



Filtrage et Modélisation Stochastique

Loïc Maurin - loic.maurin@meteo.fr

4 - Markov Chain Monte Carlo

Aux cours précédents

Processus stochastiques et Filtre de Kalman

Au cours précédent

Processus stochastiques

Processus stochastique : famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$.

Temps discret : $t \in \mathbb{N}$, le processus se modélise avec des **probabilités de transition**.

Temps continu : $t \in \mathbb{R}$, le processus se modélise avec des **densités de probabilités** ou **taux de transitions** notés $W(n, m)$ pour la transition entre de l'état n vers l'état m .

Equation Maître : équation différentielle qui représente l'évolution temporelle de la densité de probabilité. On a vu qu'elle s'établissait de manière analogue à un bilan physique.

Relations sur la moyenne et la variance : à partir de l'équation maîtresse, on peut déduire l'évolution temporelle de la moyenne et de la variance du processus. Pour rappel,

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \langle W^+(n) - W^-(n) \rangle, \quad \frac{dV}{dt} = 2 \langle (n - \langle n \rangle)(W^+(n) - W^-(n)) \rangle + \langle W^+(n) + W^-(n) \rangle$$

Au cours précédent

Filtre de Kalman

Construction de l'Estimateur : $P(x_n|z_n) \sim \mathcal{N}(\hat{x}_n, P_n)$, par récurrence.

Estimateur **asymptotiquement sans biais** sur lequel la **covariance de l'erreur est minimisée**, grâce à la relation entre le gain du filtre K_n et la matrice de covariance P_n .

Hypothèses de modélisation : on suppose un **bruit d'état** $\phi \sim \mathcal{N}(0, \Phi)$ sur la dynamique du système et un **bruit de mesure** $\psi \sim \mathcal{N}(0, \Psi)$ sur l'observation du système.

Influence du gain du filtre K : si $K \rightarrow 0$, l'estimateur ne repose que sur la dynamique, et si $K \rightarrow \infty$, l'estimateur repose uniquement sur les mesures.

Linéarité : les propriétés du Filtre de Kalman sont établies pour un système linéaire perturbé par des bruits blancs gaussiens. Dans le cas d'un système non-linéaire, on introduit le **Tangent-Linéaire** et l'**Adjoint** du système pour construire un **Filtre de Kalman Étendu**.

Remarque le filtre Kalman étendu ne minimise pas formellement l'erreur d'estimation.

Au cours précédent

Vers l'estimation de Chaînes de Markov par méthodes de Monte-Carlo (MCMC)

Filtre de Kalman : la fermeture du système d'équations du filtre s'effectue grâce aux propriétés gaussiennes des bruits d'état et de mesure. On peut ainsi se limiter à construire **l'évolution de la moyenne et de la variance** de l'estimateur.

→ Comment construire un estimateur quand on ne connaît plus la structure du bruit ?

Introduction

Chaînes de Markov et Méthodes de Monte-Carlo

→ Comment construire un estimateur quand on ne connaît plus la structure du bruit ?

Méthodes de Monte-Carlo : estimation d'une densité de probabilité par tirages.

Remarque : Une fois que l'on a accès à une estimation de la densité de probabilité, nous pouvons déduire les moments de la distribution, notamment la moyenne et la variance.

Chaînes de Markov : processus stochastique dont la transition entre 2 états $x_{n-1} \rightarrow x_n$ ne dépend que de l'état précédent x_{n-1} .

Remarque : Le filtre Kalman entre dans le cadre des chaînes de Markov.

Remarque introductive

Markov Chain Monte Carlo

Ce cours est indépendant de celui sur le Filtrage Kalman.

→ Le Filtre de Kalman et les Chaînes de Markov sont 2 représentants de Processus Stochastiques

→ Les 2 sont utilisés en **Assimilation de données** pour établir le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF), avec :

1. Une composante de filtrage :

Comment recaler un modèle par rapport aux observations / mesures ?

2. Une composante d'échantillonnage :

Comment estimer la dispersion du modèle ?

