
Automatic Synthesis of Nonlinear Wave Digital Structures with Applications to Musical Acoustics

A. Sarti, S. Tubaro, R. Zattoni



Memorandum No. 97-12-1

Indice

1	Introduzione	4
2	Strutture Wave Classiche	10
2.1	Onde Numeriche	12
2.2	Bipoli Lineari nel dominio d'onda	14
2.3	Rifrazione	15
2.4	Giunzioni multiporta	16
2.4.1	Giunzioni multiporta parallelo	18
2.4.2	Giunzioni multiporta serie	19
2.5	Adattatori	20
2.5.1	Adattatori tre-porte	21
2.6	Altri elementi WDF	24
2.7	Sintesi di circuiti lineari	25
2.8	Componenti non lineari resistivi	26
2.9	Bipoli non lineari resistivi	28
2.10	Esplicitabilità di caratteristiche non lineari	28
2.10.1	Caratteristica non lineare continua	28
2.10.2	Caratteristica non lineare discontinua	29
2.10.3	Metodo grafico	30
2.10.4	Caratteristiche non esplicitabili	30
2.11	Non linearità con memoria	34
3	Strutture Wave Generalizzate	37
3.1	Variabili d'onda con memoria	37
3.1.1	Bipoli lineari	37
3.1.2	Bipoli non lineari - Onde di tensione	38
3.1.3	Bipoli non lineari - Onde filtrate	39
3.2	Rifrazione	40
3.2.1	Onde di tensione	40
3.2.2	Onde filtrate	42
3.3	Rifrazione elementare - Mutatori	43
3.3.1	Condensatore non lineare: Mutatore C-R	44
3.3.2	Induttore non lineare: Mutatore L-R	45
3.4	Giunzioni Multiporta	46
3.4.1	Onde di tensione	46
3.4.2	Onde filtrate	49
3.5	Passività e assenza di perdite delle giunzioni multiporta	51
3.6	Conclusioni	52

4	Strutture Risonanti	54
4.1	Guide d'onda numeriche (WGF)	54
4.1.1	Corda Ideale	55
4.1.2	Corda ideale con perdite	56
4.1.3	Corda con rigidità senza perdite	57
4.1.4	Corda generica	60
4.1.5	Accordatura	61
4.2	Sistemi ibridi WDF/WGF	61
4.3	Strutture Riverberanti	63
4.3.1	Reti con Ritardo Retroazionate (FDN)	64
5	Implementazione automatica di modelli fisici	67
5.1	Dominio di Kirchoff analogico lineare	68
5.1.1	Rappresentazione matriciale	68
5.1.2	Imposizione delle condizioni iniziali	73
5.2	Dominio Wave analogico lineare	75
5.2.1	Rappresentazione matriciale wave	76
5.3	Dominio Analogico non lineare	80
5.3.1	Formulazione delle equazioni di tableau per circuiti non lineari	81
5.3.2	Elementi algebrici nel dominio del tempo	81
5.4	Dominio Wave numerico lineare	83
5.4.1	Rappresentazione matriciale	84
5.4.2	Imposizione delle condizioni iniziali	89
5.5	Dominio Wave numerico non lineare	94
5.5.1	Rappresentazione matriciale	94
5.5.2	Imposizione delle condizioni iniziali	96
5.6	Strutture ibride	97
5.7	Tattamento della tempo-varianza	98
5.7.1	Impedenze di riferimento	99
5.7.2	Non linearità	99
5.8	Caratteristiche non lineari tempo-varianti.	101
5.8.1	Traslazioni rigide	101
5.8.2	Deformazioni lineari della caratteristica	103
5.9	Esplicitabilità della caratteristica	105
5.10	Funzionamento del programma	108
6	Risultati	110
6.1	Non linearità resistive	110
6.1.1	Circuito caotico di Chua	110
6.1.2	Modello di Rayleigh	110
6.1.3	Interazione ancia-tubo acustico	114
6.1.4	Eccitazione "Jet-stream"	115
6.1.5	Interazione archetto-corda	118
6.2	Non linearità con memoria	121
6.2.1	Oscillatore inarmonico	121
6.3	Caso di studio: il pianoforte	124
6.3.1	Descrizione fisica	125
6.3.2	Modello analogico	126
6.3.3	Modello numerico	128
6.3.4	Risultati	128
7	Conclusioni	139

A	Soluzione dell'equazione implicita	140
A.1	Soluzione analitica	140
A.2	Soluzione grafica: retta di carico	140
A.3	Metodo numerico: algoritmo di Newton-Raphson	140
B	Non linearità in circuiti elettrici analogici	143
B.1	Elementi algebrici e dinamici	143
B.2	Sintesi di elementi non lineari analogici	145
B.3	Sintesi di resistenze non lineari analogiche	145
B.3.1	Convertitori lineari	147
B.3.2	Monotonizzazione della caratteristica non lineare	148
B.4	Sintesi di un resistore passivo monotonicamente crescente	151
C	Progetto di filtri passa-tutto	153
C.1	Metodo proposto	154
C.2	Applicazione al modello di corda rigida	155

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi due decenni gli strumenti musicali elettronici si sono evoluti con una notevole rapidità grazie alla crescente disponibilità di strumenti di calcolo sempre più veloci e potenti. Infatti, al notevole aumento della complessità degli algoritmi di sintesi del suono musicale è corrisposto uno sviluppo di interfacce sempre più intuitive e efficaci per l'utente. Ciò ha consentito al musicista di accedere, con investimenti modesti, ad una grande varietà di tecniche di sintesi e concentrarsi nell'esplorazione delle loro proprietà timbriche.

Le caratteristiche principali che il musicista trova desiderabili in una tecnica di sintesi del suono musicale sono:

- la *qualità timbrica*, che va attribuita alla complessità dell'evoluzione temporale delle componenti armoniche e enarmoniche del suono;
- la *dinamicità timbrica*, ovvero la sensibilità del timbro alle variazioni dei parametri che lo caratterizzano;
- la *suonabilità*, ovvero la semplicità e la coerenza del controllo parametrico;
- il *carattere*, ovvero la capacità dell'algoritmo di sintesi di individuare una classe timbrica ben precisa.

Definire in modo più accurato le proprietà sopra elencate non è cosa semplice, specialmente considerato il fatto che esse dipendono dalla tradizione e la cultura musicale a cui il musicista è stato esposto nella sua formazione. Tuttavia, si possono fare alcune considerazioni sull'interpretazione che si può dare a tali proprietà, allo scopo di poterne tenere conto nella fase di sviluppo di una tecnica di sintesi del suono.

Tradizionalmente si tende a identificare la ricchezza timbrica di uno strumento con la complessità spettrale (ricchezza di armoniche) dei suoni da esso generati. Questo fatto è vero solo in misura molto limitata, infatti, la qualità timbrica è percettivamente legata per lo più alla porzione transitoria iniziale del suono prodotto. Ad esempio, un timbro di clarinetto e un timbro di voce lirica femminile (contralto) possono diventare indistinguibili se da essi si escludono pochi millisecondi di transitorio iniziale. In altre parole, non è possibile caratterizzare un timbro musicale attraverso un'analisi a regime stazionario. Occorre invece considerare l'intera evoluzione temporale del suono.

Questa visione del concetto di dinamicità timbrica spinge le precedenti considerazioni sulla complessità timbrica oltre il livello della nota singola e considera la variabilità della classe di timbri prodotta da uno strumento musicale al variare dei suoi controlli parametrici. Ad esempio, il suono di pianoforte che si ottiene premendo lentamente un suo tasto avrà un timbro *cupo*, mentre lo stesso tasto premuto a velocità maggiore produrrà un suono più *brillante*. In altri termini, ci si aspetta che uno strumento musicale produca un'intera famiglia di timbri diversi

fra loro ma dotati di una certa coerenza globale, in modo tale da consentire al musicista una maggiore espressività esecutiva.

Per un musicista, le possibilità espressive di uno strumento musicale sono di cruciale importanza, sia che si tratti di strumenti acustici che sintetici. L'espressione, di fatto, riguarda non soltanto la nota singola ma l'intera frase musicale. Ad esempio, un suono prodotto da uno strumento acustico tradizionale è fortemente influenzato dai suoni precedentemente prodotti. Si pensi al ribattuto nel pianoforte: la stessa corda percossa ripetutamente alla stessa velocità produce una successione di timbri diversi fra loro, in quanto viene percossa una corda in movimento. A maggior ragione, il suono di un violino dipende fortemente da quale nota sia stata suonata precedentemente, e su quale corda. Forte della tradizione strumentale acustica, il musicista si aspetta dunque che anche il timbro sintetico sia influenzato dai suoni precedentemente prodotti.

Anche la “suonabilità” di uno strumento sintetico è fortemente dipendente dalla capacità di tenere conto della storia passata del controllo. Oltre a ciò, contribuiscono a rendere “suonabile” uno strumento il fatto che il suo controllo parametrico sia riassunto in pochi parametri intuitivi dai quali il timbro dipende in modo sensibile.

È opportuno sottolineare come la cultura strumentistico/musicale comune sia stata influenzata in modo determinante dall'evoluzione storica degli strumenti musicali acustici comunemente impiegati. In effetti, la nostra percezione delle proprietà sopra elencate è legata alla nostra abitudine a classificare i timbri più comuni in classi corrispondenti al meccanismo fisico che li ha generati. Ad esempio, si parla di archi, fiati, ane e percussioni, con chiaro riferimento al principio fisico su cui gli strumenti si basano. Analogamente, le tecniche di sintesi del suono che hanno avuto maggior successo negli ultimi due decenni sono proprio quelle che presentano una caratterizzazione timbrica maggiore.

Le considerazioni precedenti danno un'idea dei problemi che si incontrano nello sviluppo di una tecnica di sintesi di suoni musicali di alta qualità. Il successo o l'insuccesso di un metodo di sintesi è infatti fortemente influenzato da tali proprietà e, a conferma di ciò, ormai tutte le aziende del settore decidono se un nuovo sintetizzatore musicale potrà essere immesso nel mercato solo dopo aver fatto valutare attentamente tutti questi aspetti a un gruppo significativo di musicisti.

Storicamente, i primi metodi di sintesi del suono proposti sono quelli basati sulla generazione diretta. Con tale termine si considerano tutte le tecniche basate su uno o più generatori di suoni le cui uscite si combinano assieme direttamente a livello percettivo.

Il caso più semplice è rappresentato dalla sintesi *additiva* [14], sfruttata originariamente dall'organo a canne e dai primi organi elettronici. Essa consiste nella sovrapposizione di componenti armoniche elementari. Nei casi più evoluti, l'ampiezza e la frequenza di ogni componente può evolvere indipendentemente nel tempo. Sotto certe condizioni, i segnali costituenti si fondono percettivamente in un unico suono. La qualità timbrica ottenibile con tale tecnica può essere anche molto elevata, ma la suonabilità è molto scarsa in quanto comporta un'elevatissima complessità del controllo parametrico.

Caso analogo è rappresentato dalla sintesi *granulare* che, anziché operare una segmentazione in frequenza, effettua una segmentazione temporale. Infatti essa consiste nella concatenazione opportuna di *grani* audio. Un caso particolare di tale tecnica è rappresentato dal *campionatore*, che genera suoni prelevandoli da un repertorio di sequenze di campioni precedentemente memorizzati. Come la sintesi additiva, anche la sintesi granulare presenta scarse proprietà di suonabilità e un'elevata complessità del controllo. Infatti, ad esempio, non è possibile sfruttare variazioni della frequenza di campionamento per produrre le diverse note della scala poiché esse, oltre a modificarne la componente armonica, ne modificherebbero la componente enarmonica, modificando il timbro in modo innaturale. Inoltre tali metodi non possono essere considerati vere e proprie tecniche di sintesi, in quanto solitamente si limitano a riprodurre suoni naturali o porzioni di essi.

Sia nella sintesi additiva che nella sintesi granulare, il suono prodotto è il risultato della sovrapposizione di molti elementi, ciascuno descritto da una grande quantità di parametri. La qualità timbrica e la coerenza espressiva non sono dunque proprietà intrinseche del sistema, ma dipendono fortemente dal controllo parametrico, e vanno imposte dall'esecutore.

Gli algoritmi di sintesi della “seconda generazione” sono invece composti da un blocco di generazione che alimenta un blocco di elaborazione.

A questa categoria appartiene la sintesi *sottrattiva* che utilizza un generatore di suoni ricchi di componenti spettrali (tipicamente un treno di impulsi) con, in cascata, un filtro tempo-variante. Tale tecnica è spesso impiegata per la sintesi vocale [71] basata sulla (*codifica lineare predittiva* (LPC)).

Altri metodi con struttura a due blocchi in cascata (generazione-modifica) sono quelli che prevedono un blocco di modifica non lineare (ad esempio basati sulla modulazione in ampiezza e frequenza o sulla distorsione non lineare [18, 19, 16, 15, 17]). L'utilizzo di un blocco non lineare consente di introdurre una certa dinamicità timbrica nei suoni prodotti, ma il risultato è difficilmente controllabile. Per questa ragione, tali metodi sono particolarmente adatti a produrre suoni sintetici interessanti che non trovano equivalente negli strumenti acustici tradizionali.

In particolare, vale la pena di menzionare la modulazione in frequenza in quanto essa ha avuto un notevole successo rispetto a molte altre. La ragione di questo successo è da ascrivere a due fatti: anzitutto, non trattandosi di sintesi imitativa, i suoni sintetici da essa prodotti presentano un loro carattere distintivo ben preciso. Inoltre, la sua interfaccia utente è particolarmente semplice in quanto basata sull'interconnessione arbitraria di blocchi elementari semplici e uguali fra loro (modulatori FM elementari). Per contro, la difficoltà a produrre un suono con caratteristiche decise a priori è enorme.

È utile sottolineare come questi ultimi metodi di sintesi siano in grado di produrre una maggiore ricchezza timbrica senza dover ricorrere a un controllo parametrico eccessivamente oneroso. Resta comunque aperto il problema della complessità del controllo parametrico in quanto la gestione delle nonlinearità comporta complicazioni concettuali notevoli.

Vale anche la pena di osservare che tutte le tecniche di sintesi attualmente disponibili sono, di fatto, basate sulla generazione individuale di suoni, pertanto non sono in grado di tenere conto della storia passata dei segnali di controllo. Inoltre esse consentono di raggiungere una dinamicità timbrica soddisfacente solo a prezzo di un controllo oneroso e/o complesso. Questi limiti sono da attribuire al fatto che le tecniche esistenti si basano sulla sintesi del suono, anziché dello strumento. Se il metodo di sintesi consistesse nella simulazione di un meccanismo di generazione del suono, il comportamento dello strumento sintetico presenterebbe tutte le caratteristiche desiderabili di uno strumento acustico. In realtà, la sintesi basata sul modello fisico di uno strumento acustico è stata storicamente uno dei primi metodi di sintesi considerati [67].

Non è difficile convincersi del fatto che, affinché la sintesi per modelli fisici produca risultati soddisfacenti è necessario far riferimento a modelli particolarmente sofisticati e, quindi, far uso di una notevole potenza di calcolo. Per questa ragione, tale approccio ha iniziato a riscuotere un notevole interesse solo di recente, con la diffusione di mezzi di calcolo più potenti.

Le ragioni dell'interesse suscitato da un approccio basato sul modello fisico di uno strumento acustico sono da attribuire al fatto che, in linea di principio, tale approccio è potenzialmente in grado di soddisfare i requisiti di qualità e dinamicità timbrica, di suonabilità e caratterizzazione discussi precedentemente. Infatti, tali requisiti sono automaticamente soddisfatti dallo strumento acustico di riferimento.

In particolare, il controllo parametrico di un modello fisico risulta più intuitivo, dal momento che i segnali di controllo hanno lo stesso significato fisico di quelli applicati allo strumento acustico. Inoltre, la possibilità di rendere il timbro dipendente dalla storia passata dei segnali di controllo anziché dalla singola nota non trova impedimenti di principio.

D'altro canto, a fronte di questi vantaggi, la costruzione di algoritmi di sintesi per modelli fisici è solitamente molto difficoltosa in quanto non offre metodologie generali e semplici per la

sua soluzione. In effetti, tutti i lavori disponibili in letteratura presentano modelli “ad hoc” piuttosto eterogenei, dotati di scarsa flessibilità e automatizzabilità.

La ragione di questa difficoltà risiede nel fatto che gli strumenti reali di riferimento presentano un comportamento spiccatamente non lineare, difficilmente gestibile in modo semplice e automatico [48, 69, 81, 72, 10, 72, 59, 13]. Inoltre, gli approcci proposti in letteratura si limitano a trattare il problema della sintesi per modelli fisici come un mero problema di simulazione e, come tale, si riduce a un problema di discretizzazione. In realtà, la produzione di suoni con riferimento a un modello fisico va vista come un problema di *sintesi* e, pertanto, occorre sviluppare una metodologia che risulti sufficientemente generale da coprire una vasta gamma di modelli acustici di interesse e, nel contempo, si articoli su schemi mentali semplici, intuitivi e omogenei.

In questo lavoro di tesi si è cercato di porre le basi di un approccio unitario alla sintesi di una classe estesa di strumenti musicali basata sul loro modello fisico. Il metodo di sintesi sviluppato, ovviamente, attinge molto alla letteratura esistente, ma sviluppa numerosi aspetti originali che rendono il metodo particolarmente modulare e flessibile. Lo scopo finale, parzialmente raggiunto in questa tesi, è infatti quello costruire un sistema che consenta al musicista di costruirsi il proprio strumento musicale attraverso la combinazione di componenti meccanici elementari come molle, masse, attriti, leve, motori, ma anche sistemi riverberanti come corde, tubi acustici, tavole armoniche, membrane, etc.

Il modello fisico di uno strumento musicale è, in generale, descritto da un certo numero di coppie di variabili duali come forza e velocità oppure pressione e flusso. Tali coppie sono caratterizzate dal fatto che una delle due grandezze (forza e pressione) ha un carattere *estensivo*, nel senso che si misura come differenza fra due valori di una funzione potenziale opportuna che gode della proprietà di irrotazionalità (cioè la somma algebrica delle grandezze estensive in un percorso chiuso è identicamente nulla). La seconda grandezza (velocità e flusso) ha invece un carattere *intensivo*, nel senso che misura un'intensità che gode della proprietà di solenoidalità (ovvero la somma algebrica delle grandezze intensive entranti in una superficie chiusa è nulla). Tali coppie di variabili duali sono del tutto equivalenti al campo elettrico e al campo magnetico, rispettivamente. È dunque del tutto lecito aspettarsi che gli strumenti musicali ammettano, in opportune condizioni, degli *equivalenti elettromagnetici* e quindi possano essere modellati con riferimento a teorie già sviluppate per circuiti a microonde o circuiti elettrici in genere.

In particolare, se il modello fisico di uno strumento acustico fosse *a costanti concentrate*, ovvero costituito da un numero finito di elementi discreti come attriti, molle, masse e generatori ideali di forza (pressione) e velocità (flusso), allora il modello fisico dello strumento sarebbe passibile di una rappresentazione equivalente elettrica composta di resistori, condensatori, induttori e generatori ideali di tensione e corrente. In realtà, il modello fisico di uno strumento musicale contiene generalmente anche porzioni *a costanti distribuite*. Tali porzioni rappresentano strutture risonanti opportune, come tavole armoniche, tubi acustici, corde, etc. Per questi elementi risonanti distribuiti, è generalmente possibile trovare un equivalente elettromagnetico. Ad esempio, se la struttura risonante è monodimensionale, essa ammette un equivalente elettrico composto da una linea di trasmissione. In casi più complessi, come le superfici risonanti (membrane di percussioni, tavole armoniche, gong, etc.) o volumi risonanti (campane, barre, etc.), l'equivalente elettrico sarà rappresentato da sistemi a microonde.

Il problema della sintesi di un modello fisico può dunque essere ricondotto a quello della sintesi di un circuito elettrico complesso, composto da elementi a costanti concentrate e strutture a parametri distribuiti. La sintesi circuitale vanta un'enorme collezione di risultati altamente strutturata e omogenea, pertanto è giocoforza cercare proprio nella letteratura relativa ai circuiti non lineari uno spunto per caratterizzare una metodologia di sintesi del suono per modelli fisici.

Per caratterizzare la porzione a costanti concentrate del modello fisico di uno strumento acustico, si può far riferimento alla teoria classica dei circuiti non lineari. Essa, infatti, contiene

una notevole collezione di risultati relativi alla sintesi di circuiti composti da resistori, condensatori e induttori, lineari e non, alimentati da generatori di tensione e corrente. Essa inoltre tratta elementi multiporta come trasformatori (equivalenti alle leve meccaniche), mutatori (che consentono di costruire elementi non lineari reattivi attraverso resistori non lineari, amplificatori operazionali e altri elementi lineari), nonché giratori, QUARL, etc.

In sostanza, avendo a disposizione un metodo che consenta di implementare numericamente e automaticamente un circuito non lineare, sarebbe possibile coprire in modo adeguato la modellistica fisica dei meccanismi di eccitazione acustica e trattarla come un problema di assemblaggio di componenti meccanici elementari.

Una tecnica adatta alla modellizzazione numerica di circuiti elettrici lineari è rappresentata dalla teoria dei *filtri ad onda numerica* (WDF) [1, 2, 3]. La particolarità del metodo sta nel fatto che esso, anziché effettuare una discretizzazione globale delle equazioni differenziali che governano il comportamento del circuito, discretizza i singoli componenti circuitali, che poi assembla nel circuito complessivo attraverso opportuni connettori multiporta. In altre parole, il metodo effettua una discretizzazione locale del circuito di riferimento, evidenziando notevoli proprietà di modularità, particolarmente appetibili per una tecnica di sintesi del suono.

Sfortunatamente, la teoria classica dei filtri a onda numerica è stata sviluppata per implementare numericamente solo circuiti lineari. Di fatto essa consente, al più, di inserire nel circuito un resistore nonlineare, sotto opportune condizioni di regolarità e invertibilità della sua caratteristica. D'altro canto, i dispositivi meccanici o fluidodinamici che più frequentemente si incontrano negli strumenti musicali acustici, presentano non linearità di natura diversa, solitamente reattiva. Ad esempio, le molle nonlineari e le condizioni di contatto fra elementi meccanici, sono modellabili attraverso condensatori non lineari. Di conseguenza, la teoria classica WDF risulta essere inadeguata per scopi di sintesi acustica per modelli fisici. Essa, tuttavia, costituisce il punto di partenza del metodo sviluppato in questa tesi, pertanto il Capitolo 2 è dedicato a riassumere quanto della teoria classica WDF occorrerà per una comprensione dei capitoli successivi.

Di recente, sono state proposte delle estensioni della teoria WDF classica [28, 26], che consentono di includere elementi reattivi nel circuito non lineare. Attraverso tale estensione è possibile raggiungere un duplice scopo: modellare una classe ben più vasta di elementi meccanici non lineari a costanti concentrate e, nel contempo, descrivere intere porzioni di circuito come macro-blocchi descrivibili attraverso bipoli o giunzioni multiporta con memoria. Ciò consente di incrementare la modularità del metodo di sintesi rendendolo interfacciabile con macro-blocchi compatibili con il dominio WDF, arbitrariamente sintetizzati. Nel Capitolo 3 viene presentata tale estensione, in parte sviluppata nel corso di questa tesi, in modo unitario e organico, evidenziando i vari aspetti implementativi, a partire dalla computabilità fino a trattare i problemi della passività.

Gli elementi a parametri distribuiti, come risuonatori, tavole armoniche, tubi acustici, membrane o altro, possono essere visti come macro-blocchi dotati di una o più porte (punti di eccitazione e di prelievo del segnale). Appare dunque naturale chiedersi se e come sia possibile costruire modelli a parametri distribuiti che risultino compatibili con lo schema di sintesi delineato nel Capitolo 3. A tale scopo, nel Capitolo 4 di questa tesi viene presentata una metodologia di sintesi basata sui cosiddetti *filtri a guida d'onda* [78, 79], o *WaveGuide Filter* (WGF).

I *filtri a guida d'onda* rappresentano la controparte a parametri distribuiti dei filtri a onda numerica, essi implementano una discretizzazione della soluzione generale dell'equazione di propagazione relativa al mezzo che caratterizza il risuonatore. Le strutture WGF si prestano bene alla simulazione di strutture risonanti anche complesse quali corde, tavole armoniche, casse di risonanza, membrane, campane e strutture riverberanti generiche [80].

La similitudine fra strutture WDF e WGF è notevole, infatti entrambe sono descritte da coppie di variabili d'onda che si propagano in direzioni opposte, e fanno uso di celle di scattering per modellare una discontinuità nell'impedenza caratteristica. Per questa ragione, i WDF si presentano come i candidati ideali per la costruzione di strutture ibride a costanti concentrate

e a parametri distribuiti.

Nel Capitolo 4, vengono introdotte le strutture WGF nel solo caso monodimensionale, in quanto una estensione a più dimensioni esula dagli scopi di questa tesi. Infatti, l'obiettivo del capitolo è soprattutto quello di mostrare come tali macro-blocchi possano essere integrati in modo automatico all'interno della tecnica di sintesi illustrata nel Capitolo 3. In ogni caso, le strutture WGF monodimensionali si prestano bene a una modellizzazione di elementi risonanti come corde e tubi acustici, anche in presenza di perdite distribuite e rigidità. Inoltre, opportunamente interconnesse a rete, tali strutture possono essere anche impiegate per costruire modelli approssimati di membrane elastiche e superfici riverberanti.

Una parte centrale di questo lavoro di tesi è rappresentata dal Capitolo 5, nel quale si illustra come implementare in modo automatico le tecniche esposte nei Capitoli 3 e 4. A tale scopo si fa uso della teoria classica dei circuiti lineari analogici, basata sulla tecnica di soluzione di tableau [38]. Tale rappresentazione viene qui interamente riproposta nel dominio dell'onda numerica e estesa al caso non lineare. Sulla base di questa nuova rappresentazione, nel corso di questa tesi, è stato realizzato un sistema software in grado di interpretare una descrizione sintattica (testo ad alto livello) del circuito elettrico non lineare di riferimento e costruire automaticamente un programma di simulazione corretto operante nel dominio a onda numerica. Tale sistema è in grado inoltre di gestire, in condizioni semplificate, anche la tempo-varianza dei parametri di controllo attraverso la gestione di due processi concorrenti: uno che implementa il modello e l'altro che calcola e modifica i parametri utilizzati dal primo dei due. Infine, il sistema di sintesi è in grado di gestire in modo autonomo il problema dell'inizializzazione del modello, che in questo caso è critico in quanto errori in questa operazione porterebbero, ad esempio, ad alterare inaccettabilmente le condizioni di contatto fra strutture meccaniche. Attraverso le procedure sviluppate si è in grado di realizzare una vasta gamma di modelli meccanici ibridi a costanti concentrate e parametri distribuiti, seguendo uno schema mentale semplice e intuitivo.

Per dimostrare l'efficacia del metodo di sintesi sviluppato in questa tesi, il Capitolo 6 riporta alcuni esempi implementativi semplici, fra cui alcuni generatori caotici classici nella teoria dei circuiti non lineari e alcuni semplici modelli meccanici di strumento acustico, come l'interazione archetto-corda nel violino, l'interazione ancia-tubo nel clarinetto e l'eccitazione "jet" del flauto. Verrà infine riportato un caso di studio più complesso, rappresentato dal pianoforte. Il modello di questo strumento verrà proposto interamente nel dominio ibrido WDF/WGF, e includerà effetti come la rigidità e le perdite distribuite della corda, nonché la sua interazione, attraverso un modello di ponticello, con un macro-blocco che modella la tavola armonica. Il martelletto, interamente realizzato con modello WDF interagisce con la corda in modo verosimile e, a riprova di ciò, verranno presentati esempi audio e una sequenza video animata.

Il Capitolo 7 concluderà la tesi con i commenti finali sul metodo e con suggerimenti su possibili suoi ampliamenti futuri.

Capitolo 2

Strutture Wave Classiche

Un modello fisico è rappresentabile da un sistema di equazioni differenziali che lega due classi di grandezze distinte, *estensive* ed *intensive*, che nel caso elettrico sono rispettivamente tensione v e corrente i .

Le grandezze intensive sono caratterizzate da un comportamento *solenoidale*, ovvero la somma algebrica delle grandezze intensive entranti in una superficie chiusa è nulla. Le grandezze estensive invece godono della proprietà di *irrotazionalità*, ossia dato un percorso chiuso la somma algebrica delle grandezze estensive su tale percorso è identicamente uguale a zero. Le leggi di Kirchhoff alle correnti e alle tensioni (si veda Sez. 2.4) rappresentano la versione elettrica di tali proprietà.

Il circuito elettrico è solo una classe dei modelli fisici identificabili attraverso una coppia di variabili estensiva ed intensiva. Anche in un sistema meccanico, è possibile definire una coppia di grandezze estensiva (*forza*) e intensiva (*velocità*), che godono, rispettivamente, delle proprietà di irrotazionalità e solenoidaleità. Dalla tabella 2.1 si deduce una relazione simile anche per la coppia *pressione* e *flusso* in un modello fluidodinamico.

La corrispondenza tra sistemi definibili dalla coppia di variabili *estensive* e *intensive*, di cui i modelli elettrico, meccanico e fluidodinamico rappresentano solo tre classi particolari, permette una loro perfetta intercambiabilità. A titolo di esempio, in Fig. 2.1, si dimostra come un modello meccanico a costanti concentrate sia passibile di una rappresentazione circuitale (e viceversa), una volta associati agli elementi meccanici (masse, molle e attriti) i corrispondenti elementi elettrici (induttori, capacità e resistenze) come da Tabella 2.2. Nella Tabella è anche riportata la corrispondenza per elementi a parametri distribuiti monodimensionali, estendibile a strutture più complesse, ad esempio, bidimensionali o tridimensionali.

La letteratura è ricca di risultati riguardo la teoria e i metodi di soluzione per circuiti elettrici che, grazie all'analogia tra le varie classi di modelli fisici, possono essere utilizzati anche per sistemi fisici o fluidodinamici.

In particolare, esiste una teoria, nota col nome WDF, che sfrutta tali risultati per una discretizzazione di circuiti elettrici lineari a parametri concentrati. In questo capitolo si riassumerà

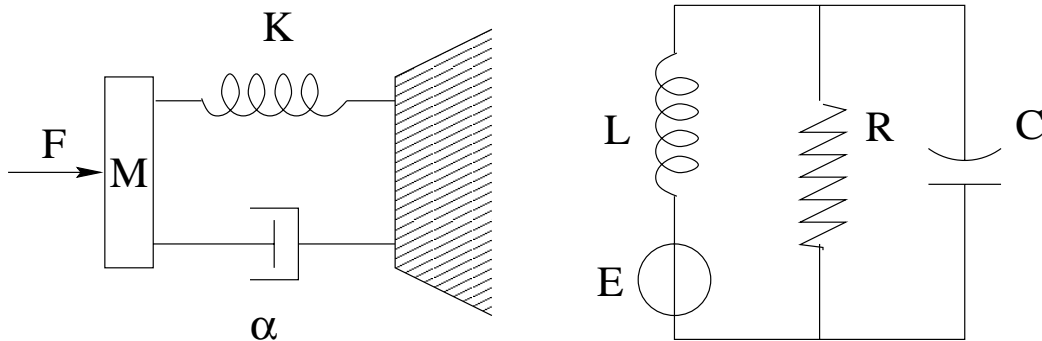
SISTEMA	GRANDEZZA ESTENSIVA	GRANDEZZA INTENSIVA
Elettrico	Tensione	Corrente
Meccanico	Forza	Velocità
Fluidodinamico	Pressione	Flusso

Tabella 2.1: Grandezze estensive ed intensive

SISTEMA A PARAMETRI CONCENTRATI			
ELETTRICO		MECCANICO	
Grandezza	Unità	Grandezza	Unità
Tensione	V	Forza	N
Corrente	A	Velocità	m/s
Resistenza R	Ω	Resistenza meccanica α	N·s/m
Capacità C	F	Costante di elasticità k	N/m
Induttanza L	H	Massa M	Kg

SISTEMA A PARAMETRI DISTRIBUITI (Propagazione Monodimensionale)			
ELETTRICO		MECCANICO	
Grandezza	Unità	Grandezza	Unità
Costante dielettrica ϵ	F/m	Tensione meccanica T	N
Permeabilità magnetica μ	H/m	Densità lineare della massa σ	Kg/m
Velocità di propagazione $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$	m/s	Velocità di propagazione $c = \sqrt{T/\sigma}$	m/s
Impedenza caratteristica $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$	Ω	Impedenza caratteristica $Z = \sqrt{T\sigma}$	N·s/m

Tabella 2.2: Dualità degli elementi elettrici e meccanici



$$K \equiv 1/C, M \equiv L, \alpha \equiv R \text{ e } F \equiv E.$$

(a)

(b)

Fig. 2.1: Dualità di un generico sistema meccanico.

la teoria WDF per un suo impiego nella simulazione di strutture analogiche lineari a parametri concentrati [1, 2, 4, 5], allo scopo di valutarne le potenzialità e i limiti. In particolare si evidenzierà come la teoria WDF classica sia insufficiente per la trattazione degli elementi non lineari più comuni nei modelli fisici.

La presentazione di questi risultati, ben noti in letteratura, ha l'unico scopo di introdurre la generalizzazione ai WDF descritta nel Capitolo successivo e rendere il lavoro di tesi il più autonomo possibile. Pertanto la lettura di questo Capitolo può essere evitata da coloro che avessero familiarità con filtri WDF.

Al fine di mantenere una conformità con la teoria classica dei filtri digitali, nel corso della trattazione si considererà come modello analogico di riferimento un circuito elettrico a parametri concentrati. Come già spiegato precedentemente, ciò non comporta alcuna perdita di generalità nella trattazione di modelli fisici a costanti concentrate.

2.1 Onde Numeriche

I *filtri ad onda numerica* vengono realizzati a partire da un modello fisico di riferimento, comunemente un circuito elettrico a parametri concentrati, attraverso una discretizzazione separata dei singoli elementi.

La discretizzazione è solitamente ottenuta attraverso opportune tecniche di *trasformazione in frequenza*, che consistono nel sostituire all'operatore di derivazione s , definito nel dominio trasformato continuo di Laplace, un operatore equivalente $f(z)$ nel dominio trasformato discreto Z . Una delle trasformazioni in frequenza maggiormente utilizzata dal momento che ha la proprietà di conservare la stabilità e causalità del modello di riferimento, è la *trasformazione bilineare* in cui

$$s \longrightarrow \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (2.1)$$

dove T è il tempo di campionamento.

Il metodo di trasformazione in frequenza è particolarmente adatto per tecniche di discretizzazione globale, il suo utilizzo, per una discretizzazione locale di parti del modello fisico di riferimento e per la loro successiva, connessione solitamente crea problemi di realizzabilità.

Per chiarire il problema della realizzabilità legato alla discretizzazione, si ipotizzi di avere un modello fisico, rappresentante un circuito elettrico lineare diviso in due parti C_1 e C_2 , come in Fig. 2.2. Ognuna delle due parti del circuito può essere vista come un insieme di equazioni differenziali con un numero di variabili di stato uguale al numero di componenti con memoria (induttori e capacità) presenti nel circuito. I due sottocircuiti interagiscono tra di loro attraverso una connessione di porta, che forza le variabili di Kirchoff v e i a soddisfare le leggi di continuità

$$v_1 = v_2, \quad i_1 + i_2 = 0.$$

In conclusione, connettere due sottocircuiti, significa cercare una soluzione di un insieme di equazioni algebriche (costituite da quelle dei due sottosistemi e dalla loro interconnessione) che solitamente sono in forma implicita.

Si può notare che le versioni discretizzate D_1 e D_2 dei due sottosistemi C_1 e C_2 non possono essere connesse assieme come in Fig. 2.2 (b). Infatti, usando le variabili di Kirchoff per descrivere i due sottosistemi, la variabile di uscita dell'uno dipende istantaneamente dalla variabile di ingresso dell'altro. Di conseguenza, l'interconnessione di D_1 con D_2 dà origine ad un anello privo di elementi di ritardo, in altri termini ad un'equazione implicita, che non può essere implementata. Un grafo che contiene maglie prive di elementi di ritardo è detto *non computabile*.

I problemi di computabilità possono essere evitati eliminando la relazione istantanea tra variabile di ingresso e uscita in una delle porte che appartengono all'anello privo di ritardo. Ciò, sfortunatamente, non è possibile utilizzando le variabili di Kirchoff, poiché esse sono istantaneamente dipendenti l'una dall'altra. Una soluzione a questo problema, proposta da Fettweis [2] alla

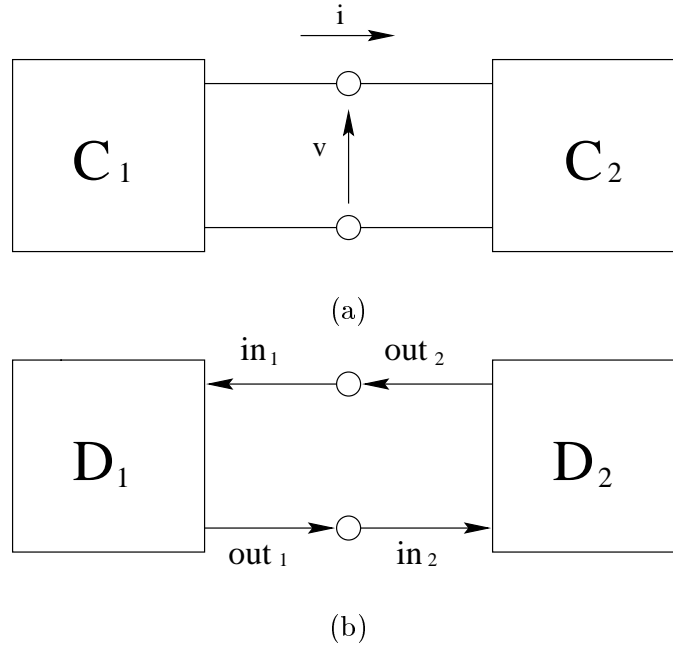


Fig. 2.2: Porzioni di circuito analogico (a) discretizzate singolarmente possono dare origine a problemi di computabilità quando connesse assieme (b).

fine degli anni sessanta, consiste nell'adottare un nuovo insieme di variabili ottenute mediante una trasformazione lineare e invertibile delle variabili di Kirchoff. La definizione di tali variabili ricorda quello delle onde di tensione e corrente che viaggiano nelle linee elettriche. Ad esse può essere applicato il concetto di adattamento per evitare dipendenze istantanee tra ingresso e uscita ed, in ultima analisi, per rendere l'implementazione computabile.

Un filtro ad onda numerica è quindi un'implementazione numerica di un modello fisico, ottenuto attraverso l'interconnessione dei suoi elementi discretizzati singolarmente, tutti descritti mediante variabili d'onda.

Si considerino le due variabili di Kirchoff v e i che caratterizzano una porta di un circuito lineare. È possibile definire una nuova coppia di variabili

$$\begin{aligned} a &= v + Ri \\ b &= v - Ri, \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove R è un parametro arbitrario chiamato *resistenza di riferimento*. Le variabili a e b possono essere pensate come *onde* che viaggiano in direzione opposta attraverso una linea di trasmissione infinitesimale con impedenza caratteristica R .

Se $R \neq 0$, allora tale trasformazione è invertibile

$$\begin{aligned} v &= \frac{a + b}{2} \\ i &= \frac{a - b}{2R} \end{aligned} \tag{2.3}$$

e quindi non si ha perdita d'informazione nell'usare le variabili d'onda per descrivere la coppia v e i . Poiché una porta del circuito è caratterizzata dalle variabili di Kirchoff, la sua rappresentazione *wave* sarà data in termini di onda incidente a (ingresso) e onda riflessa b (uscita).

È importante sottolineare come il parametro R , che caratterizza la trasformazione lineare, possa essere scelto arbitrariamente e rappresenti un grado di libertà nella descrizione della porta.

In seguito si vedrà che è possibile scegliere il parametro R in modo da evitare riflessione istantanea ad ogni porta del circuito lineare. Questa proprietà motiva l'uso di una rappresentazione *wave*, dal momento che è indispensabile per l'eliminazione di anelli privi di ritardo e quindi per la costruzione di schemi computabili.

2.2 Bipoli Lineari nel dominio d'onda

Resistenza lineare Si consideri una resistenza lineare R_1 , caratterizzata nel dominio di Kirchhoff v e i dalla relazione $v = R_1 i$. Una volta effettuata la trasformazione lineare (2.2) nel dominio d'onda, la relazione tra l'onda incidente a e l'onda riflessa b è del tipo $b = ra$, dove

$$r = \frac{b}{a} = \frac{v - Ri}{v + Ri} = \frac{v/i - R}{v/i + R} = \frac{R_1 - R}{R_1 + R} \quad (2.4)$$

è chiamato *coefficiente di riflessione*.

Scegliendo $R_1 = R$, il coefficiente di riflessione diventa nullo $r = 0$ e quindi l'onda riflessa b è uguale a zero indipendentemente dal valore dell'onda incidente. In conclusione, il parametro R può essere scelto in modo da eliminare la dipendenza istantanea tra ingresso e uscita.

Condensatore lineare Quando il bipolo è un condensatore, la relazione tra le variabili di Kirchhoff è di tipo differenziale $i = C\dot{v}$. Per rappresentare algebricamente tale legame, è necessario ricorrere alla trasformata di Laplace $V(s) = Z(s)I(s)$ dove $Z(s) = 1/sC$. Utilizzando nuovamente le variabili d'onda (2.2), il coefficiente di riflessione nel dominio di Laplace risulterà uguale a

$$R(s) = \frac{Z(s) - R}{Z(s) + R} = \frac{1/sC - R}{1/sC + R}. \quad (2.5)$$

Discretizzando la funzione di trasferimento (2.5) attraverso la trasformazione bilineare di eq. (2.1), si ottiene il filtro di riflessione

$$R(z) = \frac{p + z^{-1}}{1 + pz^{-1}}, \quad p = \frac{T - 2RC}{T + 2RC} = \frac{T - 2\tau}{T + 2\tau}. \quad (2.6)$$

In conclusione, una capacità ideale corrisponde, nel dominio wave, ad un filtro *passa-tutto* con coefficiente p e dove τ ha il significato fisico di costante di tempo associata all'accoppiamento resistenza di riferimento condensatore.

Si noti che la capacità C e il periodo di campionamento T sono parametri ben specificati, mentre il livello di resistenza di riferimento della rete R che si affaccia al bipolo è un parametro non vincolato.

Anche in questo caso è possibile definire un valore appropriato di R in modo tale da eliminare ogni dipendenza istantanea tra la variabile d'onda di uscita e quella d'ingresso. Infatti, imponendo $\tau = T/2$ e quindi $R = T/2C$, il coefficiente di riflessione (2.6) si riduce ad un semplice ritardo

$$R(z) = z^{-1}.$$

Induttore lineare Il caso dell'induttore è del tutto analogo a quello della capacità. Il legame tra tensione e corrente è ancora differenziale $v = L\dot{i}$ e, ponendo $Z(s) = sL$, si trova

$$R(s) = \frac{sL - R}{sL + R}. \quad (2.7)$$

Discretizzando la funzione di trasferimento (2.7) attraverso la trasformazione bilineare (2.1) si origina il filtro numerico

$$R(z) = -\frac{p + z^{-1}}{1 + pz^{-1}}, \quad p = \frac{T - 2L/R}{T + 2L/R} = \frac{T - 2\tau}{T + 2\tau}, \quad (2.8)$$

che è ancora un filtro *passa-tutto* del primo ordine con parametro p .

La condizione di adattamento $\tau = T/2$ (identica a quella vista per il condensatore) implica $R = 2L/T$ e riduce il coefficiente di riflessione (2.8) ad un ritardo puro cambiato di segno

$$r = -z^{-1} .$$

Generatori reali Il generatore di tensione reale nel dominio di Kirchoff è definito da una funzione caratteristica $v = E_g + R_g i$, dove R_g rappresenta la resistenza interna. Effettuando la trasformazione lineare (2.2) si ottiene

$$\begin{aligned} a &= E_g + R_g i + R i \\ b &= E_g + R_g i - R i \end{aligned}$$

e quindi

$$b = \frac{2R}{R_g + R} E_g + \frac{R_g - R}{R_g + R} a . \quad (2.9)$$

Per eliminare la dipendenza istantanea tra a e b è sufficiente imporre $R = R_g$, ottenendo

$$b = E_g .$$

Il generatore reale di corrente $i = v/R_g - A_g$ è riconducibile al caso del generatore reale di tensione, dal momento che il suo equivalente Thevenin è uguale a $v = R_g i + E_g$, dove $E_g = A_g R_g$.

Generatori ideali Il generatore ideale di tensione $v = E_g$ e il generatore ideale di corrente $i = A_g$ hanno come corrispondenti nel dominio wave rispettivamente

$$b = 2E_g - a \quad b = 2RA_g + a .$$

Ponendo $E_g = 0$ ed $A_g = 0$, si ottiene la rappresentazione wave del cortocircuito ($v = 0$) e del circuito aperto ($i = 0$)

$$b = -a \quad b = a .$$

Si può notare che per i generatori ideali non è possibile trovare un valore opportuno di R che elimini la dipendenza istantanea tra ingresso e uscita.

2.3 Rifrazione

Si è visto nella Sezione precedente, che ogni bipolo lineare può essere descritto da una semplice relazione nel dominio d'onda attraverso una attenta scelta delle variabili d'onda. Infatti, la definizione (2.2) presenta un grado di libertà, rappresentato dalla resistenza di riferimento R . Il valore di R ad una singola porta viene scelto in modo da evitare l'insorgere di dipendenza istantanea tra variabile d'ingresso a e variabile di uscita b ed ottenere una versione adattata del singolo bipolo. Si deduce che i singoli elementi monoporta hanno differenti valori di resistenza di riferimento.

Il problema che ora si prenderà in esame è come implementare il cambio di resistenza di riferimento nel passaggio da una porta ad un'altra. Questa operazione è d'aiuto per comprendere le giunzioni multiporta e gli adattatori che sono gli elementi base per la costruzione dei filtri ad onda numerica e che verranno presentati nelle seguenti Sezioni.

Si considerino le due porte di Fig. 2.3 aventi rispettivamente resistenza di riferimento R_1 e R_2 e variabili d'onda

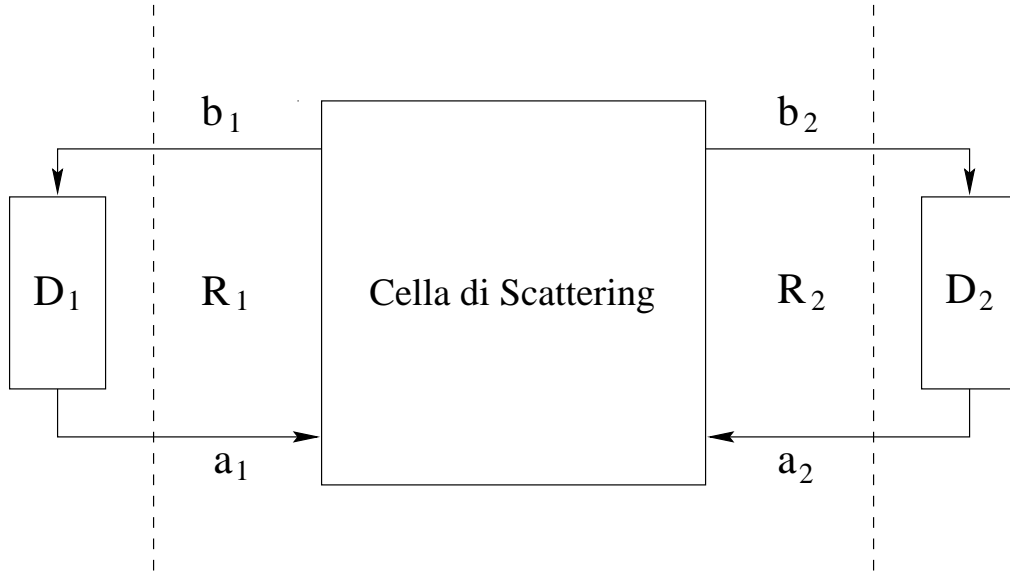


Fig. 2.3: Connessione di due blocchi monoporta D_1 e D_2 attraverso la cella di scattering.

$$a_1 = v_1 + R_1 i_1, \quad b_1 = v_1 - R_1 i_1$$

$$a_2 = v_2 + R_2 i_2, \quad b_2 = v_2 - R_2 i_2$$

Volendo connettere le due porte, è necessario rispettare le leggi di Kirchoff ai nodi $i_1 + i_2 = 0$ e alle maglie $v_1 = v_2$. Riscrivendo le due equazioni in funzione delle variabili d'onda uscenti, si ottiene

$$\begin{aligned} b_1 &= k a_1 + (1 - k) a_2 \\ b_2 &= (1 + k) a_1 - k a_2 \end{aligned}, \quad \text{dove, } k = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}, \quad (2.10)$$

che rappresenta la funzione di trasferimento di una *giunzione di scattering*.

È importante sottolineare come la giunzione due porte appena vista ha il duplice compito di:

1. fornire un equivalente nel dominio d'onda delle leggi di Kirchoff per una corretta connessione;
2. implementare il cambio di coordinate che si riscontra nel passaggio da una porta ad un'altra.

Il simbolo e la corrispondente implementazione della cella di scattering è presentata in Fig. 2.4.

2.4 Giunzioni multiporta

Per ottenere un'implementazione wave del circuito, non è sufficiente la descrizione dei singoli elementi, ma è necessario specificare la topologia in accordo alla quale essi sono interconnessi. La topologia è data in termini di un sistema completo di equazioni di Kirchoff ai nodi e alle maglie del circuito, ed è implementata per mezzo di *giunzioni multiporta*.

L'equivalente nel dominio d'onda, non è altro che una semplice estensione a n -porte, con $n > 2$, della giunzione di scattering vista nella Sezione precedente e, come quest'ultima, oltre a

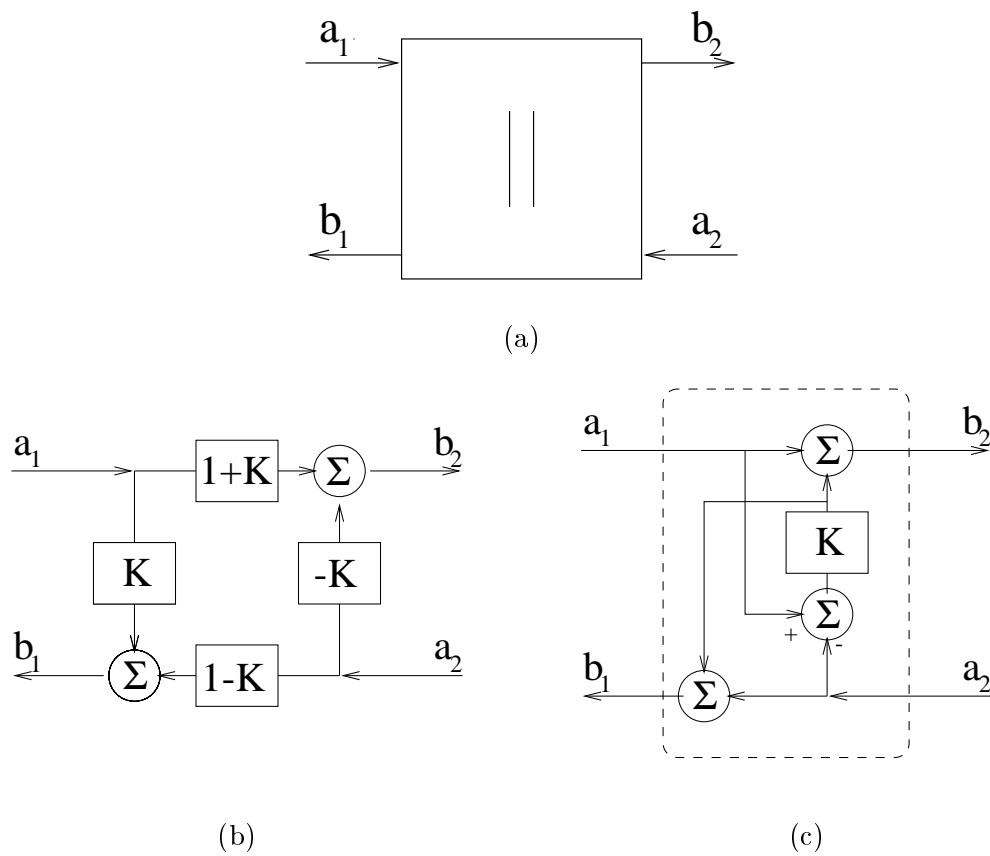


Fig. 2.4: Cella di scattering. (a) Simbolo. (b) Implementazione diretta. (c) Implementazione a singolo moltiplicatore.

soddisfare le corrispondenti leggi di Kirchoff, fornisce un'appropriata interfaccia tra le coppie di variabili d'onda che hanno differenti resistenze di riferimento.

Attraverso due tipi fondamentali di interconnessione, serie e parallelo, è possibile specificare in maniera completa ed univoca la topologia del circuito.

2.4.1 Giunzioni multiporta parallelo

Una connessione parallelo n porte, illustrata schematicamente in Fig. 2.5, con resistenze di riferimento R_1, \dots, R_n , è caratterizzata dai seguenti tre gruppi di equazioni:

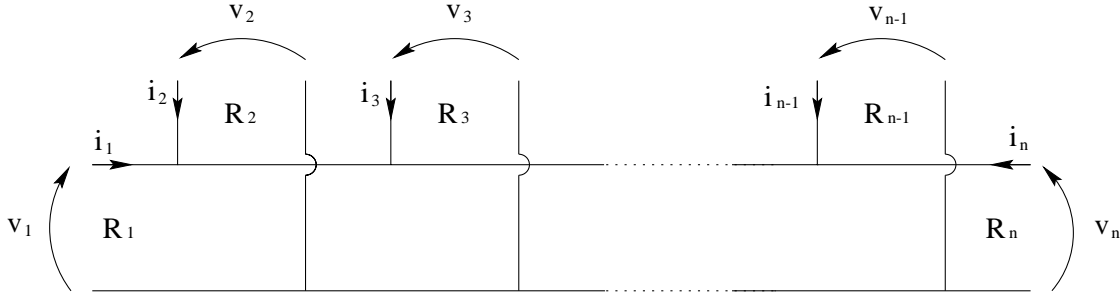


Fig. 2.5: Multigiunzione parallela analogica.

1. legame lineare tra le variabili di Kirchoff e le variabili wave

$$a_m = v_m + R_m i_m, \quad b_m = v_m - R_m i_m \quad m = 1, \dots, n;$$

2. legge di Kirchoff alle maglie per giunzione parallelo (le grandezze estensive totali che si affacciano alle n porte della multigiunzione non subiscano discontinuità)

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n;$$

3. legge di Kirchoff ai nodi per giunzione parallelo (la somma algebrica delle grandezze intensive totali presenti alle n porte della multigiunzione sia identicamente nulla)

$$\sum_{m=1}^n i_m = 0.$$

Una giunzione soddisfacente questi principi è detta “ n -giunzione parallelo”. Per ricavare le equazioni che la governano, occorre esprimere le variabili wave uscenti b_m in funzione di quelle entranti a_m , per $m = 1, \dots, n$, ottenendo

$$b_m = (\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n) - a_m \quad m = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

dove

$$\gamma_m = \frac{2G_m}{G_1 + \dots + G_n}, \quad \text{con } G_m = \frac{1}{R_m}. \quad (2.12)$$

Si può notare che

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 2,$$

pertanto i gradi di libertà della giunzione n -porta parallelo sono $n - 1$ e ciò permette ad una delle n porte di essere dipendente dalle altre. Scegliendo la porta n come porta dipendente, un modo comodo per scrivere l'equazione (2.11) è il seguente

$$\begin{aligned} b_n &= a_n - \sum_{m=1}^{n-1} \gamma_m (a_n - a_m) \\ b_m &= b_n + (a_n - a_m) \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Il simbolo utilizzato per la n -giunzione parallelo è descritto in Fig. 2.6.

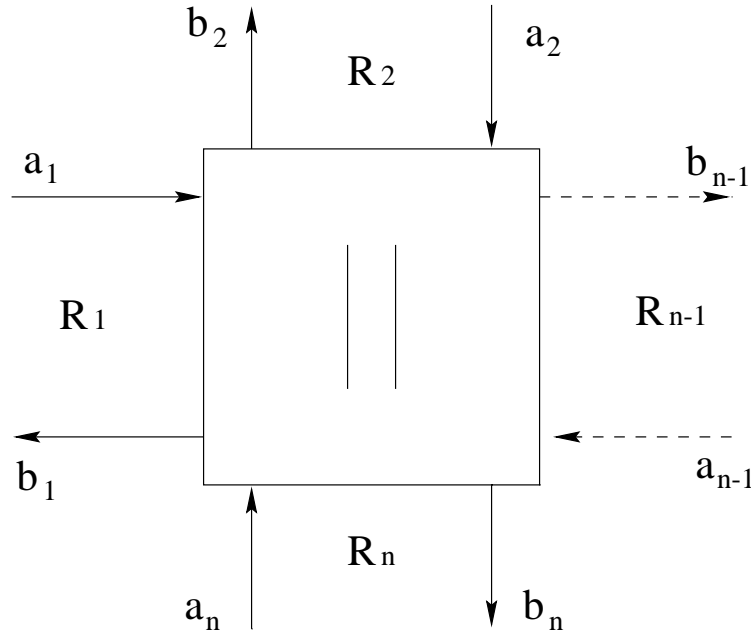


Fig. 2.6: Simbolo della multigiunzione parallela numerica.

2.4.2 Giunzioni multiporta serie

In maniera del tutto analoga a quanto visto nel caso della giunzione parallelo, si possono ricavare le equazioni per la n -giunzione serie, la cui versione analogica è illustrata schematicamente in Fig. 2.7. Essa soddisfa i seguenti tre gruppi di equazioni.

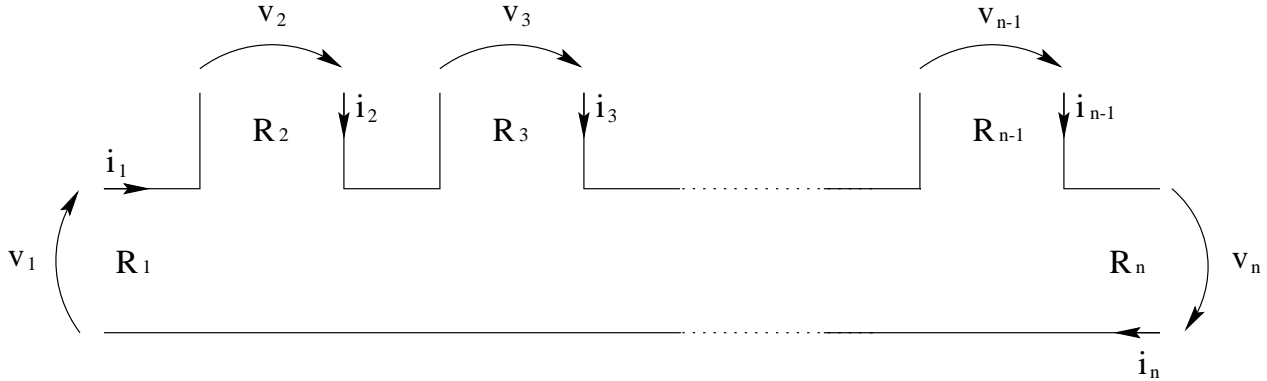


Fig. 2.7: Multigiunzione serie analogica.

1. Legame lineare tra le variabili di Kirchoff e le variabili wave

$$a_m = v_m + R_m i_m, \quad b_m = v_m - R_m i_m, \quad m = 1, \dots, n;$$

2. Legge di Kirchoff alle maglie per giunzione serie (la somma algebrica delle grandezze estensive totali presenti alle n porte della multigiunzione sia identicamente nulla)

$$\sum_{m=1}^n v_m = 0;$$

3. Legge di Kirchoff ai nodi per giunzione serie (le grandezze intensive totali che si affacciano alle n porte della multigiunzione non subiscano discontinuità)

$$i_1 = i_2 = \dots = i_n.$$

Esplicitando le variabili wave uscenti b_m , in funzione di quelle entranti a_m , per $m = 1, \dots, n$, si ottiene

$$b_m = a_m - \gamma_m(a_1 + \dots + a_n) \quad m = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

dove

$$\gamma_m = \frac{2R_m}{R_1 + \dots + R_n}. \quad (2.15)$$

Anche in questo caso la relazione

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 2$$

permette ad una delle porte di essere dipendente dalle altre e di riscrivere l'equazione (2.14) nella forma

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 + \dots + a_n \\ b_m &= a_m - \gamma_m(a_0) \quad m = 1, \dots, n-1 \\ b_n &= -(b_1 + \dots + b_{n-1} + a_0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Il simbolo di riferimento per la n -giunzione serie è riportato in Fig. 2.8.

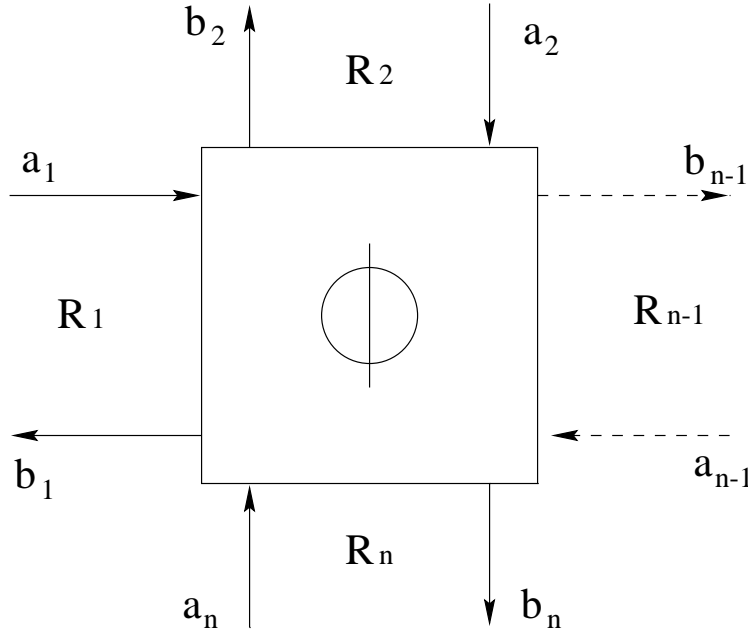


Fig. 2.8: Simbolo della multigiunzione serie numerica.

2.5 Adattatori

Una multigiunzione serie o parallelo, in generale, presenta una relazione istantanea tra la variabile entrante a_m e la variabile uscente b_m ad ogni sua porta. Di fatto, con un'opportuna scelta dei livelli di resistenza alla porta dipendente n , è possibile eliminare le riflessioni istantanee che si presentano ai suoi capi.

Basta infatti imporre che il coefficiente di riflessione $1 - \gamma_n$ sia identicamente nullo, per ottenere dall'equazione (2.12) della multigiunzione parallelo $G_n = G_1 + \dots + G_{n-1}$ e dall'equazione (2.13)

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{m=1}^{n-1} \gamma_m(a_m) \\ b_m &= b_n + (a_n - a_m) \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ciò concorda con l'intuizione in quanto, imporre l'assenza di riflessioni alla porta n , equivale a imporre la condizione di adattamento $G_n = G_1 + \dots + G_{n-1}$.

Una n -giunzione parallelo che soddisfa a queste condizioni è chiamata *adattatore parallelo n -porte* e la porta n è detta *porta adattata* ed il suo simbolo è descritto in Fig. 2.9.

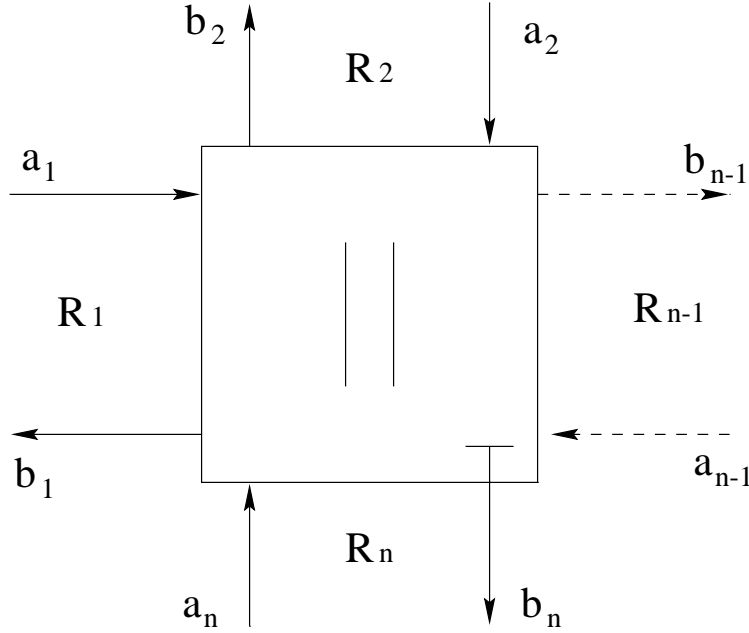


Fig. 2.9: Simbolo dell'adattatore parallelo numerico.

La condizione di adattamento nel caso dell'*adattatore serie n -porte* rimane $\gamma_n - 1 = 0$ che, applicata all'equazione (2.15), dà origine a $R_n = R_1 + \dots + R_{n-1}$, mentre l'equazione (2.16) si modifica nel modo seguente

$$\begin{aligned} b_n &= -\sum_{m=1}^{n-1} (a_m) \\ b_m &= a_m - \gamma_m (a_n - b_n) \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tali equazioni descrivono l'adattatore serie numerico di Fig. 2.10.

2.5.1 Adattatori tre-porte

Introducendo $n-2$ porte ausiliare, con resistenze di riferimento R'_1, \dots, R'_{n-2} , la connessione parallelo n -porte di Fig. 2.5 può essere rappresentata come in Fig. 2.11 (a). Scegliendo $R'_v = 1/G'_v$ in modo tale che

$$G'_1 = G_1 + G_2 \quad e \quad G'_v = G'_{v-1} + G_{v+1} \quad \text{per } v = 2, \dots, n-2,$$

la rappresentazione di Fig. 2.11 (a) è la cascata di $n-2$ adattatori parallelo tre-porte.

Analogamente partendo dalla Fig. 2.7, possiamo introdurre $n-2$ porte ausiliarie come in Fig. 2.11 (b) e, scegliendo

$$R'_1 = R_1 + R_2 \quad e \quad R'_v = R'_{v-1} + R_{v+1} \quad \text{per } v = 2, \dots, n-2,$$

l'adattatore serie n -porte può essere costruito dalla cascata di $n-2$ adattatori serie tre-porte.

