#fenuah
FACULTAD DE ECONOMÍA Y NEGOCIOS
UNIVERSIDAD ALBERTO HURTADO

uah / Universidad Alberto Hurtado

Desarrollo Económico

Crecimiento Económico II

Mauricio Tejada
Departamento de Economía, Universidad Alberto Hurtado
Primer Semestre 2022

El modelo de Solow (continuación)

La ecuación fundamental del modelo de Solow

Recodemos …

- Los agentes ahorran una fracción constante de su ingreso:

$$S(t) = sY(t)$$

- El ahorro es igual a la inversión:

$$S(t) = I(t)$$

- La inversión incrementa el stock de capital:

$$K(t+1) = (1-\delta)K(t) + I(t) = (1-\delta)K(t) + sY(t)$$

  con δ la tasa de depreciación.

- Esta es la ecuación de acumulación del stock de capital.

La ecuación fundamental del modelo de Solow

- Ecuación de acumulación:

$$K(t+1) = (1-\delta)K(t) + sY(t)$$

- Para convertir a magnitudes per cápita dividimos entre el trabajo: $k = K/L, y = Y/L$:

$$(1+n)k(t+1) = (1-\delta)k(t) + sy(t)$$

  (usamos n para indicar la tasa de crecimiento de la población).

- Combinamos con la función de producción per cápita $y = f(k)$:

$$(1+n)k(t+1) = (1-\delta)k(t) + sf(k(t))$$

- Esta es la **ecuación fundamental** para el modelo de crecimiento. Con ella podemos estudiar la dinámica del stock de capital

La dinámica del stock de capital

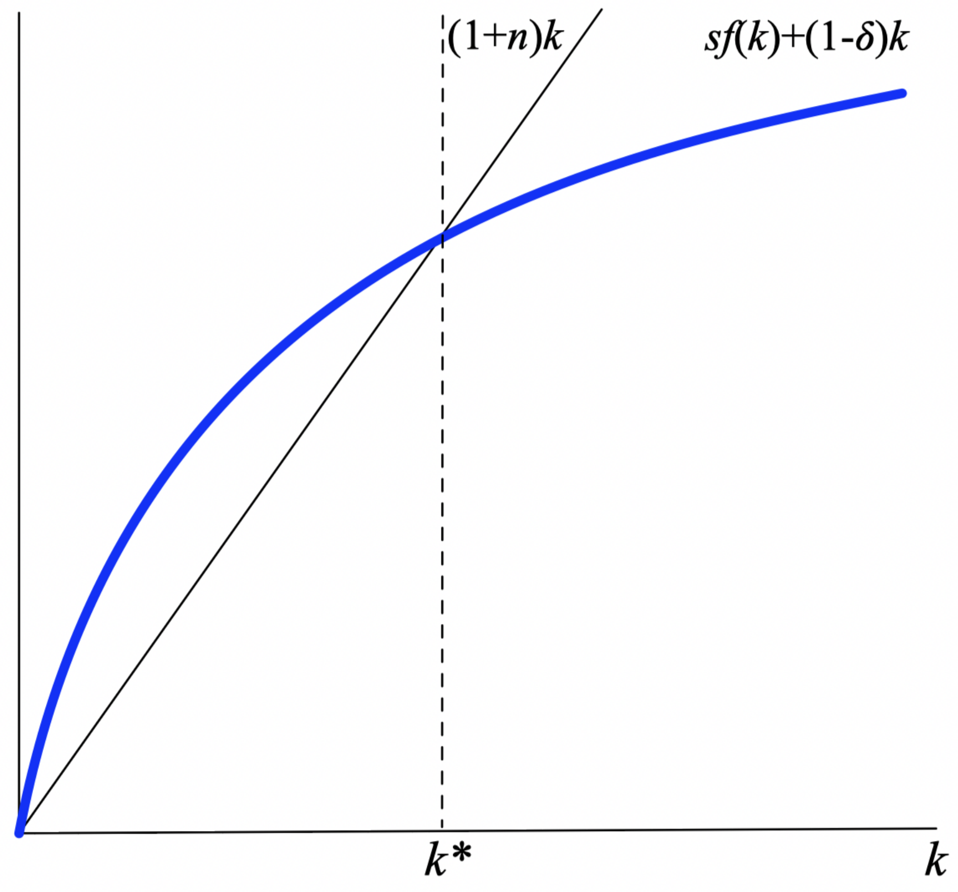
Solución de Solow:

