



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di
Ingegneria

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Meccanica

Analisi e confronto dei sistemi di controllo imbardata di un modello di veicolo a guida autonoma

**Analysis and comparison among yaw
rate steering control systems of an
autonomous vehicle model**

Candidato
Maurizio Pio Vergara

Relatore/i
Michele Basso

Abstract

Questo lavoro di tesi tratta lo studio e l'analisi di tre differenti sistemi di controllo sterzata di un modello di veicolo con lo scopo di ottimizzare le performance di imbardata e di slittamento laterale della vettura. I dati del veicolo in scala sono relativi al modello disponibile nel laboratorio messo a disposizione dall'Università degli studi di Firenze.

Inizialmente è stata eseguita l'analisi e la modellazione del veicolo sia nel caso lineare, sia nel caso non lineare. Dopodiché è stato utilizzato Simulink per implementare il modello e verificare l'andamento dei parametri in uscita, quali imbardata e angolo di slittamento.

È stata eseguita una ricerca dei sistemi di controllo in letteratura e infine questi sono stati implementati tramite Simulink nel nostro modello di veicolo, così da poter eseguire un confronto sulle loro performance con la finalità di capire quale sistema di controllo consente maggior sicurezza e prestazioni di guida per il modello in esame.

L'obiettivo principale è quello di contribuire alla crescente base di conoscenze nel campo del controllo anti-sbandata per veicoli autonomi, offrendo soluzioni innovative e pratiche che possano migliorare la sicurezza stradale e promuovere l'adozione su larga scala della guida autonoma e dei suoi sistemi di controllo.

Indice

Notazione	5
Introduzione	7
1 - Modellazione del veicolo	13
1.1 - Modello lineare 2DOF	13
1.1.1 - Parametri del veicolo	15
1.1.2 - Analisi di stabilità e condizioni al regime	15
1.1.3 - Implementazione su Simulink	17
1.2 - Modello non lineare 3DOF	18
1.2.1 - Implementazione su Simulink	20
1.2.2 - Simulazioni open-loop.....	20
1.2.3 - Confronto fra modello non lineare e lineare.....	21
2 - Controllo attivo di imbardata	29
2.1 - Controllo AFS del primo ordine.....	29
2.1.1 - Analisi di stabilità.....	31
2.1.2 - Scelta dei guadagni k_1 e k_2	33
2.1.3 - Risultati del controllore.....	34
2.2 - Controllore PI.....	38
2.2.1 - Funzionalità anti-windup	40
2.2.2 - Azione derivativa e controllore PID.....	42
3 - Controllo imbardata 4WAS.....	45
3.1 - Azioni di feedforward e di feedback.....	46
3.1.1 - Controllo in feedforward.....	47
3.1.2 - Controllo in feedback	48
3.1.3 - Implementazione su Simulink	49
3.2 - Simulazioni e risultati	49
3.3 - Estensione dello spazio di stato	52

3.3.1 - Simulazioni e confronto fra stato x e x'	54
3.4 - Confronto tra 4WAS e AFS	56
Conclusioni	59
Allegato A	60
A.1 Script modello lineare	60
Allegato B	61
B.1 Script controllore AFS	61
B.2 AFS_Control Function.....	61
Allegato C	62
C.1 Script controllore 4WAS.....	62
Bibliografia	63

Notazione

δ_f : angolo di sterzo delle ruote anteriori [rad]

δ_r : angolo di sterzo delle ruote posteriori [rad]

I_{zz} : momento di inerzia del veicolo rispetto l'asse z (o di imbardata) [kg m^2]

v : velocità longitudinale del veicolo [m/s]

m : massa del veicolo [kg]

F_{xf}, F_{xr} : forze longitudinali applicate alle ruote anteriori e posteriori [N]

F_{xft}, F_{xrt} : forze longitudinali degli pneumatici applicate alle ruote anteriori e posteriori [N]

F_{yf}, F_{yr} : forze laterali applicate alle ruote anteriori e posteriori [N]

F_{yft}, F_{yrt} : forze laterali degli pneumatici applicate alle ruote anteriori e posteriori [N]

F_{zf}, F_{zr} : forze nominali applicate alle ruote anteriori e posteriori, lungo l'asse z fisso del veicolo [N]

F_{znorm} : forza normale applicata lungo l'asse z fisso del veicolo [N]

β : (side slip angle) angolo di slittamento laterale tra la direzione dell'asse del veicolo passante per il centro di massa del veicolo stesso e la direzione della velocità dello stesso punto [rad]

α_f, α_r : angolo di slittamento laterale rispettivamente degli pneumatici anteriore e posteriore [rad]

r : (yaw rate) tasso di imbardata [rad/s]

l : lunghezza totale del veicolo [m]

l_f, l_r : distanza rispettivamente dell'asse anteriore e posteriore del veicolo dal centro di massa [m]

h : altezza del baricentro del veicolo sopra il piano dell'asse [m]

c_f, c_r : (cornering stiffness) rigidità in curva rispettivamente della ruota anteriore e posteriore [N/rad]

Introduzione

L'ingegneria meccanica è da sempre un campo di ricerca in costante evoluzione e questa è intrinsecamente legata al progresso tecnologico e all'innovazione nell'industria automobilistica. Uno dei settori più dinamici all'interno di questa disciplina è il controllo dei veicoli, soprattutto quando si tratta di veicoli autonomi. La guida autonoma rappresenta una pietra miliare nell'evoluzione del trasporto terrestre, promettendo una maggiore sicurezza stradale, efficienza energetica e comodità per gli utenti. Il primo sistema di controllo introdotto per migliorare la sicurezza del veicolo è l'ABS (Anti-Lock Braking Systems). Presentato inizialmente da Volvo nel 1974 e in seguito commercializzato a livello globale da Bosch.

Uno degli aspetti critici sia della guida non autonoma quanto della guida autonoma è la capacità del veicolo di mantenere la stabilità durante le manovre ad alta velocità o in situazioni di emergenza, prevenendo efficacemente lo sbandamento, ovvero la perdita di controllo della vettura. Ogni veicolo è progettato per lavorare all'interno di una zona di comfort o di performance che può essere definita tramite i parametri della dinamica del veicolo. Spingendolo oltre queste zone sopra descritte a causa degli input del pilota o di elementi derivanti dall'ambiente esterno, quali condizioni della strada, usura degli pneumatici ecc., la sicurezza della vettura e dei suoi passeggeri può essere messa a rischio; i parametri che determinano la dinamica del veicolo cresceranno a tal punto che esso oltrepasserà la zona di comfort, addentrandosi in una zona critica che potrebbe essere pericolosa, portandolo alla collisione con oggetti esterni. Questa è tra le principali cause di incidenti stradali, ed è quindi fondamentale sviluppare sistemi di controllo anti-sbandata altamente efficaci. Per tale motivo la ricerca ha spinto verso il campo del controllo attivo della dinamica di un veicolo, ovvero lo studio di sistemi di sicurezza in grado di rilevare attraverso dei sensori i parametri della vettura. L'elaborazione di tali dati avviene con l'ausilio di un software, il quale è progettato ad hoc per ricevere, elaborare e modificare i parametri della dinamica della vettura, garantendo la stabilità e il comfort.

Questo elaborato propone l'analisi e il confronto di tre differenti sistemi di controllo anti-sbandata utilizzando come modello di riferimento un veicolo a guida autonoma in scala. Esso è stato progettato in laboratorio e messo a disposizione dall'Università degli Studi di Firenze (figura 1) e ci consentirà di condurre esperimenti in un ambiente controllato, al fine di comprendere al meglio le dinamiche del veicolo e valutare l'efficacia dei sistemi di controllo proposti.

Nel corso di questa tesi, verranno esaminate le teorie di base relative alla dinamica dei veicoli e al controllo anti-sbandata. Successivamente, verrà sviluppato un modello matematico del veicolo sia nel caso lineare che non lineare e saranno confrontati i dati in uscita dai due modelli, quali yaw rate e angolo di slittamento laterale. Saranno analizzati ed implementati, inoltre, dei sistemi di controllo per prevenire lo sbandamento a seguito della variazione di traiettoria del veicolo, dettata dall'angolo di sterzo delle ruote con velocità di riferimento costante. Si utilizzeranno simulazioni avanzate per valutare le prestazioni di questi sistemi in condizioni reali, considerando fattori come l'aderenza e la rigidezza degli pneumatici, le condizioni della strada e le variazioni dei parametri del veicolo.



Figura 1 – Modello di auto a guida autonoma o radiocomandata

I sistemi di sicurezza attiva sono classificati come DAS (Driver Assistance Systems) e ADAS (Advanced DAS), così come riportato nel documento [1]. Le differenze principali risiedono nel tipo di sensori, in che modo questi sfruttano le informazioni ricevute e la condivisione di tali informazioni. I sistemi DAS puntano a ricostruire lo stato del veicolo tramite un sistema di riferimento inerziale ed il rilevamento di informazioni quali velocità delle ruote, accelerazione, ecc. Gli ADAS dispongono di sensori avanzati quali radar, lidar, camere con lente fish-eye e così via, i quali consentono una mappatura dell'ambiente circostante. La collaborazione tra hardware e software fa sì che la vettura sia in grado di prendere decisioni per prevenire situazioni di pericolo o per evitare incidenti. I veicoli a guida autonoma sfruttano proprio gli ADAS per tracciare e comunicare con l'ambiente circostante. Esistono 6 livelli di guida autonoma (da 0 a 5) secondo lo standard SAE (Society of Automotive Engineers) che vanno dall'assenza di autonomia della vettura, come per i sensori di parcheggio o il riconoscimento dei cartelli stradali, fino alla guida autonoma dove il guidatore diventa passeggero poiché l'auto è in grado di prendere decisioni senza l'ausilio del pilota.

Uno schema generalizzato di un sistema di controllo attivo della dinamica di un veicolo è mostrato in figura 2. Questo particolare sistema utilizza i dati prelevati in uscita dal veicolo per confrontarli con i valori desiderati del modello di riferimento. I dati del veicolo vengono misurati tramite dei sensori mentre un software calcola la differenza tra questi e i dati di riferimento desiderati. La differenza fra questi valori genera un errore, il quale sarà proprio l'ingresso al controllore. Questo informerà l'attuatore con un segnale in uscita che descrive il moto dell'attuatore stesso. Questo intero processo andrà ad influenzare la dinamica del veicolo e di conseguenza questo ciclo, chiamato ad anello chiuso, continuerà fintanto l'errore sarà diversamente nullo. Questo è un classico schema di controllo dell'errore in retroazione.

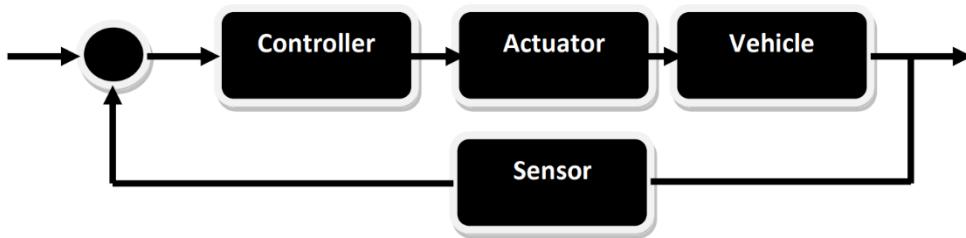


Figura 2 – Schema generale di controllo attivo della dinamica di un veicolo [2]

I sistemi di controllo attivo della dinamica di un veicolo possono essere categorizzati in due gruppi: quelli che influenzano la direzione del veicolo e quelli che controllano una funzione di un sottosistema del veicolo. Il primo gruppo si divide in tre aree: controllo longitudinale, controllo laterale e controllo verticale, mentre il secondo gruppo riguarda il controllo attivo delle sospensioni, della frenata, della sterzata, ecc. Verrà trattato nello specifico il controllo laterale con il fine di migliorare la stabilità e l'handling della vettura. La figura 3 mostra le macroaree del controllo laterale della dinamica di un veicolo. Si osserva un sistema di controllo della stabilità di imbardata, un sistema di rilevamento e avviso di carreggiata e, infine, un sistema atto al mantenimento della corsia. Dando uno sguardo nello specifico ai sottogruppi relativi alla stabilità di imbardata, è fondamentale l'elaborazione di un modello della vettura sia nel caso lineare che non lineare per procedere con lo studio. Per raggiungere gli obiettivi del controllore, c'è bisogno di controllare le variabili di imbardata e di angolo di slittamento laterale, così da garantire la stabilità della vettura. Per l'inseguimento dei valori desiderati di imbardata e angolo di slittamento laterale è necessario che il sistema risponda rapidamente e che abbia una buona capacità di tracciamento della traiettoria. Durante situazioni critiche di guida o di manovra, per evitare incidenti, ci sarà bisogno di un Active Chassis Control di sterzata o di frenata o l'integrazione di entrambi i sistemi. In condizioni reali di guida è probabile che fattori esterni come variazione della superficie stradale, vento ecc. possano influenzare l'imbardata e l'angolo di slittamento. Questi sono considerati dei disturbi in ottica di un sistema di controllo, tali da alterarne le performance. Le strategie di controllo tengono conto di tali situazioni e per tale motivo gli studi hanno portato alla realizzazione di un sistema di controllo robusto in grado di limitare incertezze e disturbi esterni. Lo studio della stabilità del sistema di controllo è quindi fondamentale per l'implementazione del sistema nei casi reali di utilizzo della vettura.

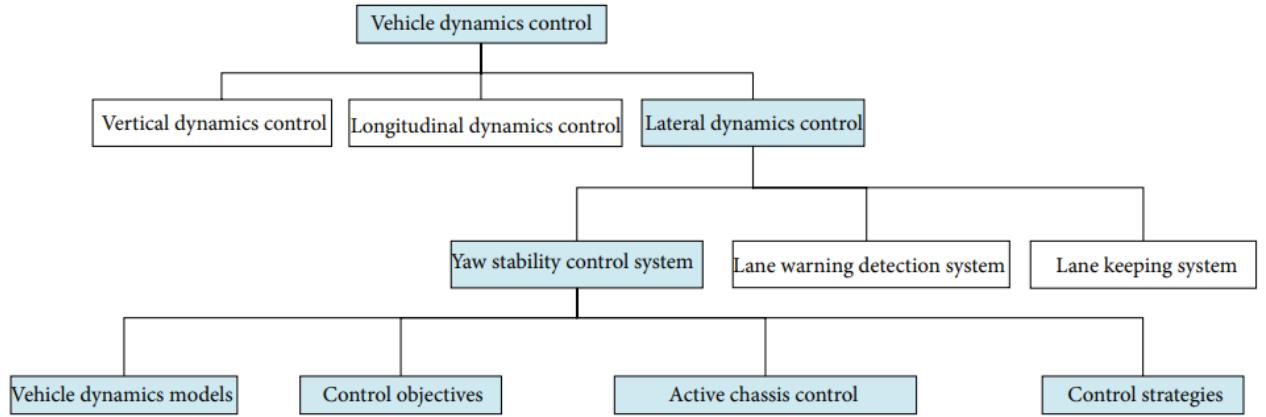


Figura 3 – Schema rappresentativo dei sottogruppi che compongono il controllo della dinamica del veicolo [3]

La modellazione del veicolo attraverso un'analisi matematica dei dati è di fondamentale importanza. Questa serve a descrivere la dinamica del moto del veicolo e si basa sulla seconda legge di Newton che descrive le forze e i momenti agenti sugli assi del veicolo e sulle rispettive ruote. Come si può osservare dalla figura 4 esistono due tipi di modelli: modello non lineare e modello lineare [3]. Entrambi dipendono dal numero di gradi di libertà della vettura. Nel corso dell'elaborato verranno considerati 2 DOF (Degree Of Freedom) per il modello lineare semplificato (vedi figura 5) e 3 DOF "single track" per il modello non lineare.

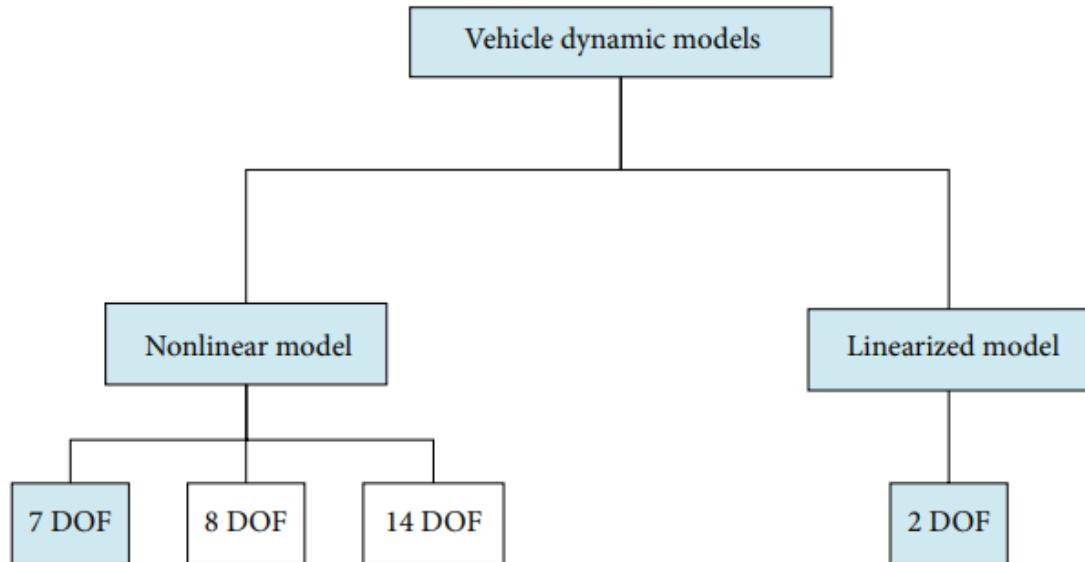


Figura 4 – Classificazione dei modelli dinamici del veicolo [3]

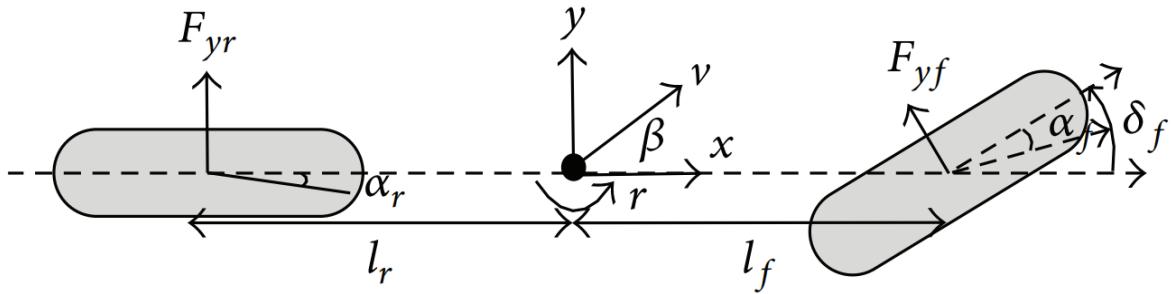


Figura 5 – Modello bicicletta lineare semplificato (2 DOF) [3]

F_{yf}, F_{yr} : Forze laterali sulle ruote anteriori e posteriori

l_f, l_r : distanza da asse posteriore/anteriore al centro di gravità del veicolo

r : Imbardata (Yaw Rate)

β : Angolo di slittamento laterale (Side Slip Angle)

α_f, α_r : Angolo di slittamento laterale degli pneumatici

δ_f : Angolo di sterzo delle ruote (Steering Angle)

La variabile di ingresso del modello è δ_f mentre le variabili in uscita da controllare sono β e r . Oltre ai parametri sopra citati, gli altri valori necessari alla modellazione del veicolo sono la velocità v lungo l'asse x del veicolo, presa solidale al centro di gravità, la massa m della vettura, il momento di inerzia I_{zz} e la rigidità in curva degli pneumatici anteriori e posteriori (Cornering Stiffness) c_f e c_r .

Ogni sistema di controllo si pone un obiettivo da raggiungere. In questo caso le variabili di imbardata e angolo di slittamento laterale sono fondamentali. I sistemi di controllo di stabilità di imbardata possono essere classificati in tre categorie in base al loro scopo, ovvero, controllo dell'imbardata, controllo dell'angolo di slittamento laterale e controllo di entrambe le variabili, così come mostrato in figura 6.

