Lógica Computacional 2020-2
Boletín de ejercicios 4
Sustitución en Lógica de Predicados

Lourdes del Carmen González Huesca   Favio E. Miranda Perea   Pilar Selene Linares Arévalo

20 de marzo de 2020

1. Obtener $Vl(\varphi)$ y $Va(\varphi)$ para cada una de las siguientes fórmulas mostrando el árbol de sintaxis abstracta de cada fórmula:

   a) $\forall x \forall y(Q(x,y) \wedge R(w)) \to \neg R(y,x)$.

   b) $\forall x \exists y R(y,x,z) \wedge \exists z Q(f(z),y)$.

   c) $T(c,x,v) \to \neg L(y,w,d) \vee \exists y \forall z R(y,z)$.

   d) $S(x,z) \to \forall z T(z,w,a) \vee \exists y R(y,w)$.

   e) $\forall x \forall y \exists v \exists w(Q(x,w) \wedge R(y,v) \to L(x,y,v))$.

2. Obtener las composiciones $\sigma\rho$ y $\rho\sigma$ a partir de los siguientes pares:

   a) $\sigma = [x := a]$ $\rho = [y := f(x)]$

   b) $\sigma = [y := v, v := z]$ $\rho = [u := a, w := f(v)]$

   c) $\sigma = [x := a, y := f(z), z := u]$ $\rho = [u := y, x := f(x), v := g(a), z := y]$

   d) $\sigma = [y := v, v := z]$ $\rho = [v := a, z := v]$

   e) $\sigma = [x := h(a,b,c,y)]$, $\rho = [w := f(g(h(k(x,b))))]$

   f) $\sigma = [u,v,w := c, f(z), f(g(h(x)))]$, $\rho = [u,x,z := v, k(u), c]$

3. Realiza las siguientes sustituciones:

   a) $\exists x(Lx \wedge Tx) \wedge \neg\exists x(Lx \to Ty \wedge Rz)[x,z := fa, b]$

   b) $\big(\forall x \forall y P(x,y,z)\big)[x := a, y := f(a), z := f(y)]$

   c) $\Big(\forall v \forall w(P(u,v,a) \wedge R(a,w) \wedge Q(u,w))\Big)[y := f(z), z := g(a,b), x := f(y)]$

   d) $R(a,y) \leftrightarrow \big(\exists y \exists z(P(x,y,a) \wedge R(a,z) \wedge Q(z,x))\big)[y := f(z), z := g(a,b), x := f(y)]$

   e) $\Big(\forall x(R(u,v,w) \vee P(x)) \to \exists y\big(P(f(y)) \vee R(y,x,a)\big)\Big)[u,v,w,x,y := f(a), g(x(,y,h(u),f(a)]$

   f) $\big(W(f(x,a),g(y)) \wedge \forall x \exists y S(f(x,a),g(z))\big)[x := a, y := f(z,z), z := f(y,x)]$

   g) $\big(P(x,a,y) \vee \exists y(P(x,y,a) \wedge R(a,z))\big)[z := g(a,b), y := f(z)]$

   h) $\Big(\forall x \exists z\big(Q(z,y) \wedge \exists y R(x,f(x))\big)\Big)[x := g(a), y := f(b), z := f(y)]$

   i) $\big(\forall x \exists y T(x,y,z) \wedge \exists z P(f(x),g(y),z)\big)[x := f(a), y := g(b), z := f(x)]$

j) $\big(\exists x(\forall y(R(x,y) \to Q(z)) \wedge Q(x))\big)[x := g(h(a,y)), y := g(b), z := f(y)]$

k) $\forall x(S(x) \to (\neg Q(y,x) \vee \exists z R(z,x))[y := z] \wedge \forall y Q(x,y))[z := x]$

l) $\big(W(g(y)) \wedge \exists z V(f(x,a), g(z)) \wedge U(f(x,z))\big)[x, y, z := z, f(z,z), g(y,x)]$

m) $\big(\forall v \exists y S(v,y,z) \vee \exists z P(f(v), g(y), z)\big)[w := f(u), u := g(y,z), y := b]$

n) $\Big(\forall x \exists w \big(Q(w,y,x) \wedge \exists y P(f(x), w)\big)\Big)[y, w := f(a), f(x)]$

ñ) $\big(\exists x(\forall y(Rxy \to Qz) \wedge Qx)\big)[x := g(h(a,y)), y := g(b), z := f(y)]$

4. Demuestra, utilizando inducción estuctural, las siguientes propiedades de las sustituciones en fórmulas de primer orden.

   a) Si $x \notin FV(\varphi)$ entonces $\varphi[\vec{x}, x := \vec{t}, r\,] = \varphi[\vec{x} := \vec{t}\,]$.

   b) Si $\vec{x} \cap FV(\varphi) = \varnothing$ entonces $\varphi[\vec{x} := \vec{t}\,] = \varphi$.

   c) $FV(\varphi[\vec{x} := \vec{t}\,]) \subseteq (FV(\varphi) - \vec{x}) \cup FV(\vec{t})$.

   d) Si $x \notin \vec{x} \cup Var(\vec{t})$ entonces $x \in FV(\varphi)$ si y sólo si $x \in FV(\varphi[\vec{x} := \vec{t}\,])$.

   e) Si $x \notin \vec{x} \cup Var(\vec{t})$ entonces $\varphi[x := t][\vec{x} := \vec{t}\,] = \varphi\big[\vec{x} := \vec{t}\,\big]\big[x := t[\vec{x} := \vec{t}\,]\big]$.

   f) Si $x \notin \vec{x} \cup Var(\vec{t})$ entonces $\varphi[\vec{x}, x := \vec{t}, t] = \varphi[\vec{x} := \vec{t}\,][x := t]$.

   g) Una sustitución σ es idempotente si $\sigma\sigma = \sigma$.
   Sean $\sigma = [x_1, ..., x_n := t_1, ..., t_n]$ y $V = Var(t_1) \cap ... \cap Var(t_n)$.
   Prueba que σ es idempotente si y sólo si $\{x_1, ..., x_m\} \cap V = \varnothing$.