Lógica Computacional 2020-2
Boletín de ejercicios 1
Repaso Lógica Proposiciones

Lourdes del Carmen González Huesca     Pilar Selene Linares Arévalo

7 de febrero de 2020

## Sintaxis de la Lógica de Proposiciones

1. Elimina los paréntesis innecesarios en las siguientes expresiones:

   *a)* $((p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((\neg r) \to (\neg(p \vee q)))$
   
   *b)* $\neg(((p \wedge (p \to (\neg q))) \wedge q) \wedge p)$
   
   *c)* $(p \to (q \wedge (\neg q))) \to ((\neg p) \to p)$
   
   *d)* $(\neg s) \to ((\neg t) \wedge \neg(p \vee q))$

2. Define las siguientes funciones, indicando claramente en cada caso el dominio y contradominio de la función definida:

   *a)* $grado(\phi)$, el número de conectivos lógicos de $\phi$
   
   *b)* $nonatomsubform(\phi)$, el número de subfórmulas no atómicas de $\phi$
   
   *c)* $subformulas(\phi)$, el conjunto de subfórmulas de $\phi$

3. Prueba que cualquier fórmula proposicional $\psi$ que tiene únicamente disyunciones es verdadera si alguna de sus variables proposicionales es verdadera.

4. Demuestra que para cualquier fórmula proposicional $\varphi$, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de símbolos de disyunción en $\varphi$ si la gramática para fórmulas proposicionales es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \varphi,\ \psi & ::= & VarP \mid \bot \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \\ VarP & ::= & p \mid q \mid r \mid \cdots \mid p_1 \mid p_2 \mid \cdots \end{array}$$

   Debes dar las funciones recursivas para calcular el número de paréntesis izquierdos de una fórmula y el número de símbolos de disyunción de una fórmula de la gramática anterior.

5. Demuestra que $\neg(p_0 \vee p_1 \vee \cdots \vee p_n) \equiv \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$, para todo $n$ natural mayor o igual a 1. [Hint: la inducción es sobre $n$]

6. Aplica las siguientes sustituciones y al finalizar elimina los paréntesis que sean redundantes. Muestra a detalle los pasos realizados.

   *a)* $\big((p \to (s \to q)) \leftrightarrow (((\neg p) \vee q) \vee (\neg s))\big)[p, q := s \to p, s \vee r]$

b) $(p \lor q) \to ((\neg r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow s))[r,p,q := p, p \land q, p \land q \land r]$

c) $((p \land q)[p,q := p \land q, s] \lor (p \lor s))[s := q \lor r]$

d) $\big((q \land r)[q,p := \neg p, s] \to (r \land \neg(r \leftrightarrow p))\big)[r,p := \neg r, s \land p]$

e) $\Big((p \to q \to s)[q := \neg r \land q] \to \big((p \to q) \leftrightarrow (p \land r)\big)\Big)[q,r,p := s, q \land p, (r \lor q)]$

7. Decide si la siguiente propiedad de sustituciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstralo y proporciona una condición suficiente para que la proposición sea verdadera, si no, da un contraejemplo.

$$\phi[p,q := \psi,\gamma] \equiv \phi[p := \psi][q := \gamma]$$

## Semántica de Lógica de Proposiciones

1. Defina utilizando los conectivos lógicos vistos en clase el operador $\oplus$ (ó exclusivo), cuya propiedad es:

$$\mathcal{I}(\phi \oplus \psi) = 1 \text{ si y sólo si } \mathcal{I}(\psi) \neq \mathcal{I}(\phi)$$