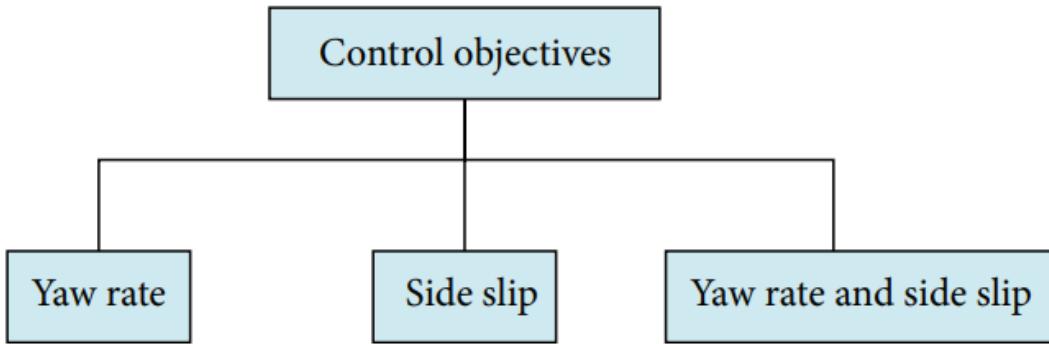


Figura 6 – Obiettivi del sistema di controllo [3]

I sottosistemi che costituiscono l'impianto frenante o di sterzata, così come gli attuatori, fanno parte della struttura del veicolo, anche detta chassis. Gli obiettivi di un controllo attivo di stabilità di imbardata possono essere raggiunti utilizzando un controllo attivo dello chassis (vedi figura 7). Questo può dipendere da un controllo sul momento di imbardata (direct yaw moment control), o da un controllo attivo di sterzata (active steering control), oppure dall'integrazione di entrambi i sistemi di controllo. La figura 8 mostra i vantaggi e svantaggi nell'utilizzo delle varie tipologie di controllo attivo dello chassis relativo agli attuatori controllati.

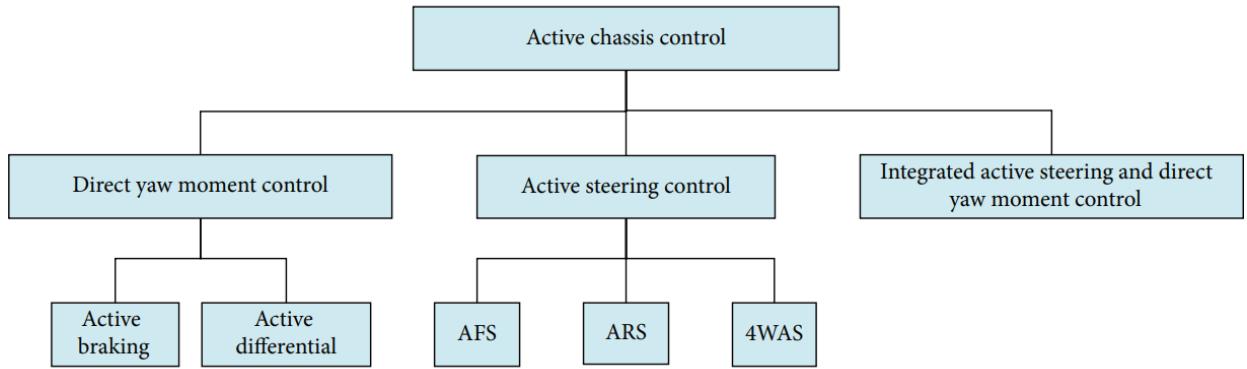


Figura 7 – Active Chassis Control [3]

Vehicle actuator	Active chassis control	Advantages	Disadvantages
Brakes	Direct yaw moment control (DYC)	Active braking active differential	(i) Effective for critical driving condition (ii) Good for sideslip/wheelslip control (i) Less effective for braking on split road surface (ii) Decrease yaw rate during steady state driving condition (iii) Active differential need extra devices
		Active front steering (AFS) control	(i) Effective for steady state driving condition (ii) Ease to integrate with braking control (iii) Good for yaw rate control Less effective during critical driving condition
Steering	Active steering control (ASC)	Active rear steering (ARS) control	(i) Rear wheel steer angle can be controlled (ii) Good for yaw rate control Less effective during critical driving condition
		4 wheels active steering (4WAS) control	(i) Two different steer inputs (ii) Good for yaw rate control Less effective during critical driving condition
Steering and brake	Integrated AFS-DYC control		(i) Two different inputs from two different actuator (steering and braking) (ii) Good for yaw rate and sideslip control Effective for critical and steady state driving condition

Figura 8 – Tipologie di Active Chassis Control [3]

La tipologia DYC (Direct Yaw Moment Control) è utilizzata quando gli attuatori controllati riguardano l'impianto frenante. Ha il vantaggio di incrementare la sicurezza in condizioni critiche di guida e di riuscire a controllare lo slittamento laterale delle ruote. Ha di contro lo svantaggio di essere poco efficace su strade il cui manto è discontinuo, di avere valore a regime di imbardata inferiore rispetto a quello di riferimento e, infine, dato che necessita di un differenziale attivo, avrà anche bisogno di ulteriori dispositivi affinché il controllo dello chassis possa essere realizzato.

La tipologia ASC (Active Steering Control) si suddivide in Active Front Steering (AFS), Active Rear Steering (ARS) e 4 Wheels Active Steering (4WAS). Tutte le tipologie di ASC hanno lo stesso svantaggio, ovvero quello di essere poco efficaci durante condizioni critiche di guida. Hanno il vantaggio di lavorare bene per il controllo della stabilità di imbardata oltre ad essere efficaci nelle condizioni di guida a regime in uno stato stazionario.

Integrando entrambi i sistemi avremo un ottimo controllo sia di imbardata che di slittamento laterale, andando però a perdere l'efficacia durante le condizioni critiche di guida e in uno stato stazionario.

In figura 9 è mostrato uno schema generale utilizzato per il controllo di tipo AFS. La teoria che sta dietro al funzionamento di tale schema è stata spiegata in precedenza trattando la figura 1.1.

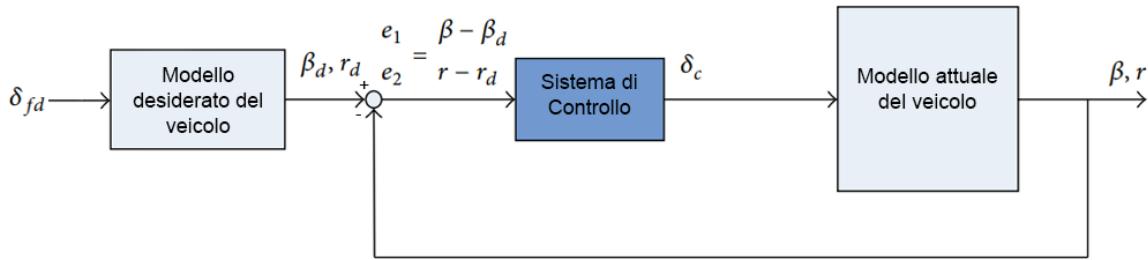


Figura 9 – Schema di controllo con feedback dell'errore

Nella realtà dei fatti la dinamica di un veicolo stradale è fortemente non lineare e contenente incertezze. La non-linearietà del sistema potrebbe rendere instabile il moto della vettura specialmente in condizioni critiche, come ad esempio durante le manovre in curve strette. I problemi principali del controllo dell'imbardata e dell'angolo di slittamento laterale sono le incertezze causate dalla variazione di parametri dinamici, come discusso in precedenza, quali il coefficiente di attrito della superficie stradale, la rigidità degli pneumatici in curva, la velocità del veicolo e il suo momento di inerzia. Esistono anche disturbi provenienti dall'ambiente esterno, basti pensare al vento, che possono influenzare il controllo del monitoraggio del valore desiderato di imbardata e di angolo di slittamento laterale. Per tale motivo è opportuno studiare appropriate strategie di controllo e algoritmi in grado di garantire la stabilità del sistema. Nel corso dell'elaborato verrà mostrato un metodo per rendere indipendenti le equazioni che descrivono il moto di imbardata e di slittamento laterale che, grazie alla regolazione di opportuni parametri, garantisce la stabilità del sistema. Gli algoritmi servono anche ad ottimizzare i transitori della risposta affinché il controllo, oltre ad essere funzionale, sia anche reattivo. In ogni caso le strategie di controllo e gli algoritmi trattati non sono progettati per migliorare i transitori di risposta in situazioni di disturbo esterno.

1 - Modellazione del veicolo

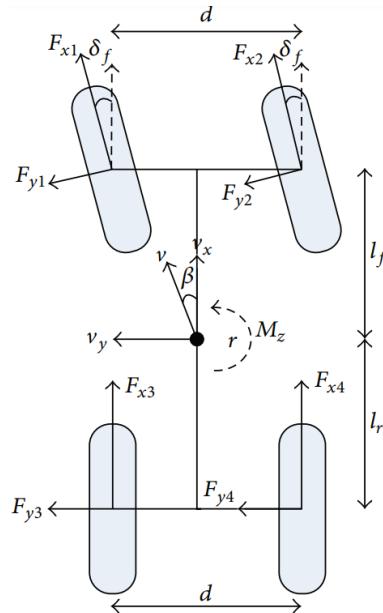


Figura 10 – Modello generale del veicolo [3]

La modellazione del veicolo è utile per poter rappresentare e, inoltre, calcolare il moto del veicolo conoscendo le forze che agiscono su di esso. Questo può essere schematizzato con le sole forze che agiscono sulle rispettive ruote e il momento nel suo centro di massa. In figura 10 si può osservare un modello generale di veicolo con la rappresentazione delle variabili e dei parametri in gioco. La variabile in ingresso di tale modello è l'angolo di sterzo anteriore δ_f , mentre le variabili da calcolare sono proprio l'imbardata r e l'angolo di slittamento laterale β . I parametri del veicolo sono la distanza fra le ruote lungo l'asse d , la distanza dell'asse anteriore (e posteriore) dal baricentro, rispettivamente l_f e l_r , la massa m del veicolo, il momento di inerzia I_{zz} lungo l'asse z. Si consideri una vettura che si muova di moto rettilineo con velocità longitudinale v costante e che ad un certo istante di tempo t modifichi la sua traiettoria, sterzando le curve di un angolo δ_f , sempre mantenendo una velocità costante per ipotesi. È possibile studiare il moto di tale vettura semplicemente formulando le equazioni di moto longitudinale, laterale e di imbardata.

1.1 - Modello lineare 2DOF

È possibile iniziare lo studio del moto del veicolo utilizzando il modello bicicletta descritto da Zheng [4], il quale semplifica il modello riducendolo a soli 2DOF. Negli studi della dinamica del veicolo il modello, mostrato in precedenza in figura 5, è molto utilizzato per lo studio della stabilità di imbardata e per la progettazione del controllo di un veicolo. Tale modello rappresenta una linearizzazione dello schema generale sulla base delle ipotesi:

1. Le forze degli pneumatici lavorano nella regione lineare
2. Il veicolo si muove su una superficie piana
3. Le ruote di destra e sinistra sull'asse anteriore e posteriore sono raggruppate in una singola ruota sulla linea centrale del veicolo
4. Velocità del veicolo costante, ovvero, accelerazione longitudinale nulla
5. Gli angoli di sterzo e di slittamento laterale sono assunti piccoli (≈ 0)
6. Non si applica alcuna frenata alle ruote
7. Il centro di gravità (CG) non cambia al variare della massa del veicolo
8. Le due ruote anteriori hanno lo stesso angolo di sterzo
9. Lo slittamento laterale desiderato nella condizione di stato stazionario è assunto uguale a zero

Assumeremo che le uniche ruote sterzanti siano quelle poste sull'asse anteriore, quindi $\delta_r = 0$. Il caso a quattro ruote sterzanti verrà analizzato nel capitolo 3.

Nel modello lineare bicicletta le uniche equazioni del moto sono di moto laterale e di imbardata poiché con velocità v costante, l'accelerazione è nulla e di conseguenza il moto longitudinale. In seguito, utilizzeremo questo modello come riferimento per ricavare la risposta desiderate di yaw rate e il valore di angolo di slittamento laterale a regime in stato stazionario.

Nel movimento planare questo modello è costituito da due gradi di libertà (2DOF), le cui equazioni del moto sono le seguenti:

- MOTO LATERALE

$$mv(\dot{\beta} + r) = F_{yf} + F_{yr} \quad 1.1$$

- MOVIMENTO DI IMBARDATA

$$I_{zz}\dot{r} = l_f F_{yf} + l_r F_{yr} \quad 1.2$$

- MOTO LONGITUDINALE

$$ma_x = 0$$

In questo modello le forze laterali anteriore e posteriore F_{yf} e F_{yr} , rispettivamente, presentano caratteristiche lineari e proporzionali al fattore di rigidità in curva anteriore e posteriore, c_f e c_r .

$$F_{yf} = c_f \alpha_f \quad 1.3$$

$$F_{yr} = c_r \alpha_r \quad 1.4$$

Gli angoli di slittamento laterale α_f e α_r degli pneumatici per l'ipotesi 1 sono:

$$\begin{cases} \alpha_f = \delta_f - \beta + \frac{l_f r}{v} \\ \alpha_r = -\beta + \frac{l_r r}{v} \end{cases} \quad 1.5$$

Con le opportune sostituzioni le due equazioni che descrivono il moto laterale e il movimento di imbardata assumono la forma:

$$\begin{cases} mv\dot{\beta} + \frac{r}{v}(mv^2 + c_f l_f - c_r l_r) + (c_f + c_r)\beta - c_f \delta_f = 0 \\ I_{zz}\dot{r} + \frac{r}{v}(c_f l_f^2 + c_r l_r^2) - (c_r l_r - c_f l_f)\beta - c_f l_f \delta_f = 0 \end{cases} \quad 1.6$$

Tale sistema può essere riscritto utilizzando il modello di spazio di stato lineare e considerando il vettore di stato $x = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix}$, con ingresso $u = \delta_f$

$$\dot{x} = Ax + Bu \longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \delta_f$$

$$a_{11} = -\frac{c_f + c_r}{mv} \quad a_{12} = -1 - \frac{c_r l_r - c_f l_f}{mv^2} \quad a_{21} = \frac{c_r l_r - c_f l_f}{I_{zz}} \quad a_{22} = -\frac{c_f l_f^2 + c_r l_r^2}{I_{zz}v}$$

$$b_1 = \frac{c_f}{mv} \quad b_2 = \frac{c_f l_f}{I_{zz}}$$

1.1.1 - Parametri del veicolo

Per la modellazione del veicolo si considerino i seguenti parametri caratteristici relativi alla vettura in esame

- $m = 8 \text{ kg}$
- $l = 0.375 \text{ m}$
- $l_f = l_r = \frac{l}{2} = 0.1875 \text{ m}$
- $c_f = c_r = [40 \div 400] \text{ N/rad}$
- $I_{zz} = 0.28125 \text{ kg m}^2$
- $v = [1 \div 4] \text{ m/s}$
- $\delta_f = [-30^\circ \div 30^\circ]$

I parametri del veicolo come massa e lunghezza sono stati calcolati in laboratorio mentre il momento di inerzia, non essendo possibile misurarlo a priori, è stato calcolato considerando che la massa del veicolo sia equivalente a due masse concentriche situate rispettivamente nel centro geometrico dell'asse anteriore e posteriore. Con tale considerazione si ottiene un baricentro indipendente dal valore della massa m .

Il centro di massa del veicolo è stato assunto per ipotesi esattamente nella metà dell'asse, tale che $l_f = l_r$.

I coefficienti di cornering stiffness sono stati assunti uguali fra loro e costanti durante tutta la durata della simulazione. Questi possono cambiare da una simulazione all'altra ma sempre restando all'interno dell'intervallo $[40 \div 400] \text{ N/rad}$. I valori di c_f e c_r dipendono dal tipo di pneumatici utilizzati, l'angolo di campanatura e anche da fattori esterni come il tipo di terreno sul quale la macchina sta viaggiando. Su una strada ghiacciata, o con poco attrito, i valori di c_f e c_r sono bassi e la vettura tenderà a sbandare mentre su strada asfaltata i valori sono più elevati, consentendo una stabilità maggiore. Questi valori non possono essere misurati e per tale motivo sono stati calcolati secondo alcune considerazioni. In letteratura si può trovare una relazione per calcolare il valore del coefficiente di rigidità in curva della ruota in accordo con i risultati ottenuti da Pacejka. Secondo l'ipotesi 1 del modello lineare del veicolo gli pneumatici lavorano nella regione lineare e dunque il coefficiente c_f sarà uguale al prodotto BCD . Tali fattori, descritti nell'articolo [5], dipendono dalla rigidità di curvatura per il carico applicato, dalla variazione di rigidità con lo slittamento, dalla progressiva variazione della rigidezza, oltre alla forza nominale verticale applicata alle ruote anteriori F_{zf} . Per le simulazioni si assumeranno valori di cornering stiffness prossimi a 40 N/rad poiché ci interessa verificare l'efficacia del sistema di controllo e risulta dunque utile un valore basso di c_f , il quale potrebbe portare all'instabilità della vettura con sistema di controllo anti-sbandata disattivato. Confronteremo, dunque, i risultati ottenuti dalla simulazione del modello lineare con e senza il sistema di controllo anti-sbandata.

Per l'ipotesi 4 del modello lineare la velocità v è costante durante l'intera durata della simulazione e sarà dunque inserita come parametro e non come variabile. Anche se nella realtà la macchina non mantiene questo valore esattamente costante, si potrebbe considerare il caso in cui la variazione di velocità sia minima, in modo tale da avere $a_x \approx 0$. Nelle varie simulazioni è stato scelto un range di velocità $v = [1 \div 4] \text{ m/s}$.

Nel modello preso in esame la variabile di ingresso da inserire è l'angolo di sterzo delle ruote anteriori δ_f . Questo valore è limitato poiché gli attuatori della macchina hanno dei limiti meccanici. Dunque, consideriamo un valore compreso tra $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$, ovvero $[-30^\circ \div 30^\circ]$. Implementando il modello su Simulink vedremo che possiamo impostare tali limiti utilizzando un saturatore di segnale.

1.1.2 - Analisi di stabilità e condizioni al regime

Per valutare la stabilità del modello sopra descritto, possiamo analizzare il sistema descritto nella forma di spazio di stato. In particolare, si analizzano gli autovalori della matrice A. La stabilità è garantita quando gli autovalori di tale matrice sono negativi. Nel caso in esame l'elemento a_{21} è nullo poiché si considerano i parametri $c_f = c_r$ e $l_f = l_r$. La matrice A risulta essere triangolare superiore. Tale matrice ha come caratteristica peculiare che i suoi autovalori sono sempre a_{11} e a_{22} . Questi sono sempre negativi poiché costituiti da un segno meno davanti a due frazioni di valore maggiore o uguale a zero. Osservando i

parametri coinvolti nei termini a_{11} e a_{22} si nota che la massa e il momento di inerzia sono maggiori di zero, la lunghezza è positiva ed è elevata al quadrato e, infine, c_f e c_r sono dei valori compresi tra 40 N/rad e 400 N/rad, dunque positivi. Si intuisce che il sistema è stabile $\forall \nu > 0$, essendo che i due autovalori risultano essere negativi. La variazione dei parametri di velocità e angolo di sterzo del veicolo, così come il coefficiente di rigidità in curva delle ruote, altera il comportamento della risposta nel transitorio e la risposta in condizione di regime. Per valori elevati di ν , o valori bassi di c_f e c_r , gli autovalori si avvicinano sempre di più all'asse immaginario, prolungando il transitorio. Questo effetto porta il sistema a tendere all'instabilità, senza però mai raggiungerla. Considerando il caso reale, se il conducente della vettura entra in curva e cambia l'angolo di sterzo, ad esempio, da 0° a 20° , mantenendolo costante e aumentando la velocità (oppure nel caso in cui la vettura percorra la traiettoria su un terreno con poco attrito e quindi con poca rigidità in curva), la macchina impiegherà un tempo maggiore per stabilizzarsi sulla traiettoria di regime.

Per quanto riguarda il comportamento del modello nella condizione di regime, si possono facilmente trovare le espressioni con le quali calcolare lo yaw rate r e il side slip angle β . Sapendo che a regime $\dot{r} = 0$ e $\dot{\beta} = 0$, il sistema di equazioni 1.6, che descrive il moto laterale e il movimento di imbardata, diventa:

$$\begin{cases} \frac{r}{\nu} (mv^2 + c_f l_f - c_r l_r) + (c_f + c_r)\beta - c_f \delta_f = 0 \\ \frac{r}{\nu} (c_f l_f^2 + c_r l_r^2) - (c_r l_r - c_f l_f)\beta - c_f l_f \delta_f = 0 \end{cases} \quad 1.7$$

Sostituendo i parametri con quelli del veicolo visti in precedenza ($c_f = c_r$ e $l_f = l_r$), le equazioni si semplificano e si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{r}{\nu} mv^2 + 2c_f \beta - c_f \delta_f = 0 \\ \frac{r}{\nu} 2c_f l_f^2 - c_f l_f \delta_f = 0 \end{cases} \quad 1.8$$

Da questo sistema è possibile ottenere facilmente la condizione di yaw rate a regime, così come l'angolo di slittamento laterale, in funzione dell'angolo di sterzo delle ruote anteriori.

$$\begin{cases} r_{regime} = \frac{c_f l_f \nu \delta_f}{2c_f l_f^2} = \frac{\nu}{l} \delta_f \\ \beta_{regime} = \left(\frac{1}{2} - \frac{mv}{2lc_f} \right) \delta_f \end{cases} \quad 1.9$$

Utilizzando queste due equazioni e assegnando un valore al parametro libero di ingresso δ_f , è possibile calcolare il valore di tasso di imbardata r e di angolo di slittamento laterale β a cui si assesta il veicolo durante la curva una volta raggiunta la condizione di regime (ovvero, terminato il transitorio).

