

Matematica e Statistica con R

Federico Comoglio e Maurizio Rinaldi

7 febbraio 2016

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Per accedere ai dati richiesti in questa parte occorre caricare il pacchetto allegato `libroR`. Per farlo conviene scaricare il file `libroR_0.0.tgz` sul proprio computer e selezionare il menu `Install`

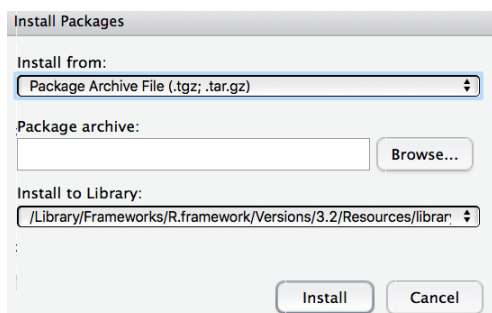


Figura 1.1: Procedura di installazione del pacchetto

Il file viene poi localizzato usando `Browse...`

Alternativamente si può utilizzare direttamente il comando

```
> install.packages("libroR_0.0.tgz", repos = NULL, type = .Platform$pkgType)
```

a patto di impostare la *working directory* precisamente dove si trova il file. Il pacchetto va poi successivamente caricato con il comando

```
> library("libroR")
```

Precisiamo inoltre che questa è una versione assolutamente preliminare.

Capitolo 2

Strutture di dati

Per visualizzare un oggetto di R si può usare il comando `print` o il comando `cat` che fornisce spesso un risultato migliore. `str` visualizza la struttura di un oggetto mentre `head` o `tail` ne visualizzano l’inizio o la fine.

2.1 I diversi tipi di vettori

2.1.1 Vettori di caratteri/stringhe

Una stringa di testo è una collezione di caratteri; in genere, una stringa è resa riconoscibile dall’essere racchiusa tra virgolette.

Operare con le stringhe

Oltre alle virgolette, vi sono numerosi altri caratteri speciali che possono apparire in una stringa. I più comuni sono “\t” per TAB, “\n” per una nuova linea e “\” per un singolo *backslash*. Quest’ultimo carattere è un carattere di *escape* e consente una lettura diversa di quanto lo segue. Per esempio

```
> cat("\"sin\"")
```

```
"sin"
```

```
> nchar("\"sin\"")
```

```
[1] 5
```

```
> cat("\\")
```

```
\
```

```
> cat("ora a capo\nsono a capo?")
```

```
ora a capo
sono a capo?
```

```
> cat("ora spazio\triprendo")
```

```
ora spazio      riprendo
```

La funzione `nchar`, che conta il numero di caratteri di una stringa, non includerà quindi il carattere di *escape* nel totale dei caratteri. Ad esempio:

```
> "Tab\t"
```

```
[1] "Tab\t"
```

```
> cat("Tab\t")
```

```
Tab
```

```
> nchar("Tab\t")
```

```
[1] 4
```

Succede spesso di dover lavorare in modo automatico con stringhe di testo, anche nello scrivere indirizzi di rete o cartelle di lavoro. In R diversi comandi consentono la generazione, manipolazione e stampa di una o più stringhe di testo¹. Consideriamo inizialmente una singola frase.

```
> x="lavorare con le stringhe"
```

Possiamo verificarne la classe e determinare il numero di caratteri di `x`

```
> class(x)
```

```
[1] "character"
```

```
> nchar(x)
```

```
[1] 24
```

e anche considerare sottostringhe

```
> substr(x,3,8)
```

```
[1] "vorare"
```

o abbreviazioni ottenibili con il comando `abbreviate`

```
> abbreviate("Mario Rossi",4)
```

```
Mario Rossi  
"MrRs"
```

Certi oggetti possono essere convertiti a stringhe: per esempio il numero 2 può essere visto come una stringa e riconvertito a numero.

¹Per un uso più specifico si può consultare il pacchetto `biostrings`.


```
> i=2;toString(i)
```

```
[1] "2"
```

```
> as.numeric(toString(i))
```

```
[1] 2
```

Alcune stringhe molto frequenti sono le lettere dell'alfabeto, maiuscole o minuscole

```
> letters[1:10]
```

```
[1] "a" "b" "c" "d" "e" "f" "g" "h" "i" "j"
```

```
> LETTERS[1:10]
```

```
[1] "A" "B" "C" "D" "E" "F" "G" "H" "I" "J"
```

o i mesi dell'anno (per esempio abbreviati in inglese)

```
> month.abb
```

```
[1] "Jan" "Feb" "Mar" "Apr" "May" "Jun" "Jul" "Aug" "Sep"
[10] "Oct" "Nov" "Dec"
```

Le stringhe possono poi essere “incollate” con il comando

```
> paste("a","b",sep="")
```

dove `sep` indica il separatore usato. E tutto insieme

```
> for (i in 1:5) cat(paste("a",toString(i),"\t",sep=""))
```

```
a1      a2      a3      a4      a5
```

Il comando può anche essere utilizzato su vettori. Per esempio

```
> paste(letters[1:10],1:10,sep="")
```

```
[1] "a1" "b2" "c3" "d4" "e5" "f6" "g7" "h8" "i9"
[10] "j10"
```

La *recycling rule* continua a valere

```
> paste(letters[1:3],1:10,sep="")
```

```
[1] "a1" "b2" "c3" "a4" "b5" "c6" "a7" "b8" "c9"
[10] "a10"
```

```
> paste(letters[1:3],1:12,sep="")
```

```
[1] "a1" "b2" "c3" "a4" "b5" "c6" "a7" "b8" "c9"
[10] "a10" "b11" "c12"
```

e giocando con `rep` si possono ottenere diverse combinazioni.

```
> paste(rep(letters[1:3], each=5), 1:15, sep="")
```

```
[1] "a1" "a2" "a3" "a4" "a5" "b6" "b7" "b8" "b9"
[10] "b10" "c11" "c12" "c13" "c14" "c15"
```

```
> paste(rep(letters[1:3], ntimes=5), 1:15, sep="")
```

```
[1] "a1" "b2" "c3" "a4" "b5" "c6" "a7" "b8" "c9"
[10] "a10" "b11" "c12" "a13" "b14" "c15"
```

Con l'opzione `collapse="x"` le stringhe vengono unite con separatore la stringa "x".

```
> paste(c("X", "Y"), 1:4, sep = "-", collapse = "--")
```

```
[1] "X-1--Y-2--X-3--Y-4"
```

Si noti il separatore - dell'operazione `paste` e - - dell'operazione `collapse`.

1. Inserisci il tuo cognome in una variabile 'cognome' ed il tuo nome in una variabile 'nome'. Crea una terza variabile 'nomecognome' che contenga entrambi separati da un TAB. Stampa a console la scritta "Good job" seguita dal valore di nomecognome.
2. Creare un elenco che contenga mesi e anno dal 2001 al 2010 nel seguente formato "tre lettere iniziali del mese-anno".
3. Costruire una tabella che contenga tutte le parole di 2 lettere.
4. Si consideri

```
> paste(letters[1:7], 1:7, sep="=")
```

Estendere la corrispondenza a tutto l'alfabeto.

5. Creare un elenco in cui a ciascun mese corrisponda il suo numero (a partire da gennaio).
6. Creare un elenco con nomi i mesi e valori il numero di giorni di ciascun mese.
7. Scrivere un elenco di 5 persone con le relative date di nascita nel formato anno-mese-giorno.

2.1.2 Vettori logici

I valori logici in R sono i valori `TRUE` e `FALSE` e corrispondono alla veridicità di un'affermazione. Per esempio

```
> 1:10 > 4
[1] FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
[10] TRUE
```

Ci fornisce simultaneamente i valori dei 10 confronti.

2.2 Vettori numerici e operazioni di aritmetica modulare

```
> 1:10
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

```
> resto=(1:10)%%4
> resto
[1] 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2
```

```
> quoziente=(1:10)%/%4
> quoziente
[1] 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2
```

```
> resto+4*quoziente
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

2.3 Matrici

Assegnati $n \times m$ ingressi possiamo costruire una matrice (ossia una tabella) con n righe e m colonne. Occorre solo riempire la matrice per righe o per colonne. Ad esempio:

```
> a<-matrix(letters[1:12],nrow=3,ncol=4)
> a
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] "a"  "d"  "g"  "j"
[2,] "b"  "e"  "h"  "k"
[3,] "c"  "f"  "i"  "l"
```

```
> class(a)
```

```
[1] "matrix"
```

Se i parametri hanno natura diversa vengono resi uniformi

```
> a<-matrix(c(1:6,letters[1:6]),nrow=3,ncol=4);a
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]  "1"  "4"  "a"  "d"
[2,]  "2"  "5"  "b"  "e"
[3,]  "3"  "6"  "c"  "f"
```

Con il parametro `byrow=T` il riempimento avviene per righe, anzichè per colonne.

```
> a<-matrix(1:12,nrow=3,ncol=4,byrow=T)
```

```
> a
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    2    3    4
[2,]    5    6    7    8
[3,]    9   10   11   12
```

Se i numeri sono insufficienti vengono *riciclati*

```
> a<-matrix(1:4,nrow=3,ncol=4)
```

```
> a
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    4    3    2
[2,]    2    1    4    3
[3,]    3    2    1    4
```

in modo pacifico se sono un sottomultiplo della dimensione della matrice o con qualche `warning` altrimenti.

```
> a<-matrix(2,nrow=3,ncol=4)
```

```
> a
```

Si possono anche definire gli ingressi attraverso opportune funzioni

```
> for(j in (1:4)) for(i in (1:3)) a[i,j]<-i^2+j
```

Per assegnare nomi alle righe e alle colonne:

```
colnames(matrice) = c(" nome1",
                      " nome2", ..., " nomen" )
rownames(matrice) = c(" nome1",
                      " nome2", ..., " nomen" )
```

```
> colnames(a)=c("c1","c2","c3","c4")
> rownames(a)=c("r1","r2","r3")
> a
```

	c1	c2	c3	c4
r1	1	4	3	2
r2	2	1	4	3
r3	3	2	1	4

Aggiungere righe o colonne

Per aggiungere una o più righe (o colonne) ad una matrice si possono usare i comandi (`rbind` e `cbind`)

```
> dim(a)
```

```
[1] 3 4
```

```
> rbind(a,letters[1:ncol(a)])
```

	c1	c2	c3	c4
r1	"1"	"4"	"3"	"2"
r2	"2"	"1"	"4"	"3"
r3	"3"	"2"	"1"	"4"
	"a"	"b"	"c"	"d"

```
> cbind(a,letters[1:nrow(a)])
```

	c1	c2	c3	c4	
r1	"1"	"4"	"3"	"2"	"a"
r2	"2"	"1"	"4"	"3"	"b"
r3	"3"	"2"	"1"	"4"	"c"

Possiamo anche effettuare semplici operazioni, come somma degli elementi delle righe o delle colonne

```
> colSums(a)
```

c1	c2	c3	c4
6	7	8	9

```
> rowSums(a)
```

r1	r2	r3
10	10	10

2.3.1 Operazioni con le matrici

Trasposizione

Per invertire righe e colonne di una matrice ossia per ottenere il trasposto di una matrice si usa il comando `t(matrice)`

```
> t(a)
```

	r1	r2	r3
c1	1	2	3
c2	4	1	2
c3	3	4	1
c4	2	3	4

Prodotto

Per la moltiplicazione di matrici (definita per ingressi numerici) si usa il simbolo `%*%`.

```
> b<-matrix(2,nrow=3,ncol=3)
> for(j in (1:3))
+ for(i in (1:3)) b[i,j]<-i+j+i^2
> b
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	3	4	5
[2,]	7	8	9
[3,]	13	14	15

Non è infatti possibile moltiplicare una matrice 3x4 con una 3x3. Possiamo però calcolare

```
> b%*%a
```

	c1	c2	c3	c4
[1,]	26	26	30	38
[2,]	50	54	62	74
[3,]	86	96	110	128

Determinante

Il determinante di una matrice quadrata si ottiene con il comando

$$\det(\text{matrice}) \quad (2.1)$$

```
> det(b)
```

```
[1] 1.887379e-14
```

Si noti che se eseguendo i calcoli a mano si trovano in alcuni casi risultati diversi da quelli di R. Per esempio la matrice in esame ha determinante 0 e 0 ne è anche un autovalore.

1. Creare una matrice 3×2 che abbia come ingressi i primi 6 numeri pari. Estendere la matrice aggiungendo due colonne contenenti i primi 6 numeri dispari. Calcolare e stampare la somma per riga e la somma per colonna. Modifica la matrice cambiando di segno la prima riga. Moltiplicare la matrice per 4.

2.4 I *dataframe*

I *dataframe* (in R `data.frame`) costituiscono in R la classe di oggetti fondamentali per la collezione di dati per una susseguente analisi statistica. Un *dataframe* è una collezione di vettori aventi egual lunghezza e allineati verticalmente. Un *dataframe* è diverso da una matrice in quanto le colonne sono vettori eventualmente di tipi diversi. Il comando generale per costruire *dataframe* a partire da vettori o liste è `data.frame`. Esso richiede come parametri i nomi dei vettori (colonna) da affiancare nella tabella. In generale si scrive:

```
data.frame(vettore1, vettore2, ..., vettoren)
```

dove tutti i vettori hanno la stessa lunghezza. Si noti la asimmetria (rispetto ad una matrice) nel ruolo di righe e colonne. Le colonne sono omogenee, lo stesso non si può dire per le righe. Le colonne sono le variabili analizzate, le righe le unità statistiche. Anche i vari comandi che vedremo rispettano tale differenza. Il *data.frame* classico da cui partiamo è `iris`

Per avere una stampa abbreviata

```
> head(iris)
```

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
4	4.6	3.1	1.5	0.2	setosa
5	5.0	3.6	1.4	0.2	setosa
6	5.4	3.9	1.7	0.4	setosa

```
> tail(iris)
```

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width
145	6.7	3.3	5.7	2.5
146	6.7	3.0	5.2	2.3
147	6.3	2.5	5.0	1.9
148	6.5	3.0	5.2	2.0
149	6.2	3.4	5.4	2.3
150	5.9	3.0	5.1	1.8
Species				
145	virginica			
146	virginica			
147	virginica			
148	virginica			
149	virginica			
150	virginica			

Il comando `str` consente una visualizzazione parziale che ci fornisce la struttura.

