

# Indice

<b>8 Elementi di calcolo vettoriale</b>	<b>3</b>
8.1 Campi vettoriali . . . . .	4
8.1.1 Derivate in una direzione, derivate parziali, gradiente . . . . .	4
8.2 Integrali di linea, di superficie, di volume . . . . .	6
8.2.1 Integrale di linea . . . . .	6
8.2.2 Integrale di superficie . . . . .	8
8.2.3 Integrale di volume . . . . .	9
8.3 Il Teorema della divergenza . . . . .	10
8.4 Il Teorema di Kelvin–Stokes . . . . .	12
8.5 L’operatore formale “nabla” . . . . .	14
8.6 Esempi . . . . .	14
8.6.1 Campi centrali . . . . .	14
8.6.2 Altri esempi (campi non centrali) . . . . .	17



## Capitolo 8

# Elementi di calcolo vettoriale

Questi elementi di calcolo vettoriale vanno considerati come un capitolo aggiuntivo del testo modulare di S. INVERNIZZI, M. RINALDI e A. SGARRO *Moduli di matematica e statistica* (Zanichelli, Bologna, 2000), al quale faremo riferimento per i prerequisiti con l'etichetta [MMS]. Nel capitolo illustreremo alcuni concetti e risultati che in un certo senso estendono a situazioni molto più generali la formula di Torricelli [MMS, pp. 96–97]:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

valida in situazioni abbastanza generali per una funzione reale  $y = f(x)$  di una variabile reale  $x$ . Per estendere questo risultato servirà estendere la nozione di “derivata”, e per questo introdurremo i concetti di gradiente, divergenza e rotore, ed estendere la nozione di “integrale” su un intervallo  $[a, b]$  all’integrale su curve 1D, superfici 2D e volumi 3D. I risultati che otterremo, estensioni della formula di Torricelli, sono: il teorema della divergenza ed il teorema di Kelvin–Stokes. Entrambi hanno la stessa struttura della formula di Torricelli. Infatti, come questa stabilisce una uguaglianza fra un integrale 1-dimensionale  $\int_a^b f'(x) dx$  su un intervallo  $[a, b]$  e la “somma orientata”  $f(b) - f(a)$  dei valori di  $f$  sul bordo dell’intervallo, che è una specie di integrale 0-dimensionale, così il teorema della divergenza stabilisce una uguaglianza fra un integrale 3-dimensionale su un volume racchiuso da una superficie chiusa e l’integrale 2-dimensionale sulla superficie stessa, ed il teorema di Kelvin–Stokes stabilisce una uguaglianza fra un integrale 2-dimensionale su una superficie racchiusa da una curva chiusa e l’integrale 1-dimensionale sulla curva stessa.

Questi due teoremi sono straordinariamente importanti per lo studio della fisica, e non a caso sono stati essenzialmente scoperti dai fisici. I matematici hanno successivamente unificato questi due teoremi sotto un’unico teorema, il cosiddetto teorema di Stokes della geometria differenziale, ma, nella sua elegante generalità, quest’ultimo “perde” l’importante significato fisico dei casi particolari. Pertanto in queste note terremo separati i due teoremi.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Anche perché anche il solo enunciato del teorema generale di Stokes è molto difficilmente accessibile ad un pubblico non specializzato.

Chi studia noterà un punto rilevante. Nell'approccio di [MMS], la *formula dei tre punti* [MMS, p. 54, (2.10)], o formula della differenza centrale per l'approssimazione della derivata ordinaria  $f'(a)$  di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

è stata il punto chiave della “prova” della formula di Torricelli. Nello stesso modo, con le adeguate generalizzazioni, la formula dei tre punti sarà la chiave per le “prove” del teorema della divergenza ed del teorema di Kelvin–Stokes. Chi studia noterà ancora che in questi due teoremi non daremo prima l'enunciato e poi la “prova”, ma piuttosto “faremo i conti”, in modo che le nozioni di divergenza e rotore nascano spontaneamente dal calcolo, e quindi siano fisicamente motivate, a differenza di quanto sarebbero le stesse quantità qualora venissero definite apriori in modo immotivato. Naturalmente le “prove” saranno condotte in modo informale ma sufficientemente convincente per gli studenti ai quali questo capitolo è dedicato.

Seguendo le notazioni di [MMS, Cap. 5], i vettori 2D o 3D sono indicati in grassetto:  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , ldots. Nella scrittura a mano, sulla carta o sulla lavagna, si preferisce usare la freccetta sopra la lettera, scrivendo quindi  $\vec{x}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , ldots.

## 8.1 Campi vettoriali

Un  in una regione  $\Omega$  dello spazio 3–dimensionali è semplicemente una funzione che ad ogni punto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  di  $\Omega$  associa un vettore  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ , che spesso conviene pensare come vettore applicato al punto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  [MMS, p. 167]. Per definire il campo  $\mathbf{F}$  nel punto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  bisogna specificare le tre componenti  $F_1, F_2, F_3$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

che sono funzioni scalari (a valori reali 1–dimensionali) di tre variabili. Utilizzando i versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  degli assi possiamo anche scrivere:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

### 8.1.1 Derivate in una direzione, derivate parziali, gradiente

**PREREQUISITI:** La derivata in una dimensione; la formula di approssimazione dei tre punti; il prodotto interno di vettori.

Consideriamo una funzione  $f$  che ad ogni punto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  associa un numero reale  $f(x, y, z)$ . Fissiamo il punto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  ed un versore  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , e consideriamo i valori della funzione sulla retta di equazione parametrica  $t \mapsto \mathbf{x} + tu$  che passa per  $\mathbf{x}$  ed ha direzione  $u$  [MMS, p. 171–173]. Si ottiene così una funzione  $F$  della sola unica variabile  $t$ , definita da