Considerando che la vettura percorre una curva con angolo e velocità costante, la traiettoria sarà equivalente ad una circonferenza. È possibile calcolare il raggio della circonferenza percorsa conoscendo la lunghezza l del veicolo e l'angolo di sterzo δ_f .

$$R = \frac{\nu}{r_{regime}} = \frac{\nu}{\frac{\nu}{l} \delta_f} = \frac{l}{\delta_f} \quad 1.10$$

Si nota, infatti, nell'equazione 1.10 che il raggio della circonferenza percorsa è indipendente sia dalla rigidità in curva c_f o c_r , sia dalla velocità ν con la quale si affronta la curva che dal valore di yaw rate a regime r_{regime} . R varia soltanto al variare del parametro libero δ_f . La relazione tra R e δ_f risulta inversamente proporzionale; all'aumentare dell'angolo di sterzo, il raggio di curvatura diminuisce. Questo risultato è coerente con la realtà.

1.1.3 - Implementazione su Simulink

Per poter simulare ed analizzare i risultati del modello proposto, è stato necessario realizzare in primis uno script Matlab che contenesse i valori dei parametri del veicolo (vedi Allegato A.1), nonché le matrici che caratterizzano il sistema dello spazio di stato lineare. Il modello lineare della vettura in esame è stato implementato in seguito su Simulink come riportato in figura 11.

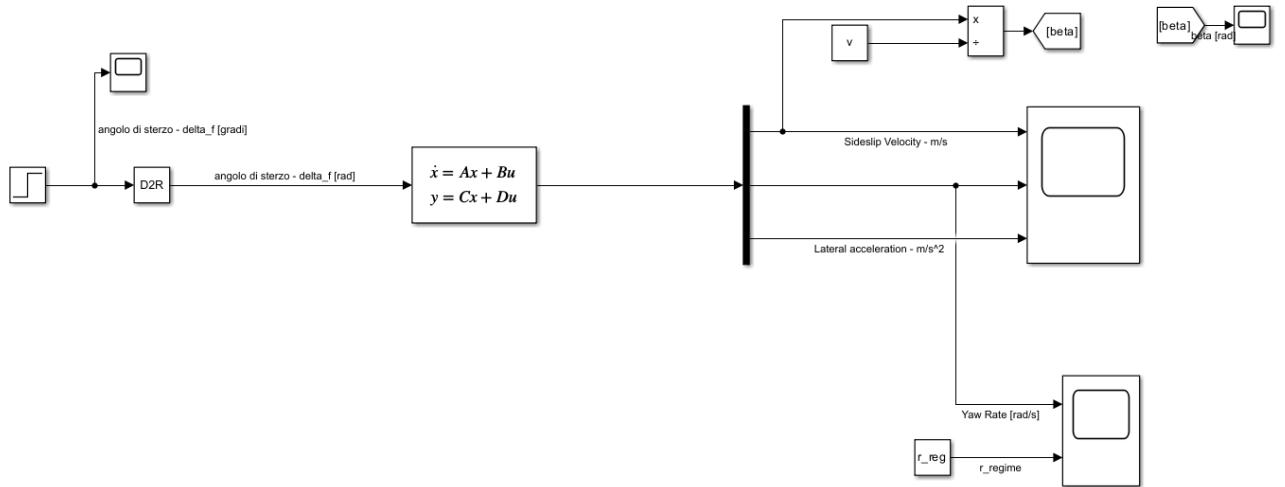
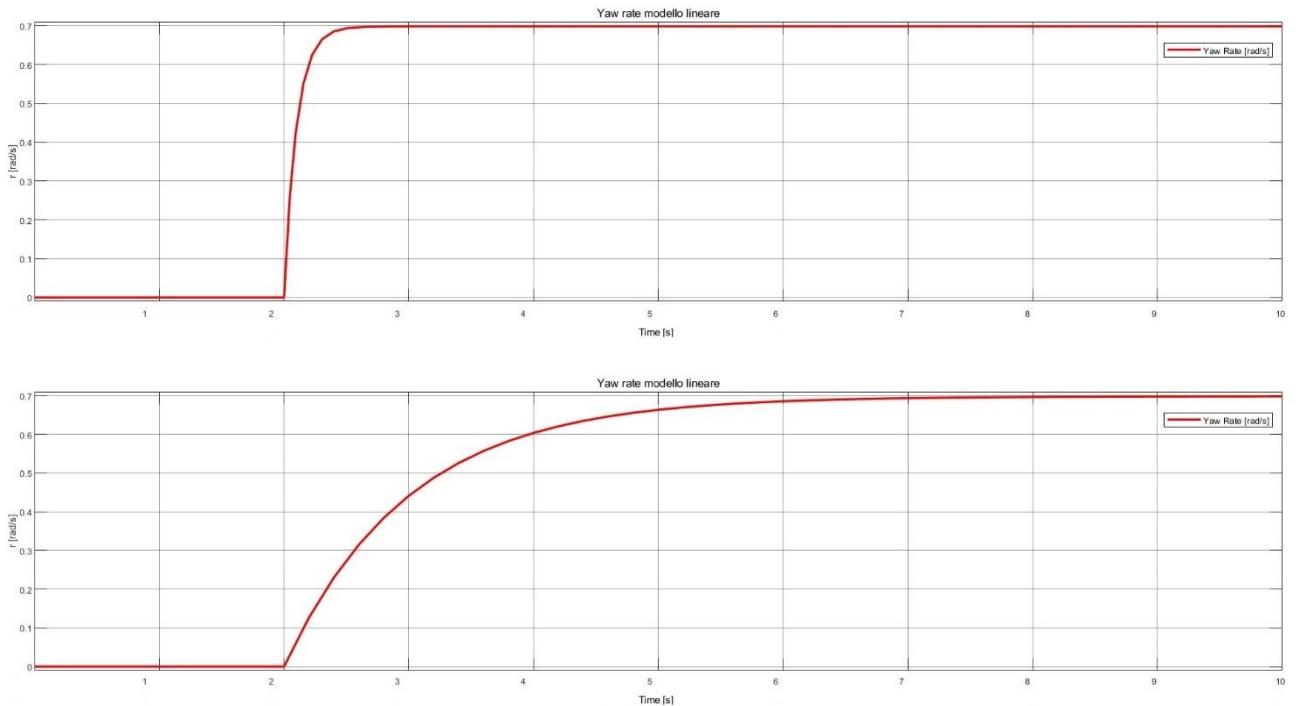


Figura 11 – Modello lineare della vettura implementato su Simulink

In figura 12 sono riportati i risultati delle simulazioni riguardo al comportamento del modello lineare senza il controllo di anti-sbandamento. Le simulazioni sono state svolte con i seguenti parametri:

1. $v = 1 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 15^\circ$
2. $v = 1 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 4 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 15^\circ$
3. $v = 10 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 15^\circ$



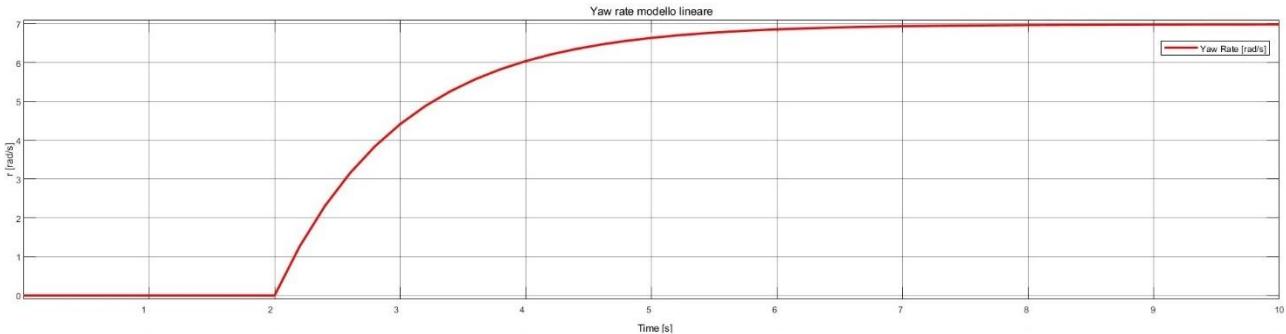


Figura 12 – confronto dei valori di regime e di transitorio al variare dei parametri

Si vede, come discusso in precedenza, che in tutti e tre i casi il sistema risulta stabile, ovvero che dato come ingresso un gradino che rappresenta l'angolo di sterzo da 0° a 15° , il veicolo si assesta con un valore di yaw rate di regime costante. Le prime due simulazioni hanno gli stessi valori per i parametri di velocità ed angolo di sterzo ed infatti lo yaw rate di regime si assesta sul medesimo valore. La simulazione 3 ha la velocità di un ordine di grandezza superiore e questo risulta anche nel valore di yaw rate a regime. Le ultime due simulazioni hanno un transitorio più lungo proprio perché questo ha un legame di proporzionalità inversa con il coefficiente di cornering stiffness e un legame di proporzionalità diretta con la velocità.

1.2 - Modello non lineare 3DOF

Il programma Simulink offre una libreria chiamata “Vehicle Dynamic Blockset” con all'interno dei modelli di veicolo non lineare che saranno descritti all'interno di questo capitolo. Il blocco utilizzato per le simulazioni è nominato “Vehicle Body 3DOF” [6] ed è disponibile sia la versione “Dual Track” che la versione “Single Track” come mostrato rispettivamente in figura 13a e 13b.

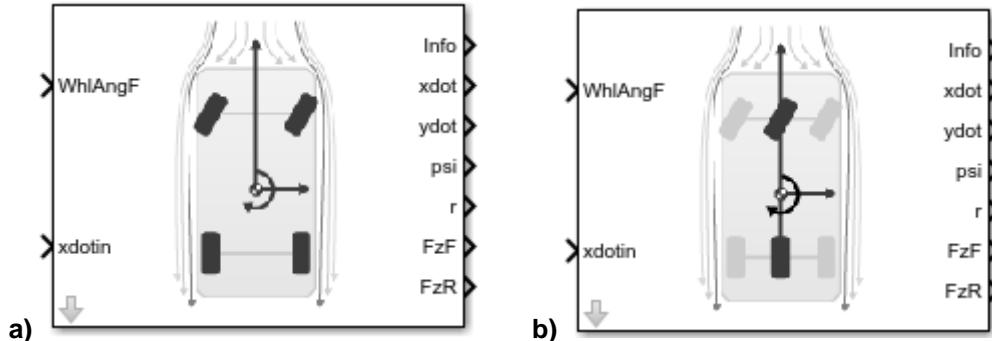


Figura 13 – Modello non lineare del veicolo presente su Simulink

Per le simulazioni sarà utilizzato il blocco mostrato in figura 13b per avere un modello più simile a quello utilizzato in precedenza nel caso lineare con le ruote raggruppate al centro dei rispettivi assi.

Gli ingressi sono programmabili tramite Simulink e si può scegliere di aggiungere delle ulteriori condizioni come, ad esempio, l'angolo di sterzo della ruota posteriore o le forze esterne applicate alla vettura. Per il nostro elaborato gli ingressi da settare sono due: l'angolo di sterzo della ruota anteriore δ_f [rad] (WhlAngF) e la velocità lungo l'asse x della vettura v [m/s]. Se non vengono settati ulteriori ingressi, il blocco considera δ_r nullo e $\mu_f = \mu_r = 1$, dove μ_f e μ_r sono rispettivamente i coefficienti di attrito della ruota anteriore e posteriore.

Il blocco utilizza le seguenti equazioni per calcolare la dinamica planare del corpo rigido:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\dot{x}r + \frac{F_{yf} + F_{yr} + F_{yext}}{m} \\ \dot{r} = \frac{l_f F_{yf} - l_r F_{yr} + M_{zext}}{I_{zz}} \\ r = \dot{\psi} \end{cases}$$

È possibile utilizzare il blocco in tre modalità differenti:

1. External longitudinal velocity
2. External longitudinal forces
3. External forces

Utilizzando la prima modalità per le simulazioni il blocco assume uno stato quasi stazionario per l'accelerazione longitudinale, ovvero $\ddot{x} = 0$. Inoltre, tale configurazione considera nulle F_{yext} e M_{zext} . Il sistema di equazioni diventa:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\dot{x}r + \frac{F_{yf} + F_{yr}}{m} \\ \dot{r} = \frac{l_f F_{yf} - l_r F_{yr}}{I_{zz}} \\ r = \dot{\psi} \end{cases}$$

Con tale modalità il blocco utilizzerà le seguenti equazioni per calcolare le forze degli pneumatici applicate alle ruote:

$$\begin{cases} F_{xft} = F_{xrt} = 0 \\ F_{yft} = -c_f \alpha_f \mu_f \frac{F_{zf}}{F_{znorm}} = -c_f \alpha_f \frac{F_{zf}}{F_{znorm}} \\ F_{yrt} = -c_r \alpha_r \mu_r \frac{F_{zr}}{F_{znorm}} = -c_r \alpha_r \frac{F_{zr}}{F_{znorm}} \end{cases}$$

Per mantenere l'equilibrio di rollio e beccheggio (roll and pitch) il blocco utilizza le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} F_{zf} = \frac{l_r mg - (\ddot{x} - \dot{y}r)mh + hF_{xext} + bF_{zext} - M_{yext}}{l} \\ F_{zr} = \frac{l_f mg + (\ddot{x} - \dot{y}r)mh - hF_{xext} + l_f F_{zext} + M_{yext}}{l} \end{cases}$$

Per far sì che il modello non lineare assuma gli stessi parametri del modello lineare si pone $h = 0$. Inoltre, considerando nulle le forze esterne, otterremo tale equazione:

$$\begin{cases} F_{zf} = \frac{l_r mg}{l} = \frac{mg}{2} \\ F_{zr} = \frac{l_f mg}{l} = \frac{mg}{2} \end{cases}$$

Il blocco utilizza il rapporto della velocità longitudinale e laterale locale per calcolare gli angoli di slittamento laterale degli pneumatici

$$\begin{cases} \alpha_f = \text{atan}\left(\frac{\dot{y} + l_f r}{\dot{x}}\right) - \delta_f \\ \alpha_r = \text{atan}\left(\frac{\dot{y} - l_r r}{\dot{x}}\right) - \delta_r = \text{atan}\left(\frac{\dot{y} - l_r r}{\dot{x}}\right) \end{cases}$$

Questi angoli sono utilizzati per calcolare le forze degli pneumatici:

$$F_{xf} = F_{xft} \cos(\delta_f) - F_{yft} \sin(\delta_f) = -F_{yft} \sin(\delta_f)$$

$$F_{yf} = -F_{xft} \sin(\delta_f) + F_{yft} \cos(\delta_f) = F_{yft} \cos(\delta_f)$$

$$F_{xr} = F_{xrt} \cos(\delta_r) - F_{yrt} \sin(\delta_r) = -F_{yrt} \sin(\delta_r) = 0$$

$$F_{yr} = -F_{xrt} \sin(\delta_r) + F_{yrt} \cos(\delta_r) = F_{yrt} \cos(\delta_r) = F_{yrt}$$

- y, \dot{y}, \ddot{y} : posizione, velocità e accelerazione del baricentro del veicolo lungo l'asse y fisso del veicolo
- x, \dot{x}, \ddot{x} : posizione, velocità e accelerazione del baricentro del veicolo lungo l'asse x fisso del veicolo

Sono molteplici le uscite che possono essere utilizzate o analizzate grazie all'uso di uno scope. Le principali che verranno utilizzate sono r (yaw rate) e $info$ (bus di segnale contenente informazioni come β).

1.2.1 - Implementazione su Simulink

Anche per questo modello è stato utilizzato uno script Matlab contenente i parametri del veicolo per poter permettere le simulazioni su Simulink simile a quello in Allegato A.1. Lo schema del modello non lineare della vettura implementato su Simulink è riportato in figura 14.

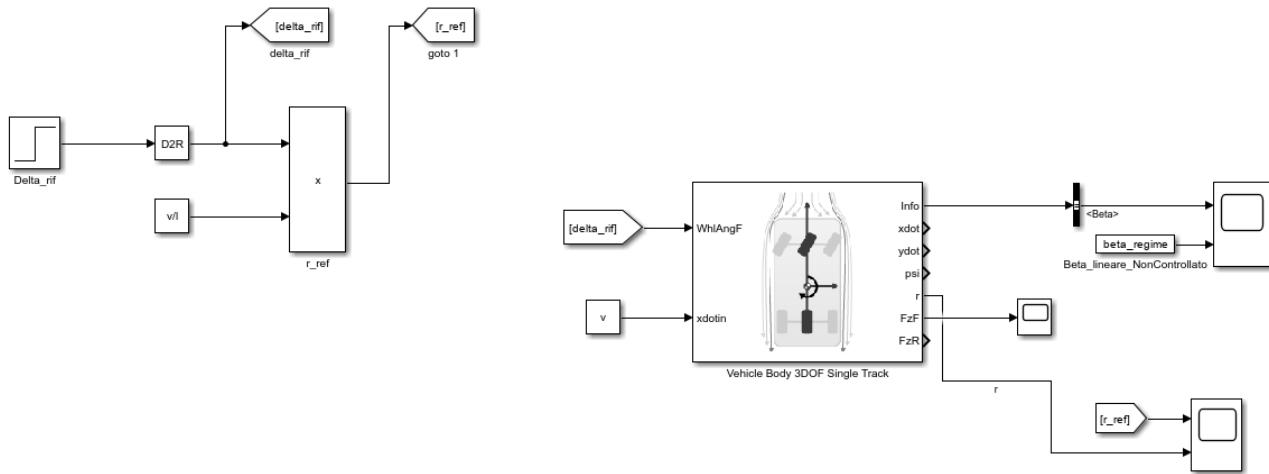


Figura 14 – Modello non lineare della vettura implementato su Simulink

1.2.2 - Simulazioni open-loop

Come mostrato in figura 14 il blocco del veicolo è stato analizzato in anello aperto per valutare la sua dinamica. Tale modello risulta essere stabile o instabile a seconda dei parametri della simulazione come, ad esempio, la velocità, il coefficiente di cornering stiffness oppure l'angolo di sterzo della ruota anteriore δ_f . Sono state eseguite varie simulazioni di step steering, cioè il caso in cui un veicolo che procede a velocità costante v con $\delta_f = 0^\circ$ sterza di un angolo δ_f generico e costante. Lo studio è stato realizzato grazie all'utilizzo di un blocco "step", il quale dopo un tempo di riferimento di 2 secondi porta l'angolo di sterzo da 0° a δ_f di riferimento. In figura 15 sono riportate tre simulazioni così descritte con i parametri seguenti:

1. $v = 2 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 15^\circ$
2. $v = 2 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 10 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 15^\circ$
3. $v = 5 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 15^\circ$

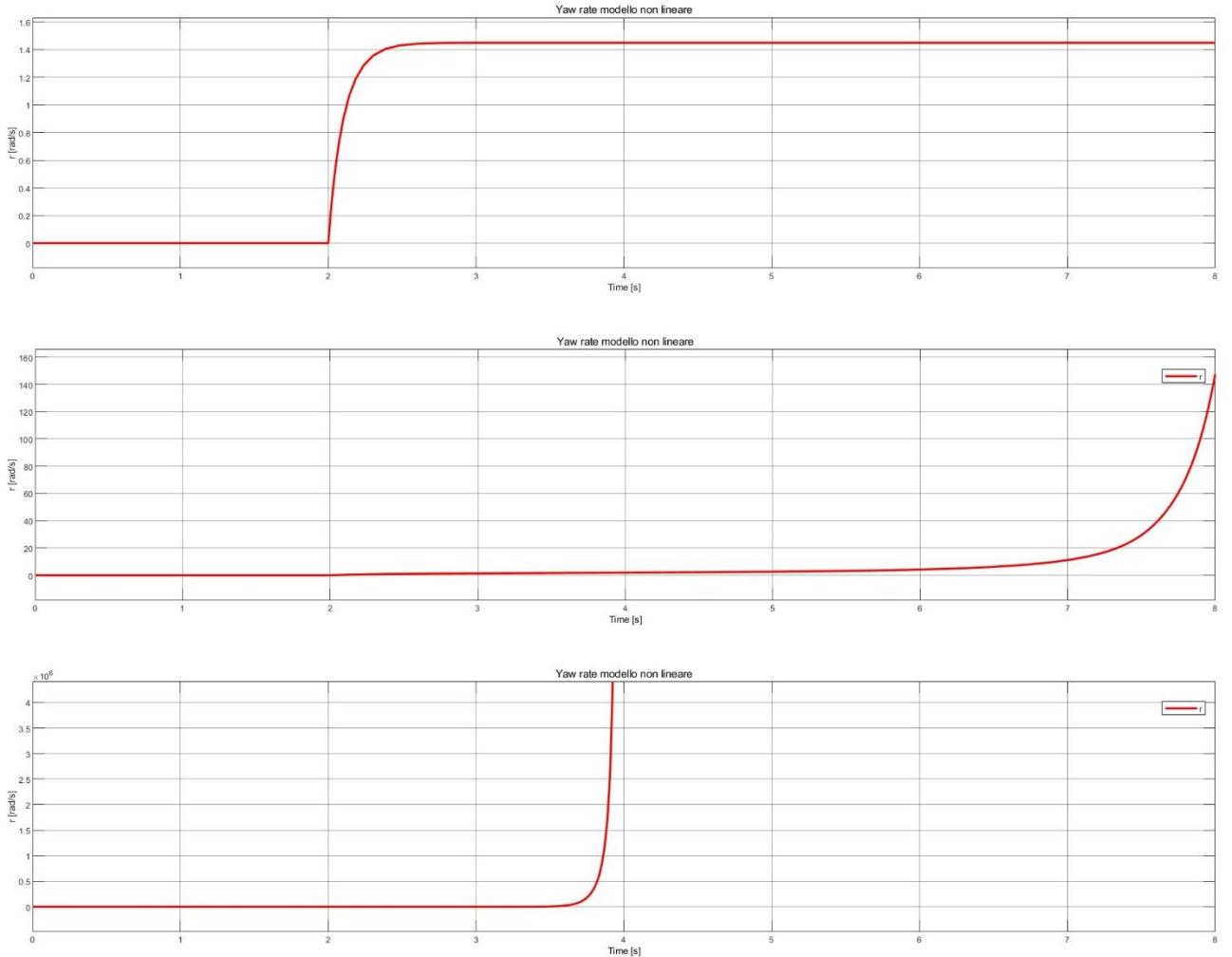


Figura 15 – Simulazione open-loop stabile e instabile del veicolo

Nella prima simulazione il veicolo è stabile, infatti, lo yaw rate si assesta su un valore costante a regime. Nella seconda simulazione, seppure la velocità v e l'angolo di sterzo δ_f sono i medesimi, è calato il coefficiente di rigidità in curva c_f e questo porta all'instabilità della vettura. Si vede, infatti, che lo yaw rate non si assesta ad un valore costante ma continua a crescere con un andamento iperbolico. Nell'ultima simulazione si considera lo stesso angolo di sterzo δ_f e lo stesso coefficiente di cornering stiffness c_f ma questa volta è la velocità ad aumentare. Si vede come questa abbia un impatto rilevante sul sistema, portandolo all'instabilità, tanto che la curva ha un andamento quasi verticale nell'ordine di 10^6 .