- Ecuación fundamental:

$$(1+n)k(t+1) = (1-\delta)k(t) + sf(k(t))$$

- En términos de variaciones

$$\Delta k = \frac{(1-\delta)k(t) + sf(k(t)) - (1+n)k(t)}{1+n}$$



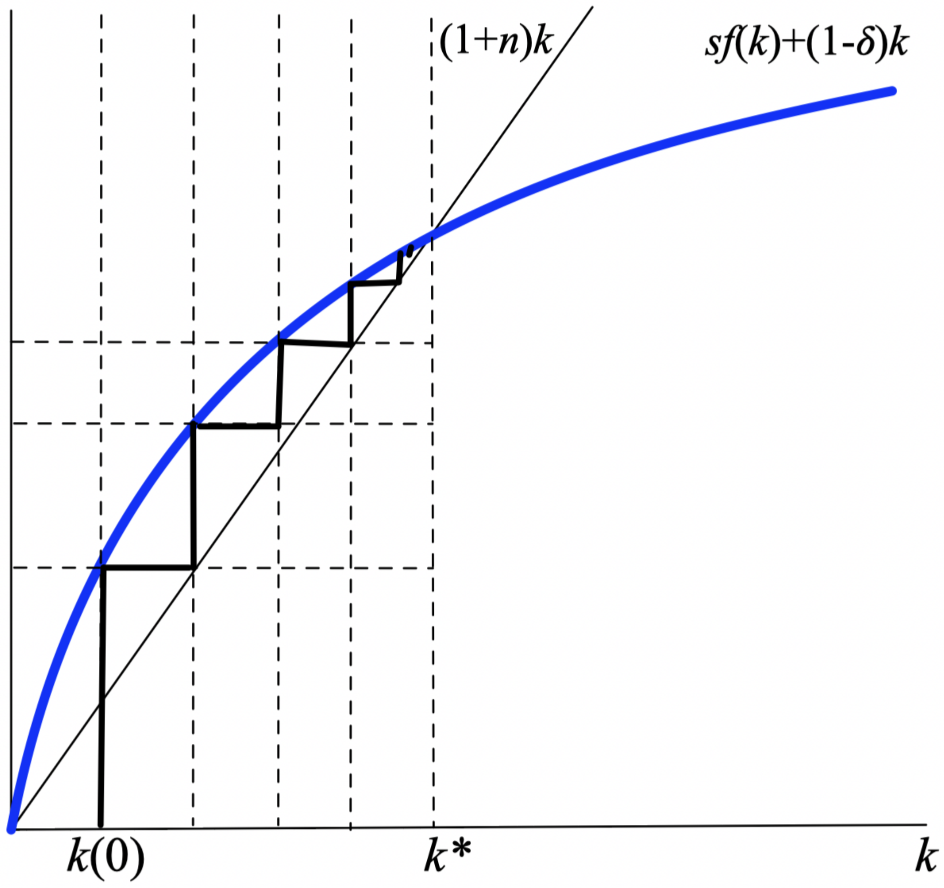
#fenuah

La dinámica del stock de capital

Convergencia desde un capital bajo:

- Si $k(0) < k^*$, entonces:
  - $\Delta k > 0$.
  - $k(t) \to^{+} k^*$ para cualquier $k(0)$
  - Donde:

$$\frac{f\left(k^*\right)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$



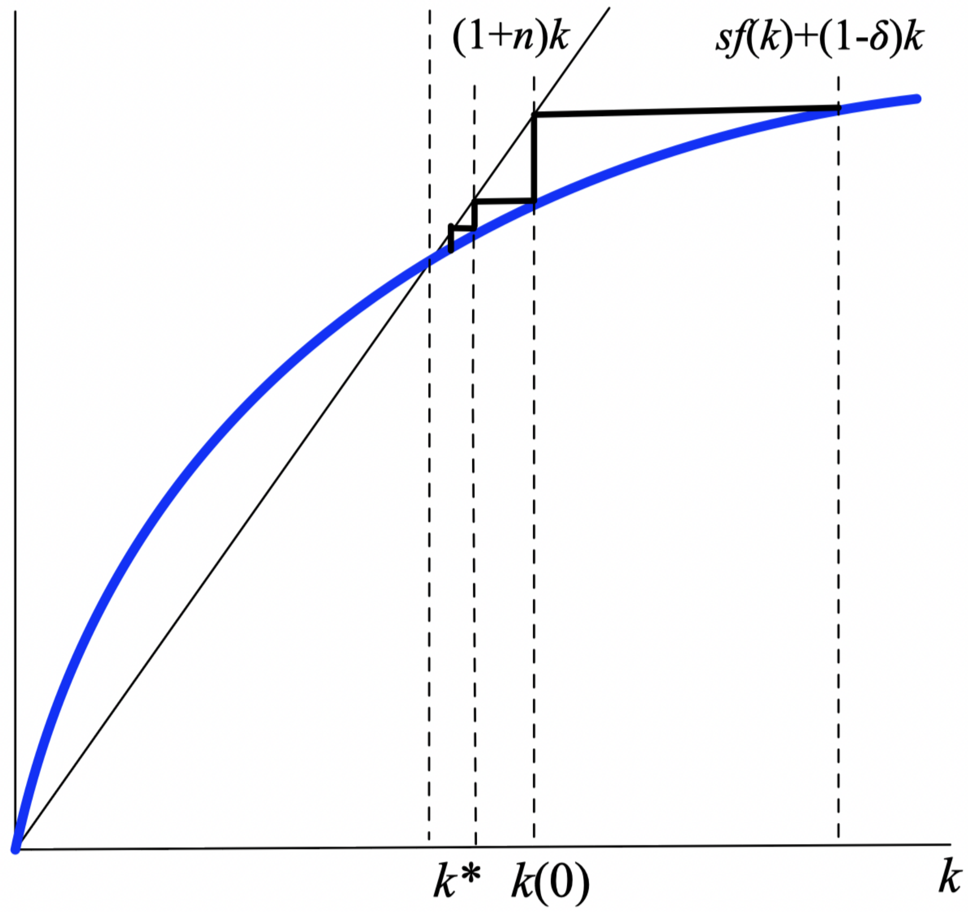
#fenuah

La dinámica del stock de capital

Convergencia desde un capital alto:

- Si $k(0) > k^*$, entonces:
  - $\Delta k < 0$.
  - $k(t) \to^{-} k^*$ para cualquier $k(0)$
  - Donde:

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$



El estado estacionario

- La **relación capital-trabajo** en estado estacionario es constante:

$$\frac{y^*}{k^*} = \frac{f\left(k^*\right)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$