Gli adattatori tre-porte sono quindi di particolare interesse, in quanto possono essere utilizzati come elementi base per la costruzione di un qualunque adattatore n -porte.

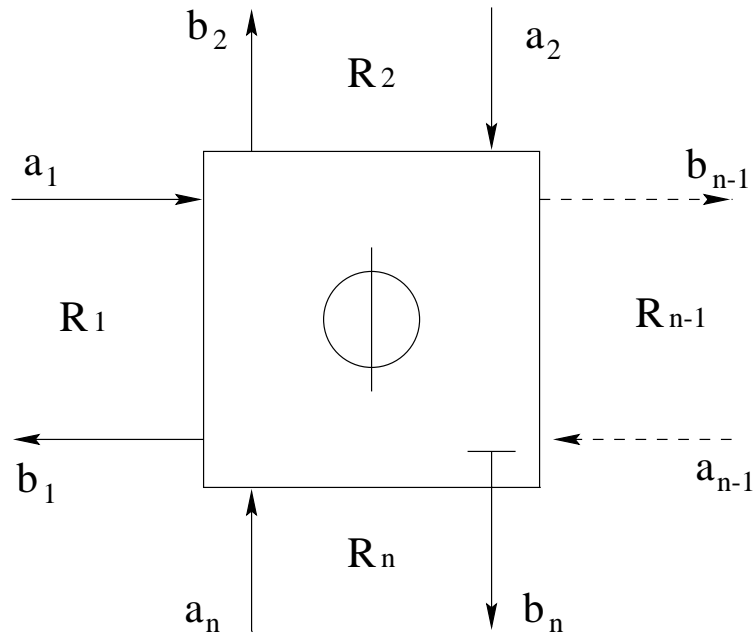
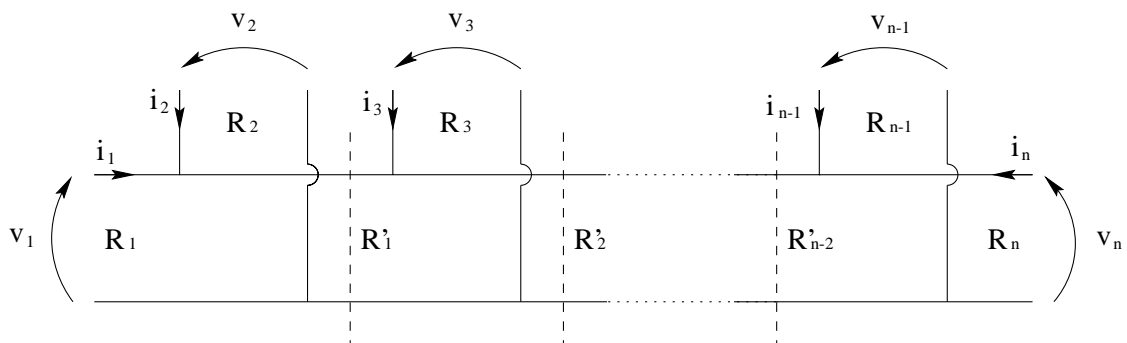
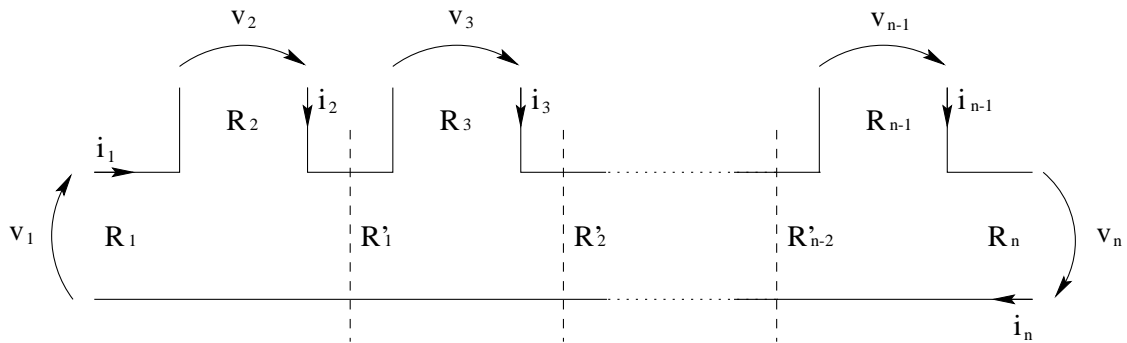


Fig. 2.10: Simbolo dell'adattatore serie numerico.



(a)



(b)

Fig. 2.11: Multigiunzione analogica. (a) Schema a tre porte parallelo. (b) Schema a tre porte serie.

Adattatore serie tre-porte

L'adattatore serie di Fig. 2.12 è una giunzione tre porte, di cui una viene utilizzata per connettere il bipolo, una si collega alla rete, la terza (porta adattata) viene impiegata per adattare il collegamento rete bipolo, evitando riflessioni istantanee. Come per le multigiunzioni serie valgono le seguenti relazioni

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0, \quad i_1 = i_2 = i_3.$$

Si effettui la trasformazione lineare (2.2), una volta esplicitate le variabili d'onda uscenti in funzione di quelle entranti e imposta la condizione di adattamento alla terza porta, si ottiene

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \gamma_1 & -\gamma_1 & -\gamma_1 \\ -1 + \gamma_1 & \gamma_1 & -1 + \gamma_1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

dove

$$\gamma_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

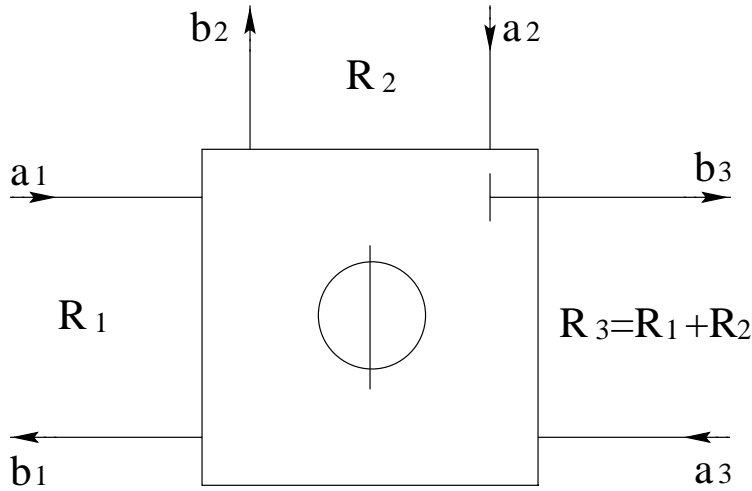


Fig. 2.12: Simbolo dell'adattatore serie tre-porte.

Adattatore parallelo tre-porte

Il caso dell'adattatore parallelo tre-porte di Fig. 2.13 è l'esatto duale dell'adattatore serie. Anch'esso è una giunzione che soddisfa le seguenti condizioni di continuità di Kirchoff

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0, \quad v_1 = v_2 = v_3$$

e le cui tre porte vengono utilizzate: una per connettere il bipolo, una per collegarsi alla rete, e l'ultima (porta adattata) per adattare il collegamento rete bipolo, evitando riflessioni istantanee.

Una volta esplicitate le variabili d'onda uscenti in funzione di quelle entranti, si ottiene

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

dove

$$\alpha_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} , \quad \text{con} \quad G_i = \frac{1}{R_i} .$$

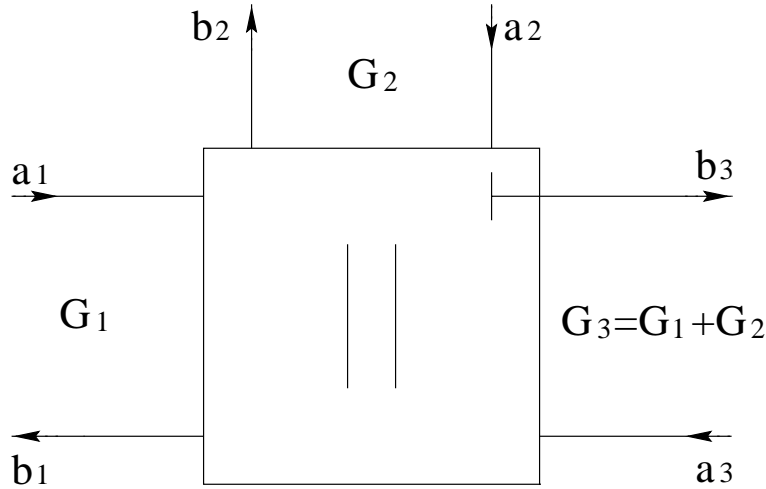


Fig. 2.13: Simbolo dell'adattatore parallelo tre-porte.

2.6 Altri elementi WDF

In questa Sezione verrà esposta la rappresentazione wave di alcuni doppi bipoli d'interesse.

Linea di ritardo unitaria Questo elemento riproduce il ritardo di propagazione, in un intervallo di tempo pari a T (tempo di campionamento), delle variabili d'onda che attraversano una linea di trasmissione con impedenza costante R . La sua rappresentazione nel dominio d'onda è la seguente

$$b_1(n) = b_2(n-1) , \quad a_1(n) = b_2(n-1) .$$

Trasformatore ideale La funzione di trasferimento del trasformatore ideale è

$$v_2 = nv_1 \quad i_1 = -ni_2$$

che, una volta scelta la resistenza di riferimento $R_2 = nR_1$, si trasforma nel dominio d'onda in

$$b_1 = na_2 \quad b_2 = na_1 .$$

Giratore Un doppio bipolo avente nel dominio di Kirchoff la seguente funzione caratteristica

$$v_1 = -Ri_2 \quad v_2 = \frac{1}{R}i_1$$

è chiamato giratore. Presa R come resistenza di riferimento alle due porte, esso ha come corrispondente nel dominio d'onda

$$b_1 = -a_2 \quad b_2 = a_1 .$$

Circolatore Il circolatore è un elemento n -porte, con $n \geq 3$, descritto in termini di variabili d'onda dalla relazione

$$b_1 = a_n , \quad b_2 = a_1 , \quad b_3 = a_2 , \quad \dots , \quad b_n = a_{n-1} .$$

2.7 Sintesi di circuiti lineari

Nelle Sezioni precedenti abbiamo visto i principali elementi che costituiscono i filtri ad onda numerica.

Il passo immediatamente successivo è connetterli in modo tale che il filtro numerico risultante:

- sia l'esatto corrispettivo del circuito elettrico analogico di riferimento;
- sia fisicamente realizzabile e computabile.

Il corretto collegamento tra i vari blocchi è garantito dai tre seguenti semplici principi:

- i due terminali di una porta devono essere collegati a quelli di una e una sola altra porta;
- per ognuno dei due terminali che sono collegati assieme, le due onde corrispondenti devono avere lo stesso verso di percorrenza

$$a_1 = b_2 \quad a_2 = b_1 ;$$

- le resistenze di riferimento alle due porte collegate devono essere uguali

$$R_1 = R_2 .$$

Si presti ora maggiore attenzione al problema della realizzabilità del filtro. Un filtro numerico è descritto in maniera completa da un sistema di equazioni alle differenze. La sua implementazione richiede che le operazioni aritmetiche che lo descrivono, possano essere ordinate in maniera sequenziale all'interno di un certo intervallo di tempo T , e che esse ricorrano periodicamente ad una frequenza $F = 1/T$. Affinché ciò sia possibile è necessario che:

- il ritardo totale in ogni maglia del filtro sia uguale ad un multiplo intero del tempo di campionamento;
- il filtro non contenga maglie a ritardo nullo.

Dando una rapida occhiata agli elementi presentati nelle Sezioni precedenti, si può notare come tutti siano caratterizzati o da dipendenza istantanea, o da ritardi multipli di T , tra la variabile d'onda incidenti e quella riflessa. Un filtro avente solo ritardi uguali a multipli interi di T è detto *totalmente sincronizzato* e la definizione stessa esclude la presenza di maglie con ritardi totali diversi da multipli interi di T .

L'assenza di maglie prive di elementi di ritardo è quindi l'unica condizione che permette la realizzabilità e la computabilità della struttura numerica in questione.

Per costruzione, gli adattatori multiporta non contengono maglie interne a ritardo nullo, ma solitamente presentano una dipendenza istantanea tra variabile uscente ed entrante, eccetto che per la porta adattata. Se si connette ad una qualsiasi porta di un adattatore una capacità, un induttore, un generatore reale, una resistenza lineare o un elemento unitario, non si creano maglie chiuse prive di elementi di ritardo. Una maglia computabile, rimane tale se si introduce al suo interno un giratore, un trasformatore o un circolatore. Al contrario la cella di scattering, i generatori ideali, il cortocircuito e il circuito aperto presentano riflessione istantanea diversa da zero tra la variabile d'onda entrante e la variabile uscente e quindi possono essere connessi solo a porte adattate. Anche la connessione diretta tra due adattatori genera solitamente una maglia priva di elementi di ritardo, a meno che una delle due porte sia adattata.

Si può affermare in maniera semplice che la computabilità del filtro è garantita se, nella connessione delle porte di due elementi, una delle due non presenti dipendenza istantanea tra variabile d'ingresso e uscita, in altri termini sia adattata.

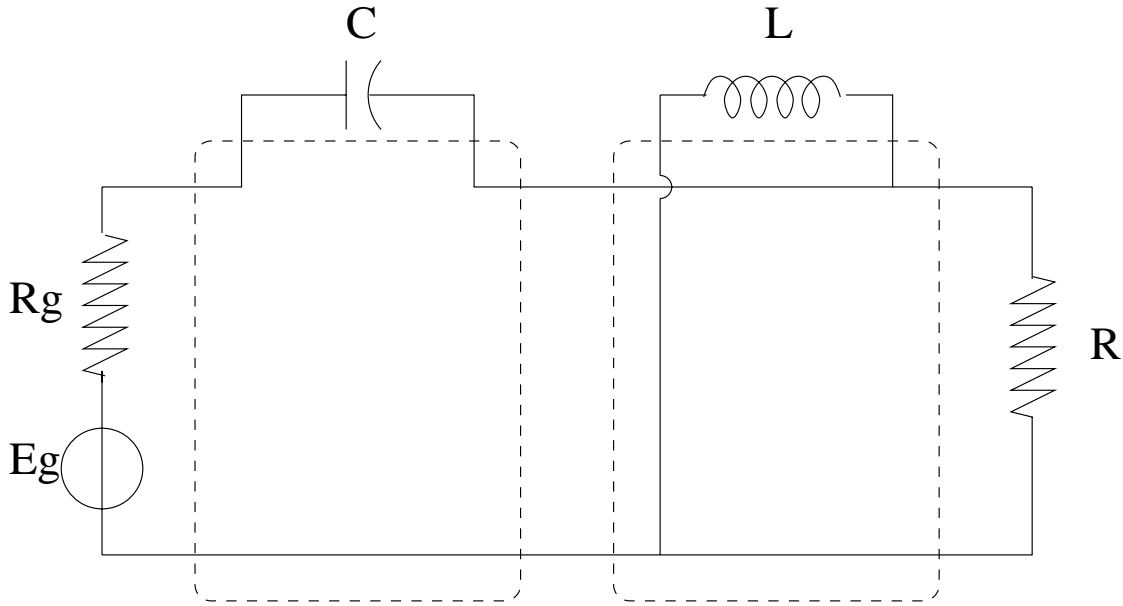


Fig. 2.14: Circuito analogico.

Fatte queste premesse, si è ora in grado di costruire un filtro ad onda numerica partendo dal corrispondente circuito elettrico analogico. Si consideri il circuito di Fig. 2.14, i rettangoli tratteggiati mettono in evidenza le giunzioni tre porte che dovranno essere presenti nel corrispondente filtro ad onda numerica. Due delle possibili strutture numeriche corrispondenti al filtro analogico sono rappresentate in Fig. 2.15 (a) e (b). Ad ogni porta è specificato il livello di resistenza di riferimento che garantisce l'assenza di anelli chiusi privi di elementi di ritardo. Nell'implementazione di Fig. 2.15 (a) è stato scelto un livello di impedenza di riferimento alla terza porta dell'adattatore parallelo tale per cui la rappresentazione nel dominio d'onda della resistenza R fosse adattata.

In Fig. 2.15 (b) si è imposto la condizione di assenza di riflessione sulla porta in questione dell'adattatore parallelo, ciò ha permesso la connessione con un modello della resistenza R del tipo

$$b = ra, \quad \text{dove } r = \frac{R - R_{p3}}{R + R_{p3}},$$

che presenta dipendenza istantanea tra variabile uscente ed entrante.

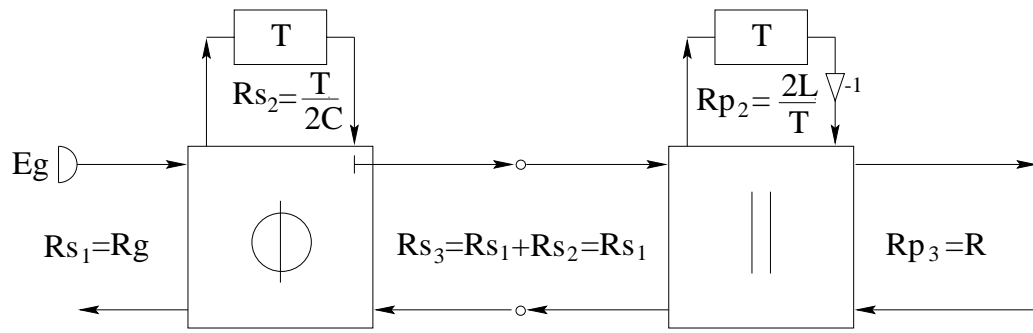
2.8 Componenti non lineari resistivi

Nell'implementazione di Fig. 2.15 (b), la presenza di una porta adattata libera ha permesso l'introduzione di un modello di resistenza avente dipendenza istantanea.

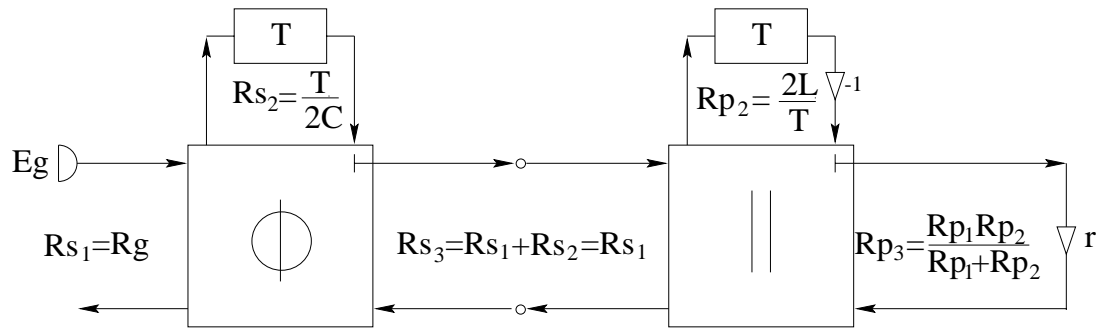
In generale, esiste sempre un'implementazione numerica del filtro WDF avente una porta libera priva di dipendenza istantanea. Si consideri infatti, un filtro ad onda numerica composto da n adattatori; delle n porte adattate iniziali, $n - 1$ sono utilizzate per evitare anelli chiusi privi di elementi di ritardo nella connessione diretta tra gli adattatori stessi, mentre una porta adattata rimane libera e può essere utilizzata per collegare un qualsiasi bipolo anche non lineare avente equazione del tipo

$$b = f(a). \quad (2.21)$$

È proprio sulla base di questa considerazione che si fondano i metodi classici per la trattazione di filtri ad onda numerica contenenti resistenze non lineari [20]. In questi lavori, la trasformazione che definisce le variabili d'onda (incidente a e riflessa b) come funzioni delle variabili di Kirchhoff (tensione v e corrente i) è usata per mappare la caratteristica non lineare del resistore nel



(a)



(b)

Fig. 2.15: Filtro ad onda numerica: due possibili rappresentazioni del circuito analogico di Fig. 2.14.

dominio d'onda, trasformando la curva $i-v$ in una curva $a-b$ esplicita di eq. (2.21). Se si collega tale caratteristica d'onda alla porta libera priva di riflessioni istantanee del filtro non si originano problemi di computabilità.

È utile sottolineare fin d'ora che il filtro WDF permette l'inserzione di un'unica non linearità di eq. (2.21) all'unica porta adattata libera. La trattazione di un numero maggiore di curve non lineari richiederebbe l'individuazione di un "macro-bipolo" contenete gli elementi non lineari e un numero minimo di altri elementi lineari da discretizzare globalmente. La gestione e realizzazione di "macro-bipoli" non lineari con memoria non è un problema di facile soluzione. Nel corso della tesi ci si limiterà a fornire gli strumenti necessari per includere non linearità monoporta (2.21), fornendo indicazioni su come gestire non linearità multiple.

2.9 Bipoli non lineari resistivi

Un bipolo resistivo è rappresentato da una relazione algebrica fra grandezza estensiva v e grandezza intensiva i della forma

$$F(v, i) = 0 \quad (2.22)$$

Quando la relazione (2.22) è esplicitabile rispetto alla grandezza estensiva, cioè può essere espressa nella forma $v = v(i)$, il resistore è detto *controllato in corrente*; se la (2.22) è esplicitabile rispetto alla grandezza intensiva $i = i(v)$, il resistore è detto *controllato in tensione*.

Un resistore $F(v, i) = 0$ può essere ridefinito nel dominio delle variabili d'onda, facendo uso del cambio di variabili

$$a = v + Ri \quad b = v - Ri ,$$

ovvero

$$v = \frac{a+b}{2} \quad i = \frac{a-b}{2R} .$$

La caratteristica del resistore $f(a, b) = 0$, nel dominio delle variabili d'onda, è infatti data da

$$f(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2R}\right) .$$

2.10 Esplicitabilità di caratteristiche non lineari

Si vogliono ora determinare le condizioni che consentono di esplicitare l'onda riflessa rispetto all'onda incidente, ovvero che permettono di scrivere $b = b(a)$, sia nel caso di resistore controllato in corrente, che nel caso di resistore controllato in tensione.

2.10.1 Caratteristica non lineare continua

Se la caratteristica $f(a, b)$ del resistore è continua con le sue derivate, per determinare le condizioni di esplicitabilità, si può fare uso del classico *teorema della funzione implicita*.

Se (a_0, b_0) giace sulla curva caratteristica del resistore (ovvero se $f(a_0, b_0) = 0$), allora la condizione

$$\left. \frac{\partial f}{\partial b} \right|_{(a_0, b_0)} \neq 0$$

garantisce l'esistenza di una funzione $g()$ tale che

$$f(a, g(a)) = 0$$

in un intorno di a_0 .

Se si particularizza la condizione nel caso di resistore controllato in corrente si ottiene $F(v, i) = v - v(i) = 0$, perciò

$$f(a, b) = \frac{a+b}{2} - v\left(\frac{a-b}{2R}\right) = 0$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{a+b}{2} - v\left(\frac{a-b}{2R}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\partial v}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial b} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\partial v}{\partial i} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{a-b}{2R} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2R} v', \end{aligned}$$

dove

$$v' \left(\frac{a-b}{2R} \right) = \left. \frac{\partial v(i)}{\partial i} \right|_{i=\frac{a-b}{2R}}$$

Si conclude che, per garantire l'esplicitabilità locale della caratteristica $v = v(i)$ rispetto alla variabile d'onda b , è sufficiente che sia

$$v'(i) \neq -R \quad (2.23)$$

In modo del tutto analogo si procede per resistori controllati in tensione $i = i(v)$, nel qual caso si ha $F(v, i) = i - i(v)$, ovvero

$$f(a, b) = \frac{a-b}{2} - Ri\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0.$$

In tal caso si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -\frac{1}{2} - \frac{R}{2} i',$$

dove

$$i' \left(\frac{a+b}{2} \right) = \left. \frac{\partial i(v)}{\partial v} \right|_{v=\frac{a+b}{2}}$$

Si conclude che, per garantire l'esplicitabilità locale della caratteristica $i = i(v)$ rispetto alla variabile d'onda b , è sufficiente che sia

$$i'(v) \neq -\frac{1}{R}. \quad (2.24)$$

2.10.2 Caratteristica non lineare discontinua

Quanto ottenuto nel paragrafo precedente può essere facilmente esteso al caso in cui la caratteristica non lineare del resistore presenti delle discontinuità.

Ad esempio, nel caso di resistore controllato in tensione $i = i(v)$, l'esplicitabilità di b è garantita se

$$\inf_{v_2 \neq v_1} \frac{i(v_2) - i(v_1)}{v_2 - v_1} > -\frac{1}{R} \quad (2.25)$$

oppure

$$\sup_{v_2 \neq v_1} \frac{i(v_2) - i(v_1)}{v_2 - v_1} < -\frac{1}{R}. \quad (2.26)$$

Se sono soddisfatte le condizioni di esplicitabilità, la resistenza non lineare può essere implementata nel dominio d'onda nella forma

$$b = \tilde{f}(a) \quad (2.27)$$

ed essere connessa ad una porta adattata della struttura ad onda numerica risultante per evitare problemi di computabilità.

2.10.3 Metodo grafico

Ricavare la funzione analitica $b = g(a)$ da una funzione $f(a, b) = 0$ globalmente esplicitabile non è un'operazione immediata. Inoltre è utile ricordare che il teorema della funzione implicita fornisce una condizione sufficiente e non necessaria. Non è pertanto possibile dire nulla a priori riguardo l'esplicitabilità della funzione $f(a, b) = 0$, nell'intorno della radice (a_0, b_0) , se le condizioni descritte nella Sezione precedente non sono verificate.

Un metodo semplice ed immediato per avere un'idea di massima del comportamento della funzione $f(a, b) = 0$, consiste nell'operare la trasformazione grafica della coppia di variabili (v, i) . Per implementare un resistore non lineare nel dominio delle variabili d'onda (a, b) , si può procedere considerando sul piano (v, i) la curva descritta dalla caratteristica non lineare $F(v, i) = 0$ e operare il cambio di variabili

$$v = \frac{a + b}{2} \quad i = \frac{a - b}{2R} . \quad (2.28)$$

in modo grafico.

Si considerino, a titolo d'esempio, le caratteristiche non lineari $v = v(i)$ di tre resistori controllati in corrente, descritte in Fig. 2.16 (a) (b) (c). I punti segnati sulle curve di Fig. 2.16 (b) e (c), hanno pendenza

$$\left. \frac{\partial v(i)}{\partial i} \right|_{i_0} = -R$$

e pertanto, non soddisfano il *teorema della funzione implicita*.

In figura sono riportati anche gli assi a e b del dominio d'onda, corrispondenti alla trasformazione (2.28). Si noti che le pendenze dei due assi sono rispettivamente R e $-R$.

La caratteristica nel dominio d'onda è ottenibile effettuando prima una rotazione del diagramma di Fig. 2.16, tale da rendere orizzontale l'asse a , e poi applicando al grafico una trasformazione di scorrimento orizzontale (*shear*), che renda l'asse b ortogonale all'asse a .

In Fig. 2.17 sono riportati i risultati delle trasformazioni in tre casi particolari:

- a) curva globalmente esplicitabile e soddisfacente il *teorema della funzione implicita*;
- b) curva globalmente esplicitabile e non soddisfacente il *teorema della funzione implicita*;
- c) curva non esplicitabile e non soddisfacente il *teorema della funzione implicita*.

Il procedimento sopra descritto, oltre a costituire un metodo pratico per l'implementazione di caratteristiche resistive non lineari nel dominio d'onda, giustifica intuitivamente le condizioni di esplicitabilità (2.23) e (2.24) o, più in generale, le (2.25) e (2.26).

2.10.4 Caratteristiche non esplicitabili

Nella zona tratteggiata di Fig. 2.17 (c) si nota che la funzione $b = g(a)$ non è univoca, infatti per ogni valore di a , b può assumere ben tre valori distinti. È utile ricordare come la zona presa in considerazione rappresenta un intorno dei punti, segnati in Fig. 2.16 (c), che non soddisfano le ipotesi del teorema della funzione implicita. Questa situazione dà origine ad un'arbitrarietà

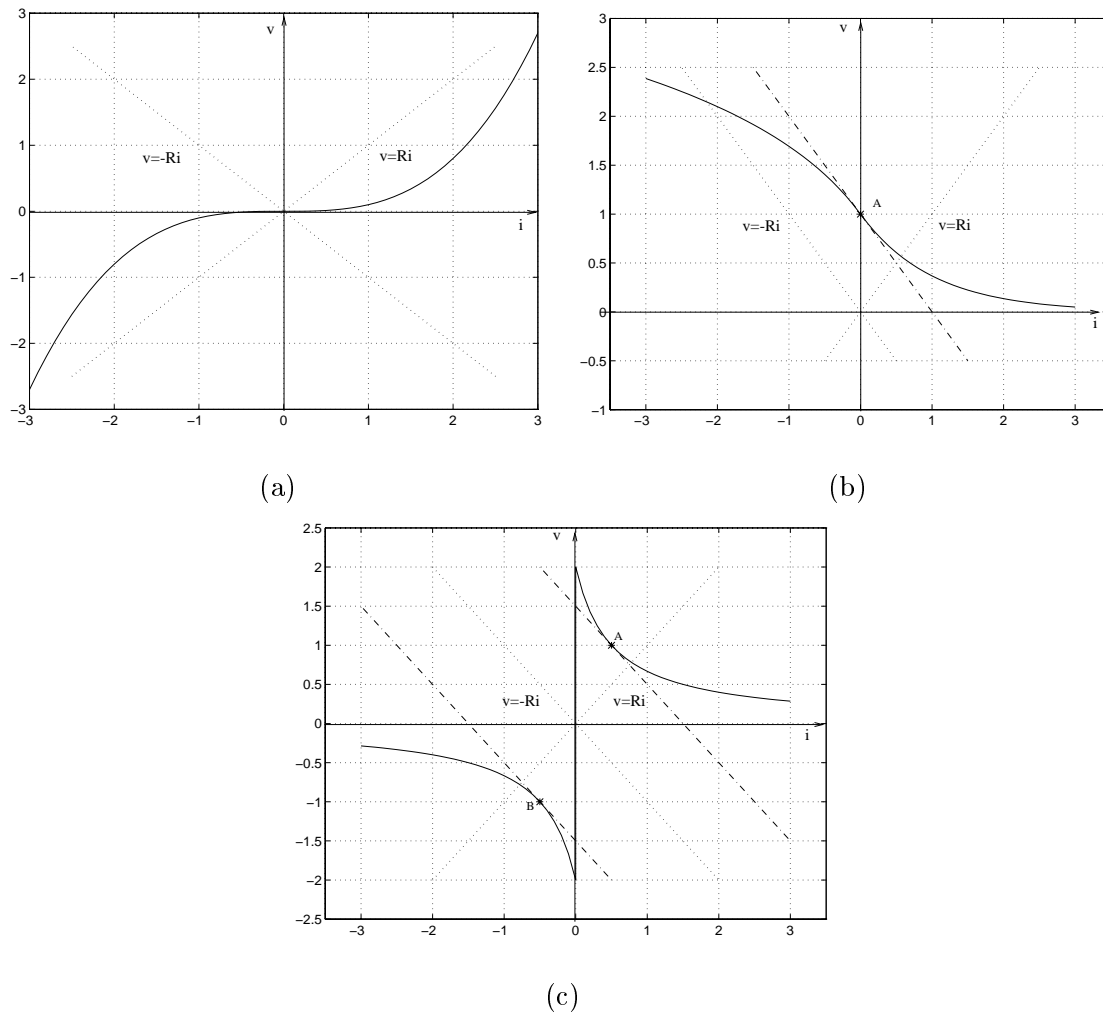


Fig. 2.16: Caratteristica di tre resistori non lineari controllati in corrente rispetto a un sistema di assi di riferimento di Kirchoff.

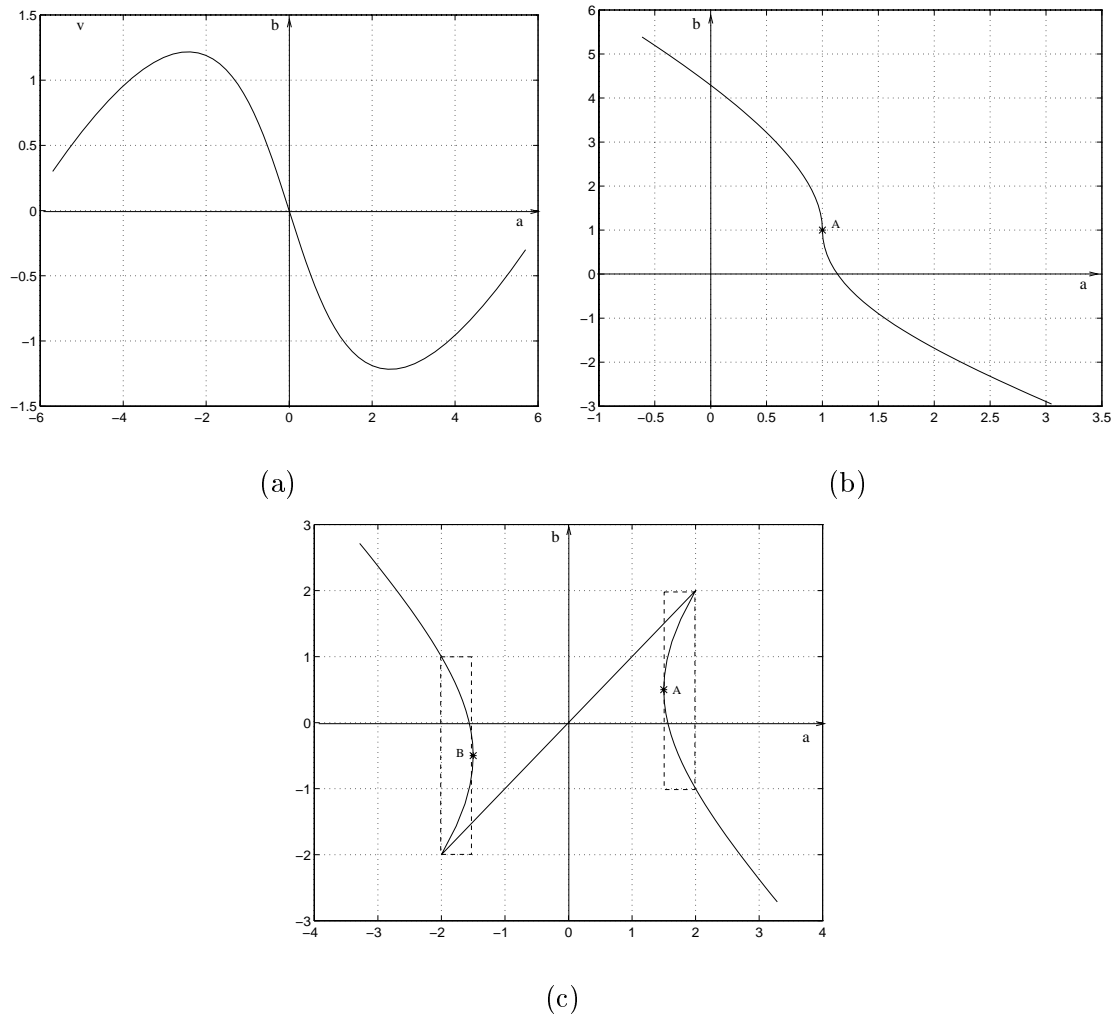


Fig. 2.17: Caratteristica dei tre resistori non lineari di Fig. 2.16 nel dominio d'onda.

molto fastidiosa, perché ad ogni iterazione è necessario decidere quale dei tre valori sia fisicamente corretto.

Un buon approccio al problema consiste nel ricordare che la coppia di variabili (v, i) ai capi della non linearità evolve mantenendosi, per quanto possibile, continua nel tempo. Non esistono motivi fisici per cui, in un intervallo T (tempo di campionamento), il punto di lavoro (v_l, i_l) , calcolato sulla curva non lineare di Fig. 2.16 (c), debba subire bruschi cambiamenti di valore. Si consideri, a titolo di esempio, la Fig. 2.18, in cui sono rappresentati i punti di intersezione tra la retta di carico (che descrive il comportamento della parte lineare del circuito) e la resistenza non lineare, in due istanti successivi di tempo nT e $(n+1)T$. Mentre nell'istante nT il punto di lavoro a è unico, nell'istante successivo si hanno ben tre possibili candidati. Il *criterio di*

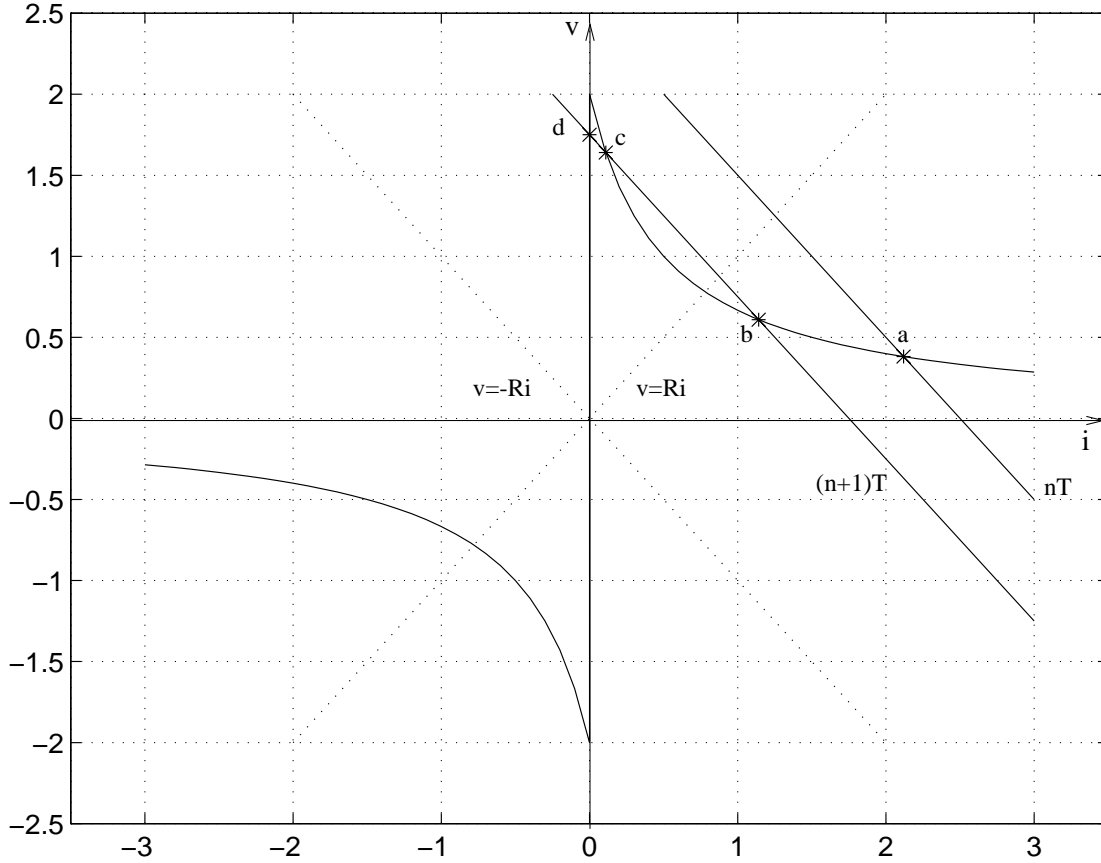


Fig. 2.18: Determinazione del punto di lavoro del circuito elettrico non lineare in due istanti di campionamento successivi.

continuità sopra descritto elimina l'ambiguità e forza la scelta del punto di lavoro b .

Il criterio è naturalmente applicabile anche alle variabili d'onda, in quanto rappresentano delle semplici trasformazioni lineari delle variabili di Kirchoff.

Se infatti, nell'istante t la funzione $g()$ assume valori,

$$b_n(t) = g(a(t)) \quad \text{con} \quad n = 1, \dots, N$$

il valore $b(t)$ può essere scelto nel seguente modo:

$$b(t) = b_n(t) \quad \text{tale per cui sia minimo} \quad |b_n(t) - b(t - T)|,$$

dove $b(t - T)$ rappresenta il valore assunto dalla funzione non lineare nell'istante immediatamente precedente. In altre parole, le variabili d'onda (a, b) evolvono nel tempo mantenendosi su un tratto della curva $b = g(a)$ il più a lungo possibile.

L'aggiunta della variabile $b(t - T)$ ha permesso di rendere univoca la funzione non lineare che ora è esprimibile nella seguente forma

$$b(t) = g(a(t), b(t - T)) . \quad (2.29)$$

Nell'eq. (2.29), il valore di b dipende non solo dal valore attuale della variabile d'ingresso a , ma anche dalla sua evoluzione in tempi precedenti. Una funzione avente queste proprietà è detta *isteretica*, in analogia a quanto avviene nella magnetizzazione dei materiali ferromagnetici.

Operativamente, per implementare una resistenza non lineare con isteresi, è sufficiente aggiungere al filtro numerico una cella di memoria che viene aggiornata ad ogni intervallo di tempo T col valore più recente di b , e che permette, all'istante immediatamente successivo, di risolvere i casi di ambiguità, qualora si presentassero.

2.11 Non linearità con memoria

Nella Sezione precedente si è visto come i filtri ad onda numerica possano includere, sotto opportune condizioni, una caratteristica resistiva non lineare. Purtroppo, le resistenze sono solo una delle categorie di non linearità che si desidererebbe implementare. Le molle non lineari, ad esempio, che hanno come equivalente elettrico un condensatore non lineare, sono frequentemente impiegate per descrivere parti meccaniche, come percussori con feltro, che subiscono una compressione elastica.

Volendo far uso della teoria classica WDF per modellare non linearità reattive, si incontrano problemi di computabilità [47, 81, 23].

Si prenda, ad esempio, in considerazione un condensatore lineare avente funzione caratteristica $q = Cv$, il suo equivalente non adattato nel dominio d'onda è il filtro passa-tutto di eq. (2.6) che per comodità si riscrive di seguito

$$R(z) = \frac{p + z^{-1}}{1 + pz^{-1}} , \quad \text{dove} \quad p = \frac{T - 2RC}{T + 2RC} .$$

Si voglia ora connettere ad una porta adattata con resistenza di riferimento R una capacità non lineare avente funzione

$$q = q(v) = C(v)v , \quad \text{dove} \quad C(v) = \frac{q(v)}{v} . \quad (2.30)$$

Si noti come ora il valore di C non sia più costante, ma funzione non lineare della tensione $C = C(v)$. Il corrispondente filtro passa-tutto di eq. (2.6) sarà parametrizzato in funzione di v

$$R(z, v) = \frac{p(v) + z^{-1}}{1 + p(v)z^{-1}} , \quad \text{dove} \quad p(v) = \frac{T - 2RC(v)}{T + 2RC(v)} . \quad (2.31)$$

Il valore di p , che nel caso lineare era costante, ora è una funzione non lineare $p = p(v)$ che deve venire aggiornata col valore attuale di v ad ogni iterazione. Si scriva ora l'equazione alle differenze del filtro passa-tutto

$$\begin{cases} b(n) &= p(v(n))a(n) + a(n-1) - p(v(n))b(n-1) \\ v(n) &= \frac{a(n) + b(n)}{2} \end{cases} \quad (2.32)$$

effettuando la sostituzione si trasforma nell'equazione *non lineare implicita*

$$b(n) = p\left(\frac{a(n) + b(n)}{2}\right)a(n) + a(n-1) - p\left(\frac{a(n) + b(n)}{2}\right)b(n-1) . \quad (2.33)$$

Sebbene, nell'implementazione del modello numerico, si sia fatto attenzione ad evitare la creazione di maglie chiuse prive di elementi di ritardo nell'implementazione del filtro numerico, la dipendenza istantanea della funzione non lineare $p(v)$ dalla tensione, dà origine a una funzione implicita. Infatti $b(n)$ è istantaneamente dipendente da $v(n)$ che, a sua volta, è istantaneamente dipendente da $b(n)$.

I tentativi di implementazione di elementi non lineari con memoria danno luogo a problemi di non computabilità. Tre possibili approcci per la loro soluzione sono sotto elencati:

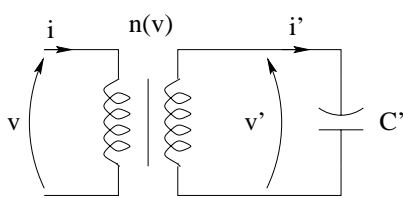
1. determinare la soluzione esplicita del tipo $b(n) = f(a(n), b(n-1), a(n-1))$ della funzione (2.33);
2. risolvere numericamente l'equazione non lineare implicita ad ogni intervallo di campionamento T ;
3. forzare un ordine di calcolo nella funzione, introducendo dei ritardi fittizi.

La prima rappresenta la soluzione ottima, il filtro che si ottiene, una volta esplicitata la funzione, oltre a essere nuovamente computabile, conserva le proprietà di passività e assenza di perdite del circuito analogico di riferimento. Purtroppo, nella maggior parte dei casi, esplicitare la funzione può essere un'operazione non banale o addirittura impossibile. Il metodo si può quindi applicare solo ad un numero ristretto di non linearità reattive molto semplici. Un esempio di utilizzo di questo metodo si può trovare nel lavoro di De Poli [48] per la sintesi numerica di un clarinetto.

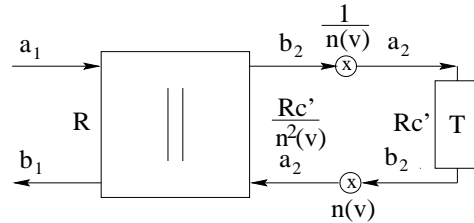
Nel secondo caso, si accetta la presenza di una maglia priva di elementi di ritardo all'interno del filtro e si risolve numericamente l'equazione implicita ad essa associata. Sebbene il metodo produca risultati molto accurati, vanifica gli sforzi fatti finora per la realizzazione di filtri computabili, e tutto ciò è pagato in termini di costo computazionale elevato.

Una soluzione di questo tipo è stata proposta da Felderhoff [23]. Nel suo lavoro si modella una capacità non lineare $C(v)$ mediante un condensatore lineare C' e un trasformatore ideale il cui fattore di trasformazione $n = n(v)$ è istantaneamente dipendente dalla tensione v . Le relazioni che legano i nuovi parametri C' e $n = n(v)$ della Fig. 2.19 (a), alla caratteristica non lineare sono riportati di seguito

$$i = C'n \frac{d(nv)}{dt} = C(v) \frac{dv}{dt}.$$



(a)



(b)

Fig. 2.19: Modello di un condensatore non lineare proposta da Felderhoff. (a) Rappresentazione Kirchoff. (b) Rappresentazione Wave.

Come si nota in Fig. 2.19 (b), la dipendenza istantanea della resistenza di riferimento alla seconda porta della cella di scattering ($Rc/n^2(v)$) e del fattore di trasformazione ($n(v)$) dalla tensione v , provoca l'insorgere di un anello privo di elementi di ritardo. Felderhoff affronta il problema risolvendo numericamente l'equazione implicita associata alla maglia non computabile.

Se si immagina che il valore di v sia lentamente variabile nel tempo, si può ipotizzare che il valore $v(n)$ possa essere strettamente correlato ai valori precedenti e pertanto, possa essere predetto da quest'ultimi attraverso, ad esempio, una predizione lineare

$$\hat{v}(n) = \sum_{h=1}^N a_h v(n-h) .$$

La più semplice funzione di predizione lineare è il *ritardo unitario*

$$\hat{v}(n) = v(n-1) .$$

L'operazione di predizione introduce un ritardo fittizio all'interno della maglia priva di elementi di ritardo, rendendo il filtro nuovamente computabile. Sostituendo infatti $v(n)$ col valore predetto $\hat{v}(n)$, l'equazione alle differenze (2.33) diventa automaticamente esplicita. L'introduzione del ritardo modifica di fatto la struttura originaria del filtro numerico che perde le proprietà di passività e assenza di perdite del circuito analogico di riferimento, in quanto non ne è più l'esatto equivalente. La soluzione così ottenuta è computazionalmente poco costosa, ma rappresenta un'approssimazione che può dare origine a problemi di stabilità, soprattutto a basse frequenze di campionamento. Un esempio di utilizzo del metodo basato sul ritardo unitario è reperibile nel lavoro di Smith [24].

Capitolo 3

Strutture Wave Generalizzate

Nel Capitolo precedente si sono individuati i limiti della teoria classica WDF per la modellizzazione di sistemi fisici a parametri concentrati. Si è visto, in particolare, che è possibile descrivere nel dominio d'onda solo non linearità resistive (attriti non lineari), che risultano poco utili per modelli meccanici d'interesse acustico.

In questo Capitolo si introdurrà un'estensione della teoria classica che consente di modellare nel dominio d'onda anche non linearità con memoria. Tale estensione consente inoltre di trattare porzioni di circuito come “macro-blocchi” sia monoporta che multiporta, individualmente discretizzati, aumentando la modularità dell'approccio di sintesi. Questa particolarità tornerà particolarmente utile nella trattazione di elementi a costanti distribuite (risuonatori complessi), in quanto possono essere visti come “macro-bipoli” che si affacciano a una porta del circuito a costanti concentrate.

In conclusione si forniranno le condizioni di stabilità e passività in relazione alle estensioni apportate e si metterà in evidenza come quest'ultime conferiscano al metodo una sufficiente libertà di progettazione dovuta essenzialmente alle spiccate caratteristiche di modularità del nuovo metodo proposto.

3.1 Variabili d'onda con memoria

Si considerino le trasformate di Laplace $V(s)$ e $I(s)$ delle variabili di Kirchoff $v(t)$ e $i(t)$. Invece di definire una coppia di variabili d'onda riferite ad una generica resistenza R (si veda Sez. 2.1), si definisce (nel dominio di Laplace) la nuova coppia di variabili d'onda

$$A(s) = V(s) + Z(s)I(s), \quad B(s) = V(s) - Z(s)I(s), \quad (3.1)$$

dove $Z(s)$ è detta *impedenza di riferimento*, e può essere una qualsiasi funzione di trasferimento lineare. Grazie a questa definizione, parte della storia passata delle variabili di Kirchoff $v(t)$ e $i(t)$ è ora incorporata nelle nuove variabili d'onda $a(t)$ e $b(t)$.

Al fine di spiegare le conseguenze della precedente definizione, si darà una descrizione formale di un generico bipolo lineare e non lineare nel nuovo dominio d'onda.

3.1.1 Bipoli lineari

Per chiarire come la nuova coppia d'onde possa incorporare la storia passata delle variabili di Kirchoff, e come essa possa essere ricavata mediante un'appropriata generalizzazione della teoria dei filtri ad onda numerica, si consideri un semplice bipolo lineare, caratterizzato dalla relazione (nel dominio di Laplace) $V(s) = Z_1(s)I(s)$. Adottando la coppia d'onde (3.1), il bipolo, nel dominio d'onda di Laplace, è definito dall'equazione

$$B(s) = K(s)A(s), \quad \text{dove} \quad K(s) = \frac{Z_1(s) - Z(s)}{Z_1(s) + Z(s)},$$

il cui corrispondente discreto può essere ottenuto mediante una trasformazione bilineare. In conclusione, se Z è l'impedenza di riferimento, l'equivalente d'onda di un bipolo lineare $Z_1(s)$ diventa un filtro con funzione di trasferimento K , che deve risultare stabile e causale mediante la scelta di un appropriato valore di $Z(s)$.

Adattamento totale, parziale e istantaneo È semplice notare che scegliendo $Z = Z_1$, $K = 0$ e quindi, l'onda riflessa è identicamente nulla. È importante sottolineare che la memoria del bipolo lineare è completamente contenuta nella coppia d'onde $a(t) - b(t)$. La condizione di *adattamento totale* $Z = Z_1$ è in generale troppo forte. Dal momento che il problema principale è evitare l'insorgere di maglie prive di elementi di ritardo nella connessione dei vari *elementi d'onda*, è sufficiente richiedere l'eliminazione della parte istantanea dell'onda riflessa (*adattamento istantaneo*).

Al fine di evitare che la rappresentazione del bipolo lineare nel dominio d'onda abbia riflessione istantanea dell'onda incidente, è necessario che il filtro di riflessione discretizzato $K(z)$ non esibisca relazione istantanea tra ingresso e uscita, cioè abbia $K(z) = z^{-1}H(z)$, con $H(z)$ stabile e causale.

Assumendo che le funzioni di trasferimento del bipolo lineare e dell'impedenza di riferimento siano funzioni razionali del tipo

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{C(z)}{D(z)} = \frac{c(0) + \sum_{i=1}^N c(i)z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M d(i)z^{-i}} \\ Z_1(z) &= \frac{C_1(z)}{D_1(z)} = \frac{c_1(0) + \sum_{i=1}^{N_1} c_1(i)z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{M_1} d_1(i)z^{-i}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'assenza di riflessione istantanea è garantita dalla condizione $c(0) = c_1(0)$.

Non è difficile comprendere come siano possibili numerose altre condizioni di adattamento (*adattamento parziale*) in funzione di quanto semplice si voglia che risulti il filtro $K(z)$. In conclusione, l'impedenza caratteristica può essere scelta in maniera arbitraria, purché il filtro K soddisfi le condizioni di stabilità. L'unica limitazione che potrebbe essere richiesta, per evitare l'insorgere di anelli chiusi privi di elementi di ritardo, è sui termini $c(0)$ e $c_1(0)$ delle due funzioni di trasferimento discrete $Z(z)$ e $Z_1(z)$.

3.1.2 Bipoli non lineari - Onde di tensione

Si consideri un bipolo non lineare, caratterizzato dalla funzione $F(v, q) = 0$, dove $q(t)$ e $i(t)$ sono legati da un'equazione differenziale della forma $Q(s) = H_i(s)I(s)$ (nel dominio di Laplace). Si può notare che se $H_i(s) = 1$, l'elemento non lineare è senza memoria rispetto alle variabili v e i e, quindi, diventa una resistenza non lineare. Quando H_i è una funzione di s , l'elemento non lineare non può essere considerato istantaneo rispetto alla coppia di variabili (v, i) , ma può ancora essere considerato privo di memoria rispetto alla coppia (v, q) , ciò significa che si possono ancora utilizzare i risultati visti in Sezione 2.9 per le resistenze non lineari, purché si definisca una nuova coppia di variabili d'onda

$$a = v + \mu q, \quad b = v - \mu q,$$

dove μ è il *parametro di riferimento*. Con questa scelta, la caratteristica non lineare nel dominio d'onda diventa

$$F(v, q) = F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2\mu}\right) = f(a, b) = 0,$$

che, sotto le opportune condizioni specificate in Sezione 2.9, può essere esplicitata.

Al fine di capire come si comporta la nuova coppia di variabili d'onda, è necessario esprimerla nel dominio di Laplace, prendendo in considerazione $H_i(s)$

$$\begin{aligned} A(s) &= V(s) + \mu Q(s) = V(s) + \mu H_i(s) I(s) = V(s) + Z(s) I(s) \\ B(s) &= V(s) - \mu Q(s) = V(s) - \mu H_i(s) I(s) = V(s) - Z(s) I(s) . \end{aligned}$$

Di conseguenza, adottando la coppia di variabili (3.1), con $Z(s) = \mu H_i(s)$ e $\mu \neq 0$, la memoria del bipolo non lineare è completamente incorporata nelle variabili d'onda, e la non linearità può essere trattata come se fosse priva di memoria. Si noti come le variabili a e b sono ancora onde di tensione, ma possono essere interpretate in due modi differenti a seconda del parametro di riferimento che si prende in considerazione. Per esempio, se si considera come impedenza di riferimento $Z = \mu H_i$, si possono associare ad esse le variabili di Kirchoff

$$V = \frac{A + B}{2} , \quad I = \frac{A - B}{2\mu H_i} ,$$

mentre prendendo come parametro di riferimento μ , si possono associare le variabili

$$v = \frac{a + b}{2} , \quad q = \frac{a - b}{2\mu} .$$

3.1.3 Bipoli non lineari - Onde filtrate

Un caso più generale di non linearità con memoria è dato da un bipolo di equazione $F(p, q) = 0$, dove p e q sono legate rispettivamente alle variabili v e i , mediante equazioni differenziali del tipo

$$P(s) = H_v(s)V(s) , \quad Q(s) = H_i(s)I(s) ,$$

dove H_v e H_i sono rispettivamente i *filtri di riferimento di tensione e corrente*.

La non linearità è priva di memoria nelle variabili d'onda

$$a = p + \mu q , \quad b = p - \mu q ,$$

dove μ assume ancora il compito di *parametro di riferimento* e può essere scelto in modo arbitrario. Nel dominio di Laplace la coppia di variabili assume la seguente forma

$$\begin{aligned} A(s) &= P(s) + \mu Q(s) = H_v(s)V(s) + \mu H_i(s)I(s) \\ B(s) &= P(s) - \mu Q(s) = H_v(s)V(s) - \mu H_i(s)I(s) . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si noti che ora a e b non possono essere interpretate come onde di tensione a causa della presenza del filtro H_v applicato alla variabile di tensione v . Se il filtro H_v è invertibile in modo stabile e causale, si può definire una nuova coppia di onde di tensione a' e b'

$$\begin{aligned} A'(s) &= \frac{A(s)}{H_v(s)} = V(s) + \mu \frac{H_i(s)}{H_v(s)} I(s) = V(s) + Z(s) I(s) \\ B'(s) &= \frac{B(s)}{H_v(s)} = V(s) - \mu \frac{H_i(s)}{H_v(s)} I(s) = V(s) - Z(s) I(s) , \end{aligned} \tag{3.4}$$

la cui *impedenza di riferimento* è definita come $Z = \mu H_i / H_v$.

Le nuove onde di tensione a' e b' possono essere ottenute dalle variabili a e b attraverso l'elemento due porte tratteggiato di Fig. 3.1. Se la caratteristica del bipolo non lineare

$$F(p, q) = F\left(\frac{a + b}{2}, \frac{a - b}{2\mu}\right) = f(a, b) ,$$

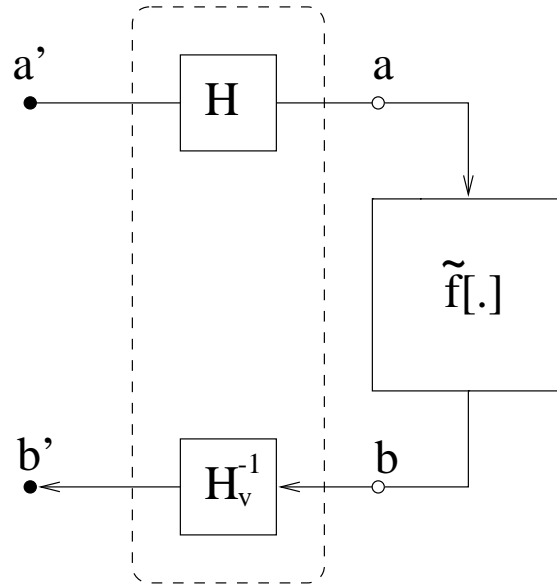


Fig. 3.1: Implementazione di un bipolo con memoria nel dominio d'onda.

può essere esplicitata nella forma $b = \tilde{f}(a)$, allora quest'ultima può essere utilizzata come rappresentazione del bipolo non lineare nel dominio d'onda.

Si noti come, nel caso $H_v = h_0$ (fattore di scala), la coppia di moltiplicatori reciproci h_0 e $1/h_0$ può essere conglobata nella non linearità che quindi diventa

$$F(p, q) = F\left(h_0 \frac{a' + b'}{2}, h_0 \frac{a' - b'}{2\mu}\right) = f(a', b') .$$

Sotto le note condizioni di esplicitabilità, questa espressione può essere riscritta nella forma

$$b' = \tilde{f}_1(a') = \frac{1}{h_0} \tilde{f}(h_0 a') ,$$

che riduce la complessità computazionale grazie all'eliminazione di due moltiplicazioni per campione.

3.2 Rifrazione

Si prenda ora in considerazione il problema di come implementare un cambio di impedenza di riferimento e, quindi, come effettuare una trasformazione di variabili d'onda. Questa operazione è infatti utile per comprendere la struttura delle giunzioni multiporta e degli adattatori, che sono gli elementi base per la costruzione di strutture ad onda numerica.

3.2.1 Onde di tensione

La giunzione di *scattering* è l'elemento due porte che permette di trasformare la coppia di variabili (a_1, b_1) , riferita all'impedenza $Z_1(s)$, nella coppia (a_2, b_2) , riferita all'impedenza $Z_2(s)$. Le variabili d'onda sono

$$\begin{aligned} A_1(s) &= V_1(s) + Z_1(s)I_1(s) & B_1(s) &= V_1(s) - Z_1(s)I_1(s) \\ A_2(s) &= V_2(s) + Z_2(s)I_2(s) & B_2(s) &= V_2(s) - Z_2(s)I_2(s) , \end{aligned}$$

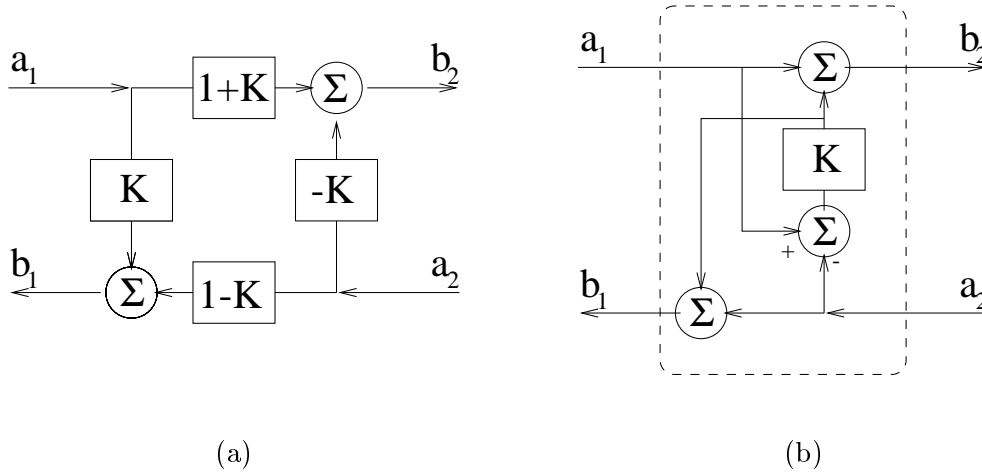


Fig. 3.2: Giunzione di scattering. (a) Implementazione diretta. (b) Implementazione ad un filtro.

dove A_1 e A_2 sono, come al solito, le onde entranti, e B_1 e B_2 le onde riflesse. La giunzione di scattering deve garantire le condizioni di continuità

$$V_1 = V_2 \quad I_1 + I_2 = 0.$$

La trasformata di Laplace delle onde riflesse può essere espressa come funzione delle onde incidenti

$$\begin{aligned} B_1(s) &= K(s)A_1(s) + (1 - K(s))A_2(s) \\ B_2(s) &= (1 + K(s))A_1(s) - K(s)A_2(s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove

$$K(s) = \frac{Z_2(s) - Z_1(s)}{Z_2(s) + Z_1(s)}$$

è la funzione di trasferimento del *filtro di riflessione* che caratterizza la giunzione di scattering con memoria e che può essere discretizzata facendo uso della trasformazione bilineare. Naturalmente sia il filtro analogico $K(s)$, che il corrispondente digitale $K(z)$ devono essere causali e stabili.

Un'implementazione diretta dell'eq. (3.5) è mostrata in Fig. 3.2 (a) e può essere implementata con solo un filtro di scattering come in Fig. 3.2 (b).

Dalla Fig. 3.2 si nota come l'onda entrante a_1 è parzialmente riflessa dal filtro K e parzialmente trasmessa dal filtro $1 + K$, mentre l'onda a_2 è parzialmente riflessa dal filtro $-K$ e parzialmente trasmessa attraverso il filtro $1 - K$.

Adattamento totale parziale e istantaneo

Quando si prende in considerazione l'implementazione digitale della giunzione di scattering, è di fondamentale importanza derivare le condizioni tali per cui le sue porte non esibiscano riflessione istantanea, altrimenti la loro interconnessione con altre porte potrebbe causare l'insorgere di maglie prive di elementi di ritardo. Al fine di evitare la riflessione istantanea delle onde incidenti alle due porte della giunzione di scattering numerica, è necessario e sufficiente che $K(z)$ non esibisca relazione istantanea tra ingresso e uscita, ad esempio $K(z) = z^{-1}K'(z)$, con $K'(z)$ stabile e causale.

Se le due impedenze di riferimento sono funzioni razionali di z del tipo

$$Z_1(z) = \frac{C_1(z)}{D_1(z)} = \frac{c_1(0) + \sum_{i=1}^{N_1} c_1(i)z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{M_1} d_1(i)z^{-i}}$$

$$Z_2(z) = \frac{C_2(z)}{D_2(z)} = \frac{c_2(0) + \sum_{i=1}^{N_2} c_2(i)z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{M_2} d_2(i)z^{-i}}. \quad (3.6)$$

La condizione di adattamento istantaneo è la stessa di quella del bipolo lineare (si veda Sez. 3.1.1), cioè $c_1(0) = c_2(0)$. Se si pone $Z_1 = Z_2$, si ha adattamento totale, e rappresenta il caso in cui la cella di scattering diventa una connessione diretta tra le due porte aventi medesima impedenza di riferimento. Infine, l'adattamento parziale è una condizione intermedia tra l'adattamento totale e istantaneo e dipende da quanto semplice si vuole che sia il filtro $K(z)$ risultante. In conclusione l'impedenza di riferimento può essere scelta in maniera arbitraria, purché $K(z)$ sia causale e stabile. L'unica limitazione che potrebbe essere richiesta per evitare l'insorgere di anelli chiusi privi di elementi di ritardo è sui termini, $c_1(0)$ e $c_2(0)$ dei numeratori di Z_1 e Z_2 .

3.2.2 Onde filtrate

Si sono già viste le equazioni (3.3) delle variabili d'onda filtrate, è quindi ragionevole chiedersi come sia la giunzione di scattering che connette due coppie di variabili di questo tipo, (a_1, b_1) e (a_2, b_2) .