1.2.3 - Confronto fra modello non lineare e lineare

I due modelli fin ora descritti sono apparentemente molto diversi fra loro. In questo paragrafo si dimostra che applicando le ipotesi di linearizzazione descritte nel capitolo 1.1 i due modelli risultano essere equivalenti. Per ottenere tale risultato è necessario che le equazioni che descrivono la dinamica del moto del modello non lineare, una volta semplificate, siano equivalenti a quelle descritte in precedenza nel modello lineare. Verranno, inoltre, evidenziate le differenze nei casi in cui le ipotesi di linearizzazione cessano di esistere.

1.2.3.1 - Confronto movimento di imbardata

Si riporta l'equazione 1.2 del movimento di imbardata del modello lineare del veicolo

$$I_{zz}\dot{r} = l_f F_{yf} + l_r F_{yr}$$

mentre nel modello non lineare assume la forma

$$I_{zz}\dot{r} = l_f c_f \frac{F_{zf}}{F_{znorm}} \cos(\delta_f) \left[\delta_f - \tan\left(\frac{\dot{y} + l_f r}{\dot{x}}\right) \right] + l_r c_r \frac{F_{zr}}{F_{znorm}} \left[\tan\left(\frac{\dot{y} - l_r r}{\dot{x}}\right) \right]$$

È possibile dimostrare l'uguaglianza fra i due modelli sostituendo a quest'ultima le ipotesi di linearizzazione descritte precedentemente nel capitolo 1.1 per il modello lineare bicicletta. In particolare, si riportano le ipotesi 1, 5 e 9:

- Le forze degli pneumatici lavorano nella regione lineare
- Gli angoli di sterzo e di slittamento laterale sono assunti piccoli (≈ 0)
- Lo slittamento laterale desiderato nella condizione di stato stazionario è assunto uguale a zero

Si evince che $\cos(\delta_f) = 1$ e che $\tan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \tan(\beta) \approx \beta$. L'equazione si semplifica come segue:

$$I_{zz}\dot{r} = l_f c_f \frac{F_{zf}}{F_{znorm}} \left(\delta_f - \beta - \frac{l_f r}{\dot{x}} \right) + l_r c_r \frac{F_{zr}}{F_{znorm}} \left(\beta - \frac{l_r r}{\dot{x}} \right)$$

Il termine in più che compare nel modello non lineare risulta essere $\frac{F_{zf}}{F_{znorm}}$ che si può renderlo unitario tramite Simulink. Il metodo sta nel rilevare il valore di F_{zf} in uscita e di inserirlo nel parametro F_{znorm} all'interno del blocco di Simulink. Con tale semplificazione si possono svolgere alcuni passaggi algebrici per ottenere l'equivalenza cercata.

$$I_{zz}\dot{r} = l_f c_f \left(\delta_f - \beta - \frac{l_f r}{\dot{x}} \right) + l_r c_r \left(\beta - \frac{l_r r}{\dot{x}} \right)$$

$$I_{zz}\dot{r} - l_f c_f \delta_f + l_f c_f \beta + l_f^2 c_f \frac{r}{\dot{x}} - l_r c_r \beta + l_r^2 c_r \frac{r}{\dot{x}} = 0$$

$$I_{zz}\dot{r} = -\frac{r}{\dot{x}} (l_f^2 c_f + l_r^2 c_r) - \beta (l_f c_f - l_r c_r) + l_f c_f \delta_f$$

Considerando che

$$\begin{cases} l_f F_{yf} = l_f F_{yft} = -c_f \alpha_f l_f = -\frac{r}{\dot{x}} l_f^2 c_f - \beta l_f c_f + l_f c_f \delta_f \\ l_r F_{yr} = l_r F_{yrt} = -c_r \alpha_r l_r = -\frac{r}{\dot{x}} l_r^2 c_r + \beta l_r c_r \end{cases}$$

1.2.3.2 - Confronto moto laterale

Nel modello lineare il moto laterale assume la forma vista nell'equazione 1.1

$$mv(\dot{\beta} + r) = F_{yf} + F_{yr}$$

$$mv\dot{\beta} + \frac{r}{v} (mv^2 - l_f c_f - l_r c_r) + \beta (c_f + c_r) - c_f \delta_f = 0$$

mentre nel modello non lineare si ha

$$\ddot{y} = -\dot{x}r + \frac{F_{yf} + F_{yr}}{m}$$

$$m\ddot{y} + m\dot{x}r = c_f \frac{F_{zf}}{F_{znorm}} \cos(\delta_f) \left[\delta_f - \text{atan} \left(\frac{\dot{y} + l_f r}{\dot{x}} \right) \right] - c_r \frac{F_{zr}}{F_{znorm}} \left[\text{atan} \left(\frac{\dot{y} - l_r r}{\dot{x}} \right) \right]$$

Adesso è possibile procedere nel medesimo modo sopra descritto. Si applicano le ipotesi di linearizzazione del modello bicicletta e facendo le opportune semplificazioni si ottiene l'uguaglianza del moto laterale nei due modelli, considerando che la velocità v è uguale alla velocità longitudinale locale lungo l'asse x, \dot{x} .

$$m\ddot{y} + m\dot{x}r = c_f \left(\delta_f - \beta - \frac{l_f r}{\dot{x}} \right) - c_r \left(\beta - \frac{l_r r}{\dot{x}} \right)$$

$$m\ddot{y} + m\dot{x}r - c_f \delta_f + c_f \beta + c_f \frac{l_f r}{\dot{x}} + c_r \beta - c_r \frac{l_r r}{\dot{x}} = 0$$

$$m\dot{x} \left(\frac{\ddot{y}}{\dot{x}} + r \right) - c_f \delta_f + c_f \beta + c_f \frac{l_f r}{\dot{x}} + c_r \beta - c_r \frac{l_r r}{\dot{x}} = 0$$

$$m\dot{x} (\dot{\beta} + r) = c_f \delta_f - c_f \beta - c_f \frac{l_f r}{\dot{x}} - c_r \beta + c_r \frac{l_r r}{\dot{x}}$$

Si vede che i primi tre termini del secondo membro sono proprio F_{yf} mentre gli ultimi due termini sono F_{yr} . L'uguaglianza si verifica considerando che il rapporto $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{\beta}$. Questo si può facilmente dimostrare calcolando la derivata nel tempo di β e ricordando che la velocità \dot{x} è costante

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{\beta}$$

1.2.3.3 - Confronto tramite simulazioni Simulink

Come è stato appena descritto, se le ipotesi di linearizzazione sono rispettate, i due modelli sono equivalenti ed equiparabili. In figura 16 si riportano i risultati ottenuti dal confronto dello yaw rate del modello lineare (L) e del modello non lineare (NL) con tali ipotesi applicate. Sono stati scelti angoli di sterzo piccoli $\delta_f \leq 1^\circ$ proprio per verificare la validità di quanto sopra dimostrato. Il confronto dell'angolo di slittamento non è stato riportato poiché per ipotesi si ha che $\beta \approx 0$. Il coefficiente di cornering stiffness è stato scelto costante e pari a 40 N/rad ma in seguito, sono state eseguite simulazioni anche con valori maggiori per tale parametro, poiché è interessante studiare il comportamento della vettura anche nel caso di elevata rigidità delle ruote in curva, ovvero di elevata stabilità in anello aperto. I parametri utilizzati per le simulazioni sono i seguenti:

- $v = 1 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 0.1^\circ$
- $v = 1 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 1^\circ$
- $v = 2 \text{ m/s}$ $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ $\delta_f = 0.5^\circ$

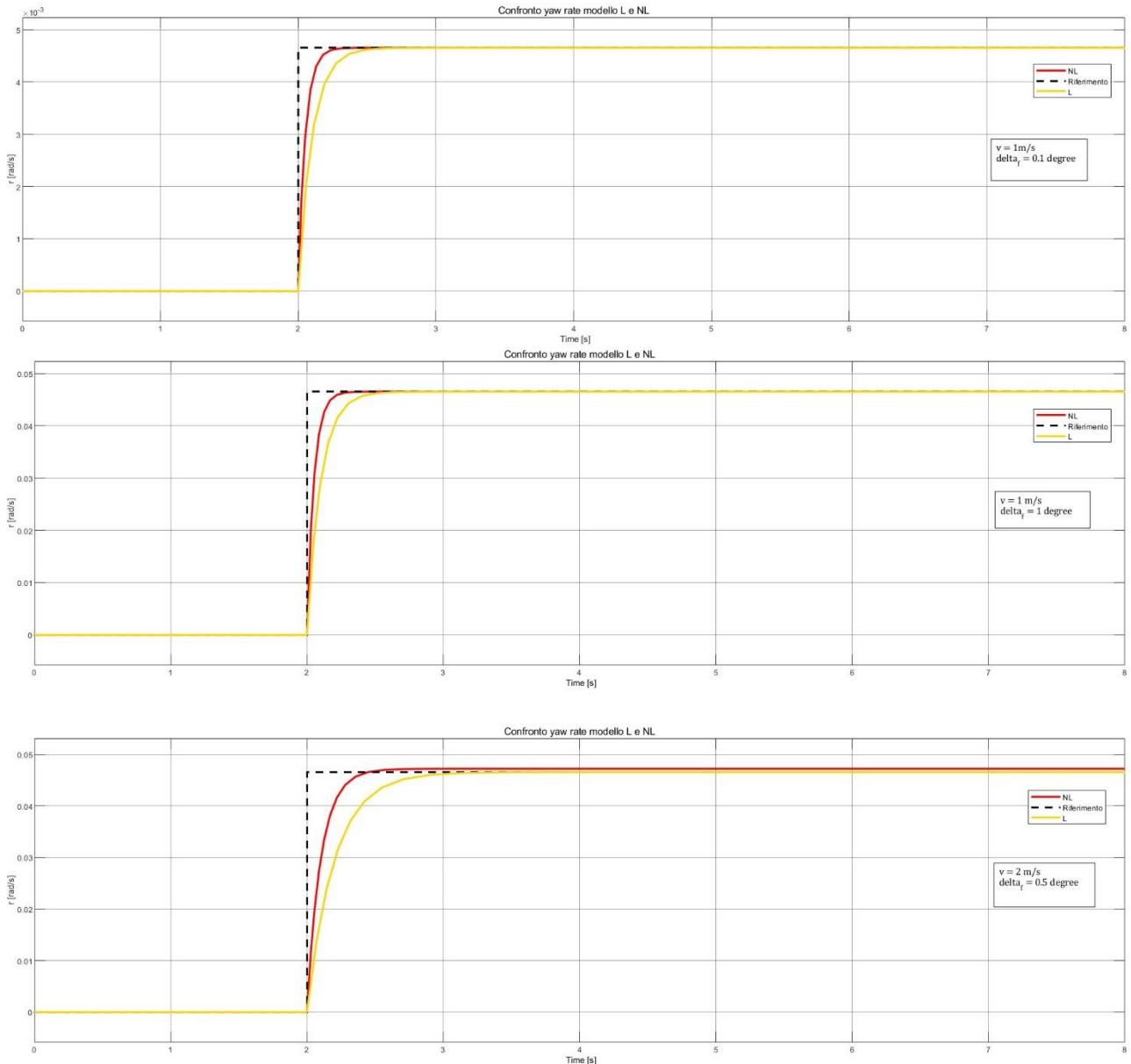


Figura 16 – Confronto dello yaw rate modello L e NL con $\delta_f < 1^\circ$

Nelle prime due simulazioni è stata scelta una velocità pari a 1 m/s, considerata piccola per il modello in esame con i parametri descritti in precedenza. Cambiando di un ordine di grandezza l'angolo di sterzo in ingresso, i due modelli risultano equivalenti poiché l'angolo di sterzo è piccolo e a questa velocità anche l'angolo di slittamento laterale risulta nullo. Nell'ultima simulazione si osserva che i due modelli iniziano a discostarsi tra loro, nonostante l'angolo sia $\delta_f = 0.5^\circ$ e quindi minore dell'angolo di sterzo scelto nella seconda simulazione. Questo accade proprio a causa della velocità v . Infatti, per valori di c_f bassi la stabilità ad anello aperto è garantita per bassi valori di velocità ed evidentemente $v = 2 \text{ m/s}$ rappresenta una velocità moderata per il modello in esame.

In figura 17 si può vedere che con gli stessi valori di velocità e di angolo di sterzo i due modelli risultano essere equivalenti se il valore di c_f aumenta di un ordine di grandezza, ovvero $c_f = 400 \text{ N/rad}$. Si nota anche che il transitorio è più corto rispetto alla seconda simulazione in figura 16, questo perché, come discusso in precedenza, ha una dipendenza di proporzionalità inversa con il coefficiente di cornering stiffness.

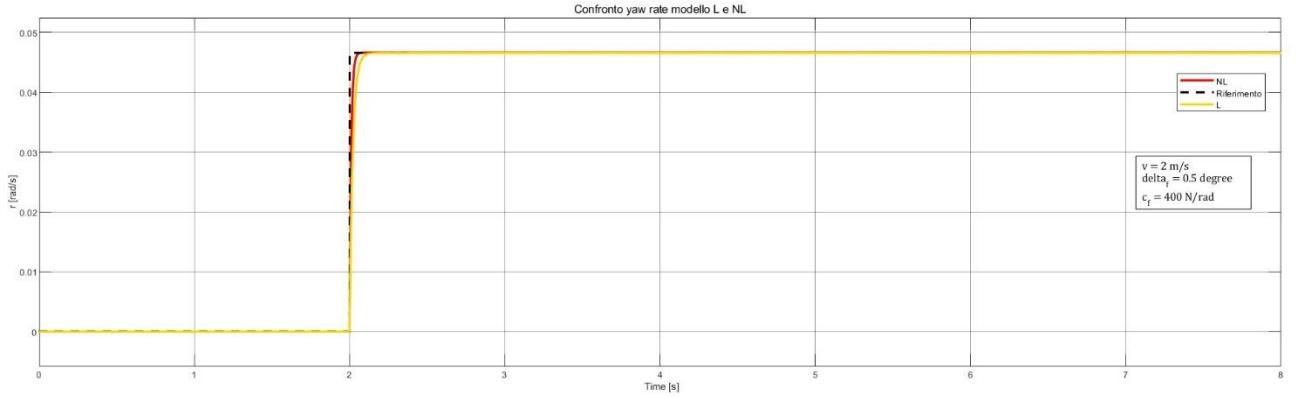
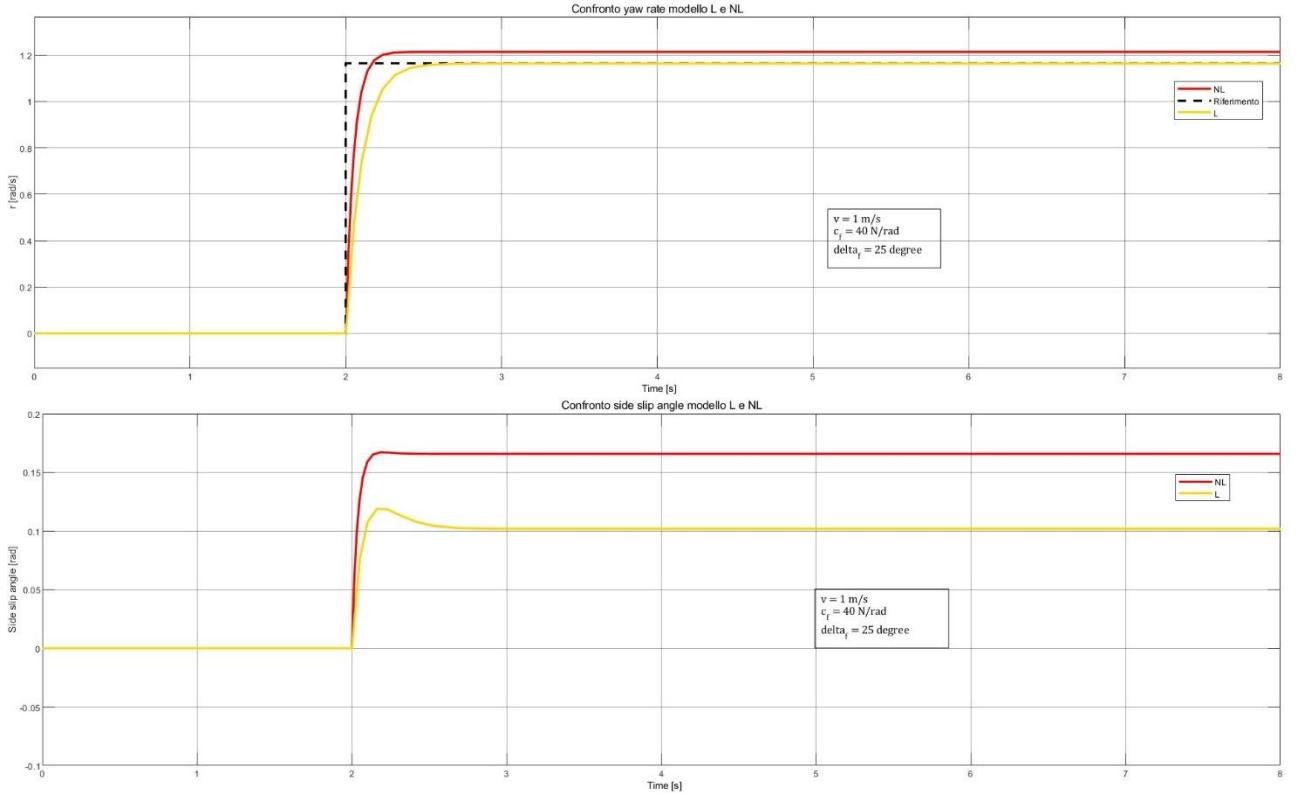


Figura 17 – Confronto dello yaw rate modello L e NL con c_f elevato

È interessante studiare il caso in cui le ipotesi vengano violate. Questo perché nella realtà è comune che un veicolo affronti curve con un angolo di sterzo elevato e/o con una velocità elevata. Si sceglie, dunque, un angolo di sterzo per le ruote anteriori δ_f all'interno del range $[0^\circ \div 25^\circ]$, e una velocità $v = [1 \div 4]$ m/s per le simulazioni. È stato scelto $c_f = 400$ N/rad per il coefficiente di rigidità delle ruote in curva poiché si vuole verificare quando il modello necessita di un sistema di controllo e quando, invece, risulta stabile anche in assenza di controllo.