2. Decida si los siguientes conjuntos de proposiciones son satisfacibles por medio de interpretaciones:

a) $\{p \to q,\ (s \lor p) \land \neg q,\ \neg s\}$

b) $\{(p \to r) \lor (\neg s \land p),\ s \to \neg(p \land r),\ r \lor \neg s\}$

c) $\{p \lor (q \land s),\ (\neg r \lor s) \land (s \to t),\ \neg p \lor \neg t\}$

d) $\{\neg s,\ p \to (q \lor r),\ q \to r,\ r \to s,\ \neg p\}$

3. Pruebe la correctud de los siguientes argumentos de la lógica proposicional. Resuelva por interpretaciones apoyándose del principio de refutación.

a) $a \lor b, \neg c \to \neg a$ luego $b \to \neg c$

b) $p \to q \lor r, r \to \neg p, q \to \neg p$ entonces $\neg(p \land \neg s)$

4. Demuestre las siguientes propiedades de la consecuencia lógica:

a) Si $\Gamma \models \phi$ entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible.

b) Si $\Gamma, \phi \models \psi$ entonces $\Gamma, \neg\psi \models \neg\phi$.

c) Si $\Gamma, \phi \lor \psi \models \neg\phi$ entonces $\Gamma, \phi \lor \psi \models \psi$.

d) $\Gamma, \phi \land \psi \models \phi$

e) $\Gamma, \psi \models \psi \lor \phi$

5. Decide si los siguientes pares de proposiciones son equivalentes utilizando interpretaciones:

a) $p \lor (p \to q) \qquad \bot$

b) $\neg(p \leftrightarrow q) \qquad \neg p \leftrightarrow q$

c) $(p \to q) \land (p \to r) \qquad p \to (q \land r)$

d) $\neg(p \leftrightarrow q) \qquad (\neg p \land q) \lor (q \to p)$

e) $(p \to r) \land (q \to r) \qquad (p \lor q) \to r$

f) $p \lor q \qquad \neg p \to q$

*g)* $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p) \qquad (p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)$

6. Analice la consecuencia lógica en cada caso:

   *a)* $\{p \to q,\ q \to r \to s,\ p \to q \to r\} \models p \to s$

   *b)* $\{p \to q,\ q \wedge r \to s,\ r\} \models p \to s$

   *c)* $\{p \to q \to r,\ p \vee s,\ t \to q,\ \neg s\} \models \neg r \to \neg t$

   *d)* $\{t \to p \vee q,\ p \to s \wedge u,\ q \to \neg u\} \models t \to s \vee \neg u$

   *e)* $\{(s \to q) \to s \wedge r,\ p \to \neg\big((r \to \neg q) \wedge (p \to r)\big) \to \neg q\} \models p \wedge \neg s$

   *f)* $\{p \to q \vee r,\ \neg p \to t,\ (\neg t \vee s) \wedge \neg q\} \models r \vee s$

7. Traduce los siguientes argumentos lógicos indicando el significado de las variables proposicionales usadas. Además decide si son correctos utilizando interpretaciones.

   *a)* *Raúl está comiendo pastel. Si Raúl está comiendo pastel, no está jugando con su PS4. Si no está jugando con su PS4 entonces su padre no pagará el seguro de la casa. Por tanto el padre de Raúl no pagará el seguro de la casa.*

   *b)* *Que el auditorio esté lleno es condición necesaria y suficiente para que la banda de rock toque. Si la banda de rock toca entonces todos están cantando. Nadie canta. Por tanto el auditorio no está lleno.*

   *c)* *Sólo si llego pronto no se me enfriará el café. No llego pronto a menos que el tránsito vaya bien, suene el despertador y no me quede dormido. Pero o no suena el despertador o estoy sordo. Oigo bien, luego se me enfía el café.*

   *d)* *Cuando el perro no ladra y el gallo canta, siempre bala la oveja. Sólo si canta la calandria, sucede que o ladra el perro o maúlla el gato. He visto que, o canta el gallo o canta la calandria, así que o bala la oveja o canta la calandria.*

## Formas Normales y Resolución Binaria

1. Define recursivamente la funciones que calculan la forma normal negativa y la forma normal conjuntiva respectivamente, dada una fórmula proposicional.