```
'data.frame':      150 obs. of  5 variables:
 $ Sepal.Length: num  5.1 4.9 4.7 4.6 5 5.4 4.6 5 4.4 4.9 ...
 $ Sepal.Width : num  3.5 3 3.2 3.1 3.6 3.9 3.4 3.4 2.9 3.1 ...
 $ Petal.Length: num  1.4 1.4 1.3 1.5 1.4 1.7 1.4 1.5 1.4 1.5 ...
 $ Petal.Width : num  0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.4 0.3 0.2 0.2 0.1 ...
 $ Species      : Factor w/ 3 levels "setosa","versicolor",...: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
```

Per esempio possiamo considerare il dataframe `d` definito come segue

```
> L3 <- LETTERS[1:3]
> d <- data.frame(cbind(x=1, y=1:10,
+ fac=sample(L3, 10, replace=TRUE)),
+ stringsAsFactors=TRUE)
> d
```

	x	y	fac
1	1	1	A
2	1	2	A
3	1	3	A
4	1	4	B
5	1	5	B
6	1	6	A
7	1	7	C
8	1	8	B
9	1	9	C
10	1	10	B

Si noti che anche in questo caso si usa la *recycling rule*

In quanto segue lavoreremo con il seguente *dataframe* che rappresenta i risultati di un'indagine svolta sugli studenti che nell'Anno Accademico 2007/2008 frequentavano il primo anno del corso di Laurea di Farmacia della Facoltà di Farmacia del Piemonte Orientale. Potete caricarlo in R dal pacchetto con il comando

```
> data(farmacia)
```

Il comando `colnames` consente di visualizzare o assegnare il nome alle colonne. Per esempio

```
> colnames(farmacia)
```

```
[1] "Sex"  "W"    "H"    "Eyes" "Hair" "Sh"   "hM"
[8] "hF"
```

Le varie colonne hanno dei nomi di facile interpretazione. Si noti anche che a fianco di variabili numeriche (W e H, peso-altezza ad esempio) sono presenti variabili *nominali* quali sesso (**Sex**) e colore degli occhi (**Eyes**). Per associare i nomi alle colonne alle varie colonne dobbiamo eseguire una operazione di collegamento con il comando `attach`,

```
> attach(farmacia)
```

A questo punto digitando il nome delle colonne appare il contenuto della colonna

```
> Sex
```

```
[1] F M M M F M F F M F F F F M F F F M M M F F F F
[26] F M F M M F F M M F F F F M F M M F F F F F F M
[51] M M F F M
Levels: F M
```

Le variabili nominali sono caratterizzate dal fatto che i loro valori (livelli, **levels**) non hanno significato numerico, anche se possono essere codificati con dei numeri. Ad esempio il sesso di una persona è una variabile nominale con due possibili valori, che sono stati indicati qui con la convenzione "F" per le femmine e "M" per i maschi. Se volessimo eliminare i livelli di una variabile nominale potremmo scrivere

```
> Sex=as.vector(Sex)
```

```
> Sex
```

```
[1] "F" "M" "M" "M" "F" "M" "F" "F" "M" "F" "F" "F"
[13] "F" "F" "M" "F" "F" "F" "M" "M" "M" "F" "F" "F"
[25] "F" "F" "M" "F" "M" "M" "F" "F" "M" "M" "F" "F"
[37] "F" "F" "M" "F" "M" "M" "F" "F" "F" "F" "F" "F"
[49] "F" "M" "M" "M" "F" "F" "M"
```

```
> class(Sex)
```

```
[1] "character"
```

Possiamo anche considerare il processo inverso e cambiare una variabile priva di livelli in una nominale

$$\text{factor}(\text{variabile}) \rightarrow \text{variabile}$$

Per definire i suoi livelli (ad esempio n) scriveremo:

$$\text{levels}(\text{variabile}) \leftarrow c(\text{nome}_1, \text{nome}_2, \dots, \text{nome}_n)$$

Per rendere la variabile `Sex` nominale con nomi dei livelli `F` e `M`) scriveremo:

```
> Sex=factor(Sex)
> Sex
```

```
[1] F M M M F M F F M F F F F M F F F M M M F F F F
[26] F M F M M F F M M F F F F M F M M F F F F F F M
[51] M M F F M
Levels: F M
```

Con il comando `detach` si può eliminare l'associazione creata tra colonne e nomi delle colonne. Consideriamo ora un *dataset* simile raccolto dagli studenti di Biotecnologie dello stesso anno Scrivendo

```
> class(biotec)
```

```
[1] "data.frame"
```

vediamo che anche `biotec` è un *dataframe*. Inoltre confrontando i nomi delle colonne di `farmacia` e di `biotec` possiamo verificare che sono essenzialmente uguali a meno di traduzione e eventuale abbreviazione. Possiamo creare un *dataframe* unico che raggruppi `biotec` e `farmacia`. Per farlo vorremmo incollare un *dataframe* sopra all'altro. A tal fine occorre uniformare i nomi delle colonne scrivendo per esempio

```
> colnames(biotec)=colnames(farmacia)
> studenti=rbind(farmacia,biotec)
> head(studenti)
```

	Sex	W	H	Eyes	Hair	Sh	hM	hF
1	F	62	1.75	CASTANI	CASTANI	40	1.77	1.78
2	M	64	1.84	CASTANI	CASTANI	43	1.72	1.80
3	M	80	1.70	CASTANI	CASTANI	44	1.65	1.73
4	M	80	1.75	CASTANI	NERI	44	1.66	1.78
5	F	50	1.70	NOCCIOLA	NERI	38	1.65	1.79
6	M	63	1.88	CASTANI	BIONDI	44	1.58	1.75

Si noti che il comando `rbind` incolla per riga, mentre l'analogo comando `cbind` incolla le colonne. Le intestazioni di riga di dati sono

```
> rownames(studenti)
```

```
[1] "1" "2" "3" "4" "5" "6" "7"
[8] "8" "9" "10" "11" "12" "13" "14"
[15] "15" "16" "17" "18" "19" "20" "21"
[22] "22" "23" "24" "25" "26" "27" "28"
[29] "29" "30" "31" "32" "33" "34" "35"
[36] "36" "37" "38" "39" "40" "41" "42"
[43] "43" "44" "45" "46" "47" "48" "49"
[50] "50" "51" "52" "53" "54" "55" "110"
[57] "210" "310" "410" "56" "61" "71" "81"
[64] "91" "101" "111" "121" "131" "141" "151"
[71] "161" "171" "181" "191" "201" "211" "221"
[78] "231" "241" "251" "261" "271" "281" "291"
[85] "301" "311" "321" "331" "341" "351" "361"
[92] "371" "381" "391" "401" "411"
```

Per correggere la strana numerazione possiamo scrivere

```
> rownames(studenti)=seq(length=nrow(studenti))
```

Giunti a questo punto la tabella `dati` presenta ancora alcuni problemi; per esempio se scriviamo

```
> levels(studenti$Eyes)
```

```
[1] "AZZURRI" "CASTANI" "MARRONI" "NERI"
[5] "NOCCIOLA" "VERDI" "azzurri" "castani"
[9] "marroni" "verdi"
```

```
> levels(studenti$Hair)
```

```
[1] "BIONDI" "CASTANI"
[3] "NERI" "biondi"
[5] "castani" "castano chiaro"
[7] "castano scuro" "neri"
```

Ci incuriosisce il dato con gli occhi neri. Verifichiamo:

```
> studenti[which(studenti$Eyes=="NERI"),]
```

```
Sex W H Eyes Hair Sh hM hF
20 M 69 1.7 NERI NERI 41 1.55 1.75
```

Possiamo ritenere che sia un errore e che in realtà gli occhi siano marroni molto scuri. Risulta evidente che nel riportare i colori degli occhi si sono usate dizioni diverse per colori essenzialmente uguali, per esempio i livelli `"CASTANI"`, `"NOCCIOLA"`, `"MARRONI"` possono esser fatti confluire in un unico livello `"castani"` e possiamo rendere minuscoli i nomi degli altri livelli con il comando

```
> levels(studenti$Eyes)=c("azzurri","castani","castani", "castani", "castani",
+                          "verdi","azzurri","castani","castani","verdi")
```

A questo punto

```
> levels(studenti$Eyes)
[1] "azzurri" "castani" "verdi"
```

Facciamo lo stesso con i capelli

```
> levels(studenti$Hair)=c("biondi","castani","neri", "biondi", "castani","castani",
+                          "castani","neri")
> levels(studenti$Hair)
[1] "biondi" "castani" "neri"
```

Selezione in base a criteri

Supponiamo di voler selezionare gli studenti con gli occhi castani. Basta scrivere

```
> subset(studenti,studenti$Eyes=="verdi")
```

	Sex	W	H	Eyes	Hair	Sh	hM	hF
7	F	63	1.70	verdi	castani	38	1.72	1.82
17	F	51	1.55	verdi	castani	37	1.60	1.70
25	F	91	1.81	verdi	biondi	42	1.60	1.87
33	M	75	1.82	verdi	castani	43	1.60	1.75
35	F	46	1.64	verdi	castani	37	1.56	1.89
37	F	56	1.70	verdi	castani	39	1.68	1.90
38	F	55	1.65	verdi	castani	38	1.68	1.70
41	M	56	1.70	verdi	castani	39	1.65	1.80
42	M	67	1.73	verdi	castani	42	1.55	1.85
47	F	52	1.75	verdi	biondi	38	1.62	1.80
51	M	75	1.76	verdi	castani	42	1.60	1.68
58	M	64	1.74	verdi	castani	41	1.63	1.80
60	M	64	1.80	verdi	castani	42	1.56	1.75
72	F	55	1.67	verdi	castani	40	1.60	1.80
76	M	85	1.84	verdi	castani	43	1.69	1.69
77	F	60	1.67	verdi	castani	38	1.64	1.70
81	F	62	1.61	verdi	castani	39	1.60	1.66
90	F	49	1.60	verdi	castani	40	1.58	1.75
91	F	62	1.76	verdi	biondi	40	1.70	1.73
93	F	53	1.65	verdi	castani	38	1.55	1.85
95	M	80	1.80	verdi	castani	44	1.68	1.70

Se siamo invece interessati al colore dei capelli degli studenti con occhi castani

```
> subset(studenti, studenti$Eyes=="verdi", select="Hair")
```

```
      Hair
7  castani
17 castani
25  biondi
33 castani
35 castani
37 castani
38 castani
41 castani
42 castani
47  biondi
51 castani
58 castani
60 castani
72 castani
76 castani
77 castani
81 castani
90 castani
91  biondi
93 castani
95 castani
```

2.5 Gli *array*

Un *array* è una generalizzazione multidimensionale di una matrice. Gli *array* sono caratterizzati dal numero di dimensioni (se le dimensioni sono 2 un *array* si identifica con una matrice) e dal nome dei vari livelli

```
> array(LETTERS[1:24],
+ dim=c(2,3,4))
```

```
, , 1
      [,1] [,2] [,3]
[1,] "A"  "C"  "E"
[2,] "B"  "D"  "F"

, , 2
      [,1] [,2] [,3]
[1,] "G"  "I"  "K"
[2,] "H"  "J"  "L"
```

```
, , 3
      [,1] [,2] [,3]
[1,] "M"  "O"  "Q"
[2,] "N"  "P"  "R"
```

```
, , 4
      [,1] [,2] [,3]
[1,] "S"  "U"  "W"
[2,] "T"  "V"  "X"
```

```
> array(sample(1:100,24), dim=c(3,4,2),
+       dimnames=list(LETTERS[1:3],LETTERS[11:14],letters[1:2]))->x
> x[,,"b"]
```

```
   K  L  M  N
A 98 73 18 99
B 89 37 34 13
C 21 11 10 17
```

2.6 Le liste

Una lista (in R `list`) è un vettore di oggetti. Gli oggetti possono avere un nome ed avere natura diversa fra di loro. Per esempio

```
> x=list(a=month.abb , b=array(rep(0,20), dim=c(4,5)),c="your name")
> x
```

```
$a
[1] "Jan" "Feb" "Mar" "Apr" "May" "Jun" "Jul"
[8] "Aug" "Sep" "Oct" "Nov" "Dec"

$b
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    0    0    0    0    0
[2,]    0    0    0    0    0
[3,]    0    0    0    0    0
[4,]    0    0    0    0    0

$c
[1] "your name"
```

Possiamo annidare anche liste entro liste

```
> x=list(a=1:10,b=array(rep(0,20),dim=c(4,5)),  
+ c="testo",d=list(g="h",r=1:10) )  
> x
```

```
$a  
[1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10  
  
$b  
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]  
[1,]    0    0    0    0    0  
[2,]    0    0    0    0    0  
[3,]    0    0    0    0    0  
[4,]    0    0    0    0    0  
  
$c  
[1] "testo"  
  
$d  
$d$g  
[1] "h"  
  
$d$r  
[1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```


Capitolo 3

Statistica con R

3.1 Variabili aleatorie

Una variabile aleatoria (*random variable*) è una variabile i cui valori sono soggetti a variazioni casuali. Quando i valori possibili di una variabile aleatoria possono essere elencati parliamo di variabile aleatoria discreta. Quando i valori non possono essere elencati parliamo di variabile aleatoria continua.

3.2 Variabili aleatorie discrete

Le variabili aleatorie discrete che assumono un numero limitato di valori si dicono anche *finite*. I valori di una variabile aleatoria discreta possono essere numerici o nominali. Supponiamo di avere una variabile aleatoria che possa assumere un insieme di valori in un *alfabeto* assegnato costituito da lettere, parole o numeri. Per esempio un alfabeto può essere del tipo che segue

- (Femmina, Maschio)
- (A,C,T,G)
- (0,1)
- (Ottimo, Buono, Discreto, Sufficiente, Insufficiente)
- (Testa, Croce).
- I numeri interi

Per caratterizzare completamente una variabile aleatoria discreta oltre ai valori che questa può assumere occorre conoscere la probabilità di questi valori.

Per semplicità considereremo variabili aleatorie finite.