Motivations

Estimation bayésienne et exploration d'une distribution

En estimation bayésienne, on cherche à construire un estimateur (bayésien), c'est à dire une distribution conditionnée aux données d'apprentissage :

$$P(\theta|data) = \frac{P(\theta) \cdot P(data|\theta)}{P(data)}$$

→ Le problème principal : estimer **la loi marginale** $P(data)$

Motivations

Estimation bayésienne et exploration d'une distribution

→ Le problème principal : estimer **la loi marginale** $P(data)$

- Cas discret :

$$P(data) = \sum_{\theta} P(data|\theta) \times P(\theta)$$

- Cas continu :

$$P(data) = \int_{\theta} P(data|\theta) \times P(\theta) d\theta$$

Dans le cas continu, calculer $P(data)$ peut devenir intractable.

Markov Chain Monte-Carlo

MCMC

→ Pourquoi utiliser les méthodes de Monte-Carlo sur des chaînes de Markov ?

- Apprendre une distribution, un processus stochastique par échantillonnage aléatoire.
- Très utile sur des systèmes "en boîte noire" pour lesquels il existe des réalisations (ou des simulations).
- Efficace sur des problèmes de grandes dimensions (*dont la combinatoire est trop grande pour des méthodes classiques*).

Markov Chain Monte-Carlo

Historique et applications

- Aiguilles de Buffon (1733) : Estimation de π par le compte de Buffon.
- Projet Manhattan (1940) : utilisation des premiers ordinateurs pour la simulation de processus physiques, lors de la construction de la bombe atomique.

→ Les Méthodes de Monte-Carlo se développent avec l'augmentation des puissances de calcul, avec, en particulier, quelques applications remarquables :

- PageRank : estimation du poids d'une page web par échantillonnage sur ses liens sortants,
- AlphaGo : (Monte-Carlo Tree Search), estimation du meilleur coup par échantillonnage des différentes trajectoires possibles.

Méthodes de Monte-Carlo

Méthodes de Monte-Carlo

Construction de l'estimateur

Estimateur de Monte-Carlo Pour une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, $\{q_1, \dots, q_N\}$ (N arbitrairement grand), et pour une fonction f à valeurs réelles et mesurables, les estimateur de Monte-Carlo sont défini par les **moyennes d'ensemble** de f :

$$\hat{f}_N^{MC} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(q_n)$$

La moyenne de l'ensemble converge alors vers l'espérance de f :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N^{MC} = \mathbb{E}_\pi[f]$$

Formellement, la variable aléatoire définie par la moyenne d'ensemble \hat{f}_N^{MC} tend vers une distribution de Dirac autour de l'espérance de la fonction : $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N^{MC} = \delta_{\mathbb{E}_\pi[f]}$.

Méthodes de Monte-Carlo

Erreur de l'estimateur

Propriété : L'estimateur défini est asymptotiquement sans biais.

→ En pratique, on cherche à estimer l'exactitude de l'estimateur pour un petit échantillon (*afin d'utiliser ces méthodes sur des ressources de calcul limitées*).

Propriété : L'estimateur de Monte-Carlo, pour une fonction réelle et de carré intégrable (pour laquelle $\mathbb{E}_\pi[f]$, $\mathbb{E}_\pi[f^2]$ existent), satisfait le Théorème Central Limite. C'est-à-dire, la suite des estimateurs de Monte-Carlo standardisés converge vers une loi normale centrée réduite.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}_N^{MC} - \mathbb{E}_\pi[f]}{SE_N} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

où SE_N est l'erreur quadratique de l'estimateur de Monte-Carlo : $SE_N = \sqrt{\frac{\text{Var}_\pi[f]}{N}}$

Méthodes de Monte-Carlo

Résumé

Autrement dit, à la limite,

$$\hat{f}_N^{MC} = \mathcal{N}(\mathbb{E}_\pi[f], SE_N[f])$$

En pratique, la quantification de l'erreur par le TCL suppose de connaître la variance $Var_\pi[f]$. Si f^2 est de carré intégrable ($\mathbb{E}[f^4]$ existe), on peut approximer la variance par un autre estimateur de Monte-Carlo.

Avantages : $SE_N \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$, l'erreur quadratique moyenne décroît avec l'inverse de la racine carrée de la taille de l'échantillon. En pratique, cela permet de dimensionner au préalable le nombre d'échantillons nécessaires pour atteindre une erreur donnée.