$$F(t) = f(\mathbf{x} + tu)$$

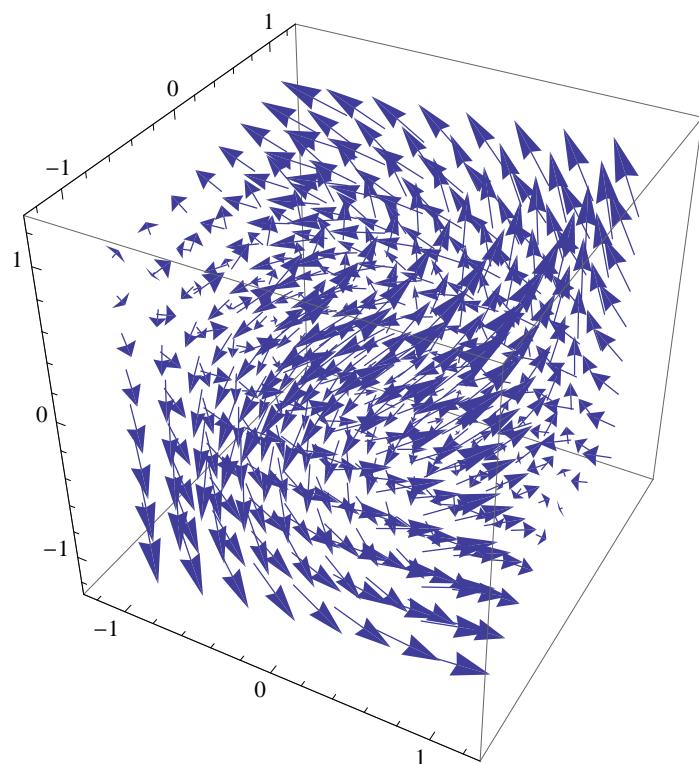


Figura 8.1: Illustrazione “a freccette” del campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ .

La derivata (ordinaria) di  $F$  in  $t = 0$ , cioè  $F'(0)$ , è detta la *derivata di  $f$  nella direzione  $u$* , che viene indicata col simbolo  $\partial f_u(\mathbf{x})$ , quindi, per definizione:

$$\partial f_u(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + tu) \right|_{t=0}$$

Le derivate nelle direzioni dei versori degli assi  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , si dicono semplicemente *derivate parziali* rispetto ad  $x, y, z$ , e si indicano rispettivamente con i simboli  $\partial_x f(\mathbf{x}), \partial_y f(\mathbf{x}), \partial_z f(\mathbf{x})$ , sempre che sia chiaro quali sono i nomi delle variabili, in formula:

$$\partial_x f(\mathbf{x}) = \partial f_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}), \quad \partial_y f(\mathbf{x}) = \partial f_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad \partial_z f(\mathbf{x}) = \partial f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

Si osservi che:

$$\begin{aligned} \partial_x f(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{i}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x + t, y, z) \right|_{t=0} \\ \partial_y f(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{j}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x, y + t, z) \right|_{t=0} \\ \partial_z f(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{k}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x, y, z + t) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

La conoscenza delle derivate parziali è molto utile perché consente di calcolare tutte le derivate nelle varie direzioni  $u$ . Infatti un'estensione del teorema di derivazione delle funzioni composte (che qui non discutiamo) consente di provare che

$$\begin{aligned} \partial f_u(\mathbf{x}) &= \partial_x f(\mathbf{x}) u_1 + \partial_y f(\mathbf{x}) u_2 + \partial_z f(\mathbf{x}) u_3 \\ &= (\partial_x f(\mathbf{x}), \partial_y f(\mathbf{x}), \partial_z f(\mathbf{x})) \cdot u \\ &= \nabla f(\mathbf{x}) \cdot u \end{aligned}$$

dove il vettore

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_x f(\mathbf{x}), \partial_y f(\mathbf{x}), \partial_z f(\mathbf{x}))$$

è detto il *gradiente* di  $f$  in  $\mathbf{x}$ .

## 8.2 Integrali di linea, di superficie, di volume

**PREREQUISITI:** L'integrale in una dimensione; la formula di approssimazione dei rettangoli; il prodotto interno di vettori.

### 8.2.1 Integrale di linea

Assumiamo come dati (in ingresso) (1) una *curva orientata*<sup>2</sup>  $\gamma$  in una regione  $\Omega$  dello spazio 3D, e (2) un campo vettoriale  $F(\mathbf{x})$  definito in ogni punto  $\mathbf{x}$  della regione  $\Omega$ . L'*integrale di linea del campo  $F$  lungo la curva orientata  $\gamma$*  è un *numero* (uno scalare) indicato con il simbolo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds, \quad \text{oppure semplicemente} \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$$

---

<sup>2</sup> Questo significa intuitivamente che è specificato il verso positivo di percorrenza sulla curva, come sulla retta.

e che ora definiremo.

Supponiamo che la curva  $\gamma$  sia “approssimabile” con una spezzata poligonale composta da un certo numero  $N$  di segmentini microscopici, che per comodità supporremo tutti della stessa lunghezza  $\Delta s$ . La direzione di ciascun segmentino è, per la regola dei tre punti, quella del versore tangente  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  alla curva nel punto  $\mathbf{x}$  centrale del segmentino. Il lavoro del campo dovuto allo spostamento sul segmentino è quindi il prodotto scalare del vettore campo  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  nel punto  $\mathbf{x}$  con il vettore di direzione  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  e lunghezza  $\Delta s$ , ossia

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \Delta s$$

Sommiamo tutti questi lavori sui vari  $N$  segmentini; otteniamo:

$$\sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \Delta s \quad (8.1)$$

dove la somma è estesa a tutti i punti  $\mathbf{x}$  che sono i centri degli  $N$  segmentini. Allora l'integrale di linea del campo  $F$  lungo la curva orientata  $\gamma$  è il valore asintotico per  $N \rightarrow \infty$  della somma nella (8.1):

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \Delta s \quad (8.2)$$

Osserviamo che dalla 8.2 si ottiene che:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds &\approx \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \Delta s \\ &= (N \Delta s) \cdot \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \\ &= \{\text{lunghezza della curva } \gamma\} \cdot \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \rangle \end{aligned}$$

dove  $\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \rangle$  è niente altro che la *media aritmetica* degli  $N$  prodotti scalari  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x})$  ottenuti al variare di  $\mathbf{x}$  fra i punti medi degli  $N$  segmentini. Questo mostra che l'integrale di linea di un campo lungo una curva orientata di cui si conosce la lunghezza può essere valutato numericamente con un metodo di campionamento Monte Carlo.

Supponiamo infatti di avere un *campione rappresentativo*  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  di dimensione  $n \ll N$  di punti della curva, *uniformemente distribuito*.<sup>3</sup> Allora

$$\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}_j)$$

e quindi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds \approx \{\text{lunghezza della curva}\} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}_j) \quad (8.3)$$

---

<sup>3</sup> Questo significa che la *probabilità* che uno di questi punti cada su un intervallino della curva dipende solo sulla lunghezza dell'intervallino e non dalla sua posizione sulla curva.