Dalla definizione delle onde

$$\begin{aligned} A_1(s) &= H_{v_1}(s)V_1(s) + H_{i_1}(s)I_1(s) & B_1(s) &= H_{v_1}(s)V_1(s) - H_{i_1}(s)I_1(s) \\ A_2(s) &= H_{v_2}(s)V_2(s) + H_{i_2}(s)I_2(s) & B_2(s) &= H_{v_2}(s)V_2(s) - H_{i_2}(s)I_2(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

e dalle condizioni di continuità

$$V_1 = V_2 \quad I_1 + I_2 = 0,$$

si possono esprimere le variabili riflesse B_1 e B_2 come funzione delle variabili incidenti A_1 e A_2 . Una volta definito il filtro di riflessione

$$K(s) = \frac{H_{v_1}(s)H_{i_2}(s) - H_{v_2}(s)H_{i_1}(s)}{H_{v_1}(s)H_{i_2}(s) + H_{v_2}(s)H_{i_1}(s)},$$

si trovano due sistemi alternativi di equazioni, che rappresentano due differenti implementazioni. La prima è data da

$$\begin{aligned} B_1(s) &= K(s)A_1(s) + \frac{H_{v_1}(s)}{H_{v_2}(s)}(1 - K(s))A_2(s) \\ B_2(s) &= \frac{H_{v_2}(s)}{H_{v_1}(s)}(1 + K(s))A_1(s) - K(s)A_2(s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

e può essere implementata come in Fig. 3.3 (a), mentre la seconda è data da

$$\begin{aligned} B_1(s) &= K(s)A_1(s) + \frac{H_{i_1}(s)}{H_{i_2}(s)}(1 - K(s))A_2(s) \\ B_2(s) &= \frac{H_{i_2}(s)}{H_{i_1}(s)}(1 + K(s))A_1(s) - K(s)A_2(s) \end{aligned} \quad (3.9)$$

e può essere implementata come in Fig. 3.3 (b).

Dal momento che le due implementazioni sono equivalenti, si può scegliere quella in cui l'implementazione del filtro $H_{i_1}(s)/H_{i_2}(s)$ e $H_{v_2}(s)/H_{v_1}(s)$ è più semplice. Infatti, spesso succede che o $H_{i_1}(s)/H_{i_2}(s)$ o $H_{v_2}(s)/H_{v_1}(s)$ risultino privi di memoria, nel qual caso è richiesto un solo filtro di scattering. Si noti che si può invertire l'ordine dei due doppi bipoli tratteggiati in Fig. 3.3 (a) e (b).

Questa giunzione di scattering può essere utilizzata per connettere un bipolo reattivo qualsiasi del tipo discusso in Sezione 3.1.3, ad una rete lineare nel dominio d'onda.

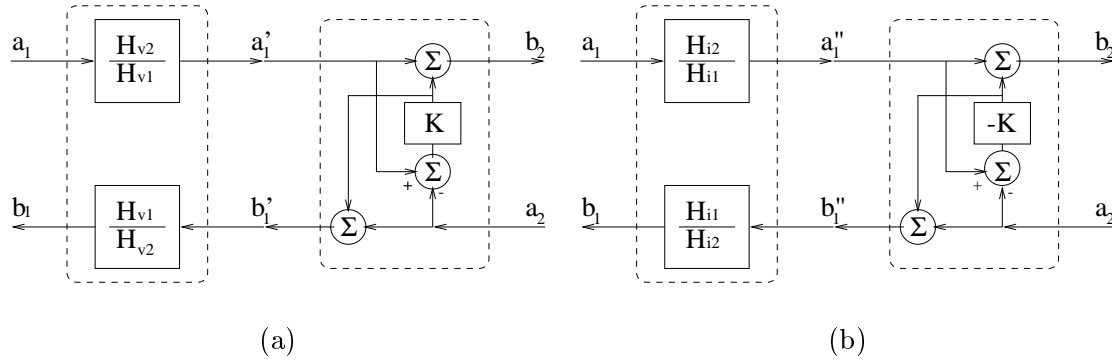


Fig. 3.3: Giunzione di scattering: due implementazioni equivalenti.

Adattamento totale istantaneo e parziale

Come visto in Sezione 3.2.1, è di fondamentale importanza derivare le condizioni per cui le porte non esibiscano riflessione istantanea. Anche in questo caso esiste un certo grado di libertà nelle condizioni di adattamento. Per esempio, si può richiedere che il filtro di riflessione diventi identicamente uguale a zero imponendo $H_{v1}H_{i2} = H_{v2}H_{i1}$. Questa condizione di *adattamento totale* è solitamente troppo restrittiva, ma si può rilassare imponendo che $K(z)$ non esibisca una relazione istantanea tra ingresso e uscita.

Si assuma che i quattro filtri H_{v1} , H_{v2} , H_{i1} e H_{i2} siano funzioni razionali di z , come in eq. (3.6). Una condizione necessaria e sufficiente per evitare la riflessione istantanea ad entrambe le porte della giunzione di scattering è

$$h_{v1}(0)h_{i2}(0) = h_{v2}(0)h_{i1}(0), \quad (3.10)$$

dove $h_{v1}(0)$, $h_{i2}(0)$, $h_{v2}(0)$ e $h_{i1}(0)$ sono rispettivamente i primi termini (a ritardo nullo) dei numeratori di H_{v1} , H_{v2} , H_{i1} e H_{i2} . Come visto nella Sezione 3.2.1 è possibile avere un'adattamento parziale, in ogni caso è sempre necessario assicurarsi che il filtro K risultante sia stabile e causale.

3.3 Rifrazione elementare - Mutatori

Le giunzioni di scattering con memoria sono strettamente legate ai mutatori analogici descritti in Appendice B. In generale i mutatori riducono il problema della sintesi di *bipoli non lineari algebrici*, definiti da una relazione algebrica tra le due variabili di Kirchoff $v^{(\alpha)}$ e $i^{(\beta)}$, dove α e $\beta \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ denotano la derivata nel tempo (se positivo) o l'integrale (se negativo) di v e i .

Un *mutatore L-R* permette, ad esempio, di trasformare una resistenza non lineare connessa alla seconda porta e definita dalla funzione caratteristica $\Gamma(v, i)$, in un induttore non lineare (visto ai capi della prima porta) avente la medesima funzione $\Gamma(\phi, i)$, nelle nuove variabili (ϕ, i) , dove ϕ , integrale nel tempo della tensione v , è il *flusso magnetico concatenato*.

La trasformazione dei bipoli mediante l'utilizzo di celle di scattering è esattamente ciò che si fa nel dominio d'onda, anche se la classe di trasformazioni nel dominio d'onda, definite in Sezione 3.2.2, è più ampia di quella dei mutatori analogici. Infatti, le variabili di Kirchoff degli elementi algebrici nel dominio di Laplace, sono della forma $V^{(\alpha)}(s) = s^\alpha V(s)$, $I^{(\alpha)}(s) = s^\alpha I(s)$, mentre gli elementi non lineari nel dominio d'onda sono descritti in funzione delle variabili $P(s) = H_v(s)V(s)$, $Q(s) = H_i(s)I(s)$. Di conseguenza, essi non coinvolgono le sole versioni integrate e derivate delle variabili v e i , ma prendono in considerazione una qualsiasi combinazione lineare di tali derivate ed integrali. L'introduzione dei mutatori nella teoria dei circuiti elettrici non lineari è motivata dal fatto che è molto più semplice ed economico implementare in maniera accurata una resistenza non lineare, piuttosto che un elemento reattivo con memoria.

L'implementazione di un elemento analogo al mutatore nel dominio d'onda permette invece, di applicare nuovamente i principi visti nel Capitolo 2 per la trattazione di una resistenza non lineare e consente di ottenere una versione d'onda computabile di una non linearità reattiva.

In questa Sezione si descriveranno gli equivalenti nel dominio d'onda di alcuni elementi non lineari, in particolare quelli che possono essere implementati mediante l'equivalente d'onda dei mutatori.

3.3.1 Condensatore non lineare: Mutatore C-R

Il *mutatore d'onda C-R* è semplicemente una giunzione di scattering tra un'impedenza di riferimento capacitiva ed una resistiva. Facendo riferimento alla Sezione 3.2.1, questa situazione può essere risolta imponendo $Z_1 = R$ e $Z_2(s) = 1/(sC)$ con $C > 0$. Il filtro di scattering

$$K(z) = \frac{Z_2(z) - R}{Z_2(z) + R}, \quad \text{dove} \quad Z_2(z) = \frac{T}{2C} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}},$$

di Fig. 3.2, risulta uguale a

$$K(z) = \frac{p + z^{-1}}{1 + pz^{-1}}, \quad \text{dove} \quad p = \frac{T - 2RC}{T + 2RC},$$

che è un filtro passa-tutto del primo ordine causale e stabile per $|p| < 1$, cioè per $R > 0$. Lo stesso risultato si può ottenere facendo riferimento alla Sezione 3.2.2, imponendo $H_{v_1} = H_{v_2} = 1$, $H_{i_1} = R$ e $H_{i_2} = 1/(sC)$ e scegliendo l'implementazione di Fig. 3.3 (a).

Si noti come si possano eliminare le riflessioni istantanee ad entrambe le porte imponendo $R = \frac{T}{2C}$, nel qual caso si ottiene $K(z) = z^{-1}$. Il simbolo e l'implementazione della cella di scattering così ottenuta è descritta in Fig. 3.4.

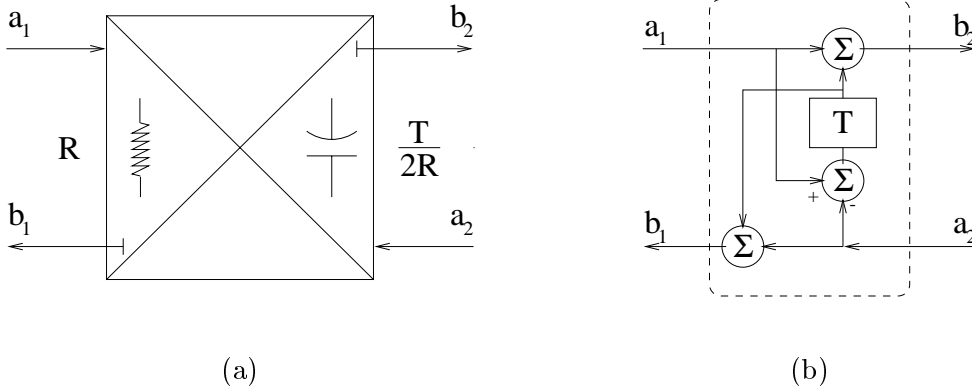


Fig. 3.4: Mutatore C-R. (a) Simbolo. (b) Struttura.

Questo risultato è interessante, poiché per adattare un'impedenza capacitiva ad una resistenza, si può utilizzare una cella di scattering il cui coefficiente di riflessione è sostituito da un ritardo puro e la cui seconda porta non è connessa. In questo caso particolare, l'intera cella di scattering può essere sostituita con un ritardo puro, come nella teoria classica dei filtri ad onda numerica [1] (si veda Sez. 2.2).

Il mutatore d'onda C-R può essere utilizzato per estendere i risultati di Meerkötter [20] per i resistori non lineari (si veda Sez. 2.9) al caso di condensatori non lineari seguendo il metodo spiegato in Sezione 3.1.2. Infatti, le variabili d'onda nel dominio di Laplace alla seconda porta sono

$$\begin{aligned} A_2(s) &= V(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V(s) + \frac{1}{C} Q(s) \\ B_2(s) &= V(s) - \frac{1}{sC} I(s) = V(s) - \frac{1}{C} Q(s). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dal momento che un condensatore non lineare è descritto da una relazione algebrica della forma $P(v, q) = 0$ tra la carica elettrica e la tensione, si può fare uso dei risultati di Sezione 2.9, dove C assume il ruolo di *capacità di riferimento* nella trasformazione affine che mappa la curva caratteristica Kirchoff del condensatore non lineare nel dominio d'onda. In conclusione, per implementare un condensatore non lineare nel dominio d'onda, è sufficiente connettere la caratteristica non lineare nel dominio d'onda $a_2 = \tilde{f}(b_2)$ alla porta capacitiva del mutatore C-R di Fig. 3.4. Questa operazione è possibile se le condizioni di esplicitabilità della caratteristica non lineare del condensatore sono soddisfatte. Si osservi dalla Fig. 3.4, che rispetto al condensatore, a_2 e b_2 rappresentano l'onda riflessa e l'onda incidente. Di conseguenza l'eq. (2.27) diventa $a_2 = \tilde{f}(b_2)$.

3.3.2 Induttore non lineare: Mutatore L-R

La giunzione di scattering tra una resistenza $Z_1 = R$ e un induttore $Z_2(s) = Ls$, con $L > 0$, può essere ricavata nella medesima maniera della cella capacitiva vista in Sez. 3.3.1. Il filtro di scattering corrispondente

$$K(z) = -\frac{p + z^{-1}}{1 + pz^{-1}}, \quad \text{dove} \quad p = \frac{T - 2L/R}{T + 2L/R},$$

è nuovamente un filtro passa-tutto, la cui stabilità è garantita dalla condizione $|p| < 1$, ovvero $R \geq 0$.

Le riflessioni istantanee possono essere eliminate ad entrambe le porte imponendo $R = 2L/T$, nel qual caso si ottiene $K(z) = -z^{-1}$, come ci si aspetta dalla teoria classica dei filtri ad onda numerica [1].

Il *mutatore L-R* così ottenuto, può essere utilizzato per implementare elementi reattivi non lineari del tipo $M(v, j) = 0$, dove $j(t) = di(t)/dt$. Questa definizione non corrisponde esattamente a quella dell'induttore non lineare, ma ha un'interpretazione significativa per i sistemi meccanici, che possono essere rappresentati mediante una relazione non lineare tra la variabile estensiva forza (tensione) e la derivata della variabile intensiva velocità (corrente). In questo caso si può procedere esattamente come per il caso del condensatore non lineare, definendo le variabili d'onda nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} A_2(s) &= V(s) + LsI(s) = V(s) + LJ(s) \\ B_2(s) &= V(s) - LsI(s) = V(s) - LJ(s), \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove $J(s)$ è la trasformata di Laplace di $j(t)$. Si può pertanto fare uso dei risultati di Sezione 2.9, dove L assume il ruolo di *induttore di riferimento* nella trasformazione affine che mappa la curva caratteristica Kirchoff dell'induttore non lineare nel dominio d'onda. In conclusione, l'implementazione nel dominio d'onda di una reattanza non lineare $M(v, j) = 0$, si riduce ad una curva non lineare d'onda del tipo $a_2 = \tilde{f}(b_2)$, connessa alla porta reattiva di un appropriato mutatore. Anche in questo caso, rispetto all'induttore, a_2 e b_2 rappresentano l'onda riflessa e l'onda incidente. Di conseguenza l'eq. (2.27) diventa $a_2 = \tilde{f}(b_2)$.

Se si vuole invece implementare un induttore non lineare, che fisicamente può essere ottenuto mediante l'avvolgimento di un conduttore attorno ad un nucleo di ferrite, è necessario definire una relazione algebrica della forma $F(\phi, i)$ tra il *flusso magnetico concatenato* ($\dot{\phi} = v$) e la corrente i . In questo caso si possono utilizzare i risultati visti in Sezione 3.1.3, con la coppia di variabili d'onda

$$\begin{aligned} A_2(s) &= P(s) + LI(s) = \frac{1}{s}V(s) + LI(s) \\ B_2(s) &= P(s) - LI(s) = \frac{1}{s}V(s) - LI(s), \end{aligned} \quad (3.13)$$

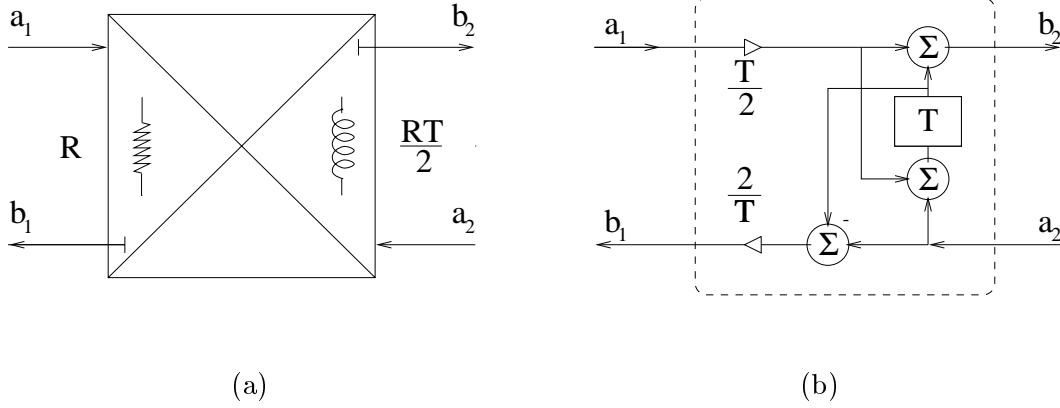


Fig. 3.5: Mutatore L-R. (a) Simbolo. (b) Struttura.

che corrispondono all'eq. (3.7), una volta assunti $H_{v_1} = 1$, $H_{v_2} = s^{-1}$, $H_{i_1} = R$ e $H_{i_2} = L$. Come visto in Sezione 3.2.2, è possibile implementare la giunzione in due differenti modi, che sono specificati dall'eq. (3.8) e (3.9). In entrambe le strutture, il filtro di riflessione è un elemento di ritardo cambiato di segno, purché la condizione di adattamento istantaneo $RT = 2L$ sia soddisfatta. La struttura di Fig. 3.3 (b) è preferibile poiché $H_{i_1}/H_{i_1} = R/L = 2/T$ è privo di memoria (fattore di scala) e può essere facilmente incluso nella caratteristica non lineare, come spiegato in Sezione 3.2.2. Una volta soddisfatte le condizioni adattamento, il mutatore L-R è implementato come in Fig. 3.5.

3.4 Giunzioni Multiporta

Il metodo proposto per ricavare la giunzione di scattering con memoria, può essere facilmente esteso alle giunzioni multiporta e agli adattatori serie e parallelo, sia nel caso di onde di tensione, che in quello di onde filtrate.

3.4.1 Onde di tensione

In questo caso le giunzioni multiporta sono strutturate come quelle istantanee viste in Sezione 2.4.1, purché i coefficienti di riflessione siano sostituiti da opportuni filtri di riflessione.

Multigiunzione serie

Si consideri una connessione serie n -porte con impedenze di riferimento $Z_1(z), \dots, Z_n(z)$ le variabili d'onda alla generica porta m sono

$$A_m(z) = V_m(z) + Z_m(z)I_m(z), \quad B_m(z) = V_m(z) - Z_m(z)I_m(z), \quad \text{con } m = 1, \dots, n.$$

Essa deve soddisfare i criteri di continuità di Kirchoff per le giunzioni serie

$$V_1(z) + \dots + V_n(z) = 0, \quad I_1(z) = \dots = I_n(z),$$

che riscritta in funzione delle variabili d'onda, assume la seguente forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_1(z) + B_1(z)}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_n(z) + B_n(z)}{2} \right) &= 0, \\ \left(\frac{A_1(z) - B_1(z)}{2Z_1(z)} \right) &= \dots = \left(\frac{A_n(z) - B_n(z)}{2Z_n(z)} \right). \end{aligned}$$

Una volta esplicitate le variabili uscenti $B_m(z)$ in funzione di quelle entranti $A_m(z)$, si ottiene

$$B_m(z) = A_m(z) - \Gamma_m(z)(A_1(z) + \dots + A_n(z)) \quad m = 1, \dots, n, \quad (3.14)$$

dove

$$\Gamma_m(z) = \frac{2Z_m(z)}{Z_1(z) + \dots + Z_n(z)} \quad (3.15)$$

sono i *filtri di riflessione*, che sono assunti causali e stabili. La giunzione è quindi caratterizzata da n filtri di riflessione $\Gamma_m(z)$, con $m = 1, \dots, n$, che devono soddisfare la relazione

$$\sum_{m=1}^n \Gamma_m(z) = 2,$$

quindi, come nel caso istantaneo, il numero di porte indipendenti è $n - 1$. Ciò permette di riscrivere l'eq. (3.14) nella forma

$$\begin{aligned} A_0(z) &= A_1(z) + \dots + A_n(z) \\ A_m(z) &= A_m(z) - \Gamma_m(z)(A_0(z)) \quad m = 1, \dots, n-1 \\ B_n(z) &= -(B_1(z) + \dots + B_{n-1}(z) + A_0(z)). \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $Z_n(z) = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k(z)$, si ottiene $\Gamma_n(z) = 1$, con il risultato che $B_n(z) = 0$ per qualsiasi valore di $A_n(z)$. In questo modo la porta n diventa priva di riflessioni istantanee (*adattamento totale*). In realtà, per garantire la computabilità del filtro, è sufficiente la condizione di *adattamento istantaneo*, cioè che $1 - \Gamma_n(z)$ sia un polinomio in z^{-1} privo di termine noto, ovvero che corrisponda a $z^{-1}H_n(z)$, con H_n stabile e causale.

Se le impedenze di riferimento sono funzioni razionali del tipo

$$Z_i(z) = \frac{C_i(z)}{D_i(z)} = \frac{c_i(0) + \sum_{m=1}^{N_i} c_i(m)z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{M_i} d_i(m)z^{-m}},$$

il filtro di riflessione può essere descritto da una funzione razionale fratta

$$1 - \Gamma_n(z) = \frac{\gamma_n(0) + \sum_{m=1}^N c_n(m)z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^M d_n(m)z^{-m}},$$

dove

$$\gamma_n(0) = \left(\sum_{m=1}^n c_m(0) \right) - 2c_n(0).$$

Condizione necessaria e sufficiente per avere adattamento istantaneo è dunque $\gamma_n(0) = 0$, che equivale a imporre $c_n(0) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m(0)$.

Si noti che per $n = 2$, la condizione si riduce a $c_2(0) = c_1(0)$ già vista in Sezione 3.2.1.

È inoltre possibile ottenere condizioni di adattamento intermedie (*adattamento parziale*) in cui il filtro $1 - \Gamma_n(z)$ è uguale a $z^{-i}H_n(z)$, con H_n causale e stabile.

Multigiunzione parallelo

Le equazioni della multigiunzione parallelo n -porte, con impedenze di riferimento $Z_1(z), \dots, Z_n(z)$, si ricavano in maniera analoga a quanto fatto per le connessioni serie. Una volta imposte le condizioni di continuità per le giunzioni parallelo

$$V_1(z) = \dots = V_n(z), \quad I_1(z) + \dots + I_n(z) = 0,$$

e esplicitate le variabili B_m in funzione delle variabili A_m , si ottiene

$$B_m(z) = (\Gamma_1(z)A_1(z) + \dots + \Gamma_n(z)A_n(z)) - A_m(z), \quad \text{con } m = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

dove

$$\Gamma_m(z) = \frac{2Z_m^{-1}(z)}{Z_1^{-1}(z) + \dots + Z_n^{-1}(z)}, \quad Z_m^{-1}(z) = \frac{1}{Z_m(z)},$$

sono i filtri di riflessione che, per la realizzabilità del filtro, devono essere causali e stabili. Anche in questo caso i filtri di riflessione soddisfano la condizione

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k(z) = 2,$$

che rende il numero di porte indipendenti uguali a $n - 1$. Scegliendo la porta n come porta dipendente, un modo comodo per scrivere l'equazione (3.16) è il seguente

$$\begin{aligned} B_n(z) &= A_n(z) - \sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_m(z)(A_n(z) - A_m(z)) \\ B_m(z) &= B_n(z) + (A_n(z) - A_m(z)) \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Affinché la porta n non presenti riflessione, si può imporre $\Gamma_n(z) = 1$, che equivale a scrivere $Z_n^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k^{-1}(z)$. In questo caso la variabile $B_n(z)$ è identicamente uguale a zero e la porta n è detta *totalmente adattata*.

Si supponga che le impedenze di riferimento siano funzioni razionali del tipo

$$\begin{aligned} Z_i(z) &= \frac{C_i(z)}{D_i(z)} = \frac{c_i(0) + \sum_{m=1}^{N_i} c_i(m)z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{M_i} d_i(m)z^{-m}} \\ Z_i^{-1}(z) &= \frac{D_i(z)}{C_i(z)} = \frac{1 + \sum_{m=1}^{M_i} d_i(m)z^{-m}}{c_i(0) + \sum_{m=1}^{N_i} c_i(m)z^{-m}}; = \frac{c_i(0)^{-1} + \sum_{m=1}^{M_i} c_i(0)^{-1}d_i(m)z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{N_i} c_i(0)^{-1}c_i(m)z^{-m}}, \end{aligned}$$

in questo caso il filtro di riflessione è descritto dall'equazione razionale

$$\Gamma_n(z) - 1 = \frac{\gamma_n(0) + \sum_{m=1}^N c_n(m)z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^M d_n(m)z^{-m}},$$

dove

$$\gamma_n(0) = \left(\sum_{m=1}^n c_m(0)^{-1} \right) - 2c_n(0)^{-1}.$$

Se si vuole imporre che il filtro $\Gamma_n(z) - 1$ sia privo di riflessione istantanea (*adattamento istantaneo*), è sufficiente imporre $\gamma_n(0) = 0$, ossia $c_n(0)^{-1} = \sum_{m=1}^{n-1} c_m(0)^{-1}$. La condizione di *adattamento parziale* rappresenta una situazione intermedia tra l'adattamento totale e quello istantaneo e permette di semplificare il filtro di riflessione risultante.

Sia per le multigiunzioni serie, che per quelle parallelo, è molto frequente il caso in cui un bipolo lineare reattivo, connesso alla porta k , abbia funzione di trasferimento uguale all'impedenza di riferimento della porta. In questo caso il filtro di riflessione del bipolo diventa uguale a zero, analogamente a quanto succede in Sezione 2.2 nel caso di resistenze lineari adattate, e la corrispondente giunzione di porta può essere lasciata sconnessa. La memoria del bipolo reattivo è completamente inglobata nella giunzione serie e l'implementazione del filtro risulta notevolmente semplificata, come si vedrà negli esempi di applicazione dei prossimi Capitoli.

3.4.2 Onde filtrate

In generale, è sempre possibile usare onde di tensione per caratterizzare le porte del circuito, eccetto dove la caratteristica non lineare è descritta in termini di onde filtrate. Come visto in Sezione 3.1.3, le onde filtrate possono essere trasformate in onde di tensione attraverso un doppio bipolo come quello tratteggiato in Fig. 3.1. Ciò permette l'implementazione di una giunzione multiporta per onde filtrate mediante l'aggiunta di tali elementi alle porte di una giunzione di onde di tensione. Questa soluzione non è molto efficiente a causa del numero elevato di filtri da realizzare. È quindi utile mostrare come si ricavano le giunzioni multiporta nel caso di onde filtrate.

Multigiunzione serie

Si consideri una giunzione serie n -porte, ad ogni porta m , con $m = 1, \dots, n$, sono definite le variabili d'onda filtrate

$$\begin{aligned} A_m(z) &= P_m(z) + Q_m(z) = H_{v_m}(z)V_m(z) + H_{i_m}(z)I_m(z) \\ B_m(z) &= P_m(z) - Q_m(z) = H_{v_m}(z)V_m(z) - H_{i_m}(z)I_m(z) . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Applicando le condizioni di continuità

$$V_1(z) + \dots + V_n(z) = 0 , \quad I_1(z) = \dots = I_n(z) ,$$

si ottiene, una volta esplicitate le variabili uscenti rispetto a quelle entranti,

$$B_m(z) = A_m(z) - \Gamma_m(z) \left(\frac{A_1(z)}{H_{v_1}(z)} + \dots + \frac{A_n(z)}{H_{v_n}(z)} \right) \quad m = 1, \dots, n , \quad (3.18)$$

dove

$$\Gamma_m(z) = \frac{2H_{i_m}(z)}{H_{i_1}(z)/H_{v_1}(z) + \dots + H_{i_n}(z)/H_{v_n}(z)} , \quad (3.19)$$

è il filtro di riflessione alla generica porta m .

Nel caso si voglia rendere la porta m priva di riflessioni (*adattamento totale*) è sufficiente imporre

$$1 - \frac{\Gamma_m(z)}{H_{v_m}(z)} = 1 - \frac{2H_{i_m}(z)/H_{v_m}(z)}{H_{i_1}(z)/H_{v_1}(z) + \dots + H_{i_n}(z)/H_{v_n}(z)} = 0 ,$$

che equivale a

$$\frac{H_{i_m}(z)}{H_{v_m}(z)} = \sum_{k=1, k \neq m}^n \frac{H_{i_k}(z)}{H_{v_k}(z)} .$$

Si assuma che i filtri $H_{i_m}(z)$, $H_{v_m}(z)$ e $1 - \Gamma_m(z)/H_{v_k}(z)$ siano funzioni razionali del tipo di eq. (3.6), si può dimostrare che

$$\gamma_m(0) = 1 - \frac{2h_{i_m}(0)/h_{v_m}(0)}{h_{i_1}(0)/h_{v_1}(0) + \dots + h_{i_n}(0)/h_{v_n}(0)} ,$$

dove $\gamma_m(0)$, $h_{i_m}(0)$ e $h_{v_m}(0)$ rappresentano rispettivamente termini noti dei numeratori di $1 - \Gamma_m(z)/H_{v_m}(z)$, $H_{i_m}(z)$ e $H_{v_m}(z)$. Imponendo $\gamma_m(0) = 0$, ossia

$$\frac{h_{i_m}(0)}{h_{v_m}(0)} = \sum_{k=1, k \neq m}^n \frac{h_{i_k}(0)}{h_{v_k}(0)} ,$$

la porta m non presenta riflessioni istantanee, e quindi è *istantaneamente adattata*. Il filtro $1 - \Gamma_m(z)/H_{v_m}(z)$ assume forma del tipo $z^{-1}H_m(z)$, dove $H_m(z)$ deve essere causale e stabile per la realizzabilità dell'implementazione numerica.

È utile sottolineare come per $n = 2$ la condizione di adattamento istantaneo diventa

$$\frac{h_{i_2}(0)}{h_{v_2}(0)} = \frac{h_{i_1}(0)}{h_{v_1}(0)} ,$$

esattamente identica all'eq. (3.10) di Sezione 3.2.2.

Multigiunzione parallelo

Nel caso della multigiunzione parallelo le n variabili d'onda descritte dall'eq. (3.17) devono soddisfare le condizioni di continuità

$$V_1(z) = \dots = V_n(z) , \quad I_1(z) + \dots + I_n(z) = 0 .$$

Una volta esplicitate, si ottiene

$$B_m(z) = \left(\Gamma_1(z) \frac{A_1(z)}{H_{i_1}(z)} + \dots + \Gamma_n(z) \frac{A_n(z)}{H_{i_n}(z)} \right) - A_m(z) \quad m = 1, \dots, n , \quad (3.20)$$

dove

$$\Gamma_m(z) = \frac{2H_{v_m}(z)}{H_{v_1}(z)/H_{i_1}(z) + \dots + H_{v_n}(z)/H_{i_n}(z)} ,$$

è nuovamente il filtro di riflessione alla porta m . L'*adattamento totale* alla porta generica m si ottiene imponendo

$$\frac{\Gamma_m(z)}{H_{i_m}(z)} - 1 = \frac{2H_{v_m}(z)/H_{i_m}(z)}{H_{v_1}(z)/H_{i_1}(z) + \dots + H_{v_n}(z)/H_{i_n}(z)} - 1 = 0 ,$$

che equivale a

$$\frac{H_{v_m}(z)}{H_{i_m}(z)} = \sum_{k=1, k \neq m}^n \frac{H_{v_k}(z)}{H_{i_k}(z)} .$$

Se si assume che i filtri $H_{i_m}(z)$, $H_{v_m}(z)$ e $\Gamma_m(z)/H_{i_m}(z) - 1$ siano funzioni razionali del tipo di eq. (3.6), si può dimostrare che

$$\gamma_m(0) = 1 - \frac{2h_{v_m}(0)/h_{i_m}(0)}{h_{v_1}(0)/h_{i_1}(0) + \dots + h_{v_n}(0)/h_{i_n}(0)} ,$$

dove $\gamma_m(0)$, $h_{i_m}(0)$ e $h_{v_m}(0)$ rappresentano rispettivamente i primi termini (a ritardo nullo) dei numeratori di $\Gamma_m(z)/H_{i_m}(z) - 1$, $H_{i_m}(z)$ e $H_{v_m}(z)$.

La condizione necessaria e sufficiente affinché la porta m sia *istantaneamente adattata* è quindi $\gamma_m(0) = 0$, ossia

$$\frac{h_{v_m}(0)}{h_{i_m}(0)} = \sum_{k=1, k \neq m}^n \frac{h_{v_k}(0)}{h_{i_k}(0)} .$$

Anche in questo caso bisogna verificare che il filtro risultante sia stabile e causale.

3.5 Passività e assenza di perdite delle giunzioni multiporta

Un problema importante che fino ad ora non è stato considerato è la *passività* e l'*assenza di perdite* delle giunzioni multiporta con memoria definite nelle Sezioni precedenti.

Nella teoria classica dei filtri ad onda numerica, al fine di definire proprietà quali, passività, assenza di perdita o assenza di energia, è definita una funzione di *pseudopotenza* [1, 6] che permette dimostrare che:

- gli adattatori (parallelo e serie), i trasformatori lineari, i giratori e i circolatori sono non energetici;
- gli elementi reattivi (induttori e capacità) e la linea di ritardo unitaria sono privi di perdita;
- le resistenze sono passive.

La definizione di pseudopotenza, comunque, non è d'aiuto per dimostrare la passività dei mutatori d'onda definiti nelle Sezioni precedenti, dal momento che agli elementi di ritardo utilizzati per implementare il filtro di riflessione non possono essere assegnati dei valori significativi di resistenza di porta. Al fine di dimostrare la passività dei mutatori d'onda, è pertanto necessario aggiungere alcune informazioni riguardo l'interpretazione fisica delle variabili d'onda definite in Sezione 3.1.

Si consideri una giunzione di scattering con memoria n -porta, definita da una coppia di variabili d'onda di tensione (a_k, b_k) , e le relative impedenze di porta $Z_k(z)$ che si ipotizzano essere stabili e causali, con $k = 1, \dots, n$.

Le onde di tensione sono legate alle corrispondenti onde di corrente (\hat{a}_k, \hat{b}_k) , con $k = 1, \dots, n$, attraverso la seguente relazione

$$A_k(z) = \hat{A}_k(z)Z_k(z), \quad B_k(z) = \hat{B}_k(z)Z_k^*\left(\frac{1}{z^*}\right), \quad \text{con } k = 1, \dots, n, \quad (3.21)$$

che è perfettamente compatibile con la teoria classica dei parametri di scattering [8] e la sua controparte ad onda numerica [9, 6].

Dal momento che le impedenze $Z_k(z)$, $k = 1, \dots, n$, sono assunte causali e stabili, esse sono analitiche in $|z| \geq 1$. La potenza complessa netta entrante nella giunzione n -porte è quindi data da

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_k = \sum_{k=1}^n \left(\hat{A}_k + \hat{B}_k \right)^{(*)} (A_k + B_k),$$

dove l'asterisco tra le parentesi $(*)$ denota l'operazione di paraconiugazione, per esempio $H^{(*)}(z) = H^*(1/z^*)$. Utilizzando l'eq. (3.21), la potenza complessa netta entrante può essere riscritta come

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^n \left(\overline{\mathcal{P}}_k^+ - \overline{\mathcal{P}}_k^- \right) + \sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathcal{P}}_k - \tilde{\mathcal{P}}_k^* \right),$$

dove $\overline{\mathcal{P}}_k^+ = \hat{A}_k^{(*)} Z_k \hat{A}_k$ e $\overline{\mathcal{P}}_k^- = \hat{B}_k^{(*)} Z_k^{(*)} \hat{B}_k$ sono rispettivamente le potenze reali e non-negative entranti e uscenti dalla giunzione attraverso la k -esima porta. Analogamente, $\tilde{\mathcal{P}}_k^+ - \tilde{\mathcal{P}}_k^* = \hat{B}_k^{(*)} Z_k \hat{A}_k - \hat{A}_k^{(*)} Z_k^{(*)} \hat{B}_k$ rappresenta la potenza immaginaria puramente reattiva scambiata attraverso la k -esima porta. È abbastanza chiaro che, per garantire la passività della giunzione, si debba imporre $\overline{\mathcal{P}}^+ + \overline{\mathcal{P}}^- \geq 0$ per $|z| \geq 1$, dove

$$\overline{\mathcal{P}}^+ = \sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{P}}_k^+, \quad \overline{\mathcal{P}}^- = \sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{P}}_k^-.$$

Ancora una volta, si può far uso dell'eq. (3.21) per riscrivere la condizione di passività come di seguito

$$\sum_{k=1}^n \hat{B}_k^{(*)} (Z_k + Z_k^{(*)}) \hat{B}_k \geq 0. \quad (3.22)$$

Dal momento che tutti i termini della somma di eq. (3.22) sono reali e non negativi, la condizione di passività può essere riscritta come segue

$$Z_k(z) + Z_k^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \geq 0, \quad \text{con } k = 1, \dots, n.$$

In particolare se

$$Z_k(z) + Z_k^* \left(\frac{1}{z^*} \right) = 0, \quad \text{con } k = 1, \dots, n, \quad (3.23)$$

allora la giunzione è detta *priva di perdite*. Le impedenze che soddisfano questa condizione sono dette para-hermitiane diagonali [8].

Come esempio di applicazione, si consideri il caso di un mutatore d'onda L-R discusso in Sezione 3.3.2. In questo caso, si ha che

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= R \\ Z_2(z) &= sL \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{2L}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \end{aligned}$$

Si noti che

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= R = -(-R) = -Z_1^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \\ Z_2(z) &= \frac{2L}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = -\frac{2L}{T} \frac{z-1}{z+1} = -Z_2 \left(\frac{1}{z^*} \right), \end{aligned}$$

quindi il mutatore L-R è privo di perdite. L'assenza di perdite per il mutatore C-R può essere dimostrata in maniera simile.

3.6 Conclusioni

In questo Capitolo si è vista un'estensione dei filtri ad onda numerica classica, che ha permesso di poter trattare non linearità reattive con gli stessi metodi delle non linearità istantanee viste nel Capitolo 2.9. Si può notare come la costruzione delle strutture ad onda numerica così estesa, sia caratterizzata da un certo grado di libertà, che può essere attribuito alle seguenti cause:

- scelta di diversi tipi di variabili d'onda;
- grado di adattamento delle porte delle giunzioni e dei bipoli;
- scelta di diverse strutture equivalenti.

Questo aumento di gradi di libertà deve comunque, tenere conto delle seguenti limitazioni:

- adattamento istantaneo delle giunzioni di porta, dove sia necessario;
- stabilità e causalità dei filtri di tensione e corrente e dei loro reciproci;
- stabilità e causalità dei filtri di riflessione.

Nel corso del Capitolo si sono fornite le condizioni di adattamento istantaneo alle porte della giunzione di scattering e della multigiunzione con memoria.

Quando la scelta delle variabili è suggerita da strutture fisiche di un circuito analogico stabile, la seconda condizione è automaticamente soddisfatta.

Per quanto riguarda la terza problematica, nella Sezione precedente si è dimostrato che se i filtri di riferimento alle n porte di una giunzione di multiporta generalizzata sono passivi, lo è anche la giunzione stessa e quindi anche i filtri di riflessione che la definiscono.

Se si considera l'inserzione di un mutatore C-R o L-R all'interno di un filtro WDF passivo e stabile, la sua proprietà di assenza di perdita non altera le caratteristiche di passività e stabilità dello stesso.

Capitolo 4

Strutture Risonanti

La teoria WDF vista nei due Capitoli precedenti, permette la gestione di sistemi fisici a parametri concentrati. In realtà le strutture fisiche degli strumenti acustici, presentano porzioni modellabili con elementi a costanti distribuite. Ad esempio, risuonatori, membrane, tavole armoniche, tubi acustici e corde, sono descritti da un'equazione differenziale alle derivate parziali e perciò, per esse, la descrizione circuitale dei Capitoli 2 e 3 risulta insufficiente. D'altro canto, come si è visto nel Capitolo 3, la struttura WGF generalizzata può essere interfacciata con “macro-blocchi” lineari e non lineari, attraverso una o più porte compatibili con la descrizione d'onda.

Lo scopo di questo Capitolo è di individuare una classe di elementi a costanti distribuite che si prestino all'integrazione nelle strutture precedentemente viste e fornire indicazioni precise su come tale integrazione possa avvenire.

4.1 Guide d'onda numeriche (WGF)

Negli strumenti musicali esistono strutture fisiche preposte alla produzione del suono che sono definite da un'equazione d'onda. Si consideri, ad esempio, uno strumento a corda, la generazione del suono è in prima approssimazione imputabile alla vibrazione della corda stessa, in seguito ad un'azione di eccitazione, come strofinamento (violino) o percussione (pianoforte) ecc.. Il comportamento della corda è descrivibile mediante un'equazione d'onda monodimensionale, la cui soluzione è rappresentata da due onde che si propagano indisturbate in direzioni opposte; una volta giunte alle terminazioni della stessa, esse vengono riflesse (completamente o in parte) instaurando il meccanismo di vibrazione che produce il suono. Anche nel caso di uno strumento a fiato, la produzione del suono è dovuta ad onde monodimensionali di pressione che si propagano e si riflettono all'interno di un tubo acustico. Strutture più complesse possono essere definite da equazioni d'onda bidimensionali (membrane) oppure tridimensionali (strutture riverberanti, campane ecc.).

In questa sezione si introdurrà un modello basato su filtri a guida d'onda WGF [77, 80, 81] (che ben si presta per la descrizione di questo tipo di strutture fisiche) limitatamente al caso monodimensionale, lasciando i casi 2D e 3D a eventuali estensioni di questo lavoro. In particolare, si analizzeranno le modalità di vibrazione di una corda elastica reale che costituirà uno dei casi di studio presentati nel Capitolo 4. Questi risultati sono comunque applicabili a qualunque struttura fisica definita da un'equazione d'onda monodimensionale come, ad esempio, un tubo acustico (modello fluidodinamico), o una linea di trasmissione (modello elettrico).

Il fondamento teorico della tecnica di sintesi WGF [77, 80, 81] risiede nella soluzione analitica delle equazioni di propagazione delle onde e nella loro discretizzazione. Ciò conduce ad un modello che conserva completamente la struttura del mezzo fisico di riferimento. In particolare si ha che:

- la geometria del risuonatore fisico si conserva nella discretizzazione e consente di mettere

in corrispondenza punti della struttura analogica con punti della struttura numerica;

- vi è corrispondenza fra grandezze misurabili in qualunque punto della struttura fisica e quelle prelevabili dal corrispondente punto della struttura numerica.

4.1.1 Corda Ideale

Una corda perfettamente elastica è definita da un'equazione d'onda del tipo

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

y = spostamento trasversale della corda,

dove T = tensione della corda;

σ = densità lineare della massa della corda.

Anziché discretizzare numericamente l'eq. (4.1), si procede a trovarne una soluzione in forma chiusa. Un'autofunzione dell'eq. (4.1) è

$$y(t, x) = e^{st+vx} \quad (4.2)$$

che sostituita fornisce

$$Tv^2 = \sigma s^2 y,$$

Posto $c_0^2 = \frac{T}{\sigma}$, si ottiene

$$v^2 = \frac{s^2}{c_0^2}.$$

L'autosoluzione è pertanto

$$y = e^{st+vx} = \exp\left(st \pm s \frac{x}{c_0}\right)$$

che è esprimibile come somma di due contributi che si propagano indistorti in direzioni opposte a velocità c_0

$$y(x, t) = y^+\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + y^-\left(t + \frac{x}{c_0}\right).$$

Una volta ottenuta la soluzione in forma chiusa, si può passare alla sua discretizzazione in modo da poterla simulare al calcolatore. Allo scopo si campiona nel tempo ad intervalli di T_c e nello spazio ad intervalli $X_c = c_0 T_c$, ottenendo la soluzione numerica ottenendo lo schema di realizzazione di Fig. 4.1.

$$y(n, m) = y^+(n - m) + y^-(n + m).$$

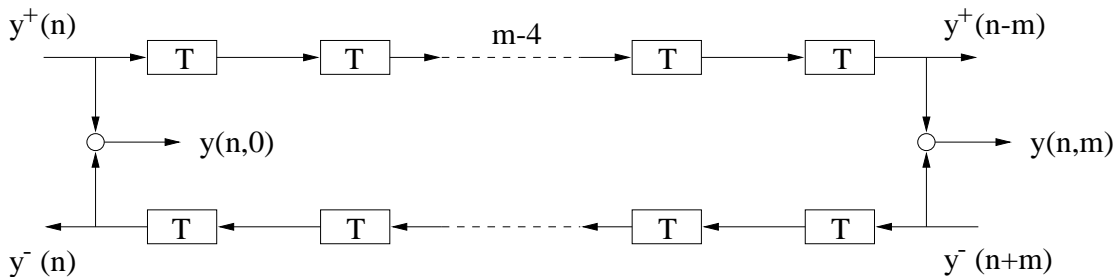


Fig. 4.1: Rappresentazione numerica di un tratto di corda ideale di lunghezza $X_m = mc_0 T_c$.

4.1.2 Corda ideale con perdite

L'equazione d'onda vista nei paragrafi precedenti è supposta ideale, ovvero priva di perdite distribuite e priva di rigidità. Volendo tenere conto di perdite distribuite (per attrito interno o per attrito viscoso), occorre modificare l'equazione d'onda come segue

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (4.3)$$

Il nuovo termine γ , rappresenta un coefficiente di attrito (in questo caso attrito viscoso).

Sostituendo nuovamente l'eq. (4.2) nell'equazione differenziale, si ottiene

$$v^2 = \frac{s^2}{c_0^2} 1 + \left(\frac{\gamma}{\sigma s} \right).$$

Nell'ipotesi che nel campo di frequenze di interesse sia $\left| \frac{\gamma}{\sigma s} \right| \ll 1$ (approssimazione di piccole perdite), vale la seguente approssimazione

$$v = \pm \frac{s}{c_0} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sigma s}} \approx \pm \frac{s}{c_0} \left(1 + \frac{\gamma}{2\sigma s} \right) = \pm \frac{1}{c_0} \left(s + \frac{\gamma}{2\sigma} \right).$$

L'autosoluzione ha la seguente forma

$$y = e^{st+vx} = \exp \left[st \pm \left(s + \frac{\gamma}{2\sigma} \right) \frac{x}{c_0} \right] = \exp \left(st \pm s \frac{x}{c_0} \right) \exp \pm \frac{\gamma x}{2\sigma c_0},$$

da cui si ottiene la seguente soluzione generale

$$u(x, t) = y^+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \exp \left(-\frac{\gamma x}{2\sigma c_0} \right) + y^- \left(t + \frac{x}{c_0} \right) \exp \left(\frac{\gamma x}{2\sigma c_0} \right). \quad (4.4)$$

La discretizzazione di tale soluzione può essere ottenuta per campionamento, ponendo $t = nT_c$ e $x = c_0 T_c$. Il risultato è il seguente

$$y(n, m) = g^{-m} y^+(n - m) + g^m y^-(n + m),$$

dove $g = \exp \left(-\frac{\gamma x}{2\sigma c_0} \right)$.

Come si può notare in Fig. 4.2 (a), la realizzazione di guide d'onda dissipative può essere effettuata come una cascata di celle di ritardo unitarie, ciascuna seguita da un moltiplicatore per la costante g . Poiché nulla cambia se si inverte l'ordine di ritardi e fattori di scala, è possibile, come in Fig. 4.2 (b), raggruppare alla fine di una catena di ritardi consecutivi le perdite, rimuovendole dai tratti di corda ai quali non si prevede di accedere. In questo modo senza aggiungere approssimazioni all'eq. (4.4), si è giunti ad uno schema di calcolo che, per ogni campione di uscita, prevede l'aggiornamento di due puntatori a due buffer circolari (rappresentanti le linee di ritardo) e due moltiplicazioni per il fattore di perdita concentrato g^m . Il modello di corda, così ottenuto, è però assai lontano dal fornire risultati acusticamente plausibili. Infatti negli strumenti reali le perdite sono maggiori alle alte frequenze, in particolare il ponte e l'aria agiscono come un filtro passa-basso. Ciò corrisponde a tenere conto di termini di ordine superiore nell'eq. (4.3): è infatti sicuramente presente un addendo $-\alpha \frac{\partial^3 y}{\partial t^3}$, dove α è la resistenza di radiazione per unità di lunghezza. Un'analisi più accurata farebbe vedere il ponte come un filtro, la cui risposta in frequenza presenta dei picchi in corrispondenza delle risonanze della cassa dello strumento.

Fortunatamente lo schema di Fig. 4.2 (b) è ancora valido, a patto di sostituire g^m con un opportuno filtro $G(\lambda)$, rappresentante la risposta in frequenza delle perdite nella corda reale.

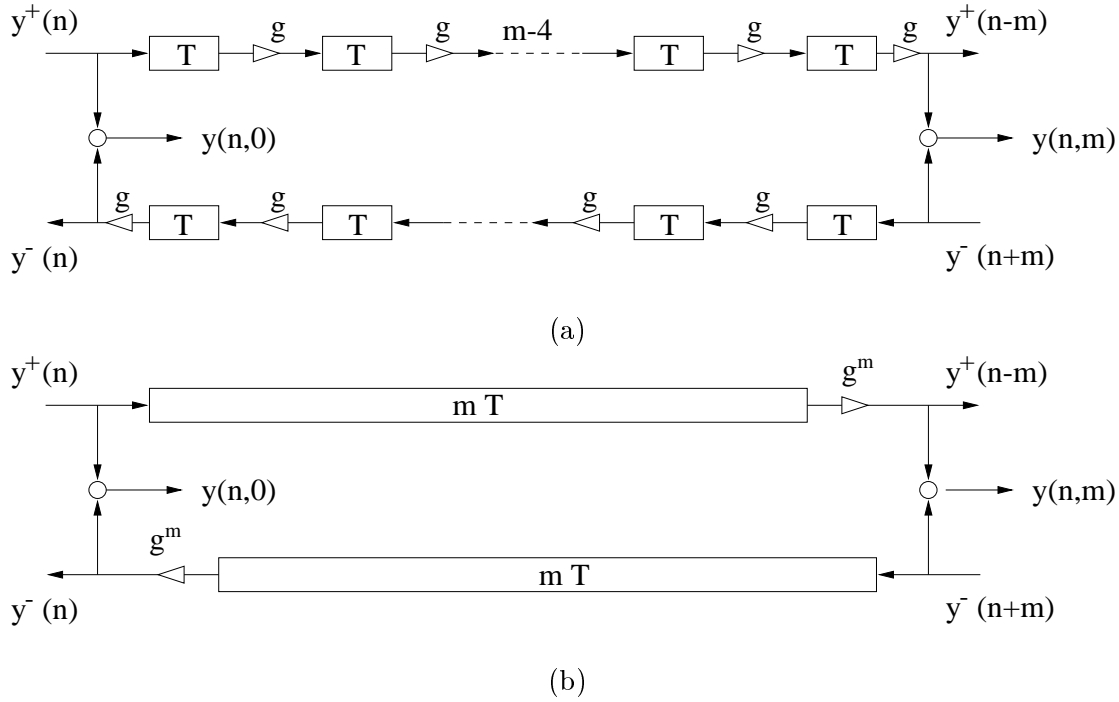


Fig. 4.2: Tratto di corda con perdite di lunghezza $X_m = mc_0 T_c$. (a) Rappresentazione con perdite distribuite. (b) Rappresentazione con perdite concentrate.

È desiderabile che il filtro $G(\lambda)$ abbia fase lineare per non incorrere in stonature delle parziali rispetto alla frequenza fondamentale. Poiché la sensazione di altezza dipende da tutte le armoniche, accade che, a causa di un diverso tempo di decadimento per ogni armonica, si percepisca uno spostamento d'altezza della nota durante il suo decadimento. Il metodo più semplice di sintesi di un filtro a fase lineare è la progettazione di un filtro FIR con risposta impulsiva simmetrica.

Imponendo

- la simmetria dei campioni della risposta impulsiva;
- il guadagno in continua unitario $G(0) = 1$;
- il valore del guadagno a frequenze note $G(\bar{\lambda}) = \bar{G}$ sulla base di misure sperimentali;

si può ottenere un filtro FIR $G(\lambda)$ che approssima l'andamento reale delle perdite con un grado di accuratezza grande a piacere. Dal momento che un filtro FIR simmetrico e causale di ordine N introduce un ritardo di fase aggiuntivo pari a $T N/2$, il ritardo effettivo dei rami del filtro a guida d'onda di Fig. 4.2 (b) diventa pari a $m + N/2$. Ciò comporta un indesiderato shift della frequenza fondamentale di risonanza da $f_0 = F_c/m$ a $f'_0 = F_c/(m + N/2)$. È possibile eliminare questo inconveniente, riducendo il numero delle celle di ritardo dei rami a $m - N/2$ come in Fig. 4.3.

4.1.3 Corda con rigidità senza perdite

In questa Sezione si abbandona l'ipotesi di idealità della corda che ha guidato l'analisi svolta in precedenza. In particolare si assume che la corda sia rigida e abbia un modulo di elasticità di Young Q [106, 109, 94]. In questo modo si tiene conto del fenomeno assai rilevante musicalmente, del ritardo selettivo in frequenza delle armoniche della corda e quindi dell'inarmonicità del suono prodotto. Trascurando per il momento le perdite, il moto della corda è governato dalla seguente

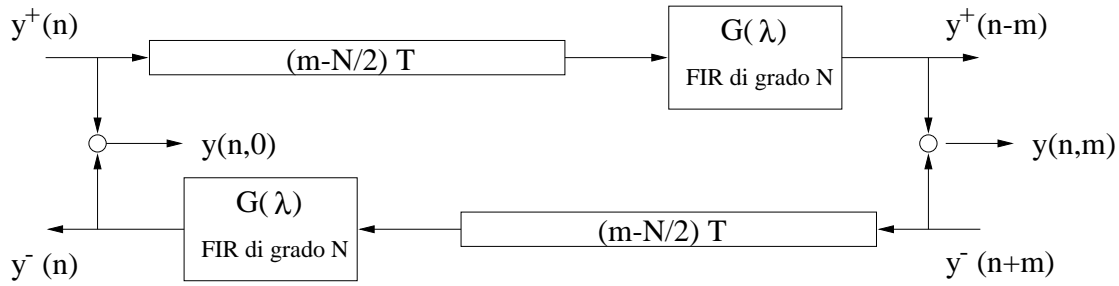


Fig. 4.3: Rappresentazione numerica di un tratto di corda di lunghezza $X_m = mc_0T_c$ con perdite variabili in frequenza.

equazione

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.5)$$

dove $k = Q\pi r^4/2$ è la costante di inarmonicità e r è il raggio della corda. Come al solito, inserendo l'autofunzione $y(t, x) = e^{st+vx}$ nell'eq. (4.5), si ottiene

$$\sigma s^2 = Tv^2 - kv^4,$$

da cui, posto $k_0 = k/T$, si può ricavare

$$v^2 = \frac{1}{2k_0} \pm \sqrt{\frac{1}{k_0^2} - 4s^2 \frac{\sigma}{k}} = \frac{1}{2k_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\sigma s^2 \frac{k_0}{T}} \right),$$

Risulta quindi che v è legata a s tramite il radicale doppio seguente

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 4s^2 \frac{k_0}{c_0^2}}},$$

Ponendo $s = j\omega$, si ottiene la seguente espressione per la velocità di fase

$$c(\omega) = \sqrt{2k_0} \frac{j\omega}{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + 4\omega^2 \frac{k_0}{c_0^2}}}}, \quad (4.6)$$

nella quale il segno sotto il radicale più esterno andrà scelto in modo da garantire un risultato reale. Come si vede, la velocità di fase dipende dalla frequenza e, quindi, non è possibile fornire una soluzione generale simile all'eq. (4.4) in termini di forme d'onda che si muovono nelle due direzioni. Una forma d'onda costruita in $x = 0$ si disperde propagandosi nel mezzo rigido, in quanto le più alte componenti spettrali viaggiano più velocemente. Il mezzo dispersivo impone di riscrivere la relazione tra i quanti spaziali e temporali come

$$X = c(\omega)T(\omega) \quad \text{ovvero} \quad T(\omega) = \frac{X}{c(\omega)} = \frac{c_0 T_c}{c(\omega)}.$$

Il ritardo unitario z^{-1} viene in questo caso rimpiazzato da $z^{-\frac{T(\omega)}{T_c}}$ e gli elementi della linea di ritardo diventano filtri passa-tutto che forniscono un'approssimazione razionale della caratteristica di fase $z^{-\frac{T(\omega)}{T_c}}$.

Un tratto di corda rigida priva di perdite può essere simulato con lo schema di Fig. 4.4 (a), nel quale $H_a(z)$ rappresenta la funzione di trasferimento del filtro passa-tutto che simula le

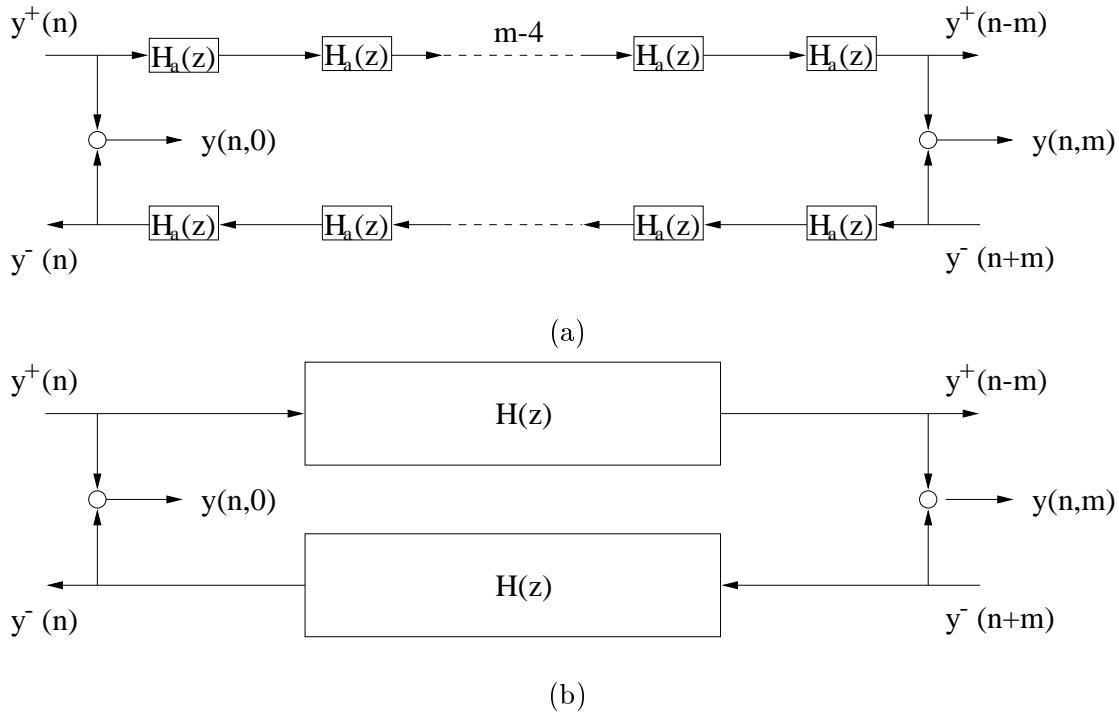


Fig. 4.4: Tratto di corda rigida di lunghezza $X_m = mc(\omega)T(\omega)$ priva di perdite. (a) Rappresentazione con filtri passa-tutto distribuiti. (b) Rappresentazione con filtro passa-tutto concentrato.

dispersioni in un tratto di corda lungo X . Dall'eq. (4.6) si può ricavare la caratteristica di fase che si vuole approssimare in funzione della frequenza normalizzata $\lambda = 2\pi f/F_c$

$$\varphi_a(\lambda) = -\frac{T(\lambda)}{T_c}\lambda = -\frac{c_0}{c(\lambda)}\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{\eta}\sqrt{\sqrt{1+\eta^2\lambda^2}-1}, \quad (4.7)$$

dove si è posto $\eta = 2\frac{\sqrt{k_0}F_c}{c_0}$.

Si può notare come il parametro η sia strettamente legato a quello che viene spesso definito *coefficiente di inarmonicità* $\delta = 2\sqrt{k_0}/L$, dove L è la lunghezza della corda. Anche in questo caso è opportuno, per ragioni di complessità di calcolo, concentrare i filtri passa-tutto di una sezione di corda alla quale si prevede di non poter accedere. Se si raggruppano, ad esempio, m filtri lo schema implementativo di Fig. 4.4 (b) richiede il progetto di un filtro passa-tutto $H(z)$ avente andamento di fase

$$\varphi(\lambda) = m\varphi_a(\lambda).$$

A titolo d'esempio, in Fig. 4.5 è riportato l'andamento della fase relativo a 10 sezioni di corda al variare del parametro η dell'eq. (4.7).

In questa tesi è stato implementato un metodo di sintesi di filtri passa-tutto proposto da Lang e Laakso [86] e basato sulla minimizzazione dell'errore quadratico medio della fase. Come spiegato in Appendice C, il metodo consente di implementare il filtro a partire da un set arbitrario di punti della caratteristica di fase $\varphi(\lambda_i)$ che si vuole ottenere.

La scelta naturale ricade, quindi, sul set dei ritardi di fase delle *armoniche*, ossia su multipli interi della *frequenza fondamentale*.

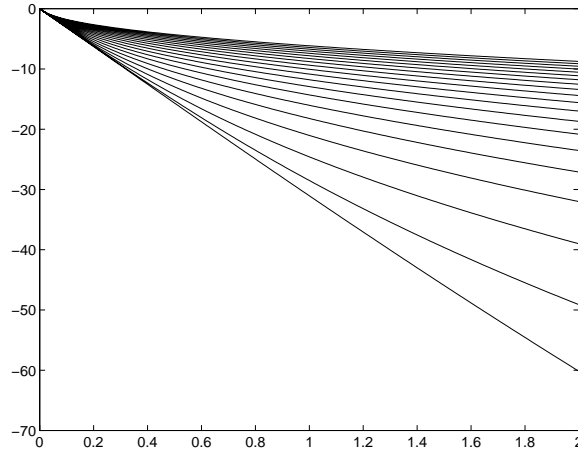


Fig. 4.5: Andamento della fase relativo a 10 sezioni di corda al variare del parametro η .

4.1.4 Corda generica

Si sviluppa ora il caso più generale di equazione del moto di un mezzo elastico avente un'equazione differenziale alle derivate parziali del tipo

$$\sum_k \alpha_k \frac{\partial^k y}{\partial t^k} = \sum_k \beta_k \frac{\partial^k y}{\partial x^k} . \quad (4.8)$$

Sostituendo l'eq. (4.2) dell'autofunzione, si ottiene l'equazione algebrica

$$\sum_k \alpha_k s^k = \sum_k \beta_k v^k \quad (4.9)$$

nelle due variabili complesse s e v . Per ciascuna soluzione $v(s)$ dell'eq. (4.9), se ne consideri l'andamento sull'asse immaginario $s = j\omega$

$$v(j\omega) = v_r(\omega) + jv_i(\omega) .$$

Si ottiene così una famiglia di *autofunzioni* dell'eq. (4.8) del tipo

$$\begin{aligned} e^{j\omega T_c \pm v(j\omega)x} &= e^{\pm v_r(\omega)x} e^{j\omega(t \pm v_i(\omega)x/\omega)} \\ &= e^{\pm v_r(\omega)x} e^{j\omega(t \pm x/c(\omega))} , \end{aligned}$$

dove $c(\omega) = \omega/v_i(\omega)$ rappresenta la velocità di propagazione che, come lecito aspettarsi, risulta selettiva in frequenza.

La discretizzazione di tale equazione va effettuata ponendo

$$X = c(\omega)T(\omega) \quad T(\omega) = \frac{X}{c(\omega)} = \frac{c_0 T_c}{c(\omega)} .$$

In altre parole, il periodo spaziale è considerato invariante in frequenza, perciò occorre rendere selettivo in frequenza il periodo temporale.

Si ricava pertanto un'equazione della forma

$$\begin{aligned} e^{j\omega n T(\omega) \pm v(j\omega)mX} &= e^{\pm v_r(\omega)mX} e^{j\omega(nT(\omega) \pm mX/c(\omega))} \\ &= G(\omega)^{\pm m} e^{j\omega(n \pm m)T(\omega)} . \end{aligned}$$

In conclusione, un tratto di linea di lunghezza pari a $mX = mc_0 T_c$ può essere implementata come in Fig. 4.6 attraverso un filtro FIR $\hat{G}(\lambda)$ simmetrico di ordine N che approssima

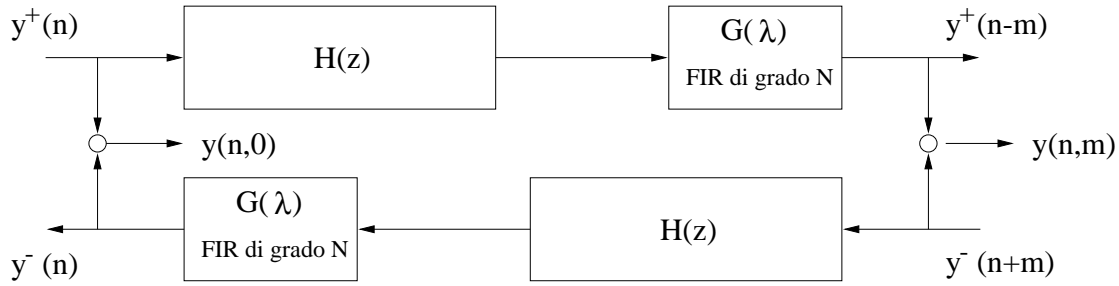


Fig. 4.6: Rappresentazione numerica di un tratto di corda rigida di lunghezza $X_m = mc_0T_c$ con perdite variabili in frequenza.

l'andamento effettivo delle perdite $G^m(\lambda)$ e un filtro passa-tutto $H(z)$ che abbia una caratteristica di fase

$$\varphi(\lambda) = -m \frac{T(\lambda)}{T_c} \lambda + \frac{N}{2} \lambda$$

che realizza il ritardo selettivo in frequenza del tipo $T(\omega)$.

Si noti come la fase del filtro $H(z)$ compensi il ritardo lineare aggiuntivo $N\lambda/2$ introdotto dal filtro FIR.

