El Problema MAX-SAT

Octubre 2021

1 El problema de la máxima satisfacibilidad con pesos

El problema de satisfacibilidad booleana (SAT) es un problema de decisión arquetípico en inteligencia artificial, lógica y teoría de la computación. SAT con más de dos literales (variables o sus negaciones) por cláusula es NP-completo. La máxima satisfacibilidad booleana (MAX-SAT) es la contraparte de optimización de SAT, cuyo objetivo es maximizar el número de cláusulas satisfechas.

MAX-SAT es más general que SAT; la solución a MAX-SAT se puede utilizar para responder a la pregunta de su contraparte de decisión, pero no al revés. Por lo tanto, MAX-SAT es más difícil de resolver que SAT. Max-SAT es NP-duro incluso cuando cada cláusula no tiene más de dos literales, mientras que SAT con dos literales por cláusula (2-SAT) es polinomial soluble.

El problema de la máxima satisfacibilidad con pesos (Weighted MAX-SAT) es una extensión de MAX-SAT en la que una cláusula tiene un peso, que representa el significado de la cláusula o una penalización inducida si es que se viola. En Weighted MAX-SAT, el objetivo es maximizar el peso total de las cláusulas satisfechas. MAX-SAT y Weighted MAX-SAT tienen muchas aplicaciones del mundo real en dominios como programación, problemas de configuración, razonamiento probabilístico, subasta y reconocimiento de patrones.

El planteamiento matemático es el siguiente:

Definimos el problema MAX-SAT de la siguiente forma. Considerando un conjunto infinito contable de variables booleanas X, un literal l es o una variable $x_i \in X$ o su negación $\neg x_i$. Una cláusula C es un conjunto finito de literales, también denotada como $C = l_1 \vee \ldots \vee l_r$, o como $\Box$ para la cláusula vacía. Una fórmula SAT ϕ es un conjunto finito de cláusulas, también denotada como $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$.

Una cláusula weighted (con peso) es una tupla (C, w), donde C es una cláusula y w puede ser tanto un número natural como infinito (indicando la penalización asociada a incumplir la cláusula C). Una cláusula es hard si su correspondiente peso es infinito, en cualquier otro caso la cláusula se considera soft.

Una fórmula Weighted Partial MaxSAT es un multiconjunto de cláusulas weighted

$$\phi = \{(C_1, w_1), \ldots, (C_m, w_m), (C_{m+1}, \infty), \ldots, (C_{m+m'}, \infty)\}$$

donde las primeras cláusulas m son soft y las últimas cláusulas m' son hard. Dada una fórmula Weighted Partial MAX-SAT ϕ, definimos las fórmulas SAT $\phi_{soft} = \{C_1, \ldots, C_m\}, \phi hard = \{C_{m+1}, \ldots, C_{m+m'}\}$ y $\phi plain = \phi soft \cup \phi hard$.

El conjunto de variables que aparecen en una fórmula ϕ se denota como $var(\phi)$.

Una asignacion de verdad es una funcion $I : X \rightarrow \{0, 1\}$ donde $X \subset H$. Esta funcion puede ser extendida a literales, clausulas, formulas SAT y formulas MAX-SAT. Decimos que una asignación de verdad I satisface un literal, cláusula o fórmula si le asigna 1, y la falsifica si le asigna 0. Una fórmula es satisfactible si existe una asignación de verdad que la satisface. En caso contrario es insatisfactible.

Dada una fórmula Weighted Partial MAX-SAT ϕ y una asignación de verdad $I : var(\phi) \rightarrow \{0, 1\}$, el coste de la asignación I sobre ϕ, es la suma de los pesos de las clausulas falsificadas por I, por ejemplo:

$$cost(\phi, I) = \sum_{(C_i, w_i) \in \phi, I(C_i) = 0} W_i$$

El coste óptimo de una fórmula es el mínimo coste de todas las posibles asignaciones:

$$cost(\phi) = mincost(\phi, I) | I : var(\phi) \rightarrow \{0, 1\}$$

Una asignación óptima es aquella con un coste óptimo. Cabe fijarse que cuando w es finito, la tupla (C, w) es equivalente a tener w copias de la cláusula $(C, 1)$ en nuestro multiconjunto.

El problema Weighted Partial MAX-SAT para una fórmula ϕ es el problema de encontrar una asignación óptima. Si el coste óptimo es infinito entonces el subconjunto de cláusulas hard es insatisfactible, y decimos que la fórmula es insatisfactible.

El problema Weighted MAX-SAT es un problema Weighted Partial MAX-SAT con el conjunto de cláusulas hard vacío. El problema Partial MAX-SAT es un problema Weighted Partial MAX-SAT donde los pesos de todas las cláusulas soft son iguales.

El problema MAX-SAT es el problema Partial MAX-SAT cuando no hay clausulas hard. El problema SAT sería equivalente a un problema Partial MAX-SAT donde no hay clausulas soft.

2 Ejemplo de Ejecución

1. Si nosotros ingresamos los siguientes valores de entrada:

   5 a b −c
   10 d −h
   2 −i −a −b
   7 f g −a h e −d
   14 j −d c
   20 b d

   El algoritmo nos dirá que tenemos lo siguiente:

   - Numero de variables: 10.
   - Numero de clausulas: 6.
   - Promedio de pesos: 9.6.

2. Si nosotros ingresamos los siguientes valores de entrada:

   10 a b c
   9 b c −d
   5 a c

   El algoritmo nos dirá que tenemos lo siguiente:

   - Numero de variables: 4.
   - Numero de clausulas: 3.
   - Promedio de pesos: 8.0.

El algoritmo detecta el numero de variables distintas, donde una variable negada es igual a una variable no negada, el numero de clausulas es el numero de lineas en el archivo que empiezan con un numero y por ultimo se obtiene un promedio con los pesos de cada clausula, es decir, el promedio de los números que aparecen al principio de cada linea o clausula.