### 8.2.2 Integrale di superficie

Assumiamo come dati (in ingresso) (1) una *superficie orientata*<sup>4</sup>  $\sigma$  in una regione  $\Omega$  dello spazio 3D, e (2) un campo vettoriale  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  definito in ogni punto  $\mathbf{x}$  della regione  $\Omega$ . L'*integrale di superficie del campo  $F$  attraverso la superficie orientata  $\sigma$*  è un *numero* (uno scalare) indicato con il simbolo:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA, \quad \text{oppure semplicemente } \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$$

e che ora definiremo.

Supponiamo che la superficie  $\sigma$  sia “approssimabile” con una “pavimentazione” poligonale composta da un certo numero  $N$  di piastrelle microscopiche, che per comodità supporremo tutte della stessa area  $\Delta A$ . Ogni piastrella giace nel piano ortogonale al versore  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  calcolato nel punto  $\mathbf{x}$  centrale della piastrella.

Come prima cosa definiamo il *flusso del campo* attraverso una piastrella infinitesima centrata in  $\mathbf{x}$ :<sup>5</sup> è il prodotto scalare del vettore campo  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  nel punto  $\mathbf{x}$  con il vettore di direzione  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  e lunghezza  $\Delta A$ , ossia

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \Delta A$$

Sommiamo tutti questi flussi attraverso le varie  $N$  piastrelline; otteniamo:

$$\sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \Delta A \tag{8.4}$$

dove la somma è estesa a tutti i punti  $\mathbf{x}$  che sono i centri delle  $N$  piastrelline. Allora l'integrale di superficie del campo  $F$  attraverso la superficie orientata  $\sigma$  è il valore asintotico per  $N \rightarrow \infty$  della somma nella (8.4):

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \Delta A \tag{8.5}$$

---

<sup>4</sup> Questo significa intuitivamente che è specificato il verso (positivo) di “attraversamento” della superficie, indicato in ogni punto  $\mathbf{x}$  da un versore  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  ortogonale alla superficie.

<sup>5</sup> Per capire il concetto di *flusso* di un campo vettoriale attraverso una superficie, conviene pensare che  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  sia la velocità, ad esempio in metri al secondo, di un grande fiume nel punto  $\mathbf{x}$  sotto il pelo dell'acqua. Immaginando una piccola racchetta da tennis nel punto  $\mathbf{x}$  il flusso del fiume attraverso la racchetta è esattamente la quantità d'acqua che la attraversa in una certa unità di tempo, ad esempio misurata in metri cubi al secondo. Se la racchetta è tenuta perpendicolare alla corrente, il flusso è il prodotto dell'area della racchetta misurata in metri quadrati per  $|\mathbf{F}(\mathbf{x})|$ , che è la distanza percorsa dal fiume in quel punto in un secondo. Altrimenti, se la racchetta è inclinata rispetto alla corrente di un angolo  $\alpha$ , il flusso viene ridotto di un fattore pari a  $\cos(\alpha)$ . In generale quindi, il flusso  $\phi$  di un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  attraverso una superficie così piccola da potersi ritenere che (a) sia piana e che (b)  $\mathbf{F}$  sia costante, pari quindi al valore  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  nel “centro”  $\mathbf{x}$  della superficie, è

$$\phi = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} A$$

dove  $\mathbf{n}$  è un versore ortogonale alla superficie che indica con suo verso il verso in cui vogliamo misurare il flusso, e dove  $A$  è l'area della superficie stessa.

Osserviamo che dalla 8.5 si ottiene che:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) dA &\approx \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \Delta A \\ &= (N \Delta A) \cdot \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ &= \{\text{area della superficie } \sigma\} \cdot \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \rangle \end{aligned}$$

dove  $\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \rangle$  è niente altro che la *media aritmetica* degli  $N$  prodotto scalari  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  ottenuti al variare di  $\mathbf{x}$  fra i punti medi delle  $N$  piastrelle. Questo mostra che l'integrale di superficie di un campo attraverso una superficie orientata di cui si conosce l'area può essere valutato numericamente con un metodo di campionamento Monte Carlo.

Supponiamo infatti di avere un *campione rappresentativo*  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  di dimensione  $n \ll N$  di punti della superficie, *uniformemente distribuito*.<sup>6</sup> Allora

$$\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_j)$$

e quindi

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA \approx \{\text{area della superficie}\} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_j) \quad (8.6)$$

### 8.2.3 Integrale di volume

Dei tipi di integrale che introduciamo in questo capitolo, l'integrale di volume è il più semplice. Assumiamo come dati (in ingresso) (1) una *regione*  $\omega$  dello spazio, e (2) una funzione scalare  $f(\mathbf{x})$  definita in ogni punto  $\mathbf{x}$  della regione  $\omega$ . L'*integrale di volume della funzione f sulla regione ω* è un *numero* (uno scalare) indicato con il simbolo:

$$\iiint_{\omega} f(\mathbf{x}) dV, \quad \text{oppure semplicemente} \quad \iiint_{\omega} \mathbf{f} dV$$

e che ora definiremo.

Supponiamo che la regione  $\omega$  sia “approssimabile” con una “costruzione” (del tipo di quelle della Lego) composta da un certo numero  $N$  di mattoncini cubici microscopici, che per comodità supporremo tutti dello stesso volume  $\Delta V$ . Calcoliamo le funzione  $f$  nel centro  $\mathbf{x}$  di ciascun cubetto, e lo moltiplichiamo per il volume del cubetto, ottenendo per ogni cubetto un numero  $f(\mathbf{x}) \Delta V$ , Sommiamo tutti questi numeri sui vari  $N$  cubetti; otteniamo:

$$\sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \Delta V \quad (8.7)$$

---

<sup>6</sup> Questo significa che la *probabilità* che uno di questi punti cada su una piastrellina della pavimentazione dipende solo dall'area della piastrellina e non dalla sua posizione sulla superficie.

dove la somma è estesa a tutti i punti  $\mathbf{x}$  che sono i centri degli  $N$  cubetti. Allora l'integrale di volume della funzione  $f$  sulla regione  $\omega$  è il valore asintotico per  $N \rightarrow \infty$  della somma nella (8.7):

$$\iiint_{\omega} f(\mathbf{x}) dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \Delta V \quad (8.8)$$

Osserviamo che dalla 8.8 si ottiene che:

$$\begin{aligned} \iiint_{\omega} f(\mathbf{x}) dV &\approx \sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \Delta V \\ &= (N \Delta V) \cdot \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ &= \{\text{volume della regione } \omega\} \cdot \langle f \rangle \end{aligned}$$

dove  $\langle f \rangle$  è niente altro che la *media aritmetica* degli  $N$  valori  $f(\mathbf{x})$  ottenuti al variare di  $\mathbf{x}$  fra i punti centrali degli  $N$  mattoncini cubici. Questo mostra che l'integrale di volume di una funzione su una regione di cui si conosce il volume può essere valutato numericamente con un metodo di campionamento Monte Carlo.