4.1.5 Accordatura

Il modello a guida d'onda, discusso nella Sez. 4.1.1, soffre di un inconveniente proprio di tutti i risuonatori realizzati mediante linee di ritardo. Il numero discreto di elementi di ritardo utilizzati consente la realizzazione di un insieme finito di frequenze. Infatti, se F_c è la frequenza di campionamento e N_s è il ritardo totale della corda, l'altezza del suono prodotto è $f = F_c/N_s$. A titolo di esempio si consideri un DO_7 del sistema temperato; la sua frequenza è $f \approx 2093Hz$ e si trova nella zona di frequenze in cui l'orecchio è maggiormente sensibile alle variazioni [89]. Con una frequenza di campionamento $F_c = 50KHz$ si ottiene $\hat{N}_s = 23,89$. Discretizzando all'intero più vicino $N_s = 24$, si ricava una frequenza $\hat{f} = 2083$ che si discosta da f di circa 0.4%. Tale scostamento può non essere accettabile se ci si prefigge l'indistinguibilità con la frequenza teorica. Aumentando la frequenza di campionamento, si possono ottenere scostamenti medi minori, ma ciò rende la sintesi della corda al calcolatore computazionalmente troppo costosa.

È pertanto necessario aggiungere alla caratteristica di fase desiderata della corda, una fase lineare che tenga conto del ritardo frazionario dovuto alla discretizzazione ad un numero intero di celle di ritardo. La nuova caratteristica di fase desiderata sarà quindi

$$\varphi_{new}(\lambda) = \varphi(\lambda) - (\hat{N}_s - N_s)\lambda.$$

4.2 Sistemi ibridi WDF/WGF

Finora si è studiato il comportamento della corda in un mezzo omogeneo, in cui le onde di spostamento y^\pm si propagano in due direzioni opposte senza riflessioni. Si vuole ora vedere il comportamento delle onde di propagazione nel caso in cui il mezzo presenti delle discontinuità dovute, per esempio, ad una variazione della tensione della sezione della corda oppure della sua densità lineare σ (nel caso fluidodinamico, ciò equivale ad una discontinuità della sezione del tubo acustico).

A tal fine risulta utile riferirsi a coppie di variabili d'onda equivalenti, direttamente legate alla variabile intensiva (velocità) alla variabile estensiva (forza) del modello fisico. Come si vedrà nel corso della spiegazione, tali variabili sono perfettamente compatibili con le variabili d'onda a - b definite per i filtri WDF. Ciò consente non solo di applicare i risultati visti nel Capitolo 2,

per descrivere i fenomeni di scattering dovuto alle discontinuità del mezzo, ma di considerare i WGF come estensione dei WDF per la descrizione di elementi a parametri distribuiti. Pertanto, si ricaveranno queste nuove coppie di variabili d'onda a partire da y^\pm e si definiranno le relazioni che le legano tra loro.

Si consideri il caso della corda ideale, la velocità è ottenuta attraverso una semplice operazione di derivazione dello spostamento trasversale $y(x, t)$

$$v(x, t) = \dot{y}(x, t) ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \dot{y}^+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + \dot{y}^- \left(t + \frac{x}{c_0} \right) \\ &= v^+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + v^- \left(t + \frac{x}{c_0} \right) , \end{aligned}$$

dove v^\pm rappresentano le *variabili d'onda intensive*, nel caso in questione *onde di velocità*, del mezzo.

Per ricavare le *variabili d'onda estensive* (forza) è necessario porsi in un punto arbitrario x della corda, si veda Fig. 4.7, e prendere in considerazione la forza verticale esercitata all'istante t dalla parte sinistra della corda sulla porzione destra, che ha equazione

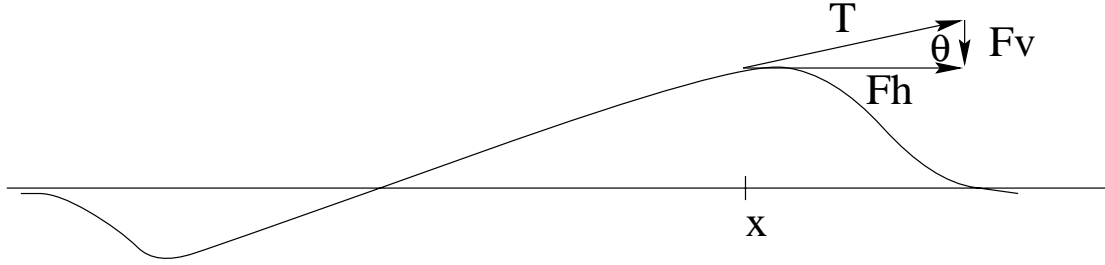


Fig. 4.7: Forza verticale di propagazione in una corda ideale.

$$f(x, t) = -T \sin(\theta) \approx -T \tan(\theta) = -T y'(x, t),$$

ovvero

$$\begin{aligned} f(x, t) &= T \left(y'^+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + y'^- \left(t + \frac{x}{c_0} \right) \right) \\ &= \frac{T}{c_0} \left(\dot{y}^+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) - \dot{y}^- \left(t + \frac{x}{c_0} \right) \right), \end{aligned}$$

dove $y'(x, t)$ è la derivata alla variabile spaziale x .

Il valore $R = T/c_0 = \sqrt{T\sigma}$ è la *resistenza di riferimento* del mezzo di trasmissione (corda) e permette di legare le *variabili d'onda estensive* (forza) alle *variabili d'onda intensive* (velocità) attraverso la relazione

$$\begin{aligned} f^+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) &= R v^+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \\ f^- \left(t - \frac{x}{c_0} \right) &= -R v^- \left(t - \frac{x}{c_0} \right) . \end{aligned}$$

Prese come variabili d'onda di riferimento le due onde f^\pm , è facile ricavare le relazioni che le legano alla variabile estensiva (forza) e intensiva (velocità)

$$\begin{aligned} v &= \frac{f^+ - f^-}{R} \\ f &= f^- + f^+ \end{aligned}$$

Si può notare come tali relazioni, a meno di un fattore moltiplicativo, sono identiche alla trasformazione lineare definita nella teoria dei filtri WDF, che permette il passaggio dalla coppia di variabili d'onda a - b , alla coppia di variabili estensiva-intensiva (v - i).

Questa proprietà individua una perfetta compatibilità tra strutture WDF e WGF, dal momento che entrambi i sistemi sono identificati da una coppia d'onde aventi il medesimo significato fisico.

Ogni volta che si voglia interfacciare una struttura WGF, avente resistenza di riferimento R_g , ad una porta di un filtro WDF, con resistenza di riferimento R_f , è necessario rispettare le proprietà di irrotazionalità delle variabili estensive (legge di Kirchoff alle maglie) e di solenoidaleità delle variabili intensive (legge di Kirchoff ai nodi), ottenendo una giunzione di scattering, che lega le variabili d'onda uscenti a quelle entranti, *identica* a quella vista in eq. (2.10), ovvero

$$\begin{bmatrix} k & (1-k) \\ (1+k) & -k \end{bmatrix} \quad \text{dove,} \quad k = \frac{R_f - R_g}{R_f + R_g}, \quad (4.10)$$

Se si pone $R_g = R_f$, la struttura WGF risulta essere *perfettamente adattata* alla porta di interfacciamento, pertanto la variabile d'onda uscente dal WGF è identicamente uguale alla variabile entrante nel WDF e viceversa.

La perfetta compatibilità tra le due implementazioni consente, inoltre, di utilizzare le multi-giunzioni dei filtri WDF per la congiunzione in serie o parallelo di due o più tratti di waveguide aventi differenti resistenze di riferimento, simulando in questa maniera i fenomeni di riflessione e trasmissione delle onde di propagazione in prossimità di una discontinuità del mezzo. Ciò permette la costruzione di strutture WGF anche molto complesse quali, ad esempio, un sistema corda-tavola armonica interamente costituito da tratti di waveguide uniti attraverso multigiunzioni [65], oppure un modello di tubo acustico con fori, realizzato con piccoli tratti di linea che si dipartono dal tratto principale [50].

In linea di principio è pertanto possibile considerare i filtri WGF come controparte a parametri distribuiti dei WDF consentendo l'implementazione di strutture ibride WDF/WGF arbitrariamente complesse. Una volta rispettate le condizioni di adattamento alle porte d'interfaccia $R_f = R_g$, è, ad esempio, possibile costruire sottosistemi a parametri concentrati WDF (masse, attriti e molle), mutuamente connessi attraverso linee di ritardo, rappresentanti elementi a parametri distribuiti (corde)¹.

4.3 Strutture Riverberanti

Il modello monodimensionale, in generale, non è sufficiente per una descrizione dettagliata di un risonatore reale. Si prenda, ad esempio, in considerazione uno strumento a corda, parte dell'energia vibrazionale immagazzinata nella corda viene trasferita alla cassa armonica.

Quest'ultima rappresenta un modello fisico a parametri distribuiti, definito da una coppia di onde bidimensionali o tridimensionali che si propagano e riflettono in accordo alle caratteristiche del mezzo e a leggi di continuità rappresentanti un'estensione dei principi di irrotazionalità e solenoidaleità per modelli fisici bidimensionali o tridimensionali.

In letteratura [81, 82] sono presenti esempi di simulazione di mezzi isotropi a parametri distribuiti bidimensionali (membrane) o tridimensionali (casse armoniche), ottenute dalla discretizzazione della soluzione analitica di un'equazione d'onda 2D e 3D ideale e che rappresentano un'estensione della teoria WGF monodimensionale.

In generale, uno studio accurato del mezzo deve tenere conto sia delle sue caratteristiche di anisotropia, ossia delle differenti modalità di propagazione lungo le diverse direzioni, sia dei

¹per analogia induttori, resistenze, capacità e linee di trasmissione

fenomeni quali rigidità e perdite distribuite, responsabili della ricchezza timbrica e della dinamica del suono.

Una modello numerico che tenga conto di tali fenomeni richiederebbe una loro caratterizzazione, ottenibile soltanto a partire da una conoscenza dettagliata della struttura fisica del mezzo (modalità e materiali di costruzione, geometria, ecc.) che esula dalle finalità di questa tesi.

Nella simulazione dell'interazione martelletto-corda, presentata come caso di studio nel seguito del lavoro, si è comunque, cercato di tenere in considerazione l'influenza della cassa armonica, riproducendone la sua risposta in frequenza, ottenuta mediante misurazioni sperimentali, a riprova della modularità dell'approccio.

Da misurazioni dirette, si verifica che la cassa armonica ha uno spettro molto “frastagliato” in frequenza, caratterizzato da un elevato numero di picchi di risonanza. Nella maggior parte dei casi, si è sperimentato che non è importante conoscere l'esatta altezza e posizione dei picchi di risonanza, ma è sufficiente, al contrario, che il risuonatore abbia un alto fattore di merito Q che i picchi siano molto vicini l'uno all'altro [62] (risposta in frequenza “frastagliata”).

Per tale motivo si è scelto di simulare la cassa armonica mediante una *rete con ritardo retroazionata* (FDN Feedback Delay Network) [60]. Tale tecnica si rivela particolarmente utile per l'implementazione numerica di strutture riverberanti, in quanto permette di ottenere uno spettro complesso attraverso il controllo di un numero di parametri relativamente modesto.

4.3.1 Reti con Ritardo Retroazionate (FDN)

Come si vede da Fig. 4.8, un FDN è costituito da N linee di ritardo, ognuna avente una lunghezza pari a $\tau_i = m_i T$, dove $T = 1/F_c$ è il tempo di campionamento. La relazione ingresso uscita è data dalla seguente formula

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{i=1}^N c_i p_i^+(n) + dx(n) \\ p_i^+(n + m_i) = g_i \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} p_j^+(n) + b_i x(n) \right) \end{cases}$$

Attraverso il controllo

- dei vettori \mathbf{c} , \mathbf{b} e \mathbf{g} ;
- della *matrice di retroazione* \mathbf{A} ;
- del termine noto d ;
- del numero di linee di ritardo N ;
- del numero delle celle di ritardo M_i di ogni linea,

è possibile ottenere il comportamento del filtro desiderato.

Si può dimostrare [60] che se la matrice di retroazione è *unitaria*, ossia ha autovalori sul cerchio unitario e ammette una base di autovettori linearmente indipendenti, essa risulta priva di perdite.

È utile precisare che la condizione di assenza di perdite della matrice non è di per se stessa sufficiente a garantire la stabilità del filtro FDN risultante, dal momento che la relazione ingresso uscita dipende anche dai vettori \mathbf{c} , \mathbf{b} , \mathbf{g} e da d .

In Fig. 4.8 (b) è rappresentata una versione equivalente di un generico FDN. Dal momento che la nuova rappresentazione raggruppa in un'unica matrice \mathbf{A}' i vettori \mathbf{c} , \mathbf{b} , la matrice di retroazione \mathbf{A} , e il termine noto d , essa permette di fornire una condizione semplice per garantire

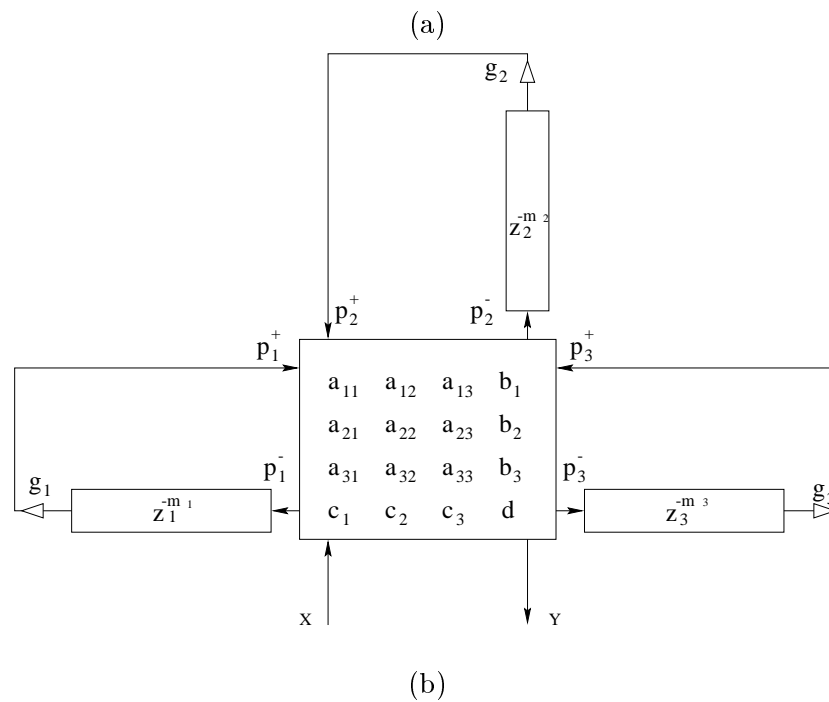
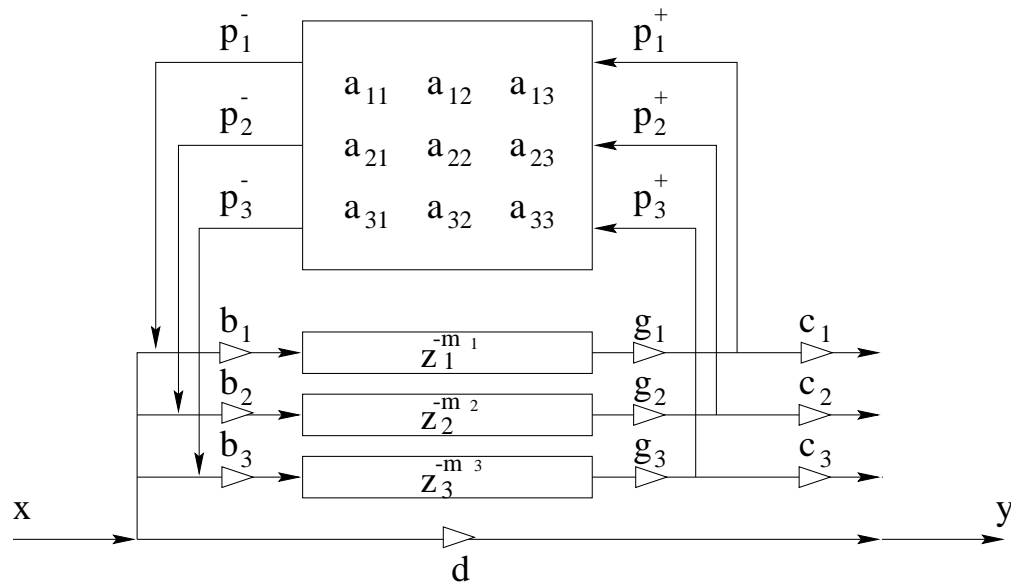


Fig. 4.8: Rete con ritardo retroazionate (FDN): due rappresentazioni equivalenti.

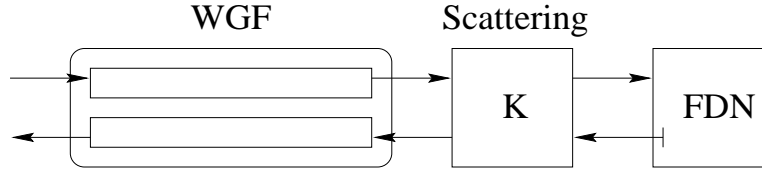


Fig. 4.9: Modello di risuonatore a tre blocchi.

la stabilità del filtro FDN. Se si assume infatti, che i valori di g_i siano tutti minori di uno, le linee di ritardo che si collegano alla matrice \mathbf{A}' rappresentano delle linee di trasmissione con perdita (si veda Sez. 4.1.2). È quindi chiaro che se la matrice \mathbf{A}' è priva di perdite, ossia è unitaria, allora il filtro risultante FDN è stabile.

È utile notare che se alla matrice \mathbf{A}' si sostituisce una delle multigiunzioni serie o parallelo, viste nel Cap. 2, il filtro FDN equivale ad una *rete* WGF, rappresentante un'insieme di linee di trasmissione aventi differenti impedenze caratteristiche, connesse tra loro rispettando le leggi di continuità.

In questo caso l'assenza di perdite della matrice garantisce la stabilità del filtro, inoltre la sua rappresentazione WGF permette di adottare gli stessi principi di interfacciamento proposti per i waveguide. Una volta definite le impedenze caratteristiche alle porte del filtro FDN, è possibile, ad esempio, connetterlo all'estremità della corda attraverso una semplice cella di scattering, come mostrato in Fig. 4.9.

Capitolo 5

Implementazione automatica di modelli fisici

Nei Capitoli precedenti si sono fornite le basi teoriche necessarie per costruire strutture a onda numerica attraverso l'interconnessione di blocchi precostituiti. Sulla base di tali nozioni, è stato implementato un programma software in grado di realizzare automaticamente un modello a onda numerica, a partire da una descrizione sintattica (ad alto livello) dello strumento acustico di riferimento. Tale descrizione è data da una lista degli elementi a parametri concentrati lineari e non lineari e dei “macro-blocchi” monoporta necessari per costruire il modello, nonché delle modalità con cui tali elementi vanno interconnessi.

L'algoritmo di sintesi sviluppato prende spunto dal metodo di *analisi di tableau*, ampiamente utilizzato per la soluzione di circuiti elettrici analogici lineari tempo-invarianti [38], di cui se ne proporrà una versione adattata per la soluzione di modelli numerici basati su strutture WDF.

In Sezione 1 si descriverà sommariamente il metodo di *tableau classico* per reti lineari analogiche a parametri concentrati e i relativi problemi riguardanti l'inizializzazione del circuito; nella sezione successiva se ne proporrà una versione modificata per modelli wave analogici lineari che rappresenta l'anello di congiunzione tra l'*analisi di tableau* classica e l'*analisi di tableau* per filtri ad onda numerica proposta in questo lavoro.

Nella Sezione 3 si metteranno in luce i limiti del metodo classico illustrato nelle Sezioni 1 e 2 per la trattazione di elementi non lineari che, come è noto, non possono essere trattati nel dominio trasformato di Laplace.

Nella Sezione 4 si introdurrà un'estensione del metodo classico per la trattazione di modelli WDF limitatamente al caso di elementi lineari a parametri concentrati, si descriverà il fondamento teorico della tecnica, sottolineando come essa rappresenti uno strumento di analisi per verificare a priori la realizzabilità e la computabilità del filtro che si vuole implementare. Ci si concentrerà pure sul problema dell'inizializzazione della struttura, la cui errata determinazione potrebbe alterare in maniera inaccettabile le condizioni di contatto tra sottosistemi simulanti parti distinte del modello fisico di riferimento.

Nella Sezione 5 si vedrà come la tecnica proposta permetta l'introduzione di elementi non lineari.

La successiva Sezione tratterà il problema dell'interfacciamento “macro-blocchi” Wave. Tale estensione permette la modellizzazione, tra l'altro, di strutture a parametri distribuite che ben si prestano a descrivere strutture meccaniche che simulano il comportamento dei risuonatori negli strumenti musicali (corde, tubi acustici, membrane casse armoniche).

In seguito si mostreranno le modalità con cui il programma di sintesi, implementato durante il corso di questo lavoro, gestisce, in condizioni semplificate, la tempo-varianza dei parametri.

Infine si presenterà una descrizione sommaria del funzionamento del programma, implementato nel corso del lavoro di tesi, per la modellizzazione di strutture fisiche.

5.1 Dominio di Kirchoff analogico lineare

Un circuito elettrico risulta identificato dagli elementi circuitali che lo costituiscono e dalla modalità con cui essi sono connessi, ossia dalla sua topologia. La topologia può essere descritta mediante le leggi di Kirchoff alle correnti e alle tensioni, mentre i dispositivi sono solitamente definiti da equazioni algebriche differenziali delle variabili v_m e i_m , che si affacciano alle loro porte. La stesura di una lista completa delle equazioni di Kirchoff alle correnti e alle tensioni linearmente indipendenti e delle equazioni caratteristiche degli elementi, consente di scrivere un sistema di equazioni, che caratterizza il circuito in questione.

Nel caso in cui il circuito sia costituito da soli elementi algebrici lineari, il sistema di equazioni che lo descrive è di tipo differenziale lineare. L'utilizzo delle trasformate di Laplace permette di renderlo lineare algebrico e pertanto, facilmente rappresentabile in forma matriciale.

5.1.1 Rappresentazione matriciale

Il metodo che si prenderà in considerazione (Chua [38]), consiste nella determinazione della *matrice di tableau* $T(s)$ che definisce in maniera univoca il circuito. Per fare ciò è necessario dare una rappresentazione matriciale sia dei dispositivi algebrici che delle equazioni di Kirchoff.

Elementi Algebrici

Si prenda in considerazione un generico elemento algebrico i n -porte. Una volta definito il *vettore di Kirchoff* $\begin{bmatrix} V_i(s) & I_i(s) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} V_1(s) & I_1(s) & \dots & V_n(s) & I_n(s) \end{bmatrix}^T$, le equazioni che caratterizzano il comportamento di tale dispositivo nel dominio di Laplace, possono essere descritte nella seguente forma matriciale

$$\begin{bmatrix} M_i(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(s) \\ I_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(s) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$n \times 2n \qquad 2n \times 1 \qquad n \times 1,$

dove $M_i(s)$ è la *matrice caratteristica* dell'elemento algebrico, mentre $U_i(s)$ è il *vettore degli ingressi noti*.

Si noti come per elementi monoporta la matrice $M_i(s)$ è un vettore 1×2 e il vettore d'ingressi $U_i(s)$ è un semplice coefficiente.

Nella colonna due della Tabella 5.1 sono riportate le rappresentazioni matriciali di alcuni elementi monoporta e multiporta.

Topologia

Per poter risolvere il sistema lineare e trovare i valori del vettore incognito $\begin{bmatrix} V(s) & I(s) \end{bmatrix}^T$, non è sufficiente la sola rappresentazione dei dispositivi elettrici, ma è necessario descrivere come siano tra loro connessi. Come già visto nella Sezione 2.4, le multigiunzioni serie e parallelo sono sufficienti per descrivere la topologia del circuito. Ricordando che una qualsiasi multigiunzione può essere implementata mediante la cascata di giunzioni tre porte, quest'ultime possono essere considerate come elemento base per la descrizione della topologia circuitale.

La rappresentazione matriciale delle giunzioni tre porte è riportata in Tabella 5.2. Si può notare come la rappresentazione matriciale della multigiunzione sia del tutto analoga a quella di un generico elemento algebrico n porte, con l'unica eccezione che la matrice caratteristica del primo è costituita esclusivamente da termini reali costanti 0, 1, -1 . Questo non deve sorprendere, in quanto la multigiunzione è essa stessa un elemento algebrico. La proprietà dei suoi coefficienti è invece conseguenza diretta delle leggi di Kirchoff alle tensioni e alle correnti.

Elemento	Rappresentazione	Condizioni Iniziali
Resistenza	$\begin{bmatrix} 1 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = 0$	
Generatore Reale di Tensione	$\begin{bmatrix} 1 & -R_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = E_g(s)$	
Generatore Reale di Corrente	$\begin{bmatrix} -G_g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = A_g(s)$	
Generatore Ideale di Tensione	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = E_i(s)$	
Generatore Ideale di Corrente	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = A_i(s)$	
Capacità	$\begin{bmatrix} sC & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} sC & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = Cv(0)$
Induttore	$\begin{bmatrix} 1 & -Ls \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & -Ls \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = -Li(0)$
FDNR	$\begin{bmatrix} ms^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} ms^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = msv(0) + mv'(0)$
Trasformatore	$\begin{bmatrix} n_2 & 0 & -n_1 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = 0$	
Giratore	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & -1 & R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = 0$	
Mutatore L-R	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2(0) \\ 0 \end{bmatrix}$
Mutatore C-R	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_1(0) \end{bmatrix}$
Rotatore	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -1 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = 0$	
Riflettore	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & -1 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = 0$	
Scalatore	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & K_v & 0 \\ 0 & -1 & 0 & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = 0$	

Tabella 5.1: Rappresentazione matriciale nel dominio di Laplace di alcuni elementi circuitali lineari.

Elemento	Rappresentazione	Condizioni Iniziali
Giunzione serie tre porte	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \\ V_3(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = 0$
Giunzione parallelo tre porte	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ V_2(s) \\ I_2(s) \\ V_3(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = 0$

Tabella 5.2: Rappresentazione matriciale nel dominio di Laplace delle giunzioni tre porte.

Costruzione della matrice

Come visto nella Sezione precedente non si perde in generalità se si considerano le multigiunzioni come elementi algebrici.

Si immagini di avere un circuito elettrico costituito da m elementi algebrici. Si supponga che il generico elemento i della rete, abbia n_i porte e sia definito dal sistema di equazioni

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} M_i(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_i(s) \\ I_i(s) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} U_i(s) \end{bmatrix} \\ n_i \times 2n_i & 2n_i \times 1 & & 2n_i \times 1 . \end{matrix}$$

Il numero di porte presenti nel circuito risulta quindi uguale a

$$N = \sum_{i=1}^m n_i .$$

Definito il *vettore di Kirchoff del circuito*

$$\begin{bmatrix} V(s) & I(s) \end{bmatrix}^T = \left[\begin{bmatrix} V_1(s) & I_1(s) \end{bmatrix}^T \dots \begin{bmatrix} V_m(s) & I_m(s) \end{bmatrix}^T \right]^T ,$$

è possibile definire il comportamento di tutti gli elementi con un'unica *matrice caratteristica del circuito* $M(s)$ ed un solo *vettore degli ingressi* $U(s)$.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(s) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} M_m(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ \vdots \\ V_m(s) \\ I_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} ,$$

ovvero

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} M(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} U(s) \end{bmatrix} \\ N \times 2N & 2N \times 1 & N \times 1 . \end{array} \quad (5.2)$$

La rappresentazione matriciale di eq. (5.2) permette di scrivere N equazioni indipendenti per le N porte presenti nel circuito.

Il numero delle incognite del vettore di Kirchoff $[V(s) \ I(s)]^T$ è pari a $2N$ cioè N correnti e N tensioni. Sono quindi necessarie altre N equazioni linearmente indipendenti. Queste relazioni si ricavano dalla giunzione diretta delle porte dei vari elementi. Se si vuole infatti connettere la generica porta m con la porta k , è necessario rispettare le condizioni di continuità di Kirchoff

$$\begin{aligned} V_m(s) &= V_k(s) \\ I_m(s) + I_k(s) &= 0 , \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m(s) \\ I_m(s) \\ V_k(s) \\ I_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Dato che si ricavano due relazioni (una per le tensioni e una per le correnti) per ogni giunzione e il numero di quest'ultime è pari a $N/2$, si ottengono in questo modo le N equazioni linearmente indipendenti mancanti, che possono essere rappresentate nella seguente forma matriciale

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ N \times 2N & 2N \times 1 & N \times 1 , \end{array} \quad (5.3)$$

dove la matrice C , costituita esclusivamente da elementi pari a 1, -1 o 0, è detta *matrice delle connessioni*.

Unendo la matrice delle connessioni con la matrice caratteristica del circuito, si ottiene un sistema di $2N$ equazioni linearmente indipendenti avente la seguente forma matriciale

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} C \\ M(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix} \\ 2N \times 2N & 2N \times 1 & 2N \times 1 . \end{array} \quad (5.4)$$

La *matrice di tableau* $T(s)$ definisce in maniera univoca e completa il circuito lineare algebrico.

Se il $\det[T(s)] \neq 0$, allora la matrice di tableau è invertibile ed il sistema di equazioni ammette un *unica soluzione*

$$\begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Si consideri, a titolo di esempio, il circuito di Fig. 5.1, avente dieci porte che, per convenienza, sono state numerate. La rete elettrica in questione può essere descritta in maniera univoca dalle

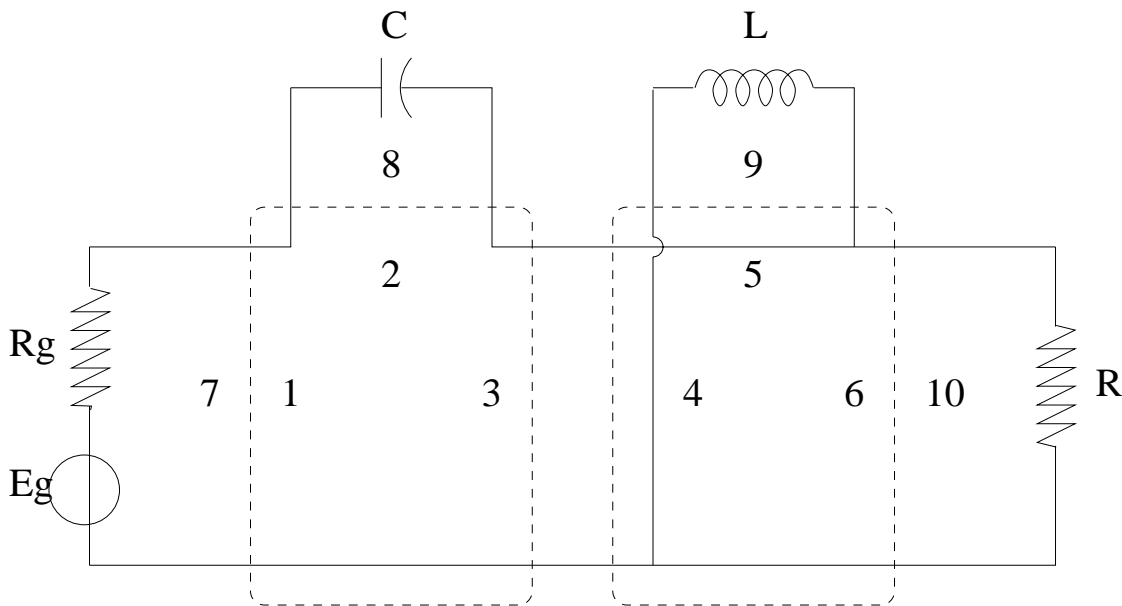


Fig. 5.1: Circuito elettrico analogico con porte numerate.

seguenti equazioni

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) & = & 0 \\ I_1(s) - I_2(s) & = & 0 \\ I_1(s) - I_3(s) & = & 0 \\ V_4(s) - V_5(s) & = & 0 \\ V_4(s) - V_6(s) & = & 0 \\ I_4(s) + I_5(s) + I_6(s) & = & 0 \\ V_7(s) - R_g I_7(s) & = & E_g(s) \\ s C V_8(s) - I_8(s) & = & 0 \\ V_9(s) - s L I_9(s) & = & 0 \\ V_{10}(s) - R I_{10}(s) & = & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{lcl} V_1(s) - V_7(s) & = & 0 \\ I_1(s) + I_7(s) & = & 0 \\ V_2(s) - V_8(s) & = & 0 \\ I_2(s) + I_8(s) & = & 0 \\ V_3(s) - V_4(s) & = & 0 \\ I_3(s) + I_4(s) & = & 0 \\ V_5(s) - V_9(s) & = & 0 \\ I_5(s) + I_9(s) & = & 0 \\ V_6(s) - V_{10}(s) & = & 0 \\ I_6(s) + I_{10}(s) & = & 0 \end{array} \right. . \quad (5.6)$$

La parte sinistra del sistema rappresenta il comportamento di tutti gli elementi algebrici (giunzioni comprese) ed è equivalente all'eq. (5.2) della matrice caratteristica.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$V_1(s)$	0
0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	$I_1(s)$	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$V_2(s)$	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$I_2(s)$	0
0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	$V_3(s)$	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	$I_3(s)$	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	$V_4(s)$	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	$I_4(s)$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$V_5(s)$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	$I_5(s)$	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$V_6(s)$	0
0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$I_6(s)$	0
0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	$V_7(s)$	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	$I_7(s)$	0
0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	$V_8(s)$	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	$I_8(s)$	0
0	0	0	0	0	0	1	$-R_g$	0	0	0	0	0	$V_9(s)$	$E_g(s)$
0	0	0	0	0	0	0	0	$-sC$	1	0	0	0	$I_9(s)$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-sL$	0	0	$V_{10}(s)$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-R$	0	$I_{10}(s)$	0

Tabella 5.3: Matrice di tableau analogica del circuito di Fig. 5.1.

La parte destra descrive le connessioni delle porte circuitali e può essere rappresentata mediante un'opportuna matrice delle connessioni C come da eq. (5.3).

Il sistema di equazioni può essere riscritto nella forma matriciale di tabella 5.3.

Se il determinante è diverso da zero allora la matrice di tableau è invertibile e la soluzione del sistema è unica.

5.1.2 Imposizione delle condizioni iniziali

Una caratteristica fondamentale che contraddistingue gli elementi reattivi da quelli puramente resistivi, è la loro proprietà di memoria. La tensione di un condensatore in un certo istante, ad esempio, dipende dall'intera storia passata oltre che dal valore dei generatori presenti nel circuito. Si consideri il semplice circuito di Fig. 5.2, la proprietà del condensatore di immagazzinare una

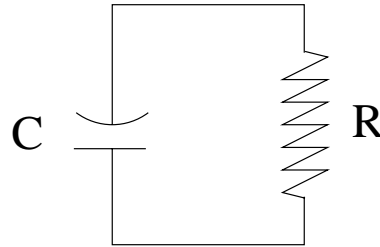


Fig. 5.2: Connessione resistenza condensatore.

carica $q(0)$ comporta la presenza di una tensione iniziale ai suoi capi $v(0) = q(0)/C$. L'equazione differenziale che governa il circuito è

$$-RC\dot{v} = v$$

che ha una soluzione del tipo

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

È facile vedere come la soluzione dipenda dal valore iniziale di tensione ai capi del condensatore.

Per la stessa ragione, in un sistema meccanico l'imposizione della velocità iniziale su una massa, ne determina la sua energia cinetica iniziale, così come l'imposizione dell'elongazione iniziale di una molla ne determina la sua energia potenziale. È chiaro che la loro esatta determinazione influisce sul corretto comportamento energetico e dinamico del sistema.

Ogni qualvolta si sia in presenza di elementi con memoria, è quindi necessario tenere conto della loro storia passata attraverso l'imposizione di opportune condizioni iniziali.

Nel dominio di Laplace il problema è facilmente risolvibile grazie alla regola di derivazione.

Sia $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Indicando con $df(t)/dt$ la derivata di $f(t)$ e con $f(0)$ il suo valore nell'istante iniziale, si ottiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) .$$

Si tenga inoltre conto che la regola è iterativa, se $f'(0)$ è il valore iniziale della funzione $df(t)/dt$, la trasformata di Laplace di $d^2f(t)/dt^2$ è

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) .$$

Si consideri, ad esempio, un condensatore lineare $i = Cdv(t)/dt$ conoscendo il valore iniziale di tensione $v(0)$, la sua rappresentazione nel dominio di Laplace è

$$I(s) = CsV(s) - Cv(0) . \quad (5.7)$$

Per dualità un induttore lineare è rappresentato dalla relazione

$$V(s) = LsI(s) - Li(0) . \quad (5.8)$$

Nel caso di un FDNR (si veda Appendice B) si ottiene

$$I(s) = ms^2V(s) - msv(0) - mv'(0) .$$

I termini $Cv(0)$, $-Li(0)$ e $msv(0) + mv'(0)$ sono termini noti e possono essere trattati come ingressi dei singoli elementi.

Nella terza colonna della tabella 5.1 sono riportate le rappresentazioni matriciali con condizioni iniziali degli elementi reattivi.

L'eq. (5.4), si modifica nel seguente modo

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} T(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ U_0(s) \end{bmatrix} \\ 2N \times 2N & 2N \times 1 & \quad 2N \times 1 \quad 2N \times 1 , \end{array} \quad (5.9)$$

dove $T(s)$ e $U(s)$ rimangono immutati, mentre $U_0(s)$ rappresenta il *vettore delle condizioni iniziali*.

L'introduzione delle condizioni iniziali ha quindi comportato la semplice aggiunta di un vettore di termini noti $U_0(s)$, rappresentante le variabili di stato iniziali degli elementi reattivi.

Il sistema risulta ancora univocamente risolvibile se $\det[T(s)] \neq 0$, ma la soluzione, come si vede dall'eq. (5.10), è composta da due termini

$$\begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_0(s) \end{bmatrix}}_{\text{condizioni iniziali}} . \quad (5.10)$$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$V_1(s)$	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	$I_1(s)$	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$V_2(s)$	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$I_2(s)$	0	0
0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	$V_3(s)$	0	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	$I_3(s)$	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	$V_4(s)$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	$I_4(s)$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$V_5(s)$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$I_5(s)$	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$V_6(s)$	0	0
0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$I_6(s)$	0	0
0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	$V_7(s)$	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	$I_7(s)$	0	0
0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	$V_8(s)$	0	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	$I_8(s)$	0	0
0	0	0	0	0	0	1	$-R_g$	0	0	0	0	0	$V_9(s)$	$E_g(s)$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$-sC$	1	0	0	0	$I_9(s)$	0	$Cv(0)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-sL$	0	0	$V_{10}(s)$	0	$-Li(0)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-R$	$I_{10}(s)$	0	0

Tabella 5.4: Matrice di tableau analogica del circuito di Fig. 5.1 con condizioni iniziali.

La parte sinistra rappresenta la *risposta con stato zero*, dovuta ai soli ingressi (con condizioni iniziali poste a zero), la parte destra corrisponde alla *risposta con ingresso zero*, dovuta esclusivamente alle condizioni iniziali (con ingressi posti a zero).

Tornando all'esempio di Fig. 5.1, le equazioni dei due elementi reattivi presenti nel sistema di eq. (5.6) verranno modificate come da eq. (5.7) e (5.8), dando origine al sistema di tabella 5.4

5.2 Dominio Wave analogico lineare

Si è già visto in Sezione 3.1 che, una volta definita l'impedenza di riferimento $Z(s)$, la coppia di variabili d'onda nel dominio di Laplace $A(s), B(s)$ si ottiene semplicemente mediante la relazione

$$\begin{bmatrix} B(s) \\ A(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z(s) \\ 1 & Z(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Se $Z(s) \neq 0$ la trasformazione è invertibile ed uguale a

$$\begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/Z(s) & 1/Z(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(s) \\ A(s) \end{bmatrix}.$$

Se quindi si definisce un'impedenza caratteristica diversa da zero per ogni coppia di variabili $V(s)$ e $I(s)$, è semplice passare dalla rappresentazione Kirchoff alla rappresentazione delle variabili d'onda duali $A(s)$ e $B(s)$. Si dimostrerà che le due rappresentazioni sono del tutto equivalenti e si porrà attenzione sui legami tra di esse.

5.2.1 Rappresentazione matriciale wave

Un generico elemento algebrico i n -porte, visto in Sezione 5.1.1 ha la seguente rappresentazione matriciale

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} M_i(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_i(s) \\ I_i(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} U_i(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{i0}(s) \end{bmatrix} \\ n \times 2n & 2n \times 1 & n \times 1 \quad n \times 1. \end{array} \quad (5.12)$$

Definite le impedenze caratteristiche $Z_1(s) \dots Z_n(s)$ alle porte del dispositivo, è possibile passare dalla rappresentazione Kirchoff alla rappresentazione Wave attraverso la relazione

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -Z_1(s) \\ 1 & Z_1(s) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 & -Z_n(s) \\ 1 & Z_n(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(s) \\ A_1(s) \\ \vdots \\ B_n(s) \\ A_n(s) \end{bmatrix},$$

ossia

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} W_i(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_i(s) \\ I_i(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} B_i(s) \\ A_i(s) \end{bmatrix} \\ 2n \times 2n & 2n \times 1 & 2n \times 1, \end{array} \quad (5.13)$$

dove $W_i(s)$ è la *matrice di trasformazione*, mentre

$$\begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B_1(s) & A_1(s) & \dots & B_n(s) & A_n(s) \end{bmatrix}^T$$

è il *vettore delle variabili Wave* dell'elemento i -esimo.

Si noti come la matrice $W_i(s)$ sia composta da sottomatrici 2×2 di eq. (5.11) poste sulla diagonale principale.

La particolare struttura di $W_i(s)$ permette di ottenere la sua inversa $W_i^{-1}(s)$, semplicemente invertendo le singole sottomatrici come mostrato nella seguente equazione

$$\begin{bmatrix} W_i^{-1}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/Z_1(s) & 1/Z_1(s) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/Z_n(s) & 1/Z_n(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Naturalmente l'operazione d'inversione è possibile se e solo se tutte le sottomatrici sono invertibili ovvero, $Z_m(s) \neq 0$, con $m = 1 \dots n$.

Una volta ottenute $W_i(s)$ e $W_i^{-1}(s)$, l'eq. (5.12) può essere riformulata nel modo seguente

$$\begin{array}{cccccc} \begin{bmatrix} M_i(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W_i^{-1}(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W_i(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_i(s) \\ I_i(s) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} U_i(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{i0}(s) \end{bmatrix} \\ n \times 2n & 2n \times 2n & 2n \times 2n & 2n \times 1 & & n \times 1 \quad n \times 1. \end{array} \quad (5.14)$$

Definita la *matrice caratteristica wave* dell'elemento

$$\begin{bmatrix} M_{wi}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_i(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i^{-1}(s) \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

ed effettuata la trasformazione di eq. (5.13), si ottiene

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} M_{wi}(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_i(s) \\ A_i(s) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} U_i(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{i0}(s) \end{bmatrix} \\ n \times 2n & 2n \times 1 & & n \times 1 \quad n \times 1. \end{array} \quad (5.16)$$

La relazione di eq. (5.15) permette di legare la matrice caratteristica Kirchoff $M_i(s)$ dell'elemento *i-esimo* alla sua duale $M_{wi}(s)$ nel dominio d'onda.

Dato un qualsiasi circuito algebrico lineare è quindi possibile ottenere una rappresentazione matriciale wave come in eq. (5.16), dei singoli elementi. Analogamente a quanto fatto in Sezione 5.1.1, raggruppando le eq. (5.16) in un'unica matrice, si ottiene

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} M_w(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(s) \\ A(s) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} U(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0(s) \end{bmatrix} \\ N \times 2N & 2N \times 1 & & N \times 1 \quad N \times 1, \end{array} \quad (5.17)$$

dove $M_w(s)$, $\begin{bmatrix} B(s) & A(s) \end{bmatrix}^T$, $U(s)$ e $U_0(s)$ sono rispettivamente: la *matrice caratteristica Wave*, il *vettore Wave*, il *vettore degli ingressi* e il *vettore delle condizioni iniziali del circuito*.

Se si definisce una *matrice di trasformazione del circuito* $W(s)$, in maniera analoga a quanto fatto per il generico elemento algebrico in eq. (5.13), riferita a tutte le N porte del circuito, è facile dimostrare che

$$\begin{array}{cccccc} \begin{bmatrix} M(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W^{-1}(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} U(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0(s) \end{bmatrix} \\ N \times 2N & 2N \times 2N & 2N \times 2N & 2N \times 1 & & N \times 1 \quad N \times 1, \end{array}$$

Anche in questo caso la matrice $W(s)$ è invertibile se e solo se tutte le impedenze di riferimento alle N porte sono diverse da zero.

Quindi il legame tra $M(s)$, matrice caratteristica Kirchoff del circuito, e $M_w(s)$, matrice caratteristica Wave del circuito, è

$$\begin{bmatrix} M_w(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

La relazione di eq. (5.18) permette il passaggio diretto da una rappresentazione alla sua duale, senza dover effettuare la trasformazione di ogni singolo elemento.

Per ottenere una rappresentazione matriciale Wave completa, occorre trasformare nel dominio d'onda anche la matrice delle connessioni C vista in Sezione 5.1.1. Nel dominio di Kirchoff, la connessione della generica porta m con la porta k , è espressa in termini matriciali

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m(s) \\ I_m(s) \\ V_k(s) \\ I_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'eq. (5.14), può essere riformulata come segue

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/Z_m(s) & 1/Z_m(s) \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/Z_k(s) & 1/Z_k(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{c_w(s)} \begin{bmatrix} B_m(s) \\ A_m(s) \\ B_k(s) \\ A_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

La matrice di connessione due porte Wave $c_w(s)$ ha un'espressione del tipo

$$c_w(s) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1/Z_m(s) & 1/Z_m(s) & -1/Z_k(s) & 1/Z_k(s) \end{bmatrix}.$$

Nel caso in cui si abbia l'accortezza di imporre lo stesso valore di impedenza di riferimento alle due porte, $Z_k(s) = Z_m(s)$, la matrice delle connessioni si riduce a

$$c_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

in caso contrario può essere riscritta nella seguente versione

$$c_w(s) = \begin{bmatrix} -1 & K(s) & 0 & 1 - K(s) \\ 0 & 1 + K(s) & -1 & -K(s) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad K(s) = \frac{Z_m(s) - Z_k(s)}{Z_m(s) + Z_k(s)}.$$

Nel primo caso la matrice delle connessioni due porte conserva, anche nel dominio Wave, la caratteristica di avere elementi che possono assumere solo valori 1, -1 e 0, ed equivale a scrivere le relazioni di connessione diretta $A_m(s) = B_k(s)$ e $B_m(s) = A_k(s)$.

Nel secondo caso la matrice delle connessioni due porte diventa funzione di s , assumendo pertanto proprietà di memoria, e rappresenta la versione matriciale della cella di scattering vista in Sezione 3.2.1.

Raggruppando le eq. (5.19) per tutte le N porte del circuito, si ottiene la *matrice delle connessioni Wave del circuito*

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} C_w(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(s) \\ A(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ N \times 2N & 2N \times 1 & N \times 1. \end{array}$$

Analogamente a quanto visto per la matrice caratteristica Wave $M_w(s)$, è possibile ricavare direttamente la matrice $C_w(s)$ dalla sua duale C nel dominio di Kirchoff attraverso la relazione

$$\begin{bmatrix} C_w(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1}(s) \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

ciò permette di evitare la trasformazione delle singole equazioni di connessione.

La *matrice di tableau Wave* avrà la seguente forma

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} C_w(s) \\ M_w(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(s) \\ A(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ U_0(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_w(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(s) \\ A(s) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ U_0(s) \end{bmatrix} \\ 2N \times 2N & 2N \times 1 & 2N \times 1 \quad 2N \times 1. \end{array} \quad (5.21)$$

Considerando le eq. (5.20) e (5.18), si può facilmente intuire come valga la relazione

$$\begin{bmatrix} T_w(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1}(s) \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

che permette il passaggio diretto dalla rappresentazione Kirchoff alla sua duale Wave. I vettori $U(s)$ e $U_0(s)$ rimangono invariati nel passaggio da un dominio all'altro.

Dal momento che per costruzione $\det[W(s)] \neq 0$, il $\det[T(s)] \neq 0$ se e solo se $\det[T_w(s)] \neq 0$.

Quindi la matrice di $T(s)$ è invertibile se e solo se lo è $T_w(s)$. In questo caso, anche nel dominio Wave, il sistema ammette un'unica soluzione

$$\begin{bmatrix} B(s) \\ A(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_w^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U(s) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_w^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_0(s) \end{bmatrix}}_{\text{condizioni iniziali}}, \quad (5.23)$$

composta dalle due risposte *con stato zero* e *con ingresso zero*.

Si definiscano ora

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= Z_7(s) = R_g \\ Z_2(s) &= Z_8(s) = \frac{1}{sC} \\ Z_3(s) &= Z_4(s) = R_g + \frac{1}{sC} \\ Z_5(s) &= Z_9(s) = sL \\ Z_6(s) &= Z_{10}(s) = R, \end{aligned}$$

Il sistema può essere efficacemente rappresentato mediante una matrice di tableau $T(s)$ che definisce in maniera completa il circuito.

Se la matrice $T(s)$ è invertibile, ossia $\det[T(s)] \neq 0$, il sistema ammette un'unica soluzione in forma chiusa come in eq. (5.10).

Si è inoltre verificato come sia possibile, nel dominio di Laplace, passare direttamente dalla rappresentazione Kirchoff alla sua duale Wave attraverso la matrice di trasformazione $W(s)$.

Si introducano ora nel circuito elementi algebrici non lineari.

Dal momento che la trasformata di Laplace non è in grado di gestire le non linearità, la rete elettrica sarà definita da un insieme di equazioni algebriche differenziali non lineari, espresse nel dominio del tempo.

In generale il sistema differenziale non lineare così ottenuto, non ammette soluzioni analitiche in forma chiusa e pertanto, viene risolto mediante algoritmi numerici iterativi come, ad esempio, Newton Raphson [38].

In questa Sezione si cercherà di dare una formulazione analitica di un generico circuito non lineare e si accennerà ad un metodo di soluzione numerico.

5.3.1 Formulazione delle equazioni di tableau per circuiti non lineari

Per formulare le equazioni di tableau di un circuito non lineare, vengono impiegati esattamente gli stessi principi visti nelle Sezioni precedenti che consistono semplicemente nell'elencare:

- a) le equazioni differenziali non lineari degli elementi algebrici;
- b) le equazioni che definiscono la topologia del circuito.

Dal momento che nel circuito sono presenti elementi non lineari, non trattabili nel dominio di Laplace, la descrizione verrà effettuata nel dominio del tempo t .

5.3.2 Elementi algebrici nel dominio del tempo

Si consideri un generico elemento algebrico i n -porte, la sua equazione caratteristica è definita come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(v_1^{(\alpha_1)}(t), i_1^{(\beta_1)}(t), v_2^{(\alpha_2)}(t), i_2^{(\beta_2)}(t), \dots, v_n^{(\alpha_n)}(t), i_n^{(\beta_n)}(t), t) = 0 \\ f_2(v_1^{(\alpha_1)}(t), i_1^{(\beta_1)}(t), v_2^{(\alpha_2)}(t), i_2^{(\beta_2)}(t), \dots, v_n^{(\alpha_n)}(t), i_n^{(\beta_n)}(t), t) = 0 \\ \vdots \\ f_n(v_1^{(\alpha_1)}(t), i_1^{(\beta_1)}(t), v_2^{(\alpha_2)}(t), i_2^{(\beta_2)}(t), \dots, v_n^{(\alpha_n)}(t), i_n^{(\beta_n)}(t), t) = 0 \end{array} \right.,$$

dove, per ogni porta m , $m = 1, \dots, n$, $f_m()$ rappresenta una funzione algebrica, $v_m^{(\alpha_m)}$ è la derivata di ordine α_m di v_m se $\alpha_m > 0$, oppure l'integrale di ordine α_m di v_m se $\alpha_m < 0$. Analogamente $i_m^{(\beta_m)}$ è la derivata di ordine β_m di i_m se $\beta_m > 0$, oppure l'integrale di ordine β_m di i_m se $\beta_m < 0$. Si definisca il *vettore di Kirchoff differenziale* del generico elemento i , se l'elemento è non lineare almeno una delle funzioni algebriche $f_m()$ deve essere non lineare ed il

sistema può essere espresso nella seguente forma

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \left([v_i^{(\alpha)}(t) \ i_i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 \\ f_2 \left([v_i^{(\alpha)}(t) \ i_i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \left([v_i^{(\alpha)}(t) \ i_i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{o} \quad F_i \left([v_i^{(\alpha)}(t) \ i_i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 . \quad (5.24)$$

In caso l'elemento sia lineare, il sistema di eq. (5.24) può essere riscritto nella forma matriciale

$$\begin{array}{ccc} \left[M_i \right] & \left[\begin{array}{c} v_i^{(\alpha)}(t) \\ i_i^{(\beta)}(t) \end{array} \right] & = \left[u_i(t) \right] , \\ n \times 2n & 2n \times 1 & n \times 1 \end{array} \quad (5.25)$$

che rappresenta il sistema di eq. (5.1) espresso nel dominio del tempo anziché in quello di Laplace.

Topologia del circuito.

Si è visto che la topologia del circuito può essere descritta mediante le equazioni delle giunzioni serie e parallelo.

Tali equazioni rappresentano un sistema di Leggi di Kirchoff alle tensioni e alle correnti che, per loro natura, sono indipendenti dai tipi di dispositivi presenti nel circuito e pertanto sono esattamente identiche a quelle viste in tabella 5.2.

Le due giunzioni possono quindi essere considerate come due elementi algebrici istantanei lineari.

Costruzione del sistema non lineare

Si consideri un circuito composto da m elementi algebrici (giunzioni comprese). Si supponga che il generico elemento i della rete, abbia n_i porte, pertanto la rete è costituita da $N = \sum_{i=1}^m n_i$ porte. Definito il *vettore di Kirchoff differenziale del circuito*

$$\left[v^{(\alpha)}(t) \ i^{(\beta)}(t) \right]^T = \left[\left[v_1^{(\alpha_1)}(t) \ i_1^{(\beta_1)}(t) \right]^T \dots \left[v_m^{(\alpha_m)}(t) \ i_m^{(\beta_m)}(t) \right]^T \right]^T ,$$

è possibile rappresentare le equazioni dei singoli dispositivi mediante un unico sistema di N equazioni del tipo

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \left([v^{(\alpha)}(t) \ i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 \\ F_2 \left([v^{(\alpha)}(t) \ i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_m \left([v^{(\alpha)}(t) \ i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{o} \quad F \left([v^{(\alpha)}(t) \ i^{(\beta)}(t)]^T, t \right) = 0 . \quad (5.26)$$

Le equazioni di connessione porta-porta forniscono le restanti N equazioni linearmente indipendenti per la soluzione del sistema.

Dal momento che le condizioni di continuità di Kirchoff sono indipendenti dalla natura degli elementi, possono essere rappresentate mediante un'equazione matriciale del tutto analoga a quella vista in Sezione 5.1.1, ossia

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} C \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} v(t) \\ i(t) \end{array} \right] & = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right] \\ N \times 2N & 2N \times 1 & N \times 1 . \end{array}$$

Il sistema di $2N$ equazioni differenziali, che definisce in maniera univoca il circuito, è pertanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} C \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v(t) \\ i(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right] \quad N \text{ equazioni} \\ F([v^{(\alpha)}(t) \ i^{(\beta)}(t)]^T, t) = 0 \quad N \text{ equazioni,} \end{array} \right.$$

ossia

$$T([v(t) \ i(t)]^T, [v^{(\alpha)}(t) \ i^{(\beta)}(t)]^T, t) = 0 . \quad (5.27)$$

Il sistema $T(\quad)$ di $2N$ equazioni differenziali non lineari nelle $2N$ incognite $[v(t) \ i(t)]^T$ è detto *sistema di tableau del circuito*.

Soluzione dell'equazione di tableau

La presenza di non linearità nell'equazione di tableau, non permette di trovare una soluzione analitica in forma chiusa. A differenza del caso lineare non si è in grado di prevedere a priori se il sistema è risolubile o meno.

In generale l'eq. (5.27) può non ammettere soluzioni, averne una, un numero finito, o infinito. I circuiti che si incontrano in pratica, hanno solitamente un'unica soluzione, oppure un numero finito di soluzioni multiple. Un numero di soluzioni infinito, o l'assenza di soluzioni, deriva da una scelta insoddisfacente del modello del circuito e pertanto sono poco significative.

L'approccio più generale attualmente disponibile consiste nella discretizzazione del sistema attraverso, ad esempio, il metodo di Eulero (si veda Chua [38]), che permette di trasformare il sistema differenziale in un sistema algebrico di equazioni istantanee non lineari alle differenze.

Il sistema non lineare istantaneo così ottenuto, è risolubile attraverso algoritmi numerici iterativi che, ad ogni passo, convergono progressivamente alla soluzione.

La maggior parte dei programmi numerici si basano sull'algoritmo iterativo di Newton-Raphson, la cui descrizione può essere vista in Chua [38].

Naturalmente la ricerca della soluzione per successive approssimazioni è computazionalmente troppo costosa, soprattutto per l'implementazione di filtri che devono operare in tempo reale a frequenze relativamente alte.

Nei filtri ad onda numerica, la trasformazione affine, effettuata sulle non linearità, permette di ottenere una versione numerica computabile del circuito elettrico di riferimento. Ciò permette di superare il problema sopra riportato.

5.4 Dominio Wave numerico lineare

In questa Sezione verrà presentato un metodo di risoluzione per filtri ad onda numerica che prende spunto dall'analisi di tableau dei circuiti analogici. Anche in questo caso si cercherà un

sistema completo di equazioni che descriva in maniera univoca e completa il filtro digitale. Come nel caso analogico, l'esclusiva presenza di elementi lineari permette di rappresentare il sistema di tableau mediante matrice, le cui proprietà consentono di determinare a priori l'esistenza di soluzioni in forma chiusa.

5.4.1 Rappresentazione matriciale

Al fine di poter scrivere l'equazione matriciale di tableau, è necessario descrivere il comportamento degli elementi lineari nel dominio d'onda discreto.

Elemento lineare

Si consideri un generico elemento lineare n -porte, una volta definite le coppie di variabili d'onda $A_i(z)$ e $B_i(z)$, alla generica porta i , l'equazione dell'elemento, nel dominio discreto z , risulta del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{1,1}(z)B_1(z) + M_{1,2}(z)B_2(z) + \dots + M_{1,n}(z)B_n(z) + \\ M_{1,n+1}(z)A_1(z) + M_{1,n+2}(z)A_2(z) + \dots + M_{1,2n}(z)A_n(z) = U_1(z) \\ M_{2,1}(z)B_1(z) + M_{2,2}(z)B_2(z) + \dots + M_{2,n}(z)B_n(z) + \\ M_{2,n+1}(z)A_1(z) + M_{2,n+2}(z)A_2(z) + \dots + M_{2,2n}(z)A_n(z) = U_2(z) \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ M_{n,1}(z)B_1(z) + M_{n,2}(z)B_2(z) + \dots + M_{n,n}(z)B_n(z) + \\ M_{n,n+1}(z)A_1(z) + M_{n,n+2}(z)A_2(z) + \dots + M_{n,2n}(z)A_n(z) = U_n(z) , \end{array} \right. \quad (5.28)$$

dove $M_{i,j}(z)$ è un polinomio di grado $K_{i,j}$ nella variabile z^{-1}

$$M_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{K_{i,j}} m_{i,j}(k)z^{-k} .$$

Dal momento che il sistema di eq. (5.28) è lineare, può essere riformulato in termini matriciali

$$\begin{bmatrix} M_{1,1}(z) \dots M_{1,n}(z) & M_{1,n+1}(z) \dots M_{1,2n}(z) \\ M_{2,1}(z) \dots M_{2,n}(z) & M_{2,n+1}(z) \dots M_{2,2n}(z) \\ \vdots & \vdots \\ M_{n,1}(z) \dots M_{n,n}(z) & M_{n,n+1}(z) \dots M_{n,2n}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(z) \\ \vdots \\ B_n(z) \\ A_1(z) \\ \vdots \\ A_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \vdots \\ U_n(z) \end{bmatrix} ,$$

ovvero

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} M(z) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(z) \\ A(z) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} U(z) \end{bmatrix} \\ n \times 2n & 2n \times 1 & n \times 1 . \end{array} \quad (5.29)$$

$M(z)$, $\begin{bmatrix} B(z) & A(z) \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} U(z) \end{bmatrix}^T$ rappresentano rispettivamente la *matrice*, il *vettore*, e il *vettore degli ingressi* dell'elemento *WDC*, nel dominio numerico z .

Assumendo $K = \max(K_{i,j})$ e posto

$$m'_{i,j}(k) = \begin{cases} m_{i,j}(k) & \text{se } k \leq K_{i,j} \\ 0 & \text{se } K_{i,j} < k \leq K \end{cases} \quad \text{con } i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, 2n ,$$

si ottiene

$$M(z) = M_0 + \sum_{k=1}^K z^{-k} M_k , \quad (5.30)$$

dove

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_{1,1}(0) \dots m_{1,n}(0) & m_{1,n+1}(0) \dots m_{1,2n}(0) \\ m_{2,1}(0) \dots m_{2,n}(0) & m_{2,n+1}(0) \dots m_{2,2n}(0) \\ \vdots & \vdots \\ m_{n,1}(0) \dots m_{n,n}(0) & m_{n,n+1}(0) \dots m_{n,2n}(0) \end{bmatrix}$$

e

$$M_k = \begin{bmatrix} m'_{1,1}(k) \dots m'_{1,n}(k) & m'_{1,n+1}(k) \dots m'_{1,2n}(k) \\ m'_{2,1}(k) \dots m'_{2,n}(k) & m'_{2,n+1}(k) \dots m'_{2,2n}(k) \\ \vdots & \vdots \\ m'_{n,1}(k) \dots m'_{n,n}(k) & m'_{n,n+1}(k) \dots m'_{n,2n}(k) \end{bmatrix}$$

Utilizzando l'eq. (5.30) si può riformulare l'eq. (5.29) nel seguente modo

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} M_0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(z) \\ A(z) \end{bmatrix} & + \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} M_k \end{bmatrix} z^{-k} \begin{bmatrix} B(z) \\ A(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(z) \end{bmatrix} \\ n \times 2n & 2n \times 1 & n \times 2n \quad 2n \times 1 \quad n \times 1 , \end{array}$$

che, una volta antitrasformata, assume la seguente forma

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} M_0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} & + \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} M_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(n) \end{bmatrix} \\ \text{parte istantanea} & & \text{parte con ritardo} \end{array}$$

I vettori $[b(n-k) \ a(n-k)]^T$, riferiti ai K istanti immediatamente precedenti il generico istante n , sono noti. Pertanto, isolando la parte incognita del sistema dai vettori noti, si ottiene

$$\begin{bmatrix} M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} M_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(n) \end{bmatrix},$$

dove M_0 è detta *matrice istantanea dell'elemento*.

Prima di procedere alla costruzione della matrice di tableau del filtro WDC, è utile ricavare la rappresentazione matriciale di alcuni elementi WDC, riportata in tabella 5.6.

Si noti che se l'elemento è istantaneo $K = 0$, l'equazione matriciale si riduce a

$$\begin{bmatrix} M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(n) \end{bmatrix}.$$

Si può inoltre facilmente dedurre che:

- se $m_{i,i+N}(0) = 0$ la porta i è istantaneamente adattata;
- se $m_{i,i+N}(k) = 0$, per $k = 0, \dots, K$, la porta è totalmente adattata;
- se $m_{i,i+N}(k) = 0$, per $k = 0, \dots, K_i < K$ è parzialmente adattata.

Costruzione della matrice

Si consideri un filtro costituito da m elementi WDC lineari. Si supponga che il generico elemento i abbia n_i porte e sia definito dall'equazione

$$\begin{bmatrix} M_0^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i(n) \\ a_i(n) \end{bmatrix} = - \sum_{k=1}^{K_i} \begin{bmatrix} M_k^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i(n-k) \\ a_i(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_i(n) \end{bmatrix}.$$

Il numero totale di porte presenti nel filtro risulta pertanto $N = \sum_{j=1}^{K_i} n_i$.