In figura 18 sono riportati i risultati delle simulazioni contenenti il confronto sia dell'imbardata che dell'angolo di slittamento laterale dei modelli L e NL. I parametri scelti sono i seguenti:

- $v = 1$ m/s $c_f = c_r = 40$ N/rad $\delta_f = 25^\circ$
- $v = 2$ m/s $c_f = c_r = 40$ N/rad $\delta_f = 25^\circ$



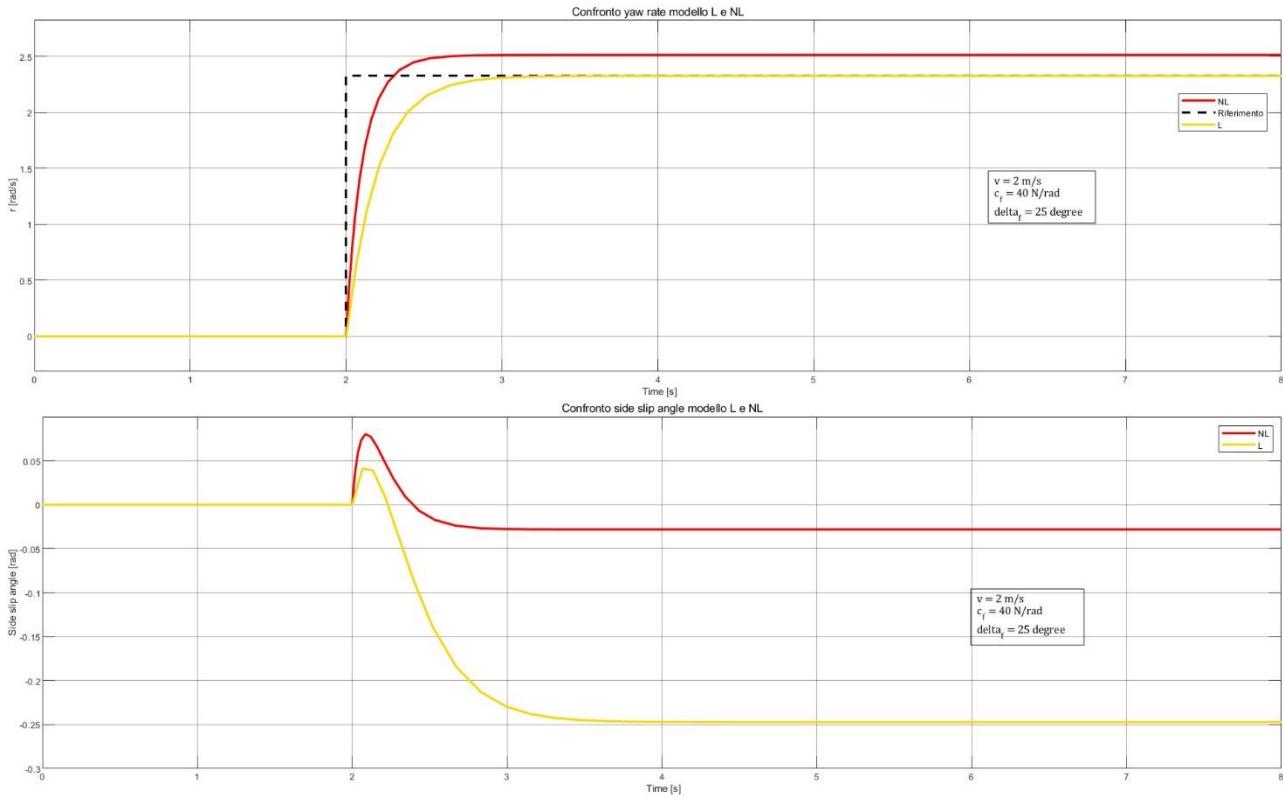


Figura 18 – Confronto di r e β modello L e NL per $\delta_f = 25^\circ$

Nella prima simulazione si può osservare che, a bassa velocità e con un angolo di sterzo elevato, il valore dello yaw rate (r) a regime nel modello non lineare differisce lievemente da quello del modello lineare. Questa differenza è ancora più evidente per l'angolo di slittamento laterale (β). Aumentando la velocità v , si nota come le differenze diventino ancora più evidenti.

È stato, dunque, simulato un confronto grafico che presenta sull'asse delle ascisse l'angolo di sterzo δ_f e sull'asse delle ordinate l'angolo di side slip β oppure il tasso di imbardata r . Per ottenere i valori di regime di β e di r nel modello lineare, noto l'angolo di sterzo in ingresso, si utilizza l'equazione 1.9. Per il modello non lineare non esiste una soluzione in forma chiusa, perciò, i valori sono stati presi realizzando sei simulazioni. Ovvero, inserito il parametro d'ingresso, si è eseguito una simulazione di una durata sufficiente a far esaurire il transitorio. Sono stati raccolti sei valori di regime di β e di r per valori di angolo di sterzo da 0° a 25° con un passo di 5° e poi il grafico non lineare è stato realizzato tracciando segmenti da punto a punto. In figura 19 e in figura 20 sono mostrati i risultati.

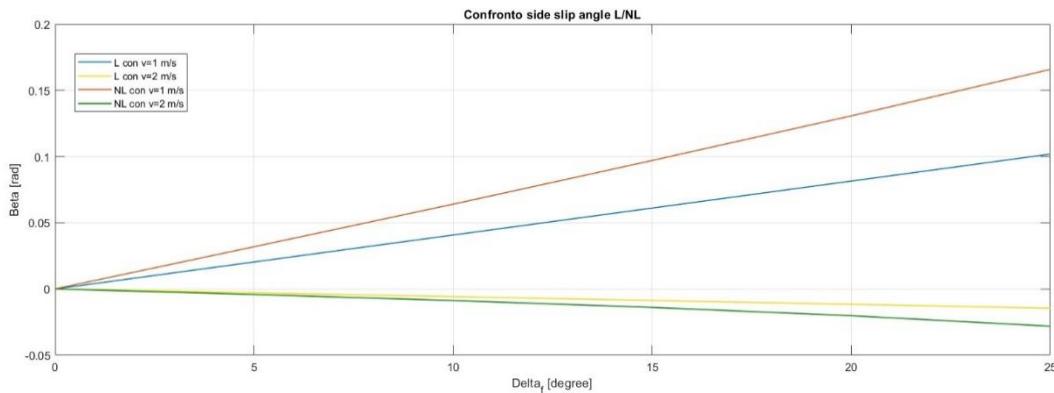


Figura 19 – Confronto angolo β modello L/NL per diversi valori di velocità ($c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$)

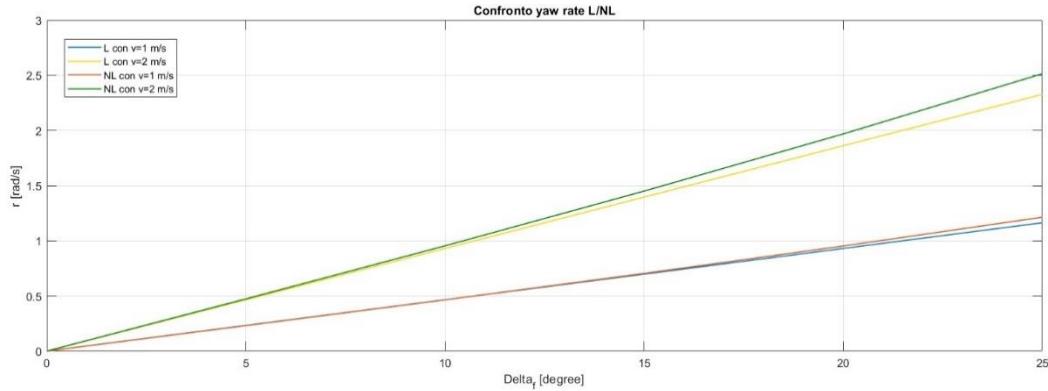


Figura 20 – Confronto yaw rate r modello L/NL per diversi valori di velocità ($c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$)

Dalle due figure sopra riportate si nota bene come la differenza tra modello lineare e modello non lineare risulta evidente soprattutto per quanto riguarda l'angolo di slittamento laterale β . Infine, è giusto segnalare che il segno di β ha importanza solo per quanto riguarda l'orientamento della vettura nella curva. Quando β è negativo, è come se il veicolo fosse in sovrasterzo, dunque, girato verso il lato interno della curva. Quando β è positivo, risulterà l'orientamento opposto.

2 - Controllo attivo di imbardata

Lo studio svolto nel capitolo precedente porta alla conclusione che utilizzando un modello non lineare di veicolo si può incorrere, talvolta, all'instabilità. Per tale motivo l'elaborato si concentra sullo studio di un sistema di controllo dell'imbardata al fine di controllare la stabilità della vettura. Nell'introduzione di tale elaborato sono state descritte varie tipologie di controllo. Inizialmente è stato studiato ed analizzato un sistema di controllo attivo del primo ordine sulle ruote anteriori, anche detto "Active Front Steering" (AFS). Tale sistema di controllo attivo, come descritto anche in letteratura [4], si basa sul disaccoppiamento delle equazioni del moto laterale e del movimento di imbardata del veicolo.

Nelle simulazioni è stato utilizzato un ingresso esterno fornito da un gradino che produce un angolo di sterzo pari a 0° fino a 2 secondi che, infine, raggiunge il valore di δ_f desiderato. Da questo viene ricavato lo yaw rate di riferimento tramite l'equazione lineare 1.9, a cui verrà sottratto lo yaw rate attuale in uscita dal modello non lineare del veicolo, così da generare il segnale errore che entrerà nel controllore.

2.1 - Controllo AFS del primo ordine

Il sistema di controllo del primo ordine di tipo AFS utilizzato per le simulazioni Simulink è riportato in figura 21, mentre lo script utilizzato su Matlab contenente i parametri del veicolo e altri parametri utili che verranno in seguito spiegati, oltre alla Matlab function all'interno del blocco "AFS_Control" sono riportati rispettivamente in Allegato B.1 e Allegato B.2.

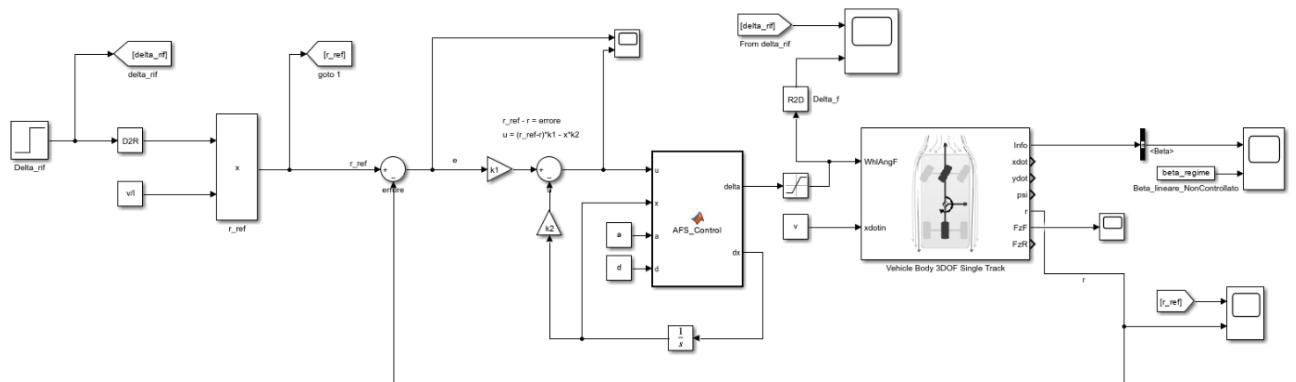


Figura 21 – Sistema in anello chiuso con controllo AFS

Il sistema di controllo di primo ordine preso in esame è stato descritto in letteratura da B. Zheng [4]. Utilizzando la forma dello spazio di stato, il sistema assume la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + u \\ \delta_f = x + du \end{cases} \quad 2.1$$

u rappresenta la variabile di ingresso nello spazio di stato ed è descritta dall'equazione

$$u = k_1(r_{ref} - r) - k_2x \quad 2.2$$

La differenza fra lo yaw rate di riferimento r_{ref} e quello attuale r definisce il segnale di errore e .

- k_1 e k_2 sono i guadagni del controllore
- a e d sono parametri di controllo variabili
- x è una variabile intermedia che mette in relazione u con δ_f

L'uscita del controllore è l'angolo di sterzo della ruota anteriore δ_f , il quale è limitato ad assumere valori $[-30^\circ \div 30^\circ]$ grazie all'utilizzo di un saturatore. Tale intervallo considera i limiti reali degli attuatori della macchina presa in esame.

È interessante notare che la retroazione considera solo le variabili x e r , e non dipende dall'angolo di side slip β . Questo è un aspetto molto importante poiché, come visto in precedenza, β è un parametro difficile da misurare o da stimare nella realtà. È, inoltre, vantaggioso poiché, come visto in figura 19, β varia molto tra il modello lineare e quello non lineare; con questo tipo di retroazione si esclude il rischio di avere due sistemi molto diversi fra il modello lineare e il modello non lineare.

Si consideri adesso l'equazione lineare dello spazio di stato descritta nel capitolo 1.1. Si estende lo stato oltre le variabili β e r , inserendo anche una variabile intermedia x . Si sostituisce $u = k_1(r_{ref} - r) - k_2x$ nel modello lineare a catena aperta che, di conseguenza, diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 d \\ b_2 d \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Si seleziona un nuovo vettore di stato

$$\begin{bmatrix} a_f \\ r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & \frac{cl_f}{v} & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ x \end{bmatrix}$$

con

a_f = accelerazione laterale dell'asse anteriore

$$c = \frac{c_f l}{l_r m}$$

Si assume che:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{a}_f \\ \dot{r} \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} -c & \frac{cl_f}{v} & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} b_1 d \\ b_2 d \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dunque, è possibile ottenere una nuova equazione nello spazio degli stati nella forma:

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TEu$$

Si svolgono i calcoli e si ottiene un nuovo sistema nella forma dello spazio degli stati:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_f \\ \dot{r} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & c & -ca \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_f \\ r \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\hat{d} \\ b_2 d \\ 1 \end{bmatrix} u$$

con

$$d_{11} = -\frac{c_f l}{mvl_r} \quad d_{21} = -\frac{c_f l_f - c_r l_r}{ml_f l_r} \quad d_{22} = -\frac{c_r l}{mvl_f} \quad d_{23} = \frac{c_r}{ml_f} \quad \hat{d} = 1 - b_1 d \left(1 + \frac{l_f}{l_r} \right)$$

Sostituendo la legge di controllo descritta nell'equazione 2.2 si ottiene il seguente sistema ad anello chiuso

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_f \\ \dot{r} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & c(1 - \hat{d}k_1) & -c(a + \hat{d}k_2) \\ d_{21} & d_{22} - b_2 dk_1 & d_{23} - b_2 dk_2 \\ 0 & -k_1 & -a - k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_f \\ r \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\hat{d}k_1 \\ b_2 dk_1 \\ k_1 \end{bmatrix} r_{ref}$$

B. Zheng propone di usare le seguenti relazioni al fine di ottenere un disaccoppiamento di moto laterale e di imbardata:

$$\begin{cases} 1 - \hat{d}k_1 = 0 \\ a + \hat{d}k_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{d} = \frac{1}{k_1} \\ a = -\frac{k_2}{k_1} \end{cases}$$

Con le condizioni appena descritte il sistema in anello chiuso nello spazio degli stati diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_f \\ \dot{r} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} - b_2 dk_1 & d_{23} - b_2 dk_2 \\ 0 & -k_1 & \frac{k_2(1 - k_1)}{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_f \\ r \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ b_2 dk_1 \\ k_1 \end{bmatrix} r_{ref}$$

Per ottenere il parametro di controllo d si impone l'uguaglianza tra

$$\hat{d} = \frac{1}{k_1} \text{ e } \hat{d} = 1 - b_1 d \left(1 + \frac{l_f}{l_r} \right)$$

Dunque, i due parametri di controllo sono

$$\begin{cases} a = -\frac{k_2}{k_1} \\ d = \frac{(k_1 - 1)m l_r v}{k_1 c_f l} \end{cases}$$

2.1.1 - Analisi di stabilità

Si può studiare la stabilità del sistema definito in precedenza analizzando i due sottosistemi separatamente, grazie al disaccoppiamento del moto laterale e di imbardata.

- $\dot{a}_f = d_{11}a_f + cr_{ref}$
- $\begin{bmatrix} d_{22} - b_2 dk_1 & d_{23} - b_2 dk_2 \\ -k_1 & \frac{k_2}{k_1} - k_2 \end{bmatrix}$

La prima equazione può essere riscritta tramite la sua funzione di trasferimento nel dominio di Laplace:

$$a_f s = d_{11}a_f + cr_{ref} \longrightarrow \frac{a_f}{r_{ref}} = \frac{c}{s - d_{11}}$$

La stabilità di tale funzione di trasferimento è garantita solo se $d_{11} < 0$, così da ottenere un polo reale negativo. Essendo che $d_{11} = -\frac{c_f l}{m v l_r}$, in cui tutti i coefficienti sono positivi (considerando moto in avanti, $v < 0$) la stabilità è sempre garantita.

Per analizzare la stabilità del sottosistema si deve valutare il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}
 p(s) &= \begin{bmatrix} s - (d_{22} - b_2 dk_1) & -(d_{23} - b_2 dk_2) \\ k_1 & s - \left[\frac{k_2}{k_1} - k_2 \right] \end{bmatrix} = \\
 &= s^2 - \frac{k_2}{k_1} s + k_2 s - d_{22} s + d_{22} \frac{k_2}{k_1} - d_{22} k_2 + b_2 dk_1 s - b_2 dk_1 \frac{k_2}{k_1} + b_2 dk_1 k_2 + d_{23} k_1 - b_2 dk_1 k_2 = \\
 &= s^2 + s \left(-\frac{k_2}{k_1} + k_2 - d_{22} + b_2 dk_1 \right) + d_{22} \frac{k_2}{k_1} - d_{22} k_2 - b_2 dk_2 + b_2 dk_1 k_2 + d_{23} k_1 - b_2 dk_1 k_2 = \\
 &= s^2 + 2\xi_c \omega_c s + \omega_c^2
 \end{aligned}$$

Dove la pulsazione naturale è

$$\begin{aligned}
 \omega_c^2 &= k_1(d_{23} - b_2 dk_2) + \left(-\frac{k_2}{k_1} + k_2 \right) (b_2 dk_1 - d_{22}) = \\
 &= k_1 \left(\frac{c_r}{ml_f} - \frac{(k_1-1)v}{l} \frac{k_2}{k_1} \right) - \frac{k_2}{k_1} (1 - k_1) \left(\frac{(k_1-1)v}{l} + \frac{c_r l}{mv l_f} \right) = \\
 &= k_1 \frac{c_r}{ml_f} - \frac{k_2 (k_1-1)v}{l} - \frac{k_2 c_r l}{k_1 mv l_f} + k_2 \frac{c_r l}{mv l_f} = \\
 &= k_1 \frac{c_r}{ml_f} - \frac{k_2}{k_1} (k_1 - 1) \left(\frac{v}{l} - \frac{c_r l}{mv l_f} \right) =
 \end{aligned}$$

mentre lo smorzamento è

$$\xi_c = \frac{-\frac{k_2}{k_1} + k_2 - d_{22} + b_2 dk_1}{2\omega_c} = \frac{(k_1 - 1) \left(\frac{v}{l} + \frac{k_2}{k_1} \right) + \frac{c_r l}{mv l_f}}{2 \sqrt{k_1 \frac{c_r}{ml_f} - \frac{k_2}{k_1} (k_1 - 1) \left(\frac{v}{l} - \frac{c_r l}{mv l_f} \right)}}$$

Affinché la stabilità del sottosistema rappresentante il movimento di imbardata sia garantita, le condizioni necessarie sono $\omega_c > 0$ e $\xi_c > 0$.

Sia pulsazione naturale che smorzamento dipendono dai guadagni del controllore k_1 e k_2 . Modificando tali valori è possibile ottenere una variazione dello smorzamento ξ_c , mantenendo sempre il disaccoppiamento delle equazioni.

Nel caso in cui $k_1 = 1$, si ha $d = 0$ e, inoltre, la condizione implica la perdita del parametro libero k_2 . Si ottiene

$$\omega_c^2 = \frac{c_r}{ml_f}$$

$$\xi_c = \frac{\frac{c_r l}{mv l_f}}{2 \sqrt{\frac{c_r}{ml_f}}} = \frac{l}{2v} \sqrt{\frac{c_r}{ml_f}}$$

In tale caso si osserva che lo smorzamento diminuisce all'aumentare della velocità.

