

An aerial, high-angle photograph of a city street, likely in Japan, showing a tram track running down the center. Buildings of various sizes and shapes line the streets, and some vehicles are visible. The image is in grayscale with a dark, moody tone.

# Filtrage et Modélisation Stochastique

Loïc Maurin - [loic.maurin@meteo.fr](mailto:loic.maurin@meteo.fr)

# 2 - Filtrage Kalman

# Au cours précédent

Processus stochastiques

# Au cours précédent

Processus stochastiques

**Processus stochastique** : famille de variables aléatoires  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ .

**Temps discret** :  $t \in \mathbb{N}$ , le processus se modélise avec des **probabilités de transition**.

**Temps continu** :  $t \in \mathbb{R}$ , le processus se modélise avec des **densités de probabilités** ou **taux de transitions** notés  $W(n, m)$  pour la transition entre de l'état  $n$  vers l'état  $m$ .

**Equation Maître** : équation différentielle qui représente l'évolution temporelle de la densité de probabilité. On a vu qu'elle s'établissait de manière analogue à un bilan physique.

**Relations sur la moyenne et la variance** : à partir de l'équation maîtresse, on peut déduire l'évolution temporelle de la moyenne et de la variance du processus. Pour rappel,

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \langle W^+(n) - W^-(n) \rangle, \quad \frac{dV}{dt} = 2 \langle (n - \langle n \rangle)(W^+(n) - W^-(n)) \rangle + \langle W^+(n) + W^-(n) \rangle$$

# Au cours précédent

Précisions sur le Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener)

On a vu que pour une marche aléatoire, avec des sauts de  $\pm 1$  équiprobables, la coupe temporelle à un pas de temps donné  $t \in \mathbb{N}$ , la distribution des positions se rapproche d'une gaussienne.

On peut alors formaliser le mouvement brownien, en temps continu, par rapport à cette observation.

**Définition** Soit  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  une famille de variables aléatoires indexées dans le temps. On dit que  $B$  est un mouvement brownien si c'est un processus à trajectoires continues telles que

1.  $\forall t \geq 0 : B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
2. Pour tout  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , les variables aléatoires  $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ , sont indépendantes.

**Remarque** La seconde propriété signifie que le mouvement brownien n'a pas de mémoire du passé.

*Note : Wiener a formalisé le mouvement brownien, d'où le nom de processus de Wiener et les notations  $W(n, m)$  vues précédemment*

# Rappels de probabilités

# Lois usuelles

## Rappels de probabilité

**Loi uniforme** :  $X$  suit une **loi uniforme** sur  $[a, b] \in \mathbb{R}$  si elle admet la densité de probabilité  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{array}{ll} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$$

**Loi exponentielle** :  $X$  suit une **loi exponentielle**  $\mathcal{E}(\lambda)$  ( $\lambda > 0$ ) si elle admet la densité de probabilité  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{array}{ll} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$$

On a alors  $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ ,  $\mathbb{V}[X] = 1/\lambda^2$

# Lois usuelles

## Rappels de probabilité

**Loi Normale** :  $X$  suit une **loi normale**  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ,  $((m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On a alors  $\mathbb{E}[X] = m$ ,  $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$

**Loi Gamma** :  $X$  suit une **loi gamma**  $\gamma(p, \lambda)$ ,  $(p > 0, \lambda > 0)$  si sa densité est

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} (\lambda x)^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors  $\mathbb{E}[X] = p/\lambda$ ,  $\mathbb{V}[X] = p/\lambda^2$



# Lois usuelles

Applications à la modélisation en microphysique

En microphysique (modélisation des nuages et interactions entre hydrométéores), la distribution des gouttes par rapport à leur diamètre est donnée par une loi exponentielle (Loi de Marshall-Palmer).

## Loi de Marshall-Palmer

$$N(D)dD = N_0 e^{-\lambda D} dD, \text{ où } f(D) = e^{-\lambda D}$$

où la densité de probabilité est  $f(D) = e^{-\lambda D}$ .

## Remarque

Une densité de loi Gamma (plus générique que la loi exponentielle) est choisie sur certains schémas microphysiques.

# Lois usuelles

Applications à la modélisation en microphysique

## Loi de Marshall-Palmer

$$N(D)dD = N_0 e^{-\lambda D} dD$$

On peut alors lier les moments de la distribution avec les caractéristiques physiques des gouttes :

- **Concentration de goutelettes**  $N_c$  et **moment d'ordre 0** :  $N = \int_0^\infty f(D)dD$
- **Contenu en eau**  $q_c$  et **moment d'ordre 3** :  $L = \frac{\pi \rho_w}{6} \int_0^\infty D^3 f(D)dD$  (lié au volume des gouttes)
- **Réflexivité radar**  $\Sigma_c$  et **moment d'ordre 6** :  $R \propto \int_0^\infty D^6 f(D)dD$  (lié à la diffusion de Rayleigh)

En modélisation microphysique, "le jeu" est de choisir le nombre de moments à modéliser (**fermeture**), la discrétisation sur l'espace des diamètres (**échantillonnage**), pour représenter les interactions possibles entre les gouttes (de pluie, de neige, etc.).