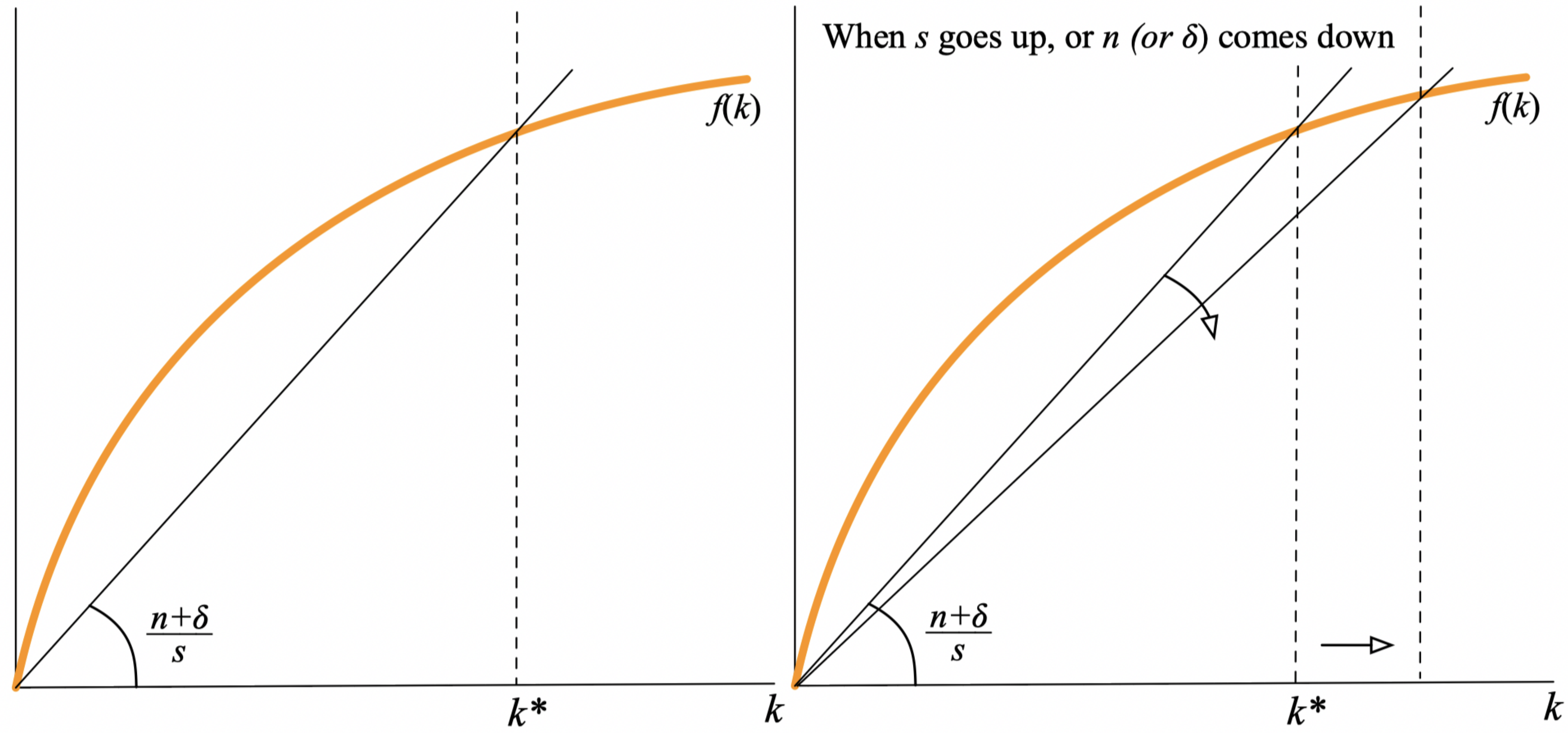
- $k^* = K(t)/L(t)$ es constante $(\Delta k = 0)$, pero $K(t)$ y $L(t)$ siguen creciendo a una tasa de n.
- Lo mismo ocurre con el producto, $y^* = f(k^*)$ es constante, por lo que $Y(t)$ crece también a tasa n.
    - El argumento depende fundamentalmente de los **rendimientos decrecientes de los insumos**.

Predicción del modelo de Solow 1:

No hay crecimiento a largo plazo por encima del crecimiento de la población. Cualquier crecimiento extra sólo viene del progreso técnico, como veremos más adelante.

El estado estacionario: estática comparativa

- ¿Cómo s, n y δ afectan a k^*:



#fenuah

El estado estacionario para el caso Cobb-Douglas

- Estado estacionario k^* resuelve:

$$\frac{f\left(k^*\right)}{k^*} = \frac{n+\delta}{s}$$

- En el caso de la función Cobb-Douglas, $f(k) = Ak^\alpha$, tenemos:

$$\frac{f\left(k^*\right)}{k^*} = Ak^{*\alpha-1} = \frac{n+\delta}{s}$$

y por tanto:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

- Se puede verificar directamente las propiedades que antes establecimos geométricamente
    - Esto es, encuentre el signo de las derivadas parciales de k^* con respecto a s, n y δ.