Limitations : la quantification de l'erreur est probabiliste. Il reste toujours une (mal)-chance que l'estimateur s'échoue dans la queue de la distribution (ex : $\hat{f}_N^{MC} > \mathbb{E}_\pi[f] + 3SE_N[f]$).

Loi forte des Grands Nombres

(Rappel, si nécessaire) Théorèmes fondamentaux

Théorème Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles **indépendantes** et **identiquement distribuées (i.i.d.)** et définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

En posant $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i) < \infty$.

La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu, p.s.$$

p.s. : presque sûr = "à une infinité dénombrable de points près"

Application Méthode de Monte-Carlo : calcul d'une intégrale par des tirages de variables aléatoires.

Pour U variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) = \mathbb{E}[f(U)] = \int_0^1 f(x) dx$

Théorème Central Limite

(Rappel, si nécessaire) Théorèmes fondamentaux

Théorème Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles **i.i.d.**

On note $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. On suppose $0 < \sigma^2 < \infty$.

En posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,

$$Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Remarque Il s'agit d'une convergence en loi : la suite des lois Y_n tend vers Y qui est aussi une loi de probabilité.

Application Le Théorème Centrale Limite donne des indications sur les vitesses de convergence vers la loi asymptotique.

Chaînes de Markov

Chaînes de Markov

Définition

→ But : on cherche à explorer une distribution cible π .

Définition : Sur un espace d'états Q , une chaîne de Markov est définie comme une suite de transitions entre états q_1, \dots, q_N dont la transition entre 2 états $q_n \rightarrow q_{n+1}$ ne dépend que de l'état q_n .

$$P(q_{n+1} | q_1, \dots, q_n) = P(q_{n+1} | q_n)$$

Application : Une chaîne de Markov permet d'échantillonner des chemins discrets sur un espace ambiant (à explorer). La mise au point d'une chaîne de Markov sur cet espace permet d'identifier une distribution cible π .

Chaînes de Markov

Définition

Distribution de transitions : Soit un espace ambiant Q équipé d'une tribu (ou σ -algèbre) \mathcal{Q} . On peut spécifier les **transitions de Markov** comme une densité de probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} T: \quad Q \times Q &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (q, q') &\mapsto T(q'|q) \end{aligned}$$

pour une transition de q vers q' .

Etant donné un point q_0 , un tirage aléatoire de $T(\cdot|q_0)$ forme un **saut** ou une **transition**.

$$\bar{q}_1 \sim T(q_1|q_0)$$

Chaînes de Markov

Définition

Etant donné un point q_0 , un tirage aléatoire de $T(\cdot|q_0)$ forme un **saut** ou une **transition**.

$$\bar{q}_1 \sim T(q_1|q_0)$$

En itérant ces tirages aléatoires, on réalise (ou simule) une trajectoire $\{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n\}$ où

$$\bar{q}_1 \sim T(q_1|q_0)$$

$$\bar{q}_N \sim T(q_N|q_{N-1})$$

→ On génère des séquences de points corrélés.

(Au contraire des tirages i.i.d. effectués pour les Méthodes de Monte-Carlo).

Chaînes de Markov

Exemple : trajectoire sur un espace à 2 dimensions

On se dote d'un espace ambiant à 2 dimensions

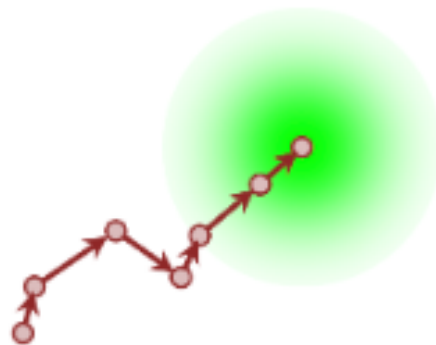
$Q = \mathbb{R}^2$, avec 2 fonctions de coordonnées :

$$\omega_1: \quad Q \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \omega_2: \quad Q \rightarrow \mathbb{R} \\ q \mapsto q^1 \quad | \quad q \mapsto q^2$$

On définit une densité de probabilité de transition de Markov :

$$T(q_1 | q_0) = \mathcal{N}(q_1^1 | q_0^1, \sigma) \mathcal{N}(q_1^2 | q_0^2, \sigma)$$