# Loi forte des Grands Nombres

## Théorèmes fondamentaux

**Théorème** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles **indépendantes** et **identiquement distribuées (i.i.d.)** et définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

En posant  $\mu = \mathbb{E}[X_i]$  et  $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i) < \infty$ .

La variable aléatoire  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu, p.s.$$

**p.s.** : presque sûr = "à une infinité dénombrable de points près"

**Application** Méthode de Monte-Carlo : calcul d'une intégrale par des tirages de variables aléatoires.

Pour  $U$  variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) = \mathbb{E}[f(U)] = \int_0^1 f(x) dx$

# Théorème Centrale Limite

## Théorèmes fondamentaux

**Théorème** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles **i.i.d.**

On note  $\mu = \mathbb{E}[X]$  et  $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$ . On suppose  $0 < \sigma^2 < \infty$ .

En posant  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,

$$Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

**Remarque** Il s'agit d'une convergence en loi : la suite des lois  $Y_n$  tend vers  $Y$  qui est aussi une loi de probabilité.

**Application** Le Théorème Centrale Limite donne des indications sur les vitesses de convergence vers la loi asymptotique.

# Théorèmes fondamentaux

LGN vs TCL

## **LGN vs TCL**

- Loi des Grand Nombres : convergence des moyennes empiriques vers la moyenne de la loi des v.a.
- Théorème Centrale Limite : convergence asymptotique de la loi sur la moyenne empirique (donne des indications sur une loi limite).

# Modes de convergences

Rappels et théorèmes fondamentaux

## Modes de convergence

- Convergence presque sûre (**p.s.**) :  $P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$
- Convergence dans  $L^p$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$
- Convergence en probabilité **P** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$

Convergence  $L^p \Rightarrow$  Convergence **P**,

Convergence **p.s.**  $\Rightarrow$  Convergence **P**.

# Filtre Kalman

# Introduction

## Filtre de Kalman

**Filtre de Kalman** (1960), Rudolf Kalman (mathématicien hongrois) : utilisé pour la première fois pour l'estimation de trajectoire des programmes Apollo

→ Comment concilier au mieux l'information disponible (capteurs), et les équations de la dynamique pour contrôler un système ?

## Applications

Contrôle, Calage GPS, Filtrage et assimilation de données.



# Système dynamique

Filtre de Kalman

## Système dynamique discret

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + \phi_n$$

$$y_{n+1} = Cx_{n+1} + \psi_{n+1}$$

où, à chaque instant  $n$ :

- $x_n$  est l'état du système. *Exemple : Température d'un moteur d'avion.*
- $u_n$  est la commande du système. *Exemple : Débit de carburant dans le moteur.*
- $y_n$  est la mesure de l'état du système. *Exemple : Mesure renvoyée par le thermomètre.*

**Remarque** En météo, on appellerait  $C$  un **opérateur d'observation**. C'est le lien entre l'**espace des mesures** (ex : la tension au bornes thermomètre), et l'**espace d'état** (ex : la température effective mesurée).

# Bruits associés au système

Filtre de Kalman

## Système dynamique discret

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + \phi_n$$

$$y_{n+1} = Cx_{n+1} + \psi_{n+1}$$

**Bruits**  $\phi_n, \psi_n$ : on modélise un bruit d'état  $\phi_n$  un bruit de mesure  $\psi_n$ .

1. **Bruit d'état**  $\phi_n$ : représente notre méconnaissance de la physique du système. *Exemple : Variations de la richesse du mélange.*
2. **Bruit de mesure**  $\psi_n$ : représente un bruit de mesure. *Exemple: bruit électronique de la sonde de température.*

**Hypothèse** : Les bruits  $\phi$  et  $\psi$  sont supposés blancs, gaussiens, centrés, stationnaires et indépendants l'un de l'autre. Ces bruits sont chacun associé à une matrice de covariance  $\Phi$ , et  $\Psi$ .

# Construction d'un estimateur

## Filtre de Kalman

On cherche à construire un estimateur qui dépende de l'état estimé à l'instant précédent, de la mesure renvoyée par le capteur et de la commande imposée.

Nous construisons alors un estimateur de la forme :

$$\hat{x}_{n+1} = A_f \hat{x}_n + B_f u_n + K_{n+1} y_{n+1}$$

→ Comment construire  $A_f, B_f, K_{n+1}$  ?

*Note : On cherche à construire un estimateur de la forme générique  $\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n, y_{n+1}, u_n)$*

*Nous nous concentrons sur des systèmes linéaires, et verrons plus tard comment l'étendre à des systèmes non-linéaires.*

# Estimateur (asymptotiquement) sans biais

Filtre de Kalman

**Erreur d'estimation** : On cherche à minimiser l'erreur d'estimation, définie ci-dessous,

$$e = \hat{x} - x$$

Pour un estimateur parfait, on aurait  $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = 0$ .