Fuentes de crecimiento: exógeno vs. endógeno

Fuentes de crecimiento

Crecimiento exógeno versus crecimiento endógeno

- Crecimiento exógeno: proviene de “fuera” del modelo.
    - Progreso tecnológico continuo.
- Crecimiento endógeno: proviene del “adentro” del modelo.
    - Progreso tecnológico inducido
    - Ausencia de rendimientos decrecientes

Crecimiento exógeno en el modelo de Solow: progreso tecnológico

- **Supuesto X**: Función de producción es ahora:

$$Y(t) = F(K(t), e(t)L(t))$$

  donde $e(t)$ es la eficiencia del trabajo, entonces $e(t)L(t)$ es el trabajo efectivo.

- Progreso tecnológico exógeno:

$$e(t+1) = e(t)(1+\pi), \pi > 0$$

- Dividamos la ecuación de acumulación por $e(t)L(t)$ en lugar de $L(t)$:

$$(1+\pi)(1+n)\hat{k}(t+1) = (1-\delta)\hat{k}(t) + sf(\hat{k}(t))$$

  donde $\hat{k} = K/eL$ está medido en **unidades efectivas per cápita**.

- Todo lo demás es idéntico a los visto antes.

El estado estacionario (en unidades efectivas de de trabajo)

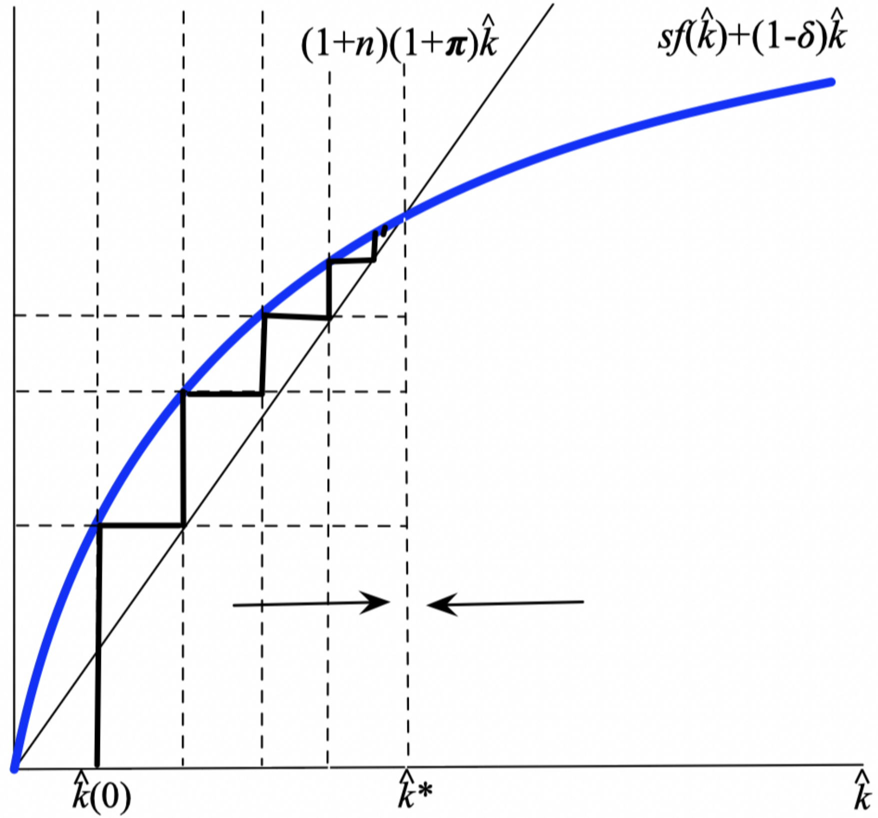
- En estado estacionario:

$$\frac{f\left(\hat{k}^*\right)}{\hat{k}^*} = \frac{(1+n)(1+\pi)-(1-\delta)}{s}$$
$$\simeq \frac{n+\delta+\pi}{s}$$

- Note que:

$$y^*(t) = \hat{y}^* e(t)$$

entonces, el la tasa de crecimiento per cápita a largo plazo es π.