A gauche : Réalisation d'une trajectoire d'une chaîne de Markov, Markov Chain Monte Carlo in Practice, M. Betancourt



Chaînes de Markov

Distribution stationnaire

Résultat empirique : la réalisation d'une chaîne de Markov converge vers une distribution invariante par transitions de Markov, **la distribution stationnaire**, pour une distribution de transitions donnée $T(q|q')$.

$$\pi = \int dq' \pi(q') T(q|q')$$

Application

En reprenant le **problème de marginalisation** $P(data) = ?$, si nous arrivons à construire une chaîne de Markov dont la distribution stationnaire est celle des données ($\pi = P(data)$), alors nous pouvons construire un estimateur de manière analogue à celui de Monte-Carlo.

Chaînes de Markov

Stationnarité - Démonstration

Construisons les densités de probabilités rencontrées sur le chemin formé par la chaîne de Markov :

1. $\bar{q}_0 \sim \rho$. On définit la distribution initiale $\rho = \delta_{q_0}$ (distribution de Dirac autour de q_0 , le point initial est q_0 presque sûrement).
2. L'espérance de la position du point 1 est donnée par :

$$(T\rho)(q_1) = \int dq_0 T(q_1|q_0)\rho(q_0)$$

3. En itérant au point 2, puis au point n :

$$(T^2\rho)(q_2) = (T \cdot T\rho)(q_2) = \int dq_1 dq_0 T(q_2|q_1)T(q_1|q_0)\rho(q_0)$$

$$(T^N\rho)(q_N) = (T \cdot T^{N-1}\rho)(q_N) = (T \cdot \dots \cdot T\rho)(q_N)$$

Chaînes de Markov

Stationnarité - Démonstration

En construisant la densité de probabilité au point N :

$$(T^N \rho)(q_N) = (T \cdot T^{N-1} \rho)(q_{N-1}) = (T \cdot \dots \cdot T \rho)(q_N)$$

En observant la convergence, **si la limite existe**,

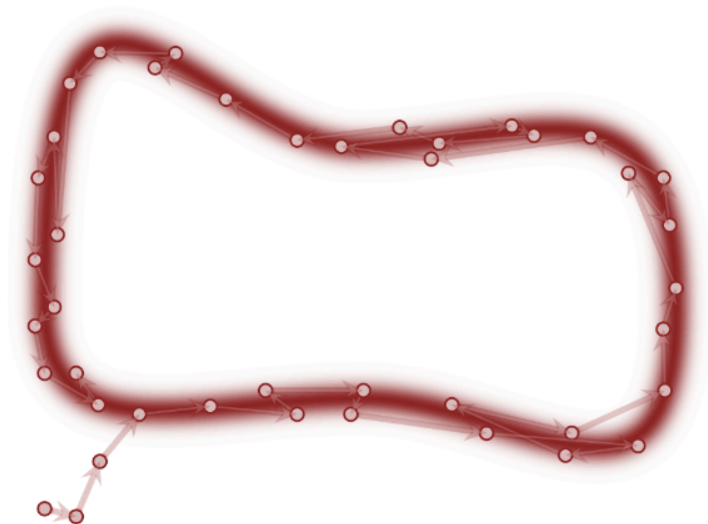
$$\lim_{N \rightarrow \infty} T^N \rho = \pi$$

Alors c'est un point fixe :

$$T\pi = \pi$$

→ Ce qu'on vient d'énoncer ne présage pas de l'existence de la limite. Simplement, si elle existe alors c'est une distribution stationnaire. En pratique, on construit une chaîne de Markov et ses transitions pour qu'elle tende une distribution limite stationnaire.