Come possiamo simulare variabili aventi valore nell'alfabeto assegnato? In effetti qualunque

comando di generazione su un computer non è perfettamente casuale; infatti la generazione avviene in effetti in modo pseudo-casuale e secondo un meccanismo che dipende dallo stato interno del computer codificato in una variabile indicata con `.Random.seed`. Se il *seme* iniziale è lo stesso i numeri generati saranno uguali. Spesso conviene che i calcoli (ad esempio a fine didattico) siano riproducibili. Ad esempio mettendo in una variabile `seme` il valore corrente di `.Random.seed` e richiamandolo o generandolo all'occorrenza. Un altro modo di procedere consiste nell'impostare il valore di `.Random.seed` attraverso il comando `set.seed` la cui sintassi è `set.seed(n)` dove n è un numero intero.

```
> set.seed(3)
```

A questo punto possiamo simulare le variabili richieste usando la struttura

$$\text{sample}(\text{alfabeto}, n) \quad (3.1)$$

Se l'alfabeto consiste di tutte le lettere minuscole dell'alfabeto ordinario e ne vogliamo selezionare $n = 8$ (in modo che ciascuna uscita abbia la stessa probabilità) basta scrivere

```
> sample(letters,8)
```

```
[1] "e" "u" "j" "h" "n" "m" "c" "f"
```

Se invece l'alfabeto consiste delle basi del DNA

```
> alfabeto=c("A","C","G","T")
```

```
> sample(alfabeto,2)
```

```
[1] "G" "C"
```

Notiamo che

```
> sample(alfabeto)
```

```
[1] "G" "C" "T" "A"
```

restituisce una permutazione dell'alfabeto, mentre chiedendo un campione di lunghezza superiore alla lunghezza dell'alfabeto otteniamo un messaggio di errore. Possiamo però immaginare di re-immettere la lettera estratta nell'urna dopo ogni estrazione. In questo caso non c'è limite alla sequenza generata. Per esempio

```
> alfabeto=c("testa","croce")
```

```
> sample(alfabeto,5,replace=T)
```

```
[1] "croce" "croce" "testa" "croce" "croce"
```

Il precursore del dado era chiamato astragalo ed era giocato nell'antica Grecia e nell'antica Roma [?]. Gli astragali sono dei piccoli ossicini di forma irregolare ed hanno 6 facce ma atterrano in modo stabile solo su 4 di esse numerate 1, 3, 4 e 6 con probabilità all'incirca 0.4 per il 3 e il 4 e di 0.1 per l'1 e il 6. In altre parole l'astragalo è descritto dalla tabella

valore	probabilità
1	0.1
3	0.4
4	0.4
6	0.1

Il tiro più gettonato all'epoca era l'uscita di 4 facce diverse nel lancio di 4 astragali e si chiamava *Venus*. Il lancio considerato peggiore sul singolo lancio era l'1 chiamato cane o avvoltoio. Per simulare un astragalo su un computer



Figura 3.1: Astragalo.

```
> sample(c(1,3,4,6),4,replace=T,prob=c(0.1,0.4,0.4,0.1))
```

```
[1] 3 3 3 3
```

Torniamo ora ai classici dadi a 6 facce. Supponiamo di lanciare 100 volte un dado equo a 6 facce e di registrare in `x` le uscite rilevate

```
> set.seed(3)
> dadi100<-sample(1:6,100,replace=T)
> dadi100
```

```
[1] 2 5 3 2 4 4 1 2 4 4 4 4 4 6 5 1 5 6 2 2 1 1 1 2 5 4 6
[29] 4 5 3 3 2 3 2 3 6 2 4 2 2 5 2 4 3 2 1 1 2 5 2 2 6 6 6 6
[57] 3 2 1 2 5 1 5 1 5 2 5 4 3 1 5 5 6 6 4 4 1 1 5 5 5 4 3 1
[85] 6 6 2 3 4 6 1 2 3 5 6 2 2 2 2 5
```

Volendo invece simulare una combinazione da giocare al SuperEnalotto possiamo scrivere

```
> (x<-sample(1:90,6,replace=T))
```

```
[1] 69 62 19 65 55 31
```

I numeri usciti sono stati salvati in una variabile **x**, per poter effettuare la ricerca di indicatori statistici. Il comando che consente di ordinare una lista o un vettore è **sort**, esso può essere usato in associazione al nome di una variabile o di una lista, ossia:

$$\text{sort}(\text{variabile/lista}) \quad (3.2)$$

Volendo ordinare i numeri precedentemente ricavati scriveremo

```
> sort(x)
```

```
[1] 19 31 55 62 65 69
```

3.3 Statistica descrittiva: singola variabile

3.3.1 Indicatori statistici

- Media.

La varianza di un vettore di n numeri

$$x = (x_1, \dots, \dots, x_n)$$

è definita come

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

ottiene con la funzione **mean** scrivendo: **mean(variabile)**. Ad esempio, lavorando con la lunghezza del sepal di 150 piante di iris

```
> x=iris[,1]
> mean(x)
```

```
[1] 5.843333
```

- Varianza campionaria

La varianza di un vettore di n numeri

$$x = (x_1, \dots, \dots, x_n)$$

è definita come

$$\text{var}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Si ottiene con la funzione predefinita di espressione: **var(variabile)**. Possiamo calcolare la varianza come

```
> var(x)
```

```
[1] 0.6856935
```

- Deviazione Standard campionaria.

Non è altro che la radice della varianza. Si ottiene con la funzione predefinita di espressione: `sd(variable)`. Sempre basandosi sull'esempio precedente scriveremo

```
> sd(x)
```

```
[1] 0.8280661
```

- Quantili. La notazione standard è semplicemente: `quantile(variable)` che determina i quartili e ci fornisce in uscita la statistica dei 5 numeri

```
> quantile(x)
```

```
0% 25% 50% 75% 100%
4.3 5.1 5.8 6.4 7.9
```

Volendo ricavare i decili dovremo scrivere:

```
quantile(variable, seq(0,1,by=0.1))
```

in quanto vogliamo dividere l'intervallo $[0, 1]$ a passo 0.1

Nell'esempio:

```
> quantile(x, seq(0,1,by=0.1))
```

```
0% 10% 20% 30% 40% 50% 60% 70% 80% 90% 100%
4.30 4.80 5.00 5.27 5.60 5.80 6.10 6.30 6.52 6.90 7.90
```

Si noti che `quantile` ammette 9 varianti specificabili con l'opzione `type = n` dove n va da 1 a 9. Per esempio

```
> quantile(x, type=2)
```

```
0% 25% 50% 75% 100%
4.3 5.1 5.8 6.4 7.9
```

Sui dati in esame le 9 varianti coincidono. La convenzione da noi adottata corrisponde al numero 2

Per quanto riguarda gli indicatori statistici nel caso di dati ripetuti basta notare che se la lista x contiene i valori e la lista f le frequenze assolute il comando

$$\text{rep}(x, f)$$

costruisce un'unica lista dei dati inclusiva delle ripetizioni. Per esempio

```
> x=1:6
> f=c(9,7,9,7,8,10)
> (dati=rep(x,f))
```

```
[1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4
[31] 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
```

Ovviamente senza bisogno di visualizzare `dati` possiamo calcolarne tutti gli indicatori statistici. Il comando

```
> cumsum(f)
```

```
[1] 9 16 25 32 40 50
```

restituisce le frequenze cumulate, dalle quali si possono ricavare facilmente la mediana i quantili.

3.3.2 Raggruppamenti in classi

Consideriamo la rilevazione della temperatura media giornaliera di Milano nel mese di Gennaio 2016. Scegliamo il mese

```
> stringa="Milano/2016/Gennaio?format=csv"
```

```
> sito="http://www.ilmeteo.it/portale/archivio-meteo/"
> indirizzo=paste(sito,stringa,sep="")
> meteo=read.table(indirizzo,sep=";",header=T)[,-1]
```

```
> options(width=60)
> str(meteo)
```

```
'data.frame':      31 obs. of  15 variables:
 $ LOCALITA      : Factor w/ 1 level "Milano": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ DATA         : Factor w/ 31 levels "1/1/2016","10/1/2016",...: 1 12 23 26 27 28 29 3
 $ TMEDIA..C     : int  1 1 1 2 3 5 3 2 5 5 ...
 $ TMIN..C       : int  -2 0 0 1 2 3 -1 -1 3 4 ...
 $ TMAX..C       : int   4 2 3 3 5 8 6 5 5 7 ...
 $ PUNTORUGIADA..C : int   1 1 1 1 2 2 2 2 4 5 ...
 $ UMIDITA..     : int  97 97 96 93 89 85 88 89 95 95 ...
```

```

$ VISIBILITA.km      : int  2 2 3 4 5 5 8 7 2 3 ...
$ VENTOMEDIA.km.h    : int  6 5 7 7 6 8 5 7 6 5 ...
$ VENTOMAX.km.h      : int 11 9 11 11 11 13 11 17 11 11 ...
$ RAFFICA.km.h       : int  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
$ PRESSIONESLM.mb    : int 1026 1019 1010 1000 1001 1001 1004 1009 1008 1004 ...
$ PRESSIONEMEDIA.mb  : int  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
$ PIOGGIA.mm         : int  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
$ FENOMENI           : Factor w/ 7 levels "", "nebbia ", "neve nebbia ",...: 2 7 3 6 4 2 2 2 4

```

A questo punto selezioniamo la colonna della temperatura media

```

> meteo[,3]->Milano;
> Milano

```

```

[1]  1  1  1  2  3  5  3  2  5  5  6  5  7  2  5  5  6  0
[19] -1  0  0  0  2  2  4  7  7  9 10  8  8

```

```

> quantile(Milano)

```

```

 0%  25%  50%  75% 100%
-1.0  1.5  4.0  6.0 10.0

```

L'ultimo comando in particolare ci fornisce minimo e massimo dei dati. Possiamo esaminare la serie temporale dei dati con i comandi

```

> plot(Milano,type="l",xlab=paste(m,anno, "a milano"),ylab="temperatura media")

```

ottenendo la figura ??

Raggruppiamo ora i dati in classi comprese tra due estremi che comprendano certamente tutti i dati, per esempio -2 e 10, decidendo di applicare un passo di 2 e vedere come si distribuiscono. Il comando `cut` associa a ciascun dato la classe di appartenenza selezionata in base ai punti di taglio.

```

> tagli=c(-2,0,2,4,6,10)
> cut(Milano,breaks=tagli)

```

```

[1] (0,2] (0,2] (0,2] (0,2] (2,4] (4,6] (2,4] (0,2]
[9] (4,6] (4,6] (4,6] (4,6] (6,10] (0,2] (4,6] (4,6]
[17] (4,6] (-2,0] (-2,0] (-2,0] (-2,0] (-2,0] (0,2] (0,2]
[25] (2,4] (6,10] (6,10] (6,10] (6,10] (6,10] (6,10] (6,10]
Levels: (-2,0] (0,2] (2,4] (4,6] (6,10]

```

Il comando `table` conta i dati di ciascuna classe

```

> table(cut(Milano,breaks=tagli))

```

```

(-2,0] (0,2] (2,4] (4,6] (6,10]
      5      8      3      8      7

```

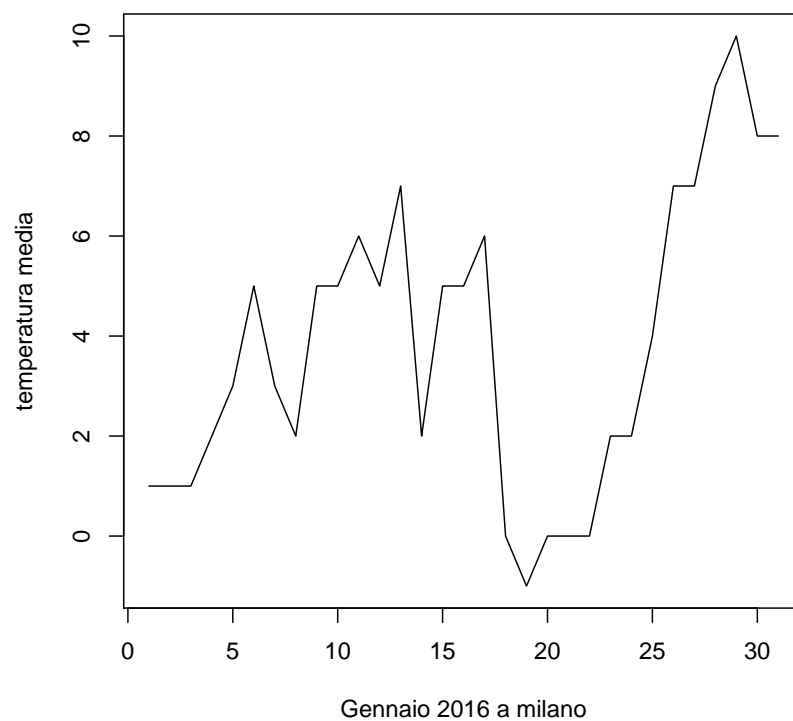


Figura 3.2: Andamento della temperatura a Gennaio 2016 a Milano.