Sans accès aux vraies valeurs de  $x$  et face à un processus stochastique, annuler l'erreur est généralement impossible. Nous décrivons alors (non sans mal) l'erreur  $e_n$  par récurrence:

$$e_{n+1} = (I - K_{n+1}C)Ae_n + (A_f + K_{n+1}CA - A)\hat{x}_n + (B_f + K_{n+1}CB - B)u_n \\ + (K_{n+1}C - I)\phi_n + K_{n+1}\psi_{n+1}$$

# Estimateur (asymptotiquement) sans biais

Filtre de Kalman

**Espérance de l'erreur** Sachant que les bruits blancs gaussiens sont d'espérance nulle :

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[\phi_n] = 0, \mathbb{E}[\psi_n] = 0$ , on décrit l'évolution, l'espérance de l'erreur.

$$\mathbb{E}[e_{n+1}] = (I - K_{n+1}C)A \mathbb{E}[e_n] + (A_f + K_{n+1}CA - A) \hat{x}_n + (B_f + K_{n+1}CB - B)u_n$$

**Estimateur asymptotiquement sans biais**

On cherche à construire un estimateur dont l'espérance de l'erreur tend vers 0.

**Définition**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_n] = 0$$

# Estimateur (asymptotiquement) sans biais

Filtre de Kalman

**Espérance de l'erreur** Sachant que les bruits blancs gaussiens sont d'espérance nulle :

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[\phi_n] = 0, \mathbb{E}[\psi_n]$ , on décrit l'évolution, l'espérance de l'erreur.

$$\mathbb{E}[e_{n+1}] = (I - K_{n+1}C)A \mathbb{E}[e_n] + (A_f + K_{n+1}CA - A) \hat{x}_n + (B_f + K_{n+1}CB - B)u_n$$

**Estimateur asymptotiquement sans biais**  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_n] = 0$

**Conditions suffisantes**

1.  $B_f + K_{n+1}CB - B = 0$  (on annule le terme lié à la commande  $u_n$ )
2.  $A_f + K_{n+1}CA - A = 0$  (on annule le terme dû à l'estimation  $\hat{x}_n$ )
3.  $(I - K_{n+1}C)$  est stable (module inférieur à 1 pour que l'erreur puisse décroître)

# Construction des Matrices du filtre

## Filtre de Kalman

Les conditions de stabilité fixent les matrices  $A_f$  et  $B_f$ .

$$A_f = (I - K_{n+1}C)A$$

$$B_f = (I - K_{n+1}C)B$$

Il reste à régler  $K_{n+1}$  pour que  $(I - K_{n+1}C)$  soit stable.

**Définition :**  $K$  est appelé le **gain du filtre**.

**Forme de l'estimateur :** Nous établissons (et rencontrons souvent) la forme suivante du filtre.

$$\hat{x}_{n+1} = A\hat{x}_n + Bu_n + K_{n+1}[y_{n+1} - C(A\hat{x}_n + Bu_n)]$$

**Remarque**  $K$  peut être vu comme un compromis à régler entre la fidélité au modèle numérique ( $A\hat{x}_n + Bu_n$ ) et la fidélité aux valeurs de mesure ( $y_{n+1}$ ).

# Filtre Prédicteur - Correcteur

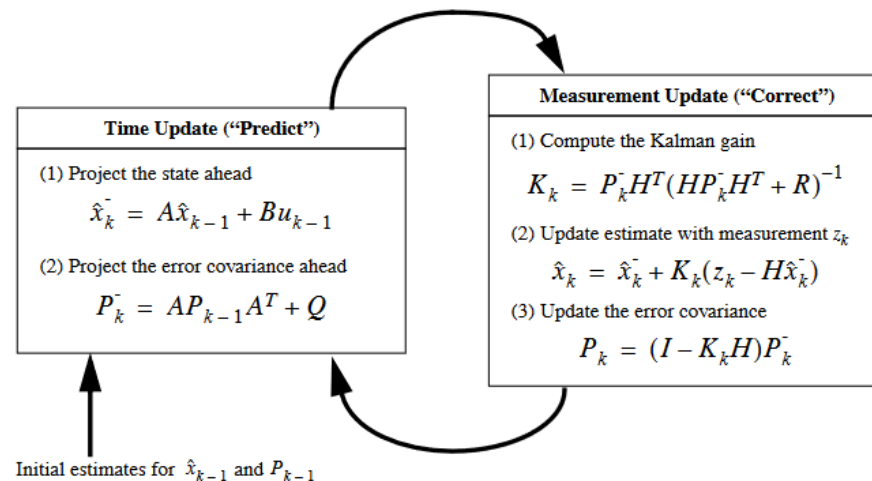
## Filtre de Kalman - Implémentation

Le filtre de Kalman est un "prédicteur-correcteur", l'estimation  $\hat{x}$  de  $x$  se construit en 2 temps :

1. **Prédiction** : Estimation à priori de l'état  $\hat{x}^-$ , comme si on n'avait que les équations du système à disposition.
2. **Correction** : Construction de l'estimation à posteriori avec l'information apportée par les mesures.