Chaînes de Markov



Chaîne de Markov

(Optionnel) Vitesses de convergence

Convergence : Etant donné une distance $\|\cdot\|$, la chaîne de Markov converge si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N(\rho) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|T^N \rho - \pi\| \leq \epsilon$$

Distance en variations totales : $\|\rho - \pi\|_{TV} = \sup_{B \in \mathcal{Q}} |\rho[B] - \pi[B]|$

Vitesses de convergence

- Ergodicité polynômiale : $\|\rho - \pi\|_{TV} \leq C(\rho)(N + 1)^{-\beta}$
- Ergodicité géométrique : $\|\rho - \pi\|_{TV} \leq C(\rho)r^N$
- Ergodicité uniforme : $\|\rho - \pi\|_{TV} \leq Cr^N$

Remarque : L'ergodicité uniforme permet la convergence rapide (en un nombre limité d'opérations), mais est typiquement réservée aux espaces bornés.

Chaînes de Markov

(Optionnel) Spectre de la matrice de transition et Convergence

Markov Chain Monte-Carlo

Markov Chain Monte-Carlo

Construction de l'estimateur

Estimateur MCMC Etant donné une suite de points $\{q_1, \dots, q_N\}$ qui forment la réalisation d'une chaîne de Markov, l'estimateur **Markov Chain Monte-Carlo** est défini par

$$\hat{f}_N^{MCMC} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(q_n)$$

Contrairement aux estimateurs de Monte-Carlo (MC), le comportement asymptotique des estimateurs MCMC n'est pas défini

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_{\hat{f}_N^{MCMC}} = \delta_{\mathbb{E}_\pi[f]} ???$$

MCMC : Markov Chain Monte-Carlo

Markov Chain Monte-Carlo

Conditions de convergence - Nombre d'itérations infinies

La convergence des estimateurs MCMC est garantie à condition que **la chaîne soit récurrente**. Dans ce cas, la limite existe seulement pour **un nombre fini d'initialisations**.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_{f_N}^{MCMC} = \delta_{\mathbb{E}_\pi[f]}$$

Ce résultat peut être généralisé à toute distribution initiale de points par la **condition de Harris**.

Chaîne de Markov récurrente : La chaîne est irréductible selon des transitions de Markov sont **apériodiques** et **irréductible**.

Chaîne de Harris : chaîne de Markov dont la chaîne retourne **un nombre non-borné de fois** dans une partie quelconque de l'espace d'états.

→ *En pratique, construire ou utiliser un estimateur **MCMC** nécessite de vérifier précautionneusement les hypothèses sur les transitions de la chaîne de Markov.*

Markov Chain Monte-Carlo

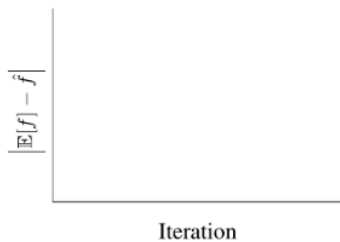
Conditions de convergence - Nombre d'itérations fini

Nous venons d'étudier le comportement asymptotique d'un estimateur **MCMC**, c'est-à-dire en nombre d'itérations infini.

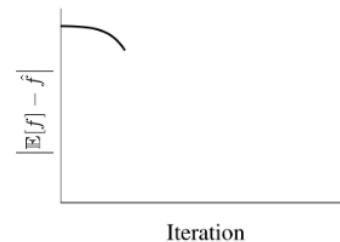
→ En pratique, qu'en est il de la convergence en nombre d'itérations finies ?

Markov Chain Monte-Carlo

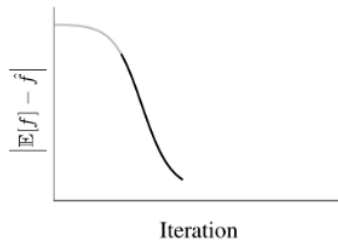
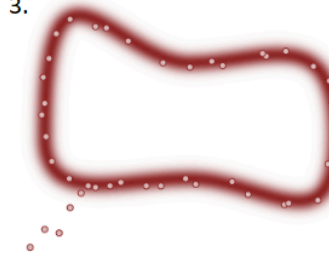
1.



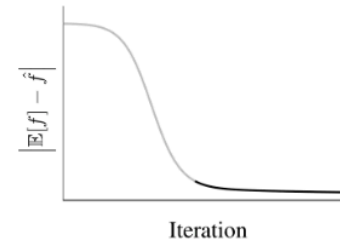
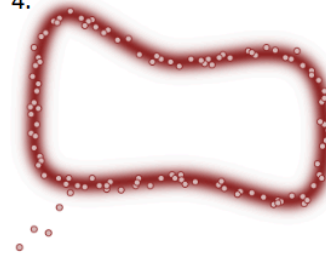
2.