2. Obtener la forma normal conjuntiva de las siguientes fórmulas

   *a)* $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$

   *b)* $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \to r)$

   *c)* $(p \wedge q \to p) \to ((q \vee r) \wedge \neg(q \vee r))$

   *d)* $p \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$

   *e)* $\neg\big(((p \vee q) \wedge \neg r) \to \neg p \vee r\big)$

   *f)* $\neg(\neg s \to \neg(t \vee (p \vee q)))$

   *g)* $\neg((\neg q \wedge (p \to r)) \wedge (r \to q))$

3. Decidir si los siguientes conjuntos son satisfacibles:

   *a)* $\Gamma = \{p \vee q \to r, \neg((p \vee q) \vee r)\}$

   *b)* $\Gamma = \{q \vee r \vee s, \neg(q \vee r), \neg(r \vee s), \neg(s \vee q)\}$

*c)* $\Gamma = \{(p \to q) \vee \neg(q \to p), \neg(p \vee (p \to q)), p \to (p \to q)\}$

*d)* $\Gamma = \{(p \wedge \neg(\neg q \vee p)) \wedge (p \to (\neg q \leftrightarrow (p \vee q))), (p \wedge q) \to (r \vee s)\}$

4. Decide si las siguientes fórmulas son tautologías al transformarlas en cláusulas:

   *a)* $\neg p \vee q \to (q \to p)$

   *b)* $(p \to r) \to (q \to r) \to (p \vee q \to r)$

   *c)* $p \wedge (q \vee p) \leftrightarrow p$

   *d)* $((p \to q) \to p) \to p$

   *e)* $(p \leftrightarrow \neg q) \vee q$

   *f)* $(p \vee q) \wedge \neg r \to \neg p \vee r$

5. Decidir si los siguientes argumentos son correctos:

   *a)* $\{p \to q,\ r \to s,\ p \vee s,\ \neg(q \wedge s)\} \models (q \to p) \wedge (s \to r)$

   *b)* $\{p \to \neg q,\ (r \vee s) \to t,\ t \to q\} \models p \to (\neg r \wedge \neg s)$

   *c)* $\{b \wedge z,\ z \to (c \wedge d),\ (c \wedge b) \to q\} \models q \vee t$

   *d)* $\{\neg(\neg p \to q) \vee ((p \to r) \wedge (r \to q))\} \models (r \to \neg p) \wedge (p \to \neg q)$

   *e)* *Tengo sueño o no tengo hambre. Sólo si tengo hambre me duele la cabeza. Sólo si he dormido ocho horas no tengo sueño. No he dormido ocho horas. Por tanto, no es el caso de que me duela la cabeza o haya dormido ocho horas.*

   *f)* *Si la gente no estuviera embrutecida, rechazaría el mundo en que vivimos o desesperaría. Por otra parte, la gente no rechaza a este mundo. Luego la gente anda embrutecida o desesperada.*

6. Para los siguientes conjuntos de fórmulas, decidir si son satisfacibles o no calculando los conjuntos de saturación.

   *a)* $\{p \vee q,\ \neg q \vee r,\ r \vee \neg p,\ \neg p \vee q,\ \neg q\}$

   *b)* $\{p \wedge q \wedge r \to s, t \wedge w \to r, q, v \wedge r \to p, t, v, v \to w\}$

   *c)* $\{p \wedge q \to r, w \to r, p, s \to w\}$

   *d)* $\{\neg p \wedge q, ((r \to p) \to \neg q) \vee \neg r, \neg(r \vee \neg p)\}$

   *e)* $\{r \to \neg(p \wedge \neg q), ((p \to r) \to (\neg q \to r)) \wedge \neg r, \neg(q \wedge q)\}$

   *f)* $\{(p \wedge r) \vee (\neg r \to q), (q \to r) \to \neg q \to r, \neg p \wedge q \wedge \neg r\}$