*Légende : sur le schéma à droite,*

$$H \rightarrow C, Q \rightarrow \Phi, R \rightarrow \Psi$$





# Filtre Prédicteur - Correcteur

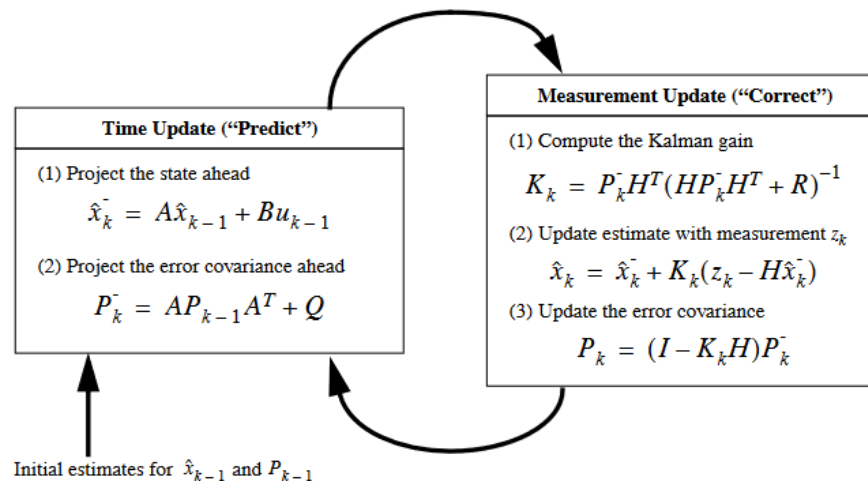
## Filtre de Kalman - Implémentation

Sans oublier la construction des matrices de covariances, liées au bruit.

1. **Prédiction** : Estimation de la matrice de covariance  $P_k^-$ , par rapport au **bruit d'état**  $Q$  (ou  $\Phi$  comme noté précédemment).
2. **Correction** : Construction de la matrice de covariance  $P_k$  par rapport au **bruit de mesure**  $R$  (ou  $\Psi$  comme noté précédemment).

*Légende : sur le schéma à droite,*

$$H \rightarrow C, Q \rightarrow \Phi, R \rightarrow \Psi$$



# Filtre de Kalman - Implémentation

La recette de cuisine !

1. On initialise  $\hat{x}$  à  $\hat{x}_0$  : on peut par exemple prendre la valeur  $y_0$  renvoyée par le capteur.
2. On initialise  $P$  à  $P_0$  : on peut prendre la valeur  $\Psi$  de la covariance de bruit du capteur.
3. On fait évoluer  $K$  selon :

$$K_{n+1} = (AP_nA^T + \Psi)C^T \times (CAP_nA^TC^T + C\Psi C^T + \Psi)^{-1}$$

4. On fait évoluer  $\hat{x}$  selon :

$$\hat{x}_{n+1} = A\hat{x}_n + Bu_n + K_{n+1}[y_{n+1} - C(A\hat{x}_n + Bu_n)]$$

5. On fait évoluer  $P$  selon :

$$P_{n+1} = (I - K_{n+1}C)(APA^T + \Phi)$$

# Est-ce que ça marche vraiment ?

Considérations sur l'évolution de la variance

On a établi que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_n] = 0$ , ainsi que la formule pour  $P_{n+1}$ .

→ Est-ce qu'on est obligé d'attendre l' $\infty$  pour que le filtre commence à fonctionner ?

→ Pourquoi on se balade avec une matrice de covariance  $P_{n+1}$  (si ce n'est par pure beauté mathématique) ?

→ En pratique, comment fixer  $K_{n+1}$  le gain du filtre ?

**Dispersion** Nous allons travailler sur la dynamique de l'erreur  $e_n$  et sa dispersion, pour

$$P = \mathbb{E}[e_n \times e_n^T]$$

*Dans un cas simple à une dimension,  $P = \mathbb{E}[(\hat{x}_n - x_n)^2] = \mathbb{V}[e_n]$ , s'écrit bien comme la variance de l'erreur.*

# Dynamique de l'erreur

Choix du gain  $K$

## Condition d'optimalité du gain du filtre

On cherche  $K$  de telle sorte que la variance de l'erreur  $P = \mathbb{E}[e \times e^T] \sim \mathbb{E}[e]$  soit minimale.