Si noti che la suddivisione in classi prevede intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra. Per suddividere in modo che gli intervalli siano chiusi a sinistra e aperti a destra si specifica il parametro `right=FALSE`. Possiamo anche usare il comando `seq` per specificare i tagli.

```
table(cut(variabile, breaks=seq(estremo inf,
                                extremo sup, by = passo), right=TRUE))
```

o in modo più generale

```
table(cut( variabile,
           breaks=c(estremo inferiore, ..., extremo superiore))
```

estremamente utile in quanto consente di raggruppare i dati in classi non necessariamente di ugual ampiezza.

```
> table(cut(Milano, breaks=c(-3,1,3,4,5,6,8,10)))
```

(-3,1]	(1,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]	(6,8]	(8,10]
8	7	1	6	2	5	2

Volendo raggruppare in classi i dati delle precedenti uscite del dado possiamo scrivere

```
> table(cut(dadi100, breaks=0:6))
```

(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]
15	25	11	17	18	14

Se scegliamo di chiudere a sinistra gli intervalli dobbiamo però includere il 7 altrimenti il valore 6 non risulterebbe incluso.

```
> table(cut(dadi100, breaks= 1:7, right=FALSE))
```

[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)
15	25	11	17	18	14

3.3.3 Areogrammi

Il comando generico per generare un istogramma è:

```
hist(variabile)
```

che segue però la struttura del comando `cut`. L'ampiezza di ciascuna classe salvo diversamente indicato è costante e decisa da R. È possibile variare tale condizione definendo una lista con i punti di taglio (*cutoff*) delle classi volute:

```
hist(variabile, c(valore1, valore2, ...)) (3.3)
```

Per esempio se `dadi100` rappresenta le solite 100 uscite del lancio del dado, il comando

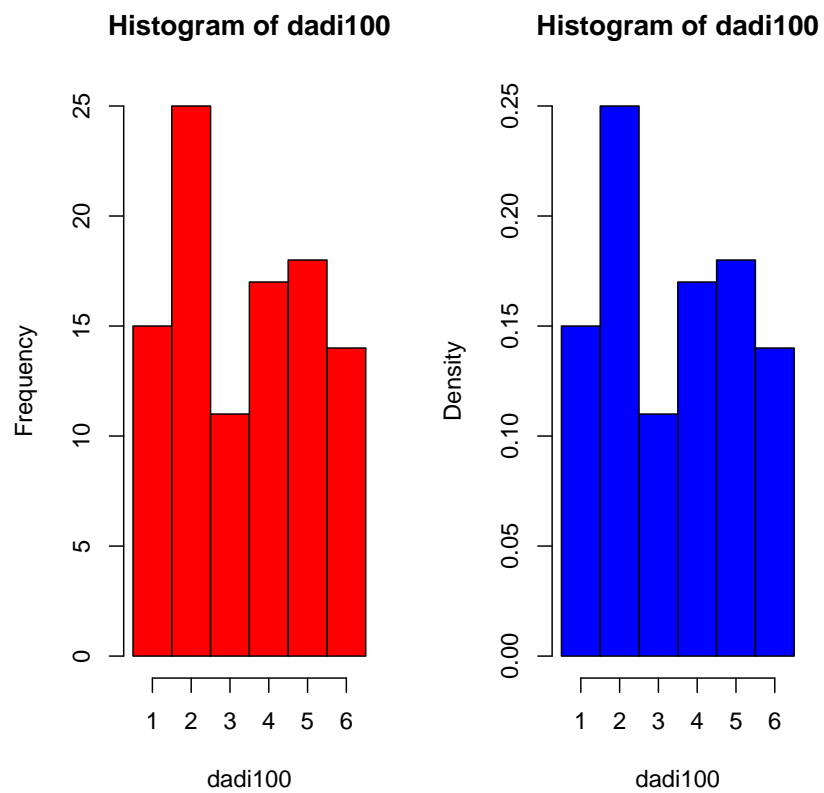


Figura 3.3: Diagramma a colonne e areogramma per il lancio di un dado.

```
> par(mfrow=c(1,2))
> hist(dadi100,breaks=seq(0.5,6.5,1),col="red")
> hist(dadi100,freq=FALSE,breaks=seq(0.5,6.5,1),col="blue")
```

genera l'istogramma (in rosso, a sinistra Figura ??) con le frequenze assolute delle classi in ordinata. La sequenza dei punti di taglio è stata scelta in modo che i numeri interi da 1 a 6 siano al centro delle classi corrispondenti. Se invece volessimo creare un areogramma (ossia avere un tracciato per cui le aree siano pari alle frequenze relative) a partire dalle stesse uscite dovremo imporre il parametro `freq=FALSE` otterremo il pannello a destra (in blu) della figura (??). Avendo scelto classi di ampiezza costante i 2 grafici differiscono semplicemente per un cambio di scala sull'asse y .

In modo simile possiamo tracciare un areogramma dei dati nella variabile `milano`

```
> par(mfrow=c(1,2))
> hist(Milano, col="green",freq=FALSE,right=FALSE,
+ main="Cutoff automatici")
```

lasciando R libero di scegliere i punti di taglio (pannelli a sinistra della figura ??) o scegliendoli a nostra volta (pannelli a destra della stessa figura ??)

```
> hist(Milano,col="red",freq=FALSE,
+ breaks=unique(as.vector(quantile(Milano,seq(0,1,by=1/6))))),
+ main="Cutoff personalizzati")
```

Si noti la stabilità degli areogrammi rispetto ai cambi nella suddivisione.

3.3.4 Generazione di boxplot

Il `boxplot` è una rappresentazione grafica immediata della statistica dei 5 numeri e simultaneamente ci segnala eventuali punti discordanti o anomali, *outlier*. Il comando generico è:

$$\text{boxplot}(\text{variabile}) \quad (3.4)$$

prendendo il vettore x contenente i risultati di 100 lanci otteniamo la figura ?? da cui si evince che il valore massimo dei dati è 6, il minimo è 1 e non ci sono punti anomali, per cui non vi sono dati anomali, altrimenti evidenziati da un pallino. Si legge inoltre il valore di mediana (4) primo quartile (2) e terzo quartile (5).

3.3.5 Creazione di grafici a torta

Il comando `pie` consente, partendo da una tabella, di tracciare il diagramma a torta per una variabile nominale raggruppata in classi. Il comando è

```
pie(table(variabile))
```

ad esempio (facendo riferimento ai precedenti dati):

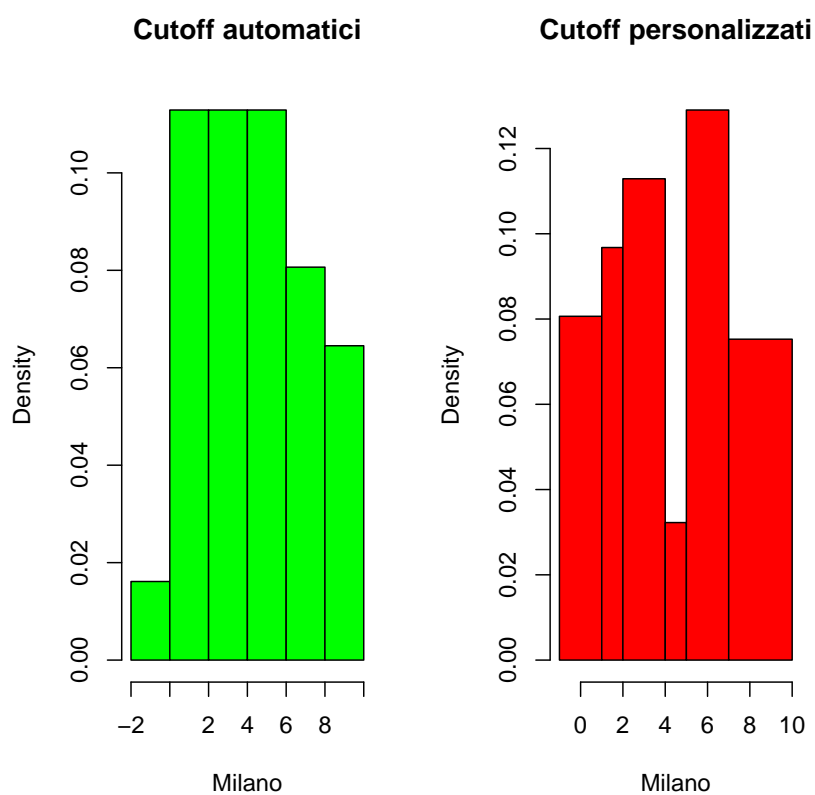


Figura 3.4: Areogramma dei dati della temperatura. Scelta automatica dei punti di taglio.

```
> boxplot(dadi100)
```

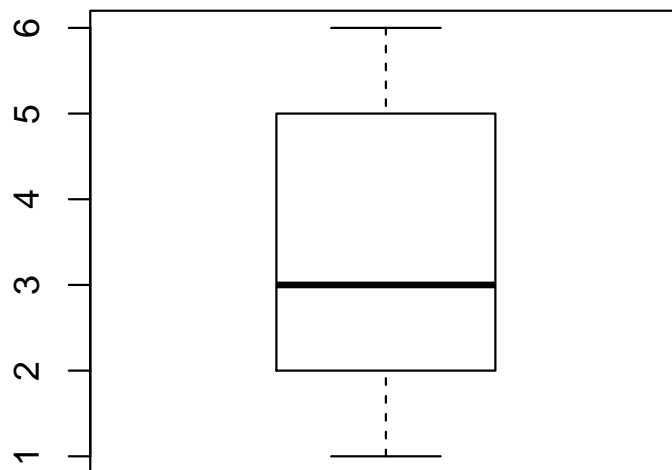


Figura 3.5: Boxplot dei risultati del lancio di un dado

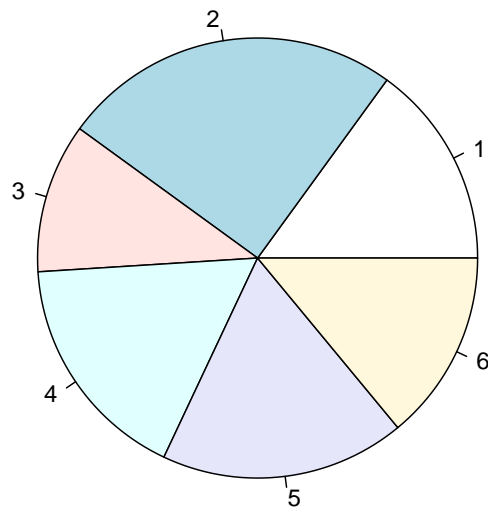


Figura 3.6: Diagramma a torta per il lancio di un dado equo.

```
> pie(table(dadi100))
```

fornisce in uscita la Figura ??

Costruire una matrice contenente le coordinate di 50 punti nel rettangolo $[0, 4] \times [0, 2]$ in due dimensioni (generate utilizzando il generatore di numeri pseudocasuali). Produrre un grafico con due pannelli, dove il primo pannello è uno scatter-plot

3.4 Variabili doppie e rette di regressione

Supponiamo di misurare la concentrazione di acido lattico muscolare durante uno sforzo di 10 minuti,

```
> x<-tempo<-c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
> y<-concentrazione<-c(0.3,0.65,0.7,0.8,0.95,1.05,1.3,1.7,1.9,
+ 2.5)
```

Per analizzare questi dati conviene preliminarmente tracciarne un diagramma a dispersione. Possiamo inoltre determinare il coefficiente di correlazione lineare

```
> cor(x,y)
```

```
[1] 0.9620456
```

Per definire un modello di relazione lineare occorre usare il comando `lm` (*linear model*). Nella sua generica forma il comando è espresso come¹

$$\text{lm}(y \sim x)$$

Otteniamo i valori di pendenza e intercetta.

Possiamo tracciare la retta di regressione con il comando `abline`.

```
> plot(x,y,pch=19,col="red")
> abline(lm(y~x),col="blue")
```

Per determinare la retta di regressione sulle y dobbiamo invertire x e y .

```
> (modellox=lm(x~y))
```

Call:

```
lm(formula = x ~ y)
```

Coefficients:

```
(Intercept)          y
    0.3516         4.3446
```

¹ Per digitare la tilde \sim su Mac premere ALT 5 su PC invece il tasto Alt Gr (attivazione del codice ASCII) e sul tastierino numerico digitare il numero 126. Lavorando su un portatile il tastierino numerico è spesso incorporato nella tastiera con colorazione blu dei tasti.

```
> plot(x,y)
```

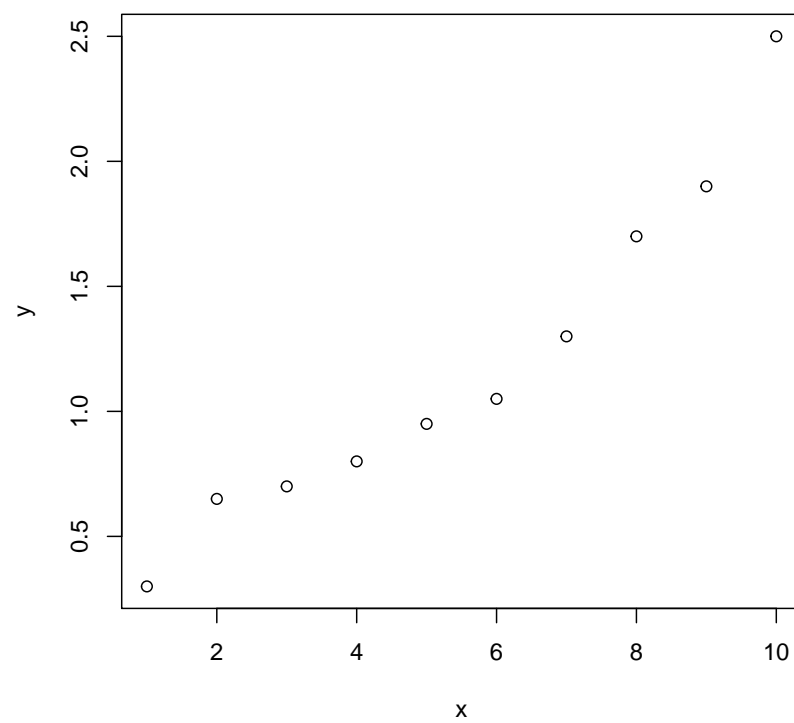


Figura 3.7: Diagramma a dispersione tempo/concentrazione.


```
> coeff=modello$coefficients
> (a=1/coeff[2])
```

```
      y
0.2301707
```

```
> (b=-coeff[1]/coeff[2])
```

```
(Intercept)
-0.08093883
```

```
> abline(b,a,col="green")
```

In tal modo otteniamo il grafico ??.

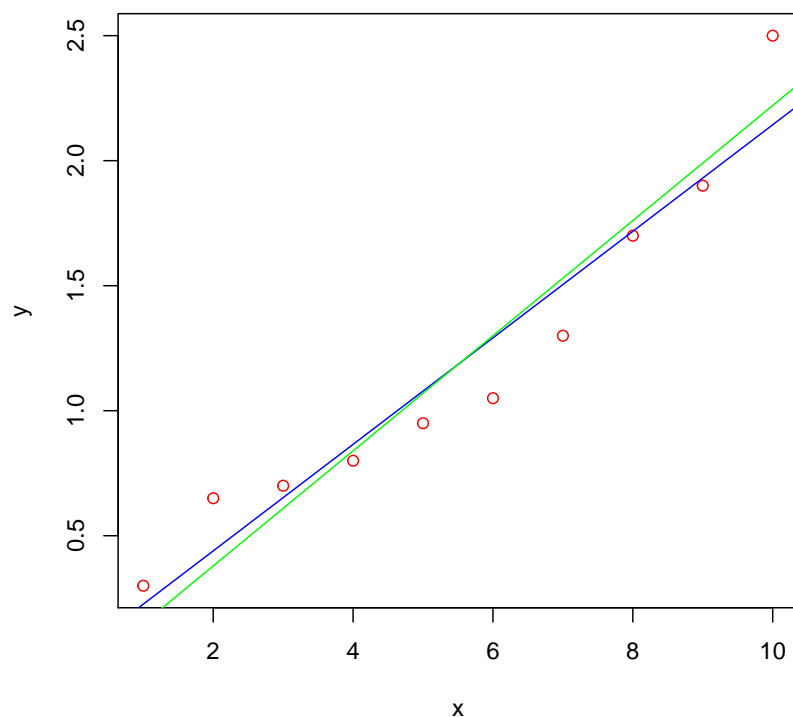


Figura 3.8: Rette di regressione. In blu R_x , in verde R_y .