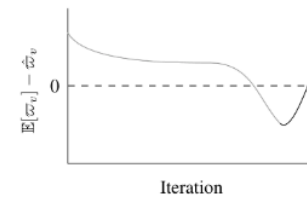
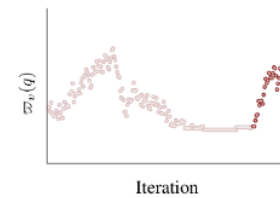
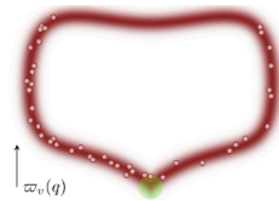
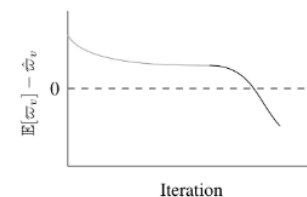
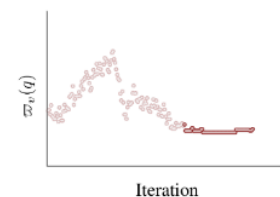
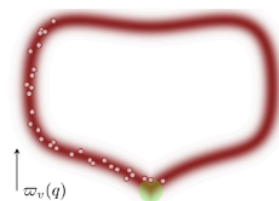
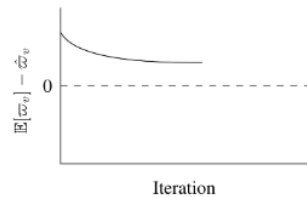
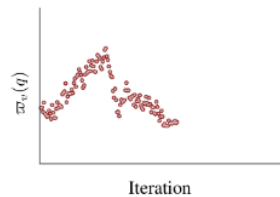
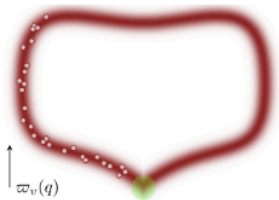
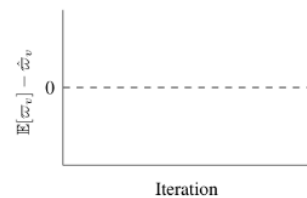
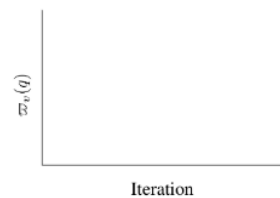
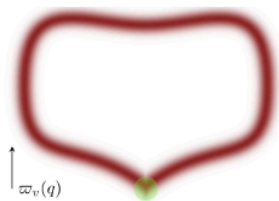
3.