Une condition nécessaire est de chercher le gain  $K$  tel que  $P(k)$  soit extrême, autrement dit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\partial P_{n+1}}{\partial K_{n+1}} = 0$$

**Dynamique de l'erreur** En manipulant les équations du filtre, on obtient

$$e_{n+1} = (I - K_{n+1}C)Ae_n + (K_{n+1}C - I)\phi_n + K_{n+1}\psi_{n+1}$$

$$\frac{\partial e_{n+1}}{\partial K_{n+1}} = -CAe_n + C\phi_n + \psi_n$$

# Dynamique de l'erreur

Choix du gain  $K$

On cherche le gain  $K$  pour établir  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\partial P_{n+1}}{\partial K_{n+1}} = 0$

**Condition suffisante**

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial e_{n+1}}{\partial K_{n+1}} e_{n+1}^T\right] = 0$$

**Formule de  $K$  à partir de  $P$**

$$P_{n+1} = (AP_n A^T + \Psi)C^T \times (CAP_n A^T C^T + C\Phi C^T + \Psi)^{-1}$$

**Formule de  $P$  à partir de  $K$**  (en prenant en compte  $P_0 = \Psi$ )

$$P_{n+1} = (I - K_{n+1}C)(AP_n A^T + \Phi)$$

**Remarque** On ne peut pas obtenir de condition d'optimalité, mais simplement d'une relation de récurrence entre  $P$  et  $K$ . C'est elle qui nous permet d'implémenter  $K$  en pratique.

# Synthèse

Synthèse et lien vers les processus stochastiques

## Estimateur sans biais

On cherche à obtenir un estimateur qui satisfait  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_n] = 0$  (asymptotiquement sans biais)

## Gain optimal

On cherche à régler  $K$  pour que les variances d'erreurs soit les plus faibles à chaque pas de temps, c'est-à-dire  $\frac{\partial P_{n+1}}{\partial K_{n+1}} = 0$

## Récurrance

Dans la mesure où nous ne connaissons pas les valeurs vraies  $x_n$ , nous tirons parti des relations de récurrence sur l'erreur  $e_n$  pour progresser vers une erreur nulle.

C'est cela même qui fait la structure du Filtre Kalman. Et c'est bien pratique dans la mesure où le filtre ne dépend que des valeurs à l'état  $n$  pour estimer l'état  $n + 1$  (le filtre est robuste et facile à mettre en oeuvre).

# Synthèse

Structure probabiliste

→ Quel lien avec les probabilités ?

## Point de départ

- Bruit d'état  $\phi \sim \mathcal{N}(0, \Phi)$  (ex :  $\Phi$  donné par la distribution de températures au point de mesure, i.e. la climatologie du lieu)
- Bruit de mesure  $\psi \sim \mathcal{N}(0, \Psi)$  (ex :  $\Psi$ , précision donnée par la fiche technique du capteur de température)

# Synthèse

## Structure probabiliste

→ Quel lien avec les probabilités ?

### Point de départ

- Bruit d'état  $\phi \sim \mathcal{N}(0, \Phi)$  (ex :  $\Phi$  donné par la distribution de températures au point de mesure, i.e. la climatologie du lieu)
- Bruit de mesure  $\psi \sim \mathcal{N}(0, \Psi)$  (ex :  $\Psi$ , précision donnée par la fiche technique du capteur de température)

### Point d'arrivée

- On modélise  $P(x_n | z_n) \sim \mathcal{N}(\hat{x}_n, P_n)$ , avec notre estimateur  $\hat{x}_n$
- Avec les propriétés de l'estimateur, on progresse vers  $\mathbb{E}[\hat{x}_n] = x_k$  en gardant une dispersion minimale  $\mathbb{E}[(x_n - \hat{x}_n)(x_n - \hat{x}_n)^T] = P_n$ .



# Synthèse pratique

## Construction pratique d'un filtre de Kalman

**Hypothèses structurantes** Il reste en pratique à vérifier que les bruits de mesure et d'état sont effectivement des bruits blancs gaussiens, stationnaires.

1. Qu'on a "suffisamment capté" la dynamique du système et son observation dans les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$ , pour que les bruits  $\Phi$  et  $\Psi$  soient effectivement centrés.
2. Que les bruits puissent être assimilés à des bruits blancs gaussiens. Cela implique des tests statistiques, et éventuellement un travail sur les équations pour centrer et réduire le bruit (lien avec le TCL).
3. Qu'il y ait effectivement indépendance entre le bruit de mesure et le bruit d'état. *Exemple : le capteur de température qui influence son environnement en ralentissant le flux d'air dont il mesure la température.*

### En pratique

Il n'y a pas forcément de réponse systématique à ces questions, simplement un travail de mise au point du filtre, sur un problème donné → **Coeur du travail de l'ingénieur**

# Exemple - Estimation d'une constante aléatoire

Filtre de Kalman

## Problème

Nous cherchons à estimer une tension constante. Avec, à disposition, un volt-mètre, dont les mesures sont perturbées par un bruit blanc d'écart-type  $\sigma = 0.1V$ .

## Système linéaire

$$x_{n+1} = x_n + \phi_{n+1}$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} + \psi_{n+1}$$

# Exemple - Estimation d'une constante aléatoire

Filtre de Kalman

**Equations du Filtre** Dans ce cas simple,  $A_f = B_f = C = I = 1$ , nous étudions alors l'estimation  $\hat{x}$ , la (co)-variance de l'erreur  $P_n$  et le gain  $K_n$ , qui sont les caractéristiques essentielles du filtre.