#fenuah

El estado estacionario (en unidades efectivas de de trabajo)

- En el caso de la función Cobb-Douglas, $\hat{y} = f\left(k^*\right) = A\hat{k}^{\alpha}$, tenemos:

$$\hat{k}^* = \left(\frac{sA}{n+\delta+\pi}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

- La producción de estado estacionario en unidades efectivas de trabajo es:

$$\hat{y}^* = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{s}{n+\delta+\pi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

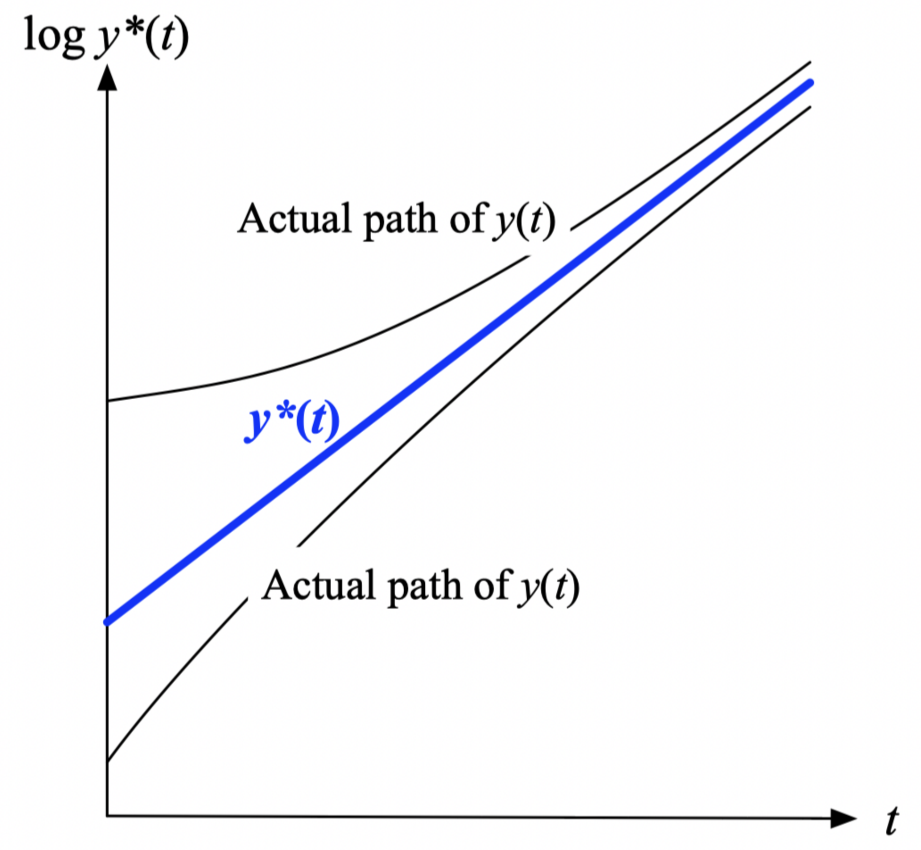
- Como antes, la producción real per cápita y el capital crecen a una tasa de π.

El estado estacionario (en unidades efectivas de de trabajo)

- Trayectoria de la producción per cápita en estado estacionario:

$$
\begin{aligned}
y^*(t) &= \hat{y}^*(1+\pi)^t \\
&= A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{s}{n+\delta+\pi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}(1+\pi)^t
\end{aligned}
$$

- Note que fuera de la trayectoria de estados estacionario, el producto per cápita puede crecer más (o menos) que π.