Nel caso in cui $-\frac{k_2}{k_1} = 0$ si ottiene:

$$\omega_c^2 = k_1 \frac{c_r}{ml_f}$$

$$\xi_c = \frac{(k_1 - 1) \frac{v}{l} + \frac{c_r l}{mvl_f}}{2 \sqrt{k_1 \frac{c_r}{ml_f}}}$$

Nel corso dell'elaborato e delle simulazioni è stato scelto $k_2 = 0$, il motivo di questa scelta sarà spiegato nel capitolo 2.1.2. Le condizioni per la stabilità del movimento di imbardata sono soddisfatte in questi casi:

- Se $k_1 \geq 1$, per qualsiasi velocità positiva del veicolo
- Se $0 < k_1 < 1$, per $v < -\frac{c_r l}{mvl_f(k_1-1)}$

2.1.2 - Scelta dei guadagni k_1 e k_2

Il parametro libero per il controllo k_1 dovrà rispettare la condizione $k_1 \geq 0$, invece k_2 verrà sempre posto uguale a zero. Si dimostra tale scelta valutando la funzione di trasferimento del controllore:

$$\dot{x} = -ax + k_1 e - k_2 x$$

$$xs = -ax + k_1 e - k_2 x$$

$$x(s + a + k_2) = k_1 e$$

$$x = \frac{k_1 e}{(s + a + k_2)}$$

In uscita si ha

$$\delta_f = x + du$$

Sostituendo si ottiene

$$\delta_f = \frac{k_1 e}{(s + a + k_2)} + d(k_1 e - k_2 x)$$

$$\delta_f = \frac{k_1 e}{(s + a + k_2)} + dk_1 e - dk_2 \frac{k_1 e}{(s + a + k_2)}$$

$$\frac{\delta_f}{e} = \frac{k_1 - dk_2 k_1}{(s + a + k_2)} + dk_1$$

Si analizzano i casi particolari in base alle scelte dei parametri k_1 e k_2 del controllore

- $k_1 = 1 ; k_2 = 0$ $d = 0 ; a = 0$ $\frac{\delta_f}{e} = \frac{1}{s}$
- $k_1 \neq 1 ; k_2 = 0$ $d \neq 0 ; a = 0$ $\frac{\delta_f}{e} = \frac{k_1}{s} + dk_1$
- $k_1 \neq 1 ; k_2 \neq 0$ $d \neq 0 ; a \neq 0$

$$\frac{\delta_f}{e} = \frac{k_1 - dk_2 k_1}{(s + a + k_2)} + dk_1$$

Nel primo caso la funzione di trasferimento uscita-errore è costituita solo da un'azione integrale; nel secondo caso essa contiene un'azione integrale moltiplicata per il guadagno $k_1 \neq 0$ che si somma ad una azione proporzionale dk_1 ; nell'ultimo caso, invece, si perde l'azione integrale, utile affinché il segnale errore in ingresso al controllore tenda asintoticamente a zero. Per tale motivo la scelta ricade su $k_2 = 0$.

2.1.3 - Risultati del controllore

In questa sezione si riportano i risultati delle simulazioni effettuate in anello chiuso, utilizzando il controllore introdotto in precedenza. Questo controllore verrà applicato sia al modello lineare che a quello non lineare al fine di individuare la scelta migliore dei parametri in base alla risposta del sistema.

Partendo dal caso lineare, nel capitolo 1.1.2 si è verificato che la stabilità in anello aperto è garantita $\forall v > 0$. Il sistema ad anello chiuso con il controllo del primo ordine può risultare, invece, instabile nei casi in cui $0 < k_1 < 1$ e $v < -\frac{c_r l}{m v l_f (k_1 - 1)}$. Per osservare tale fenomeno è stata realizzata una simulazione con i seguenti parametri:

- $v = 3 \text{ m/s}$; $k_1 = 0.5$; $c_f = c_r = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$; $\delta_f = 15^\circ$

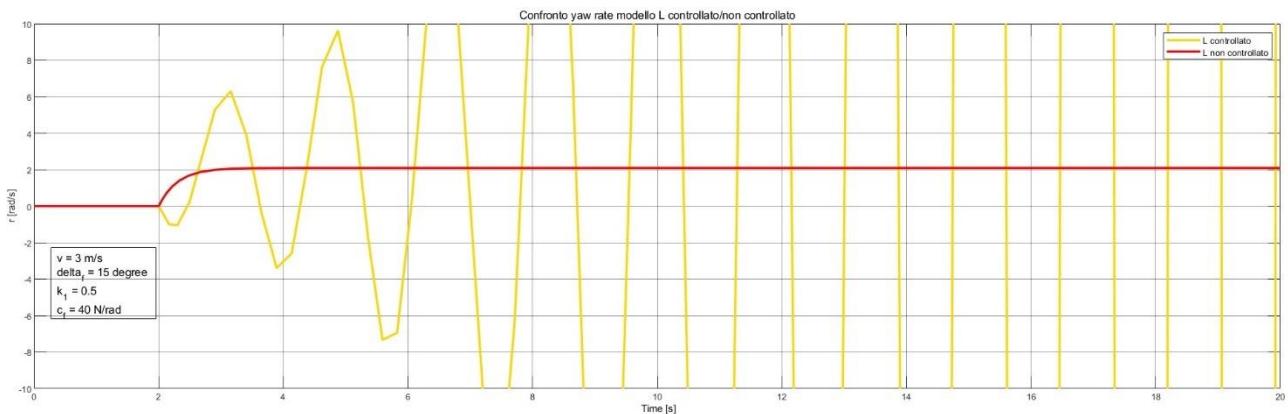


Figura 22 – Simulazione modello L controllato e instabile

In figura 22 sono riportate in rosso e in giallo le risposte dello yaw rate del sistema lineare ad anello aperto e ad anello chiuso rispettivamente. Come si vede dalla curva rossa, il sistema ad anello aperto risulta stabile, infatti, lo yaw rate si stabilizza su un valore di regime; la curva gialla, invece, mostra uno yaw rate oscillante ed instabile nel caso ad anello chiuso. Risulta, dunque, poco utile inserire tale tipo di sistema di controllo in un modello lineare, il quale risulta sempre stabile e che, addirittura, potrebbe risentirne in modo negativo di tale controllore. Per tale motivo il controllore d'ora in poi sarà applicato solo al modello non lineare.

2.1.3.1 - Simulazioni con modello non lineare

All'interno di questa sezione verrà analizzata l'efficacia del controllore del primo ordine applicato al modello non lineare al variare del parametro di guadagno k_1 e, in un secondo momento, al variare del coefficiente di cornering stiffness $c_f = c_r$.

In figura 23 si osserva il comportamento dell'angolo di sterzo in ingresso al modello NL e dello yaw rate in uscita dal modello non lineare al variare di tre differenti valori di k_1 .

- $v = 4 \text{ m/s} ; k_1 = 1, 3, 10 ; c_f = c_r = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}} ; \delta_f = 20^\circ$

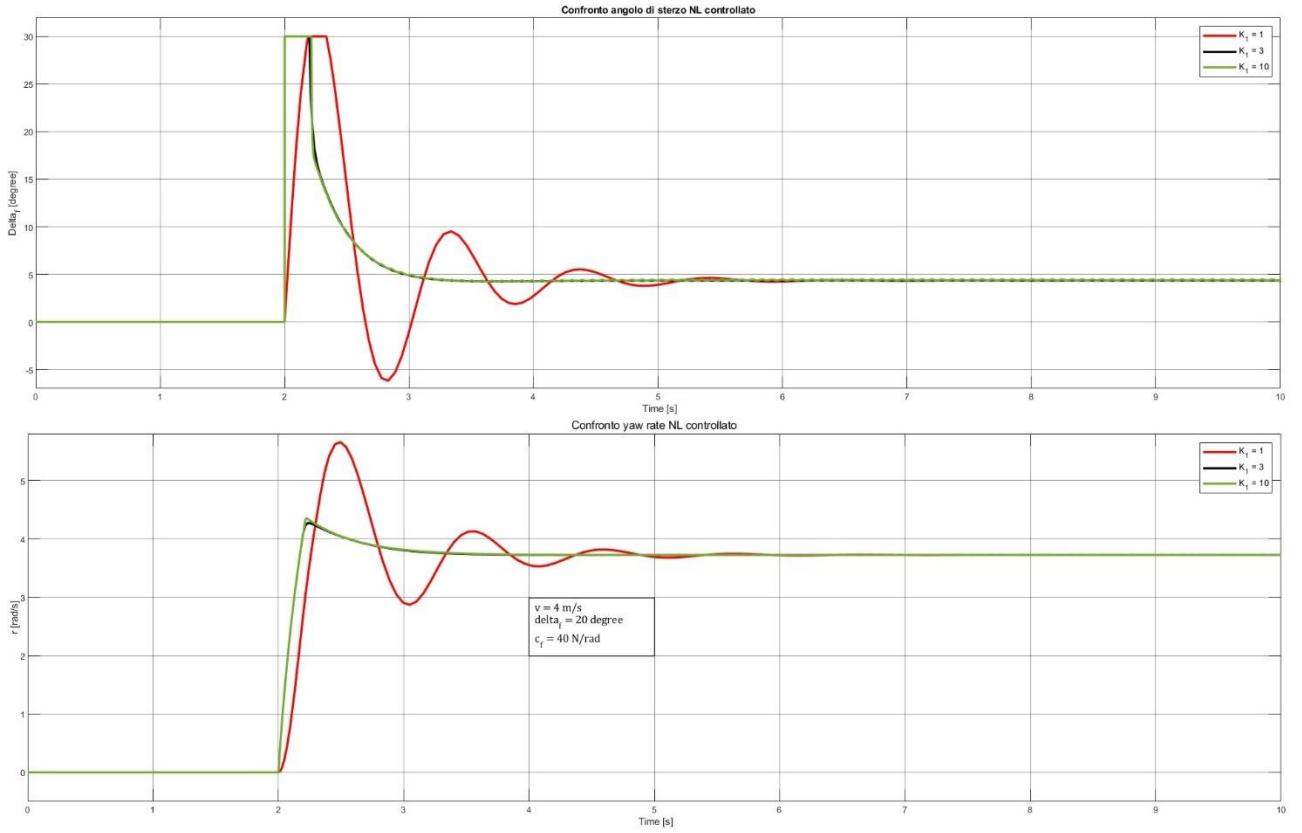


Figura 23 – Simulazione modello NL controllato al variare di k_1

Il sistema ad anello chiuso risulta stabile, mentre senza il controllo il sistema ad anello aperto risulterebbe instabile in modo simile alla figura 15. Per $k_1 = 1$ si ha solo il contributo dell'azione integrale, infatti, questo risulta essere il caso peggiore. Si osserva come all'aumentare di k_1 migliora sia la risposta dello yaw rate in uscita (transitorio più breve e minori oscillazioni), sia l'andamento dell'angolo di sterzo δ_f in ingresso al modello NL. La differenza tra $k_1 = 3$ e $k_1 = 10$ si nota nel grafico di δ_f , dove si può osservare una maggiore vibrazione a regime per $k_1 = 10$. Con i parametri in esame il migliore valore per k_1 risulta, dunque, essere $k_1 = 3$.

Fino ad ora le simulazioni sono state eseguite assumendo che sia il controllore che il modello avessero lo stesso valore di c_f . Nella realtà il controllore sarà progettato con un valore di c_f fisso e costante, mentre il coefficiente di cornering stiffness del modello può assumere valori diversi a seconda della rigidità degli pneumatici in curva e del terreno. Si valuta adesso un sistema ad anello chiuso con $c_{f\text{controllore}} \neq c_{f\text{modello}}$, ponendo prima $c_{f\text{controllore}}$ fisso e variando $c_{f\text{modello}}$ così da simulare un caso reale, in seguito si realizza una simulazione con i parametri fissi invertiti. Dato che per questa analisi è necessario che compaia il termine c_f all'interno di $d = \frac{(k_1-1)m_l r v}{k_1 c_{fl}}$, si realizzano, allora, le simulazioni con $k_1 \neq 1$.

In figura 24 è stata svolta una simulazione con $c_{f\text{modello}}$ differenti e con i seguenti parametri:

- $v = 4 \text{ m/s} ; k_1 = 3 ; c_{f\text{controllore}} = c_{r\text{controllore}} = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}} ; \delta_f = 20^\circ$

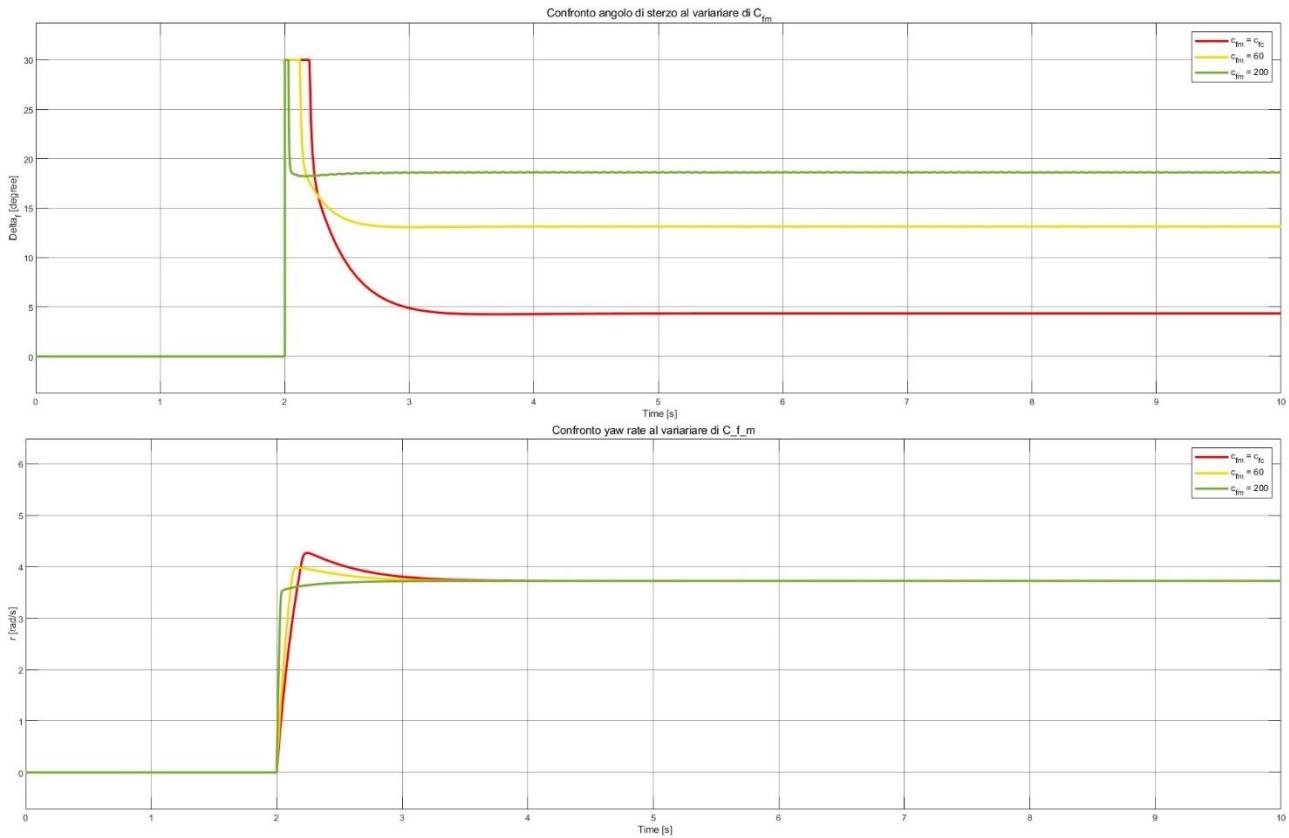
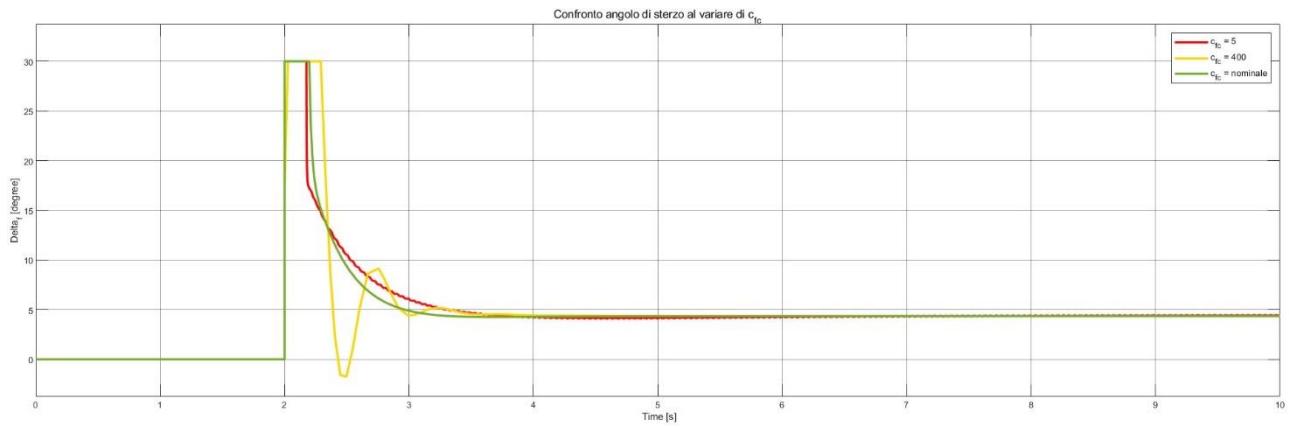


Figura 24 – Simulazioni modello NL controllato al variare di $c_{f_modello}$

In figura 25 e 26, invece, è stata svolta una simulazione con $c_{f_controllore}$ differenti e con i seguenti parametri:

- $v = 4 \text{ m/s} ; k_1 = 3 ; c_{f_modello} = c_{r_modello} = 40 \frac{N}{rad} ; \delta_f = 20^\circ$



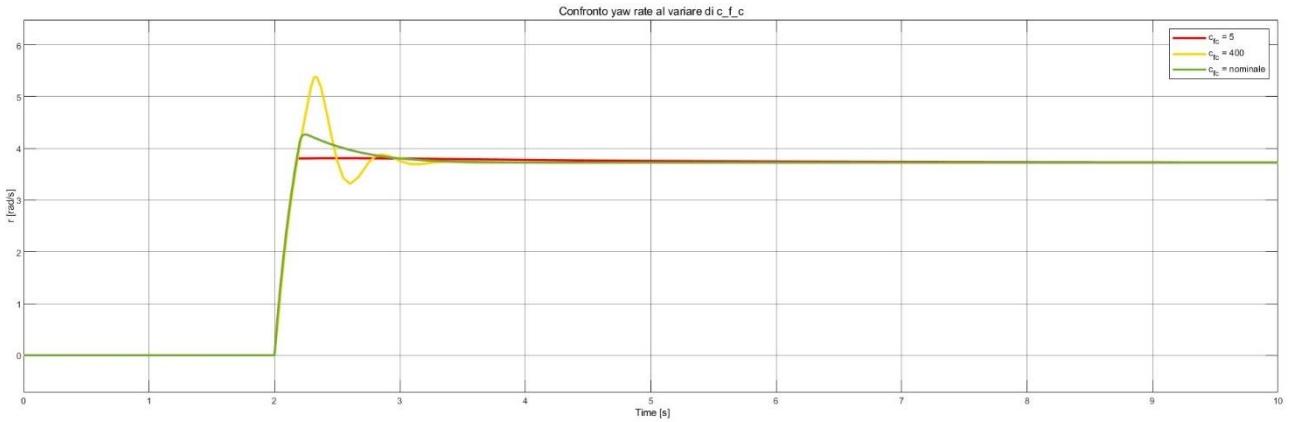


Figura 25 – Simulazioni modello NL controllato al variare di $c_{f_controllore}$

- $v = 4 \text{ m/s} ; k_1 = 3 ; c_{f_modello} = c_{r_modello} = 400 \frac{N}{rad} ; \delta_f = 20^\circ$