1. Prédicteur :

$$\hat{x}_{n+1}^- = \hat{x}_n$$

$$P_{n+1}^- = P_n + \Phi \quad (= P_n + \mathbb{V}[\phi_{n+1}])$$

2. Correcteur :

$$K_{n+1} = P_{n+1}^- (P_{n+1}^- + \Psi)^{-1} = \frac{P_n + \Phi}{P_n + \Phi + \mathbb{V}[\psi_n]}$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_{n+1}^- + K_{n+1}(z_{n+1} - \hat{x}_{n+1}^-)$$

$$P_{n+1} = (1 - K_{n+1})P_{n+1}^-$$

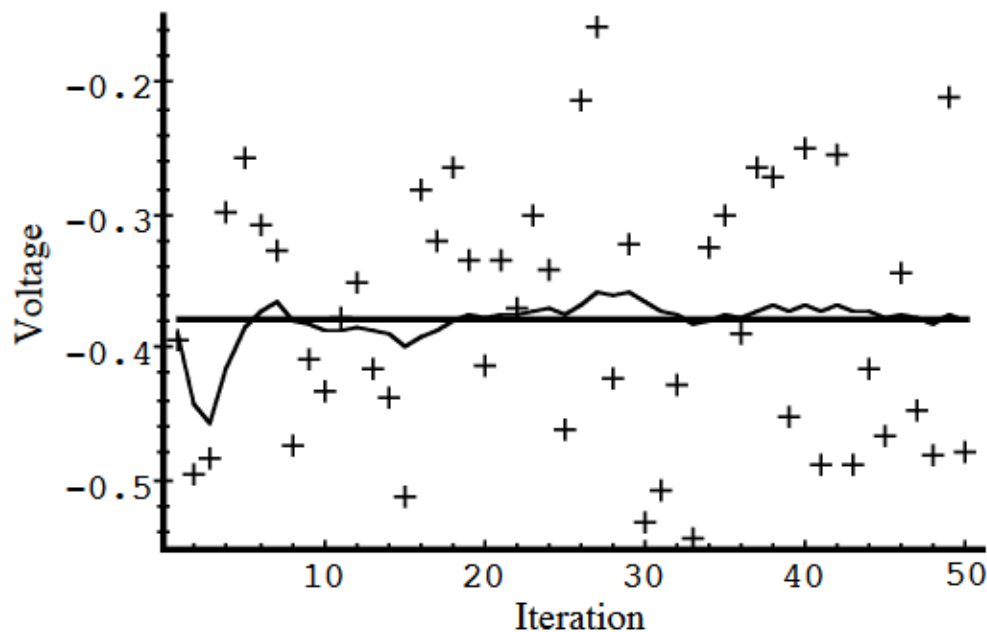
# Exemple - Estimation d'une constante tirée au sort

## Hypothèses et modélisation

1. Ici, on suppose une variance sur le bruit d'état :  $\Phi = 1 \times 10^{-5}$ . C'est à dire qu'on se laisse la possibilité d'avoir un petit bruit d'état autour de la constante à mesurer (perturbations électromagnétiques ou autre).
2. Choix des conditions initiales : on suppose que la tension à mesurer est une constante tirée d'une loi normale centrée.

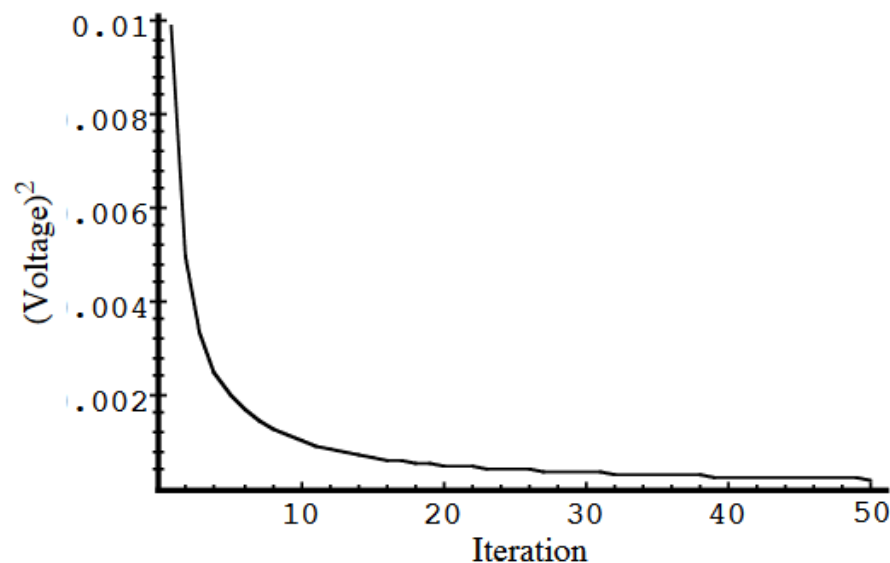
On fixe alors  $x_0 = 0$ , et on choisit une valeur arbitraire, mais non-nulle ( $P_0 \neq 0$ ) pour  $P_0$ . Ici,  $P_0 = 1$ .

