Midiendo errores y repaso de normas

Para analizar la precisión de una solución numérica, o si quisieramos ver que tan bueno (o no) es un método numérico en comparación con otro, es necesario elegir una manera de medir el error que se comete. Hay muchas maneras diferentes de medir el error, lo que a veces puede dar impresiones muy diferentes en cuanto a la precisión de una solución aproximada.

Supongamos que $\hat{z} \in \mathbb{R}^s$, es decir, que la verdadera solución de algún problema es un vector con s componentes. Por ejemplo, $\hat{z}$ puede ser la solución de un sistema de EDO en un tiempo fijo particular T. Entonces z es un vector de valores aproximados y el error $e = z - \hat{z}$ también es un vector en $\mathbb{R}^s$.

Error absoluto y relativo

Se define el error absoluto como

$$|e| = |z - \hat{z}|$$

Y el error relativo como

$$\frac{|z - \hat{z}|}{|\hat{z}|}$$

Normas

Podemos utilizar alguna norma vectorial para medir el error.

$$\|e\|_\infty = \max_{1 \le i \le s} |e_i|$$

$$\|e\|_1 = \sum_{i=1}^{s} |e_i|$$

$$\|e\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} |e_i|^2}$$

Con tantas normas diferentes para elegir, es natural preguntarse si los resultados sobre la convergencia de los métodos numéricos dependerán de nuestra elección de norma. Supongamos que $e(h)$ es el error obtenido con un tamaño de paso h, y que $\|e(h)\| = O(h^p)$ en alguna norma, de modo que el método tiene una precisión de orden p. ¿Es posible que la tasa sea diferente en alguna otra norma? La respuesta es “no”, debido al siguiente resultado sobre la “equivalencia” de todas las normas en $\mathbb{R}^s$. (Observe que este resultado es válido solo mientras la dimensión s del vector se fije en $h \to 0$).

Si $\|\cdot\|_\alpha$ y $\|\cdot\|_\beta$ son dos normas, decimos que son equivalentes si existen C_1 y C_2 tal que.

$$C_1\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta \leq C_2\|\cdot\|_\alpha$$

Por ejemplo, para las normas definidas anteriormente en $\mathbb{R}^s$ se tiene

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq s\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{s}\|x\|_\infty \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{s}\|x\|_2 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\|e(h)\|_\alpha \leq Ch^p$ *cuando* $h \to 0$*. Entonces tenemos* $\|e(h)\|_\beta \leq C_2\|e(h)\|_\alpha \leq C_2 C h^p$ *y por lo tanto* $\|e(h)\|_\beta = O(h^p)$ también. En particular, si $\|e(h)\| \to 0$ en alguna norma, entonces lo mismo es cierto en cualquier otra norma y por lo tanto la noción de "convergencia" es independiente de nuestra elección de norma. Esto no será cierto si consideramos la aproximación de funciones en lugar de vectores.

Ahora dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$, se denota por $\|A\| = C$ al valor más pequeño de la constante C para el cual $\|Ax\| \leq C\|x\|$, para todo x. Se define $\|A\|$ como

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

En la práctica se pueden definir y calcular las siguientes normas como:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\leq j\leq s} \sum_{i=1}^{s} |a_{ij}| \\ \|A\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq s} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^t A)} \end{aligned}$$

donde $\rho(\cdot)$ denota el radio espectral de la matriz.

Estimación del error

Si consideramos la función error como $e(x) = U(x) - u(x)$ las formas usuales de medir el error en este caso es apelar a las normas de funciones.

$$
\begin{aligned}
\|e\|_\infty &= \max_{a \le x \le b} |e(x)| \\
\|e\|_1 &= \int_a^b |e(x)| \\
\|e\|_2 &= \int_a^b |e(x)|^2
\end{aligned}
$$

Los métodos de diferencias finitas no producen una función $u(x)$ como aproximación a $U(x)$. En cambio, producen un conjunto de valores u_i en los puntos x_i de la grilla.

Si $u_i \approx U(x_i)$, podemos considerar un vector e tal que $e_i = U(x_i) - u_i$. Sin embargo, esta no siempre es la interpretación correcta. Por ejemplo, algunos métodos numéricos se derivan utilizando el supuesto de que u_i se aproxima al valor promedio de $U(x)$ en un intervalo de longitud h.

Ahora bien, podríamos tomar por ejemplo $\|e\|_1 = \sum |e_i|$. Sin embargo, esta elección da una idea equivocada de la magnitud del error. Esta podría aumentar con el valor de la cantidad de puntos. Esto motiva a definir la siguiente norma,

$$
\|e\|_1 = h \sum |e_i|
$$

y en general,

$$
\|e\|_q = \left(h \sum |e_i|^q \right)^{1/q}
$$

Ejemplo:

Consideremos

$$
U(x) = \begin{cases} 0 & x \le \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}
$$

con la siguiente aproximación

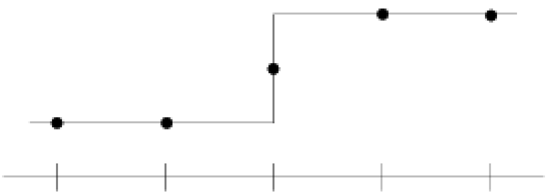

Figure A.1. *The function $u(x)$ and the discrete approximation.*

Aquí por ejemplo, $\|e\|_\infty = \frac{1}{2}$ mientras que $\|e\|_1 = \frac{h}{2}$. Este ejemplo no solo muestra que es importante que norma elegir sino también lo comentado anteriormente sobre la definición de la norma $\|\cdot\|_q$.

Estimación de orden

Supongamos primero que conocemos la solución verdadera. Sea $E(h)$ el error utilizando la solución exacta.

$$\|E(h)\| = \|u(h) - U(h)\|$$

Si el orden del método es p, para h suficientemente chico podemos pensar $E(h) \approx Ch^p$. Si refinamos podemos obtener

$$E(\frac{h}{2}) \approx C(\frac{h}{2})^p$$

Así definimos la tasa de error como $R(h) = \frac{E(h)}{E(\frac{h}{2})} \Rightarrow R(h) \approx 2^p$ Y por lo tanto $p \approx \log_2(R(h))$. En general,

$$p \approx \frac{\log(E(h_1)/E(h_2))}{\log(h_1/h_2)}$$