Assumendo

$$K = \max(K^i) \quad \text{con } i = 1, \dots, m$$

e posto

$$M_k'^i = \begin{cases} M_k^i & \text{se } k \leq K^i \\ 0 & \text{se } K^i < k \leq K \end{cases} \quad \text{con } i = 1, \dots, m$$

le equazioni dei singoli elementi possono essere rappresentate da un'unica equazione matriciale del tipo

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} M_0 \end{bmatrix} \\ N \times 2N \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} \\ 2N \times 1 \end{matrix} = - \sum_{k=1}^K \begin{matrix} \begin{bmatrix} M_k \end{bmatrix} \\ N \times 2N \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} \\ 2N \times 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{bmatrix} u(n) \end{bmatrix} \\ N \times 1 \end{matrix} \quad (5.31)$$

Elemento	Non adattato	Adattato
Resistenza	$[1 \ -k] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = 0$	$[1 \ 0] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = 0$
Generatore Reale	$[1 \ -k] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = -(1+k)e(n)$	$[1 \ 0] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = e(n)$
Condensatore	$[1 \ -p] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = [-p \ 1] \begin{bmatrix} b(n-1) \\ a(n-1) \end{bmatrix}$	$[1 \ 0] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} b(n-1) \\ a(n-1) \end{bmatrix}$
Induttore	$[1 \ p] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = [-p \ -1] \begin{bmatrix} b(n-1) \\ a(n-1) \end{bmatrix}$	$[1 \ 0] \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = [0 \ -1] \begin{bmatrix} b(n-1) \\ a(n-1) \end{bmatrix}$
Cella di Scattering	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -k & -1+k \\ 0 & 1 & -1-k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \end{bmatrix} = 0$
Giunzione tre porte serie	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1-1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ b_3(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1-1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha_1 & \alpha_1 & 1-\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ b_3(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \end{bmatrix} = 0$
Giunzione tre porte parallelo	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 1-\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ b_3(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \end{bmatrix} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\alpha_1 & \alpha_1-1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 & \alpha_1-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ b_3(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \end{bmatrix} = 0$
Mutatore C-R	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -p & p-1 \\ 0 & 1 & -1-p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 1 & p-1 \\ 0 & -p & 1+p & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n-1) \\ b_2(n-1) \\ a_1(n-1) \\ a_2(n-1) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n-1) \\ b_2(n-1) \\ a_1(n-1) \\ a_2(n-1) \end{bmatrix}$
Mutatore L-R	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p & -p-1 \\ 0 & 1 & p-1 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & -1 & p+1 \\ 0 & -p & p-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n-1) \\ b_2(n-1) \\ a_1(n-1) \\ a_2(n-1) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(n-1) \\ b_2(n-1) \\ a_1(n-1) \\ a_2(n-1) \end{bmatrix}$

Tabella 5.6: Rappresentazione matriciale di alcuni elementi WDC.

dove

$$M_0 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0^1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} M_0^m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

è la *matrice istantanea del filtro*, mentre

$$M_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k'^1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} M_k'^m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

è la *matrice con ritardo k del filtro*. I termini

$$\begin{bmatrix} b(n) & a(n) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} b_1(n) & a_1(n) & \dots & b_m(n) & a_m(n) \end{bmatrix}^T \text{ e } \begin{bmatrix} u(n) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_1(n) & \dots & u_m(n) \end{bmatrix}^T$$

sono rispettivamente il *vettore delle variabili wave incognite del filtro* e il *vettore dei termini noti*. In questa maniera si sono ricavate N equazioni lineari in $2N$ incognite. Le restanti N equazioni che permettono la risoluzione del sistema, sono date dalle relazioni di connessione porta-porta. Se la porta k è connessa alla porta m allora

$$b_k(n) = a_m(n) \quad b_m(n) = a_k(n) . \quad (5.32)$$

Scrivendo le eq. (5.32) per ogni coppia di porte connesse, si ottiene un sistema di N equazioni che può essere scritto nella seguente forma matriciale

$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$N \times 2N \quad 2N \times 1 \quad N \times 1 .$

Unendo le eq. (5.31) e (5.33) si ottiene un sistema di $2N$ equazioni in $2N$ incognite

$$\begin{bmatrix} C \\ M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} 0 \\ M_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix}$$

$2N \times 2N \quad 2N \times 1 \quad 2N \times 2N \quad 2N \times 1 \quad 2N \times 1 ,$

ovvero

$$\begin{bmatrix} T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \underbrace{\sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix}}_{\text{memoria}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} \quad (5.34)$$

La *matrice di Tableau* T_0 e il termine $\begin{bmatrix} 0 & u(n) \end{bmatrix}^T$ descrivono rispettivamente il comportamento del circuito e degli ingressi all'istante attuale n . Il primo addendo invece, è una combinazione

lineare di valori di $[b \ a]^T$, nei K istanti immediatamente precedenti l'istante attuale n e pertanto, rappresenta la memoria degli elementi reattivi del filtro. Se il $\det[T_0] \neq 0$, allora la matrice è invertibile e il sistema ammette un'unica soluzione del tipo

$$\begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = \underbrace{- \begin{bmatrix} T_0^{-1} \end{bmatrix} \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix}}_{\text{risposta dovuta alla memoria}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix}}_{\text{risposta dovuta agli ingressi}} \quad (5.35)$$

Anche in questo caso la soluzione è composta da due termini:

- *risposta con ingresso zero*, dovuta alle sole memorie, (con ingressi posti a zero)
- *risposta istantanea*, dovuta esclusivamente agli ingressi (con tutte le celle di memoria nulle).

Nel caso in cui $\det[T_0] = 0$, il sistema può non essere risolvibile, oppure ammettere un numero infinito di soluzioni. Entrambe le ipotesi sono poco significative, in quanto derivano da una scelta insoddisfacente del filtro di riferimento.

Il filtro WDC del circuito di riferimento di Fig. 5.1, riportato in Fig. 5.4 ha rappresentazione

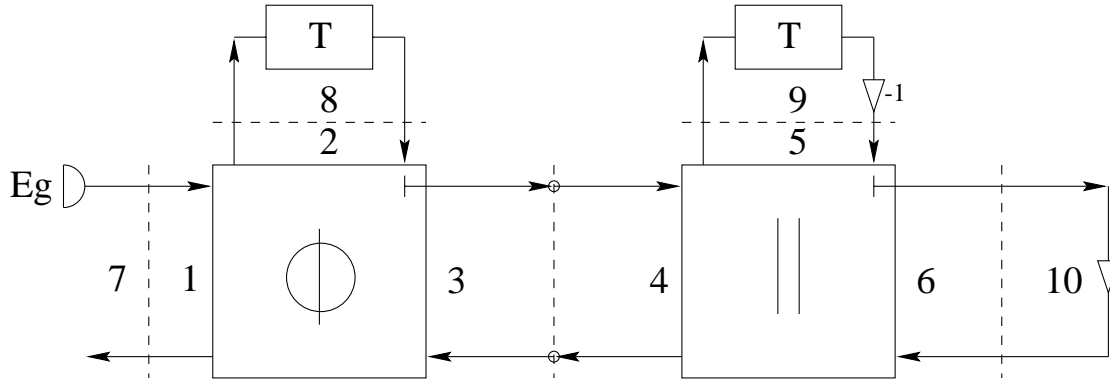


Fig. 5.4: Filtro WDC del circuito elettrico di Fig. 5.1.

matriciale di Tabella 5.7.

5.4.2 Imposizione delle condizioni iniziali

Si consideri l'eq. (5.35), posto $n = K$, la soluzione è nota qualora si conoscano i valori dei vettori $[b(k) \ a(k)]^T$, per $k = 0, \dots, K-1$. Solitamente essi sono noti in forma implicita e devono essere ricavati dalle condizioni iniziali imposte sulle porte del filtro.

Infatti, il filtro WDC nasce come implementazione numerica diretta di un circuito elettrico analogico, pertanto le condizioni iniziali sono solitamente date in termini di variabili di Kirchhoff. I valori iniziali ad una generica porta m hanno espressioni del tipo $p_i(k) = (a_i(k) + b_i(k))/2$, oppure $q_m(k) = (a_m(k) - b_m(k))/2\mu_m$, con $k = 0, \dots, K-1$. p e q rappresentano le variabili di Kirchhoff filtrate viste in Sez. 3.1.3, e sono legate rispettivamente a v e i , mediante equazioni differenziali del tipo

$$P(s) = H_v(s)V(s), \quad Q(s) = H_i(s)I(s),$$

dove H_v e H_i sono rispettivamente i *filtri di riferimento di tensione e corrente*. Se $H_v = 1$ e $H_i = 1$, allora le variabili filtrate sono identicamente uguali alle variabili v, i .

1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$b_1(n)$	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	$b_2(n)$	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$b_3(n)$	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$a_1(n)$	0	0
0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	$a_2(n)$	0	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	$a_3(n)$	0	0
			0		0	0	1	0	0	0	0	0	$b_4(n)$	0	0
			0		0	0	0	1	0	0	0	-1	$b_5(n)$	0	0
			0		0	0	0	0	1	0	0	0	$b_6(n)$	0	0
			0		0	0	0	0	0	1	0	-1	$a_4(n)$	0	0
1	0	0	$\alpha_1 - 1$	α_1	α_1								$a_5(n)$	0	0
0	1	0	$1 - \alpha_1$	α_1	$1 - \alpha_1$								$a_6(n)$	0	0
0	0	1	1	1	0								$b_7(n)$	0	0
			0			1	0	0	$1 - \gamma_1$	$\gamma_1 - 1$	-1	0	$a_7(n)$	0	0
			0			0	1	0	$-\gamma_1$	γ_1	-1	0	$b_8(n)$	0	0
			0			0	0	1	$-\gamma_1$	$1 - \gamma_1$	0	0	$a_8(n)$	0	0
			0								1	0	$b_9(n)$	0	$E_g(n)$
			0								0	1	$a_9(n)$	$a_8(n - 1)$	0
			0								0	0	$b_{10}(n)$	$-a_9(n - 1)$	0
			0								0	0	$a_{10}(n)$	0	0

Tabella 5.7: Rappresentazione matriciale Wave del filtro di Fig. 5.4.

Se si conoscessero i valori delle variabili di Kirchoff $p_m(k)$ e $q_m(k)$ per tutte le porte del circuito si potrebbero ricavare le loro duali attraverso la nota trasformazione

$$a_m(k) = p_m(k) + \mu_m q_m(k) \quad b_m(k) = p_m(k) - \mu_m q_m(k)$$

e quindi, la determinazione delle condizioni iniziali nel dominio Wave sarebbe banale. Purtroppo l'insieme delle condizioni iniziali all'istante k non è completo. Nella maggior parte delle porte non si conoscono i valori iniziali di p_m e di q_m , mentre in alcune se ne conosce solo uno.

La determinazione dei primi K valori del vettore Wave del circuito deve pertanto essere ottenuta mediante la scrittura di un nuovo sistema lineare di equazioni che tenga conto sia dei valori delle condizioni iniziali, sia delle proprietà del filtro.

Al fine di procedere alla spiegazione dettagliata del metodo di soluzione è necessario introdurre il concetto di *relazione lineare istantanea e con ritardo*.

Relazione lineare istantanea e con ritardo

Si consideri il sistema di eq. (5.34), una sua generica equazione lineare dipende dagli ingressi, (parte istantanea) e da una combinazione lineare delle variabili Wave definite nei K istanti immediatamente precedenti a quello attuale. Se la relazione non dipende dai valori passati delle variabili Wave, essa è detta *relazione istantanea o a ritardo zero*. Se invece dipende dagli n valori delle variabili Wave, immediatamente precedenti all'istante attuale, è detta *relazione con ritardo n* . Le equazioni di un elemento puramente resistivo e quelle di connessione porta a porta sono, ad esempio, relazioni di tipo istantaneo. Mutatori, induttori e condensatori sono caratterizzati invece, da equazioni con ritardo *uno*.

La struttura delle matrici T_k permette di definire il tipo di relazione della generica equazione i del sistema di eq. (5.34). Se la riga i della matrice T_k è identicamente uguale a zero, $T_{k(i)} = 0$, la i -esima equazione lineare del sistema non dipende dal vettore $[b(n - k) \ a(n - k)]^T$. È chiaro che se $T_{k(i)} = 0$, per $k = 1, \dots, K$, la i -esima equazione è istantanea. Analogamente se $T_{1(i)} \neq 0$, e $T_{k(i)} = 0$, per $k = 2, \dots, K$ allora i -esima equazione è caratterizzata da relazione con ritardo *uno*. In generale, $T_{n(i)} \neq 0$ e $T_{k(i)} = 0$, per $k = n + 1, \dots, K$ con $n = 0, \dots, K$ sono le due condizioni necessarie e sufficienti per definire una relazione con ritardo n .

Si voglia calcolare il valore del vettore $[b(0) \ a(0)]^T$. All'istante zero, tutte le equazioni lineari con ritardo del sistema di eq. (5.34) non hanno validità, in quanto non si conoscono i valori delle variabili wave negli istanti precedenti e pertanto vanno eliminate. In questa maniera il sistema risultante descrive il comportamento della sola parte istantanea del filtro, ma risulta indeterminato, in quanto il numero di equazioni è ora inferiore al numero d'incognite. Le equazioni eliminate vanno pertanto sostituite con le nuove relazioni lineari istantanee del tipo

$$\frac{a_m(0) + b_m(0)}{2} = p_m(0), \quad \frac{a_m(0) - b_m(0)}{2\mu_m} = q_m(0), \quad (5.36)$$

ottenute direttamente dalle condizioni iniziali.

Operativamente è sufficiente sostituire nella matrice T_0 tutte le righe con ritardo con delle nuove righe aventi eq. (5.36), dove $p_m(0)$ e $q_m(0)$ sono termini noti. Il sistema può essere rappresentato nella seguente forma matriciale

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} T'_0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b(0) \\ a(0) \end{bmatrix} & = \underbrace{\begin{bmatrix} p(0) \\ q(0) \end{bmatrix}}_{\text{condizioni iniziali}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u(0) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} \\ 2N \times 2N & 2N \times 1 & \quad \quad \quad 2N \times 1 \quad \quad \quad 2N \times 1 \end{array}$$

Se il sistema è ben condizionato allora $T'(0)$, *matrice delle condizioni iniziali a ritardo nullo*, ha $\det[T'(0)] \neq 0$ e il sistema ammette l'unica soluzione

$$\begin{bmatrix} b(0) \\ a(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_0'^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(0) \\ q(0) \end{bmatrix}}_{\text{condizioni iniziali}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_0'^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(0) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}}.$$

La condizione $\det[T'_0] = 0$ è sintomatica di un sistema malcondizionato e pertanto, la mancanza di una soluzione è indipendente dal metodo che si è utilizzato (sia analogico che discreto) per risolvere il circuito.

La determinazione di un insieme corretto di condizioni, esula dagli scopi di questo lavoro, ci si limiterà ad elencare alcune delle più frequenti cause di mal condizionamento:

- imposizione di tutte le tensioni appartenenti ad una maglia chiusa;
- imposizione di tutte le correnti uscenti da una superficie chiusa;
- imposizione contemporanea di tensione e corrente ad una porta di un bipolo resistivo.

Maggiori informazioni riguardo l'argomento sono disponibili in Chua [38].

Per la determinazione di $[b(1) \ a(1)]^T$ si procede in maniera analoga con l'unica differenza che, essendo disponibili i valori $[b(0) \ a(0)]^T$, è possibile conservare non solo le relazioni istantanee del sistema di eq. (5.34), ma anche quelle a ritardo unitario. In pratica è sufficiente sostituire con opportune condizioni iniziali

$$\frac{a_m(1) + b_m(1)}{2} = p_m(1), \quad \frac{a_m(1) - b_m(1)}{2\mu_m} = q_m(1),$$

solo le equazioni aventi relazione con ritardo maggiore di uno. Il sistema che si ottiene è del tipo

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} T'_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b(1) \\ a(1) \end{bmatrix} & = \underbrace{\begin{bmatrix} p(1) \\ q(1) \end{bmatrix}}_{\text{condizioni iniziali}} - \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(0) \\ a(0) \end{bmatrix}}_{\text{ritardo}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u(1) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} \\ 2N \times 2N & 2N \times 1 & \quad \quad \quad 2N \times 1 \quad \quad \quad 2N \times 1 \end{array}$$

Applicando gli stessi principi la soluzione, per un generico istante k , con $k = 1, \dots, K-1$, è immediata. Infatti, è sufficiente sostituire tutte le relazioni con ritardo maggiore di k del sistema di eq. (5.34), con opportune condizioni iniziali del tipo

$$\frac{a_m(k) + b_m(k)}{2} = p_m(k), \quad \frac{a_m(k) - b_m(k)}{2\mu_m} = q_m(k),$$

ottenendo il seguente sistema

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} T'_k \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b(k) \\ a(k) \end{bmatrix} & = \underbrace{\begin{bmatrix} p(k) \\ q(k) \end{bmatrix}}_{\text{condizioni iniziali}} - \underbrace{\sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k-i) \\ a(k-i) \end{bmatrix}}_{\text{ritardo}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u(k) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} \\ 2N \times 2N & 2N \times 1 & \quad \quad \quad 2N \times 1 \quad \quad \quad 2N \times 1 \end{array}$$

Se $\det[T'_k] \neq 0$, il sistema è ben condizionato, ed ammette l'unica soluzione

$$\begin{bmatrix} b(k) \\ a(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T'^{-1}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(k) \\ q(k) \end{bmatrix}}_{\text{condizioni iniziali}} - \underbrace{\begin{bmatrix} T'^{-1}_k \end{bmatrix} \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k-i) \\ a(k-i) \end{bmatrix}}_{\text{ritardo}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T'^{-1}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(k) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}}. \quad (5.37)$$

La soluzione è la somma delle tre seguenti risposte:

1. *risposta alle condizioni iniziali* dovuta esclusivamente alle condizioni iniziali all'istante k ;
2. *risposta con ritardo* dovuta esclusivamente alle variabili $[a \ b]^T$ nei primi k istanti;
3. *risposta agli ingressi* dovuta esclusivamente agli ingressi all'istante k .

Una volta ottenuti i valori del vettore Wave per i primi K istanti, il filtro entra a *regime* e la sua soluzione si ottiene utilizzando la formula di eq. (5.35).

È interessante notare come l'imposizione della condizione $(a_m(k) + b_m(k))/2 = p_m(k)$ equivale a introdurre alla generica porta m un generatore ideale di tensione filtrata di valore $p_m(k)$. Analogamente $(a_m(k) - b_m(k))/2\mu_m = q_m(k)$ equivale ad un generatore ideale di corrente filtrata di valore $q_m(k)$. Si è visto nel Cap. 2 che i generatori ideali non hanno una versione adattata nel dominio Wave, pertanto la loro introduzione può comportare la nascita di anelli chiusi privi di ritardo, rendendo il filtro non computabile all'istante k . Dal momento che il sistema di equazioni rimane lineare, la condizione $\det[T'_k] \neq 0$ garantisce non solo l'esistenza e l'unicità della soluzione, ma anche la sua determinazione in forma chiusa come in eq. (5.37).

In riferimento al filtro di Fig. 5.4, la sostituzione delle 2 equazioni lineari a ritardo 1

$$b_8(n) - a_8(n-1) = 0, \quad b_9(n) + a_9(n-1) = 0$$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$b_1(0)$	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	$b_2(0)$	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$b_3(0)$	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$a_1(0)$	0	0
0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	$a_2(0)$	0	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	$a_3(0)$	0	0
			0			0	0	1	0	0	0	0	$b_4(0)$	0	0
			0			0	0	0	1	0	0	-1	$b_5(0)$	0	0
			0			0	0	0	0	1	0	0	$b_6(0)$	0	0
			0			0	0	0	0	0	1	-1	$a_4(0)$	0	0
1	0	0	$\alpha_1 - 1$	α_1	α_1								$a_5(0)$	0	0
0	1	0	$1 - \alpha_1$	α_1	$1 - \alpha_1$								$a_6(0)$	0	0
0	0	1	1	1	0								$b_7(0)$	0	0
			0			1	0	0	$1 - \gamma_1$	$\gamma_1 - 1$	-1	0	$a_7(0)$	0	0
			0			0	1	0	$-\gamma_1$	γ_1	-1	0	$b_8(0)$	0	0
			0			0	0	1	$-\gamma_1$	$1 - \gamma_1$	0	0	$a_8(0)$	0	0
			0			0							$b_9(0)$	0	$E_g(0)$
			0			0							$a_9(0)$	$v_8(0)$	0
			0			0							$b_{10}(0)$	$i_9(0)$	0
			0			0							$a_{10}(0)$	0	0

Tabella 5.8: Imposizione delle condizioni iniziali del filtro di Fig. 5.4.

con le due condizioni iniziali istantanee

$$\frac{b_8(0) + a_8(0)}{2} = v_8(0) \quad \frac{a_9(0) - b_9(0)}{2R_9} = i_9(0)$$

porta al sistema di Tabella 5.8 che, una volta invertito, permette di determinare il valore del vettore $[a(0) \ b(0)]^T$.

Il sistema è equivalente ad un filtro WDC in cui si sono sostituiti la capacità e l'induttore con due opportuni generatori ideali. Come si può notare dalla Fig. 5.5, l'introduzione dei generatori ideali dà origine a due anelli chiusi privi di elementi di ritardo.

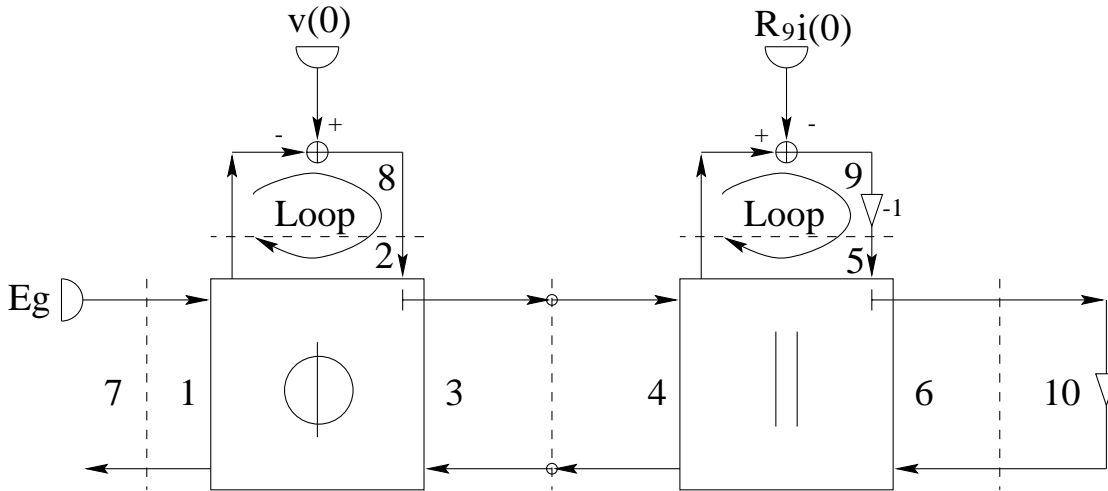


Fig. 5.5: Filtro WDC rappresentante il sistema di condizioni iniziali.

5.5 Dominio Wave numerico non lineare

L'introduzione di elementi non lineari all'interno del filtro rende il sistema di equazioni di tableau non lineare. In generale, un sistema non lineare non ammette soluzioni in forma chiusa e pertanto la sua determinazione si basa su metodi iterativi, quali l'algoritmo di Newton-Raphson. Nel Cap. 3 si è visto che, sotto opportune condizioni, è possibile introdurre una non linearità istantanea¹ esplicita del tipo $b = f(a)$, conservando le proprietà di computazionalità del filtro. Si consideri la Fig. 5.6, dove la parte sinistra rappresenta la porzione lineare del filtro, mentre

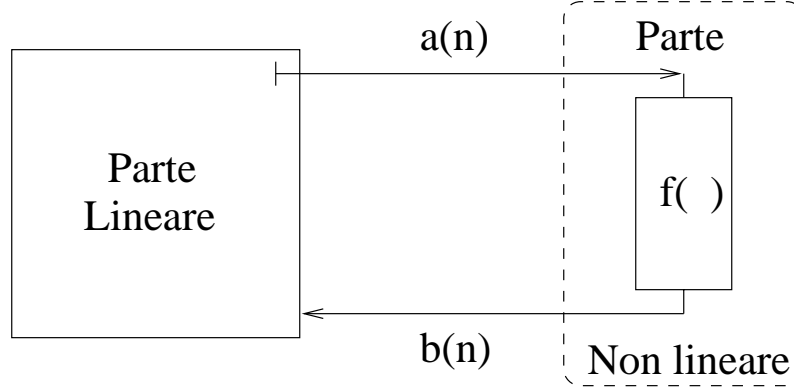


Fig. 5.6: Separazione della parte lineare da quella non lineare in un filtro WDC.

quella destra rappresenta la non linearità. Dal momento che il bipolo $b(n) = f(a(n))$ è collegato ad una porta adattata, la variabile $a(n)$ è indipendente da $b(n)$, ovvero è indipendente dalla non linearità. La soluzione di $a(n)$ è pertanto ricavabile dalla sola conoscenza della parte lineare del circuito. Una volta ottenuto il valore di $a(n)$, $b(n)$ è immediatamente ricavabile e può essere considerato come un ingresso aggiuntivo per la parte lineare del filtro.

Si può notare come il comportamento non lineare del filtro sia completamente contenuto nella variabile $b(n)$.

Le condizioni di adattamento e di esplicitabilità della non linearità permettono di separare la parte lineare del filtro da quella non lineare, considerando quest'ultima come un ingresso per la prima. Questo permette non solo di ottenere nuovamente una soluzione in forma chiusa, ma anche di poterne prevedere a priori l'esistenza.

In seguito si vedrà come questi concetti possano essere facilmente tradotti utilizzando la rappresentazione matriciale, vista nella Sez. 5.4.

5.5.1 Rappresentazione matriciale

Si introduca ai capi della porta N adattata una non linearità istantanea. Il sistema di tableau del filtro sarà pertanto composto da $2N - 1$ equazioni lineari e dall'equazione non lineare del tipo $b_N(n) = f(a_N(n))$. Se si considera il termine $f(a_N(n))$ come un ingresso, il sistema di equazioni di tableau ha la seguente forma

$$\begin{bmatrix} T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \underbrace{\sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix}}_{\text{memoria}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(n)) \end{bmatrix}}_{\text{non linearità.}} \quad (5.38)$$

¹Il concetto di non linearità istantanea non implica necessariamente quello di non linearità resistiva, in quanto le variabili d'onda, viste nel Cap. 3, possono essere legate alle variabili di Kirchoff mediante equazioni differenziali lineari.

Il nuovo sistema di tableau differisce da quello visto in Sez. 5.4, per la presenza del *vettore non lineare istantaneo* $\begin{bmatrix} 0 & f(a_n(n)) \end{bmatrix}^T$, che è responsabile del comportamento non lineare del filtro.

Se $\det[T_0] \neq 0$ la matrice T_0 è invertibile e si ottiene

$$\begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{-1} \end{bmatrix} \left(- \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix} \right)}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(n)) \end{bmatrix}}_{\text{parte non lineare}} \quad (5.39)$$

La soluzione è composta da tre termini:

- a) *risposta alla memoria* dovuta esclusivamente alle memorie del circuito;
- b) *risposta agli ingressi* dovuta esclusivamente agli ingressi istantanei del circuito;
- c) *risposta alla non linearità* dovuta esclusivamente alla non linearità istantanea;

I primi due termini rappresentano la parte lineare, mentre la terza descrive il comportamento non lineare del filtro. L'eq. (5.39) è pertanto l'equivalente matriciale dello schema a blocchi di Fig. 5.6.

Dal momento che il bipolo non lineare è connesso ad una porta adattata, la variabile $a_N(n)$ è ricavabile dalla sola parte lineare dell'eq. (5.39) mediante la seguente equazione

$$\begin{array}{ccc} a_N(n) & = & \begin{bmatrix} T_{0(2N)}^{-1} \end{bmatrix} \left(- \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix} \right) \\ 1 \times 1 & & 1 \times 2N \qquad \qquad \qquad 2N \times 1, \end{array}$$

dove $T_{0(2N)}^{-1}$ rappresenta la riga $2N$ della matrice T_0^{-1} .

La condizione di indipendenza dalla parte non lineare equivale ad imporre che $T_{0(2N,2N)}^{-1}$, elemento di riga $2N$ e colonna $2N$ della matrice T_0^{-1} sia identicamente uguale a zero. In questa maniera la moltiplicazione vettoriale tra la riga $T_{0(2N)}^{-1}$ e la colonna $\begin{bmatrix} 0 & f(a_n(n)) \end{bmatrix}^T$ è identicamente uguale a zero.

Una volta noto il valore di $a_N(n)$ è possibile aggiornare il valore di $f(a_N(n))$ e calcolare la risposta non lineare per tutte le variabili Wave incognite.

La condizione di adattamento ha permesso pertanto di trattare la non linearità come un generatore pilotato dalla variabile $a_N(n)$, e di ottenere nuovamente una soluzione in forma chiusa come in eq. (5.39).

Se $b_N(n) = f(a_N(n))$ è una funzione ad un sol valore (soddisfa le condizioni del teorema della funzione implicita) ed è definita per ogni valore reale di $a_N(n)$, allora la condizione $\det[T_0] \neq 0$, consente di affermare che il filtro associato al sistema di tableau di eq. (5.38) ammette un'unica soluzione.

5.5.2 Imposizione delle condizioni iniziali

Utilizzando gli stessi principi visti in Sez. 5.4.2, e continuando a considerare la non linearità come ingresso, l'equazione di tableau avrà la seguente forma

$$\begin{bmatrix} T'_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k) \\ a(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p(k) \\ q(k) \end{bmatrix}}_{\text{cond. iniz.}} - \underbrace{\sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k-i) \\ a(k-i) \end{bmatrix}}_{\text{ritardo}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u(k) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(k)) \end{bmatrix}}_{\text{non linearità}} \quad (5.40)$$

$2N \times 2N \quad 2N \times 1 \quad 2N \times 1 \quad 2N \times 1 \quad 2N \times 1 \quad 2N \times 1$

Se $\det[T'_k] \neq 0$, il sistema è ben condizionato e la matrice T'_k è invertibile e si ottiene

$$\begin{bmatrix} b(k) \\ a(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T'^{-1}_k \end{bmatrix} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} p(k) \\ q(k) \end{bmatrix}}_{\text{cond. iniz.}} - \underbrace{\sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k-i) \\ a(k-i) \end{bmatrix}}_{\text{ritardo}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u(k) \end{bmatrix}}_{\text{ingressi}} \right)}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T'^{-1}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(k)) \end{bmatrix}}_{\text{parte non lineare}} \quad (5.41)$$

Dal momento che l'introduzione delle condizioni iniziali genera delle maglie chiuse prive di elementi di ritardo, il filtro descritto dall'equazione di tableau di eq. (5.40), non è computabile. Facendo riferimento allo schema a blocchi di Fig. 5.6 (c), ciò significa che la porta a cui è connesso il bipolo non lineare, perde le sua proprietà di adattamento. La variabile $a_N(k)$ è pertanto dipendente dalla non linearità e il suo comportamento non è separabile da quest'ultima.

La soluzione di $a_N(n)$ avrà la seguente forma

$$\begin{aligned} a_N(k) &= \begin{bmatrix} T'^{-1}_{k(2N)} \end{bmatrix} \left(- \sum_{i=1}^K \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k-i) \\ a(k-i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(k) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} T'^{-1}_{k(2N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(k)) \end{bmatrix} \\ a_N(k) &= A_k + rf(a_N(k)). \end{aligned}$$

Il valore di A_k è immediatamente calcolabile, essendo combinazione lineare di ingressi $u(k)$ e di vettori $a(k-i), b(k-i)$ noti. Il termine $rf(a_N(k))$ rappresenta la moltiplicazione della non linearità con l'ultimo termine della diagonale della matrice T'^{-1} , che ora assume valore $r \neq 0$.

Il valore $T'^{-1}_{(2N,2N)} = r \neq 0$ non permette di considerare $a_N(k)$ indipendente dalla non linearità, la soluzione si ottiene pertanto risolvendo l'equazione implicita

$$F_k(a_N(k)) = rf(a_N(k)) + A_k - a_N(k) = 0. \quad (5.42)$$

Una volta trovato il valore di $a_N(k)$ è possibile aggiornare il valore di $f(a_N(k))$ e calcolare la risposta non lineare per tutte le variabili Wave incognite.

In generale la funzione di eq. (5.42) può non ammettere soluzioni, averne una, un numero finito, o infinito.

In questo caso quindi, la condizione $\det[T'_k] \neq 0$ garantisce il buon condizionamento del sistema, ma ora rappresenta solo una condizione necessaria e non più sufficiente per l'esistenza della soluzione.

In Appendice A sono riportate alcune tecniche per la determinazione delle radici di funzioni implicite. Nel caso particolare del programma di sintesi implementato, si utilizza il metodo iterativo di Newton Raphson.

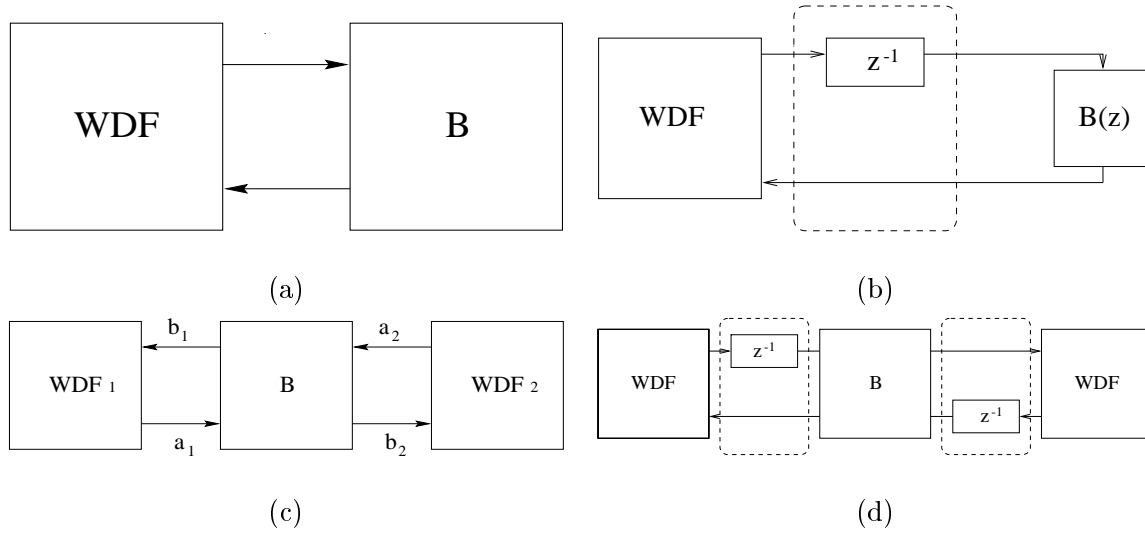


Fig. 5.7: Connessione tra WDF e “macro-blocchi”

5.6 Strutture ibride

Finora si sono presi in considerazione sistemi contenenti esclusivamente elementi a parametri concentrati, quali capacità, induttori, resistenze, generatori, trasformatori ecc.. In accordo con le generalizzazioni proposte nei Capitoli 3 e 4, per una maggiore completezza e modularità del programma di sintesi automatica progettato in questa tesi, in questa sezione si descriveranno i metodi utilizzati nel programma di sintesi automatica per introdurre nel modello numerico “macro-blocchi” ottenuti, ad esempio da:

- porzioni lineari di rete individualmente discretizzata;
- filtri digitali ottenuti con tecniche di discretizzazione differenti o attraverso misure dirette della risposta impulsiva;
- elementi a parametri distribuiti (WGF).

A causa della generalità di tali strutture, una loro descrizione all'interno della matrice di tableau richiederebbe un aumento considerevole della complessità algoritmica e, inoltre, sarebbe in contrasto con le esigenze di modularità del sistema. Infatti, una volta che si sono garantite le condizioni di stabilità e di adattamento, ai fini della simulazione numerica, è necessaria la sola conoscenza della relazione ingresso-uscita dell'elemento da interfacciare.

A titolo di esempio, la Fig. 5.7 (a) considera la connessione tra una struttura WDF e un “macro-blocco” monoporta. Si ipotizzi che il “macro-blocco” abbia rappresentazione compatibile wave e, pertanto, sia definibile per esso un'impedenza di riferimento. Se si pone l'uguaglianza tra l'impedenze di riferimento della struttura WDF e del “macro-blocco”, si ha adattamento istantaneo e quindi una risposta in frequenza esprimibile come $z^{-1}B(z)$, con $B(z)$ causale e stabile.

Come mostrato in Fig. 5.7 (b), la presenza della cella di ritardo unitaria, permette di disaccoppiare le due parti del circuito che pertanto possono essere realizzate individualmente. Tale disaccoppiamento consente, inoltre, l'inizializzazione distinta dei due sottosistemi a partire dall'imposizione del valore iniziale di una grandezza fisica definibile alla porta d'interfacciamento (grandezza intensiva, estensiva, o variabile d'onda). Una volta definita tale variabile, l'inizializzazione della porzione WDF può essere eseguita mediante il metodo automatico proposto in questo Capitolo. Le condizioni iniziali del “macro-blocco” $B(z)$ sono invece, ricavate caso per caso, in funzione non solo del valore iniziale della grandezza fisica definita alla porta, ma anche della

struttura di riferimento e delle tecniche di discretizzazione utilizzate. Ad esempio, se si prende in considerazione una linea di trasmissione monodimensionale a riposo tutte le celle di ritardo possono essere poste a zero.

Il discorso può essere generalizzato al caso di un “macro-blocco” multiporta; anche in questo caso, imponendo l’uguaglianza delle resistenze di riferimento alle porte d’interfacciamento, si ottiene un adattamento istantaneo del “macro-blocco” ad ogni singola porta. In generale però l’adattamento è una relazione che lega esclusivamente la coppia di variabili d’onda ad una singola porta, ovvero la variabile uscente b_i è priva di dipendenza istantanea rispetto alla sola variabile corrispondente a_i .

Per poter estendere il metodo al “macro-blocco” multiporta, è necessario che ogni singola variabile b_i con $i = 1, \dots, n$, non presenti relazione istantanea rispetto a tutte le variabili entranti a_1, \dots, a_n . In questo caso si può affermare che il “macro-blocco” è *globalmente privo di relazioni istantanee* e pertanto ammette una rappresentazione equivalente descritta, nel caso particolare due porte, in Fig. 5.7 (d). Analogamente a quanto detto in precedenza, la presenza delle celle di ritardo consente di disaccoppiare le porzioni di WDF dal “macro-blocco”, ciò permette una modellizzazione e realizzazione individuale delle singole parti e una loro successiva connessione che conservi computabilità del modello risultante.

Ai fini dell’implementazione numerica i due sottosistemi WDF possono essere visti come strutture separate, sarà compito del “macro-bipolo” andare ad aggiornare in maniera coerente i valori delle celle di ritardo di interfacciamento. Anche l’inizializzazione può essere effettuata in maniera distinta a partire dall’imposizione del valore iniziale di una grandezza fisica definibile alla porta d’interfacciamento (intensiva, estensiva o wave).

L’approccio visto conferisce spiccate caratteristiche di modularità al modello risultante, ma una sua automatizzazione richiede che l’algoritmo di sintesi sia in grado di:

- individuare i “macro-blocchi”;
- verificare le condizioni di adattamento globale;
- separare il circuito in sotto-porzioni indipendenti;
- sintetizzare e inizializzare individualmente le porzioni WDF;
- sintetizzare e inizializzare individualmente i “macro-blocchi”;
- connettere le parti.

Il programma di sintesi automatico attualmente implementato permette l’interfacciamento in maniera automatica di *macro-bipoli*, nella loro versione compatibile d’onda. Un’estensione a “macro-blocchi” multiporta che consente un ulteriore aumento della modularità del sistema, rappresenta uno degli sviluppi futuri di questo lavoro.

5.7 Trattamento della tempo-varianza

Analogamente a quanto avviene nella realtà, nei modelli simulanti strumenti musicali è desiderabile avere un controllo dei parametri della struttura durante l’esecuzione.

A tale scopo si è progettato un programma di sintesi composto da due processi concorrenti in cui il primo realizza il modello ed esegue la simulazione, mentre l’altro calcola e modifica la struttura implementata in relazione alla tempo-varianza degli elementi. Prima di procedere alla descrizione delle modalità con cui si eseguono i cambiamenti sul modello numerico sintetizzato, è doveroso fare alcune precisazioni.

In generale il trattamento di strutture tempo-varianti è un problema delicato, infatti la modifica dei parametri durante l’esecuzione può provocare la nascita di transienti indesiderati,

che si ripercuotono sul segnale sonoro in uscita sotto forma di fastidiosi disturbi (click). Ciò si deve al fatto che nei momenti di transizione non sono più verificate le condizioni di passività o assenza di perdite degli elementi costitutivi del modello numerico, che possono in via temporanea “creare” energia. È pertanto necessario porsi in condizioni particolari, in cui si possa evitare o quantomeno evitare l’insorgere di tale problema. In particolare, è necessario che i parametri varino lentamente rispetto alla risposta all’impulso della struttura numerica, operativamente si è pertanto scelto di aggiornare i parametri gradualmente a frequenze sufficientemente elevate.

5.7.1 Impedenze di riferimento

Dal momento che la teoria dei filtri ad onda numerica offre una soluzione discreta nel dominio del tempo, per ottenere una soluzione per circuiti lineari tempo varianti è sufficiente aggiornare ad ogni intervallo T (tempo di campionamento) i valori delle impedenze caratteristiche che sono direttamente, o indirettamente dipendenti dall’elemento tempo-variante.

Si consideri, ad esempio, il caso di un condensatore lineare tempo-variante, la condizione di adattamento sarà $R(n) = T/2C(n)$. Se poi il condensatore è connesso ad un adattatore, la porta adattata avrà impedenza di riferimento dipendente da $R(n)$ e, in ultima analisi, da $C(n)$. Una volta aggiornati i valori di tutte le impedenze è necessario aggiornare i coefficienti dei filtri di $M_{i,j}(z)$ del sistema di equazioni (5.28) rappresentanti i generici elementi lineari. Infatti, i filtri $M_{i,j}(z)$ sono direttamente dipendenti dai valori delle impedenze di riferimento delle varie porte.

Le matrici del sistema di tableau di eq. (5.34) sono ora tempo varianti,

$$\begin{bmatrix} T_0(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix}.$$

Qualora $T_0(n)$ sia invertibile, ossia $\det[T_0(n)] \neq 0$ la soluzione ha la seguente espressione

$$\begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_0^{-1}(n) \end{bmatrix} \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_0^{-1}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix}$$

In questo caso è necessario determinare il valore della matrice inversa $T_0^{-1}(n)$ ad ogni intervallo di campionamento e ciò è computazionalmente troppo costoso.

Solitamente gli elementi tempo varianti hanno tempi di aggiornamento T_a molto maggiori (alcuni ordini di grandezza) del periodo di campionamento T . L’inversione della matrice può essere pertanto fatta ad intervalli $T_a \gg T$, diminuendo notevolmente il numero medio di operazioni per campione.

Nel programma di sintesi implementato viene creato un processo esclusivamente preposto all’aggiornamento di tutte le strutture tempo-varianti ad intervalli di tempo T_a , inoltre al fine di migliorare ulteriormente l’efficienza computazionale dell’algoritmo, si sono sfruttate informazioni sulla struttura della matrice $T_0(n)$ che hanno permesso l’utilizzo di una tecnica di inversione ottimizzata nota col nome di formula di Strassen [83] particolarmente adatta per l’inversione di matrici sparse.

5.7.2 Non linearità

In questa Sezione si metteranno in evidenza le principali conseguenze che la tempo varianza ha nella trattazione di un modello contenente non linearità. In un primo momento si limiterà la tempo varianza ai soli elementi lineari, in seguito si estenderanno i risultati a filtri con non linearità tempo-varianti.

Si consideri dapprima il caso in cui la non linearità $g(p, q)$ nel dominio di Kirchoff sia tempo invariante.

Anche ora è necessario aggiornare i valori delle impedenze di riferimento e delle equazioni caratteristiche degli elementi in modo tale da conservare le proprietà di computabilità del filtro.

Dal momento che la non linearità è collegata ad una porta adattata il valore dell'impedenza caratteristica R è funzione di tutte le impedenze di riferimento che si trovano a monte di essa, ed è pertanto tempo-variante. Definita l'impedenza caratteristica tempo-variante $R(n)$, l'equazione della non linearità nel dominio Wave, si ottiene esplicitando la funzione

$$F(a, b) = g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2R(n)}\right). \quad (5.43)$$

Si nota come la funzione di eq. (5.43) sia dipendente da $R(n)$ e quindi sia tempo-variante. Per ottenere una versione computabile del filtro è necessario aggiornare ed esplicitare la funzione di eq. (5.43) ad ogni intervallo T_a . Qualora la funzione di eq. (5.43) soddisfi le condizioni di esplicitabilità per tutti i valori di R , è possibile sostituire l'equazione $b = f(a)$ con la funzione esplicita a due variabili $b = f(a, R)$, dipendente non solo dal valore della variabile entrante, ma anche dall'impedenza di riferimento. Nel caso in cui $b = f(a, R)$ sia una funzione a più valori, è necessario estendere i principi visti in Sez. 2.10.4, per funzioni con isteresi a due variabili.

Effettuando queste modifiche, si ottiene il seguente sistema di tableau

$$\begin{bmatrix} T_0(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(n), R_N(n)) \end{bmatrix}.$$

Invertendo la matrice $T_0(n)$ si ottiene la soluzione

$$\begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0^{-1}(n) \end{bmatrix} \left(- \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} T_0^{-1}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(n), R_N(n)) \end{bmatrix}$$

La computabilità del circuito è ancora garantita dalla condizione $T_{0(2N, 2N)}^{-1}(n) = 0$.

Dal momento che la gestione di una funzione con isteresi a più valori non è una operazione banale, nel programma di sintesi si è preferito aggiornare ed esplicitare la funzione ad ogni intervallo di aggiornamento T_a . Al processo dedicato all'aggiornamento delle matrici e resistenze di riferimento tempo varianti si è pertanto assegnato l'ulteriore compito di modificare ed aggiornare la non linearità ad istanti T_a .

Si consideri ora il caso in cui la non linearità sia tempo-variante, ossia la sua caratteristica nel dominio di Kirchoff si modifichi nel tempo secondo un'equazione del tipo $g(p, q, t)$. La non linearità nel dominio Wave, si ottiene nuovamente esplicitando l'eq. (5.43), in maniera del tutto analoga a quanto fatto nella Sez. 5.7.2. In questo caso è però necessario ripetere l'operazione ogni qualvolta la funzione $g(\cdot)$ si modifichi, pertanto la funzione $b = f(a, R)$ assume ora caratteristiche tempo varianti.

Se la funzione $b = f(a, R, n)$, ottenuta all'ennesimo istante di campionamento, è esplicitabile, la soluzione del sistema di tableau avrà la seguente forma

$$\begin{bmatrix} b(n) \\ a(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0^{-1}(n) \end{bmatrix} \left(- \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} T_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(n-k) \\ a(n-k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(n) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} T_0^{-1}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(a_N(n), R_N(n), n) \end{bmatrix}.$$

È facile comprendere che il calcolo della funzione $b = f(a, R, n)$ ad ogni intervallo comporti un costo computazionale aggiuntivo che in molti casi può non essere accettabile. In maniera analoga a quanto visto per l'inversione della matrice tempo-variante, una non linearità lentamente variabile permette di diminuire notevolmente il numero medio di operazioni per campione.

5.8 Caratteristiche non lineari tempo-varianti.

La teoria dei circuiti elettrici è ricca di tecniche che permettono di modificare la funzione caratteristica di una non linearità. In particolare, si trovano in letteratura tecniche che permettono di ruotare, riflettere o scalare la non linearità attraverso l'uso di particolari doppi bipoli noti col nome di *convertitori lineari*. In generale questi elementi vengono utilizzati per la progettazione di non linearità complesse (si veda Appendice B), in questa sezione invece verranno utilizzati per conferire alla non linearità proprietà di tempo-varianza senza la necessità di una sua modifica.

5.8.1 Traslazioni rigide

Si immagini che la curva $i-v$ che definisce la non linearità, pur rimanendo invariata, trasli lungo l'asse orizzontale e verticale come in Fig. 5.8 (a). L'operazione è equivalente ad introdurre un

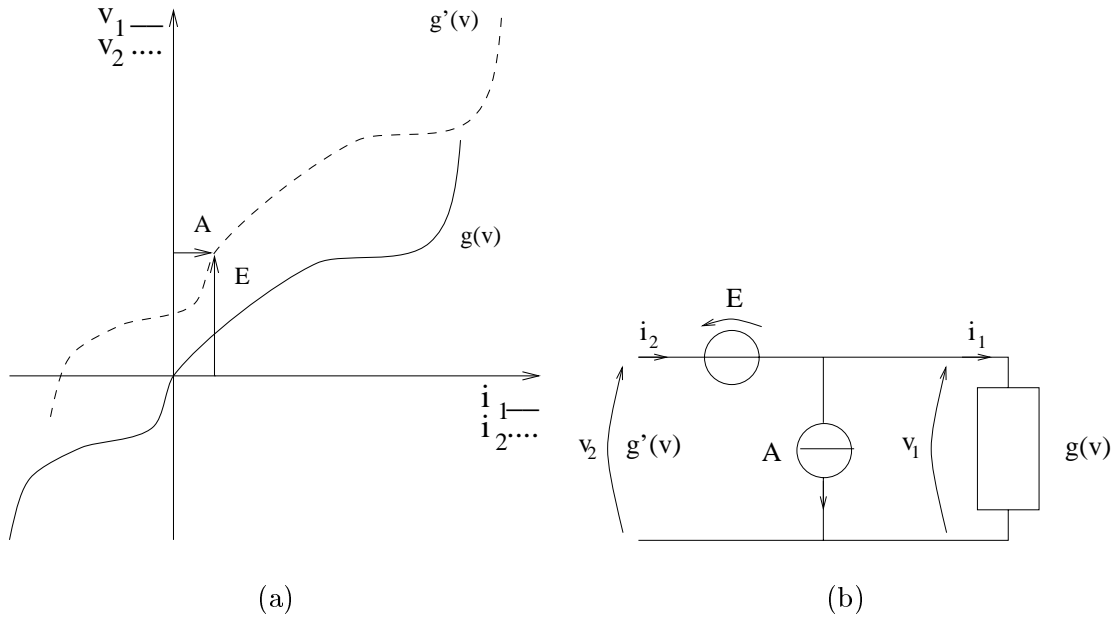


Fig. 5.8: Traslazione rigida di una non linearità nel dominio di Kirchhoff. (a) Curva caratteristica. (b) Equivalente elettrico.

generatore ideale di tensione E in serie e un generatore ideale di corrente A in parallelo al bipolo non lineare come in Fig. 5.8 (b).

Il problema che si vuole affrontare è se sia possibile separare il comportamento dei generatori dalla non linearità anche nel dominio Wave.

Si consideri la giunzione serie di Fig. 5.9 (a), la sua struttura nel dominio Wave, rappresentata in Fig. 5.9 (b), permette di esplicitare la variabile a_3 in funzione delle sole variabili a_1 e a_2 . Infatti, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} b_3 = -a_1 - a_2 & \text{porta adattata} \\ b_3 = -a_3 + 2E & \text{generatore} \end{cases}$$

si ottiene $a_3 = a_1 + a_2 + 2E$, che, sostituito nell'eq. (2.19), dà origine alla seguente equazione

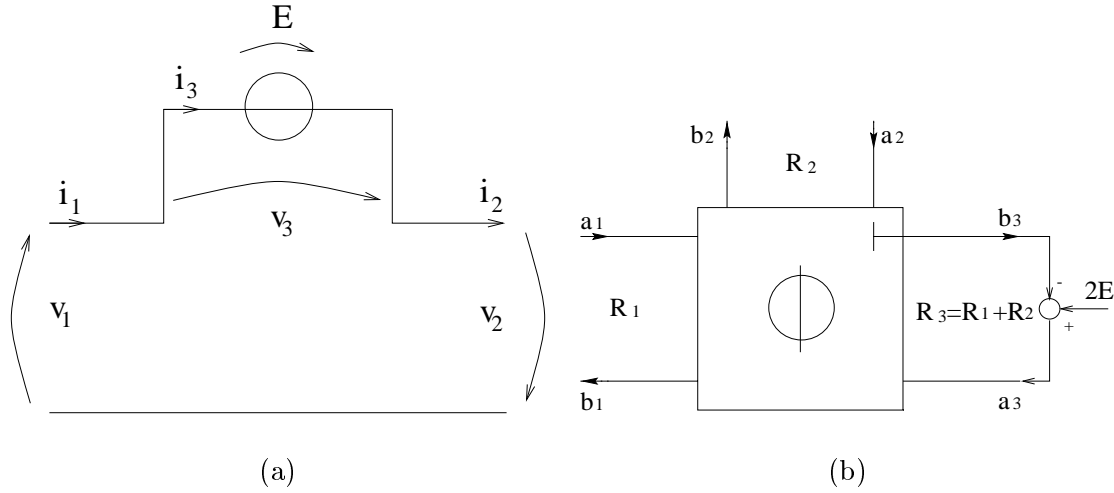


Fig. 5.9: Giunzione tre porte con generatore ideale di tensione. (a) Rappresentazione analogica. (b) Rappresentazione Wave.

caratteristica.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\gamma_1 & -2\gamma_1 & 0 \\ 2\gamma_1 - 2 & 2\gamma_1 - 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma_1 2E \\ (\gamma_1 - 1)2E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se si pone $\gamma_1 = 1/2$, ossia $R_1 = R_2$, la giunzione ha tutte tre le porte adattate come si vede dalla equazione sotto riportata

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \end{bmatrix}$$

La condizione $R_1 = R_2$ assieme alla nota condizione di adattamento $R_3 = R_1 + R_2$, permette di inserire il blocco di Fig. 5.9 (b) ad una qualsiasi porta del filtro senza creare maglie a ritardo nullo e quindi preservandone le proprietà di computabilità.

In maniera analoga si ricava il blocco duale descritto in Fig. 5.10 che avrà equazione caratteristica

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 - 1 & 2 - 2\alpha_1 & 0 \\ 2\alpha_1 & 1 - 2\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2R_3 A \\ 2R_3 A \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso la condizione $\alpha_1 = 1/2$, ovvero $R_1 = R_2$, aggiunta alla condizione di adattamento $R_3^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$ permette di ottenere una rappresentazione con tutte le porte adattate

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ A \\ 0 \end{bmatrix}.$$

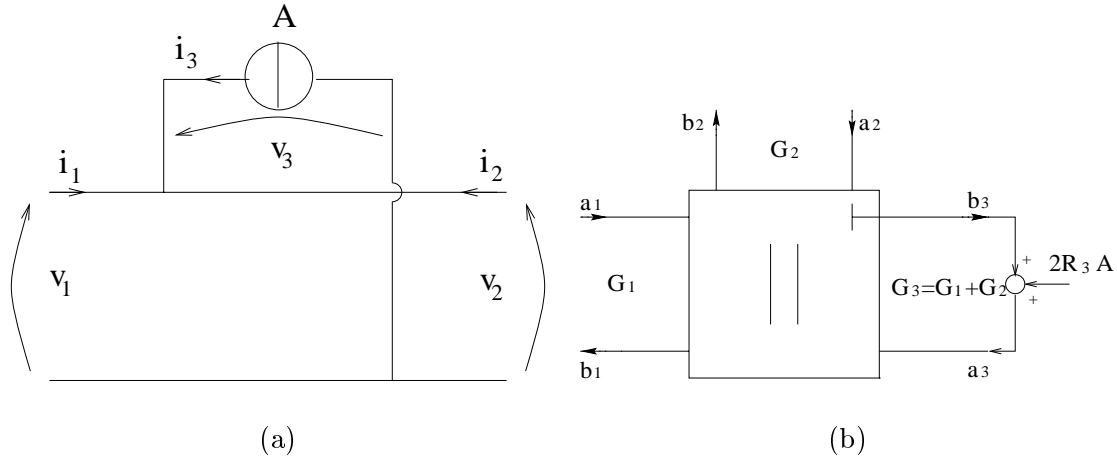


Fig. 5.10: Giunzione tre porte con generatore ideale di corrente. (a) Rappresentazione analogica. (b) rappresentazione Wave.

L'introduzione dei blocchi ad una qualsiasi porta del circuito non origina problemi di computabilità. Il loro impiego ha il vantaggio di delegare alla giunzione il compito di includere i generatori ideali, lasciando inalterate le porzioni di filtro che vengono connesse alle due porte libere.

L'implementazione di Fig. 5.11 è l'equivalente Wave della rete analogica di Fig. 5.8 (b).

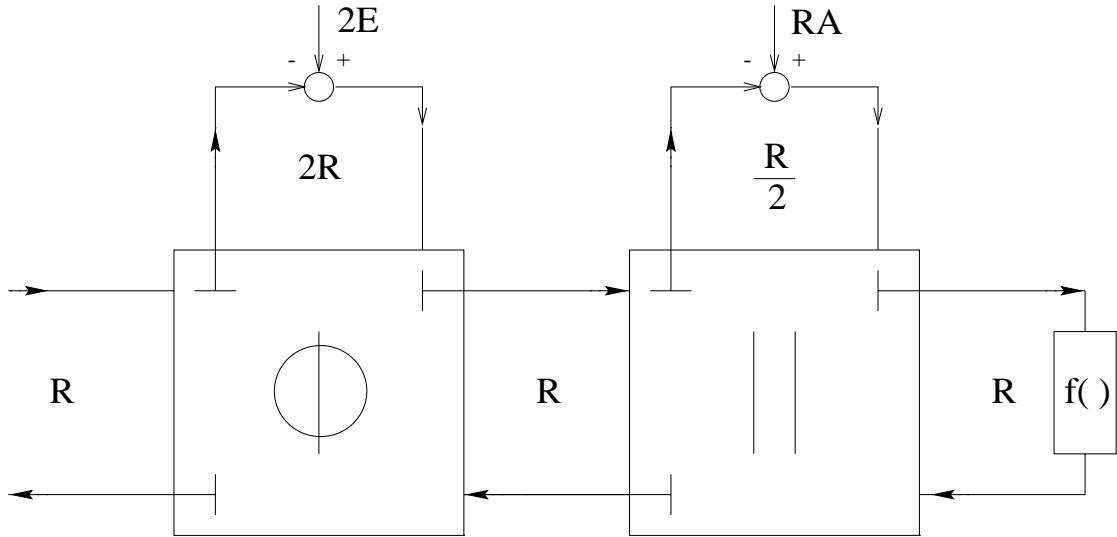


Fig. 5.11: Equivalente Wave della porzione di rete di Fig. 5.8 (b)

Le due giunzioni tre porte permettono di scorporare i generatori, responsabili della traslazione della curva caratteristica non lineare, da quest'ultima che pertanto conserva le proprietà di tempo invariante.

5.8.2 Deformazioni lineari della caratteristica

Si immagini che la curva $i-v$ si modifichi in accordo a una trasformazione lineare del tipo

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Nell'ipotesi che il determinante della matrice sia diverso da zero, ossia $AD - BC \neq 0$ la trasformazione è invertibile ed uguale a

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

L'impiego dei convertitori lineari, immediatamente a monte di una non linearità, permette di separare l'operazione di trasformazione da quest'ultima che pertanto può rimanere immutata.

Al fine di poter applicare gli stessi principi anche nel dominio discreto, si ricaverà l'equivalente del convertitore lineare nel dominio Wave.

Ricordando le trasformazioni Wave

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{R_2} & \frac{-1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

ed esplicitando le variabili uscenti in funzione di quelle entranti si ottiene

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{-R_2 R_1 C + R_2 A + R_1 D - B}{-R_2 R_1 C - R_2 A + R_1 D + B} a_1 + \frac{2R_1(AD - BC)}{-R_2 R_1 C - R_2 A + R_1 D + B} a_2 \\ b_2 &= -\frac{2R_2}{-R_1 R_2 C - R_2 A + R_1 D + B} a_1 + \frac{R_1 R_2 C + R_2 A + R_1 D + B}{-R_1 R_2 C - R_2 A + R_1 D + B} a_2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

La soluzione è valida se e solo se i denominatori sono diversi da zero cioè

$$R_2 \neq \frac{B + R_1 D}{A + R_1 C}.$$

Condizioni di Adattamento

Determinata l'equazione del convertitore nel dominio Wave, è interessante calcolare le condizioni di adattamento alle sue porte, in modo tale da poterlo inserire all'interno di un generico filtro WDC senza generare anelli privi di elementi di ritardo.

Dall'eq. (5.46) la prima porta risulta adattata se

$$-R_2 R_1 C + R_2 A + R_1 D - B = 0, \text{ ovvero } R_2 = \frac{B - R_1 D}{A - R_1 C} \text{ con } R_1 \neq \frac{A}{C}. \quad (5.47)$$

Analogamente la seconda porta è adattata se

$$R_1 R_2 C + R_2 A + R_1 D + B = 0, \text{ ovvero } R_2 = -\frac{B + R_1 D}{A + R_1 C} \text{ con } R_1 \neq -\frac{A}{C}. \quad (5.48)$$

La condizione di adattamento è diversa per le due porte.

Se si vuole imporre l'adattamento ad entrambe le porte è necessario che R_2 soddisfi contemporaneamente le condizioni di adattamento espresse in eq. (5.47) e (5.48)

$$\frac{B - R_1 D}{A - R_1 C} = -\frac{B + R_1 D}{A + R_1 C},$$

ciò equivale ad imporre

$$R_1 = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \text{ con } CD \neq 0. \quad (5.49)$$

Il doppio adattamento vincola i valori delle resistenze di riferimento ad entrambe le porte ed è possibile solo per convertitori aventi $AB/CD > 0$.

Convertitore lineare generico

Rappresentazione	Equazione		Condizioni
Kirchoff	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$		Invertibilità $AD - BC \neq 0$
Wave non Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 R_1 C + R_2 A + R_1 D - B}{-R_2 R_1 C - R_2 A + R_1 D + B} & \frac{2R_1 (AD - BC)}{-R_2 R_1 C - R_2 A + R_1 D + B} \\ \frac{2R_2}{R_1 R_2 C + R_2 A - R_1 D - B} & -\frac{R_1 R_2 C + R_2 A + R_1 D + B}{R_1 R_2 C + R_2 A - R_1 D - B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	Esistenza $R_2 \neq \frac{B + R_1 D}{A + R_1 C}$	
Wave con prima porta Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (A - R_1 C) \\ \frac{R_1 D - B}{R_1 (AD - BC)} & -\frac{R_1^2 CD - AB}{R_1 (AD - BC)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	Adattamento $R_2 = \frac{B - R_1 D}{A - R_1 C}$	
Wave con seconda porta Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1^2 CD - AB}{(B + R_1 D)(A + R_1 C)} & \frac{R_1 (AD - BC)}{B + R_1 D} a_2 \\ \frac{1}{A + R_1 C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	Adattamento $R_2 = -\frac{B + R_1 D}{A + R_1 C}$	
Wave con entrambe le Porte Adattate	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{A\sqrt{CD} - C\sqrt{AB}}{\sqrt{CD}} \\ \frac{\sqrt{CD}}{A\sqrt{CD} + C\sqrt{AB}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	Adattamento $R_1 = \sqrt{\frac{AB}{CD}}$	

Tabella 5.9: Convertitore lineare generico

In generale, come per le multigiunzioni, l'adattamento di una singola porta è sufficiente per evitare l'insorgere di anelli chiusi privi di elementi di ritardo.

Se gli elementi della diagonale della matrice di eq. (5.44) sono gli unici diversi da zero, la condizione di assenza di riflessione

$$R_2 = -\frac{D}{A}R_1$$

è identica per entrambe le porte. Allo stesso modo se gli unici elementi diversi da zero sono i valori B e C della diagonale secondaria, l'adattamento contemporaneo delle porte è garantito dalla relazione

$$R_2 = -\frac{B}{R_1 C}.$$

In tabella 5.9 sono riportate le equazioni caratteristiche del generico convertitore lineare, con le relative condizioni di esistenza e adattamento.

Nelle successive tabelle sono invece descritti i tre particolari tipi di convertitori lineari, scalatore riflettore e rotatore, la cui descrizione può essere trovata in Appendice B.

5.9 Esplicitabilità della caratteristica

L'utilizzo dei convertitori permette di rendere monotona una caratteristica non lineare (si veda Appendice B).

Viene spontaneo chiedersi se l'utilizzo di questi elementi permetta di rendere esplicitabile una funzione non lineare. In questa maniera si eviterebbe la trattazione di curve con isteresi, poiché la non linearità nel dominio Wave sarebbe sempre ad un sol valore.

Si ipotizzi che la curva non lineare controllata in corrente $v_1 = g_1(i_1)$, di Fig. 5.12 (a) non

Scalatore			
Rappresentazione	Equazione		Condizioni
Kirchoff	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & -K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} A = K_v & B = 0 \\ C = 0 & D = -K_i \end{cases}$	Invertibilità $K_v K_i \neq 0$
Wave non Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 K_v - R_1 K_i}{-R_2 K_v - R_1 K_i} & \frac{-2R_1(K_v K_i)}{-R_2 K_v - R_1 K_i} \\ \frac{2R_2}{R_2 K_v + R_1 K_i} & -\frac{R_2 K_v - R_1 K_i}{R_2 K_v + R_1 K_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$		Esistenza $R_2 \neq -\frac{K_i}{K_v} R_1$
Wave con entrambe le Porte Adattate	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_v \\ 1/K_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$		Adattamento $R_2 = \frac{K_i}{K_v} R_1$

Tabella 5.10: Scalatore

Riflettore			
Rappresentazione	Equazione		Condizioni
Kirchoff	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} A = c_{2\theta} & B = -s_{2\theta} \\ C = s_{2\theta} & D = c_{2\theta} \end{cases}$	Invertibilità $\det = 1$
Wave non Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 R_1 s_{2\theta} + R_2 c_{2\theta} + R_1 c_{2\theta} + s_{2\theta}}{-R_2 R_1 s_{2\theta} - R_2 c_{2\theta} + R_1 c_{2\theta} - s_{2\theta}} & \frac{2R_1}{-R_2 R_1 s_{2\theta} - R_2 c_{2\theta} + R_1 c_{2\theta} - s_{2\theta}} \\ \frac{-2R_2}{-R_1 R_2 s_{2\theta} - R_2 c_{2\theta} + R_1 c_{2\theta} - s_{2\theta}} & \frac{R_1 R_2 s_{2\theta} + R_2 c_{2\theta} + R_1 c_{2\theta} - s_{2\theta}}{-R_1 R_2 s_{2\theta} - R_2 c_{2\theta} + R_1 c_{2\theta} - s_{2\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$		Esistenza $R_2 \neq \frac{-s_{2\theta} + R_1 c_{2\theta}}{c_{2\theta} + R_1 s_{2\theta}}$
Wave con prima porta Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (c_{2\theta} - R_1 s_{2\theta}) \\ \frac{R_1 c_{2\theta} + s_{2\theta}}{R_1} & -\frac{R_1^2 s_{2\theta} c_{2\theta} + c_{2\theta} s_{2\theta}}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$		Adattamento $R_2 = -\frac{s_{2\theta} + R_1 c_{2\theta}}{c_{2\theta} - R_1 s_{2\theta}}$
Wave con seconda porta Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1^2 s_{2\theta} c_{2\theta} + c_{2\theta} s_{2\theta}}{(-s_{2\theta} + R_1 c_{2\theta})(c_{2\theta} + R_1 s_{2\theta})} & \frac{R_1}{-s_{2\theta} + R_1 c_{2\theta}} a_2 \\ \frac{1}{c_{2\theta} + R_1 s_{2\theta}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$		Adattamento $R_2 = -\frac{-s_{2\theta} + R_1 c_{2\theta}}{c_{2\theta} + R_1 s_{2\theta}}$
Wave con entrambe le Porte Adattate	Impossibile		Adattamento $R_1 = \sqrt{-1}$

Tabella 5.11: Riflettore

Rotatore		
Rappresentazione	Equazione	Condizioni
Kirchoff	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} A = c_\theta & B = s_\theta \\ C = -s_\theta & D = c_\theta \end{cases}$	Invertibilità $\det = 1$
Wave non Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 R_1 s_\theta + R_2 c_\theta + R_1 c_\theta - s_\theta}{R_2 R_1 s_\theta - R_2 c_\theta + R_1 c_\theta + s_\theta} & \frac{2R_1}{R_2 R_1 s_\theta - R_2 c_\theta + R_1 c_\theta + s_\theta} \\ \frac{-2R_2}{R_1 R_2 s_\theta - R_2 c_\theta + R_1 c_\theta + s_\theta} & \frac{-R_1 R_2 s_\theta + R_2 c_\theta + R_1 c_\theta + s_\theta}{R_1 R_2 s_\theta - R_2 c_\theta + R_1 c_\theta + s_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	Esistenza $R_2 \neq \frac{s_\theta + R_1 c_\theta}{c_\theta - R_1 s_\theta}$
Wave con prima porta Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (c_\theta + R_1 s_\theta) \\ \frac{R_1 c_\theta - s_\theta}{R_1} & \frac{R_1^2 s_\theta c_\theta + c_\theta s_\theta}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	Adattamento $R_2 = \frac{s_\theta - R_1 c_\theta}{c_\theta + R_1 s_\theta}$
Wave con seconda porta Adattata	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1^2 s_\theta c_\theta + c_\theta s_\theta}{(s_\theta + R_1 c_\theta)(c_\theta - R_1 s_\theta)} & \frac{R_1}{s_\theta + R_1 c_\theta} a_2 \\ \frac{1}{c_\theta - R_1 s_\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$	Adattamento $R_2 = -\frac{s_\theta + R_1 c_\theta}{c_\theta - R_1 s_\theta}$
Wave con entrambe le Porte Adattate	Impossibile	Adattamento $R_1 = \sqrt{-1}$

Tabella 5.12: Rotatore

soddisfi il teorema della funzione implicita e pertanto

$$\frac{dv_1}{di_1} = -R_1. \quad (5.50)$$

In Fig. 5.12 (b) si è eseguita un'opportuna trasformazione lineare che permette di trasformare

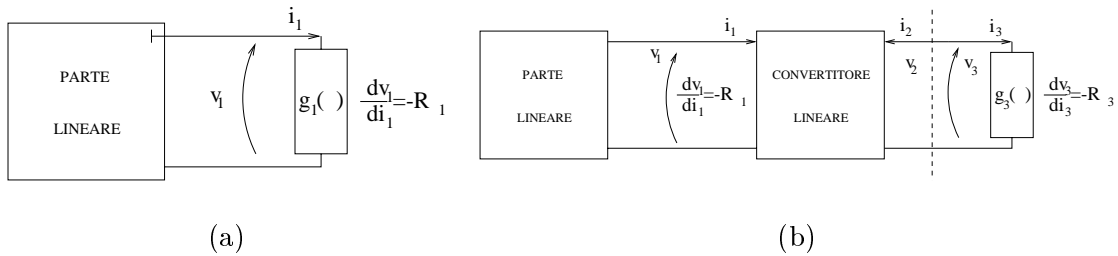


Fig. 5.12: (a) Caratteristica non esplicitabile. (b) Utilizzo del convertitore lineare.

la non linearità in una curva $v_3 = g_3(i_3)$ esplicitabile, cioè con

$$\frac{dv_3}{di_3} \neq -R_2. \quad (5.51)$$

Dal momento che $v_3 = v_2$ e $i_3 = -i_2$ l'eq. (5.51) equivale a

$$\frac{dv_2}{di_2} \neq R_2. \quad (5.52)$$

Dall'eq. (5.45), si ottiene

$$\begin{bmatrix} dv_2 \\ di_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_1 \\ di_1 \end{bmatrix},$$

ovvero

$$\frac{dv_2}{di_2} = \frac{D \frac{dv_1}{di_1} - B}{-C \frac{dv_1}{di_1} + A}.$$

Sostituendo i valori di eq. (5.52) e (5.50), si ottiene la seguente condizione di esplicitabilità

$$R_2 \neq -\frac{B + R_1 D}{A + R_1 D}. \quad (5.53)$$

Affinché il filtro WDC di Fig. 5.12 (b) sia computabile, è necessario che la seconda porta del filtro sia adattata, ossia

$$R_2 = -\frac{B + R_1 D}{A + R_1 C}.$$

Come si vede le due condizioni si escludono a vicenda, pertanto si può ottenere una versione esplicita della non linearità solo a scapito della perdita di computabilità del filtro, o viceversa.

