Lógica Computacional 2020-2
Complemento a nota 7

Favio E. Miranda Perea Alejandra Coloapa

19 de marzo de 2020

En los siguientes ejercicios se toma $\{a, b\}$ como constantes.

1. $\phi = \forall x \exists y T(x, y, z) \wedge \exists z P(f(x), g(y), z)$

$$\forall x\, \overbrace{\exists y\, \underbrace{T(x,y,z)}_{y\ ligada}}^{x\ ligada} \wedge \exists z\, \overbrace{P(f(x),g(y),z)}^{z\ ligada}$$

- El alcance de $\forall x$ es $\exists y T(x, y, z)$.
- El alcance de $\exists y$ es $T(x, y, z)$.
- El alcance de $\exists z$ es $P(f(x), g(y), z)$.
- $FV(\forall x \exists y T(x, y, z)) = \{z\}$.
- $FV(\exists z P(f(x), g(y), z)) = \{x, y\}$.

Consideremos la sustitución $\sigma = [x := f(a),\ y := g(b),\ z := f(x)]$

$$\phi\sigma = (\forall x \exists y T(x, y, z))\,\sigma \wedge (\exists z P(f(x), g(y), z))\,\sigma$$

ya que x, y, z están ligadas y son variables a sustituir, se utiliza la siguiente $\alpha-$equivalencia:

$$\forall x \exists y T(x, y, z) \wedge \exists z P(f(x), g(y), z) \quad \sim_\alpha \quad \forall w \exists u T(w, u, z) \wedge \exists r P(f(x), g(y), r)$$

por lo que la sustitución queda como:

$$\begin{aligned}
\phi\sigma &= (\forall w \exists u T(w, u, z))\,\sigma \ \wedge\ (\exists r P(f(x), g(y), r))\,\sigma \\
&= \forall w\,((\exists u T(w, u, z))\,\sigma) \ \wedge\ \exists r\,(P(f(x), g(y), r)\sigma) \\
&\quad \text{ya que } w, r \notin \{x, y, z\} \\
&= \forall w \exists u\,(T(w, u, z)\sigma) \ \wedge\ \exists r\,(P(f(x), g(y), r)\sigma) \\
&= \forall w \exists u T(w\sigma, u\sigma, z\sigma) \ \wedge\ \exists r P(f(x)\sigma, g(y)\sigma, r\sigma) \\
&= \forall w \exists u T(w, u, f(x)) \ \wedge\ \exists r P(f(x\sigma), g(y\sigma), r) \\
&= \forall w \exists u T(w, u, f(x)) \ \wedge\ \exists r P(f(f(a)), g(g(b)), r)
\end{aligned}$$

$\dashv$

2. $\phi = W(f(x,a),g(y)) \wedge \forall x \exists y S(f(x,a),g(z))$

$$W(f(x,a),g(y)) \wedge \forall x \overbrace{\exists y\, \underbrace{S(f(x,a),g(z))}_{y\ ligada}}^{x\ ligada}$$

- El alcance de $\forall x$ es $\exists y S(f(x,a),g(z))$.
- El alcance de $\exists y$ es $S(f(x,a),g(z))$.
- $FV(W(f(x,a),g(y))) = \{x,y\}$.
- $FV(\forall x \exists y S(f(x,a),g(z))) = \{z\}$.

Consideremos la sustitución $\sigma = [x := a,\ y := f(z,z),\ z := f(y,x)]$

$$\phi\sigma = W(f(x,a),g(y))\sigma \ \wedge \ (\forall x \exists y S(f(x,a),g(z)))\,\sigma$$

ya que x, y están ligadas y son variables a sustituir, se utiliza la siguiente $\alpha-$equivalencia:

$$\forall x \exists y S(f(x,a),g(z)) \quad \sim_\alpha \quad \forall w \exists r S(f(w,a),g(z))$$

por lo que la sustitución queda como:

$$\begin{aligned}
\phi\sigma &= W(f(x,a),g(y))\sigma \ \wedge \ (\forall w \exists r S(f(w,a),g(z)))\,\sigma \\
&= W(f(x,a)\sigma, g(y)\sigma) \ \wedge \ \forall w\, (\exists r S(f(w,a),g(z)))\,\sigma \\
&= W(f(x\sigma, a\sigma), g(y\sigma)) \ \wedge \ \forall w \exists r\, (S(f(w,a),g(z))\sigma) \\
&= W(f(a,a), g(f(z,z))) \ \wedge \ \forall w \exists r S(f(w,a)\sigma, g(z)\sigma) \\
&= W(f(a,a), g(f(z,z))) \ \wedge \ \forall w \exists r S(f(w\sigma, a\sigma), g(z\sigma)) \\
&= W(f(a,a), g(f(z,z))) \ \wedge \ \forall w \exists r S(f(w,a), g(f(y,x)))
\end{aligned}$$

$\dashv$

3. $\phi_3 = \forall x\, (P(x,y) \to \exists w R(y,w) \wedge R(x,w))$

$$\forall x\overbrace{(P(x,y) \to \exists w\, \underbrace{R(y,w)}_{w\ ligada} \wedge R(x,w))}^{x\ ligada}$$

- El alcance de $\forall x$ es $P(x,y) \to \exists w R(y,w) \wedge R(x,w)$.
- El alcance de $\exists w$ es $R(y,w)$.
- $FV(P(x,y)) = \{y\}$.
- $FV(\exists w R(y,w)) = \{y\}$.
- $FV(R(x,w)) = \{w\}$.

Consideremos la sustitución $\sigma = [x := w, y := f(w), w := x]$, ya que ϕ tiene a x como variable ligada, es necesario hacer una $\alpha-$equivalencia:

$$\forall x\,(P(x,y) \to \exists w R(y,w) \wedge R(x,w)) \quad \sim_\alpha \quad \forall r\,(P(r,y) \to \exists w R(y,w) \wedge R(r,w))$$

por lo que la sustitución queda como:

$$\begin{aligned}
\phi\sigma &= \forall r\,(P(r,y) \to \exists w R(y,w) \wedge R(r,w))\,\sigma \\
&= \forall r\,(P(r,y)\sigma \to (\exists w R(y,w) \wedge R(r,w))\sigma) \\
&= \forall r\,(P(r\sigma, y\sigma) \to \exists w (R(y,w)\sigma) \wedge R(r,w)\sigma)
\end{aligned}$$

ya que w está ligada en $\exists w$ y es parte de las variables de la sustitución, se utiliza la siguiente $\alpha-$equivalencia:

$$\exists w R(y,w) \quad \sim_\alpha \quad \exists z R(y,z)$$

por lo que sustitución queda como:

$$\begin{aligned}
\phi\sigma &= \forall r\,(P(r\sigma, y\sigma) \to \exists z (R(y,z)\sigma) \wedge R(r,w)\sigma) \\
&= \forall r\,(P(r, f(w)) \to \exists z R(y\sigma, z\sigma) \wedge R(r\sigma, w\sigma)) \\
&= \forall r\,(P(r, f(w)) \to \exists z R(f(w), z) \wedge R(r,x))
\end{aligned}$$

$\dashv$