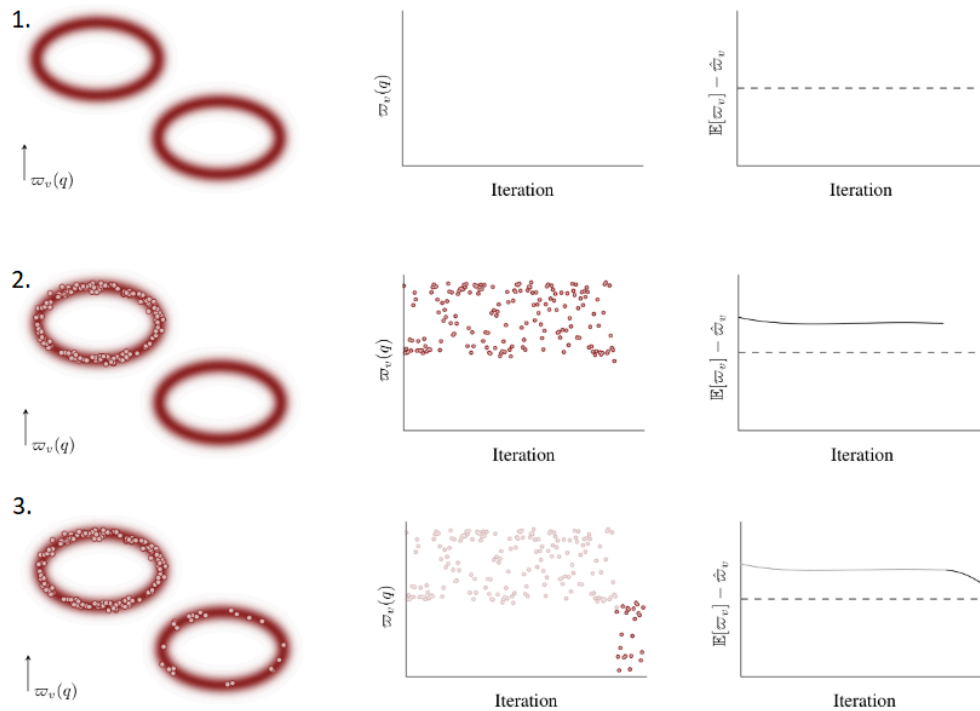


4.



Etapes de convergence d'une chaîne de Markov, Markov Chain Monte Carlo in Practice, M. Betancourt





Convergence de l'estimateur MCMC, cas métastable, Markov Chain Monte Carlo in Practice, M. Betancourt

Markov Chain Monte Carlo

Convergence

→ En pratique, la convergence dépend beaucoup de la distribution à explorer.

Ces méthodes, bien qu'utiles, sont moins robustes que les méthodes de Monte-Carlo. Elles dépendent grandement du jeu de données à explorer et nécessitent une mise au point minutieuse.

Markov Chain Monte-Carlo

(Optionnel) Vitesse de convergence théorique

Markov Chain Monte-Carlo

(Optionnel) MCMC et Théorème Central Limite

Le Théorème Central Limite s'applique pour des conditions particulières d'estimateurs MCMC.

Si on considère une fonction de carré intégrable $f: Q \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que la distribution de probabilité des transitions satisfait le Théorème Central Limite. Dans ce cas, à partir d'un certain rang, suffisamment long, la chaîne de Markov peut être approchée à une Gaussienne :

$$\hat{f}_N^{MCMC} \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[f], MCMC - SE[f])$$

où MCMC-SE (*Markov Chain Monte Carlo Standard Error*) est définie par :

$$MCMC - SE[f] = \sqrt{\frac{Var[f]}{\lambda[f] \cdot N}}$$

Remarque : selon le terme $\lambda[f] \cdot N$, la décroissance de l'erreur pour un estimateur MCMC peut être plus rapide que celle d'un estimateur de Monte-Carlo.

Markov Chain Monte-Carlo

Algorithme de Metropolis-Hastings

Implémentation : Comment construire les distributions de transitions pour obtenir une Chaîne de Markov qui converge vers une distribution stationnaire ?

L'Algorithme de Métropolis-Hastings propose une approche générique par essais / erreurs.

1. On définit une distribution à priori pour définir les probabilités de transition :

$$\begin{aligned} K: \quad Q \times Q &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (q, q') &\mapsto K(q'|q) \end{aligned}$$

Markov Chain Monte-Carlo

Algorithme de Metropolis-Hastings

L'Algorithme de Métropolis-Hastings propose une approche générique par essais / erreurs.

2. Pour une transition entre q et q' , on définit la probabilité d'acceptation (*acceptance probability*) de Metropolis-Hastings

$$a(q', q) = \min\left(1, \frac{K(q|q')\pi(q')}{K(q'|q)\pi(q)}\right)$$

avec $\frac{\pi(q')}{\pi(q)}$ le *ratio de Metropolis*, et $\frac{K(q|q')}{K(q'|q)}$ la *correction d'Hastings*

3. La *transition de Métropolis* est définie comme la probabilité de sauter vers la proposition q' avec une probabilité $a(q', q)$ et de rester au point initial avec la probabilité $1 - a(q', q)$

Markov Chain Monte-Carlo

Algorithme de Metropolis-Hastings

La distribution des transitions de Markov peut être définie comme :

$$T(q'|q) = a(q', q) \cdot Q(q'|q) + (1 - \int dq' Q(q'|q) a(q|q')) \cdot \delta(q - q')$$

Random Walk Metropolis

Dans ce cas, $Q(q'|q, \Sigma) = \mathcal{N}(q'|q, \Sigma)$ On perturbe le point initial par une gaussienne.