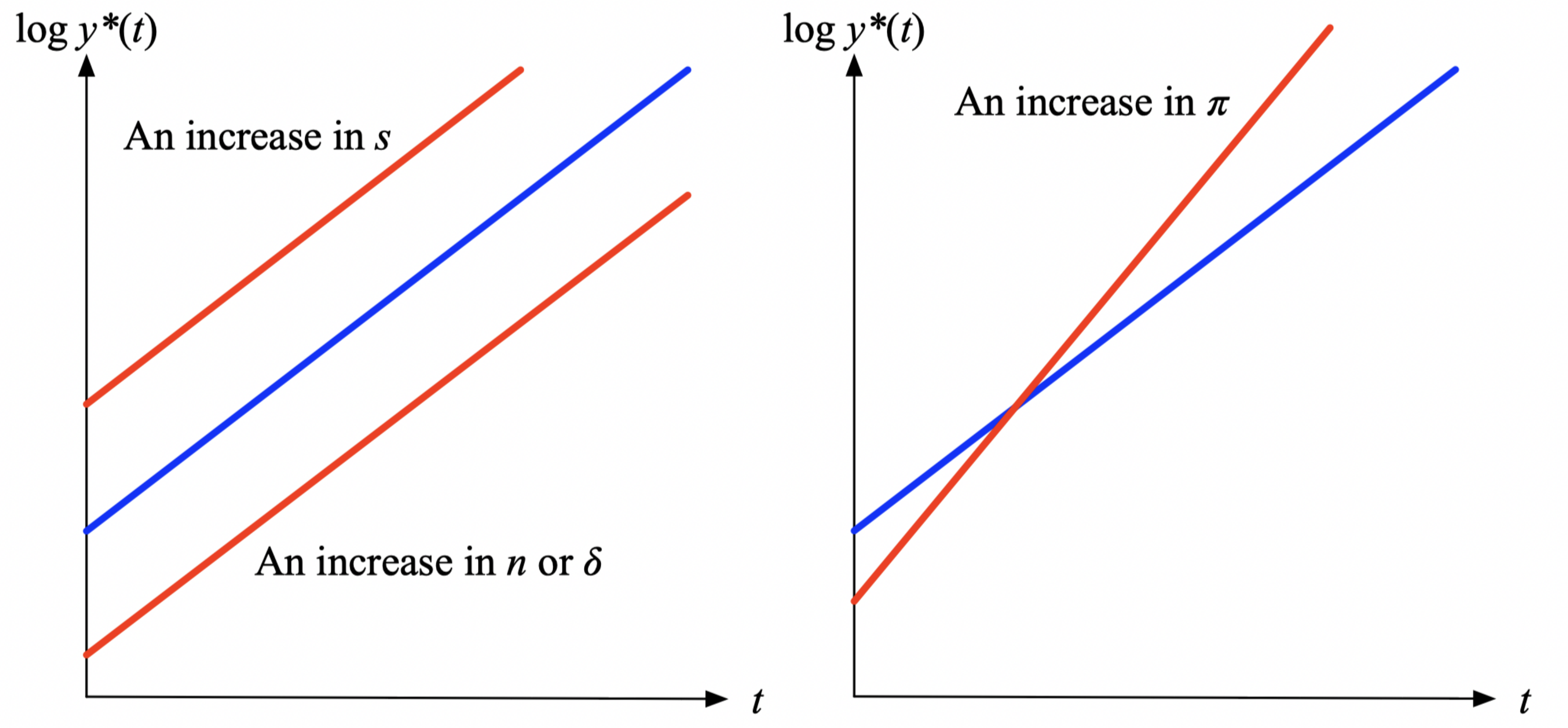


#fenuah

El estado estacionario: estática comparativa

- Trayectoria de la producción per cápita en estado estacionario:

$$y^*(t) = \hat{y}^*(1+\pi)^t = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{s}{n+\delta+\pi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}(1+\pi)^t$$



#fenuah

El modelo AK, un primer paso a los modelo de crecimiento endógeno

- Observemos cómo se mueve el estado estacionario con α.
  - Cuando $\alpha \to 1$, de forma que $y(t) = Ak(t)$, el modelo se comporta de manera muy diferente:

$$(1+n)k(t+1) = (1-\delta)k(t) + sAk(t)$$

  - Realizando manipulaciones algebraicas:

$$\text{Tasa de crecimiento } = g = \frac{k(t+1)-k(t)}{k(t)} = \frac{sA-(n+\delta)}{1+n}$$

- En su versión aproximada tenemos:

$$sA \simeq g + n + \delta$$

  - Ahora los **parámetros** tienen **efectos permanentes** sobre la tasa de crecimiento, a diferencia del modelo de Solow.