Supponiamo infatti di avere un *campione rappresentativo*  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  di dimensione  $n \ll N$  di punti della regione, *uniformemente distribuito*.<sup>7</sup> Allora

$$\langle f \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}_j)$$

e quindi

$$\iiint_{\omega} f(\mathbf{x}) dV \approx \{\text{volume della regione}\} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}_j) \quad (8.9)$$

### 8.3 Il Teorema della divergenza

**PREREQUISITI:** Le derivate parziali; la formula di approssimazione dei tre punti; i concetti di integrale di superficie e di volume.

Consideriamo ora un punto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  nello spazio, e fissiamo un cubetto microscopico<sup>8</sup> di centro il punto  $\mathbf{x}$  e di spigolo  $2h$ , posizionato con le fecce parallele ai piani coordinati. Sia  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  un campo vettoriale: calcoliamo il *flusso* di  $\mathbf{F}$  attraverso la superficie del cubo, dall'interno verso l'esterno.<sup>9</sup> Consideriamo per prime due facce opposte, ad esempio quelle di centro  $(x + h, y, z)$

<sup>7</sup> Questo significa che la *probabilità* che uno di questi punti cada in un cubetto dipende solo dal volume del cubetto e non dalla sua posizione nella “costruzione”.

<sup>8</sup> Cf. il Capitolo 2 del testo MMS. Il termine *microscopico*, in confronto con *macroscopico*, si riferisce ad un ordine di grandezza che è trascurabile nella scala di riferimento principale, la macroscopica. Se ad esempio si studiano mammiferi la cui dimensione tipica è dell'ordine del metro (scala macroscopica), si possono trascurare dimensioni dell'ordine del micron, come quelle di una singola cellula (scala microscopica). Se invece si studiano cellule (scala macroscopica) si possono trascurare le dimensioni delle molecole (scala microscopica).

<sup>9</sup> Nella metafora fisica del flusso d'acqua, questo presuppone che all'interno del cubo ci siano delle *sorgenti*, oppure dei *pozzi*, oppure tutte e due le cose.

e rispettivamente  $(x - h, y, z)$ , parallele quindi al piano  $YZ$ . Il flusso “uscente” dalle due facce microscopiche di area  $4h^2$  ciascuna è

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{F}(x + h, y, z) \cdot \mathbf{i} + \mathbf{F}(x - h, y, z) \cdot (-\mathbf{i})\} 4h^2 \\ = & \{F_1(x + h, y, z) - F_1(x - h, y, z)\} 4h^2 \\ = & \frac{F_1(x + h, y, z) - F_1(x - h, y, z)}{2h} 8h^3 \\ \approx & \partial F_1(x, y, z) V \end{aligned}$$

dove avviamo usato la formula dei tre punti e dove  $V = 8h^3$  è il volume del cubetto. Sommando i contributi delle altre due coppie di faccette, il flusso uscente dal cubetto è

$$\phi = \{\partial F_1(x, y, z) + \partial F_2(x, y, z) + \partial F_3(x, y, z)\} V$$

Pertanto converrà definire una grandezza 1-dimensionale

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial F_1(x, y, z) + \partial F_2(x, y, z) + \partial F_3(x, y, z)$$

detta la **divergenza** di  $\mathbf{F}$  in modo che risulti alla fine

$$\frac{\phi}{V} = (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) \quad (8.10)$$

Se ora consideriamo un volume limitato  $\mathcal{V}$  nello spazio, con un bordo dato da una superficie  $\sigma$ , è possibile approssimare il volume “cubettandolo” con cubetti microscopici del tipo precedentemente considerato. Su ciascun cubetto ripetiamo il calcolo precedente e sommiamo tutto. Sulle facce adiacenti, i flussi si annullano fra loro, per cui resta solo il flusso del campo verso l'esterno, attraverso la superficie  $\sigma$  del bordo, che è uguale (nella nostra approssimazione) alla somma

$$\sum_{\mathbf{x}} (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) V$$

dove la somma è estesa a tutti i centri  $\mathbf{x}$  dei cubetti considerati tutti dello stesso volume  $V$ . Ricordando i concetti di integrale di superficie e di integrale di volume della Sezione 8.2, abbiamo quindi il

**Teorema 8.3.1 (Teorema della divergenza)** *Se  $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale definito in una regione  $\mathcal{V}$  dello spazio 3D, racchiusa da una superficie chiusa  $\sigma$ , allora si ha*

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma = \iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) dV$$

dove  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  è il versore che definisce in ogni punto  $\mathbf{x}$  della superficie  $\sigma$  la direzione ortogonale “uscente” dalla superficie stessa.

In termini letterari:

*Il flusso di un campo vettoriale uscente da una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza sul volume racchiuso dalla superficie stessa.*

## 8.4 Il Teorema di Kelvin–Stokes

**PREREQUISITI:** La derivata in una direzione, come prodotto scalare del gradiente e della direzione; la formula di approssimazione dei tre punti; il prodotto esterno di vettori; i concetti di integrale di linea e di superficie.

Il teorema che ora presenteremo è dovuto a Sir William Thompson (Lord Kelvin). Il ruolo di Sir George Gabriel Stokes (1819–1903) in questo risultato è pressoché nullo. Stokes infatti apprese il teorema nel 1850 da una lettera inviatagli da Lord Kelvin, e il suo unico contributo fu di proporlo come problema d'esame a Cambridge. Si ignora se qualche studente lo abbia risolto.