## Vraie valeur, Mesures, et Estimation (50 relevés)



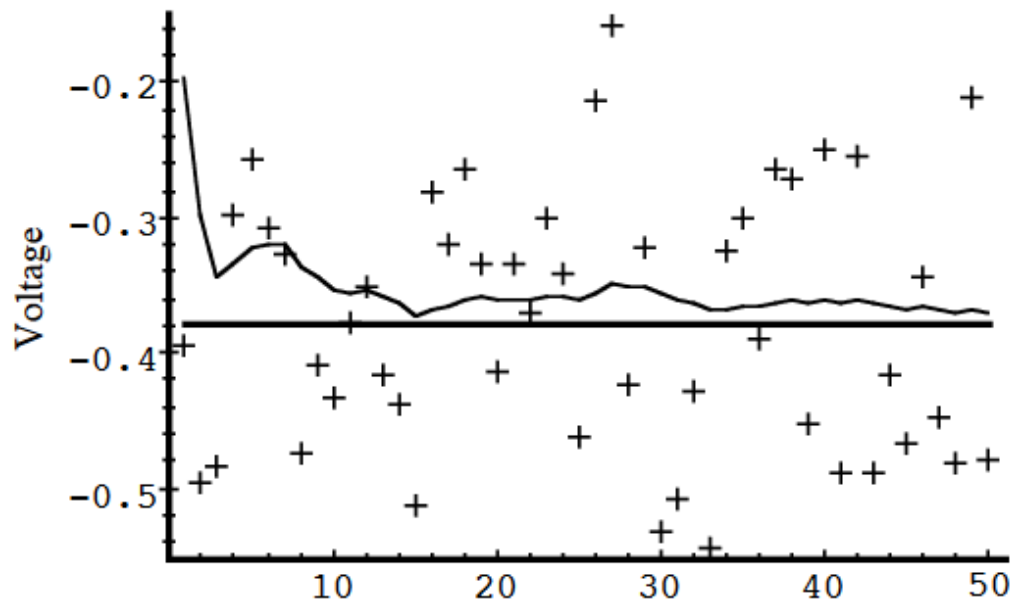
**Figure 3-1.** The first simulation:  $R = (0.1)^2 = 0.01$ . The true value of the random constant  $x = -0.37727$  is given by the solid line, the noisy measurements by the cross marks, and the filter estimate by the remaining curve.

## Vitesse de convergence - (Co)-Variance de l'erreur $P_n$



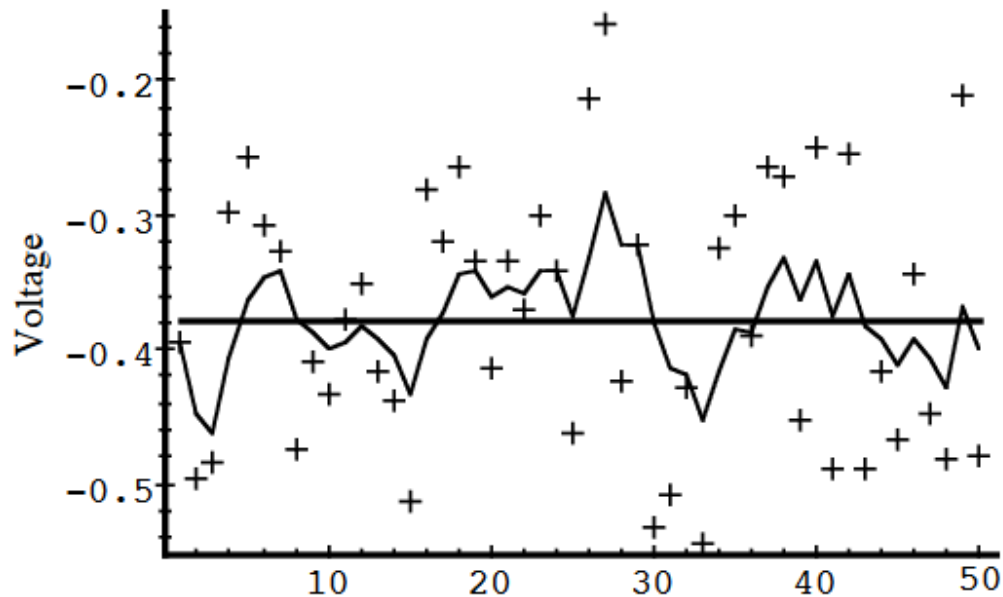
**Figure 3-2.** After 50 iterations, our initial (rough) error covariance  $P_k^-$  choice of 1 has settled to about 0.0002 ( $\text{Volts}^2$ ).

## Influence des bruits $\Psi$ et $\Phi$ , avec $\Psi = 1$



**Figure 3-3.** Second simulation:  $R = 1$ . The filter is slower to respond to the measurements, resulting in reduced estimate variance.