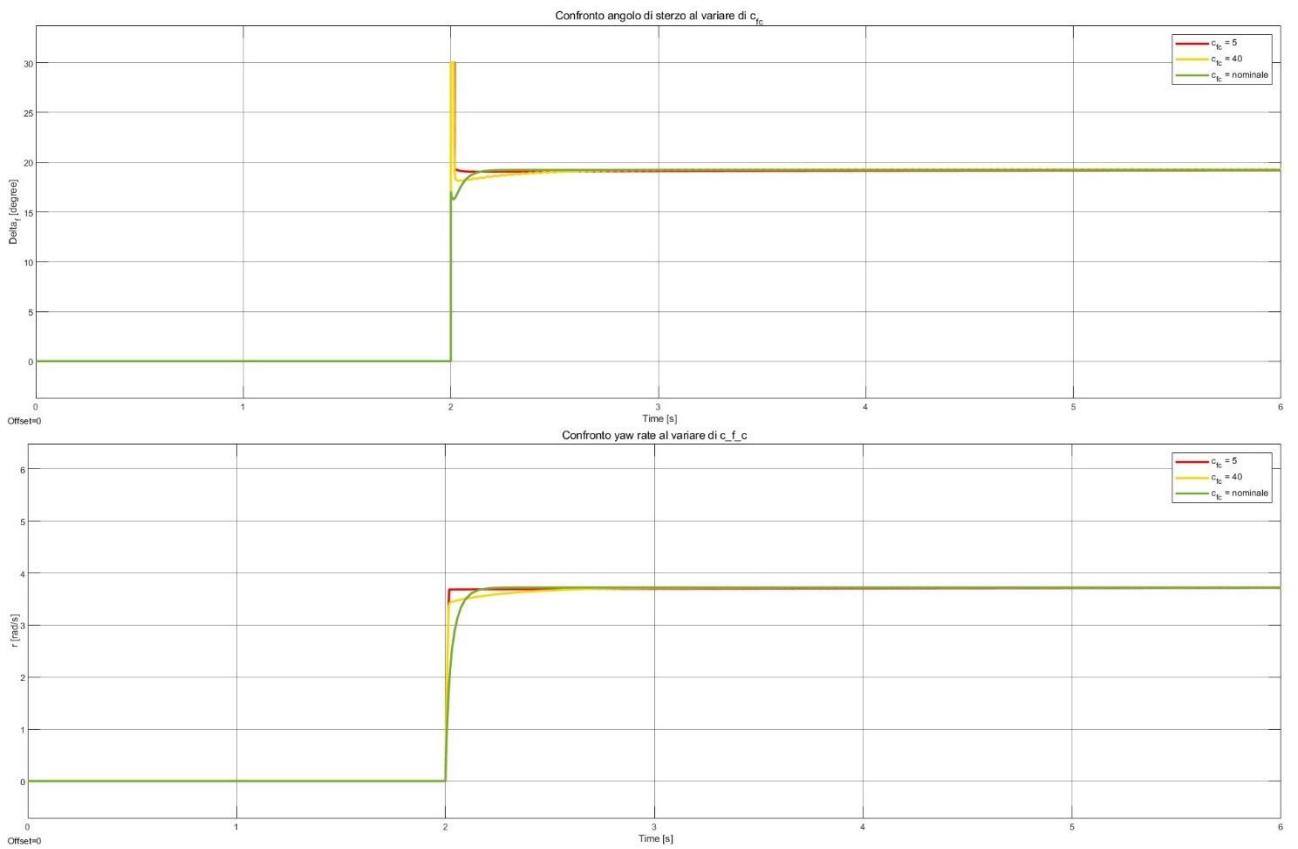


Figura 26 – Simulazioni modello NL controllato al variare di $c_{f_controllore}$

Dalle figure 24 e 26 si osserva che, quando si ha a che fare con un elevato valore di cornering stiffness del modello (dovuto agli pneumatici e alla strada), il controllore incide meno sul sistema poiché questo risulta già stabile in anello aperto, come visto in precedenza. In figura 25 si osserva come sia utile per il modello avere un sistema di controllo anti-sbandata, poiché, con bassi valori di $c_{f_modello}$ la vettura risulta instabile in anello aperto. Da tutte le figure si nota come avere un $c_{f_controllore}$ fissato con valore elevato sia uno svantaggio. I risultati migliori si ottengono, infatti, con valori bassi di c_f del controllore; infatti, si può notare in figura 25 che, quando questo assume valore di 400 N/rad , sia la risposta dello yaw rate che l'angolo di sterzo in ingresso subiscono elevate oscillazioni prima di raggiungere il valore di regime.

In tutte le simulazioni si nota che l'angolo di sterzo δ_f , per raggiungere lo yaw rate desiderato, si assesta su un valore diverso rispetto a quello di riferimento. Questo perché la formula che è stata utilizzata per ricavare il riferimento r_{ref} deriva da un modello lineare e viene applicata in un contesto non lineare.

2.2 - Controllore PI

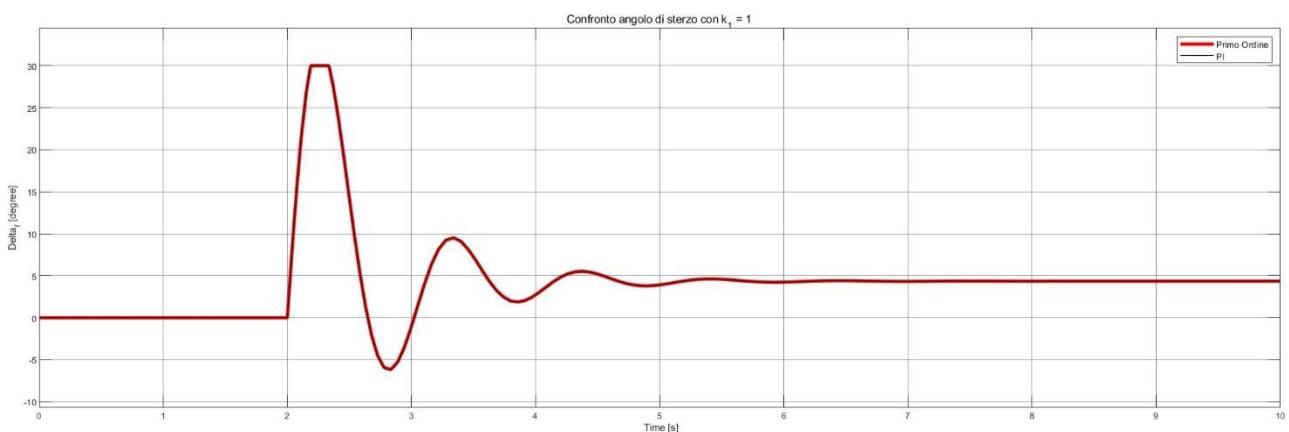
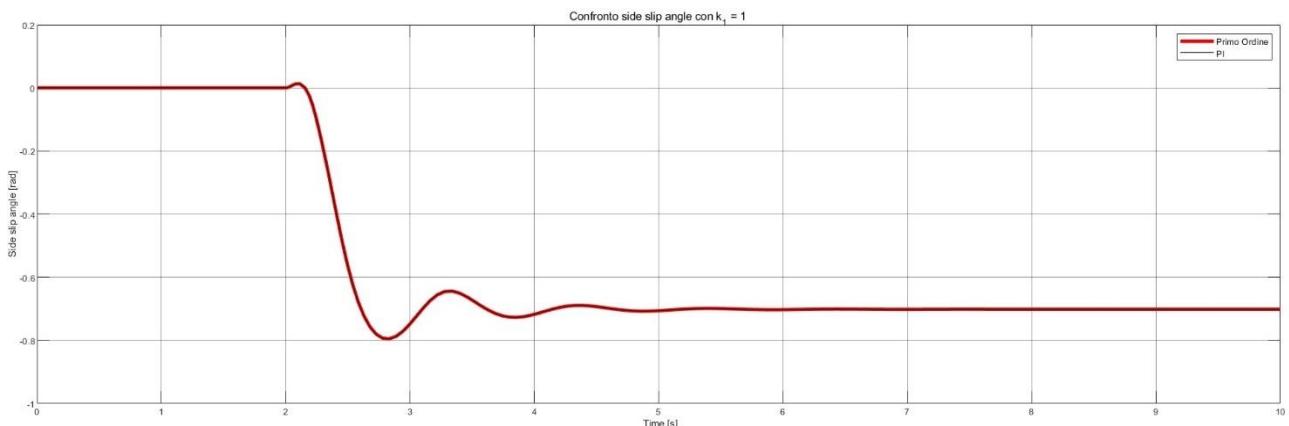
Per concludere lo studio del controllo attivo di sterzata sulle ruote anteriori è utile mostrare il controllore di tipo proporzionale-integrale (PI). Questo tipo di controllore è vantaggioso proprio per la sua reperibilità in commercio. I suoi parametri possono essere settati in base al tipo di sistema di utilizzo. In tal modo si evita di dover costruire un controllore ad hoc per il modello di veicolo. Avendo fissato il coefficiente $k_2 = 0$, la funzione di trasferimento del controllore di primo ordine è uguale a quella di un controllore PID in configurazione PI, la cui funzione di trasferimento è proprio

$$P + I \frac{1}{s}$$

con $P = dk_1$; $I = k_1$

Sono state svolte delle simulazioni di confronto applicando al modello non lineare in primo luogo il controllo spiegato in precedenza e, successivamente, il controllore PI. In figura 27 e 28 sono mostrati i risultati di tale confronto avente i seguenti parametri:

- $v = 4 \text{ m/s}$; $k_1 = 1$; $c_f = c_r = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$; $\delta_f = 20^\circ$



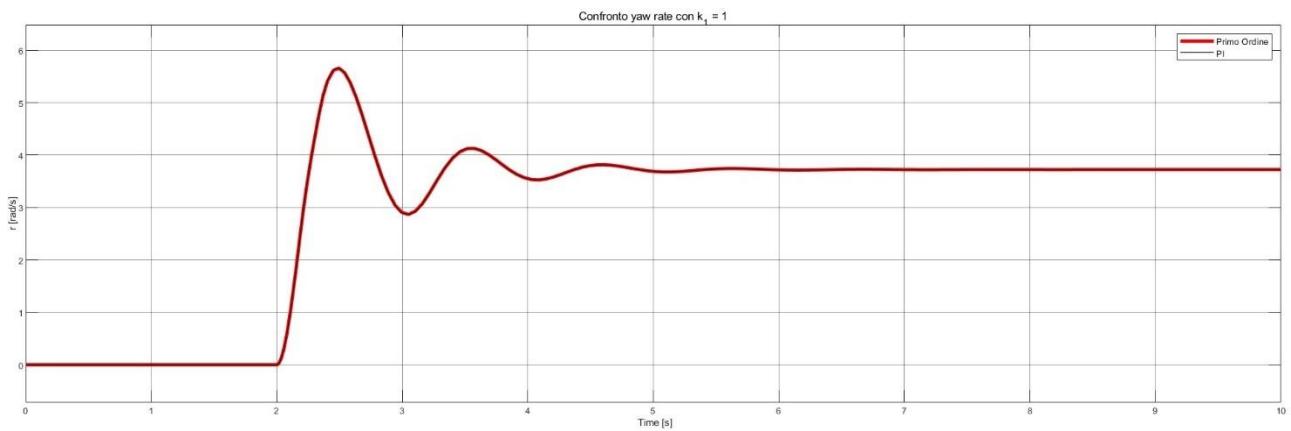
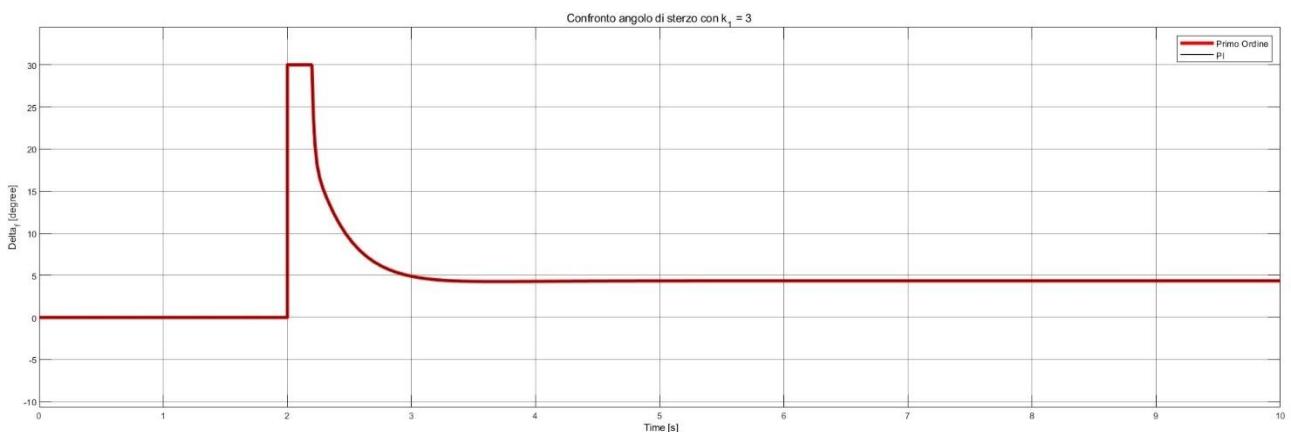
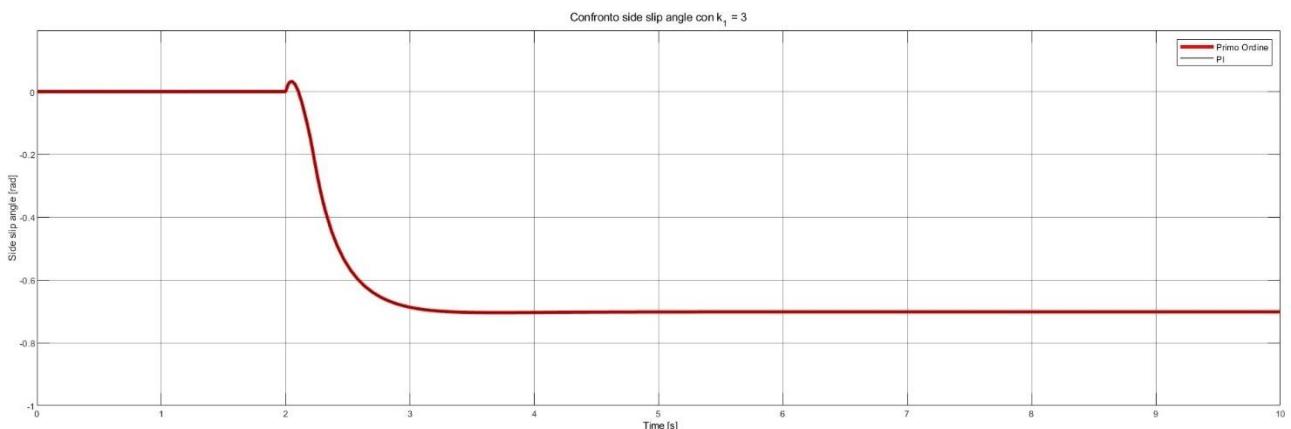


Figura 27 – Confronto controllore primo ordine/PI applicato al modello NL

- $v = 4 \text{ m/s} ; k_1 = 3 ; c_f = c_r = 40 \frac{N}{rad} ; \delta_f = 20^\circ$



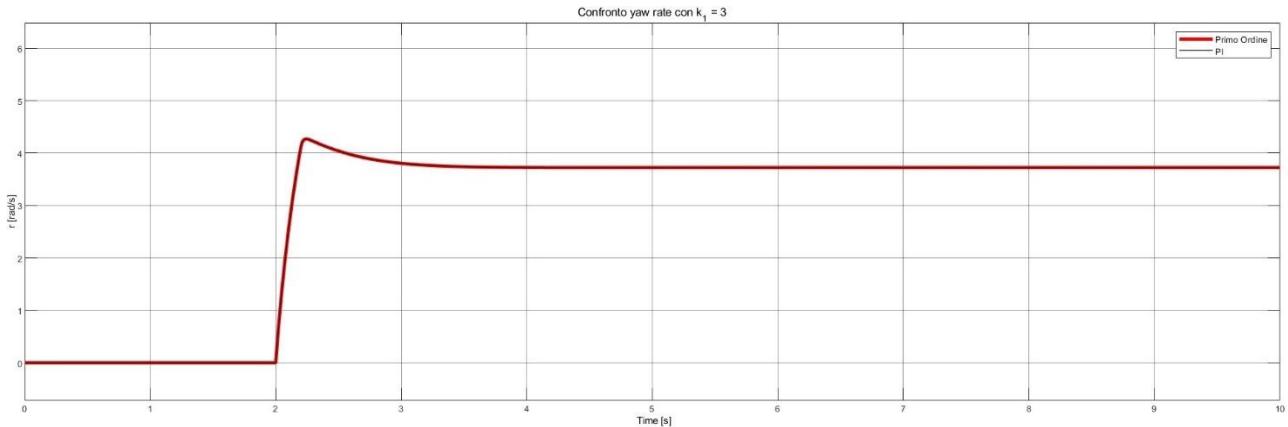


Figura 28 – Confronto controllore primo ordine/PI applicato al modello NL

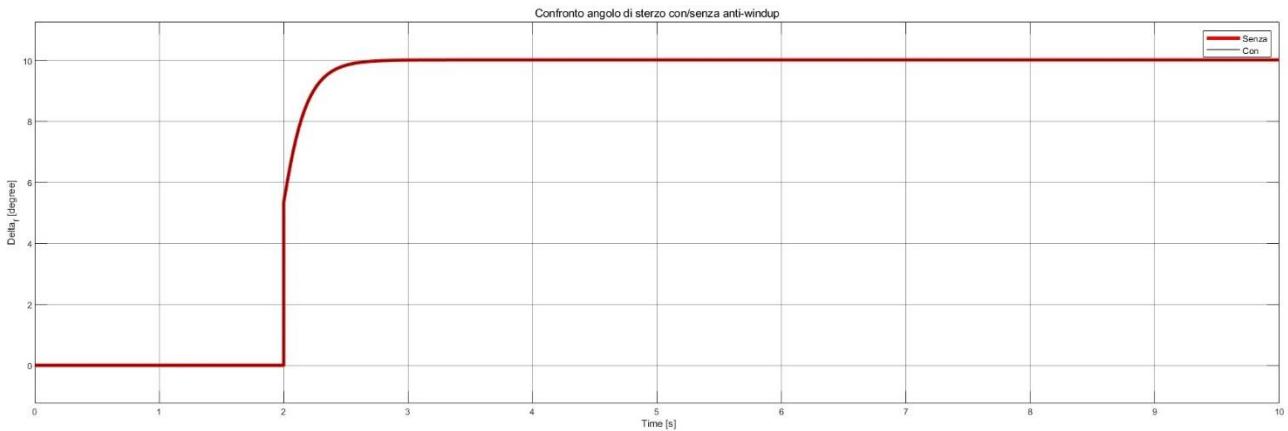
Sia in figura 27 che in figura 28 è rappresentato in rosso il grafico ottenuto utilizzando il controllore di primo ordine spiegato in precedenza, mentre in nero quello ottenuto con l'utilizzo del controllore PI. È molto interessante notare che, proprio come ci si aspettava, in entrambe le simulazioni le curve di risposta dell'angolo di side slip β , dello yaw rate r e dell'angolo di sterzo in ingresso δ_f si sovrappongono perfettamente.

2.2.1 - Funzionalità anti-windup

Il vantaggio di utilizzare il controllore PI sta nella possibilità di attivare la funzionalità di anti-windup. Questa è utile nei casi in cui il segnale in uscita dal controllore sia in saturazione perché in queste circostanze il segnale di yaw rate r in uscita dal modello potrebbe non crescere (in valore assoluto) anche con un errore e non nullo in ingresso al controllore. Ciò che ne consegue è che il termine integrale continua a crescere, senza però riportare alcun effetto sulla variabile di comando del modello, ovvero, l'angolo di sterzo δ_f . Tale effetto, chiamato proprio “wind-up”, rende inattivo il regolatore anche quando l'errore e decresce o inverte il segno.