Consideriamo un punto  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  nello spazio, e fissiamo un quadratino microscopico,<sup>10</sup> posizionato in modo arbitrario ma fissato, di centro il punto  $\mathbf{x}$  e di lato  $2h$ . Siano  $u, v$  i versori corrispondenti alle coppie di lati opposti. Fissiamo un cammino di percorrenza del bordo del quadrato, per esempio quello che parte dal punto  $\mathbf{x} + hu$ , punto medio di uno dei lati, e attraversa successivamente nell'ordine gli altri punti medi  $\mathbf{x} + hv$ ,  $\mathbf{x} - hu$ ,  $\mathbf{x} - hv$ . Sia ora  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  un campo vettoriale, e calcoliamo il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo il dato cammino di percorrenza del bordo del quadrato (percorso una volta sola e nel verso fissato).

La percorrenza del lato di punto medio  $\mathbf{x} + hu$  produce una lavorazione pari alla componente del campo nella direzione  $v$  del cammino su questo lato per la lunghezza  $2h$  del lato, cioè, ritenendo il campo costante nel lato microscopico,  $L_1 = [\mathbf{F}(\mathbf{x} + hu) \cdot v](2h)$ . Il lavoro sul lato opposto è  $L_3 = [\mathbf{F}(\mathbf{x} - hu) \cdot (-v)](2h)$ , e la somma dei due fornisce

$$L_1 + L_3 = [\mathbf{F}(\mathbf{x} + hu) - \mathbf{F}(\mathbf{x} - hu)] \cdot v \cdot 2h \approx [\partial_u \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot v] \cdot 4h^2$$

avendo usato la approssimazione della regola dei tre punti:

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + hu) - \mathbf{F}(\mathbf{x} - hu)}{2h} \approx \partial_u \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Aggiungendo il lavoro sui rimanenti lati otteniamo che il lavoro del campo lungo il bordo del quadrato (percorso una volta sola e nel verso fissato) è:

$$L = [\partial_u \mathbf{F} \cdot v - \partial_v \mathbf{F} \cdot u] A$$

dove  $A = 4h^2$  è l'area microscopica del quadrato.

La parte concettuale è fatta: ci resta solo da esprimere  $L$  in funzione delle variabili  $x, y, z$ . Chi studia può leggere questi calcoli una sola volta nella vita e poi ricordare il loro risultato finale, la formula (8.11). Esaminiamo per primo il termine  $\partial_u \mathbf{F} \cdot v$ . Introduciamo le componenti  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  delle direzioni dei lati. Si ha:

$$\begin{aligned} \partial_u \mathbf{F} \cdot v &= (\partial_u F_1, \partial_u F_2, \partial_u F_3) \cdot v \\ &= (\nabla F_1 \cdot u, \nabla F_2 \cdot u, \nabla F_3 \cdot u) \cdot v \\ &= (\partial_x F_1 u_1 + \partial_y F_1 u_2 + \partial_z F_1 u_3) v_1 \\ &\quad + (\partial_x F_2 u_1 + \partial_y F_2 u_2 + \partial_z F_2 u_3) v_2 \\ &\quad + (\partial_x F_3 u_1 + \partial_y F_3 u_2 + \partial_z F_3 u_3) v_3 \end{aligned}$$

---

<sup>10</sup> Cf. nota precedente a pie' di pagina.

Quindi (usando per il calcolo di  $\partial_v \mathbf{F} \cdot u$  lo scambio dei simboli  $u$  e  $v$ ):

$$\begin{aligned}\partial_u \mathbf{F} \cdot v - \partial_v \mathbf{F} \cdot u &= \partial_x F_1 u_1 v_1 + \partial_y F_1 u_2 v_1 + \partial_z F_1 u_3 v_1 \\ &\quad + \partial_x F_2 u_1 v_2 + \partial_y F_2 u_2 v_2 + \partial_z F_2 u_3 v_2 \\ &\quad + \partial_x F_3 u_1 v_3 + \partial_y F_3 u_2 v_3 + \partial_z F_3 u_3 v_3 \\ &\quad - \partial_x F_1 v_1 u_1 - \partial_y F_1 v_2 u_1 - \partial_z F_1 v_3 u_1 \\ &\quad - \partial_x F_2 v_1 u_2 - \partial_y F_2 v_2 u_2 - \partial_z F_2 v_3 u_2 \\ &\quad - \partial_x F_3 v_1 u_3 - \partial_y F_3 v_2 u_3 - \partial_z F_3 v_3 u_3\end{aligned}$$

Semplificando e raccogliendo:

$$\begin{aligned}\partial_u \mathbf{F} \cdot v - \partial_v \mathbf{F} \cdot u &= \partial_y F_1 u_2 v_1 + \partial_z F_1 u_3 v_1 \\ &\quad + \partial_x F_2 u_1 v_2 + \partial_z F_2 u_3 v_2 \\ &\quad + \partial_x F_3 u_1 v_3 + \partial_y F_3 u_2 v_3 \\ &\quad - \partial_y F_1 v_2 u_1 - \partial_z F_1 v_3 u_1 \\ &\quad - \partial_x F_2 v_1 u_2 - \partial_z F_2 v_3 u_2 \\ &\quad - \partial_x F_3 v_1 u_3 - \partial_y F_3 v_2 u_3 \\ &= \partial_y F_3 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + \partial_z F_2 (u_3 v_2 - u_2 v_3) \\ &\quad + \partial_x F_3 (u_1 v_3 - u_3 v_1) + \partial_z F_1 (u_3 v_1 - u_1 v_3) \\ &\quad + \partial_y F_1 (u_2 v_1 - u_1 v_2) + \partial_x F_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2) n_1 + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3) n_2 + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) n_3\end{aligned}$$

avendo ritrovato nelle parentesi le componenti (o i loro opposti) del prodotto esterno

$$u \times v = \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

che è un vettore ortogonale al quadratino, orientato con la regola della mano sinistra. Pertanto converrà definire un vettore

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2) \mathbf{i} + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3) \mathbf{j} + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \mathbf{k}$$

detto il **rotore** di  $\mathbf{F}$  in modo che risulti alla fine

$$\frac{L}{A} = (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (8.11)$$

Se ora consideriamo una superficie  $\sigma$  nello spazio, con un bordo dato da una curva  $\gamma$ , è possibile approssimare la superficie “quadrettando” con quadratini microscopici del tipo precedentemente considerato. Su ciascun quadratino ripetiamo il calcolo precedente e sommiamo tutto. Sui bordi adiacenti, i lavori si annullano fra loro, per cui resta solo il lavoro del campo lungo il cammino  $\gamma$  del bordo, che è uguale (nella nostra approssimazione) alla somma

$$\sum_{\mathbf{x}} (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} A$$

dove la somma è estesa a tutti i centri  $\mathbf{x}$  dei quadratini considerati. Ricordando i concetti di integrale di linea e di integrale di superficie della Sezione 8.2, abbiamo quindi il