I bambini di Kalama (Egitto). Ancora retta di regressione

Da DASL [?] possiamo scaricare un *dataset* in cui i ricercatori hanno misurato le altezze (cm) dai 18 ai 29 mesi di vita, di 161 bambini di Kalama, un villaggio egiziano. Le altezze sono state mediate tra i bambini per fornire un singolo valore mese per mese.

```
> age=18:29
> height=c(76.1,77,78.1,78.2,78.8,79.7,79.9,81.1,81.2,81.8,82.8,83.5)
```

Possiamo quindi costruire il `data.frame`

```
> village=data.frame(age=age,height=height)
```

Ora diamo una prima occhiata ai dati: L'andamento è lineare. Determiniamo la retta di

```
> plot(age,height)
```

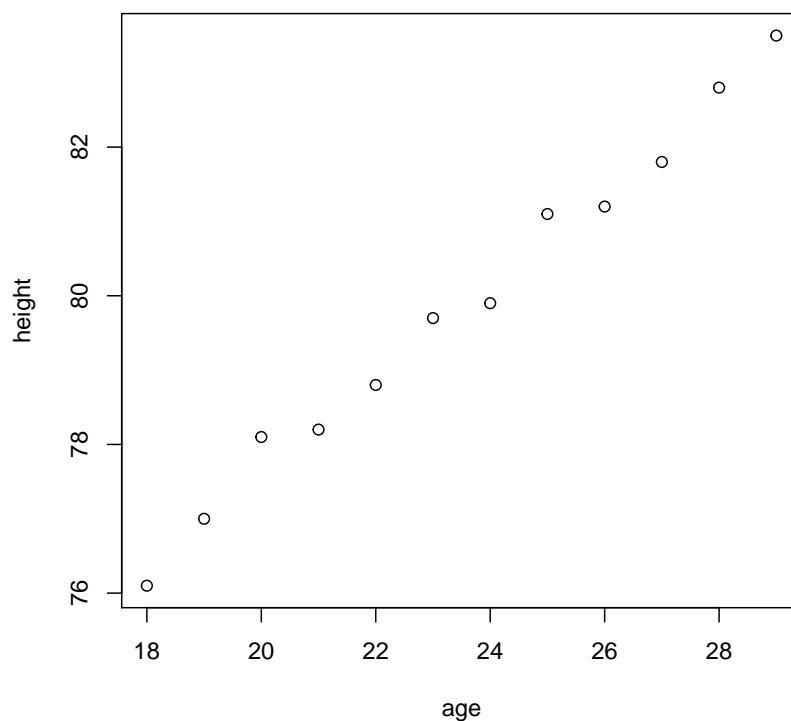


Figura 3.9: Crescita dei bambini di Kalama

regressione per predire l'altezza media nota l'età in mesi.

```
> (modello=lm(height~age))
```

```
Call:
lm(formula = height ~ age)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	age
64.928	0.635

La retta di regressione cercata ha formula:

$$h(\text{age}) = 64.93 + 0.63 \text{ age}$$

Possiamo ora utilizzare R come semplice calcolatore per predire l'altezza a 27.5 mesi di età: oppure, è più efficiente utilizzare direttamente il *dataframe* e la funzione **predict**:

```
> predict(modello,data.frame(age=27.5))
```

```
1
82.38986
```

fornendo in input i parametri della retta ed un preciso valore della variabile indipendente (richiamata col proprio nome). Molti comandi di R sono in grado di manipolare *dataframe* lavorando direttamente sulla struttura. Per esempio, il comando **plot** di un **dataframe** in due colonne, esegue in automatico il grafico della seconda colonna (variabile dipendente) vs prima colonna (variabile indipendente). Possiamo ottenere il modello lineare visto nel caso precedente, passando **village** direttamente al comando:

```
> modello=lm(height~age,data=village)
> modello
```

```
Call:
lm(formula = height ~ age, data = village)

Coefficients:
(Intercept)      age
    64.928      0.635
```

con la formula `lm(y ~x,data=dataset)`.

3.5 Modelli potenza

Consideriamo ora il seguente *dataset* di mammiferi in cui le 2 variabili rappresentano le dimensioni del corpo e del cervello.

```
> library(MASS)
> mammals
```

	body	brain
Arctic fox	3.385	44.50
Owl monkey	0.480	15.50
Mountain beaver	1.350	8.10
Cow	465.000	423.00

Grey wolf	36.330	119.50
Goat	27.660	115.00
Roe deer	14.830	98.20
Guinea pig	1.040	5.50
Verbet	4.190	58.00
Chinchilla	0.425	6.40
Ground squirrel	0.101	4.00
Arctic ground squirrel	0.920	5.70
African giant pouched rat	1.000	6.60
Lesser short-tailed shrew	0.005	0.14
Star-nosed mole	0.060	1.00
Nine-banded armadillo	3.500	10.80
Tree hyrax	2.000	12.30
N.A. opossum	1.700	6.30
Asian elephant	2547.000	4603.00
Big brown bat	0.023	0.30
Donkey	187.100	419.00
Horse	521.000	655.00
European hedgehog	0.785	3.50
Patas monkey	10.000	115.00
Cat	3.300	25.60
Galago	0.200	5.00
Genet	1.410	17.50
Giraffe	529.000	680.00
Gorilla	207.000	406.00
Grey seal	85.000	325.00
Rock hyrax-a	0.750	12.30
Human	62.000	1320.00
African elephant	6654.000	5712.00
Water opossum	3.500	3.90
Rhesus monkey	6.800	179.00
Kangaroo	35.000	56.00
Yellow-bellied marmot	4.050	17.00
Golden hamster	0.120	1.00
Mouse	0.023	0.40
Little brown bat	0.010	0.25
Slow loris	1.400	12.50
Okapi	250.000	490.00
Rabbit	2.500	12.10
Sheep	55.500	175.00
Jaguar	100.000	157.00
Chimpanzee	52.160	440.00
Baboon	10.550	179.50
Desert hedgehog	0.550	2.40
Giant armadillo	60.000	81.00

Rock hyrax-b	3.600	21.00
Raccoon	4.288	39.20
Rat	0.280	1.90
E. American mole	0.075	1.20
Mole rat	0.122	3.00
Musk shrew	0.048	0.33
Pig	192.000	180.00
Echidna	3.000	25.00
Brazilian tapir	160.000	169.00
Tenrec	0.900	2.60
Phalanger	1.620	11.40
Tree shrew	0.104	2.50
Red fox	4.235	50.40

Per prima cosa tracciamo il grafico dei punti in scala non trasformata e, visto la compresenza di dati molto prossimi all'origine e di dati molto distanti in scala logaritmica (sia le x che le y vengono trasformate prendendone i logaritmi)

```
> par(mfrow=c(1,2))
> plot(mammals)
> plot(mammals,log="xy")
```

come in Figura ?? . Visti i risultati ottenuti usando la scala logaritmica tracciamo anche la corrispondente retta di regressione

```
> plot(log(mammals$brain)~log(mammals$body),col="BLUE",pch=19,type="p")
> abline(lm(log(mammals$brain)~ log(mammals$body)),col="red",lwd=3);
> uomo=which(rownames(mammals)=="Human")
> text(log(mammals[uomo ,1]),log(mammals[uomo ,2]),rownames(mammals)[uomo])
```

Si noti il comando `text(x,y, testo)` dove x e y e *testo* sono vettori di arbitraria lunghezza contenenti ascisse, ordinate e testo da inserire.

3.6 Distribuzioni in R

I nomi delle principali distribuzioni in R sono

norm	normale
t	Student
chisq	chi quadro
f	Fisher
binom	binomiale

A questi nomi possiamo aggiungere diversi prefissi

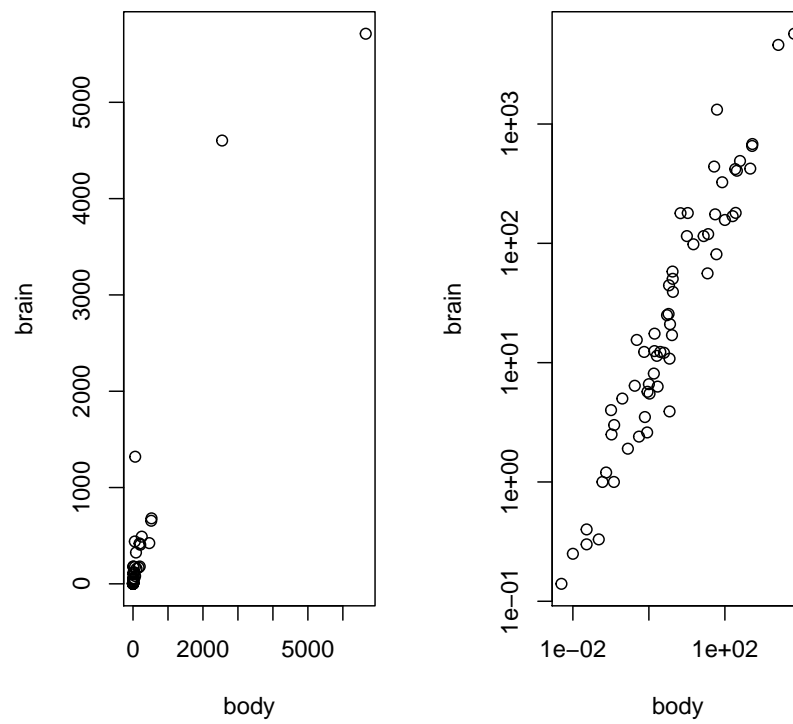


Figura 3.10: Diagramma a dispersione massa corporea/massa del cervello in scala normale ed in scala logaritmica.

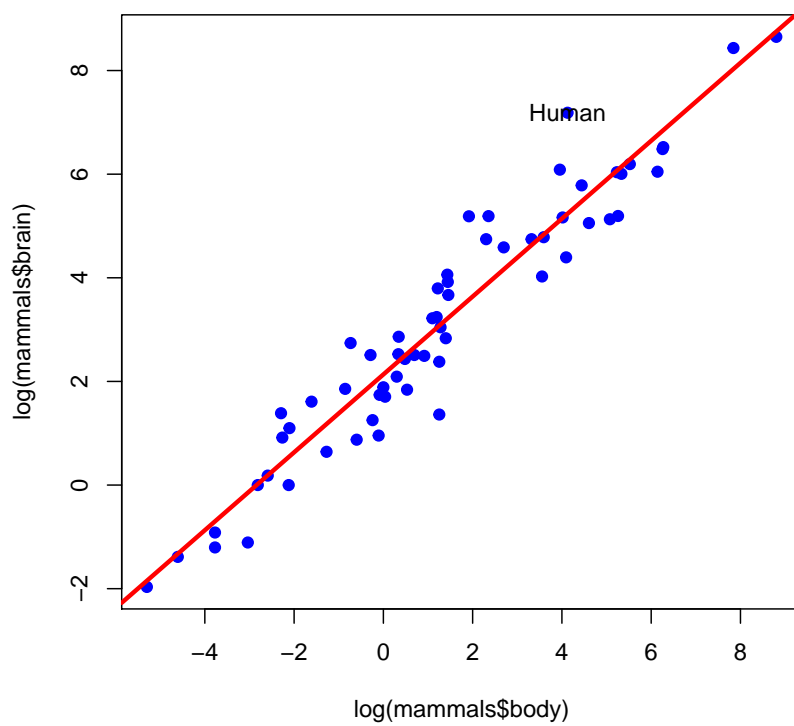


Figura 3.11: Retta di regressione. Dimensione del corpo e del cervello. Si noti la posizione dell'uomo.

d	densità
p	primitiva
q	quantile
r	random

per caratterizzare diversi aspetti.

3.6.1 Distribuzione normale

La funzione `dnorm`

Come appena visto R indica con il nome `dnorm`, la densità normale o gaussiana. Essa accetta come parametri sia la media μ che la deviazione standard σ come è possibile verificare con il comando `formals` che ci fornisce gli argomenti di una funzione e gli eventuali valori preassegnati.

