícil de automatizar; es un método muy cercano al razonamiento humano. Más aún, los pasos de razonamiento no siempre son únicos, por ejemplo al usar supuestos, lo cual añade una dificultad más, la elección o no determinismo.

La noción de consecuencia lógica es un concepto semántico de gran importancia que permite analizar argumentos lógicos y, además, puede generalizarse a otros sistemas lógicos, en contraste con las tablas de verdad. Más aún, el uso de interpretaciones proporciona la base para la búsqueda de contraejemplos a argumentos incorrectos. Sin embargo, no es un método eficiente para encontrar consecuencias dado un conjunto de premisas. Para este propósito es más conveniente construir pruebas o derivaciones de manera sintáctica, es decir, sin apelar al concepto de interpretaciones. Haremos esto en la siguiente sección.

2.6.3. Derivaciones

Muchos argumentos lógicos correctos pueden obtenerse mediante composición de otros argumentos, cuya correctud ya fue verificada previamente, en el sentido de que la conclusión de un argumento particular puede servir como una de las premisas para un siguiente argumento, y así sucesivamente, hasta llegar a una conclusión deseada. Obsérvese que esta composición de argumentos es un mecanismo puramente sintáctico, al no apelar directamente a la noción de verdad o interpretación. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 2.37. Queremos demostrar que el siguiente fragmento de programa deja el valor de la variable x de tal forma que después de la ejecución es imposible que $\mathsf{x} > \mathsf{Max}$, esto es $(\mathsf{x} > \mathsf{Max}) \equiv \mathsf{false}$.

```
if x > Max then x := Max;
```

Formalizamos con las siguientes variables proposicionales:

p	:	$\mathsf{x} > \mathsf{Max}$	antes de la ejecución
q	:	$\mathsf{x} = \mathsf{Max}$	después de la ejecución
r	:	$\mathsf{x} > \mathsf{Max}$	después de la ejecución

Tenemos que distinguir entre $\mathsf{x} > \mathsf{Max}$ antes y después de la ejecución, pues la asignación modifica el valor de la variable x, es decir, x tiene un valor distinto antes y después de la ejecución del programa.

Vamos a hacer primero un análisis intuitivo del problema: hay dos casos, correspondientes a p y $\neg p$. Si p sucede entonces la asignación se lleva a cabo y q se vuelve válida, es decir la implicación $p \to q$ se cumple. Además, si q es válida entonces $\neg r$ también, pues si los dos números x y Max son iguales entonces $\mathsf{x} > \mathsf{Max}$ es falso, así que la implicación $q \to \neg r$ es válida. Por otro lado, si $\neg p$ es válida, entonces la asignación no se lleva a cabo