**Teorema 8.4.1 (Teorema di Kelvin–Stokes)** *Se  $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale in una regione  $\Omega$  dello spazio 3D, e se si considera una superficie  $\sigma$  con un bordo  $\gamma$  contenuta nella regione  $\Omega$ , allora si ha*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\gamma = \iint_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma$$

dove  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  è il versore che definisce in ogni punto  $\mathbf{x}$  del bordo  $\gamma$  la direzione del cammino, e dove  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  è il versore che definisce in ogni punto  $\mathbf{x}$  della superficie  $\sigma$  la direzione ortogonale alla superficie stessa, coerentemente con la regola della mano destra.

In termini letterari:

*Il lavoro di un campo vettoriale lungo una curva chiusa è uguale al flusso del rotore attraverso una “qualunque” superficie che abbia la curva come bordo (assumendo le opportune orientazioni).*

## 8.5 L'operatore formale “nabla”

Nelle definizioni del gradiente, della divergenza e del rotore abbiamo utilizzato l’“operatore simbolico” *nabla*, definito simbolicamente da:

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

Se si pensa a  $\nabla$  come a un vettore a 3 componenti, e lo si moltiplica per una funzione scalare  $f$  (prodotto di un vettore per uno scalare) si ottiene

$$\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$$

cioè il *gradiente* di  $f$ .

Se si prende il prodotto scalare di  $\nabla$  con un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  (prodotto interno, o prodotto scalare, di due vettori) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial F_1 + \partial F_2 + \partial F_3$$

cioè la *divergenza* di  $\mathbf{F}$ .

Se infine si prende il prodotto esterno di  $\nabla$  con un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  (prodotto esterno, o prodotto vettoriale, di due vettori) si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)$$

cioè il *rotore* di  $\mathbf{F}$ .

Alcuni matematici (o fisici) che hanno in antipatia il simbolo  $\nabla$  preferiscono scrivere  $\text{grad } f$ ,  $\text{div } \mathbf{F}$ ,  $\text{rot } \mathbf{F}$ , rispettivamente per il gradiente di  $f$ , per la divergenza di  $\mathbf{F}$  e per il rotore di  $\mathbf{F}$ . Infine, alcuni anglosassoni scrivono  $\text{curl } \mathbf{F}$  per indicare il rotore.

## 8.6 Esempi

### 8.6.1 Campi centrali

Un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è *centrale* se

- Il campo  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è definito in ogni punto  $\mathbf{x}$  con la sola eccezione dell'origine.
- Il modulo  $|\mathbf{F}(\mathbf{x})|$  del campo nel punto  $\mathbf{x}$  dipende solo dalla distanza di  $\mathbf{x}$  dalla origine, ed il verso del campo nel punto  $\mathbf{x}$  coincide con il versore di  $\mathbf{x}$ , cioè esiste una funzione  $\Phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})| = \Phi(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left( \frac{\Phi(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} x, \frac{\Phi(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} y, \frac{\Phi(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} z \right)$$

**Proposizione 8.6.1** *Il rotore di un campo centrale  $\mathbf{F}$  è  $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo  $F_3(x, y, z) = (\Phi(\|\mathbf{x}\|)/\|\mathbf{x}\|) z$ . La funzione  $\Phi(\|\mathbf{x}\|)/\|\mathbf{x}\|$  è una funzione  $g$  di  $x^2 + y^2 + z^2$ , ossia  $F_3(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2) z$ , e si ha allora, per la formula di derivazione delle funzioni composte,

$$\partial_y F_3(x, y, z) = g'(x^2 + y^2 + z^2) 2y z$$

Analogamente

$$\partial_z F_2(x, y, z) = g'(x^2 + y^2 + z^2) y 2z$$

Quindi  $\partial_y F_3 - \partial_z F_2 = 0$ . Analogamente per le altre due componenti.  $\square$

**Esempio 8.6.2 (inverse-square law)** Consideriamo il campo centrale corrispondente alla funzione  $\Phi(r) = 1/r^2$ , cioè

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Essendo un campo centrale il rotore è  $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$ . Per questo campo, in ogni punto  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  dove il campo è definito si ha che la divergenza è  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ . Infatti, usando la funzione  $g$  della Proposizione precedente, si ha, ponendo  $s = x^2 + y^2 + z^2$ , che  $g(s) = 1/s^{3/2}$ , e quindi, per il teorema di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} \partial_x F_1(x, y, z) &= \partial_x [g(s) x] \\ &= g'(s) 2x \cdot x + g(s) \cdot 1 \\ &= \frac{-3}{2s^{5/2}} 2x^2 + 1/s^{3/2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{-3}{2s^{5/2}} 2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{s^{3/2}} \\ &= \frac{-3s}{s^{5/2}} + \frac{3}{s^{3/2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Indichiamo ora con  $\{\|\mathbf{x}\| = 1\}$  la superficie sferica chiusa  $\sigma$  di centro l'origine e raggio 1, ed indichiamo con  $\mathcal{V} = \{0 < \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$  la regione 3D racchiusa della

superficie  $\sigma$  tranne l'origine. Calcoliamo il flusso di  $\mathbf{F}$  uscente da  $\sigma$ : in ogni punto  $\mathbf{x}$  della sfera il versore ortogonale alla sfera ed il campo  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  hanno entrambi modulo uguale a 1 e la stessa direzione, quindi il loro prodotto scalare è costante uguale a 1. Quadrettando la sfera in quadretti microscopici, moltiplicando l'area di ciascun quadretto per 1 e sommando tutto, si ottiene

$$1 \cdot \sum \{\text{aree dei quadretti}\} = 1 \cdot \text{area della sfera di raggio } 1 = 4\pi$$

Si ha quindi, visto che è  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  in ogni punto di  $\mathcal{V}$ :

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma = 4\pi \neq \iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) dV = 0$$

*Questo risultato non è in contraddizione con il teorema della divergenza, in quanto la superficie sferica  $\sigma$  non è il “bordo” della regione  $\mathcal{V}$ : infatti la superficie sferica  $\sigma$  racchiude anche l'origine che non è un punto di  $\mathcal{V}$ .*

Talvolta, si usa introdurre un **simbolo**  $\delta(\mathbf{x})$ , detto *delta di Dirac*, tale che:

- $\delta(\mathbf{x}) = 0$  se  $\mathbf{x} \neq 0$ , e, **simbolicamente** :
- $\iiint_{\mathcal{P}} \delta(\mathbf{x}) d\mathcal{P} = 1$ , dove  $\mathcal{P} = \{\|\mathbf{x}\| \leq 1\}$  è tutta la regione 3D racchiusa della superficie  $\sigma$ , compresa l'origine.