```
> formals(dnorm)
```

```
$x
[1] 0

$mean
[1] 0

$sd
[1] 1

$log
[1] FALSE
```

Se i parametri sono omessi `dnorm` rappresenta la densità normale standard con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Il grafico (??) della gaussiana tra due estremi, ad esempio -2.5 e 2.5 si ottiene con il solito comando

```
> curve(dnorm,-2.5,2.5)
```

Per visualizzare una gaussiana non standard, ad esempio una gaussiana con media $\mu = 1$ e deviazione standard $\sigma = 1.5$, tra -3 e 3. scriveremo invece

```
> curve(dnorm(x,mean=1,sd=1.5),-3,3)
```

3.6.2 La funzione `pnorm`

La funzione `pnorm(x)` è la antiderivata di `dnorm` calcolata come segue

$$\text{pnorm}(x) = \int_{-\infty}^x \text{dnorm}(s) ds$$

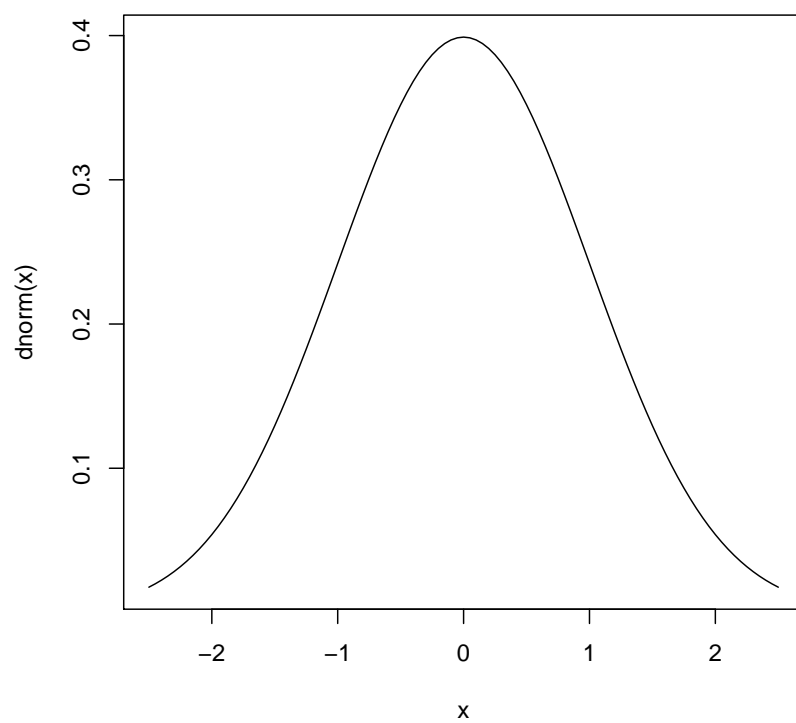


Figura 3.12: Grafico della normale standard nell'intervallo $[-2.5, 2.5]$.

Ovviamente

$$\int_a^b \text{dnorm}(x)dx = \text{pnorm}(b) - \text{pnorm}(a)$$

e per avere l'area sottesa tra 3 e 5 basta scrivere:

```
> pnorm(5)-pnorm(3)
```

```
[1] 0.001349611
```

Per ottenere il valore dell'area tra 0 e x bisogna allora sottrarre $\text{pnorm}(0)=0.5$ all'area fornita dalla funzione. Per cui possiamo scrivere:

```
> pnorm(1)-0.5
```

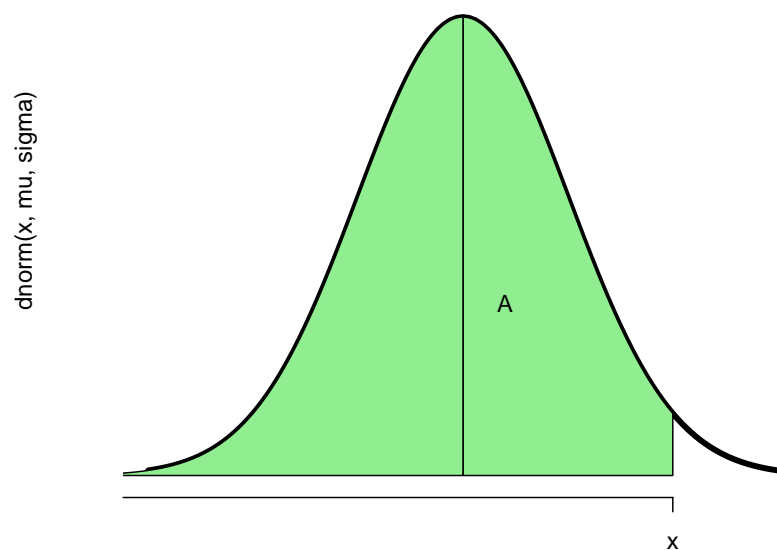
```
[1] 0.3413447
```

3.6.3 La funzione `qnorm` e la tabella della densità di Gauss

La funzione `qnorm` rappresenta la funzione inversa di `pnorm`.

$$\text{qnorm}(A) = x \Leftrightarrow A = \int_{-\infty}^x \text{dnorm}(s)ds$$

come illustrato nella figura ??.

Figura 3.13: $x = qnorm(A)$

Vogliamo costruire una funzione, diciamo U tale che assegnato un valore di area A fornisca l'ascissa $x = U(A)$ come in figura ?? in modo che l'area tra $-x$ e x sia esattamente pari ad A .

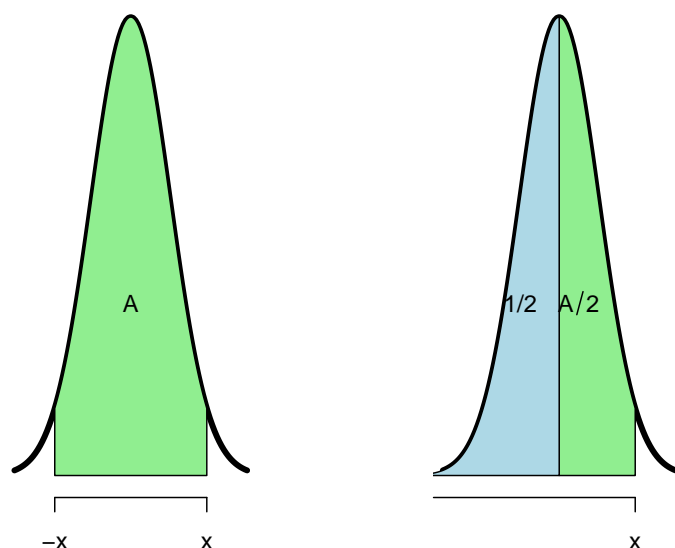


Figura 3.14: $x = U(A) = \text{qnorm}(1/2 + A/2)$

Dalla stessa figura si evince che la funzione che riproduce la tabella è

```
> U <-function (A) qnorm (1/2 + A/2)
```

Questa funzione fornisce fissato il livello di fiducia l'ascissa x tale che l'intervallo simmetrico $[-x, x]$ racchiuda un'area pari al livello di fiducia. Per esempio

```
> U(0.95)
```

```
[1] 1.959964
```

3.6.4 La funzione rnorm

È possibile generare dei valori standardizzati casuali (media uguale a 0, deviazione standard pari a 1) che seguono la distribuzione normale standard. Basta semplicemente definire il numero di valori desiderati. Il comando nella sua espressione generale è:

$$\text{rnorm}(n, \text{mean} = \text{valore}_1, \text{sd} = \text{valore}_2) \quad (3.5)$$

Nel caso in cui volessimo una lista di 20 valori di una variabile normale con media assegnata 5 e deviazione standard 1 scriveremo

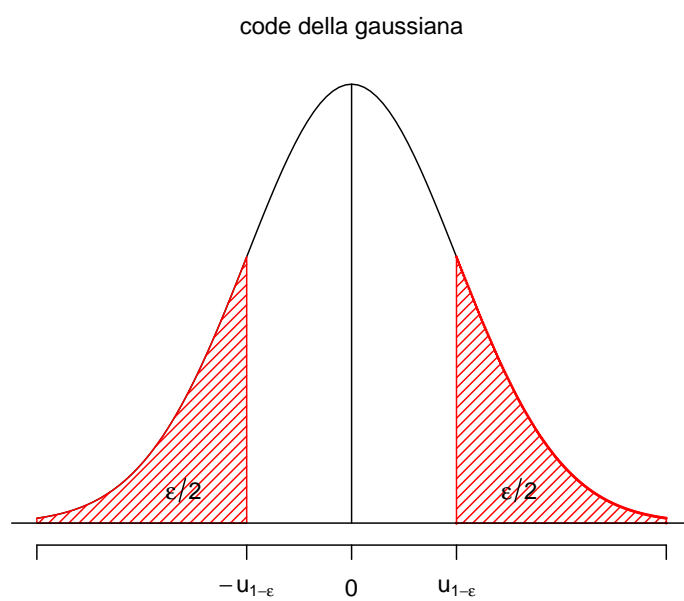


Figura 3.15: Code della distribuzione normale

```
> rnorm(20,mean=5,sd=1)
```

```
[1] 4.468756 5.062037 5.103530 6.169799 5.394189
[6] 4.865898 4.620124 6.278667 4.300668 5.564251
[11] 5.302942 5.215441 5.921003 4.112448 4.997107
[16] 4.804826 2.765321 5.478323 6.622692 3.803926
```

3.6.5 La distribuzione t di Student

In R la distribuzione di Student è indicata con la lettera **t**. Come per le altre distribuzioni si possono considerare le funzioni

dt	densità
pt	primitiva
qt	quantili
rt	generatore random

Il grafico della distribuzione di Student ad un certo numero **df** di gradi di libertà si ottiene con il comando

```
curve(dt(x,df), a, b)
```

Tracciamo ad esempio un grafico tra -2 e 2 per una distribuzione a 10 gradi di libertà (vedi figura (??)):

```
> curve(dt(x,10),-2,2)
```

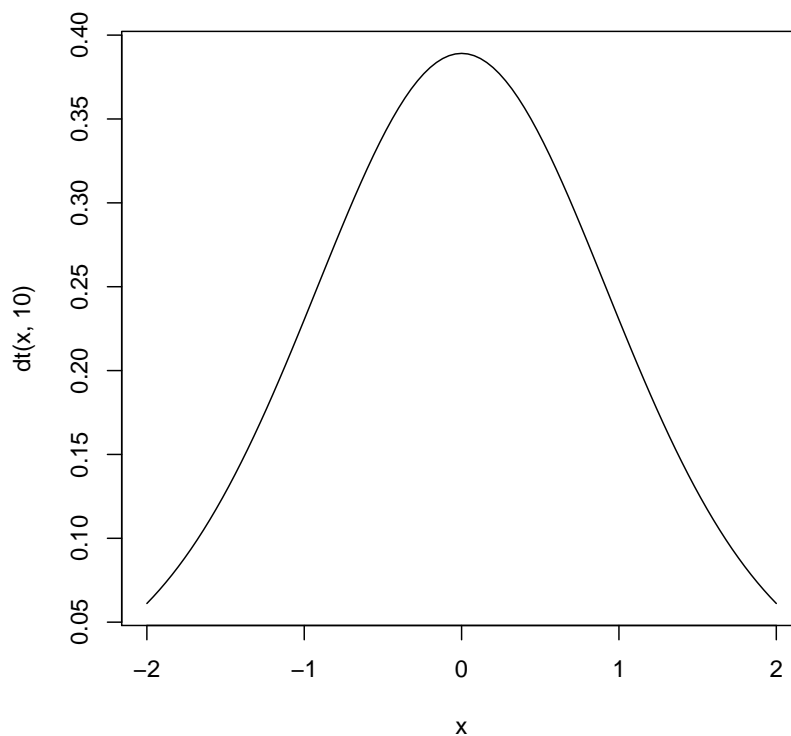


Figura 3.16: Grafico della distribuzione di Student a 10 gradi di libertà.

Ricordiamo che la distribuzione di Student si usa in particolare nei casi in cui la deviazione standard della popolazione σ non è conosciuta e viene rimpiazzata dalla deviazione standard campionaria S , calcolata con un numero N di dati e quindi con $N - 1$ gradi di libertà. Quando però il numero di dati si avvicina a 30 la curva di Student è praticamente sovrapposta a quella della distribuzione normale (??):

```

> curve(dnorm(x),-2,2,col=3)
> curve(dt(x,2),-2,2,col=1,add=T)
> curve(dt(x,25),-2,2,col=2,add=T)
> legend("topleft", c("df=2","df=25","normale"),pch=15,col=1:3);

```

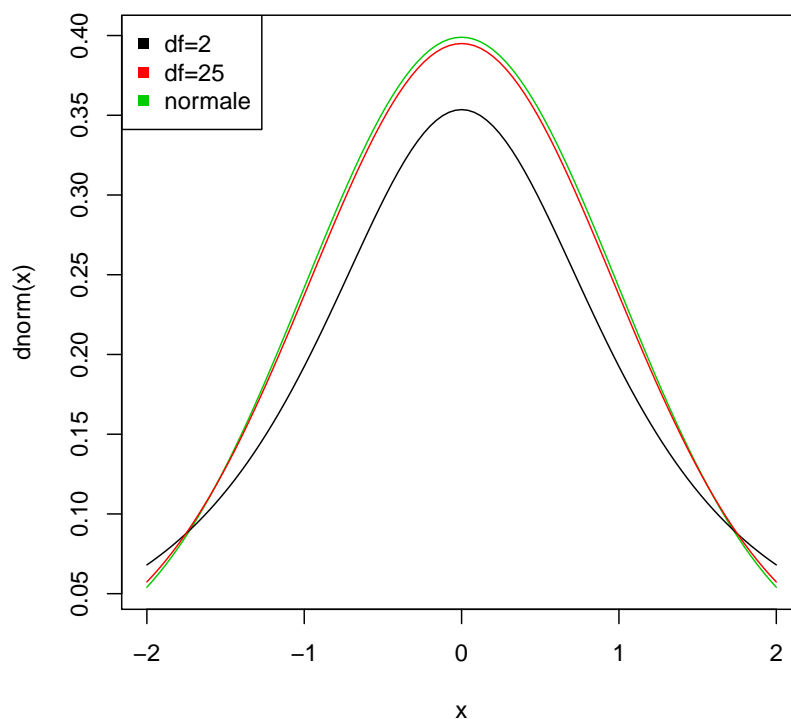


Figura 3.17: Grafico della distribuzione di Student a 10 gradi di libertà.

Come nel caso della distribuzione normale se vogliamo una funzione diciamo `student` tale che assegnato un valore di area A fornisca l'ascissa $x = student(A)$ in modo che l'area tra $-x$ e x sia esattamente pari ad A dobbiamo scrivere la funzione

```
> student<-function (A,...) qt (1/2 + A/2,...)
```

dove i puntini stanno per le variabili omesse o più esplicitamente

```
> student<-function (A,df) qt (1/2 + A/2,df)
```

dove `df` sono i gradi di libertà.

3.6.6 Intervalli di confidenza e test di Student

La funzione di R che esegue il test di Student nelle sue diverse forme è `t.test`. Nella sua forma più semplice

```
> x=1:20; t.test(x)
```

```
One Sample t-test

data:  x
t = 7.9373, df = 19, p-value = 1.884e-07
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 7.731189 13.268811
sample estimates:
mean of x
 10.5
```

In assenza di ipotesi R calcola il valore osservato del consuntivo

$$T = \frac{M_N(X) - \mu}{S_X} \sqrt{N}$$

assumendo che sia $\mu = 0$. Possiamo anche eseguire specificare l'ipotesi sul valore di μ :

```
> t.test(x,mu=7)
```

```
One Sample t-test

data:  x
t = 2.6458, df = 19, p-value = 0.01595
alternative hypothesis: true mean is not equal to 7
95 percent confidence interval:
 7.731189 13.268811
sample estimates:
mean of x
 10.5
```

Possiamo infine specificare l'ipotesi alternativa. Per esempio se l'ipotesi alternativa è "less" il risultato del test cambia completamente.