A retenir

Markov Chain Monte Carlo

- Méthodes de Monte-Carlo
- Chaînes de Markov
- Markov Chain Monte-Carlo

La semaine prochaine

Spoiler alert !

TP : Markov Chain Monte-Carlo

→ Apportez vos PC, TP sur Google Colab

Liens du cours

Ressources utiles sur les Monte Carlo Markov Chains

Markov Chain Monte Carlo in Practice, M. Betancourt

Compound extremes in a changing climate – a Markov chain approach

Algorithme de Métropolis-Hastings

Processus Stochastiques, Notes de cours, P. Carmona

CS168: The Modern Algorithmic Toolbox Lecture #14: Markov Chain Monte Carlo

Annexe - Chaînes de Markov

Chaînes de Markov

Chaînes de Markov

Définition

Définition : Une chaîne de Markov homogène à valeurs dans S de matrice de transition P et de loi initial λ est une famille de variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ telle que :

1. $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$
2. $\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = p_{i_n, i_{n+1}}$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de paramètres (λ, P)

Caractérisation : $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ est Markov λ, P ssi pour tous i_0, \dots, i_N

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_N = i_N) = \lambda(i_0) p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{N-1}, i_N}$$

Chaînes de Markov

Conditionnements successifs et calcul

Propriété : Si $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ est Markov (λ, P) , alors, conditionnellement à $X_m = i$, le processus $(X_{m+n}, n \geq 0)$ est Markov (δ_i, P) et est indépendant de (X_0, \dots, X_m) .

On note δ_i la masse de Dirac en i , et \mathbb{P}_i la loi d'une chaîne (δ_i, P) . On dit que la chaîne est issue de i car $X_0 = i$ p.s.

Chaînes de Markov

Conditionnements successifs et calcul

Calcul algébrique

On note une mesure positive λ comme un vecteur ligne. λP est la mesure $(\lambda P)(j) = \sum_i \lambda(i)p_{i,j}$. On note $p_{i,j}^{(n)}$ l'élément i, j de la matrice P^n .

Propriété : Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ Markov (λ, P) . Alors, pour tout n , la loi de X_n est λP^n , i.e.

$$\mathbb{P}(X_n = j) = (\lambda P^n)(j)$$

En particulier, pour $\lambda = \delta_i$ et tout $m \geq 0$, on obtient

$$\mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{i,j}^n$$

Etats transients et récurrents

Propriétés

Définition

- On dit que i est transient si $\sum_n p_{ii}^n < +\infty$
- On dit que i est récurrent si $\sum_n p_{ii}^n \rightarrow +\infty$

On peut alors mettre la matrice de transition sous une forme canonique, avec les états absorbants au début et les états récurrents ensuite :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

où $Q^n \rightarrow 0$.

Propriété Pour une chaîne de Markov avec un état absorbant, la matrice $I - Q$ est inversible d'inverse $N = \sum_n Q^n$. n_{ij} est le nombre moyen de fois où la chaîne est dans l'état j si elle part de l'état i .

Mesures invariantes

Propriétés

On dit que la mesure positive λ est invariante (ou encore stationnaire) si $\lambda P = \lambda$.

Proposition Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Markov (λ, P) et λ est invariante, alors la loi de X_n est constante et vaut λ . En outre, pour tout m , $(X_{m+n}, n \geq 0)$ est Markov (λ, P) .

En particulier, les limites des lois de X_n sont automatiquement des probabilités invariantes sur un espace fini.

Propriété On suppose I fini et que pour un $i_0 \in I$, on ait $\forall j, p_{i_0, j}^{(n)} \rightarrow \pi_j$.

Alors π est une probabilité invariante.

Théorème ergodique

Propriétés

Théorème Soit X une chaîne irréductible positive récurrente. Alors, pour toute fonction f positive ou bornée, presque sûrement :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \rightarrow \pi(f)$$

Convergence vers l'équilibre

Propriétés

Théorème Soit une chaîne de Markov irréductible positive récurrente de probabilité invariante π et apériodique. Alors pour toute loi initiale

$$\mathbb{P}(X_n = i) \rightarrow \pi(i)$$

en particulier, pour tout i, j , $p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi(j)$.