In questo modo si può scrivere *l'equazione simbolica* :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi \delta$$

che ci dice che

- $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$  se  $\mathbf{x} \neq 0$  (coerentemente con i calcoli precedenti):
- $\iiint_{\mathcal{P}} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathcal{P} = 4\pi$

dove la integranda non è più una funzione ordinaria, ma una scrittura simbolica “definita” per tutti i punti della regione  $\mathcal{P}$  inclusa l'origine, che fa “valere in modo simbolico” anche in questo caso il teorema della divergenza.

**Esercizio 8.6.3** Consideriamo la superficie cubica  $\kappa$  che è il bordo del cubo di spigolo 2:

$$\{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

Il flusso uscente dalla superficie cubica  $\kappa$  è uguale al flusso uscente dalla superficie sferica  $\sigma$ : basta applicare il teorema della divergenza alla regione 3D racchiusa fra le due superfici.

**Esempio 8.6.4 (*inverse law*)** Consideriamo il campo centrale corrispondente alla funzione  $\Phi(r) = 1/r$ , cioè

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

Essendo un campo centrale il rotore è  $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$ . Per questo campo, in ogni punto  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  dove il campo è definito si ha, facendo i calcoli, che la divergenza non è nulla ma è pari a:

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se calcoliamo il flusso uscente dalla superficie sferica  $\sigma$ , esattamente con gli stessi calcoli dell'esempio precedente si ha:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma = 4\pi \approx 12.5664$$

Se invece calcoliamo il flusso uscente dalla superficie cubica  $\kappa$ , ad esempio con un metodo Monte Carlo, con il codice *Mathematica*:

```
Phi[r_] := 1/r;
F[{x_,y_,z_}] := (Phi[Sqrt[x^2+y^2+z^2]] * {x,y,z})/Sqrt[x^2+y^2+z^2];
n = 25000;
r := Table[Random[Real, {-1, 1}], {n}];
faccia = Transpose[{Table[1, {n}], r, r}];
flusso = (6 * (4 * Plus @@ Transpose[F /@ faccia][[1]]))/n
```

otteniamo il valore:

$$\iint_{\kappa} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\kappa \approx 15.3545$$

La differenza rispetto al flusso uscente dalla superficie sferica  $\sigma$ , che è pari a  $4\pi$ , dipende qui dal fatto che nella regione 3D racchiusa fra le due superfici  $\kappa$  e  $\sigma$  la divergenza del campo *non è nulla*.

### 8.6.2 Altri esempi (campi non centrali)

**Esempio 8.6.5** Consideriamo il campo (non centrale):

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

Facendo i laboriosi calcoli, si ottiene che il rotore è

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = \left( -\frac{2(x+y)z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{2(x-y)z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, -\frac{2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)$$

Calcolando il prodotto scalare del rotore  $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z)$  con il vettore normale alla sfera  $\sigma$  nel punto  $(x, y, z)$ , che è evidentemente:

$$\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x, y, z)$$

si ha, dopo laboriose semplificazioni, che

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) = -2z$$

Consideriamo ora come superficie  $\sigma$  la cupola semisferica di centro l'origine e di raggio 1, situata nel semispazio  $z \geq 0$ , che ha come bordo la curva chiusa  $\gamma$  data dalla circonferenza di centro l'origine e di raggio 1 situata nel piano  $z = 0$ ,

rappresentata nella Figura 8.2–(a). Per calcolare il flusso del rotore del campo attraverso la cupola, possiamo utilizzare un metodo Monte Carlo. Distribuiamo uniformemente un insieme finito  $\mathcal{P}$  di  $n$  punti  $\mathbf{x}$  sulla superficie  $\sigma$ , come nella Figura 8.2–(b); si ha allora:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma &\approx \{\text{area di } \sigma\} \cdot \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ &= \{2\pi\} \cdot \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}} (-2z) \\ &= \{2\pi\} \cdot (-2) \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}} z = -2\pi \end{aligned}$$

visto che dalla geometria elementare si sa che il valor medio delle quote di una cupola semisferica appoggiata a terra è pari a metà del raggio, cioè in questo caso  $\frac{1}{n} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}} z = 1/2$ .

Un'applicazione puramente del metodo Monte Carlo con  $n = 100\,000$  punti di campionamento fornisce in questo caso come valore del flusso:  $-6.28238$  (cf. Figura 8.2–(b)).

Per verificare il Teorema di Kelvin–Stokes dobbiamo calcolare il lavoro

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\gamma$$

Il versore tangente alla circonferenza  $\gamma$  nel punto  $(x, y, 0)$  è  $(-y, x, 0)$ , per cui, questa volta con calcoli facilissimi:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) = -1$$

e quindi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\gamma = \{\text{lunghezza di } \gamma\} \cdot (-1) = -2\pi$$

per cui in questo esempio il teorema del rotore è verificato: entrambi gli integrali valgono  $-2\pi$ . Ora proprio per il teorema del rotore, si ha che

$$\iint_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma = -2\pi$$

non solo se  $\sigma$  è la cupola semisferica sopra considerata, ma per ogni superficie che abbia  $\gamma$  come bordo, come ad esempio quella che si ottiene “gonfiando” la cupola fino a farla diventare, ad esempio, una sorta di “mongolfiera” come quella illustrata nella Figura 8.3–(a). Il calcolo diretto del flusso del rotore attraverso la mongolfiera non è banale. Possiamo come al solito ricorrere ad un metodo Monte Carlo, distribuendo uniformemente  $n = 100\,000$  punti sulla mongolfiera, come rappresentato nella Figura 8.3–(b); calcoliamo poi la media dei prodotti scalari del rotore, calcolato in questi punti, con il versore esterno alla mongolfiera applicato negli stessi punti, e la moltiplichiamo per l’area della mongolfiera, calcolata con le formule della geometria elementare. Con il codice *Mathematica* seguente si ottiene come risultato numerico