Si conclude che nel Dominio Wave non è possibile esplicitare la non linearità mediante l'utilizzo di convertitori lineari.

5.10 Funzionamento del programma

Dalle conoscenze fin qui acquisite, si è visto come sia possibile una descrizione formale di un modello numerico, a partire dalla conoscenza dei blocchi costituenti e dalla loro modalità di connessione.

Questa descrizione del sistema è in perfetto accordo con la finalità ultima di questo lavoro di tesi che vuole fornire al musicista la possibilità di costruirsi lo strumento, attraverso interconnessione di blocchi precostituiti. A tale scopo, si è implementato un programma software in grado di realizzare e inizializzare automaticamente un modello numerico operante nel dominio d'onda, a partire da una descrizione sintattica ad alto livello sia di elementi a parametri concentrati lineari e non lineari, sia di “macro-blocchi” che possono descrivere, ad esempio, strutture a parametri distribuiti, oppure porzioni di circuito individualmente discretizzate. In sostanza la descrizione dello strumento consiste in una lista dei blocchi da assemblare e nelle loro modalità di interconnessione, a riprova versatilità e modularità del metodo proposto.

La descrizione semantica (file di testo) dello strumento è suddivisa in sei sezioni. Nella prima sezione si forniscono i valori della frequenza di campionamento F_c e di aggiornamento F_a dei parametri. Il valore della frequenza di campionamento è necessario, sia per una corretta simulazione del sistema, sia per l'adattamento degli elementi reattivi, (si ricordi che la resistenza di riferimento di un induttore, condensatore, mutatore C-R o L-R è dipendente dal tempo di campionamento). La frequenza di aggiornamento sarà invece utilizzata durante la simulazione numerica per definire gli intervalli di tempo in cui andare a modificare la struttura per tenere conto della tempo-varianza dei parametri.

Nella seconda sezione si elencano gli elementi multiporta presenti nel modello numerico che si vuole implementare. Fra essi si trovano:

- adattatori serie e parallelo;
- celle di scattering istantanee;

- celle di scattering con memoria (mutatori C-R e L-R);
- trasformatori lineari (rotatori, riflettori, scalatori, trasformatori, giratori, ecc.).

Tali informazioni permettono al programma di costruire le *matrici degli elementi multiporta* (si veda Cap. 5.4) che definiscono il modello in questione. L'implementazione attuale del programma è in grado di includere “macro-blocchi” monoporta. L'estensione a “macro-blocchi” multiporta fa parte degli sviluppi futuri di questa tesi.

Nella terza sezione del file descrittivo dello strumento, si definisce la topologia delle connessioni tra gli elementi multiporta, ovvero si specificano come sono collegati i vari elementi fra loro; queste informazioni permettono la costruzione della *matrice delle connessioni*.

Successivamente (sezione 4) si elencano i bipoli che si collegano alle terminazioni libere degli elementi multiporta. Ad ogni bipolo è associato un file che definisce il tipo (condensatore, induttore, resistore, generatore ideale, generatore reale, “macro-bipolo” nella sua versione d'onda) e i valori numerici tempo-varianti che assume durante la simulazione. La non linearità è trattata come un bipolo particolare, in cui la funzione caratteristica non lineare è specificata, nel dominio delle variabili di Kirchoff, attraverso una curva lineare a tratti (spezzata poligonale) ottenuta a partire da un insieme di punti della curva non lineare $v-i$.

A questo punto il programma è in grado fornire una versione computabile della struttura numerica attraverso il calcolo delle resistenze di riferimento che garantiscono una versione adattata degli elementi.

Una volta note le resistenze di riferimento in corrispondenza di tutte le porte, l'algoritmo implementato costruisce la matrice di tableau del circuito, effettua un controllo sulla realizzabilità della struttura digitale complessiva, verificando che $\det[T_0] \neq 0$, e successivamente ne calcola l'inversa T_0^{-1} attraverso un metodo d'inversione ottimizzato noto col nome di *metodo di Strassen* [83].

A questo punto viene controllata la computabilità della struttura numerica, verificando che $T_{0(2N,2N)}^{-1}$ (elemento di riga $2N$ e colonna $2N$ della matrice T_0^{-1}) sia identicamente uguale a zero (si veda Sez. 5.5). Se tale condizione è verificata, a partire dalla conoscenza dell'impedenza caratteristica sulla porta della non linearità, il programma ricava la versione di quest'ultima nel dominio d'onda attraverso le note trasformazioni di passaggio dalle variabili di Kirchoff alle variabili wave (si veda Cap. 2).

A questo punto è necessario inizializzare le variabili del circuito, pertanto nella quinta sezione si elencano i valori iniziali delle variabili e le porte a cui sono applicati. Il programma si preoccupa di sostituire le relazioni con ritardo, presenti nella matrice di tableau, con nuove relazioni istantanee ricavabili dalle condizioni iniziali ricavando la *matrice delle condizioni iniziali* (si veda Sez. 5.5.2) e, successivamente, risolve l'equazione non lineare implicita associata al sistema mediante il metodo numerico di Newton Raphson la cui descrizione sommaria è presentata in Appendice A.

Come già spiegato in Sezione 5.6, la presenza di “macro-bipoli” adattati non lede la generalità del metodo d'inizializzazione automatico dal momento che il disaccoppiamento della struttura WDF dai “macro-bipoli” stessi permette una inizializzazione individuale delle due parti.

A questo punto il modello digitale è totalmente implementato e, pertanto, il programma può iniziare la simulazione (sezione 6). Al fine di gestire la tempo-varianza sotto le ipotesi di Sezione 5.7, si è creato un processo concorrente che lavora in parallelo al primo e che ha il compito di modificare i valori delle strutture tempo-varianti (matrice di tableau, resistenze di riferimento, non linearità) ad intervalli di tempo pari al tempo di aggiornamento $T_a = 1/F_a$.

Nel file di descrizione possono essere specificate le variabili di uscita d'interesse, definendone il tipo (nel caso meccanico: forza, velocità, posizione, accelerazione, ecc.) e la porta da cui prelevarle. Sarà compito del programma trasformare in maniera automatica le variabili wave nelle variabili duali Kirchoff e memorizzarne i valori in due file: il primo contenente l'andamento temporale, il secondo contenente una sua versione pronta all'ascolto.

Capitolo 6

Risultati

In questo Capitolo si mostreranno i risultati di alcune simulazioni di strutture non lineari, effettuate mediante l'impiego del metodo di sintesi automatico dei filtri ad onda numerica presentato nel Capitolo 5.

Si presenteranno dapprima i casi di circuiti elettrici e modelli acustici con non linearità istantanee e, in seguito, quelli con non linearità con memoria. Successivamente si approfondirà l'utilizzo del metodo ad un caso particolare: l'interazione fisica martelletto-corda in un pianoforte.

6.1 Non linearità resistive

6.1.1 Circuito caotico di Chua

In letteratura sono presenti numerosi esempi di simulazione di circuiti caotici nel dominio d'onda [20, 23]. In particolare Meerkötter [20] ha dimostrato che, poiché tutti i circuiti caotici appartenenti alla famiglia di Chua [21], sono caratterizzati dalla presenza di una resistenza non lineare (generalmente modellabili mediante una caratteristica lineare a tratti), essi possono essere facilmente implementabili nel dominio d'onda attraverso il metodo di Sezione 2.10.

In Fig. 6.1 (a) è mostrato un esempio di circuito caotico di Chua. La non linearità istantanea di Fig. 6.2 (a), soddisfa il teorema della funzione implicita e pertanto, si trasforma nella funzione di riflessione non lineare globalmente esplicitabile di Fig. 6.2 (b).

Il filtro, implementato in Fig. 6.1 (b), evolve nel tempo secondo i diagrammi di fase di Fig. 6.3

6.1.2 Modello di Rayleigh

Il modello di Rayleigh di Fig. 6.4, consiste in una massa m , connessa ad una molla con costante di elasticità k , che striscia su un rullo girevole di velocità costante \dot{x}_0 . L'equazione dinamica che governa il moto è la seguente

$$m\dot{v} + F_b(v - v_0) + k \int_0^t v(\tau) d\tau = 0, \quad (6.1)$$

dove v e v_0 sono rispettivamente la velocità della massa e del rullo, mentre la funzione $F_b()$ di Fig. 6.5 (a) rappresenta la forza di attrito non lineare che agisce sul sistema massa rullo.

L'equivalenza tra modelli meccanici e elettrici, permette di rappresentare il modello fisico di Fig. 6.1, con il circuito analogico di Fig. 6.6 (a), dove, alla massa m e all'inverso della costante elastica $1/k$ sono stati sostituiti i corrispondenti elementi elettrici L e C , mentre alla forza di attrito non lineare $F_b(v)$, si può associare la resistenza non lineare $R_{nl}(i)$. Il filtro ad onda numerica di Fig. 6.6 (b) ha un coefficiente di riflessione non lineare con *isteresi*, come presentato

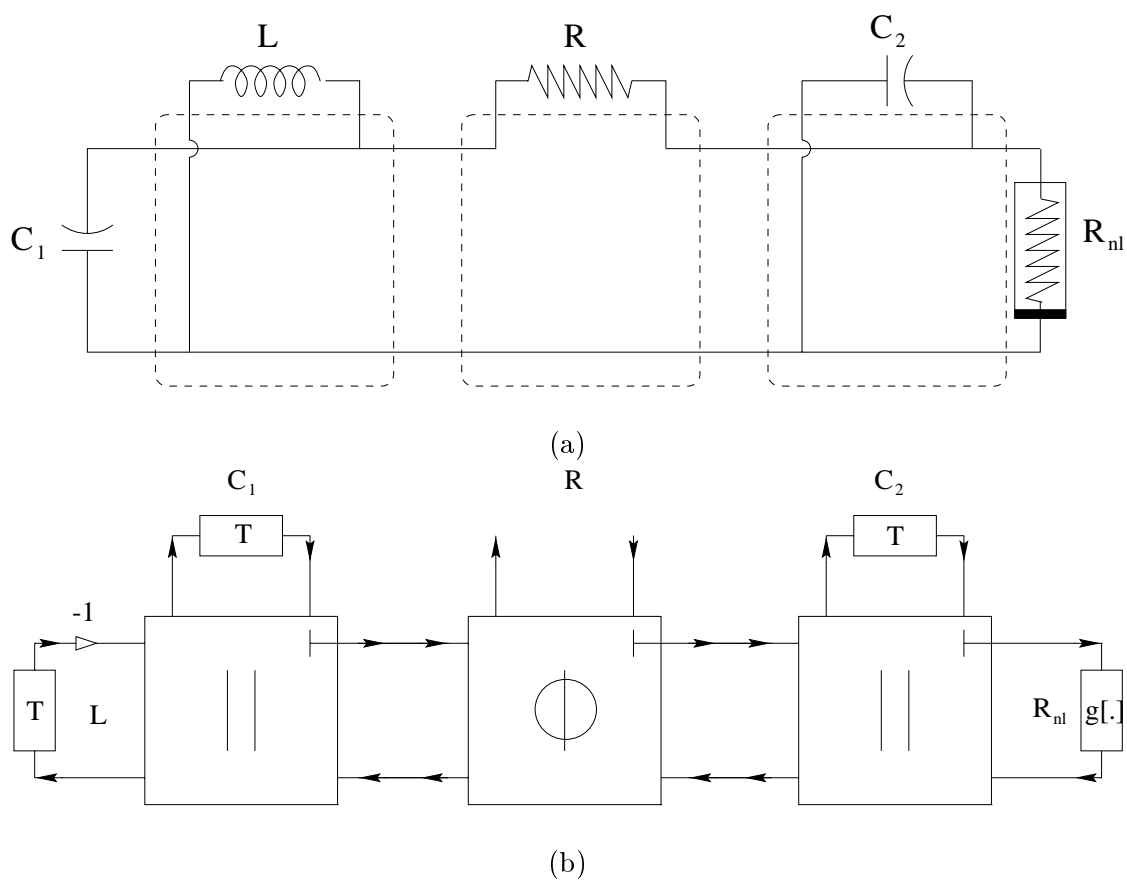
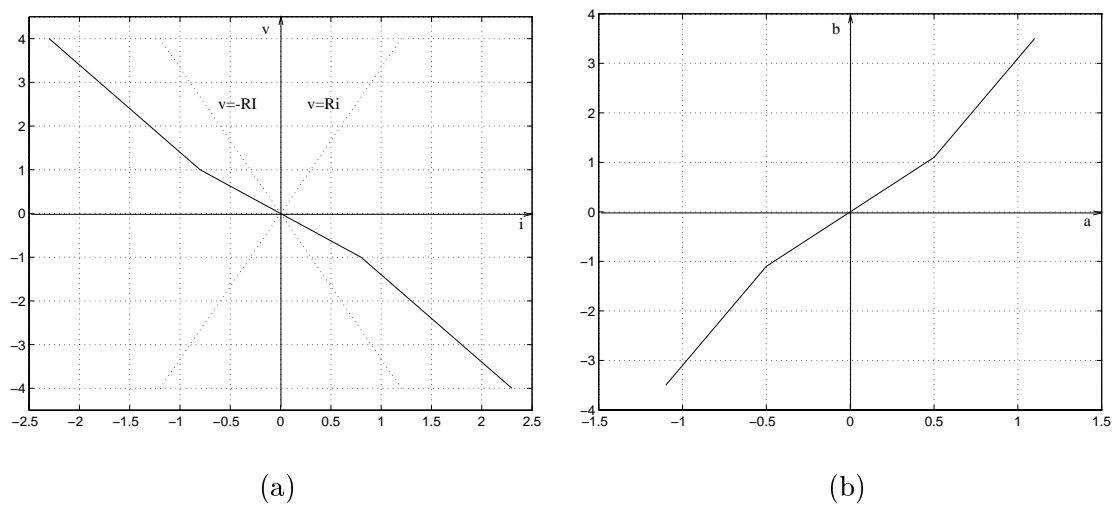


Fig. 6.1: (a) Circuito Caotico di Chua. (b) Filtro ad onda numerica.

Fig. 6.2: (a) Non linearità $v - i$ del resistore. (b) Coefficiente di riflessione.

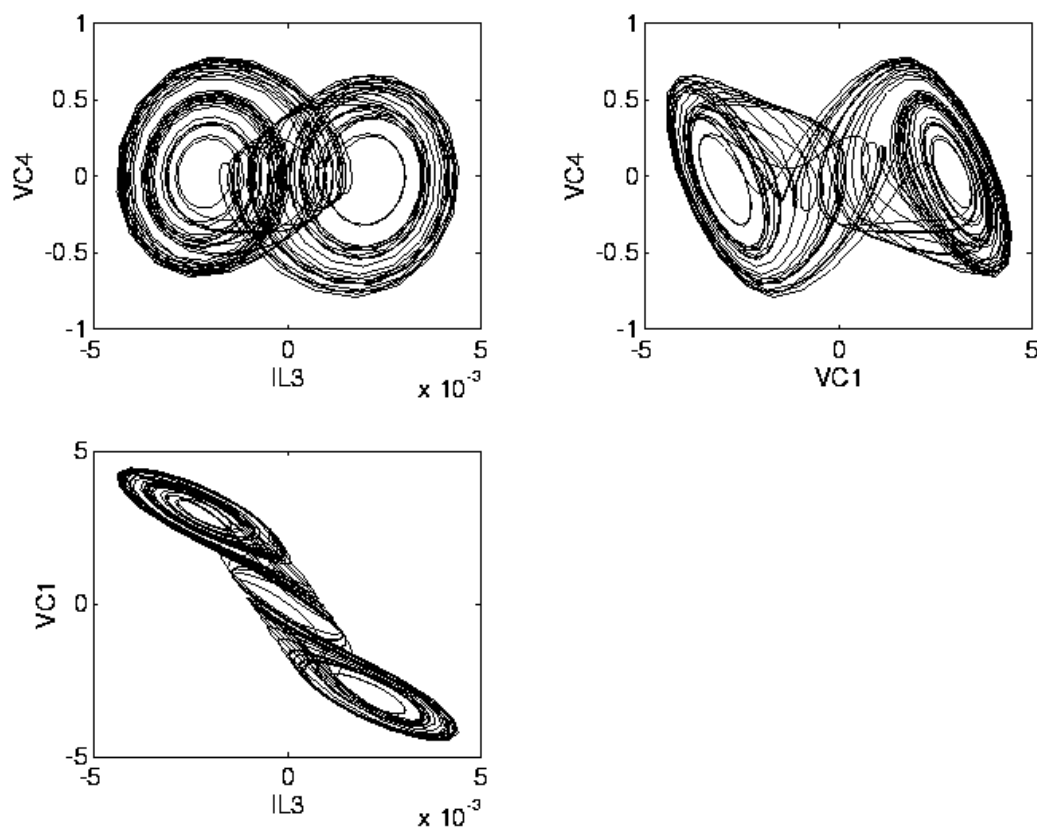


Fig. 6.3: Esempi di diagrammi di fase del circuito di Chua.

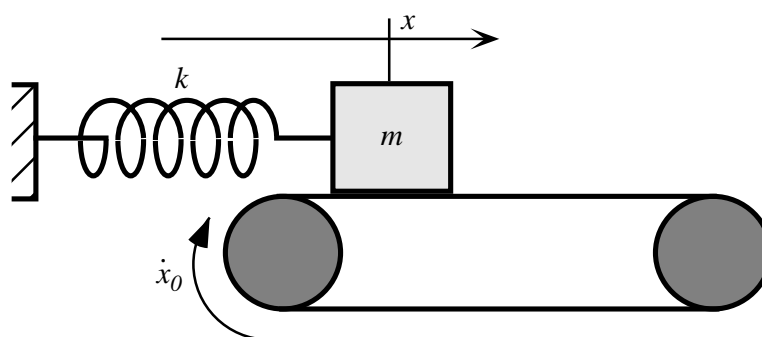


Fig. 6.4: Modello fisico di Rayleigh.

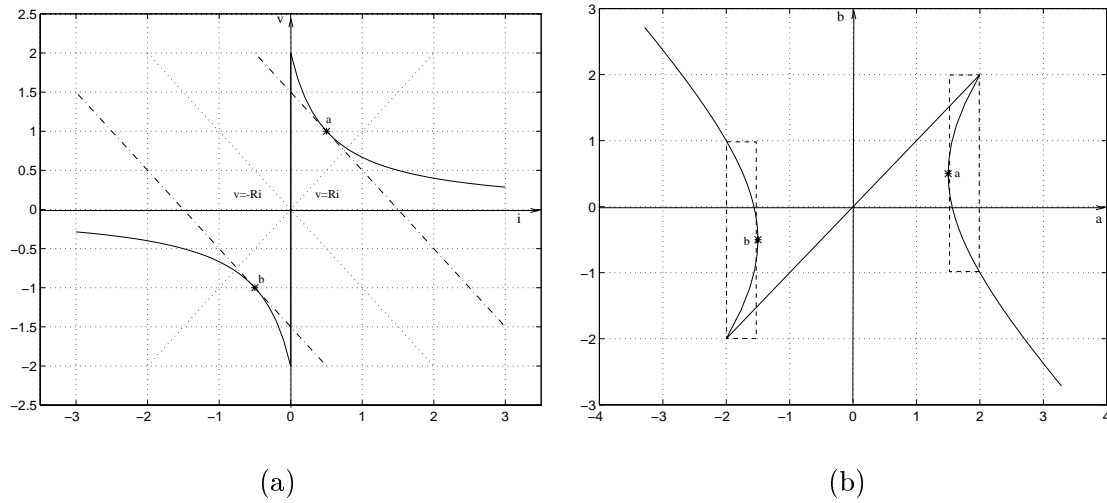


Fig. 6.5: (a) Funzione di attrito non lineare del sistema massa molla. (b) Coefficiente di riflessione non lineare.

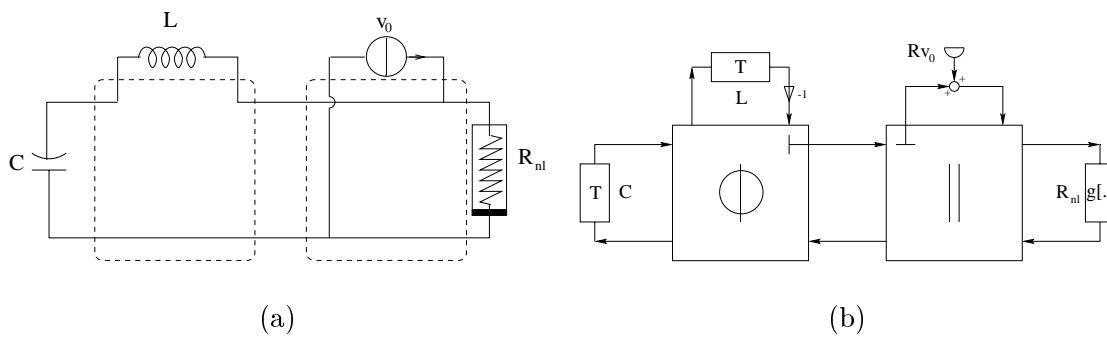


Fig. 6.6: Modello di Rayleigh. (a) Circuito elettrico equivalente. (b) Filtro ad onda numerica

in Fig. 6.5 (b) che viene trattato come descritto in Sezione 2.10.4. Si noti che l'introduzione dell'adattatore parallelo, avente resistenze di riferimento identiche alle due porte non adattate, (si veda Sez. 5.8.1), consente di separare il generatore ideale di corrente v_0 dalla non linearità senza dare origine a problemi di computabilità.

L'evoluzione temporale delle variabili del filtro è presentata nei diagrammi di fase di Fig. 6.7

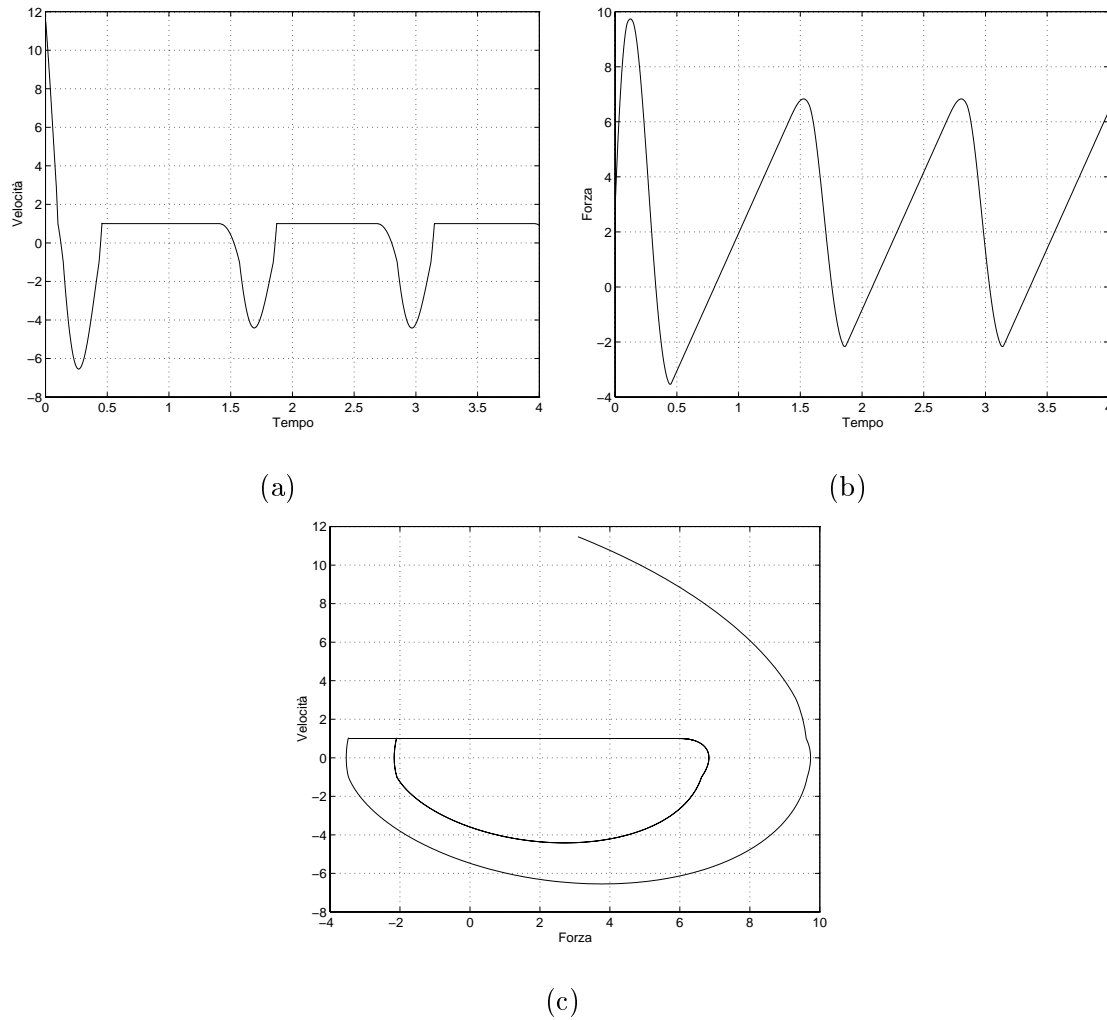


Fig. 6.7: Circuito di Rayleigh. (a) Evoluzione nel tempo (*sec*) della velocità della massa (*m/sec*). (b) Evoluzione nel tempo (*sec*) della forza applicata alla molla (*N*). (c) Diagramma di fase velocità forza.

6.1.3 Interazione ancia-tubo acustico

Come si vede dalla descrizione schematica di Fig. 6.8, il clarinetto è costituito da tre blocchi principali: il bocchino, il tubo acustico e la campana. Il tubo acustico è, assieme alla campana, una delle due parti costituenti il risuonatore. Esso può essere trattato come una colonna d'aria chiusa ad una estremità dall'ancia e aperta dall'altra; quando l'aria viene messa in vibrazione, all'interno del tubo si propagano onde di tensione e flusso che soddisfano in prima approssimazione l'equazione di propagazione delle onde ideali. Agli effetti del comportamento dell'onda di pressione e flusso, la canna di un qualsiasi strumento a fiato può essere interpretata come una particolare guida d'onda. La campana è la parte terminale della canna, la sua funzione principale è irradiare parte dell'energia immagazzinata nel tubo verso l'esterno. In altri termini

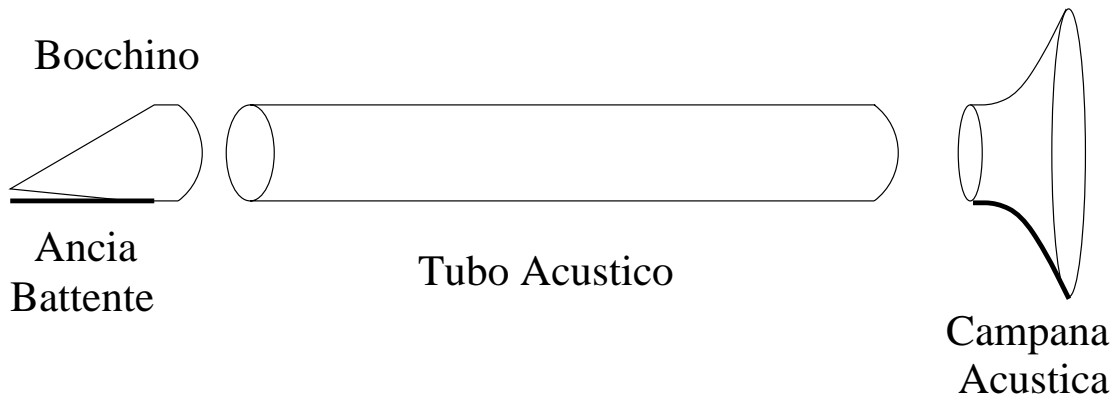


Fig. 6.8: Rappresentazione schematica di un clarinetto.

la campana agisce come filtro, riflettendo, in maniera selettiva in frequenza, parte dell'energia all'interno dello strumento e trasmettendo verso l'ambiente la parte rimanente. L'eccitatore del clarinetto è costituito dal bocchino, che a differenza del risuonatore, il cui comportamento è lineare, ha un comportamento marcatamente non lineare. Una sottile lamella di legno chiamata *ancia* è legata ad un'estremità alla parte inferiore del bocchino. L'altra estremità è libera di oscillare, vibrando l'ancia controlla il flusso d'aria che entra ed esce dal bocchino, funziona cioè come una valvola che può variare la propria apertura fino a chiudersi completamente quando l'ancia batte contro il bocchino. Per comprendere perché l'ancia oscilli, si supponga che il musicista produca una certa pressione P_0 , mentre nel bocchino la pressione sia inferiore o pari a p . La differenza di pressione tra la bocca e il bocchino induce un flusso d'aria verso l'interno dello strumento e, conseguentemente, un'onda di pressione che si propaga nella canna. Contemporaneamente, la stessa differenza di pressione flette l'ancia in direzione di chiusura. Quando l'onda di pressione, parzialmente riflessa all'estremità aperta della canna torna nel bocchino, la differenza $p_{nl} = P_0 - p$ cambia segno, spingendo l'ancia ad aprirsi, facendo così mutare il verso del flusso d'aria.

In prima approssimazione, supponendo che l'ancia si muova senza inerzia, il flusso entrante nella canna dipende istantaneamente dalla differenza di pressione $p_{nl} = P_0 - p$. L'andamento qualitativo della funzione non lineare [72]

$$u = f(P_0 - p) = f(p_{nl})$$

è riportato in Fig. 6.9 (a).

Ricorrendo all'analogia tra variabili intensive ed estensive, si può sostituire alla coppia di variabili p - u la coppia v - i , ottenendo il circuito elettrico equivalente di Fig. 6.10 (a).

Una volta trasformata la non linearità di Fig. 6.9 (a) nel corrispondente coefficiente di riflessione di Fig. 6.9 (b) per le variabili d'onda a - b , è possibile simulare il circuito elettrico attraverso il filtro ad onda numerica di Fig. 6.10 (b). Come spiegato in Sez. 5.8.1, se si impone l'uguaglianza delle resistenze di riferimento alle due porte non adattate, l'adattatore serie di Fig. 6.10 (b) permette una *traslazione rigida della curva non lineare* senza originare problemi di computabilità.

In Fig. 6.11 sono riportati i grafici dell'andamento di pressione e flusso all'estremità sinistra della canna.

6.1.4 Eccitazione "Jet-stream"

Come si vede dalla Fig. 6.12, il flauto ha una struttura simile a quella del clarinetto, ciò che cambia è il meccanismo di eccitazione. In questo caso la differenza di pressione $p_{nl} = P_0 - p$ devia parte del flusso all'esterno dello strumento attraverso il foro posto sulla parte superiore

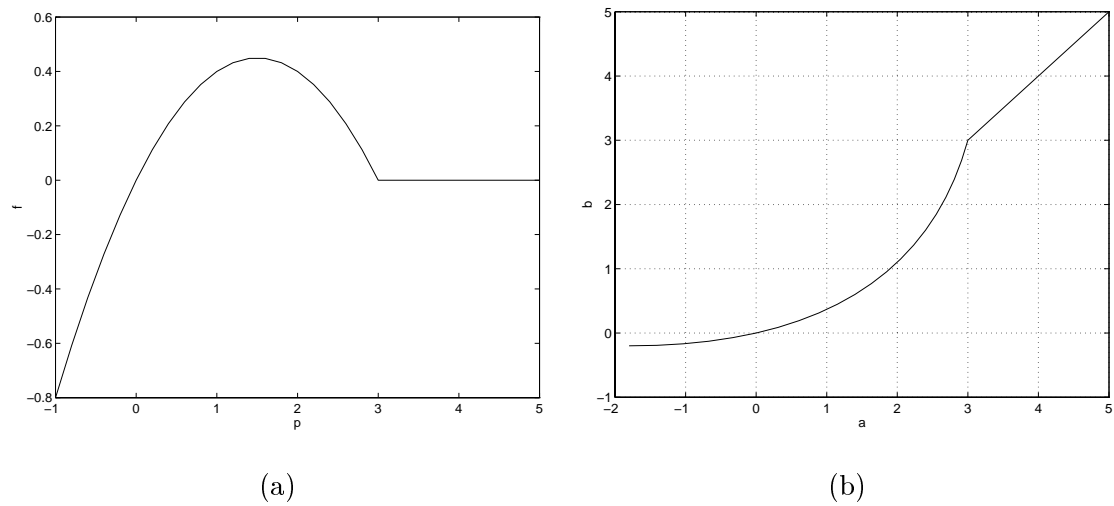


Fig. 6.9: Non linearità del clarinetto. (a) Rappresentazione rispetto alle variabili $p_{nl} - u$. (b) Rappresentazione rispetto alle variabili d'onda $a - b$.

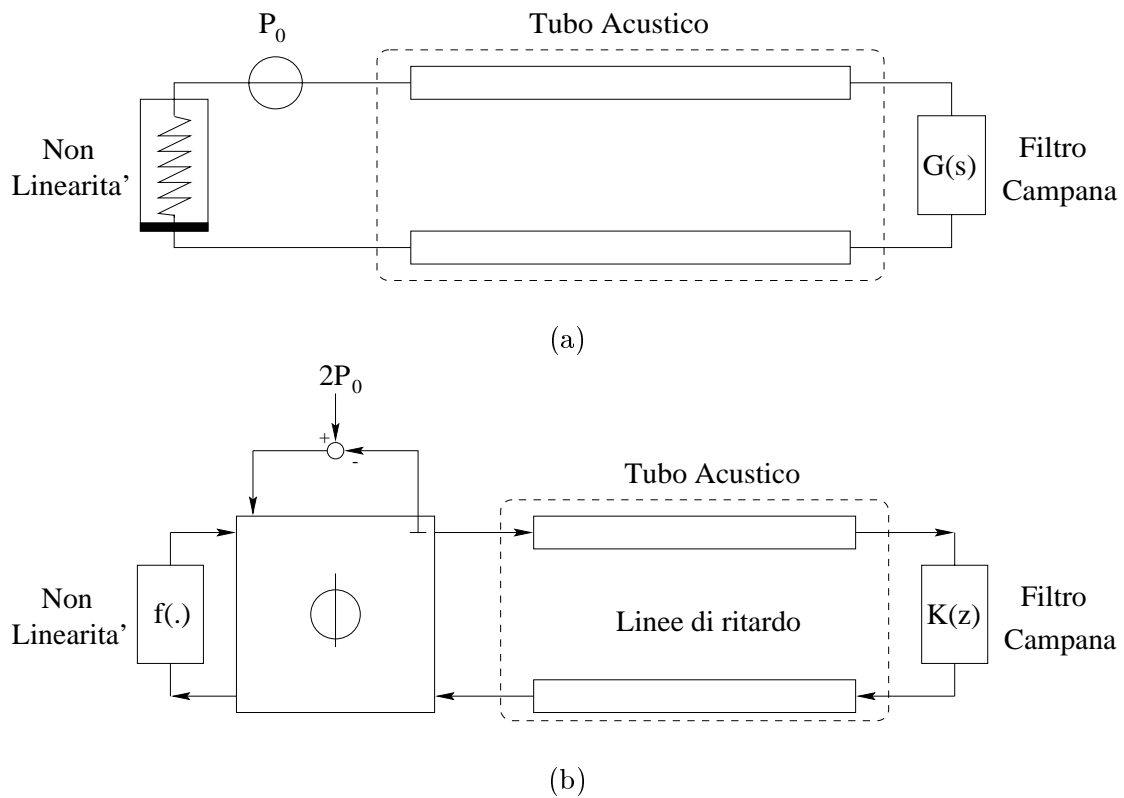


Fig. 6.10: (a) Circuito elettrico. (b) Filtro ad onda numerica.

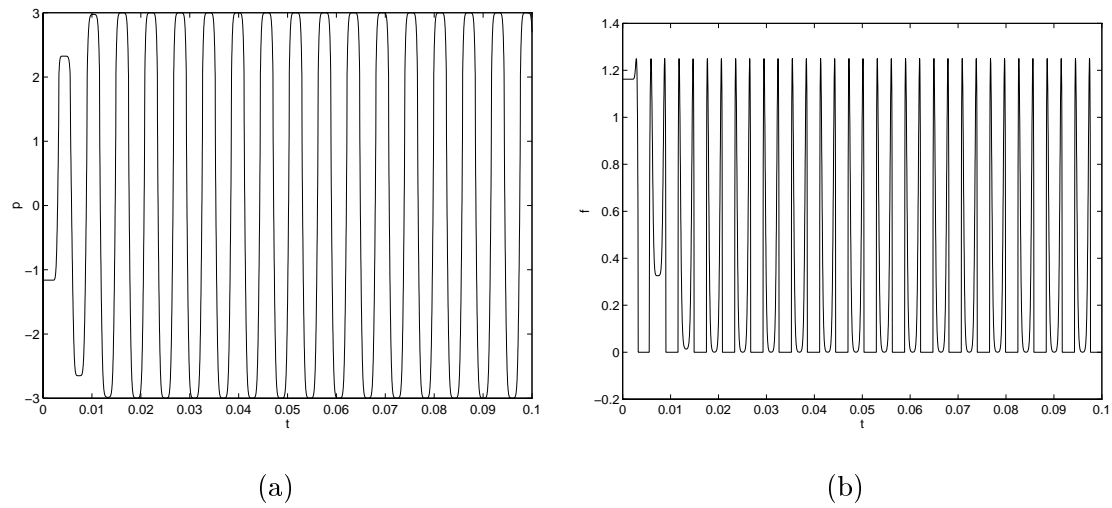


Fig. 6.11: (a) Evoluzione nel tempo (*sec*) della pressione (N/m^2). (b) Evoluzione nel tempo (*sec*) del flusso (m^2/sec^2) .

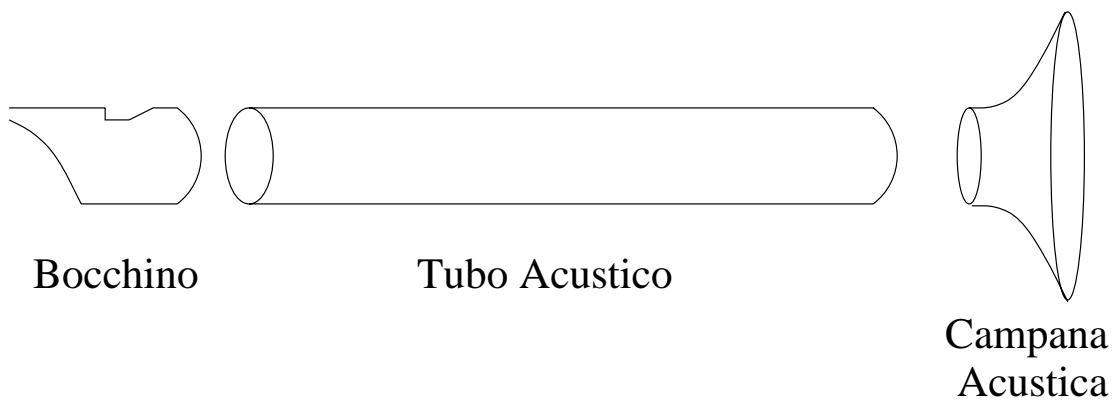


Fig. 6.12: Rappresentazione schematica del flauto.

del bocchino. Un andamento appropriato della funzione caratteristica [72]

$$u = f(P_0 - p) = f(p_{nl})$$

è riportato in Fig. 6.13 (a), in cui si assume che il flusso entrante nella canna è positivo, mentre quello uscente è negativo.

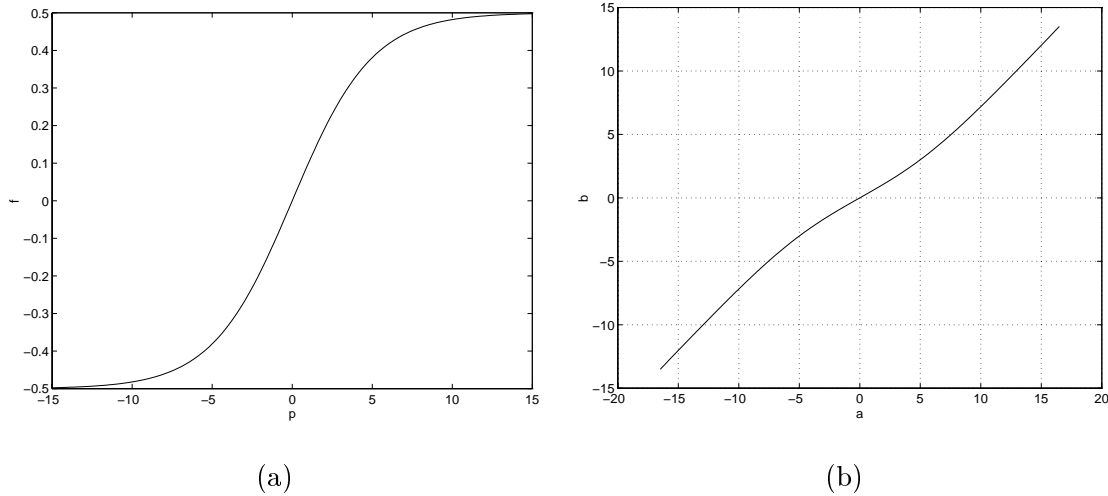


Fig. 6.13: Non linearità del flauto. (a) Rappresentazione rispetto alle variabili $p_{nl} - u$. (b) Rappresentazione rispetto alle variabili d'onda $a - b$.

Una volta trasformata la non linearità di Fig. 6.13 (a) nel corrispondente coefficiente di riflessione di Fig. 6.13 (b) per le variabili d'onda $a-b$, è possibile simulare il circuito elettrico di Fig. 6.14 attraverso il filtro ad onda numerica di Fig. 6.14 (b). Analogamente al caso del clarinetto l'adattatore tre porte permette di traslare la non linearità al variare della pressione d'ingresso.

In Fig. 6.15 sono riportati i grafici dell'andamento di pressione e flusso all'estremità sinistra della canna.

6.1.5 Interazione archetto-corda

Il meccanismo di generazione del suono per il violino si basa sullo strofinamento di un archetto su una corda. Il modello che si è scelto di adottare per rappresentare l'archetto, è costituito da un sistema oscillante accoppiato ad una non linearità. Supponendo di rappresentare le oscillazioni della corda in una sola direzione, si può pensare ad un archetto come ad un sistema fisico del tipo rappresentato in Fig. 6.16.

Si supponga che l'eccitazione avvenga applicando una forza verticale F_z e imponendo una velocità U all'archetto note. Si supponga inoltre, che l'archetto sia infinitamente lungo, in modo tale da mantenere il suo moto sempre nella stessa direzione.

Nel punto di contatto le velocità trasversali dei due tratti, di corda che separano l'eccitatore dalle due estremità della corda stessa, il *ponte* e il *capotasto*, sono uguali tra loro, ossia

$$v = v_{sx} = v_{dx}.$$

La forza esercitata nel punto di contatto dalla corda è invece uguale alla somma delle forze trasversali dei due tratti come è descritto nella formula seguente

$$f = f_{sx} + f_{dx}.$$

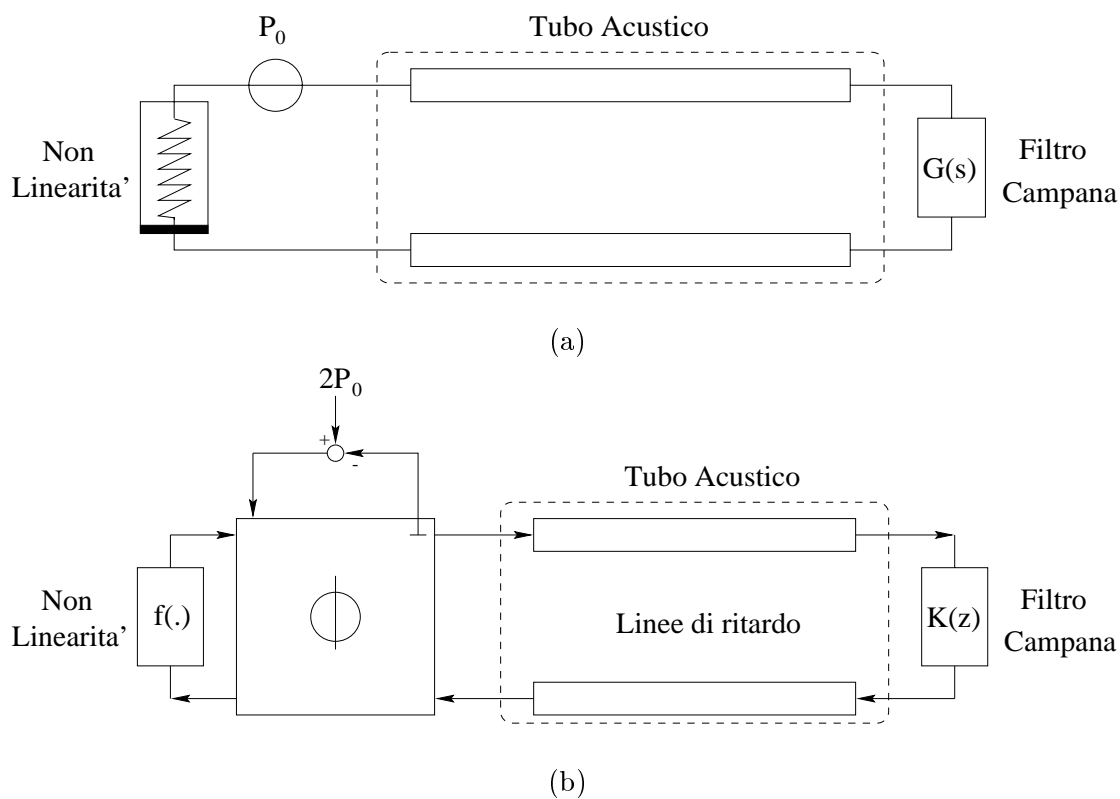
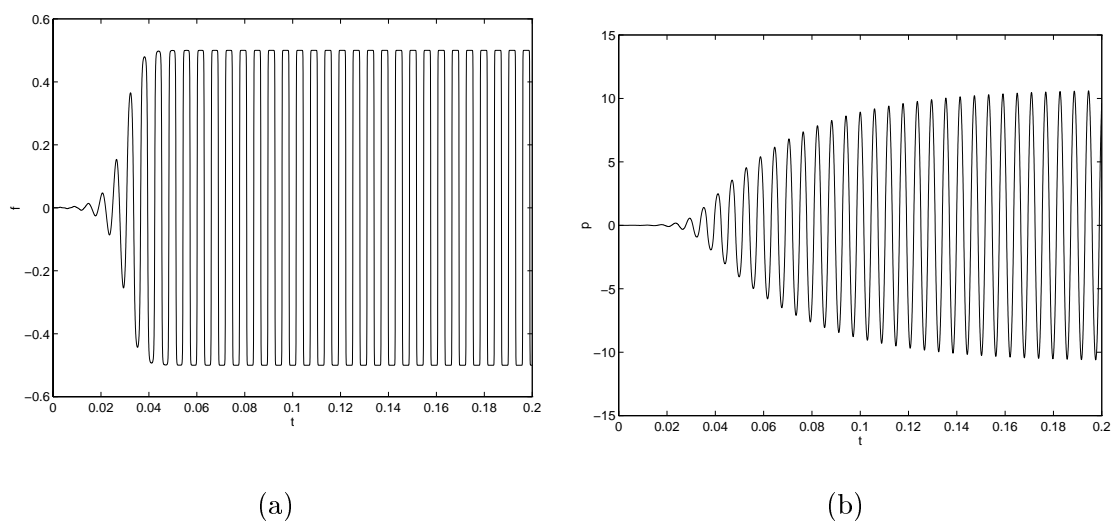


Fig. 6.14: (a) Circuito elettrico.(b) Filtro ad onda numerica.

Fig. 6.15: (a) Evoluzione nel tempo (*sec*) della pressione (N/m^2). (b) Evoluzione nel tempo (*sec*) del flusso (m^2/sec^2).

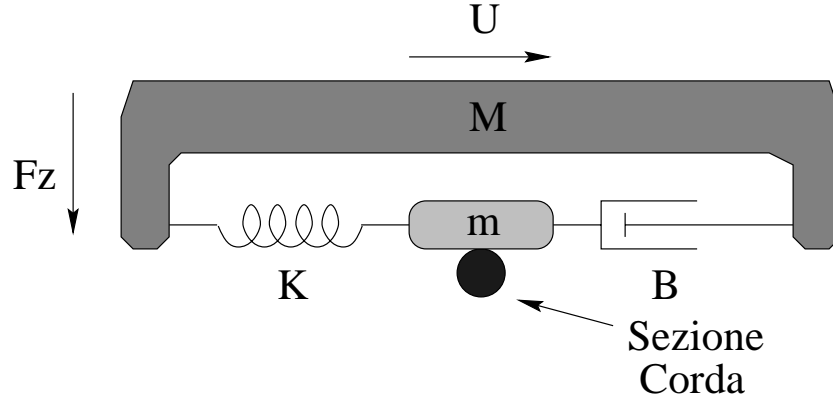


Fig. 6.16: Rappresentazione schematica del violino.

Se a velocità e forza si associano le grandezze elettriche duali tensione e corrente, si può affermare che i due tratti di corda, rappresentabili mediante due opportuni risuonatori, siano collegati in serie tra loro.

La corda viene messa in movimento dal moto dell'archetto, la cui dinamica è contenuta nella seguente equazione

$$f_{arc}(t) = -m\dot{u}(t) - k \int u(t)dt - Bu(t) + k \int U(t)dt + BU(t) ,$$

dove u è la velocità della massa m . Il meccanismo di eccitazione è fortemente non lineare e si svolge attraverso la continua commutazione dallo stato di scivolamento dei crini sulla corda allo stato di adesione degli stessi alla corda. In fase di adesione la corda segue il movimento della massa m , per cui $v = u$. Si rimane in questo stato finché la forza f diventa superiore ad un valore massimo $f_{max} = \Delta\mu F_z$, con $\Delta\mu$ costante adimensionale. Quando ciò accade, la corda passa in stato di scivolamento e la forza è legata alla velocità relativa da un tipico andamento, la cui approssimazione analitica è la seguente [73]

$$f_{nl} = \frac{\Delta\mu F_z}{-(u - v)/\alpha + 1} + \mu_d F_z$$

dove α è una costante omogenea alla velocità e μ_d è adimensionale. Come si può notare la non linearità è dipendente dalla forza verticale applicata all'archetto F_z , che in fase di simulazione è variabile nel tempo, questo implica che la non linearità è tempo variante. In Fig. 6.17 (a) è riportata la curva caratteristica della non linearità per alcuni valori crescenti di F_z .

Nel punto di contatto la forza dell'archetto è uguale alla forza non lineare che a sua volta è identica alla forza trasversale esercitata dalla corda, ossia

$$f_{arc} = f_{nl} = f .$$

In maniera analoga, definita la nuova variabile $u' = -u$, la relazione tra le velocità dell'archetto, della non linearità e della corda può essere scritta nella seguente maniera

$$v_{nl} = -v - u' \quad \text{che equivale a} \quad v_{nl} + v + u' = 0$$

Ricordando l'analogia tra grandezze intensive ed estensive, si può affermare che i tre elementi rappresentanti corda, non linearità e molla sono connessi in parallelo tra loro.

Il circuito elettrico equivalente del sistema dinamico di Fig. 6.16, è rappresentato in Fig. 6.18 (a).

Si può vedere come l'archetto, la cui equazione dinamica è

$$f_{arc}(t) = m\dot{u}'(t) + k \int u'(t)dt + Bu'(t) + k \int U(t)dt + BU(t) ,$$

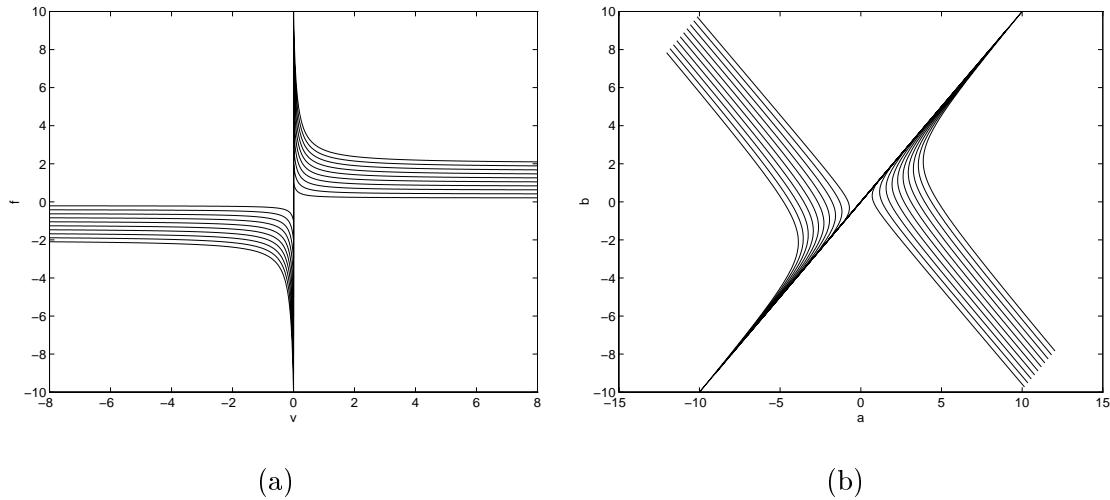


Fig. 6.17: Caratteristica non lineare del violino. (a) Rappresentazione Kirchoff per valori crescenti di F_z . (b) Rappresentazione Wave per valori crescenti di F_z .

sia stato scomposto nella serie di tre elementi lineari: un'induttanza rappresentante la massa, una capacità rappresentante la molla e un generatore reale, la cui resistenza interna è uguale alla resistenza meccanica B , mentre il valore del generatore di tensione è dipendente dalla velocità U attraverso la relazione

$$f(U) = k \int U(t)dt + Bu(t) .$$

Una volta trasformata la non linearità tempo variante di Fig. 6.17 (a) nella corrispondente funzione non lineare nel dominio d'onda di Fig. 6.17 (b), è possibile implementare il filtro ad onda numerica equivalente di Fig. 6.18 (b).

Come si può notare la non linearità ha comportamento isteretico, l'ambiguità che ne consegue viene risolta utilizzando il metodo di soluzione presentato in Sezione 2.10.4. L'evoluzione temporale del moto e della forza trasversale della corda sono rappresentati in Fig. 6.19.

6.2 Non linearità con memoria

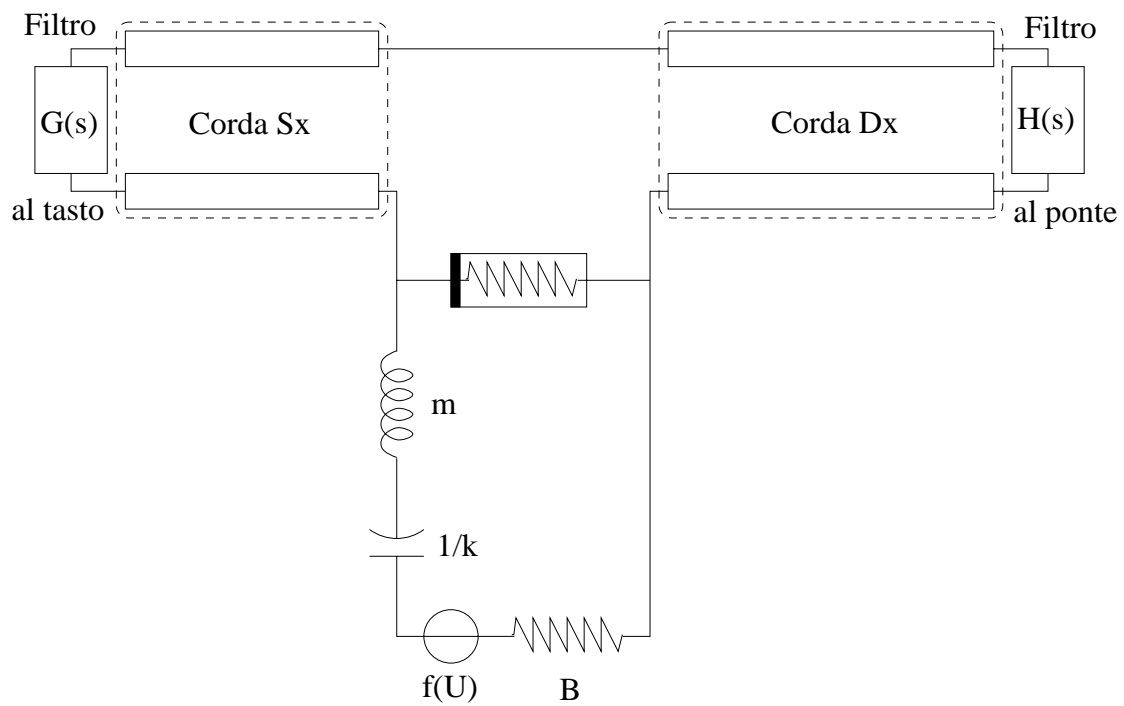
6.2.1 Oscillatore inarmonico

Si è visto precedentemente come nei circuiti della famiglia di Chua, il comportamento caotico è dovuto principalmente alla presenza di una resistenza non lineare. Esistono, comunque, molti esempi di circuiti che contengono una reattanza non lineare ed esibiscono, sotto opportune condizioni, una dinamica caotica, o fenomeni interessanti quali oscillazioni subarmoniche. Esempi di questi circuiti possono essere trovati in [22, 29, 30, 31] e l'accuratezza della loro simulazione è generalmente molto sensibile all'errore di quantizzazione. Un esempio di circuito di questo tipo, la cui simulazione nel dominio d'onda numerica fu studiata a fondo da Felderhoff [23], è rappresentato dall'oscillatore inarmonico [29] di Fig. 6.20 (a).

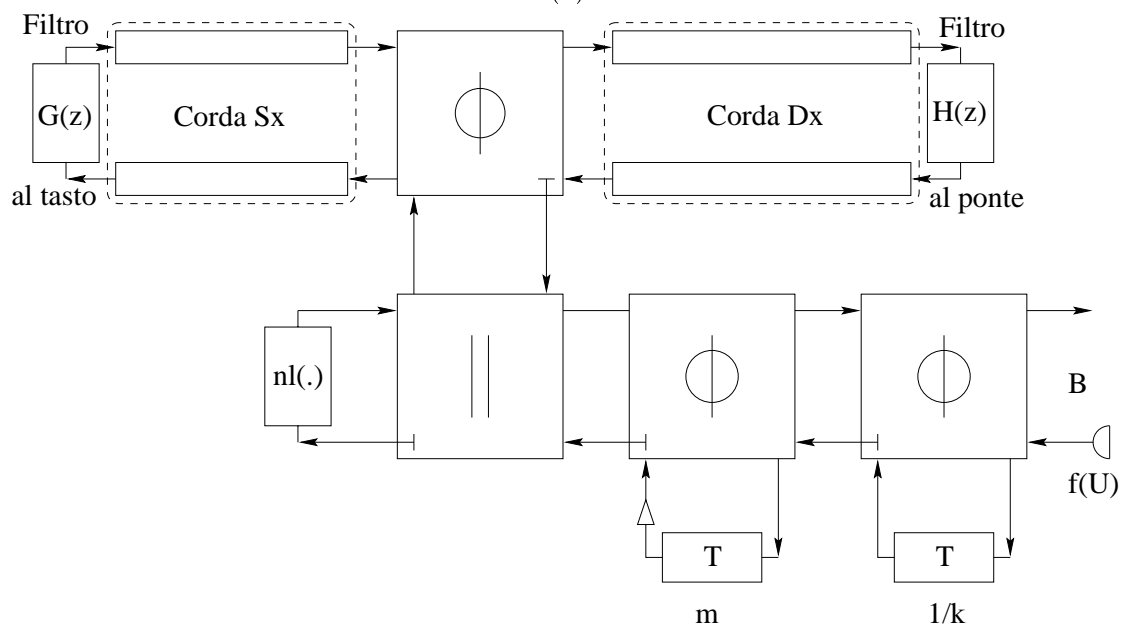
Questo semplice circuito RLC è caratterizzato da una capacità non lineare controllata in tensione, la cui caratteristica $q-v$

$$\begin{cases} q = C_0 \frac{v}{\sqrt{1 + v/v_0}} & \text{per } v > -v_0 \\ 0 & \text{per } v \leq -v_0 \end{cases}$$

è mostrata in Fig. 6.21 (a). I parametri utilizzati per la simulazione di tale circuito sono $v_0 =$



(a)



(b)

Fig. 6.18: Violino. (a) Circuito elettrico. (b) Filtro ad onda numerica.

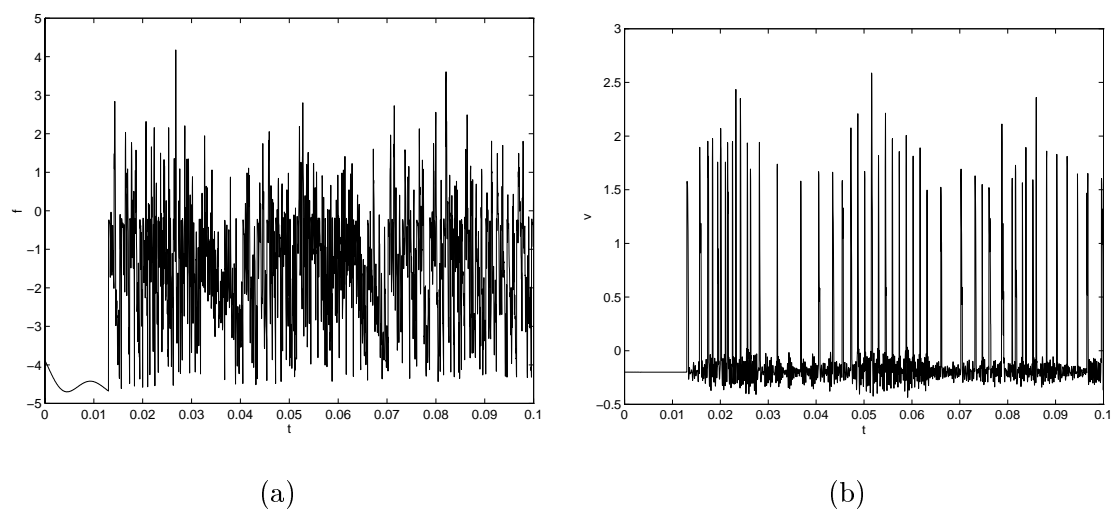


Fig. 6.19: (a) Evoluzione nel tempo (*sec*) della forza (*N*). (b) Andamento temporale della velocità trasversale (*m/sec*).