```
> t.test(x,mu=7, alternative="less")
```

```
One Sample t-test

data:  x
t = 2.6458, df = 19, p-value = 0.992
alternative hypothesis: true mean is less than 7
```

```

95 percent confidence interval:
      -Inf 12.78743
sample estimates:
mean of x
      10.5

```

In pratica ci viene fornito come p -value il valore dell'area sottesa dalla distribuzione di Student da $-\infty$ al valore di t se l'ipotesi alternativa è "less" e il valore dell'area sottesa dalla distribuzione di Student dal valore di t a $+\infty$ se l'ipotesi alternativa è "greater"

3.6.7 Test di Student per dati appaiati

Il test di Student per dati appaiati non è altro che un test di Student sulla differenza di 2 liste di dati di ugual lunghezza. Consideriamo ad esempio il confronto di 2 tecniche di misura applicate agli stessi campioni

```

> x<-c(1.46,2.22,2.84,1.97,1.13,2.35)
> y<-c(1.42,2.38,2.67,1.8,1.09,2.25)

```

Possiamo calcolare la differenza $x-y$ ed applicare il test di Student oppure ottenere lo stesso risultato specificando l'opzione `paired=TRUE`

```

> t.test(x,y,paired=TRUE)

```

```

      Paired t-test

data:  x and y
t = 1.2, df = 5, p-value = 0.2839
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.06852909  0.18852909
sample estimates:
mean of the differences
              0.06

```

Il consuntivo t cade entro la regione di accettazione del test. È possibile specificare il livello di fiducia da utilizzare per il test di Student come:

```
conf.level = numero
```

Il comando completo di tutti i parametri è quindi:

```

t.test(dati1, dati2,
      paired=TRUE, conf.level = valore)

```

Ad esempio eseguiamo un t -test per dati appaiati, tra $x = (1, 2, 3, 4)$ e $y = (3, 2, 4, 5)$ con *confidence level* di 0.85. Scriveremo

```

> t.test(1:4,5:2,paired=TRUE,conf.level=0.85)

```

Il consuntivo t cade fuori dalla regione di accettazione proposta.

3.6.8 t-test: caso ad egual varianza

Si considerino i seguenti dati relativi alla misura di una grandezza fisica.

(11.4, 23.7, 24.3, 16.5, 28.5, 26.6, 21.1, 29.9, 17.9, 25.3, 14.2)

I colori rosso e blu si riferiscono all'utilizzo di due diversi strumenti di misura. Si noti che il numero di esperimenti in rosso (esperimenti 1,4, 7,8,10) non é uguale al numero di esperimenti in blu (esperimenti 2,3,5,6,9,11): non si tratta di misure ripetute sugli stessi campioni, ma di misure effettuate su campioni diversi.

Si dica, con fiducia al 95% se esiste una differenza fra i due strumenti.

- I dati sono

11.4	16.5	21.1	29.9	25.3
------	------	------	------	------

23.7	24.3	28.5	26.6	17.9	14.2
------	------	------	------	------	------

- Ipotesi di lavoro

$$\mu_R = \mu_B$$

- Calcoliamo i valori dei parametri statistici per il campione rosso e per il campione blu.

- Indicatori:

$$m_R = 20.84$$

$$m_B = 22.53333333333333$$

$$s_R = 7.24555035866841$$

$$s_B = 5.43200392734271$$

Dobbiamo valutare il valore del consuntivo

$$t_{R,B} = \frac{(M_R - M_B) - (\mu_R - \mu_B)}{\Sigma}$$

nell'ipotesi di lavoro

$$\mu_R - \mu_B = 0 \Leftrightarrow \mu_R = \mu_B$$

dove

$$\Sigma = \sqrt{\frac{(n_R - 1)S_R^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_R + n_B - 2}} \left(\frac{1}{n_R} + \frac{1}{n_B} \right) \rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{209.992 + 147.53333333333333}{9}} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \sqrt{14.5658469135802} = 3.81652288262238$$

Il valore osservato di $t_{R,B}$ è

$$t_{R,B} = \frac{m_R - m_B}{\Sigma} = -0.44368483706557$$

La regione di accettazione è

$$[-t_{0.95,9}, t_{0.95,9}] = [-2.262, 2.262]$$

Visto che il consuntivo cade ampiamente in tale intervallo accettiamo l'ipotesi di lavoro. con R basta scrivere:

```
> R=c(11.4,16.5,21.1,29.9,25.3)
> B=c(23.7,24.3,28.5,26.6, 17.9,14.2)
> t.test(R,B,var.equal=T)
```

```
Two Sample t-test

data:  R and B
t = -0.44368, df = 9, p-value = 0.6677
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -10.326908  6.940241
sample estimates:
mean of x mean of y
 20.84000  22.53333
```

Se non potessimo ipotizzare la provenienza dei due campioni da popolazioni con ugual varianza potremmo scrivere

3.6.9 Caso generale (test di Welch)

Qualora non si possa affermare l'eguaglianza delle varianze l'errore standard della differenza delle medie si può stimare come

$$\Sigma = \sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}$$

$$df = \frac{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{(s_X^2/n_X)^2}{n_X-1} + \frac{(s_Y^2/n_Y)^2}{n_Y-1}}$$

Il consuntivo diviene

$$\frac{M_X - M_Y - (\mu_X - \mu_Y)}{\Sigma}$$

e la regione di accettazione si calcola come

$$[-t_{1-\epsilon,df}, t_{1-\epsilon,df}]$$

Esempio

Con gli stessi dati di prima si ipotizzi $\mu_X = \mu_Y$ (fiducia al 95%)

$$X = (11.4) \quad Y = (23.7)$$

$$\Sigma = \sqrt{15.4173777777778}$$

e i gradi di libertà

$$df = \frac{(15.4173777777778)^2}{(110.24160016/4 + 24.1845382716049/5)} = 7.336891688206$$

Se si usa R basta scrivere

```
> t.test(X,Y)
```

```
Welch Two Sample t-test

data:  X and Y
t = -0.43126, df = 7.3369, p-value = 0.6787
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -10.892293   7.505627
sample estimates:
mean of x mean of y
 20.84000  22.53333
```

3.6.10 Test χ^2 di indipendenza

Consideriamo il seguente *dataframe* che riporta le ambizioni di un gruppo di scolari americani

```
> data(bambini)
> str(bambini)
```

```
'data.frame':      478 obs. of  11 variables:
 $ Gender      : Factor w/ 2 levels "boy","girl": 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
 $ Grade       : int   5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 ...
 $ Age         : int   11 10 11 11 10 11 10 10 10 10 ...
 $ Race        : Factor w/ 2 levels "Other","White": 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
 $ Urban.Rural: Factor w/ 3 levels "Rural","Suburban",...: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ School      : Factor w/ 9 levels "Brentwood Elementary",...: 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 ...
 $ Goals       : Factor w/ 3 levels "Grades","Popular",...: 3 2 2 2 2 2 2 1 3 3 ...
 $ Grades      : int    1 2 4 2 4 4 3 3 3 4 ...
```

```
$ Sports      : int  2 1 3 3 2 2 4 4 2 3 ...
$ Looks       : int  4 4 1 4 1 1 1 2 1 2 ...
$ Money       : int  3 3 2 1 3 3 2 1 4 1 ...
```

Nella tabella le colonne che ci interessano al momento sono quelle che riguardano il sesso, gli obiettivi (scelti tra successo scolastico, capacità sportiva e popolarità) e la provenienza (colonne 1, 5 e 7). Nelle colonne dalla 8 alla 11 sono messi in ordine di importanza per il conseguimento della popolarità voti, sport, aspetto esteriore e denaro.

Consideriamo per esempio le variabili provenienza e traguardi

```
> interessi2=bambini[,c(5,7)]
> tabella=table(interessi2)
> tabella
```

	Goals		
Urban.Rural	Grades	Popular	Sports
Rural	57	50	42
Suburban	87	42	22
Urban	103	49	26

Il test χ^2 di indipendenza consente di verificare se due variabili sono indipendenti. Se consideriamo le due variabili precedenti sesso e interessi. R dispone del comando `chisq.test`, dalla sintassi generale:

```
chisq.test(tabella)
```

```
> chisq.test(tabella)
```

```
Pearson's Chi-squared test

data:  tabella
X-squared = 18.828, df = 4, p-value = 0.0008497
```

Nell'esempio degli studenti

```
> data(studenti)
> str(studenti)
```

```
'data.frame':      96 obs. of  8 variables:
 $ Sex : Factor w/ 2 levels "F","M": 2 2 2 1 2 1 2 2 1 1 ...
 $ W   : num  86 53 64 61 64 51 78 55 59 52 ...
 $ H   : num  1.9 1.76 1.74 1.64 1.8 1.68 1.78 1.68 1.68 1.67 ...
 $ Eyes: Factor w/ 3 levels "azzurri","castani",...: 2 1 3 2 3 2 2 2 2 2 ...
 $ Hair: Factor w/ 3 levels "biondi","castani",...: 3 2 2 2 2 2 2 3 2 2 ...
 $ Sh  : int  48 42 41 39 42 38 42 40 38 39 ...
 $ hM  : num  1.58 1.7 1.63 1.65 1.56 1.6 1.65 1.56 1.58 1.65 ...
 $ hF  : num  1.82 1.6 1.8 1.78 1.75 1.75 1.75 1.7 1.83 1.7 ...
```

```
> tabellaEH=table(studenti$Eyes,studenti$Hair)
> chisq.test(tabellaEH)
```

```
Pearson's Chi-squared test

data:  tabellaEH
X-squared = 5.9614, df = 4, p-value = 0.202
```

L'intervallo di accettazione dell'ipotesi (che ricordiamo è l'indipendenza) al 95% di fiducia e 1 gradi di libertà è $[0, 3.841]$, il consuntivo cade dentro, per cui l'ipotesi è accettata.

Se le celle in una tabella 2x2 contengono numeri bassi R utilizza la correzione di Yates. Se la si vuole eliminare si utilizza il parametro `correct=FALSE`. Ad esempio scriveremo:

```
> chisq.test(matrix(c(12,3,4,5),nc=2))
```

```
Pearson's Chi-squared test with Yates'
continuity correction

data:  matrix(c(12, 3, 4, 5), nc = 2)
X-squared = 1.8, df = 1, p-value = 0.1797
```

```
> chisq.test(matrix(c(12,3,4,5),nc=2),correct=F)
```

```
Pearson's Chi-squared test

data:  matrix(c(12, 3, 4, 5), nc = 2)
X-squared = 3.2, df = 1, p-value = 0.07364
```

3.6.11 Test χ^2 di adeguamento

Consideriamo una variabile aleatoria discreta con frequenza assoluta delle uscite racchiuse in una lista `data`. Ci si pone il problema di stabilire se tali frequenze sono compatibili con le probabilità (riportate nella lista `p`).

```
> data<-c(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)
> prob<-c(5,20,5,10,5,15,5,10,10,15)
> sum(prob)
> chisq.test(data,p=prob,rescale.p=TRUE)
```

Si è usata qui la scelta `rescale.p=TRUE` in quanto la somma delle probabilità non era 1. L'uscita del test riporta il valore del consuntivo χ^2 i gradi di libertà ed il valore p .

3.7 Distribuzione Binomiale

Il coefficiente binomiale è definito come

$$\text{choose}(n, m) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \times (n - m)!}$$

Ad esempio

```
> choose(6,3)
```

```
[1] 20
```

La distribuzione binomiale in R ha la sintassi

`dbinom(successi, prove, probabilità successo)`

e fornisce la probabilità di ottenere nel corso di un certo numero di prove il numero di successi indicato. Ad esempio, nel lancio di un dado 10 volte, vogliamo determinare la probabilità che esca *esattamente* due volte il numero 4:

```
> dbinom(2,10,1/6)
```

```
[1] 0.29071
```

La probabilità è circa del 29%.

Tabelle delle distribuzioni statistiche

Per generare la tabella delle aree sottese dalla distribuzione normale da 0 ad x si deve per prima cosa tenere conto del fatto che `pnorm` è la cumulativa ad una sola coda. Si sceglie l'intervallo di tabulazione, il numero di colonne ed il numero di cifre.