$$\iint_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma = -6.28471$$

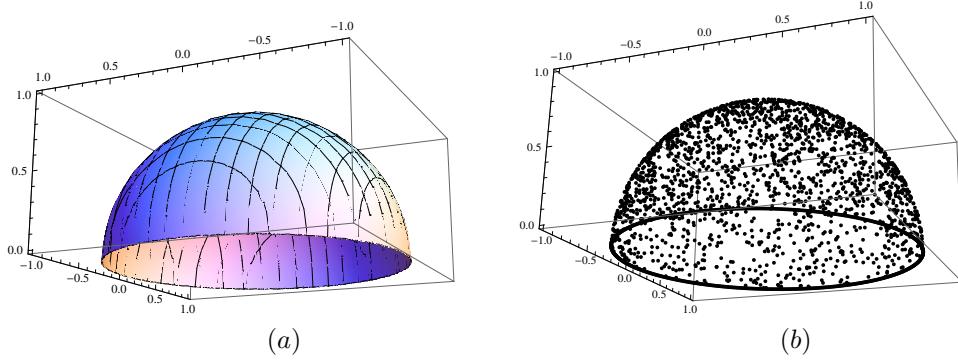


Figura 8.2: Illustrazione del teorema del rotore, I. (a) La superficie  $\sigma$  assegnata: una semisfera di centro l'origine e raggio  $R = 1$ , il cui bordo è la circonferenza  $\gamma$  di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ . (b) I punti campionati sulla superficie per il calcolo del flusso attraverso la superficie con un metodo Monte Carlo (sono rappresentati 2000 punti, su un totale di  $n = 100\,000$  punti utilizzati). I punti del bordo sono evidenziati per una migliore visualizzazione, ma non sono punti di campionamento.

---

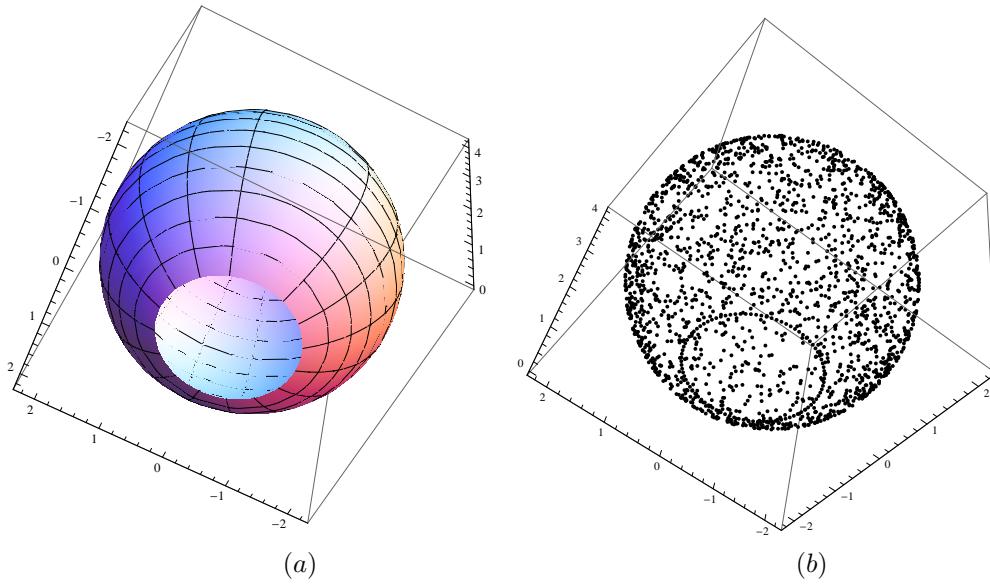


Figura 8.3: Illustrazione del teorema del rotore, II. (a) La superficie  $\sigma$  assegnata: una ampia calotta sferica di centro  $(0, 0, 2)$  e raggio  $R = \sqrt{5}$ , “tagliata” a livello  $z = 0$ , quindi con bordo la stessa circonferenza  $\gamma$  di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  di cui alla Figura 8.2. (b) I punti campionati sulla superficie per il calcolo del flusso attraverso la superficie con un metodo Monte Carlo (sono rappresentati 2000 punti, su un totale di  $n = 100\,000$  punti utilizzati). I punti del bordo sono evidenziati per una migliore visualizzazione, ma non sono punti di campionamento.

---

che è in buon accordo col valore  $-2\pi = -6.28319\dots$

Codice Mathematica.

```

ClearAll["Global`*"];
<< "VectorAnalysis`";
F[{x_, y_, z_}] := {y/(x^2+y^2+z^2), -(x/(x^2+y^2+z^2)),
  z/(x^2+y^2+z^2)};
rot[{x_,y_,z_}] = Simplify[Curl[F[{x,y,z}], Cartesian[x,y,z]]];
n = 100000;
zc = 2;
R = Sqrt[1+zc^2];
euc1[{x_, y_, z_}] := Sqrt[x^2+y^2+z^2];
eucR[{x_, y_, z_}] := Sqrt[x^2+y^2+z^2]/R;
r := Table[Random[Real, {-R, R}], {n}];
sf = Transpose[{r, r, r}];
sff = Select[sf, #1[[1]]^2+#1[[2]]^2+#1[[3]]^2 <= R^2 & ];
nn = Length[sff];
sfff = (sff/eucR /@ sff)+Table[{0, 0, zc}, {nn}];
sffff = Select[sfff, #[[3]] >= 0 & ];
nnnn = Length[sffff];
(* inizio visualizzazione *)
gamma = Table[{Cos[a], Sin[a], 0}, {a, 0, 2 Pi, .07}];
Graphics3D[Point[Join[Take[sffff, {1, 2000}], gamma]],
  Axes -> True, BoxRatios -> Automatic]
(* fine visualizzazione *)
vect = sffff - Table[{0, 0, zc}, {nnnn}];
norm = vect/Map[euc1, vect];
rrot = Map[rot, sffff];
media = Sum[rrot[[j]] . norm[[j]], {j, 1, nnnn}]/nnnn ;
areacalotta = 2. Pi R (R - zc);
areamongolfiera = 4. Pi R^2 - areacalotta;
flusso = areamongolfiera*media

```