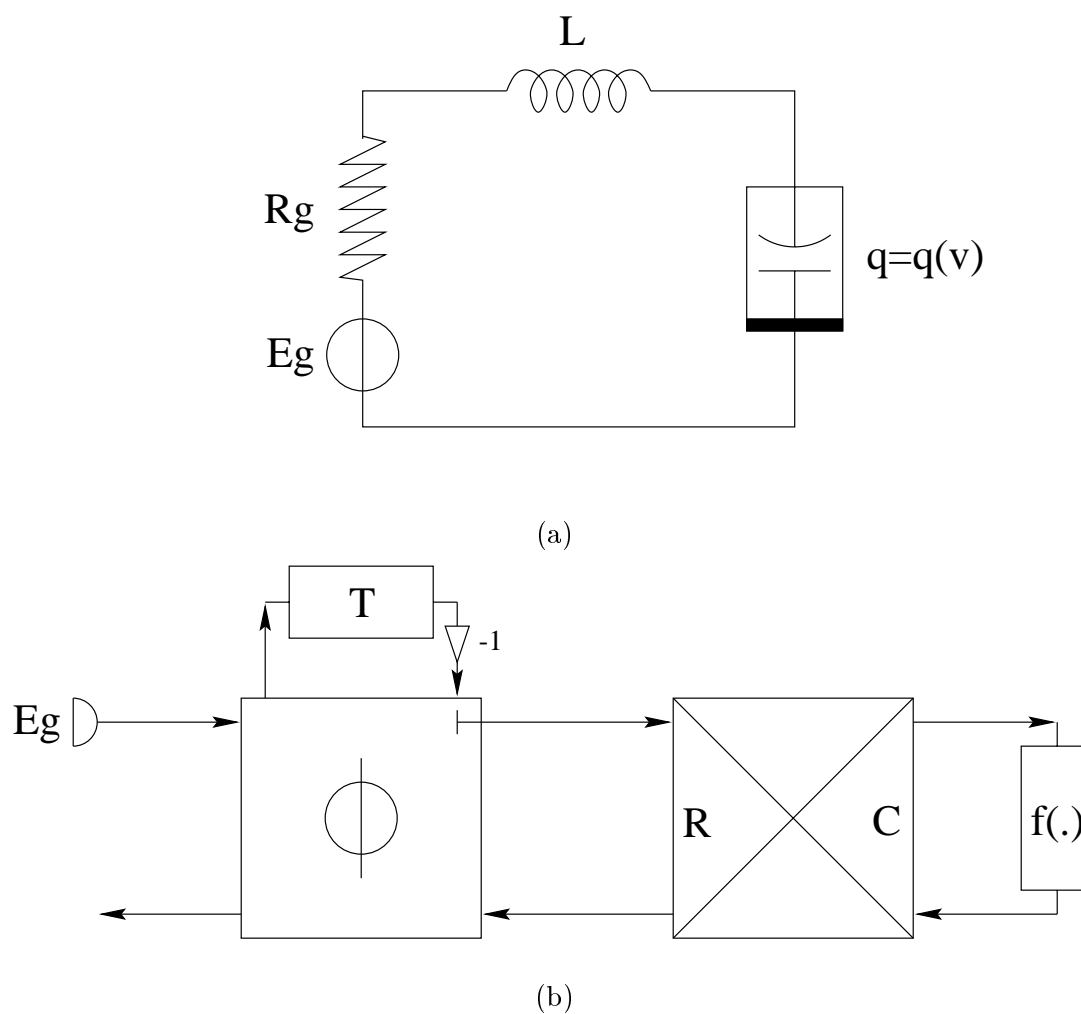


Fig. 6.20: Oscillatore inarmonico. (a) Circuito elettrico. (b) Filtro ad onda numerica.

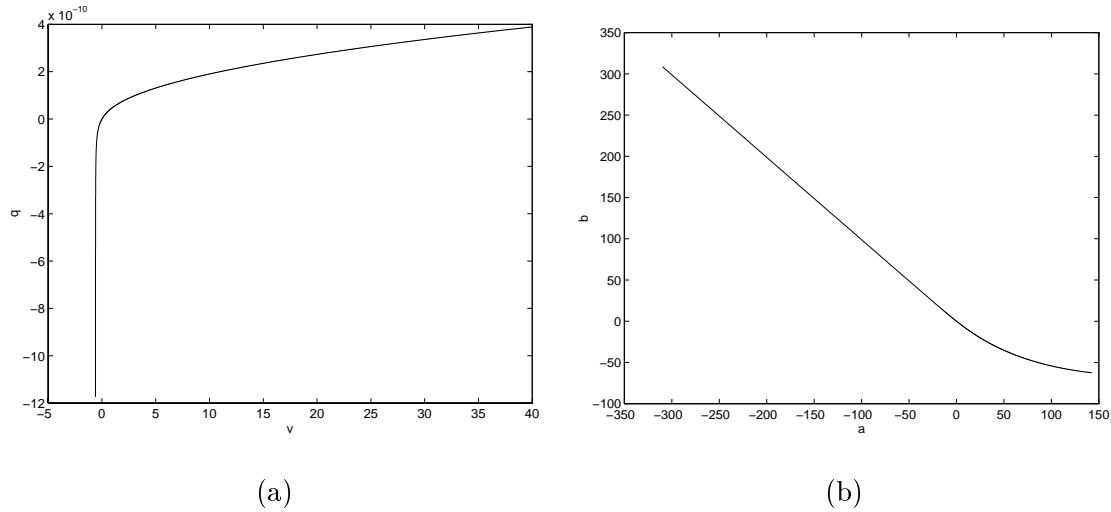


Fig. 6.21: Caratteristica non lineare dell'oscillatore inarmonico. (a) Rappresentazione Kirchoff. (b) Rappresentazione Wave.

$0.6V$, $R = 180\Omega$, $L = 100\mu H$, $C_0 = 80pF$ e la tensione fornita dal generatore ideale è uguale a

$$e(t) = e_0 \sin(2\pi f_0 t), \quad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}.$$

Il comportamento dell'oscillatore è studiato per differenti valori di E_0 del generatore di tensione.

Al fine di implementare l'oscillatore inarmonico nel dominio d'onda, Felderhoff [23] propone una soluzione che utilizza i filtri ad onda numerica classici, aggiungendo un trasformatore il cui rapporto di trasformazione è funzione della tensione ai capi della capacità non lineare. Come già detto in Sez. 2.11, dal momento che la tensione v è istantaneamente dipendente sia dall'onda incidente che dall'onda riflessa, l'implementazione ottenuta presenta problemi di computabilità, che Felderhoff risolve calcolando numericamente la soluzione dell'equazione implicita per ogni campione.

Adottando la nuova coppia d'onde di tensione descritte in Sez. 3.2.1 è possibile ottenere una nuova implementazione WDF computabile.

Come si vede in Fig. 6.20 (b), grazie all'utilizzo del mutatore d'onda C-R, la non linearità $q = q(v)$, ha un comportamento istantaneo rispetto alla coppia di variabili d'onda. La non linearità di Fig. 6.21 (a) viene mappata nella funzione di Fig. 6.21 (b) e l'andamento di fase dell'oscillatore inarmonico è riportato in Fig. 6.22.

6.3 Caso di studio: il pianoforte

Il pianoforte fu inventato nel 1709 da un artigiano costruttore di clavicembali di nome Bartolomeo Cristofori. Egli modificò il clavicembalo sostituendo i plettri, che pizzicano le corde, con dei martelletti in pelle che permettono di percuotere le corde stesse. Dal momento che è possibile suonare una nota sia piano che forte a seconda della forza che si esercita sul tasto, Cristofori chiamò il nuovo strumento *clavicembalo col piano e forte* che successivamente fu abbreviato a *pianoforte*. Grazie alle sue interessanti caratteristiche dinamiche e timbriche, il pianoforte riscosse subito notevole successo da parte dei musicisti. Ciò diede impulso al suo progressivo perfezionamento, passando dal piano di Cristofori, la cui estensione in frequenza era di sole quattro ottave, ai pianoforti moderni che coprono più di sette ottave.

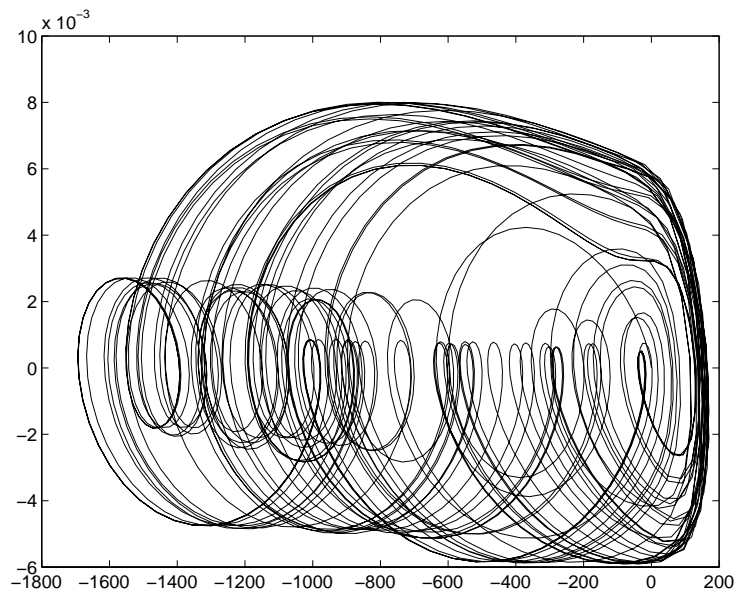


Fig. 6.22: Diagramma di fase dell'oscillatore inarmonico. In ascissa è riportata la carica del condensatore ($nAsec$) in ordinata la corrente dell'induttore (nA).

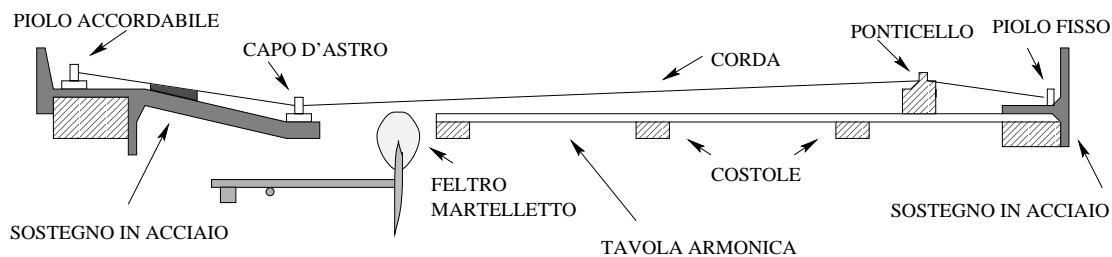


Fig. 6.23: Descrizione degli elementi principali del pianoforte.

6.3.1 Descrizione fisica

Una vista schematica del pianoforte è rappresentata in Fig. 6.23. Una corda in acciaio è posta in tensione tra due supporti, il *capo d'astro* e il *piolo fisso*, a loro volta fissati a due sostegni in metallo. Vicino al piolo fisso la corda è appoggiata ad un listello, il *ponte*, il quale è incollato ad una grossa tavola di legno chiamata *tavola armonica*.

Quando il martelletto percuote la corda, essa trasforma e conserva parte dell'energia cinetica che riceve in energia vibrazionale attraverso la propagazione dei modi fondamentali. Sebbene la corda contenga tutti i modi che si vorrebbero ascoltare, essa non è adatta a irradiare in maniera appropriata il suono nell'ambiente circostante. Per tale motivo la corda trasferisce parte della sua energia vibrazionale alla tavola armonica che irradia il suono in maniera più efficiente. Il ponte è l'elemento di connessione che permette il trasferimento dell'energia vibrazionale dalla corda alla tavola armonica. Il problema dell'accoppiamento di questi due elementi non è affatto banale, infatti, un forte accoppiamento produrrebbe un suono, inizialmente molto forte ma che si smorzerebbe molto velocemente e ciò è in contrasto con l'esigenza di avere un suono sufficientemente prolungato che caratterizzi la qualità dello strumento. Al contrario un accoppiamento debole non permetterebbe alla corda di trasferire la propria energia in maniera efficiente.

In pratica dunque si cerca un buon compromesso tra le necessità di avere un suono forte e al tempo stesso sostenuto per un lungo periodo.

Fino ad ora non si è ancora tenuto conto dell'azione del *martelletto* (Fig. 6.24 (a)). Il martelletto è il principale responsabile della dinamica timbrica del suono prodotto, permettendo

di suonare note sia *piano* che *forte*. Come in tutti gli strumenti la qualità del tono cambia in funzione del livello dinamico. Questo significa che una nota *forte* non è una semplice versione amplificata della stessa nota suonata *piano*, ma contiene anche delle nuove componenti in frequenza. Questa proprietà è dovuta in primo luogo al feltro del martelletto che diventa progressivamente tanto più rigido, quanto maggiore è la sua compressione sulla corda. In altri termini, il martelletto si comporta in maniera “soffice” quando percuote la corda a basse velocità (piano), ma si trasforma in un elemento più “rigido” se la velocità aumenta (forte). Il problema è ampiamente trattato in letteratura [99, 115]. In particolare D. Hall [99, 100, 101, 104] propone un modello di martelletto con comportamento non lineare. Come si vede in Fig. 6.24 (b), la forza di repulsione tra la massa m del martelletto e la corda, è simulata mediante una molla avente legge di compressione non lineare. La forza di compressione non lineare aumenta all'aumentare della differenza $x = x_m - x_s$ tra la posizione della massa dopo il contatto con la corda x_m e la posizione della corda x_s secondo una relazione del tipo

$$\begin{cases} f = K(x_m - x_s)^p & \text{per } x_m - x_s > 0 \\ 0 & \text{per } x_m - x_s \leq 0 \end{cases}, \quad (6.2)$$

dove K è il *coefficiente di elasticità* e p è l'*esponente* della non linearità. In Fig. 6.24 (c) si presenta l'andamento della caratteristica non lineare per $p = 2.5$ e $K = 4 \times 10^8$.

6.3.2 Modello analogico

Nel punto di contatto le velocità trasversali dei due tratti di corda che separano il martelletto dalle due estremità della corda stessa (il *ponte* e il *capo d'astro*) sono uguali tra loro, ossia

$$v = v_{sx} = v_{dx}.$$

La forza esercitata nel punto di contatto dalla corda è invece uguale alla somma delle forze trasversali dei due tratti come è descritto nella formula seguente

$$f_s = f_{sx} + f_{dx}.$$

Se a velocità e forza si associano le grandezze elettriche duali tensione e corrente, si può affermare che i due tratti di corda, rappresentabili mediante due opportuni risuonatori, siano collegati in serie tra loro, come è riportato in Fig. 6.25. Il risuonatore di sinistra è costituito da un tratto di corda con perdite e rigidità connessa ad un filtro che simula il comportamento in frequenza del capo d'astro. Il risuonatore di destra è costituito da un tratto di corda connesso ad un doppio bipolo, rappresentante il *ponte* che ha il compito di accoppiare la corda stessa con la tavola armonica.

Si definisca ora la nuova variabile $v'_m = -v_m$ da cui consegue $f'_m = mv'_m = -f_m$. Nel punto di contatto la forza della massa del martelletto f_m è uguale e contraria alla forza non lineare della molla, che a sua volta è identica alla forza trasversale esercitata dalla corda

$$-f_m = f_{nl} = f_s \quad \text{ovvero} \quad f'_m = f_{nl} = f_s. \quad (6.3)$$

In maniera analoga, definita la nuova variabile $v'_m = -v_m$, la relazione tra le velocità della massa del martelletto, della molla non lineare e della corda può essere scritta nella seguente maniera

$$v_{nl} = -v_s - v'_m \quad \text{che equivale a} \quad v_{nl} + v_s + v_m = 0. \quad (6.4)$$

Dalle relazioni di eq. (6.3) e (6.4) si deduce come i tre elementi corda, massa e molla non lineare siano in parallelo tra loro, come mostrato in Fig. 6.25.

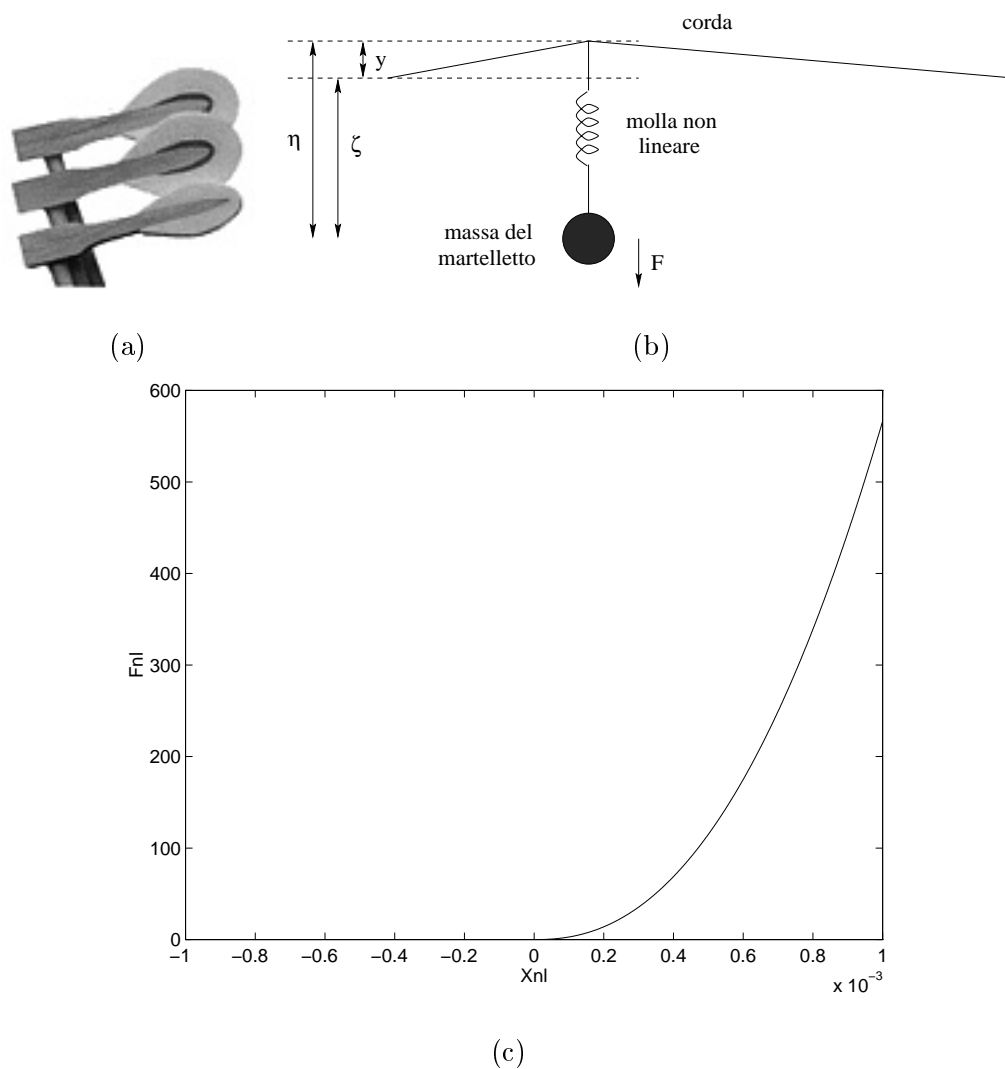


Fig. 6.24: (a) Foto di un martelletto reale. (b) Rappresentazione del martelletto mediante molla non lineare (Hall). (c) Caratteristica della molla non lineare.

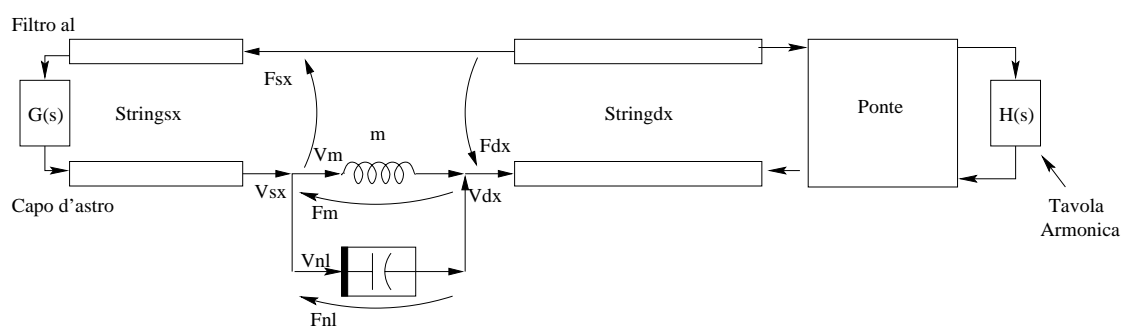


Fig. 6.25: Circuito analogico del pianoforte.

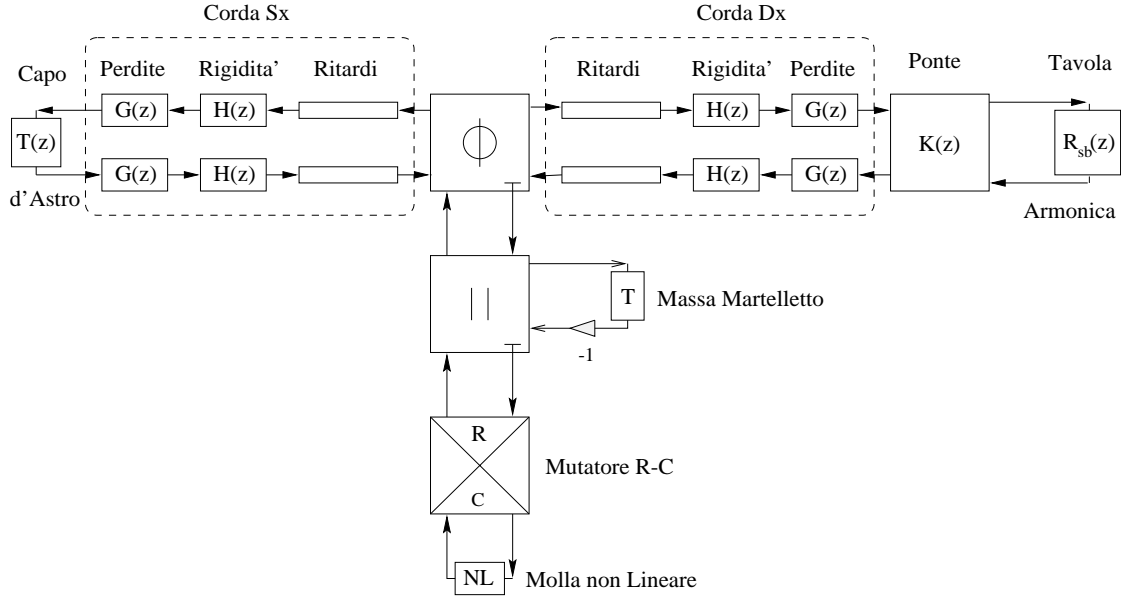


Fig. 6.26: Filtro ad onda numerica del pianoforte.

6.3.3 Modello numerico

Il circuito analogico di Fig. 6.25 può essere implementato attraverso il corrispondente filtro ad onda numerica di Fig. 6.26. Come spiegato in Sez. 4.1, i tratti di corda sono stati implementati in modo da tenere conto sia dei fenomeni di dispersione, attraverso opportuni filtri passa-tutto $H(z)$, che delle perdite, mediante i filtri FIR a fase lineare $G(z)$. Il tratto di corda destro è stato connesso attraverso un opportuno “macro-blocco” $K(z)$ (rappresentante il ponte) ad una struttura riverberante FDN (si veda Sez. 4.3) che simula il comportamento in frequenza della tavola armonica. Sul tratto di corda sinistra, si simula il comportamento in frequenza del capo d’astro attraverso un opportuno filtro FIR $T(z)$.

Grazie all’utilizzo del mutatore d’onda C-R, la funzione non lineare di Fig. 6.27, ottenuta attraverso la trasformazione conforme della funzione di eq. (6.2), ha un comportamento istantaneo rispetto alla coppia di variabili d’onda e pertanto non presenta problemi di computabilità.

6.3.4 Risultati

In questa sezione si valuteranno i risultati del modello numerico nel caso di due corde relative alle frequenze DO_4 e DO_2 . Allo scopo di analizzare il comportamento dinamico si è valutato il segnale in uscita al variare della velocità iniziale del martelletto. Come suggerito in [105], sono state prese come velocità iniziali di riferimento 0.75 m/sec (piano, p), 1.5 m/sec (mezzoforte, mf), 2.75 m/sec (forte, f), 4.5 m/sec (fortissimo, ff).

Per ogni simulazione sono presentati i diagrammi nel tempo relativi al moto del martelletto y_m , al moto della corda nel punto di contatto y_s e alla forza di compressione del feltro f_{nl} . In tabella 6.1 sono riportati alcuni dei valori dei parametri utilizzati nella simulazione [94]. Nel seguito è riportata la dinamica dello spettro per le due corde a velocità iniziale pari a 2.75 m/sec .

A riprova della comportamento fisico del modello implementato, saranno presentati esempi audio e una sequenza video animata che simula la dinamica di percussione del martelletto sulla corda.

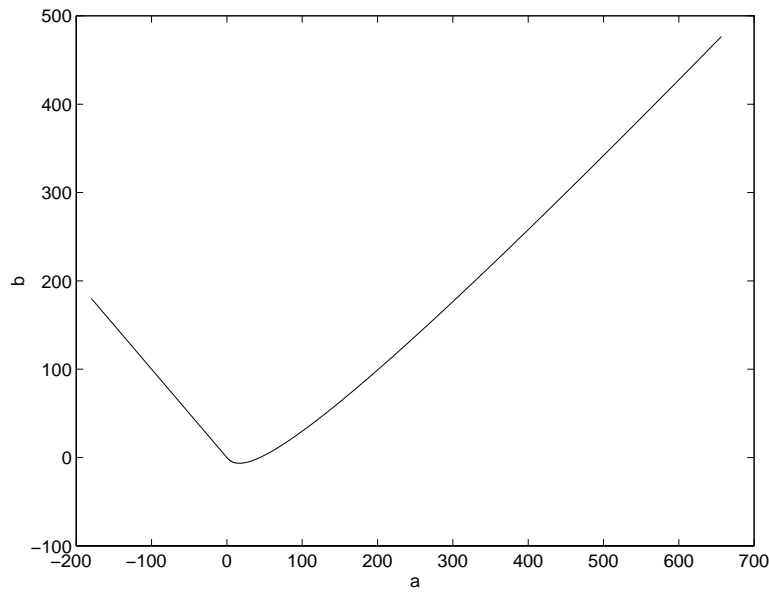


Fig. 6.27: Non linearità della molla nel dominio d'Onda.

Parametri	Simbolo	DO_2	DO_4	Unità
Frequenza fondamentale	f_0	65.4	262	Hz
Lunghezza della corda	L	1.90	0.62	m
Massa totale della corda	M_s	35.0	3.93	g
Tensione della corda	T	750	670	N
Coefficiente di attrito viscoso	γ	18.42×10^{-3}	2.068×10^{-3}	Kg/(sec·m)
Modulo di Young	Q	2.0×10^{11}	2.0×10^{11}	N/m ²
Costante d'inarmonicità	k	20.306×10^{-3}	9.838×10^{-3}	N·m ²
Punto di percussione relativo	α	0.12	0.12	
Posizione iniziale del martelletto	y_{m_0}	0.01	0.01	m
Massa del martelletto	M_h	4.9	2.97	g
Esponente non lineare di elasticità	p	2.3	2.5	
Coefficiente di elasticità del feltro	K	4.0×10^8	4.5×10^9	N/m ^{p}

Tabella 6.1: Valori dei parametri usati nella simulazione.

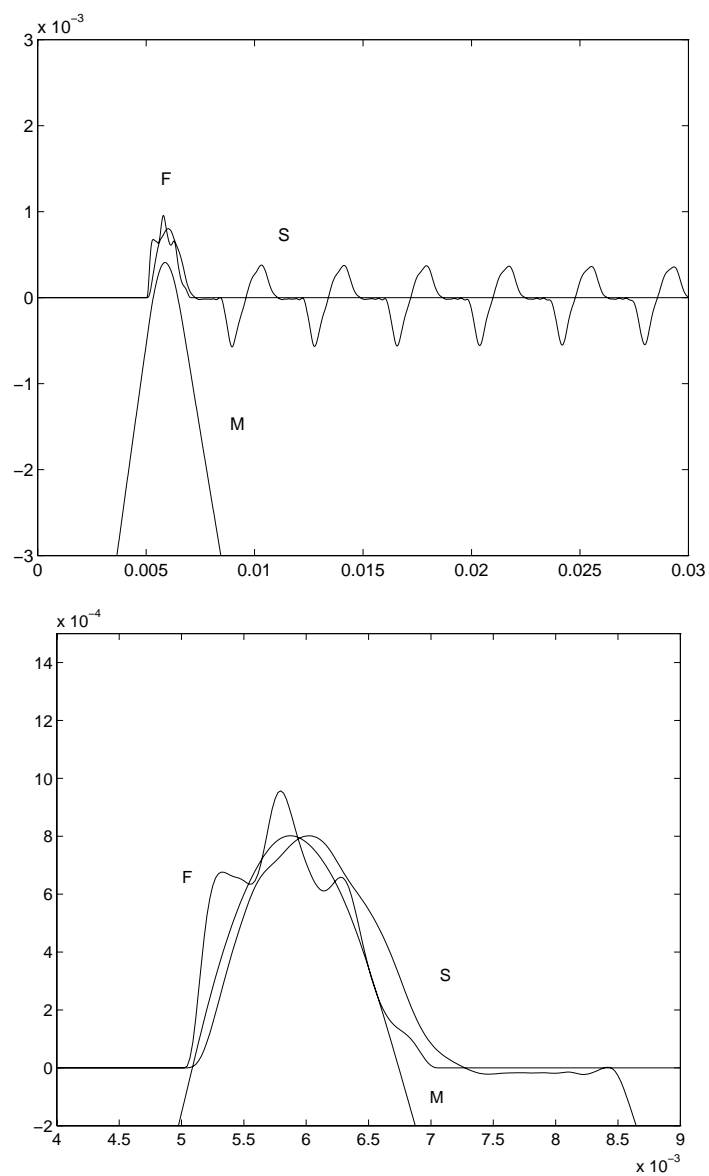


Fig. 6.28: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_4 con velocità iniziale 0.75 m/sec .

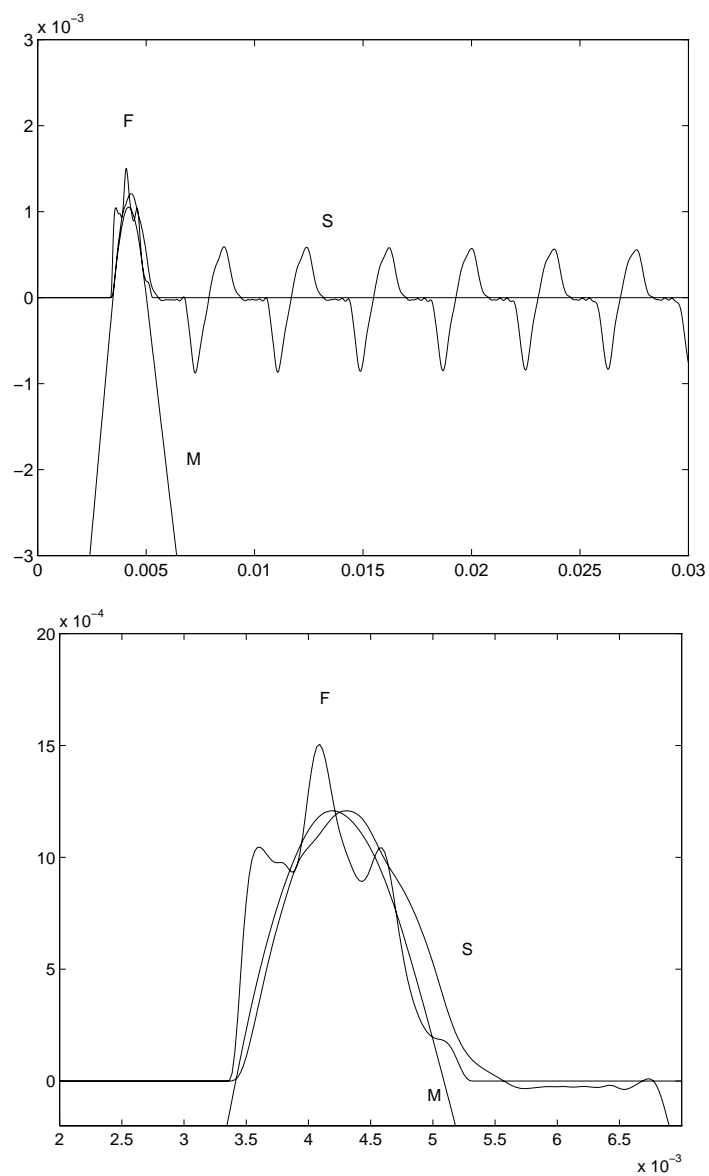


Fig. 6.29: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_4 con velocità iniziale 1.5 m/sec .

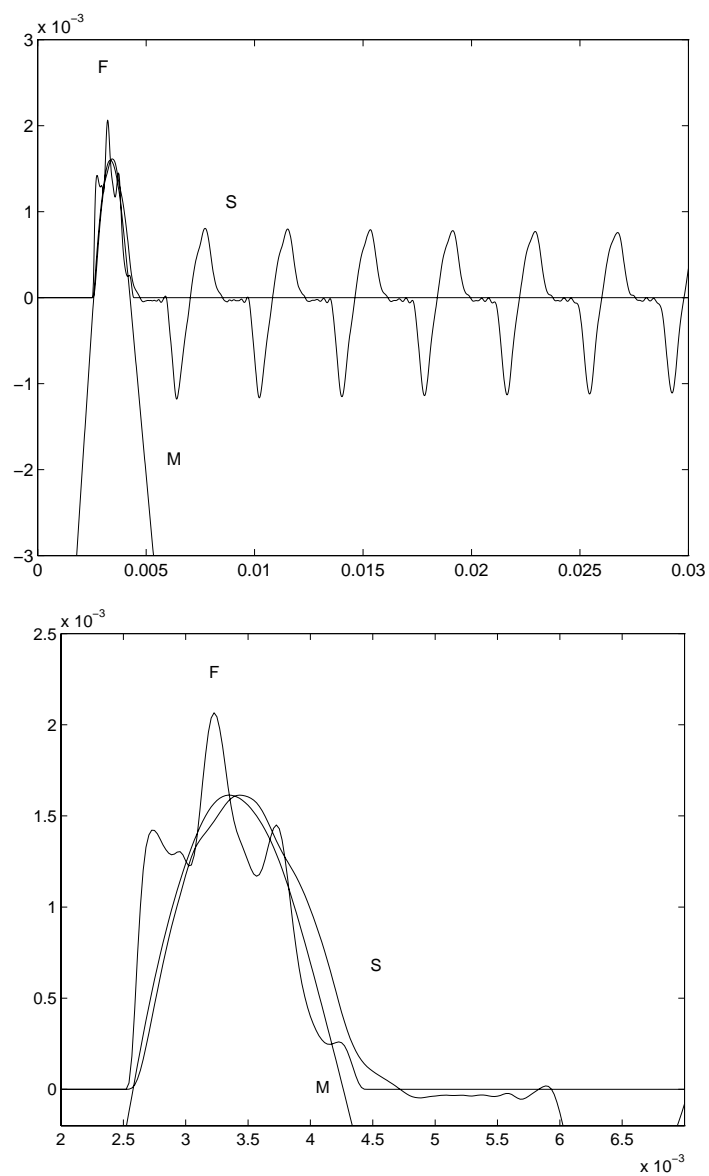


Fig. 6.30: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_4 con velocità iniziale 2.75 m/sec .

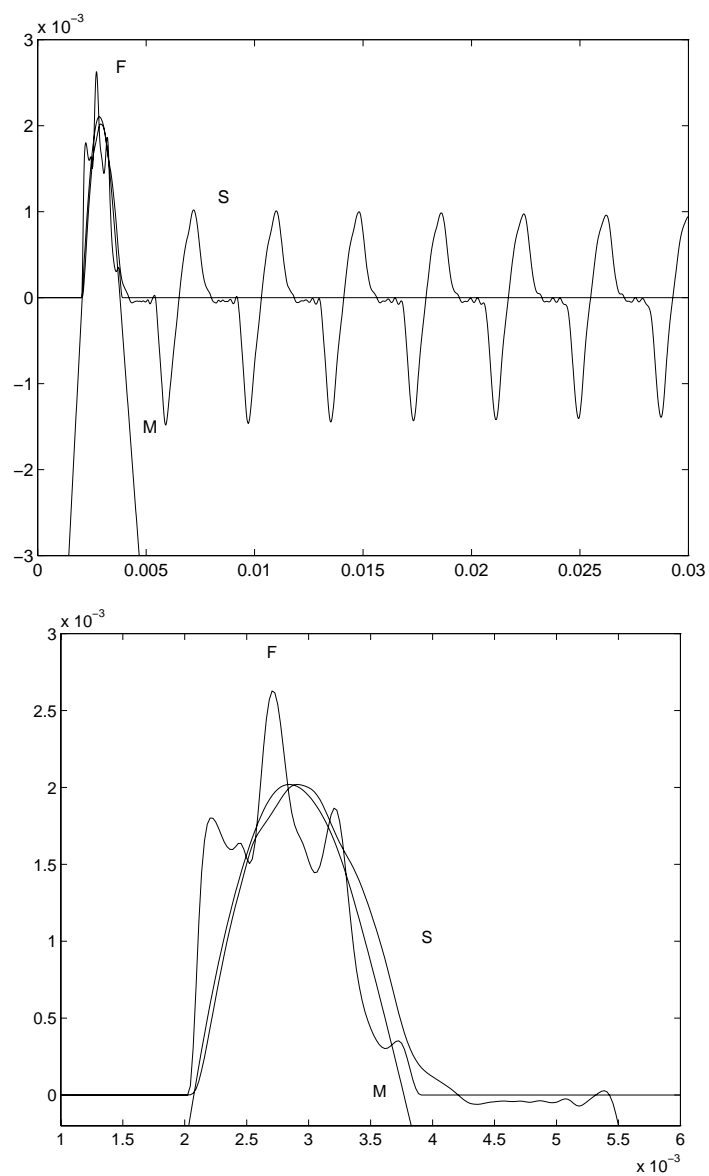


Fig. 6.31: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_4 con velocità iniziale 4.5 m/sec .

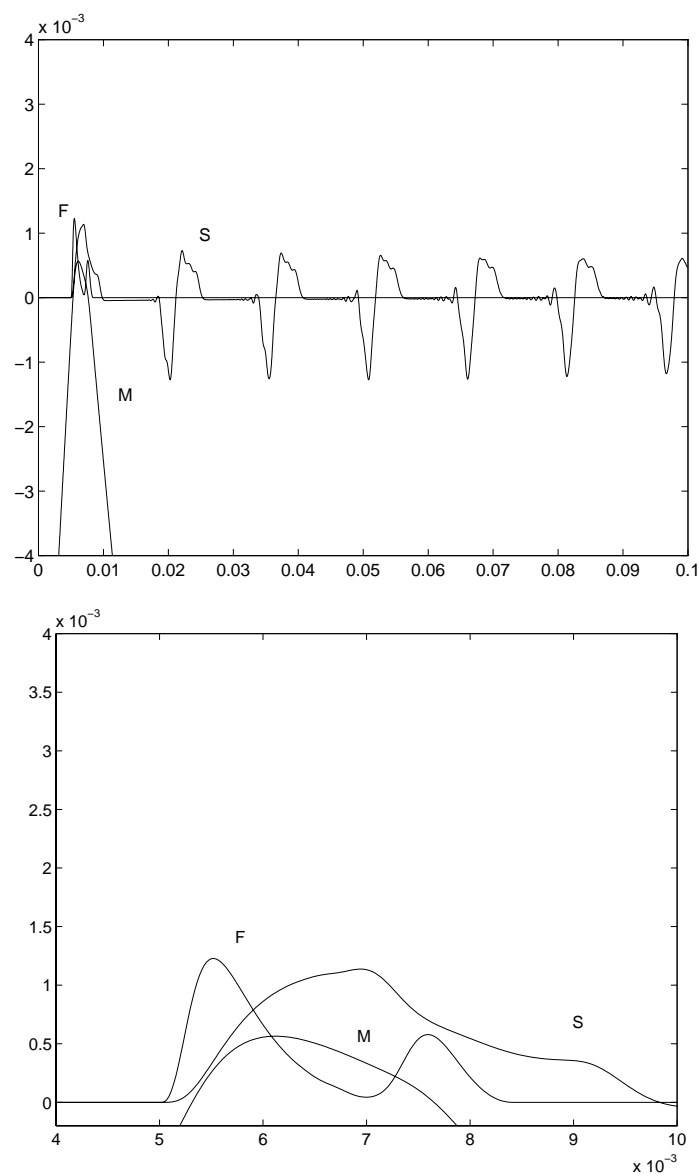


Fig. 6.32: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_2 con velocità iniziale 0.75 m/sec .

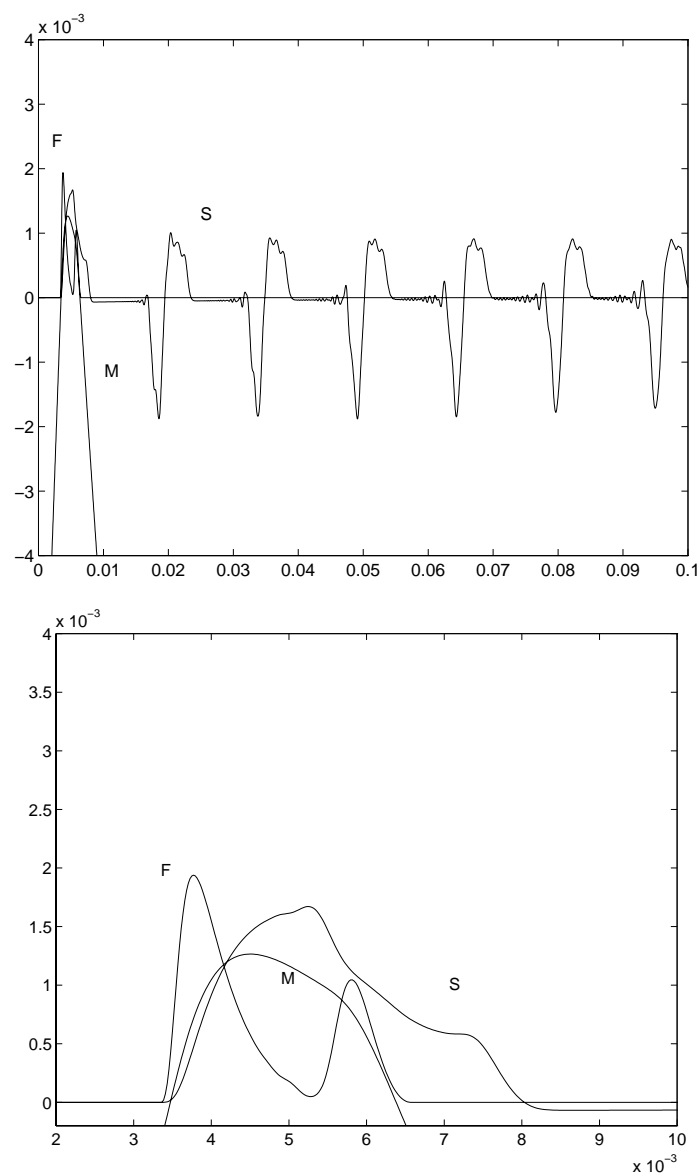


Fig. 6.33: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_2 con velocità iniziale 1.5 m/sec .

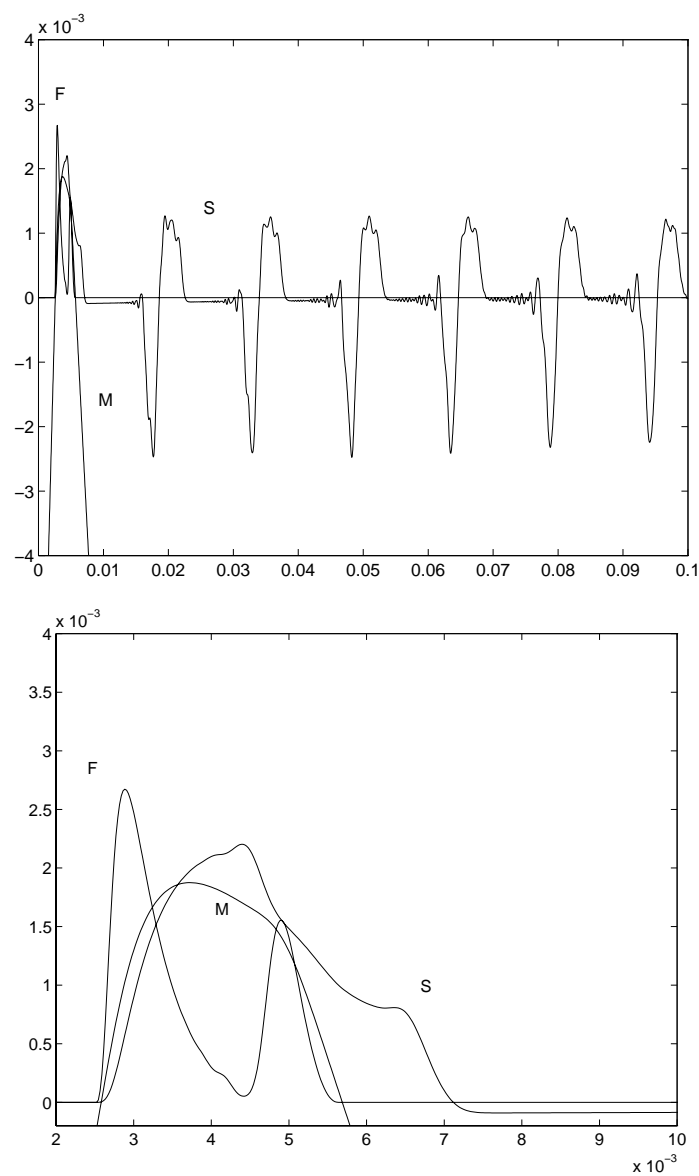


Fig. 6.34: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_2 con velocità iniziale 2.75 m/sec .

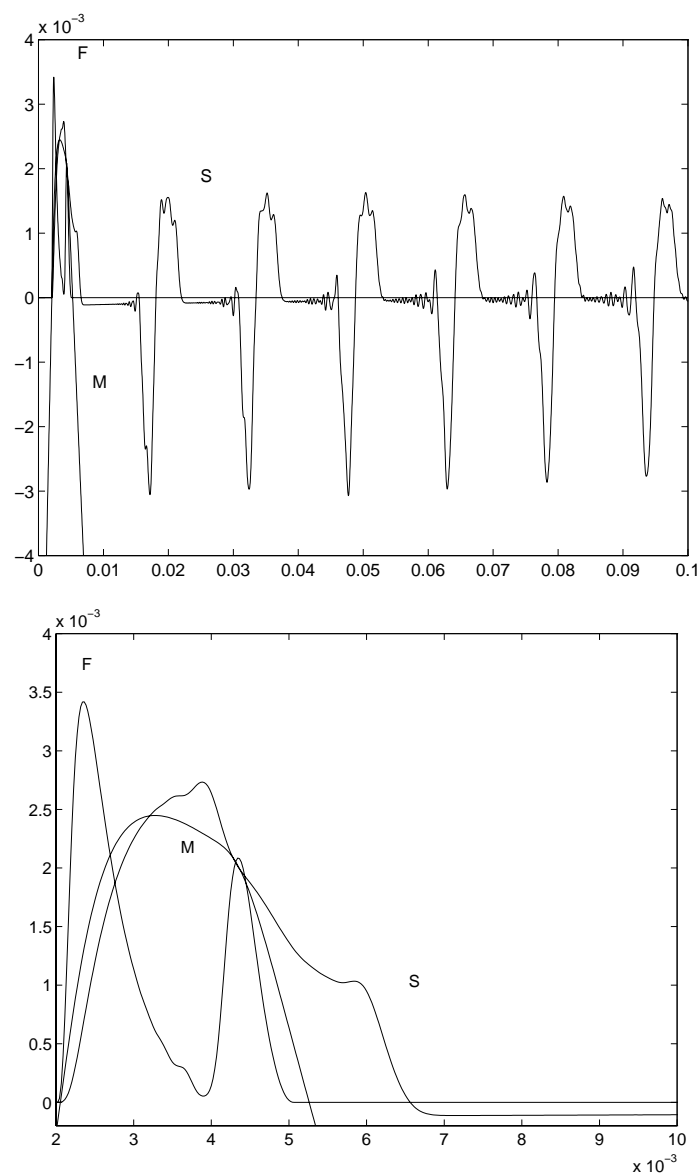
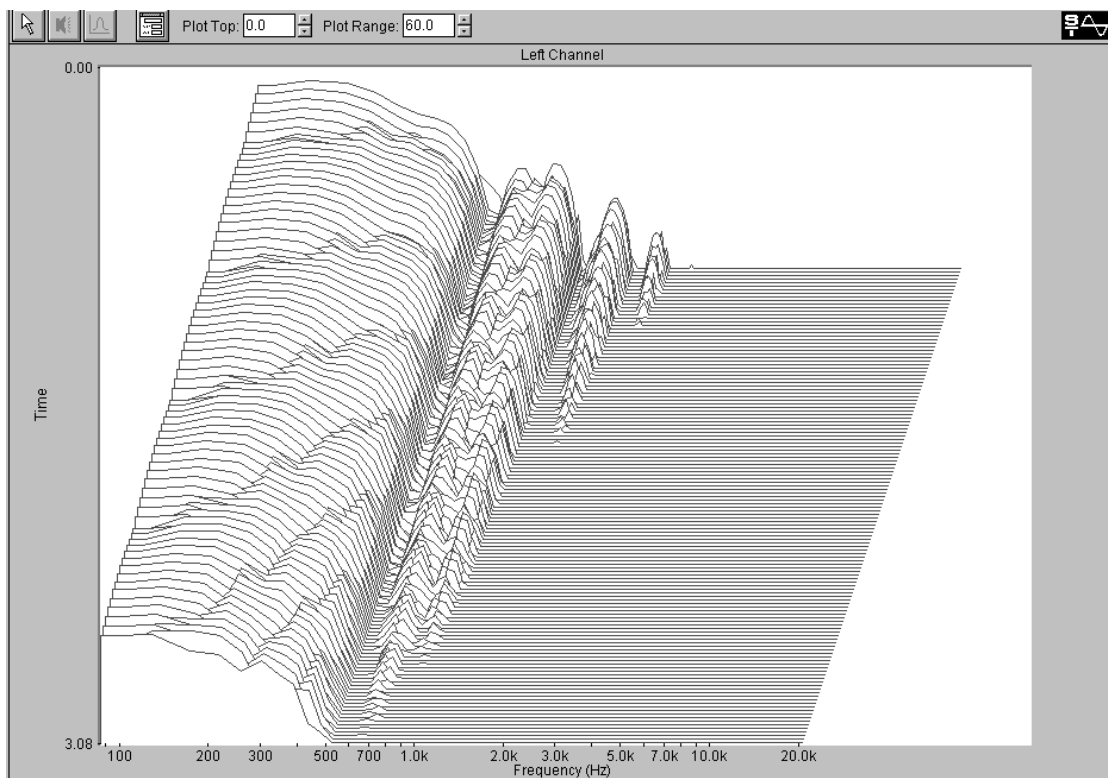
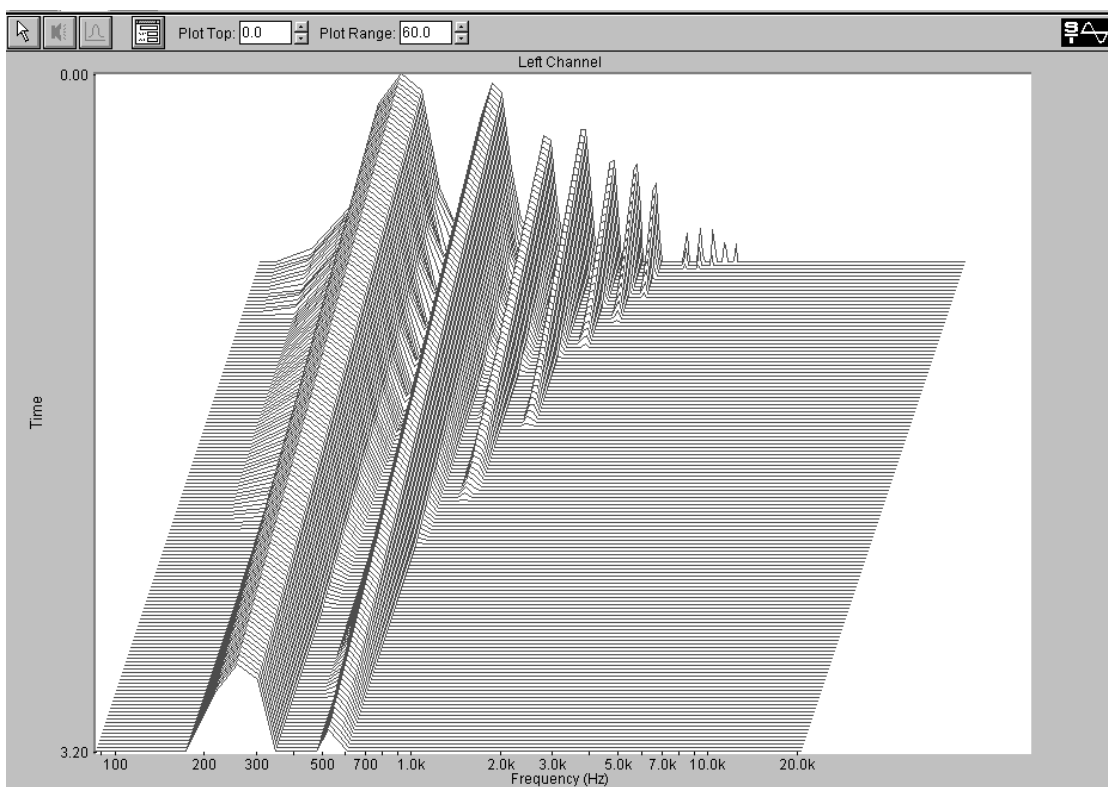


Fig. 6.35: Diagrammi nel tempo (*sec*) relativi al moto del martelletto 'M' (*m*), al moto della corda 'S' (*m*) e all'andamento della forza 'F' ($N \times 10^{-4}$) per una corda DO_2 con velocità iniziale 4.5 m/sec .

Fig. 6.36: Dinamica dello spettro della corda DO_2 .Fig. 6.37: Dinamica dello spettro della corda DO_4 .

Capitolo 7

Conclusioni

In questa tesi si è proposto un metodo di sintesi del suono musicale basato sul modello fisico di uno strumento acustico di riferimento. La tecnica sfrutta l'equivalenza tra strutture meccaniche/fluidodinamiche e circuiti elettrici composti sia da elementi a costanti concentrate che da elementi a parametri distribuiti. Il metodo proposto è in grado di costruire in modo automatico un algoritmo di sintesi attraverso una versione generalizzata del metodo di sintesi di filtri ad onda numerica.

Tale estensione permette di estendere significativamente la classe di elementi non lineari trattabile e, nel contempo, di includere, nello schema di sintesi, opportuni "macro-blocchi" ottenuti con tecniche d'implementazione arbitrarie, che implementino, ad esempio, strutture a parametri distribuiti (risuonatori).

In particolare si è verificato come sia possibile interfacciare in maniera naturale una classe di filtri, particolarmente utili in campo acustico per la simulazione di strutture fisiche risonanti (corde tubi acustici, casse armoniche, strutture riverberanti), nota col nome di filtri a guida d'onda. Grazie alle generalizzazioni apportate, il sistema può essere costruito a partire da un certo numero di elementi costituenti (elementi a parametri concentrati, a parametri distribuiti, non linearità reattive, "macro-blocchi" arbitrariamente complessi) che possono essere connessi tra loro in modo da creare strutture complesse il più possibile simili al modello fisico di riferimento.

Come applicazione alla teoria sviluppata si è progettato un sistema che permette la realizzazione automatica di modelli numerici a partire dai blocchi costituenti precedentemente descritti. Il programma è in grado di gestire in condizioni semplificate anche la tempo-varianza dei parametri.

Sono state presentate simulazioni, ottenute con l'utilizzo del programma di sintesi progettato, di strutture fisiche rappresentanti reti elettriche, modelli meccanici e fluidodinamici. Ci si è infine concentrati su un caso di studio più complesso rappresentato dall'interazione-martelletto corda e, al fine di verificarne la verosimiglianza del comportamento fisico, si sono presentati esempi audio e una sequenza video animata.

Come si è potuto constatare l'approccio di sintesi sviluppato in questo lavoro gode di spiccate caratteristiche di modularità e versatilità che lo rendono particolarmente appetibile per la sintesi di strumenti digitali. Le caratteristiche di modularità permettono di estendere le categorie di elementi che possono essere inserite all'interno della struttura, in funzione di una caratterizzazione sempre più realistica del modello fisico (strumento musicale) che si vuole implementare.

In particolare sarebbe auspicabile rendere conto della presenza di più non linearità attraverso l'individuazione di un "macro-bipolo" contenete gli elementi non lineari e un numero minimo di altri elementi lineari da discretizzare globalmente. Inoltre, per la determinazione di una dinamica timbrica più sofisticata è utile implementare "macro-blocchi" che simulino il comportamento di strutture risonanti complesse, ad esempio attraverso la sintesi di elementi a parametri distribuiti 2D e 3D.

Appendice A

Soluzione dell'equazione implicita

In questa Sezione si presenteranno alcuni dei metodi utilizzati per la soluzione dell'equazione implicita (5.42), riportata di seguito

$$F_k(a_N(k)) = rf(a_N(k)) + A_k - a_N(k) = 0,$$

evidenziandone il significato fisico.

A.1 Soluzione analitica

Il metodo consiste nel ricavare una soluzione analitica dell'eq. (5.42) implicita.

In pratica, raramente si incontrano non linearità che possano essere risolte analiticamente. Il metodo è pertanto utilizzabile come soluzione “ad hoc” solo per alcuni casi particolari (ad esempio funzioni di tipo polinomiale).

A.2 Soluzione grafica: retta di carico

La funzione di eq. (5.42) equivale al sistema

$$\begin{cases} b_N &= f(a_N) \\ a_N &= A_k + rb_N \end{cases},$$

che può essere illustrato mediante la semplice configurazione circuitale di Fig. A.1 (a).

La retta di Fig. A.1 (b) descrive il comportamento della parte lineare, e viene chiamata *retta di carico*. L'intersezione grafica di Fig. A.1 (d) rappresenta la soluzione del sistema e quindi dell'equazione implicita.

Le operazioni sono del tutto analoghe a quelle fatte nel dominio di Kirchoff per la ricerca del punto di lavoro. Anche in questo caso, infatti si sostituisce la parte lineare della rete con un generatore reale equivalente, che nel piano i, v è rappresentato da una retta chiamata *retta di carico*. La sua intersezione con la non linearità $f(v, i)$ permette di determinare i punti di lavoro del circuito analogico.

A.3 Metodo numerico: algoritmo di Newton-Raphson

Il metodo di Newton Raphson rappresenta il metodo numerico più comunemente usato per la risoluzione di equazioni del tipo

$$F(x) = 0.$$

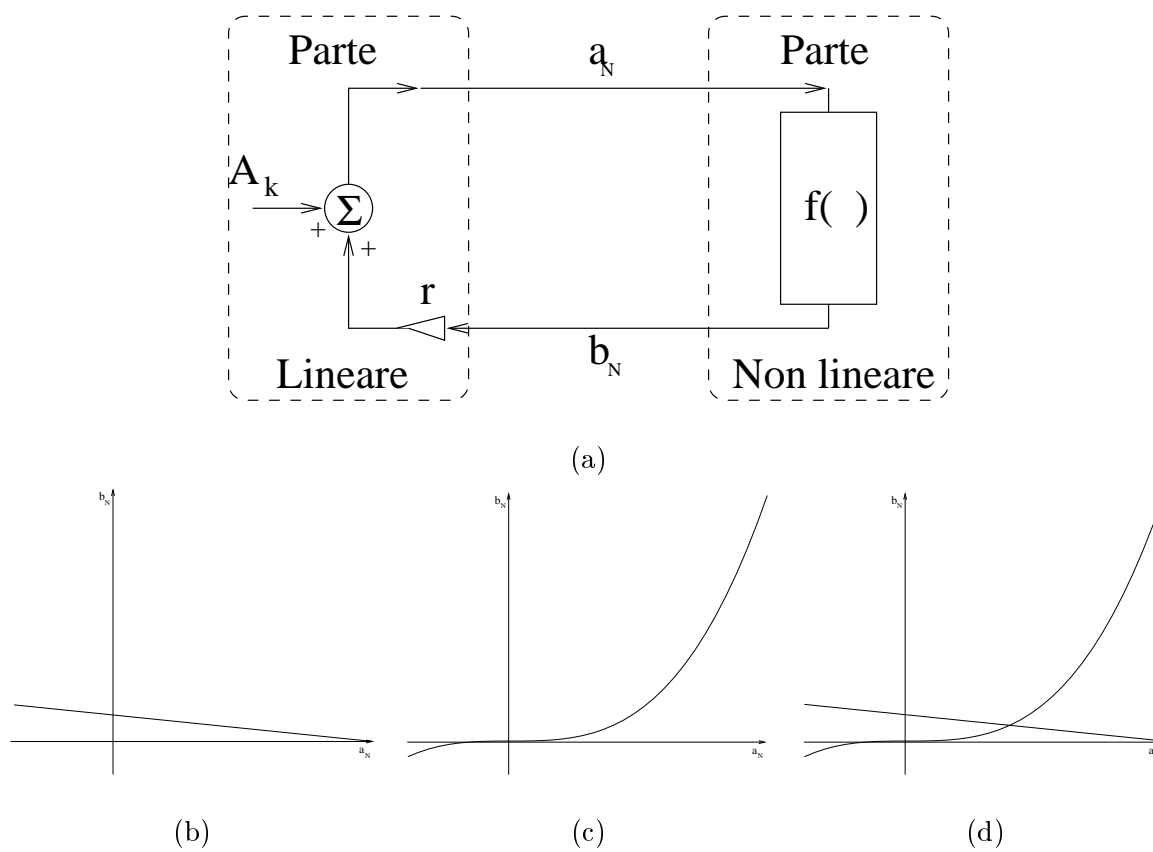


Fig. A.1: Metodo grafico. (a) Rappresentazione circuitale. (b) Caratteristica lineare. (c) Caratteristica non lineare. (d) Determinazione della soluzione implicita.

Si assuma che la funzione $F(x)$ abbia la seguente *espansione in serie di Taylor*

$$F(x_n) = F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \text{t.o.s.}, \quad (\text{A.1})$$

in cui t.o.s. denota i termini di ordine superiore.

Sotto le ipotesi che:

a) x_n sia sufficientemente vicino al valore di x_{n-1} , in modo da poter trascurare t.o.s.;

b) x_n sia prossimo alla soluzione \bar{x} , cosicch  $F(x_n) \approx F(\bar{x}) = 0$,

l'eq. (A.1) diventa

$$F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \approx 0.$$

Esplicitando la variabile x_n , si ottiene la formula iterativa di *Newton Raphson*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}$$

Si pu  dimostrare che se il punto di partenza x_0   sufficientemente vicino alla soluzione \bar{x} e se la funzione ha andamento regolare, l'algoritmo converge alla soluzione in un numero finito di passi. Il numero di iterazioni dipende dal grado di accuratezza con cui si desidera approssimare la soluzione. Come si vede da Fig. A.2 (a). il valore x_n   l'intersezione tra la retta

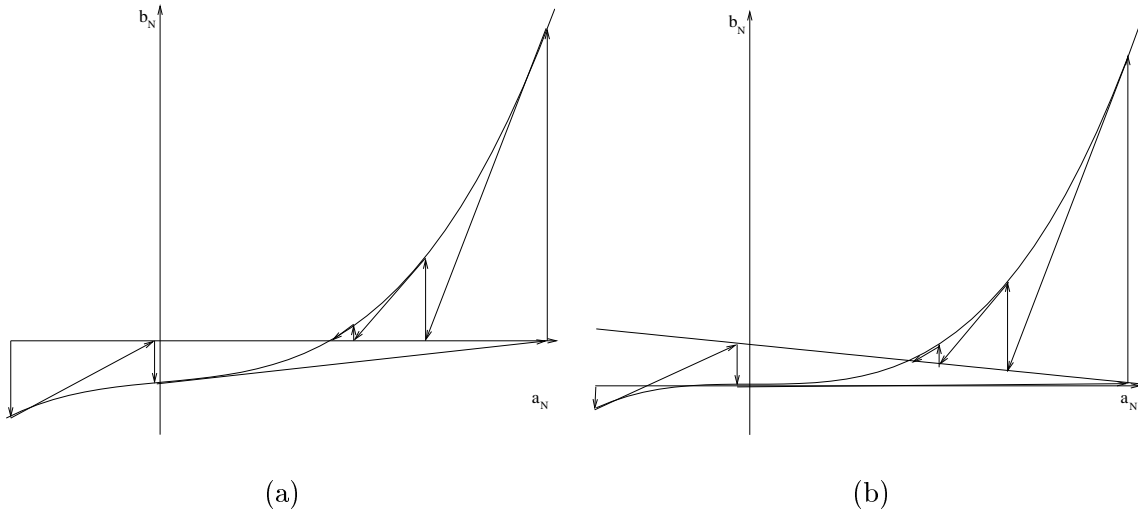


Fig. A.2: Rappresentazione geometrica dell'algoritmo di Newton Raphson. (a) Caso generale . (b) Separazione parte lineare.

ottenuta linearizzando la funzione $F(x_{n-1})$ con l'asse orizzontale. Se si separa la parte lineare dall'eq. (5.42) x_n   l'intersezione tra la retta ottenuta linearizzando la funzione $f(x_{n-1})$ con la retta di carico, come illustrato in Fig. A.2 (b).

Appendice B

Non linearità in circuiti elettrici analogici

Al fine di evidenziare le analogie tra la teoria WDF modificata e la teoria dei circuiti analogici, in questa appendice si mostrerà una metodologia, ampiamente utilizzata per il progetto di non linearità reattive in circuiti analogici, basata sull'utilizzo di un doppio bipolo lineare attivo, chiamato *mutatore* connesso ad una non linearità di tipo resistivo [32, 33, 35, 36, 37].

Un *mutatore* permette, ad esempio, di trasformare una resistenza non lineare connessa alla seconda porta (si veda Fig. B.1) e definita dalla funzione caratteristica $\Gamma(v, i)$, in un induttore non lineare (visto ai capi della prima porta) avente la medesima funzione $\Gamma(\phi, i)$, nelle nuove variabili (ϕ, i) , dove ϕ , integrale nel tempo della tensione v , è il *flusso magnetico concatenato*.