```
> start=0.01
> stop=3.00
> step=0.01;
> nc=6;
> cifre=4;
> correzione<-function(x) round(10^cifre* (pnorm(x)-0.5))/10^cifre
> tabnormale<-cbind(matrix(correzione(seq(start,stop,by=step)),nc=nc),
+ matrix(seq(start,stop,by=step),nc=nc))
> as.vector(t(matrix(c(nc+1:nc,1:nc),nc=2)))->ordinecol
> colnames( tabnormale)= rep(c( "P=A", "x"),each=6)
> rownames( tabnormale)=rep("",nrow( tabnormale))
```

In modo simile per generare la tabella della distribuzione t di Student si selezionano i livelli di fiducia di interesse e i gradi di libertà

```
> gradi=c(1:40,50,60,70,80,90,100,150,200,Inf)
> fiducia=c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.98,0.99,0.999);
> ncol=length(fiducia);
> nrow=length(gradi);
> cifre=5;
> tstud<-function(x,gradi,cifre)
+ round(10^cifre*qt((1+x)/2,gradi))/10^cifre
> tabstudent=matrix(0,ncol=ncol,nrow=nrow)
> for (i in 1:length(fiducia))
+ tabstudent[,i]= tstud(fiducia[i],gradi,5)
> rownames(tabstudent)=gradi
> colnames(tabstudent)=fiducia
```

Per la distribuzione χ^2 si procede esattamente come sopra

```
> gradi=c(1:40,50,60,70,80,90,100,150,200)
> fiducia=c(0.8,0.85,0.9,0.95,0.98,0.99,0.999);
> ncol=length(fiducia);
```

```
> nrow=length(gradi);
> cifre=4;
> chiqua<-function(x,gradi,cifre)
+ round(10^cifre*qchisq(x,gradi))/10^cifre
> tabchi=matrix(0,ncol=ncol,nrow=nrow)
> for (i in 1:length(fiducia))
+ tabchi[,i]=chiqua(fiducia[i],gradi,5)
> rownames(tabchi)=gradi
> colnames(tabchi)=fiducia
```

Per la distribuzione di Fisher occorre specificare il numero di gradi di libertà del numeratore e del denominatore e fissare i valori di significatività (0.05 e 0.01)

```
> gradinum=1:9
> gradiden=c(1:40,50,60,70,80,90,100,150,200)
> fiducia=c(0.95,0.99);
> ncol=length(gradinum);
> nrow=length(gradiden);
> cifre=3;
> fisher95<-function(gradinum,gradiden,cifre)
+ round(10^cifre*qf(fiducia[1],gradinum,gradiden))/10^cifre
> fisher095=matrix(0,ncol=ncol,nrow=nrow);
> for (i in 1:length(gradinum))
+ fisher095[,i]= fisher95(gradinum[i],gradiden,cifre)
> rownames(fisher095)=gradiden
> colnames(fisher095)=gradinum
> fisher099=fisher095;
> fisher99<-function(gradinum,gradiden,cifre)
+ round(10^cifre*qf(fiducia
+ [2],gradinum,gradiden))/10^cifre;for (i in 1:length(gradinum))
> fisher099[,i]= fisher99(gradinum[i],gradiden,cifre-1)
```

Aree A della distribuzione normale da 0 ad x

x	P=A	x	P=A	x	P=A	x	P=A	x	P=A	x	P=A
0.01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3438	1.51	0.4345	2.01	0.4778	2.51	0.4940
0.02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.02	0.4783	2.52	0.4941
0.03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.03	0.4788	2.53	0.4943
0.04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.04	0.4793	2.54	0.4945
0.05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	1.55	0.4394	2.05	0.4798	2.55	0.4946
0.06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.06	0.4803	2.56	0.4948
0.07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.07	0.4808	2.57	0.4949
0.08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.08	0.4812	2.58	0.4951
0.09	0.0359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.09	0.4817	2.59	0.4952
0.10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.10	0.4821	2.60	0.4953
0.11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.11	0.4826	2.61	0.4955
0.12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.12	0.4830	2.62	0.4956
0.13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	0.3708	1.63	0.4484	2.13	0.4834	2.63	0.4957
0.14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.14	0.4838	2.64	0.4959
0.15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.15	0.4842	2.65	0.4960
0.16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.16	0.4846	2.66	0.4961
0.17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.17	0.4850	2.67	0.4962
0.18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.18	0.4854	2.68	0.4963
0.19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.19	0.4857	2.69	0.4964
0.20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.20	0.4861	2.70	0.4965
0.21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.21	0.4864	2.71	0.4966
0.22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3888	1.72	0.4573	2.22	0.4868	2.72	0.4967
0.23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3907	1.73	0.4582	2.23	0.4871	2.73	0.4968
0.24	0.0948	0.74	0.2704	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.24	0.4875	2.74	0.4969
0.25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.25	0.4878	2.75	0.4970
0.26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.26	0.4881	2.76	0.4971
0.27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.27	0.4884	2.77	0.4972
0.28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.28	0.4887	2.78	0.4973
0.29	0.1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.29	0.4890	2.79	0.4974
0.30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2.30	0.4893	2.80	0.4974
0.31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.31	0.4896	2.81	0.4975
0.32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.32	0.4898	2.82	0.4976
0.33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.33	0.4901	2.83	0.4977
0.34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.34	0.4904	2.84	0.4977
0.35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.35	0.4906	2.85	0.4978
0.36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.36	0.4909	2.86	0.4979
0.37	0.1443	0.87	0.3078	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.37	0.4911	2.87	0.4979
0.38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.38	0.4913	2.88	0.4980
0.39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.39	0.4916	2.89	0.4981
0.40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.40	0.4918	2.90	0.4981
0.41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.41	0.4920	2.91	0.4982
0.42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.42	0.4922	2.92	0.4982
0.43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.43	0.4925	2.93	0.4983
0.44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.44	0.4927	2.94	0.4984

0.45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.45	0.4929	2.95	0.4984
0.46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.46	0.4931	2.96	0.4985
0.47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.47	0.4932	2.97	0.4985
0.48	0.1844	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.48	0.4934	2.98	0.4986
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	2.49	0.4936	2.99	0.4986
0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.00	0.4772	2.50	0.4938	3.00	0.4987

Distribuzione di Student

```
> tabstudent
```

	0.8	0.85	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	3.07768	4.16530	6.31375	12.70620	31.82052	63.65674	636.61925
2	1.88562	2.28193	2.91999	4.30265	6.96456	9.92484	31.59905
3	1.63774	1.92432	2.35336	3.18245	4.54070	5.84091	12.92398
4	1.53321	1.77819	2.13185	2.77645	3.74695	4.60409	8.61030
5	1.47588	1.69936	2.01505	2.57058	3.36493	4.03214	6.86883
6	1.43976	1.65017	1.94318	2.44691	3.14267	3.70743	5.95882
7	1.41492	1.61659	1.89458	2.36462	2.99795	3.49948	5.40788
8	1.39682	1.59222	1.85955	2.30600	2.89646	3.35539	5.04131
9	1.38303	1.57374	1.83311	2.26216	2.82144	3.24984	4.78091
10	1.37218	1.55924	1.81246	2.22814	2.76377	3.16927	4.58689
11	1.36343	1.54756	1.79588	2.20099	2.71808	3.10581	4.43698
12	1.35622	1.53796	1.78229	2.17881	2.68100	3.05454	4.31779
13	1.35017	1.52992	1.77093	2.16037	2.65031	3.01228	4.22083
14	1.34503	1.52310	1.76131	2.14479	2.62449	2.97684	4.14045
15	1.34061	1.51723	1.75305	2.13145	2.60248	2.94671	4.07277
16	1.33676	1.51213	1.74588	2.11991	2.58349	2.92078	4.01500
17	1.33338	1.50766	1.73961	2.10982	2.56693	2.89823	3.96513
18	1.33039	1.50371	1.73406	2.10092	2.55238	2.87844	3.92165
19	1.32773	1.50019	1.72913	2.09302	2.53948	2.86093	3.88341
20	1.32534	1.49704	1.72472	2.08596	2.52798	2.84534	3.84952
21	1.32319	1.49419	1.72074	2.07961	2.51765	2.83136	3.81928
22	1.32124	1.49162	1.71714	2.07387	2.50832	2.81876	3.79213
23	1.31946	1.48928	1.71387	2.06866	2.49987	2.80734	3.76763
24	1.31784	1.48714	1.71088	2.06390	2.49216	2.79694	3.74540
25	1.31635	1.48517	1.70814	2.05954	2.48511	2.78744	3.72514
26	1.31497	1.48336	1.70562	2.05553	2.47863	2.77871	3.70661
27	1.31370	1.48169	1.70329	2.05183	2.47266	2.77068	3.68959
28	1.31253	1.48014	1.70113	2.04841	2.46714	2.76326	3.67391
29	1.31143	1.47870	1.69913	2.04523	2.46202	2.75639	3.65941
30	1.31042	1.47736	1.69726	2.04227	2.45726	2.75000	3.64596
31	1.30946	1.47611	1.69552	2.03951	2.45282	2.74404	3.63346
32	1.30857	1.47494	1.69389	2.03693	2.44868	2.73848	3.62180
33	1.30774	1.47384	1.69236	2.03452	2.44479	2.73328	3.61091
34	1.30695	1.47281	1.69092	2.03224	2.44115	2.72839	3.60072
35	1.30621	1.47184	1.68957	2.03011	2.43772	2.72381	3.59115
36	1.30551	1.47092	1.68830	2.02809	2.43449	2.71948	3.58215
37	1.30485	1.47005	1.68709	2.02619	2.43145	2.71541	3.57367
38	1.30423	1.46923	1.68595	2.02439	2.42857	2.71156	3.56568
39	1.30364	1.46846	1.68488	2.02269	2.42584	2.70791	3.55812
40	1.30308	1.46772	1.68385	2.02108	2.42326	2.70446	3.55097
50	1.29871	1.46199	1.67591	2.00856	2.40327	2.67779	3.49601
60	1.29582	1.45820	1.67065	2.00030	2.39012	2.66028	3.46020
70	1.29376	1.45550	1.66691	1.99444	2.38081	2.64790	3.43501

80	1.29222	1.45349	1.66412	1.99006	2.37387	2.63869	3.41634
90	1.29103	1.45192	1.66196	1.98667	2.36850	2.63157	3.40194
100	1.29007	1.45067	1.66023	1.98397	2.36422	2.62589	3.39049
150	1.28722	1.44694	1.65508	1.97591	2.35146	2.60900	3.35657
200	1.28580	1.44508	1.65251	1.97190	2.34514	2.60063	3.33984
Inf	1.28155	1.43953	1.64485	1.95996	2.32635	2.57583	3.29053

Distribuzione χ^2

```
> tabchi
```

	0.8	0.85	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	1.64237	2.07225	2.70554	3.84146	5.41189	6.63490	10.82757
2	3.21888	3.79424	4.60517	5.99146	7.82405	9.21034	13.81551
3	4.64163	5.31705	6.25139	7.81473	9.83741	11.34487	16.26624
4	5.98862	6.74488	7.77944	9.48773	11.66784	13.27670	18.46683
5	7.28928	8.11520	9.23636	11.07050	13.38822	15.08627	20.51501
6	8.55806	9.44610	10.64464	12.59159	15.03321	16.81189	22.45774
7	9.80325	10.74790	12.01704	14.06714	16.62242	18.47531	24.32189
8	11.03009	12.02707	13.36157	15.50731	18.16823	20.09024	26.12448
9	12.24215	13.28804	14.68366	16.91898	19.67902	21.66599	27.87716
10	13.44196	14.53394	15.98718	18.30704	21.16077	23.20925	29.58830
11	14.63142	15.76710	17.27501	19.67514	22.61794	24.72497	31.26413
12	15.81199	16.98931	18.54935	21.02607	24.05396	26.21697	32.90949
13	16.98480	18.20198	19.81193	22.36203	25.47151	27.68825	34.52818
14	18.15077	19.40624	21.06414	23.68479	26.87276	29.14124	36.12327
15	19.31066	20.60301	22.30713	24.99579	28.25950	30.57791	37.69730
16	20.46508	21.79306	23.54183	26.29623	29.63318	31.99993	39.25235
17	21.61456	22.97703	24.76904	27.58711	30.99505	33.40866	40.79022
18	22.75955	24.15547	25.98942	28.86930	32.34616	34.80531	42.31240
19	23.90042	25.32885	27.20357	30.14353	33.68743	36.19087	43.82020
20	25.03751	26.49758	28.41198	31.41043	35.01963	37.56623	45.31475
21	26.17110	27.66201	29.61509	32.67057	36.34345	38.93217	46.79704
22	27.30145	28.82245	30.81328	33.92444	37.65950	40.28936	48.26794
23	28.42879	29.97919	32.00690	35.17246	38.96831	41.63840	49.72823
24	29.55332	31.13246	33.19624	36.41503	40.27036	42.97982	51.17860
25	30.67520	32.28249	34.38159	37.65248	41.56607	44.31410	52.61966
26	31.79461	33.42947	35.56317	38.88514	42.85583	45.64168	54.05196
27	32.91169	34.57358	36.74122	40.11327	44.13999	46.96294	55.47602
28	34.02657	35.71499	37.91592	41.33714	45.41885	48.27824	56.89229
29	35.13936	36.85383	39.08747	42.55697	46.69270	49.58788	58.30117
30	36.25019	37.99025	40.25602	43.77297	47.96180	50.89218	59.70306
31	37.35914	39.12437	41.42174	44.98534	49.22640	52.19139	61.09831
32	38.46631	40.25630	42.58475	46.19426	50.48670	53.48577	62.48722
33	39.57179	41.38614	43.74518	47.39988	51.74292	54.77554	63.87010
34	40.67565	42.51399	44.90316	48.60237	52.99524	56.06091	65.24722

35	41.77796	43.63994	46.05879	49.80185	54.24383	57.34207	66.61883
36	42.87880	44.76407	47.21217	50.99846	55.48886	58.61921	67.98517
37	43.97822	45.88645	48.36341	52.19232	56.73047	59.89250	69.34645
38	45.07628	47.00717	49.51258	53.38354	57.96880	61.16209	70.70289
39	46.17303	48.12628	50.65977	54.57223	59.20398	62.42812	72.05466
40	47.26854	49.24385	51.80506	55.75848	60.43613	63.69074	73.40196
50	58.16380	60.34599	63.16712	67.50481	72.61325	76.15389	86.66082
60	68.97207	71.34110	74.39701	79.08194	84.57995	88.37942	99.60723
70	79.71465	82.25535	85.52704	90.53123	96.38754	100.42518	112.31693
80	90.40535	93.10575	96.57820	101.87947	108.06934	112.32879	124.83922
90	101.05372	103.90406	107.56501	113.14527	119.64846	124.11632	137.20835
100	111.66671	114.65882	118.49800	124.34211	131.14168	135.80672	149.44925
150	164.34919	167.96177	172.58121	179.58063	187.67850	193.20769	209.26460
200	216.60878	220.74413	226.02105	233.99427	243.18692	249.44512	267.54053

Tabella della distribuzione di Fisher 95%

> fisher095

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265

27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211
31	4.160	3.305	2.911	2.679	2.523	2.409	2.323	2.255	2.199
32	4.149	3.295	2.901	2.668	2.512	2.399	2.313	2.244	2.189
33	4.139	3.285	2.892	2.659	2.503	2.389	2.303	2.235	2.179
34	4.130	3.276	2.883	2.650	2.494	2.380	2.294	2.225	2.170
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161
36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.209	2.153
37	4.105	3.252	2.859	2.626	2.470	2.356	2.270	2.201	2.145
38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.463	2.349	2.262	2.194	2.138
39	4.091	3.238	2.845	2.612	2.456	2.342	2.255	2.187	2.131
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927

>

Tabella della distribuzione di Fisher 99%

> fisher099

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
31	7.53	5.36	4.48	3.99	3.67	3.45	3.28	3.15	3.04
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
33	7.47	5.31	4.44	3.95	3.63	3.41	3.24	3.11	3.00
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
37	7.37	5.23	4.36	3.87	3.56	3.33	3.17	3.04	2.93
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
39	7.33	5.19	4.33	3.84	3.53	3.30	3.14	3.01	2.90
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67

80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.91	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50