Lógica Computacional, 2020-2
Ejemplos de clase 01

Manuel Soto Romero

29 de enero de 2020
Facultad de Ciencias UNAM

1. Define la función np tal que $np(\varphi)$ representa el número de paréntesis de φ.

   Solución:

$$\begin{array}{rcc} np(\varphi) & = & 0 \; si \; \varphi \in ATOM \\ np((\neg\varphi)) & = & np(\varphi) + 2 \\ np((\varphi \star \psi)) & = & np(\varphi) + np(\psi) + 2 \end{array}$$

$\square$

2. Define la función con tal que $con(\varphi)$ representa el número de conectivos de φ.

   Solución:

$$\begin{array}{rcc} np(\varphi) & = & 0 \; si \; \varphi \in ATOM \\ np((\neg\varphi)) & = & np(\varphi) + 2 \\ np((\varphi \star \psi)) & = & np(\varphi) + np(\psi) + 2 \end{array}$$

$\square$

3. Define la función $vars$ tal que $vars(\varphi)$ representa el conjunto de variables que figuran en φ.

   Solución:

$$\begin{array}{rcc} vars(\varphi) & = & \varnothing \; si \; \varphi \in \{\top, \bot\} \\ vars(\varphi) & = & \{\varphi\} \; si \; \varphi \in ATOM \setminus \{\top, \bot\} \\ vars((\neg\varphi)) & = & vars(\varphi) \\ vars((\varphi \star \psi)) & = & vars(\varphi) \cup vars(\psi) \end{array}$$

$\square$

4. Define la función $atom$ tal que $atom(\varphi)$ representa el número de presencias atómicas en φ.

   Solución:

$$\begin{array}{rcc} atom(\varphi) & = & 1 \; si \; \varphi \in ATOM \\ atom((\neg\varphi)) & = & atom(\varphi) \\ atom((\varphi \star \psi)) & = & atom(\varphi) + atom(\psi) \end{array}$$

$\square$

5. Demuestra usando inducción estructural que $atom(\varphi) \leq 2con(\varphi) + 1$.

Solución:

- Caso base

$$\begin{array}{rcll} atom(\varphi) & \leq & 2con(\varphi) + 1 & \\ 1 & \leq & 2con(\varphi) + 1 & def. \\ 1 & \leq & 2(0) + 1 & def. \\ 1 & \leq & 1 & \therefore \ se \ cumple \end{array}$$

- Hipótesis de inducción
  Supongamos que la propiedad se cumple para φ y ψ. Es decir,
  $atom(\varphi) \leq 2con(\varphi) + 1$
  $atom(\psi) \leq 2con(\psi) + 1$
- Por demostrar que
  - $(\neg\varphi)$ cumple la propiedad
  - $(\varphi \star \psi)$cumple la propiedad

  Para $(\neg\varphi)$

$$\begin{array}{rclcll} atom((\neg\varphi)) & \leq & 2con((\neg\varphi)) + 1 & & & \\ atom(\varphi) & \leq & 2con((\neg\varphi)) + 1 & & & def. \\ atom(\varphi) & \leq & 2con(\varphi) + 2 & & & def. \\ atom(\varphi) & \leq & 2con(\varphi) + 1 & < & 2con(\varphi) + 2 & hi. \end{array}$$

  $\therefore$ *Se cumple.*
  Para $(\varphi \star \psi)$

$$\begin{array}{rclcll} atom((\varphi \star \psi)) & \leq & 2con((\varphi \star \psi)) + 1 & & & \\ atom(\varphi) + atom(\psi) & \leq & 2con((\varphi \star \psi)) + 1 & & & def. \\ atom(\varphi) + atom(\psi) & \leq & 2(con(\varphi) + con(\psi) + 1) + 1 & & & def. \\ atom(\varphi) + atom(\psi) & \leq & 2con(\varphi) + 2con(\psi) + 3 & & & prop. \\ atom(\varphi) + atom(\psi) & \leq & 2con(\varphi) + 2con(\psi) + 2 & < & 2con(\varphi) + 2con(\psi) + 3 & h.i \end{array}$$

  Observación 0.1. Recuerda que:

  - Si $a \leq b$ entonces $a < b + 1$
  - Si $a \leq b$ y $b \leq d$ entonces $a + b \leq c + d$.

□