Un mutatore che trasforma il piano $v-i$ nel piano $\phi-i$ e permette dunque di implementare un induttore mediante una equivalente resistenza non lineare, è detto *mutatore L-R*. Analogamente un *mutatore C-R* permette di trasformare le variabili $v-i$ nelle variabili $v-q$ che definiscono la caratteristica di un condensatore non lineare.

In Fig. B.2 sono riportati i simboli del *mutatore L-R* e del *mutatore C-R*, mentre le funzioni di trasferimento, nel dominio del tempo e nel dominio di Laplace, sono riportate di seguito

a) *mutatore L-R*

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d()}{dt} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

b) *mutatore C-R*

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{d()}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}.$$

In generale, i mutatori riducono il problema della realizzazione di un'ampia classe di bipoli non lineari chiamati *bipoli non lineari algebrici* (di cui resistenze, induttori e condensatori sono solo tre elementi particolari) [37], alla sintesi di resistori non lineari.

B.1 Elementi algebrici e dinamici

Resistenze, condensatori e induttori sono solo tre dei numerosi tipi distinti di elementi circuitali analogici essenziali per sviluppare una teoria unificata delle reti non lineari. Al fine di classificare

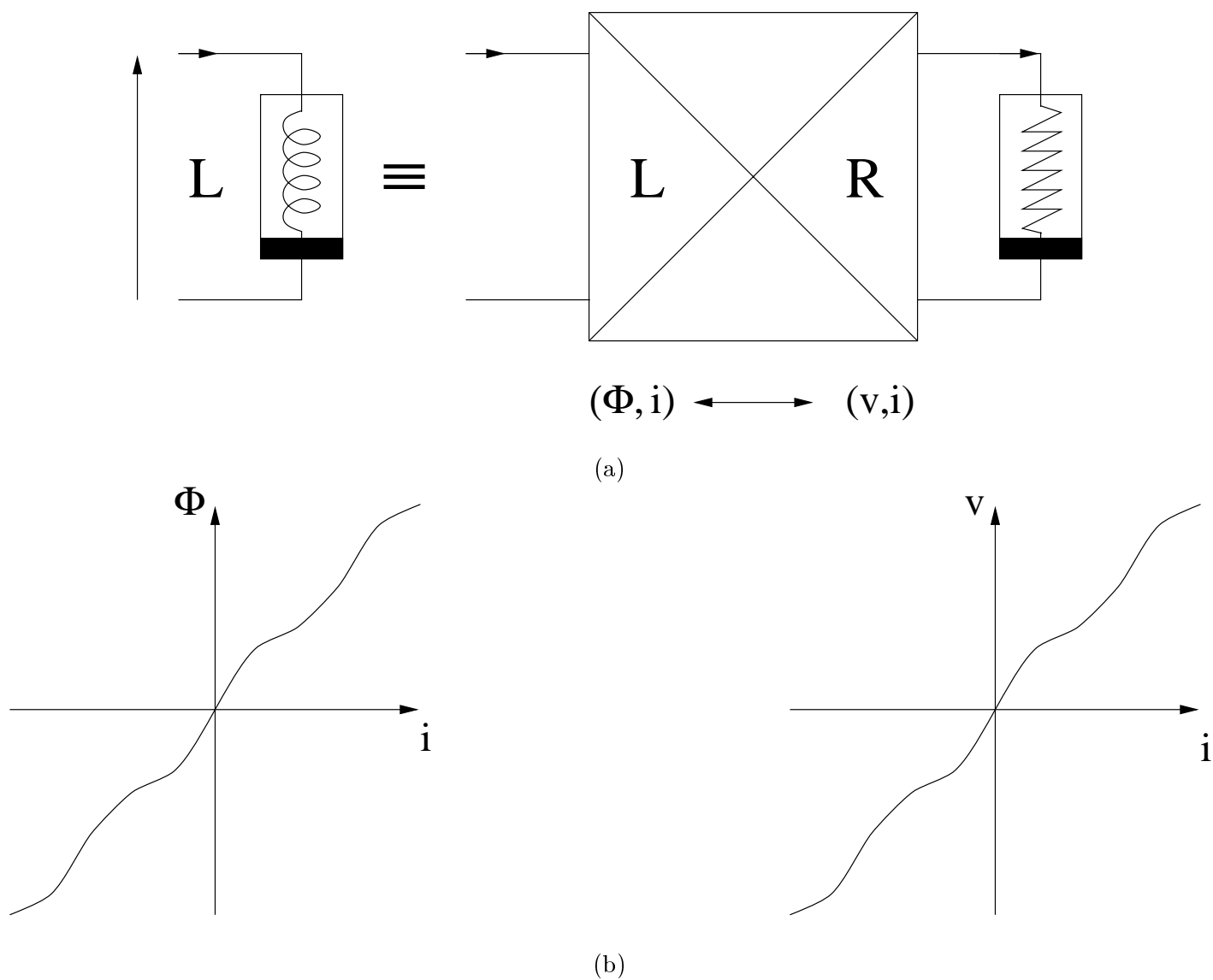


Fig. B.1: (a) Trasformazione di un induttore non lineare in una resistenza non lineare. (b) Funzione caratteristica dell'induttore e del resistore.

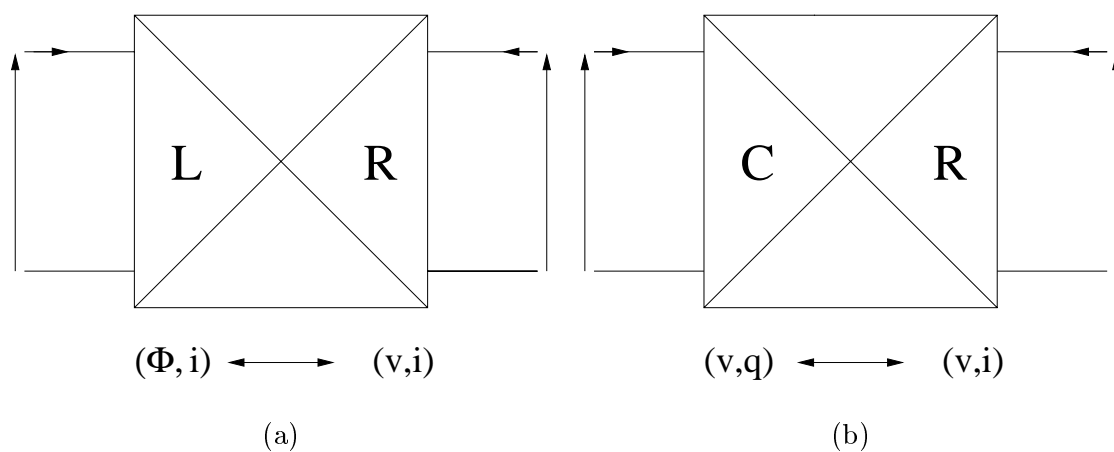


Fig. B.2: (a) Mutatore L-R. (b) Mutatore C-R.

in maniera più semplice e completa gli elementi di una rete analogica non lineare, si introducono i concetti di *elemento algebrico* e *elemento dinamico* [37]. Dal momento che un *elemento dinamico* è un qualsiasi elemento che non sia *algebrico*, è sufficiente la sola definizione di quest'ultimo.

Un elemento n -porte è detto *algebrico* se è descritto da una relazione *algebrica* che coinvolge al massimo le due variabili $v_j^{(\alpha)}$ e $i_j^{(\beta)}$ per ogni porta j , con $j = 1 \dots n$, dove $v_j^{(\alpha)}$ definisce la *derivata* nel tempo di ordine α di v_j se $\alpha > 0$, oppure l'*integrale* nel tempo di ordine α di v_j se $\alpha < 0$. Analogamente $i_j^{(\beta)}$ definisce la *derivata* nel tempo di ordine β di i_j se $\beta > 0$, oppure l'*integrale* nel tempo di ordine β di i_j se $\beta < 0$.

Un elemento algebrico monoporta è chiamato *bipolo algebrico* ed è definito da una relazione algebrica tra le due variabili $v^{(\alpha)}$ e $i^{(\beta)}$.

È facile dimostrare come **resistenze**, **capacità** e **induttori**, che coinvolgono rispettivamente la coppia di variabili $(v^{(0)}, i^{(0)})$, $(v^{(0)}, i^{(-1)})$ e $(v^{(-1)}, i^{(0)})$, siano *bipoli algebrici*.

Anche un bipolo caratterizzato dalla relazione $f(\phi, q) = 0$ tra le due variabili $v^{(-1)} \equiv \phi$ e $i^{(-1)} \equiv q$ è un *elemento algebrico monoporta*. Esso viene solitamente chiamato **memristore**, poiché si comporta come una resistenza con memoria. Un esempio fisico di memristore è descritto dalla relazione $q = G \sin(\phi)$, ovvero $i = G \sin(\phi)v$.

Un **FDNR** *frequency-dependent negative resistor*, definito da $i = md^2v/dt^2$ è un *bipolo algebrico* che coinvolge le variabili $(v^{(2)}, i^{(0)})$.

Un **mutatore X-Y**, che permette la trasformazione di un *bipolo algebrico* Y , definito dalla relazione $f(v_y^{(\alpha_y)}, i_y^{(\beta_y)})$, nell'equivalente *bipolo algebrico* X , definito dalla relazione $f(v_x^{(\alpha_x)}, i_x^{(\beta_x)})$, è un *doppio bipolo algebrico*. Esso infatti coinvolge le sole variabili $(v_1^{(\alpha_x)}, i_1^{(\beta_x)})$ e $(v_2^{(\alpha_y)}, i_2^{(\beta_y)})$. Nel caso particolare del **mutatore L-R** e del **mutatore C-R**, le relazioni algebriche sono rispettivamente $(v_1^{(-1)}, i_1^{(0)})$ e $(v_2^{(0)}, i_2^{(0)})$ e $(v_1^{(0)}, i_1^{(-1)})$ e $(v_2^{(0)}, i_2^{(0)})$.

Un elemento monoporta $i = q^3$ non è un *elemento algebrico*, poiché la relazione $(i^{(0)}, i^{(-1)})$ coinvolge la sola variabile i e non la variabile v , pertanto è un *bipolo dinamico*.

B.2 Sintesi di elementi non lineari analogici

Grazie all'utilizzo di mutatori X-R di Fig. B.3, il problema della realizzazione di un *bipolo non lineare algebrico*, caratterizzato da una funzione caratteristica $\Gamma(v_x^{(\alpha)}, i_x^{(\beta)}) = 0$, si riduce a quello della sintesi di un resistore definito nel piano $v - i$ dalla medesima curva $\Gamma(v_r^{(0)}, i_r^{(0)}) = 0$. Da ciò si può dedurre che un qualsiasi circuito non lineare reattivo, contenente elementi algebrici, è equivalente a una rete lineare attiva n -porte, a cui sono connesse resistenze non lineari appropriate.

È pertanto sufficiente esporre il metodo di sintesi di resistenze non lineari.

B.3 Sintesi di resistenze non lineari analogiche

Una curva $i-v$ è *passiva* se e solo se è interamente contenuta nel primo e terzo quadrante, altrimenti è detta *attiva*. Dal momento che ogni *curva attiva i-v* può essere realizzata mediante una *curva passiva* in serie ad un generatore ideale di tensione e in parallelo ad un generatore ideale di corrente, non si ha perdita di generalità se si prendono in considerazione solo *curve i-v passive*.

Il metodo proposto in questa Sezione, si basa sulla tecnica di approssimazione lineare a tratti della curva $\Gamma(i, v) = 0$, una volta resa monotonicamente crescente grazie all'utilizzo di particolari elementi attivi algebrici due porte chiamati *convertitori lineari* [32]. La realizzazione della non linearità resistiva si riduce alla sintesi di un resistore passivo monotonicamente crescente mediante l'esclusivo utilizzo di componenti passivi (ad esempio resistenze lineari, diodi a giunzione p-n, diodi zener).

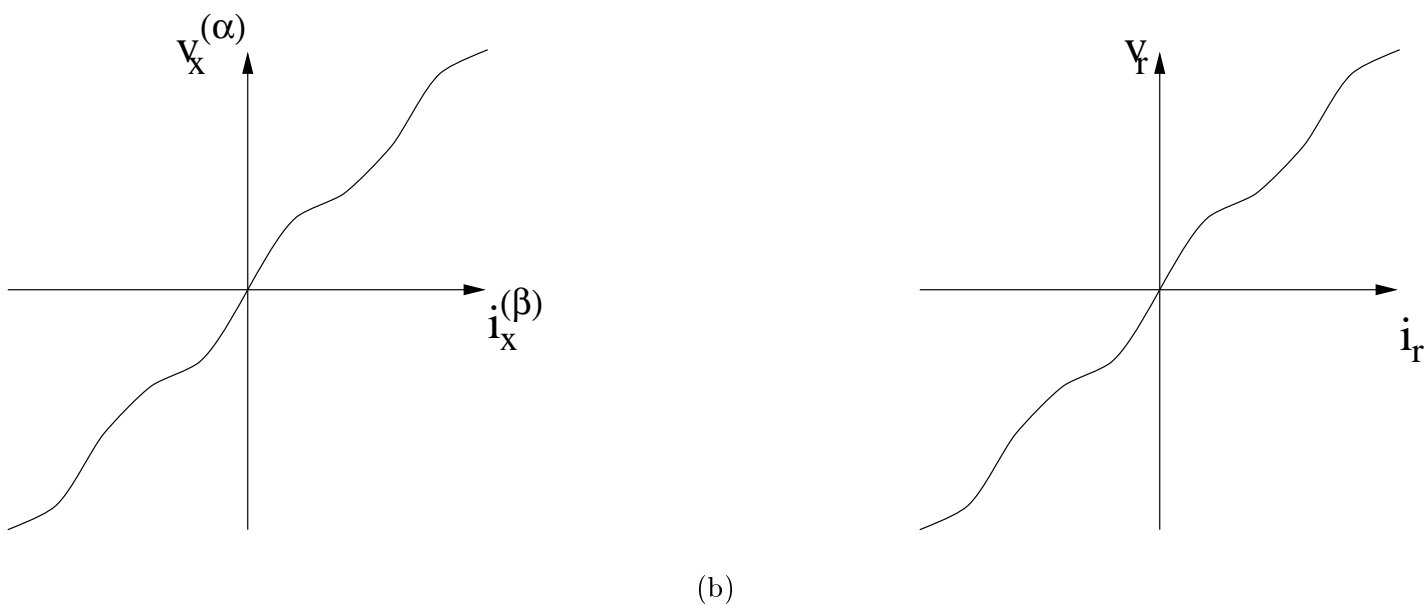
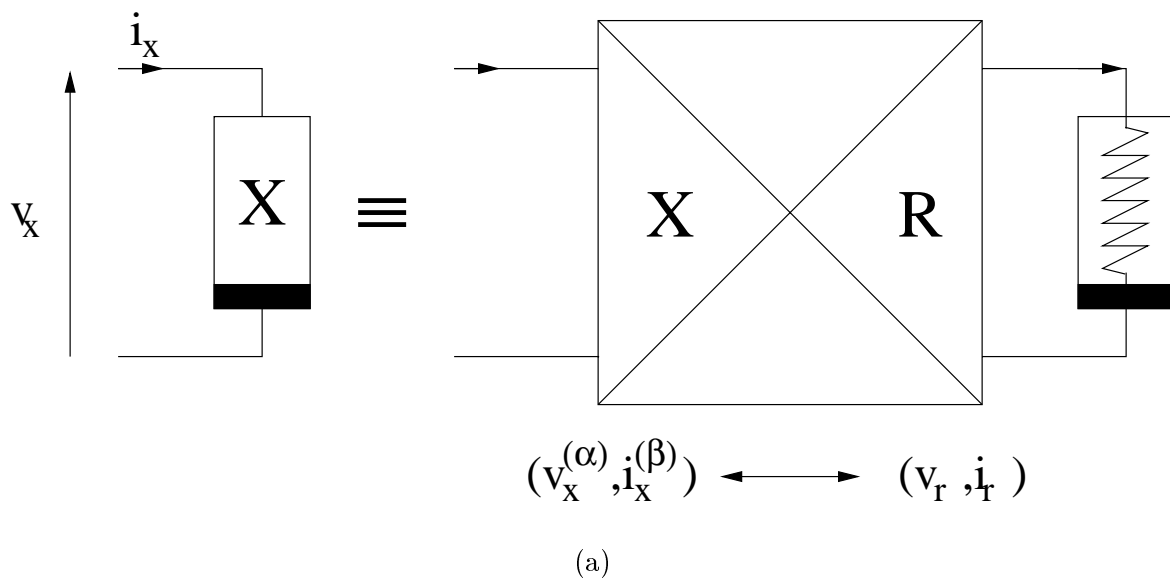


Fig. B.3: (a) Mutatore X-R. (b) Funzione caratteristica $\Gamma(v_x^{(\alpha)}, i_x^{(\beta)}) = 0$ e $\Gamma(v_r^{(0)}, i_r^{(0)}) = 0$.

Prima di dare una veloce descrizione del metodo, è d'obbligo esaminare i principali tipi di convertitori lineari.

B.3.1 Convertitori lineari

I convertitori lineari sono particolari reti due porte che permettono di effettuare una trasformazione lineare reversibile (ad esempio rotazione, riflessione, scalamento) della coppia di variabili (v, i) nel passaggio dalla prima alla seconda porta.

Rotatore Si consideri il doppio bipolo di Fig. B.4, che permette una rotazione attorno all'asse

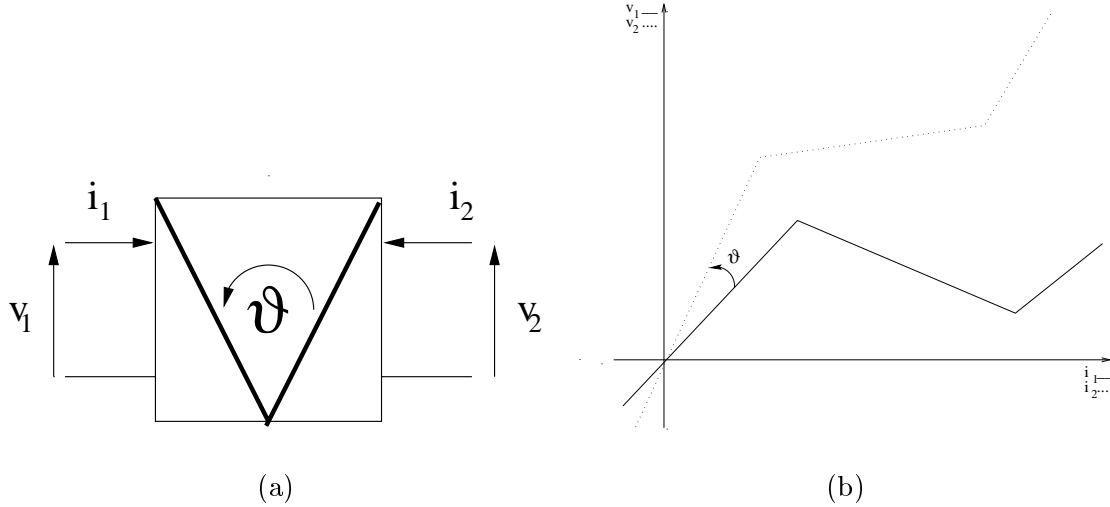


Fig. B.4: Rotatore.

orizzontale della coppia di variabili (v_2, i_2) di un angolo θ rispetto a (v_1, i_1) . Esso ha matrice di trasmissione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

ed è chiamato *rotatore*.

Riflettore Un elemento simile al rotatore è il *riflettore* di Fig. B.5, che permette di riflettere una curva $i-v$ attorno ad asse r avente angolo θ rispetto all'asse orizzontale. La matrice di trasmissione del riflettore è la seguente

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Scalatore Lo *scalatore* permette di espandere o comprimere una curva lungo l'asse orizzontale o verticale. Esistono in particolare tre tipi distinti di scalatori:

a) *scalatore di tensione* avente matrice di trasmissione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

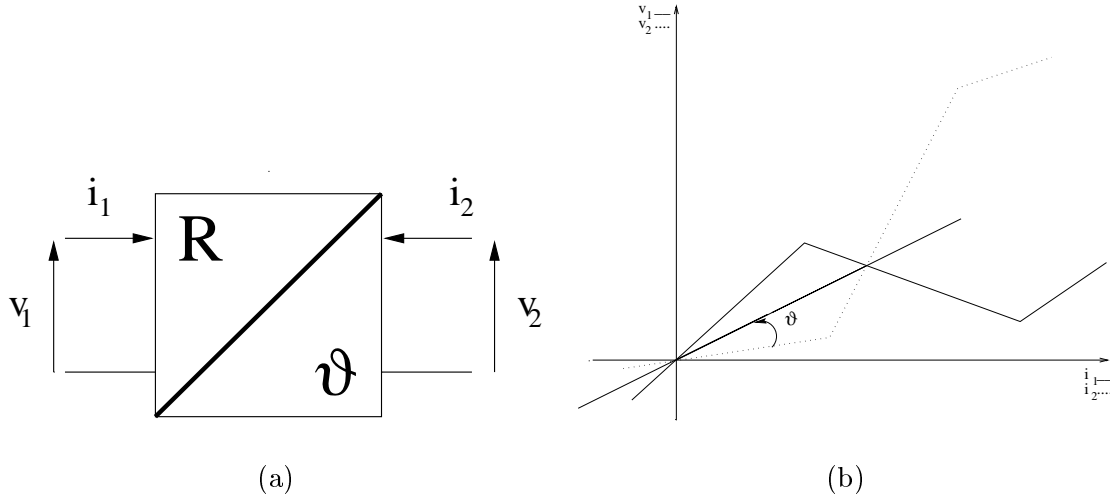


Fig. B.5: Riflettore.

b) *scalatore di corrente* avente matrice di trasmissione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

c) *scalatore di potenza* avente matrice di trasmissione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & -K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

I simboli dei tre elementi sono descritti in Fig. B.6.

È utile notare che ponendo

$$K_v = n \quad \text{e} \quad K_i = \frac{1}{n},$$

lo scalatore di potenza si comporta come un trasformatore ideale. Il trasformatore ideale può quindi essere visto come uno scalatore che conserva la potenza nel passaggio dalla prima alla seconda porta.

B.3.2 Monotonizzazione della caratteristica non lineare

La realizzazione di resistori passivi non monotoni richiede l'utilizzo di resistenze negative che possono dare problemi di stabilità. Al contrario la sintesi di resistori passivi monotoni richiede l'utilizzo di soli elementi passivi (ad esempio resistenze lineari, diodi a giunzione p-n, diodi zener) che garantiscono quindi la stabilità del circuito risultante.

Ci si può chiedere se sia possibile rendere monotona una curva mediante l'utilizzo di opportuni convertitori lineari. Si consideri la curva $\Gamma(i, v) = 0$ di Fig. B.7 (curva continua), effettuando uno scalamento in corrente $K_v = 3$ (curva tratteggiata) ed una successiva riflessione attorno alla retta r avente angolo $\theta = 20^\circ$, essa si trasforma nella curva passiva monotonicamente crescente $\gamma(i, v) = 0$ (curva tratto-punto).

Sebbene si sia considerato un caso particolare, è sempre possibile (si veda Chua [32]) rendere monotona crescente una qualsiasi curva i - v mediante l'utilizzo in cascata di un opportuno scalatore e riflettore (in alternativa uno scalatore e un rotatore).

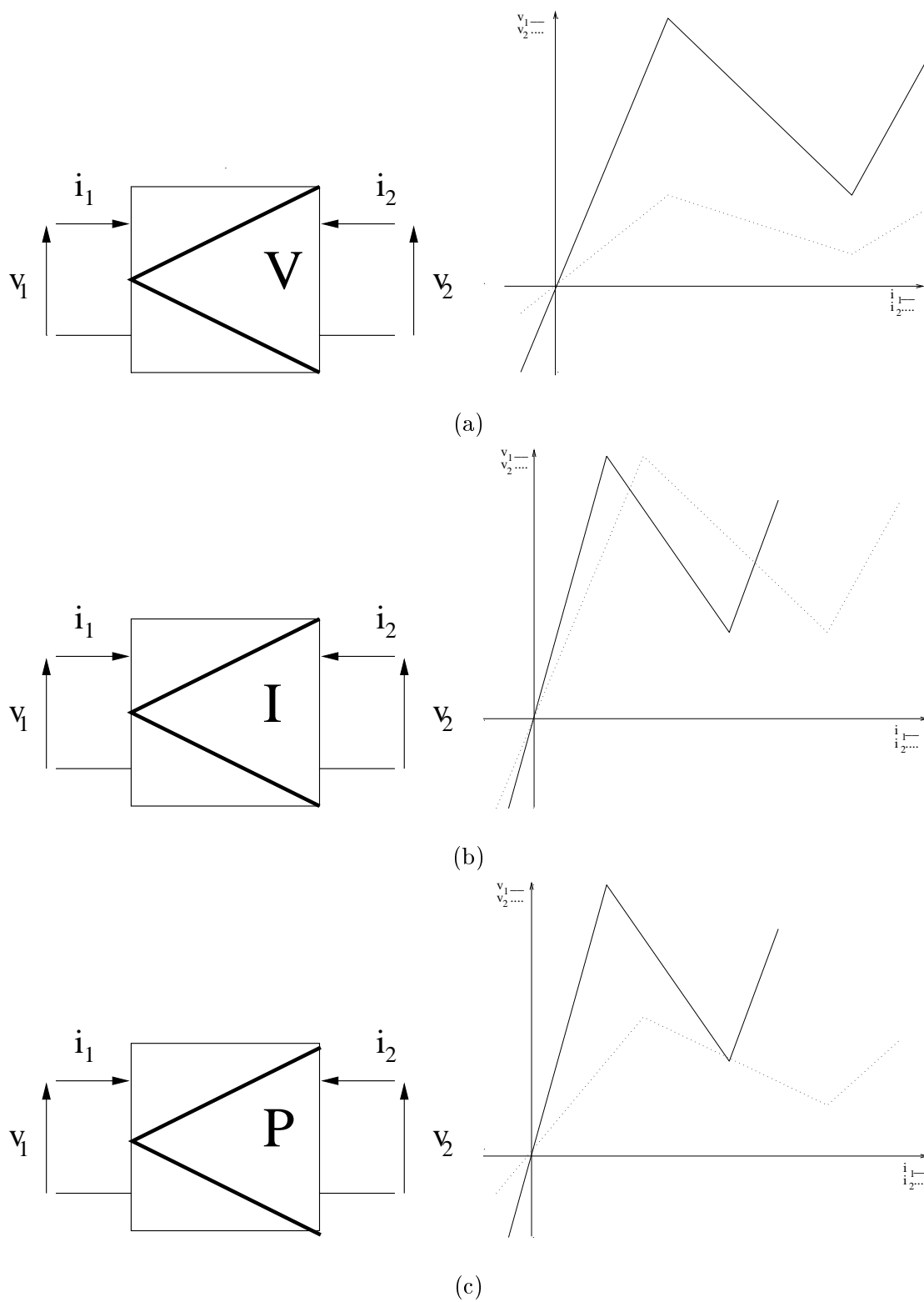
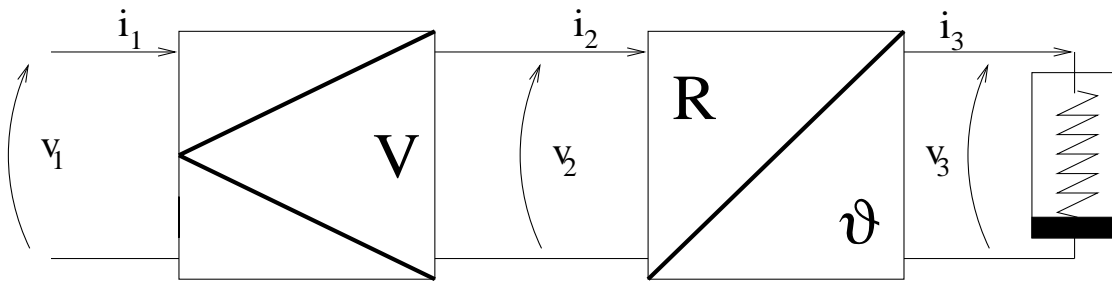
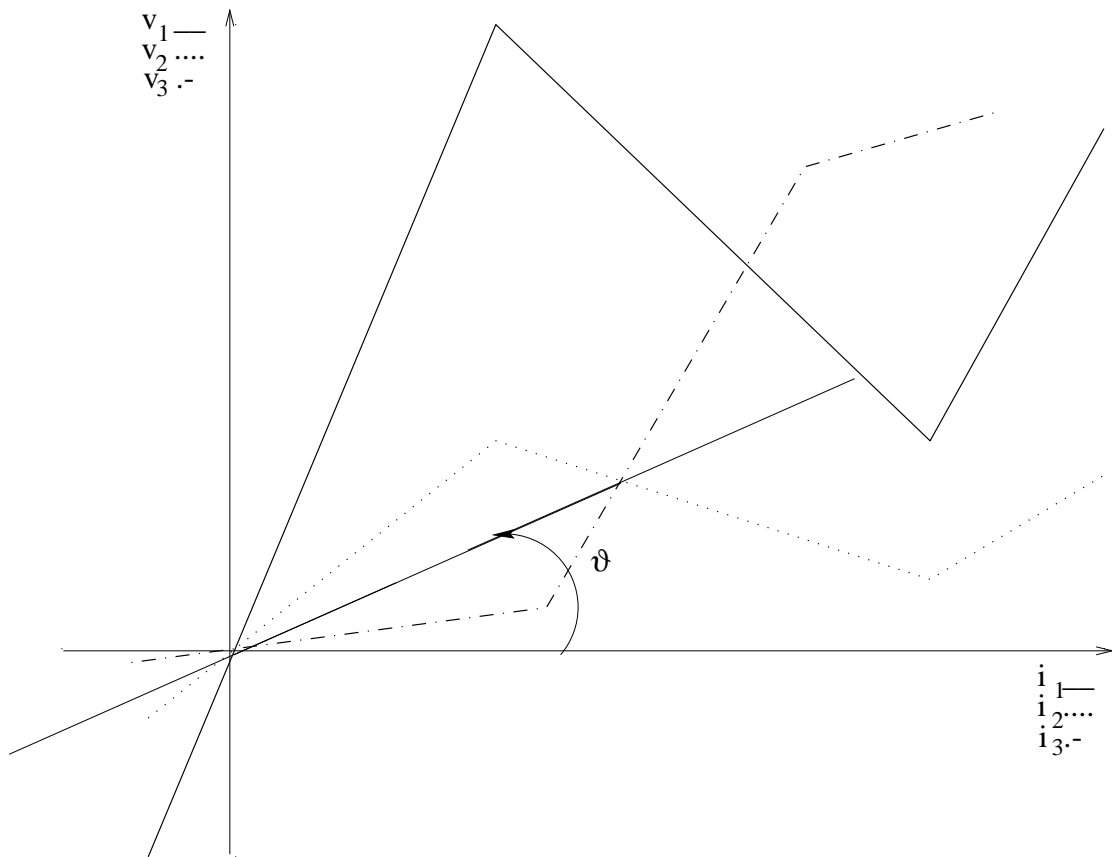


Fig. B.6: (a) Scalatore di tensione. (b) Scalatore di corrente. (c) Scalatore di potenza.



(a)



(b)

Fig. B.7: Monotonizzazione di una curva mediante scalatore e riflettore.

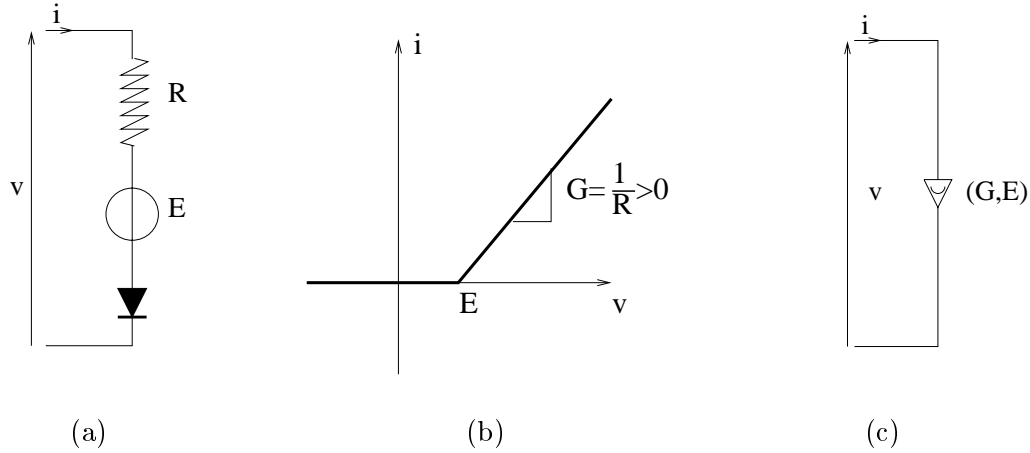


Fig. B.8: (a) Circuito equivalente del resistore concavo. (b) Caratteristica. (c) Simbolo.

B.4 Sintesi di un resistore passivo monotonicamente crescente

Una caratteristica non lineare passiva monotonicamente crescente può essere implementata attraverso la connessione serie e parallelo di bipoli istantanei ideali non lineari chiamati *resistori concavi* e *resistori convessi*, impiegati come blocchi costituenti. Dal momento che la sintesi di resistenze non lineari analogiche non è lo scopo di questo lavoro, ci si limiterà a descrivere questi due elementi, senza entrare nel dettaglio dell'implementazione. Nel caso si fosse particolarmente interessati all'argomento, è possibile consultare Chua [32].

Resistore concavo Si consideri il circuito equivalente di Fig. B.8 (a), la forma della sua caratteristica (Fig. B.8 (b)) suggerisce il nome *resistore concavo*. Esso è un resistore lineare a tratti *controllato in tensione*, univocamente definito da due parametri: la pendenza del segmento lineare G e la tensione di scarica E (intercetta sull'asse v). Il suo simbolo è rappresentato in Fig. B.8 (c), mentre la sua funzione caratteristica è

$$i = \frac{1}{2}G(|v - E| + (v - E)) .$$

Resistore convesso Il circuito di Fig. B.9 (a), avente caratteristica i - v mostrata in Fig. B.9 (b),

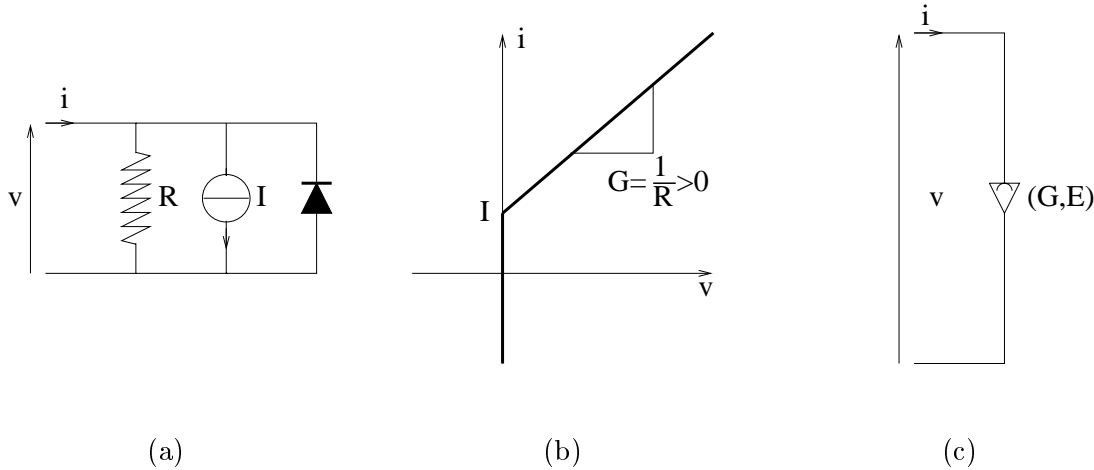


Fig. B.9: (a) Circuito equivalente del resistore convesso. (b) Caratteristica. (c) Simbolo.

è detto *resistore convesso*. Il resistore convesso, il cui simbolo è rappresentato in Fig. B.9 (c), è

un resistore lineare a tratti *controllato in corrente* univocamente definito da due parametri: la pendenza del segmento lineare $G = 1/R$ e la corrente del punto di rottura I (intercetta sull'asse i). La sua rappresentazione matematica è

$$v = \frac{1}{2}R(|i - I| + (i - I)) .$$

Come si può notare, i circuiti equivalenti dei due blocchi base per la realizzazione di resistenze non lineari sono costituiti dalla connessione di una resistenza passiva lineare, un generatore ideale e un diodo ideale, ciò garantisce la stabilità del circuito elettrico risultante. I due blocchi possono essere costruiti in maniera più accurata facendo uso di amplificatori operazionali retroazionati.

Appendice C

Progetto di filtri passa-tutto

I filtri passa-tutto hanno un vasto campo d'applicazione. Essi hanno la proprietà di fornire un certo ritardo di gruppo, mantenendo il modulo della risposta impulsiva costante.

L'applicazione più diffusa è quella che li vede impiegati come equalizzatori di fase per sistemi a fase non lineare. In questo caso lo scopo è di compensare la fase non lineare di un sistema, in modo che il ritardo di gruppo risultante sia costante.

Un'altra applicazione riguarda la propagazione delle onde in mezzi dispersivi, in questo caso la velocità di fase dipende dalla frequenza e pertanto la fase non è lineare. In questo ambito il filtro passa-tutto può servire a simulare le distorsioni di fase. Nel corso degli anni sono state proposte diverse tecniche di progetto. Una tecnica di sintesi fu proposta da Yegnanarayana [84] e fu utilizzata da Paladin e Rocchesso [59] nel loro lavoro sulla simulazione della dispersione.

Il metodo si basa sul legame che esiste tra il ritardo di gruppo e il logaritmo del modulo quadro di un filtro a soli poli. Data la caratteristica di fase $\varphi(\lambda)$ del filtro che si vuole progettare, si ricava il ritardo di gruppo

$$\tau(\lambda) = \frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda},$$

da quest'ultimo si risale al modulo quadro e successivamente ai coefficienti del filtro mediante un modello autoregressivo.

Sebbene la tecnica sia robusta, essa presenta, soprattutto alle basse frequenze, delle fastidiose increspature dovute a fenomeni di Gibb che rendono il suono simile a quello di una campana.

Van Duyne e Smith [82] hanno proposto un metodo semplice e poco costoso per approssimare l'inarmonicità, introducendo in fondo alla linea di ritardo di N campioni una cascata di M filtri passa-tutto del primo ordine identici tra loro. Dal momento che il ritardo di fase di un filtro passa-tutto del primo ordine

$$H(z) = \frac{-a_0 + z^{-1}}{1 - a_0 z^{-1}}$$

è uguale a

$$\varphi_0(\lambda) = \arctan \left(\frac{(a_0^2 - 1) \sin(\lambda)}{-2a_0 + (a_0^2 + 1) \cos(\lambda)} \right),$$

il filtro risultante avrà fase

$$\hat{\varphi}(\lambda) = -N\lambda + M \arctan \left(\frac{(a_0^2 - 1) \sin(\lambda)}{-2a_0 + (a_0^2 + 1) \cos(\lambda)} \right)$$

I valori ottimi di N , M , e a_0 si ottengono sperimentalmente dalla minimizzazione dell'errore quadratico medio tra la fase desiderata $\varphi(\lambda)$ e la fase del filtro progettato $\hat{\varphi}(\lambda)$.

Sfortunatamente la restrizione all'uso di filtri identici del primo ordine è troppo severa, in particolar modo per le prime due ottave del pianoforte. Per queste corde è necessario una tecnica che utilizzi filtri passa-tutto di ordine superiore.

Un'altra possibile soluzione potrebbe essere il metodo di sintesi proposto da Deczky [85] che però, risulta computazionalmente molto costoso per ordini discretamente alti ed inoltre non sempre garantisce una soluzione ottima.

Il metodo di sintesi adottato in questo lavoro si rifà alla tecnica proposta da Lang e Laakso [86], basata sulla minimizzazione dell'errore quadratico medio della fase. La tecnica è di facile applicazione e relativamente poco costosa.

C.1 Metodo proposto

È noto che dati N campioni di una risposta di fase, è possibile costruire un filtro passa-tutto di ordine N che onora tali punti risolvendo un semplice sistema lineare di N equazioni [87, 88]. Il metodo di Lang e Laakso permette la costruzione di un filtro di ordine N , basato sulla minimizzazione di un'equazione pesata dell'errore quadratico medio che approssima la funzione di fase desiderata specificata in $L > N$ punti.

In un primo momento si ricaverà la soluzione esatta ($L = N$), in seguito si generalizzerà al caso sovra determinato ($L > N$) attraverso la tecnica di pseudoinversione.

Si consideri un filtro passa-tutto di ordine N

$$H(z) = \frac{a_N + \dots + a_1 z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = z^{-N} \frac{D(z^{-1})}{D(z)},$$

la cui risposta in frequenza è

$$\varphi_H(\lambda) = -N\lambda + 2\varphi_D(\lambda),$$

dove

$$\varphi_D(\lambda) = \arg\left(\frac{1}{D(e^{j\lambda})}\right) = \arctan\left(\frac{\sum_{k=1}^N a_k \sin(k\lambda)}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\lambda)}\right)$$

è la risposta di fase del denominatore. Assumendo che siano noti i valori della fase desiderata $\varphi_{pre}(\lambda_i)$ in N valori distinti di frequenza λ_i con $i = 1, \dots, N$, si ottiene il sistema di equazioni [86]

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^N a_k \sin(k\lambda_i)}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\lambda_i)}\right) = -\tan(\beta_i) \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, N.$$

Il sistema può essere riscritto, dopo alcuni passaggi algebrici nel seguente modo

$$\sum_{k=1}^N a_k \sin(\beta_i + k\lambda_i) = -\sin(\beta_i) \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{C.1})$$

Il sistema di eq. (C.1) è lineare nelle incognite a_k e pertanto può essere espresso nella seguente forma matriciale

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (\text{C.2})$$

dove gli elementi della matrice \mathbf{A} sono

$$A_{i,k} = \sin(\beta_i + k\lambda_i) \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, N \quad k = 1, \dots, N$$

e i vettori sono

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]^T \\ \mathbf{b} &= -[\sin(\beta_1) \ \sin(\beta_2) \ \dots \ \sin(\beta_N)]^T. \end{aligned}$$

Se \mathbf{A} è invertibile, allora esiste l'unica soluzione

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Una soluzione basata sulla minimizzazione dell'errore quadratico medio può essere costruita utilizzando un numero di campioni maggiore dell'ordine del filtro ($L > N$) e permettendo un scostamento dalla risposta in frequenza desiderata. Anziché il sistema di eq. (C.2) si avrà

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{e} ,$$

dove \mathbf{e} è il *vettore errore* di lunghezza L .

Al fine di minimizzare la funzione errore pesata

$$E = \sum_{i=1}^L w_i e_i^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} , \quad (\text{C.3})$$

dove \mathbf{W} è una matrice diagonale contenente gli L valori dei pesi w_i della funzione peso desiderata, si ottiene la seguente soluzione

$$\mathbf{a} = [\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{b}$$

La soluzione così ottenuta minimizza però la funzione errore di eq. (C.3) piuttosto che l'errore di fase. Lang e Laakso infatti, forniscono un'approssimazione dell'errore di fase in funzione dell'errore \mathbf{e} del tipo

$$\Delta\varphi_H(\lambda_i) = \varphi_H(\lambda_i) - \varphi_{pre}(\lambda_i) \approx \frac{2e_i}{|D(e^{j\lambda_i})|} . \quad (\text{C.4})$$

Questa equazione dimostra che la soluzione che minimizza la funzione errore di eq. (C.3) si discosta dalla soluzione avente errore quadratico medio della fase minimo, attraverso una funzione di pesi proporzionali al modulo del denominatore D del filtro passa-tutto. Naturalmente questo scostamento può essere compensato usando come pesi nella matrice \mathbf{W} l'inversa di tale funzione peso. Purtroppo questa funzione di pesi non è nota a priori, dal momento che dipende dal filtro passa-tutto che si è disegnato. In ogni caso è possibile costruire un algoritmo iterativo che converga al sistema di pesi della matrice \mathbf{W} che minimizza l'errore di fase.

Si assuma, ad esempio,

$$w_i^{(q)} = \frac{v_i}{|D^{(q-1)}(e^{j\lambda_i})|^2} , \quad (\text{C.5})$$

dove $w_i^{(q)}$ è l'*i-esimo* elemento della matrice dei pesi alla *q-esima* iterazione e v_i (invariante durante le iterazioni) è una funzione addizionale di pesi per l'errore di fase. Se si inseriscono l'eq. (C.4) e (C.5) nell'eq. (C.3) si ottiene

$$E^{(q)} = \sum_{i=1}^L w_i^{(q)} [e_i^{(q)}]^2 \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^L \frac{v_i}{|D^{(q-1)}(e^{j\lambda_i})|^2} \left[\Delta\varphi_H^{(q)}(\lambda_i) |D^{(q)}(e^{j\lambda_i})| \right]^2 .$$

Questa formula dimostra che la soluzione risultante approssimativamente minimizza il vero errore quadratico medio della fase $\Delta\varphi_H(\lambda_i)$, purché l'algoritmo iterativo converga ad una soluzione in cui $\Delta = |D^{(q)}(e^{j\lambda_i})| - |D^{(q-1)}(e^{j\lambda_i})|$ tenda a zero.

C.2 Applicazione al modello di corda rigida

Il metodo descritto è particolarmente adatto per l'implementazione della rigidità in una struttura waveguide.

Come già descritto in Sez. 4.1.3, un singolo tratto di corda $X = c_0 T_c$ ha caratteristica di fase $\varphi_a(\lambda)$ riportata in eq. (4.7).

Se si raggruppano m tratti di corda è possibile simulare la rigidità attraverso un filtro passa-tutto $H(z)$ avente andamento di fase

$$\varphi(\lambda) = m\varphi_a(\lambda).$$

Per implementare il filtro desiderato è necessario ricavare un set di valori della fase $\varphi(\lambda_i)$ in L valori distinti della frequenza normalizzata λ_i , con $i = 1, \dots, L$.

Il vantaggio apportato dal metodo di Lang e Laakso è dato dalla possibilità di scegliere come set di frequenze λ_i le armoniche della corda, ovvero tutti i multipli interi della frequenza fondamentale.

Una volta note le parziali, i cui valori si ricavano a partire dall'eq. 4.7 [61], è possibile applicare il metodo per la costruzione del filtro passa-tutto.

Solitamente la fase desiderata $\varphi(\lambda_i)$ si ottiene, ponendo in cascata M ritardi ad un filtro passa-tutto di ordine M e un filtro FIR (simulante le perdite $G(z)$). In questo caso la fase del filtro $G(z)$ da implementare sarà

$$\varphi_g(\lambda_i) = M\lambda_i + \varphi(\lambda_i) \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, L.$$

I valori ottimi di L , N e M sono scelti sperimentalmente in modo da minimizzare l'errore quadratico medio tra fase desiderata $\varphi_g(\lambda_i)$ e la fase del filtro progettato $\hat{\varphi}_g(\lambda_i)$.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Fettweis: *Wave digital filters: theory and practice*. Proceedings of the IEEE, Vol. 74, No. 2, Feb. 1986, pp. 327–270.
- [2] A. Fettweis: *Some principles of designing digital filters imitating classical filter structures*. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, Mar. 1971, pp. 314–316.
- [3] A. Fettweis, K. Meerkötter: *On adaptors for wave digital filters*. IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-23, Dec. 1975, pp. 516–525.
- [4] A. Fettweis: *Digital circuits and systems*. IEEE Trans. Circuits and Systems (Centennial Issue), Vol. CAS-31, No. 1, Jan. 1984, pp. 31–48.
- [5] A. Fettweis: *Pseudopassivity, sensitivity, and stability of wave digital filters*. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, Nov. 1972, pp. 668–673.
- [6] A. Fettweis: *Reciprocity, interciprocality, and transposition in wave digital filters*. Int. J. Circuit Theory Appl., Vol. 1, Dec. 1973, pp. 323–337.
- [7] A. Fettweis, K. Meerkötter: *Suppression of parasitic oscillations in wave digital filters*. IEEE Trans. Circuit and Systems, Vol. CAS-22, Mar. 1975, pp. 239–246.
- [8] V. Belevitch: *Classical network theory*. Holden Day, 1968.
- [9] J.O. Smith, D. Rocchesso : *Aspects of digital waveguide networks for acoustic modeling applications*. Submitted to Proceedings of the IEEE.
- [10] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti: *Sound synthesis by dynamic systems interaction*. In *Readings in Computer generated Music*, D. Baggi, editor. IEEE Computer Society Press, pp. 139-160, 1992.
- [11] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti: *Algorithms and structures for synthesis using physical models*. Computer Music Journal, MIT Press, Vol. 16, No. 4, pp. 30-42, 1992.
- [12] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti: *Musical signal synthesis*. In *Musical signal processing*, C. Roads, S.T. Pope, A. Piccialli, G. De Poli, editors. Swets and Zeitlinger, 1997.
- [13] G. Borin: *Struttura per l'iterazione tra eccitatore e risuonatore nella sintesi del suono*. Università di Padova, Tesi di Laurea, 1990.
- [14] G. De Poli, A. Piccialli: *Pitch synchronous synthesis*. In *Representation of Musical Signals*, C. Roads, S.T. Pope, A. Piccialli, G. De Poli, editors. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, pp. 187-219.
- [15] G. De Poli: *Digital synthesis by fractional waveshaping*. Journal of Audio Engineering Society 32(11), pp. 849-861, 1984.

- [16] M. Le Brun: *Digital waveshaping synthesis*. Journal of Audio Engineering Society 27(4), pp. 250-265, 1979.
- [17] D. Arfib: *The synthesis of complex spectra by means of multiplication of nonlinear distorted sine wave*. Journal of Audio Engineering Society 27(10), pp. 757-768, 1979.
- [18] J. Chowning: *Digital synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation*. Journal of Audio Engineering Society 21(7), pp. 426-534, 1973.
- [19] J. Chowning: *FM theory and applications: by musicians to musicians*. Tokyo, Yamaha Foundation. 1986.
- [20] K. Meerkotter, R. Scholtz: *Digital simulation of nonlinear circuits by wave digital filter principles*. IEEE Proc. of ISCAS '89, pp. 720-723.
- [21] S. Wu: *Chua's circuit family*. Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 8, Aug. 1987, pp. 1022-1032.
- [22] T. Matsumoto: *Chaos in electronic circuits*. Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 8, Aug. 1987, pp. 1033-1057.
- [23] T. Felderhoff: *Simulation of nonlinear circuits with period doubling and chaotic behavior by wave digital principles*. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 41, No. 7, July. 1994, pp. 485-491.
- [24] S.A. Van Duyne, J.R. Pierce, and J.O. Smith: *Traveling-wave implementation of a lossless mode-coupling filter and the wave digital hammer*, in Proc. 1994 Int. Computer Music Conf., pp. 411-418, Computer Music Association, 1994.
- [25] A. Sarti and G. De Poli: *Generalized Adaptors with Memory for Nonlinear Wave Digital Structures*, in Proc. of EUSIPCO-96, Eighth European Signal Processing Conference, Trieste, Italy, 10-13 Sept. 1996. Vol. 3, pp. 1941-1944.
- [26] A. Sarti and G. De Poli: *Towards Nonlinear Wave Digital Filter*
- [27] J.O. Smith: *Acoustic modeling using digital waveguides*. In *Musical signal processing*, C. Roads, S.T. Pope, A. Piccialli, G. De Poli, editors. Swets and Zeitlinger, pp. 221-263, 1997.
- [28] T. Felderhoff: *A new wave description for nonlinear elements*. ISCAS, pp. 221-224, 1994.
- [29] P.S. Linsay: *Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator*. Phys. Rev. Let., Vol. 47, 1981, pp. 1349-1352.
- [30] J. Testa, J. Perez and C. Jeffries: *Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator*. Phys. Rev. Let., Vol. 48, 1982, pp. 714-717.
- [31] C. Hayashi: *Nonlinear oscillations in physical systems.*, McGraw-Hill, 1964.
- [32] L.O. Chua: *Synthesis of new nonlinear network elements*. Proceedings of the IEEE. Vol. 56, pp. 1325-1340, Aug. 1968.
- [33] L.O. Chua: *Introduction to nonlinear network theory*. Mc.Graw-Hill, New York, 1969.
- [34] L.O. Chua: *Memristor – The missing circuit element*. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, Sept. 1971, pp. 507-519.

- [35] L.O. Chua: *Device Modeling Via Basic Nonlinear Circuit Elements*. IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-27, No. 11, Nov. 1980, pp. 1014-1044.
- [36] L.O. Chua: *Dynamic Nonlinear Networks: State-of-the-Art*. IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-27, No. 11, Nov. 1980, pp. 1059-1087.
- [37] L.O. Chua: *Nonlinear Circuits*. IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-31, No. 1, Jan. 1984, pp. 69-87.
- [38] L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh: *Linear and Nonlinear Circuits*. Mc.Graw-Hill, New York, 1969.
- [39] C.A. Desoer and E.S. Kuh: *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [40] L.T. Bruton, *RC Active Circuits: Theory and Design*. Englewood Cliff, NJ: Prentice Hall, 1980.
- [41] J.M. Adrien, X. Rodet, R. Caussé: *Sound synthesis by physical models, application to strings*. In "Proceedings of the 1988 International Computer Music Conference", Computer Music Association, pp. 264-269
- [42] J.M. Adrien: *Dynamic modeling of stringed and wind instruments, sound synthesis by physical models*. In "Proceedings of the 1988 International Computer Music Conference", San Francisco: Computer Music Association, pp. 265-276.
- [43] J.M. Adrien, R. Caussé, E. Ducasse: *Sound synthesis by physical models, application to strings*. In "84th Convention 1988", March 1-4, Parigi. AES preprint.
- [44] J.M. Adrien, R. Caussé, E. Ducasse: *Dynamic modeling of stringed and wind instruments, sound synthesis by physical models*. In "Proceedings of the 1988 International Computer Music Conference", San Francisco: Computer Music Association, pp. 265-276.
- [45] J.M. Adrien: *Time domain computation of three dimensional acoustic field by retarded potential technique*. In "Proceedings of the 1990 International Computer Music Conference", San Francisco: Computer Music Association.
- [46] J. M. Adrien: *Physical model synthesis: the missing link*, in "Representations of Musical Signals", edited by G. De Poli, A. Piccialli, C. Roads, MIT Press, Cambridge MA, 1991.
- [47] G. De Poli: *A tutorial on digital sound synthesis techniques*, Computer Music Journal Vol. 7, No. 4, Winter 1983, pp. 8-26. Anche in *The Music Machine*, edito da C. Roads, Cambridge MA.: MIT Press, pp. 429-448.
- [48] F. Balena, G. De Poli: *Un modello semplificato del clarinetto mediante oscillatore non lineare*, in "Proceedings of VI Colloquium on Musical Informatics", Napoli, 1985, pp. 11-138.
- [49] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti: *Sintesi per modelli fisici: metodi e algoritmi*, "VIII Colloquio di informatica musicale", Cagliari 1989.
- [50] G. De Poli, S. Puppini: *Un modello nel tempo del clarinetto: canna e fori*, "VIII Colloquio di informatica musicale", Cagliari 1989, pp. 52-58.
- [51] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti: *A modular approach to resonator-exciter interaction in physical models synthesis*. "Proceedings of the 1989 International Computer Music Conference". San Francisco: Computer Music Association, pp. 46-50.

- [52] G. Borin, G. De Poli, S. Puppini, A. Sarti: *Generalizing the physical model timbral class*. In "Proceedings of Colloque on Modeles Physiques", Grenoble: ACROE, 1990.
- [53] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti. *Excitator-resonator interaction and sound synthesis*. In "Proceedings of Colloque on Modeles Physiques", Grenoble: ACROE, 1990.
- [54] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti. *Sound synthesis by dynamic systems interaction*. In "Computer Generated Music", edited by D. Baggi, Los Alamitos CA: IEEE Computer Society Press.
- [55] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti. *Algorithms and structures for synthesis using physical models*. Computer Music Journal, vol. 16., n. 4, winter 1992, pp.30-42.
- [56] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti. *Formalization of the sound generation process: structures and metaphores*. Proceedings of MAI Conference, Marseille, 1990: MIM, pp. 231-241.
- [57] G. Borin, G. De Poli, A. Sarti. *Musical signal synthesis*. pp. 4-30.
- [58] G. De Poli: *Audio Signal Processing by Computers*. In "Music Processing", edited by G. Haus, Madison WI: A-R Editions. 1992.
- [59] A. Paladin, D. Rocchesso: *A Dispersive Resonator in Real Time on MARS Workstation*. Proc. Int. Computer Music Conf. (ICMC 1992). San Jose, CA, Oct. 1992, ICMA, pp. 146-149.
- [60] D. Rocchesso, J.O. Smith: *Circulant and elliptic feedback delay networks for artificial reverberation*. IEEE Trans. on Acoustic Speech, Audio Proc., Vol.5, n. 1, pp. 51-63, Jan. 1997.
- [61] D. Rocchesso, F. Scalcon: *Accurate dispersion simulation for piano string*. Nordic Acoustical Meeting 12-14 June 1996 Helsinki.
- [62] M. Mathreus, J. Kohut: *Electronic simulation of violin resonance*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.53, (no.6), pp. 1620-1626, 1973.
- [63] C. Cadoz, A. Luciani, J. Florens: *Responsive input devices and sound synthesis by simulation of instrumental mechanisms: the cordis system*. "Computer Music Journal", Vol. 8, No. 3, Fall 1984, pp. 60-73.
- [64] J.L. Florens, C. Cadoz. *The physical model: modeling and simulating the instrumental universe*. In "Representations of Musical Signals", edited by G. De Poli, A. Piccialli, C. Roads. Cambridge MA.: MIT Press, pp. 227-268.
- [65] G. Garnett: *Modeling piano sound using waveguide digital filtering techniques*. In "Proceedings of the International Computer Music Conference" 1987, pp. 89-95.
- [66] G. Garnett, B. Mont-Reynaud: *Hierarchical waveguide networks*. In "Proceedings of the 1988 International Computer Music Conference", San Francisco: Computer Music Association, pp. 297-312.
- [67] L. Hiller, P. Ruiz: *Synthesizing musical sounds by solving the wave equation for vibrating objects: Part I and II*. "Journal of the Audio Engineering Society", June 1971, pp. 462-470 and July 1971, pp. 542-551.
- [68] D.H. Keefe: *Tutorial on physical models of wind instruments*. "Computer Music Journal", Vol. 17, N. 1, 1983.
- [69] F. Turra: *Simulazione in tempo reale del clarinetto mediante SM 1000*. Università di Padova, Tesi di Laurea, 1992.

- [70] J.R. Kelly, C. Lochbaum: *Speech synthesis*. "Proceedings of the International Congress of Acoustics", G-24, 1-4, 1962. Anche in *Speech Synthesis*, J.L. Flanagan, L.R. Rabiner editori, Stroudsburg, Penn.: Dower Hutchinson & Ross Inc., pp. 127-130.
- [71] J.D. Markel, A.H. Gray: *Linear prediction of speech*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [72] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, J. Woodhouse: *On the oscillations of musical instruments*. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 74, No. 5, pp. 1325-1345, 1983.
- [73] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, J. Woodhouse: *Aperiodicity in bowed string motion*. Acoustica, Vol. 49, pp. 13-32, 1981.
- [74] R.L. Pratt, S.J. Elliot, J.M. Bowsher: *The misurement of the acoustic impedance of brass instruments*. Acoustica, Vol. 38, pp. 236-246, 1977.
- [75] I. Nakamura, S. Iwaoka: *Piano tone synthesis using digital filters by computer simulations*. In "IEEE Proceedings of the 1986 International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing", pp. 1293-1296.
- [76] R.T. Schumacher: *Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet*. "Acustica", No. 48, Vol 2, 1981, pp. 71-85.
- [77] J.O. Smith: *Efficient simulation of the reed-bore and bow-string mechanism*. In "Proceedings of the 1986 International Computer Music Conference", Sai Francisco: Computer Music Association, pp. 275-280.
- [78] J. O. Smith: *Waveguide Filter Tutorial*. In "Proceedings of the International Computer Music Conference", 1987, pp. 9-16.
- [79] J. O. Smith: *Musical applications of digital waveguides* . Technical Report STAN-M-39, CCRMA, Department of Music, Stanford University.
- [80] J. O. Smith: *Physical modeling using digital waveguides*. Computer Music Journal, Vol. 16, No. 4.
- [81] J. O. Smith: *A simplified approach to modeling dispersion caused by stiffness in strings and plates*. In "Proceedings of the International Computer Music Conference", 1994, pp. 411-418.
- [82] S.A. Van Duyne, J.O. Smith: *Physical modeling with the 2-D digital waveguide mesh*. In "Proceedings of the Intern." IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc. Vol.30 ASSP-29, n.3, Jun. 1991.
- [83] W.H. Press, B.P Flanners, S.A Teukolsky, W.T. Vetterling: *Numerical Recipes*. Cambridge University Press 1988.
- [84] B. Yegnanarayana: *Design of recursive group delay filters by autoregressive modelling*. IEEE Trans. on Acoustic Speech, Signal Proc., Vol.30, n. 4, pp. 632-637, Aug. 1987.
- [85] A.G. Deczky: *Synthesis of recursive digital filters using the minimum p-Error criterion*. IEEE Trans. on Audio and Electroacoustic, Vol.20, n. 4, pp. 257-263, Oct. 1972.
- [86] Lang, T.I. Laakso: *Simple and robust method for the design of allpass filters using least-squares phase error criterion*. IEEE Trans. on Circuits and System, Vol.41, n. 1, pp. 40-48, Jan. 1994.
- [87] K. Schubler, J. Weith: *On the design of recursive Hilbert transformer*. Proc. Int. Conf. on Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP 1987), pp. 876-879, 1987.

- [88] R. Gregorian, G.C. Temes: *Design techniques for digital and analog allpass circuits*. IEEE Trans. on Circuits and System, Vol.CAS-25, pp. 981-988, Dec. 1978.
- [89] J.G. Roederer: *Introduction to the physics and psychoacustics of music*. Heidelberg, Springer-Verlag, 1975.
- [90] J.D. Markel A.H. Gray: *Linear prediction of speech*. Berlin, Springer-Verlag, 1976.
- [91] N. Giordano: *Simple model of a piano soundboard*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.102, (no.2), pp. 1159-68, Aug. 1997.
- [92] N. Giordano, A. J Korty: *Motion of a piano string: longitudinal vibrations and the role of the bridge*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.100, (no.6), pp. 3899-908, Dec. 1996.
- [93] A. Chaigne, A. Askenfelt: *Numerical simulations of piano strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.95, (no.2), pp. 1112-18, Feb. 1994.
- [94] A. Chaigne, A. Askenfelt: *Numerical simulations of piano strings. II. Comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer-string parameters*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.95, (no.3), pp. 1631-40, March 1994.
- [95] H.A. Conklin, Jr: *Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part I. Piano hammers and tonal effects*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.99, (no.6), pp. 3286-96, June 1996.
- [96] H.A. Conklin, Jr: *Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part II. Piano structure*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.100, (no.2, pt.1), pp. 695-708, Aug. 1996.
- [97] H.A. Conklin Jr: *Design and tone in the mechanoacoustic piano. III. Piano strings and scale design*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.100, (no.3), pp. 1286-300, Sept. 1996.
- [98] H.A. Conklin Jr: *Piano strings and "phantom" partials*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.102, (no.1), pp. 659, July 1997.
- [99] D.E. Hall: *Piano string excitation in the case of small hammer mass*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.79, (no.1), pp. 141-146, Jan. 1987.
- [100] D.E. Hall: *Piano string excitation II: general solution for hard narrow hammer*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.81, (no.2), pp. 535-546, Feb. 1987.
- [101] D.E. Hall: *Piano string excitation III: solution for a soft narrow hammer*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.81, (no.2), pp. 547-554, Feb. 1987.
- [102] D.E. Hall, P. Clark: *Piano string excitation IV: the question of missing modes*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.82, (no.6), pp. 1913-1917, Dec. 1987.
- [103] D.E. Hall, A. Anskensfelt: *Piano string excitation V: spectra for real hammer and string*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.83, (no.4), pp. 746-754, Apr. 1988.
- [104] D.E. Hall: *Piano string excitation VI: nonlinear modeling*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.92, (no.1), pp. 95-105, July. 1992.
- [105] X. Boutillon: *Model for piano hammers: Experimental determination and digital simulation*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.82, pp. 746-754, 1988.

- [106] M. Podlesak, A. R. Lee: *Dispersion of waves in piano strings*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.83, (no.1), pp. 305-318, Jan. 1988.
- [107] H. Suzuki: *Model analysis of a hammer string interaction*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.82, (no.4), pp. 1145-1151, Oct. 1987.
- [108] L. Bacon, M. Browsher: *A discrete model of struck string*. Acoustica, vol.41, pp. 21-27, 1978.
- [109] M. Kjellander: *On the design of digital waveguides for stiff string*. TMH-QPSR, pp. 31-47, 1/1996
- [110] G. Weinreich: *Coupled piano strings*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.36, pp. 203-209, 1964.
- [111] H. Fletcher : *Normal vibration frequencies of stiff piano string*. Journal of the Acoustical Society of America, vol.83, (no.1), pp. 305-318, Jan. 1988.
- [112] Fletcher, Rossing: *The physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag.
- [113] G. Weinreich: *The coupled motion of piano strings*. Five lectures on the Acoustic of the Piano. Royal Swedish Academy of Music no. 64. Stockholm 1990.
- [114] K. Wogram: *The strings and the soundboard*. Five lectures on the Acoustic of the Piano. Royal Swedish Academy of Music no. 64. Stockholm 1990.
- [115] A. Askenfelt, E. Jansson: *From touch to string vibration*. Five lectures on the Acoustic of the Piano. Royal Swedish Academy of Music no. 64. Stockholm 1990.
- [116] D.E. Hall: *The hammer and the string*. Five lectures on the Acoustic of the Piano. Royal Swedish Academy of Music no. 64. Stockholm 1990.
- [117] H.A. Conklin, Jr: *Piano design factors - their influence on tone and acoustical performance*. Five lectures on the Acoustic of the Piano. Royal Swedish Academy of Music no. 64. Stockholm 1990.