## Influence des bruits $\Psi$ et $\Phi$ , avec $\Psi = 1.10^{-5}$



**Figure 3-4.** Third simulation:  $R = 0.0001$ . The filter responds to measurements quickly, increasing the estimate variance.



# Extended Kalman Filter

Si la dynamique est non linéaire ?

Remplaçons :

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n + \phi_n$$

$$y_{n+1} = Cx_{n+1} + \psi_{n+1}$$

Par :

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n, \phi_n), \text{ (modèle non - linéaire)}$$

$$y_{n+1} = h(x_{n+1}, \psi_{n+1}), \text{ (observateur non - linéaire)}$$

**Remarque** C'est le cas en Météo où le modèle repose sur les équations de Navier-Stokes (non-linéaires), et les observateurs reposent sur les lois non-linéaires (ex : réflectivité radar  $R \propto D^6$ )

# Extended Kalman Filter

Si la dynamique est non-linéaire ?

**Solution** : Linéariser les équations (modèle et observateurs), autour du point de fonctionnement  $\hat{x}_n$  estimé.

**Outil** : les matrices jacobiennes des opérateurs  $y = h(x)$  et modèles  $x_{n+1} = f(x_n)$

On note alors :

1.  $J_{(i,j)}^A = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , la jacobienne de  $f$  par rapport à  $x$
2.  $W_{(i,j)} = \frac{\partial f_i}{\partial \phi_j}$ , la jacobienne de  $f$  par rapport au bruit d'état  $\phi$
3.  $J_{(i,j)}^H = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}$ , la jacobienne de  $h$  par rapport à  $x$
4.  $V_{(i,j)} = \frac{\partial h_i}{\partial \psi_j}$ , la jacobienne de  $h$  par rapport au bruit de mesure  $\psi$ .

# Extended Kalman Filter

Si la dynamique est non-linéaire ?

**Solution** : Linéariser les équations (modèle et observateurs), autour du point de fonctionnement  $\hat{x}_n$  estimé.

**Outil** : les matrices jacobiennes des opérateurs  $y = h(x)$  et modèles  $x_{n+1} = f(x_n)$

1. On utilise directement  $f$ , et  $h$  directement pour le calcul de  $\hat{x}_n^-$  à priori et l'évaluation de la mesure  $h(y_n)$ .
2. On utilise les matrices jacobiennes dans le calcul des covariances :

$$P_{n+1}^- = AP_nA^T + \Phi \text{ devient } P_{n+1}^- = J^A P_n (J^A)^T + W \Phi W^T$$

$$K_{n+1} \text{ devient } K_{n+1} = P_{n+1}^- (J^H)^T (J^H P_{n+1}^- (J^H)^T + V \Psi V^T)$$

$$P_{n+1} \text{ devient } P_{n+1} = (I - K_{n+1} J^H) P_{n+1}^-$$

où  $J^A$  et  $J^H$  ont été évaluées au point  $\hat{x}_n$

# Extended Kalman Filter

Si la dynamique est non-linéaire ?

**Solution** : Linéariser les équations (modèle et observateurs), autour du point de fonctionnement  $\hat{x}_n$  estimé.

**Outil** : les matrices jacobienues des opérateurs  $y = h(x)$  et modèles  $x_{n+1} = f(x_n)$

## En Météo

On ne s'étonnera pas de trouver les termes de **Tangent-Linéaire** (TL) et **Adjoint** (AD) en assimilation de données, il s'agit respectivement de la **jacobienne**  $J^A$  et de sa **transposée**  $(J^A)^T$  (*plus exactement du conjugué de sa transposée si on travaille sur un espace complexe*).

## En pratique

Là encore, le **coeur du travail d'ingénieur** est d'obtenir les opérateurs adéquats (en respectant de manière empirique les hypothèses sur les distributions).

# A retenir

Qu'est-ce qu'un filtre de Kalman déjà ?

## Basique

- La recette et le fonctionnement de prédicteur-correcteur pour le filtre Kalman,
- (Théorie), c'est un estimateur asymptotiquement sans biais, et avec une variance d'erreur à minimiser.

## En fonction de l'espace de stockage disponible

- La démarche récursive de construction du filtre, *utile pour comprendre le filtre "pas-à-pas"*.

## En pratique, avec l'algorithme à disposition

- Comment régler le gain du filtre ?
- Comment respecter au mieux les hypothèses de bruit blanc gaussien ?
- Comment linéariser le modèle et les observateurs de mesure ?

*En gardant à l'esprit que le Filtre de Kalman est plutôt un filtre simple et robuste, et que le travail consiste à construire les "bonnes" matrices de covariance, et régler le gain du filtre.*

# La semaine prochaine

Spoiler alert !

**TP** : Filtre Kalman sur un oscillateur harmonique

→ Apportez vos PC, TP sur Google Colab

# Sources

Liens utiles

G. Welch, G. Bishop, University of North Carolina, An Introduction to the Kalman Filter

O. Herscovici-Schiller, ONERA, Introduction au filtrage de Kalman et à la commande optimale

G. Chardon, CentraleSupélec, Filtrage de Kalman