Sono state svolte alcune simulazioni per osservare quanto spesso questo fenomeno si verifichi e in quali circostante, dunque, risulta utile utilizzare la funzione “anti-windup”. Di seguito si riportano i risultati di tali simulazioni, aventi i seguenti parametri:

- $v = 1 \text{ m/s}$; $k_1 = 3$; $c_f = c_r = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$; $\delta_f = 10^\circ$ (figura 29)
- $v = 4 \text{ m/s}$; $k_1 = 3$; $c_f = c_r = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$; $\delta_f = 10^\circ$ (figura 30)
- $v = 4 \text{ m/s}$; $k_1 = 3$; $c_f = c_r = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$; $\delta_f = 25^\circ$ (figura 31)



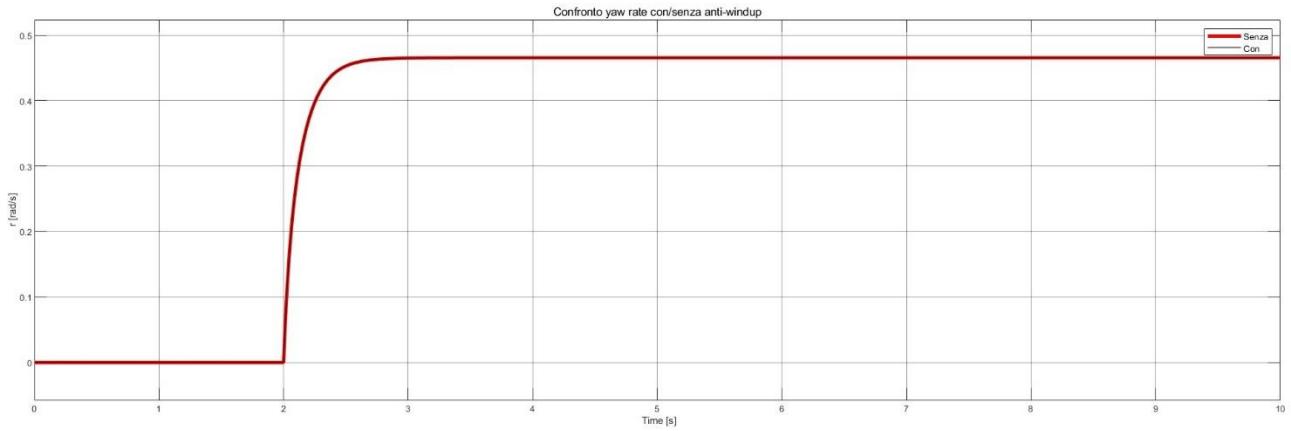


Figura 29 – Simulazioni con/senza la funzione anti-windup

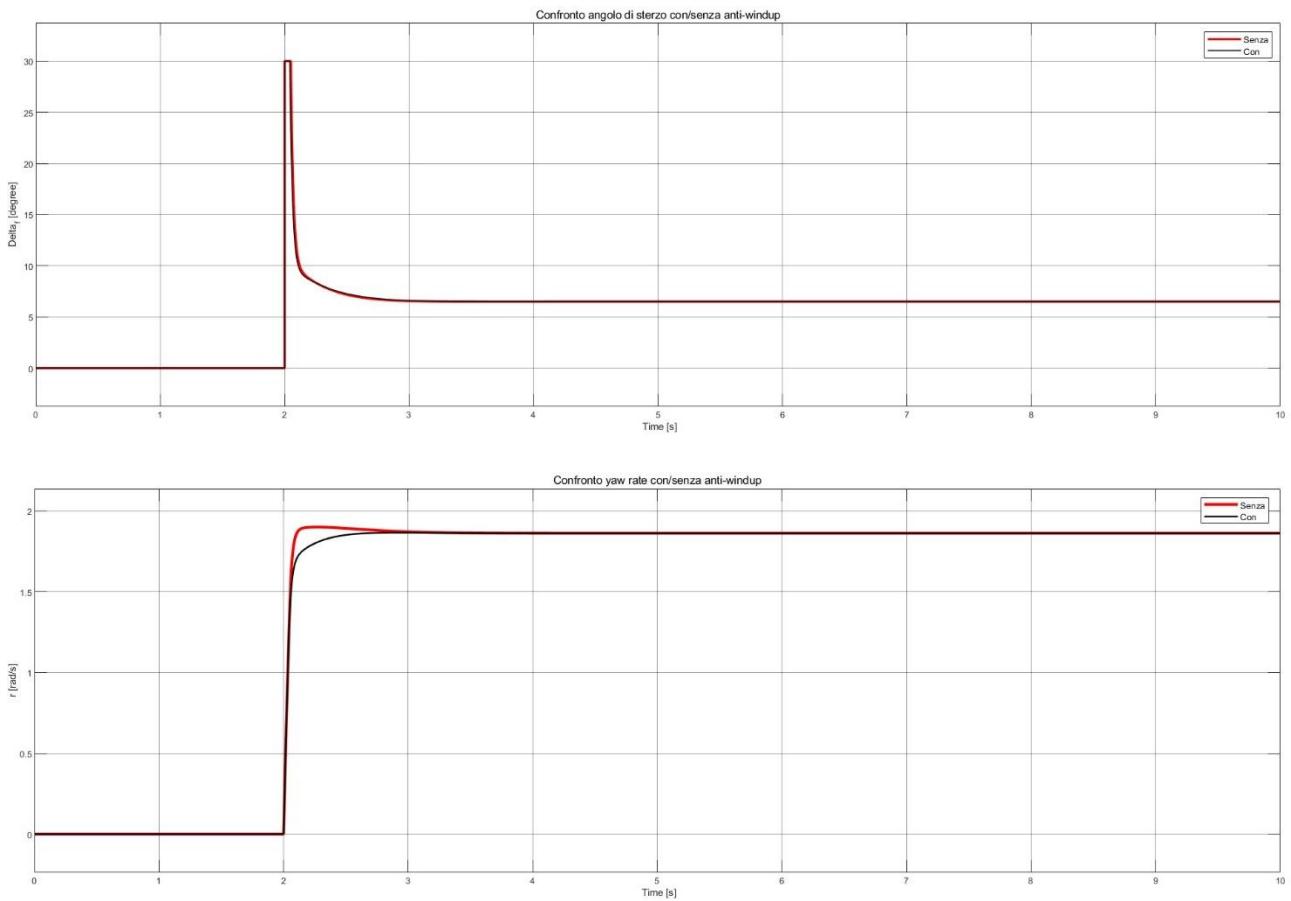


Figura 30 – Simulazioni con/senza la funzione anti-windup

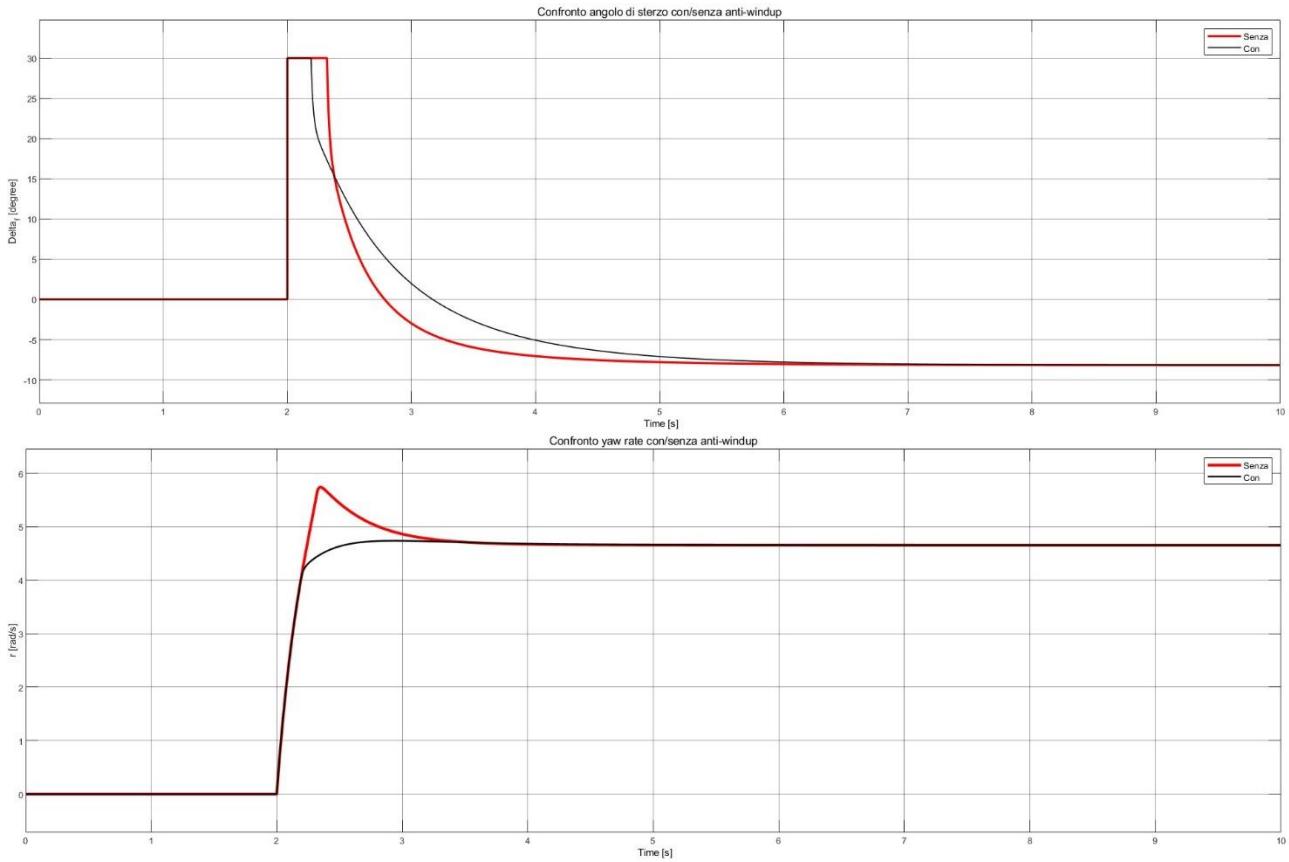


Figura 31 – Simulazioni con/senza la funzione anti-windup

In figura 29 è stata svolta una simulazione a bassa velocità e con un angolo di sterzo non troppo elevato. Si osserva che non esiste alcuna differenza tra i risultati ottenuti con la funzione anti-windup attiva (in nero) e quelli ottenuti con la funzione disattivata (in rosso). Dalle figure 30 e 31 si evince che all'aumentare della velocità v e dell'angolo di sterzo δ_f il fenomeno del wind-up è evidente ed è direttamente proporzionale a questi due parametri; ovvero, con il crescere della velocità della vettura e/o dell'angolo di sterzo delle ruote, il fenomeno di wind-up si presenta in maniera sempre più consistente. In tali casi si vede come l'ausilio della funzione di anti-windup aiuti a migliorare il transitorio del sistema, rendendolo più breve nel caso dell'angolo di sterzo δ_f , oppure, diminuendo l'overshoot nel caso dello yaw rate r .

2.2.2 - Azione derivativa e controllore PID

Per completare lo studio sul controllore PI, è stato analizzato il contributo dell'azione derivativa per capire se questa possa contribuire all'efficacia del sistema. Questa, in generale, ha il vantaggio di ottimizzare il transitorio, rendendo il sistema più reattivo. Se questa azione dovesse diventare preponderante, lo svantaggio sarebbe quello di avere un ripple elevato e, dunque, molte oscillazioni sulla risposta dello yaw rate, così come un angolo di sterzo delle ruote non costante e con elevata frequenza di oscillazione.

Per effettuare tale studio, si deve porre il controllore nella modalità PID, la cui funzione di trasferimento è

$$P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

Le azioni proporzionale (P) e integrale (I) sono state descritte in precedenza, mentre l'azione derivativa consta di due parametri: D e N . Non è possibile utilizzare, in questo caso, la funzionalità di PID tuning disponibile su Simulink, poiché in tale caso si andrebbero a variare anche i parametri P e I . È giusto ricordare che l'azione proporzionale-integrale dipende dal guadagno del controllore k_1 e dal parametro di

controllo d , il quale è stato calcolato nel capitolo 2.1 appositamente per disaccoppiare il moto laterale dal movimento di imbardata, così da garantire la stabilità del controllore.

Sono state svolte varie simulazioni nel caso in cui il veicolo sia guidato ad alta velocità e con un elevato angolo di sterzo delle ruote anteriori, poiché questo è il caso in cui la vettura ha più bisogno di un controllo efficace e reattivo, atto a mantenere la stabilità. In tali condizioni si è verificata l'utilità della modalità anti-windup, dunque, questa stessa è stata utilizzata per tutte le simulazioni. Fissati i parametri di seguito elencati, ai variare delle simulazioni sono stati testati diversi valori per i parametri D e N .

- $v = 4 \text{ m/s}$; $\delta_f = 25^\circ$; $k_1 = 3$; $c_f = c_r = 40 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$

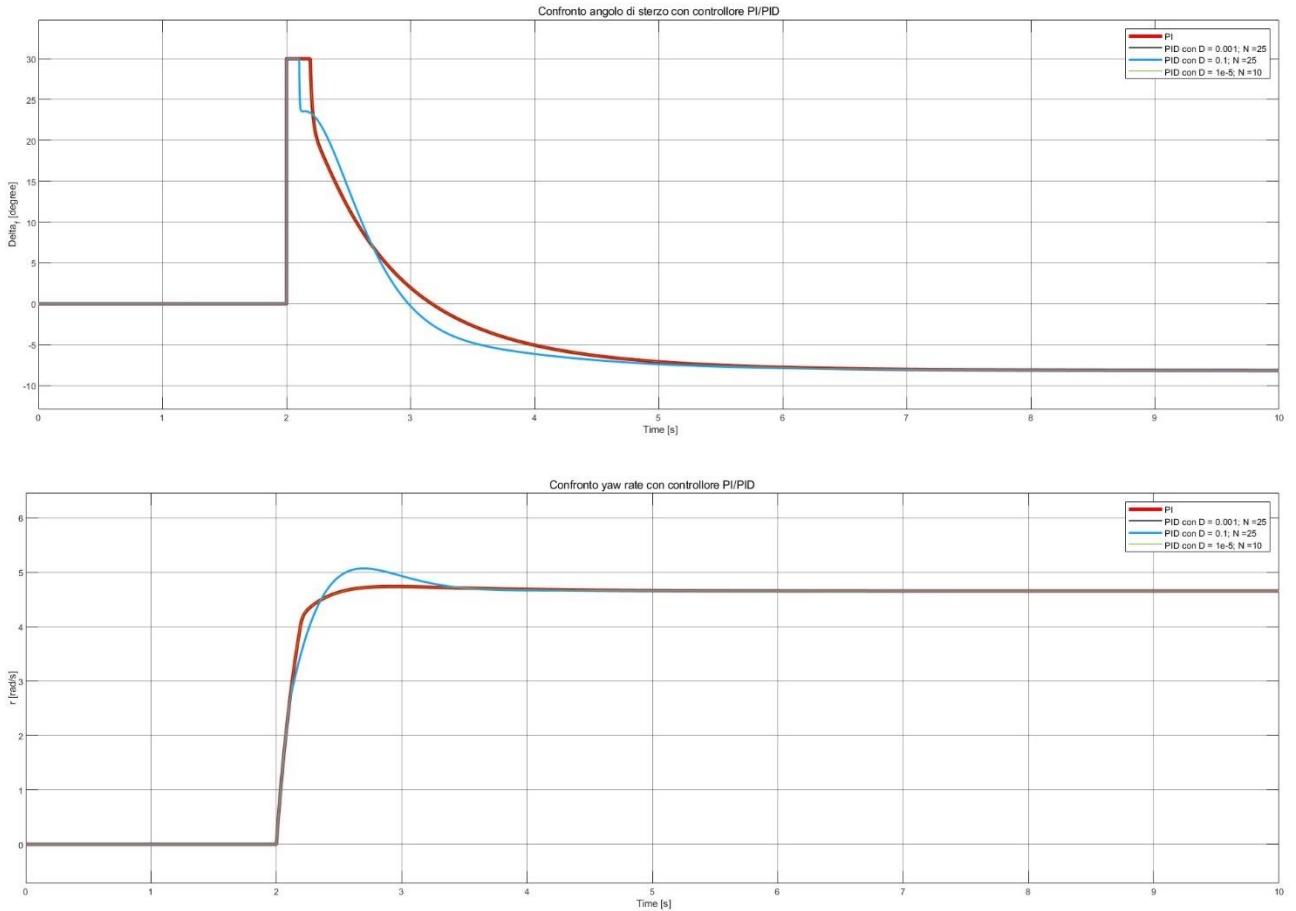


Figura 32 – Simulazioni controllore PI/PID

Dai risultati riportati in figura 32 si può notare che l'azione derivativa non risulta utile agli scopi sopra elencati; in rosso si hanno le curve dell'angolo di sterzo δ_f e dello yaw rate r , e si vede che queste coincidono con le curve di colore nero e verde. All'aumentare dell'azione derivativa (curva blu) si ottiene un angolo di sterzo δ_f non confortevole alla guida, oltre ad avere uno yaw rate r con un overshoot dove prima non esisteva. Si evince, infine, che tale azione derivativa non sia utile alla reattività della risposta del sistema, constatando gli eguali tempi di salita delle varie curve di risposta dello yaw rate.

3 - Controllo imbardata 4WAS

Un'altra tipologia di controllo attivo di imbardata analizzato è il 4WAS, acronimo di four wheel steering. Nel caso in cui il modello di veicolo disponesse di quattro ruote sterzanti, si potrebbe implementare un sistema di controllo attivo di sterzata anche sulle ruote posteriori. Il tipo di controllo trattato in questione è stato scelto di tipo SISO (singolo ingresso, singola uscita) per semplicità, ma potrebbe essere studiato e implementato anche un controllo 4WAS di tipo MIMO. Con la tipologia scelta, l'angolo di sterzo delle ruote posteriori dipenderà da quello delle ruote anteriori, unico ingresso del sistema.

In figura 33 è riportato uno schema del modello a quattro ruote sterzanti, semplificato e ridotto al modello bicicletta trattato nel capitolo 1.

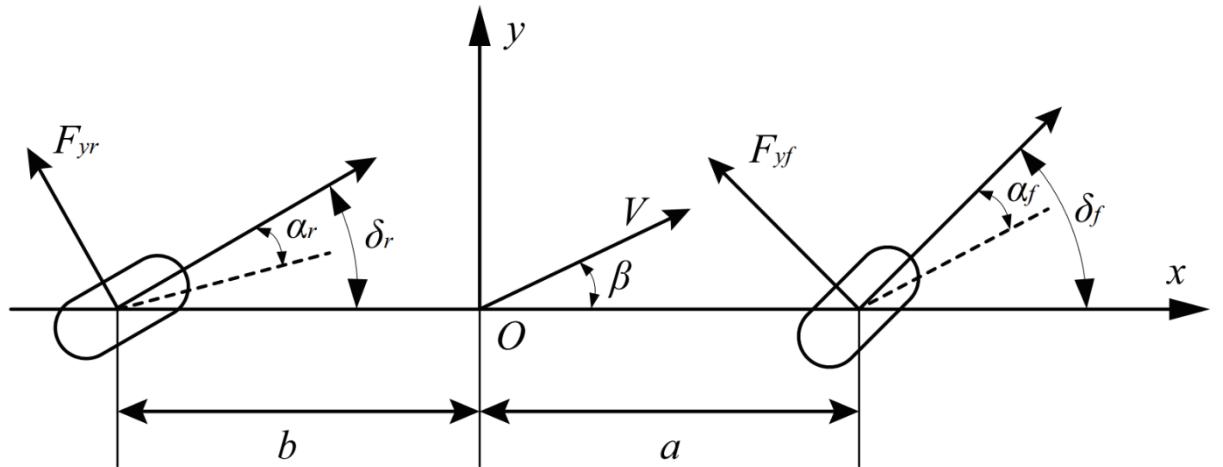


Figura 33 – Modello bicicletta 2DOF con quattro ruote sterzanti [7]

Le forze laterali F_{yf} , F_{yr} e gli angoli di slittamento laterale degli pneumatici α_f , α_r in figura 33, come descritto anche da I. Amdouni [8], sono

- $F_{yf} = c_f \alpha_f$; $F_{yr} = c_r \alpha_r$
- $\alpha_f = \delta_f - \beta + \frac{l_f r}{v}$; $\alpha_r = \delta_r - \beta + \frac{l_r r}{v}$

I parametri a e b rappresentano rispettivamente la distanza dell'asse anteriore e posteriore dal centro di massa del veicolo, ovvero, i parametri in precedenza indicati come l_f e l_r .

In accordo con gli T. Zhu [7] e M.H.M Ariff [9], la grandezza e la direzione dell'angolo di sterzo della ruota posteriore dipende dai parametri del veicolo, quali lunghezza e massa, dal coefficiente di cornering stiffness e dalla velocità istantanea lungo l'asse x. Si determina, quindi, δ_r tramite il rapporto:

$$k = \frac{\delta_r}{\delta_f} = \frac{-l_r + \left[\frac{ml_f}{c_r l} \right] v^2}{l_f + \left[\frac{ml_r}{c_f l} \right] v^2}$$

Tale rapporto è stato formulato affinché l'angolo di sterzo δ_r fornisca un angolo negativo a bassa velocità mentre un angolo positivo ad alta velocità.

Le equazioni differenziali che descrivono la dinamica del modello bicicletta sono le seguenti:

- $mv(\dot{\beta} + r) = (c_f + c_r)\beta + \frac{1}{v}(l_f c_f - l_r c_r)r - c_f \delta_f - c_r \delta_r$
- $I_{zz}\dot{r} = (l_f c_f - l_r c_r)\beta + \frac{1}{v}(l_f^2 c_f + l_r^2 c_r)r - l_f c_f \delta_f + l_r c_r \delta_r$

Definendo il vettore di stato come $x = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix}$, il segnale di ingresso come $u = \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r k \end{bmatrix}$ e l'uscita come $y = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix}$, il modello nella rappresentazione in spazio di stato può essere scritto:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad 3.1$$

Dove

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{mv} & -1 - \frac{l_f c_f - l_r c_r}{mv^2} \\ \frac{l_r c_r - l_f c_f}{I_{zz}} & -\frac{l_f^2 c_f + l_r^2 c_r}{I_{zz} v} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv} & \frac{c_r}{mv} \\ \frac{l_f c_f}{I_{zz}} & -\frac{l_r c_r}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1 - Azioni di feedforward e di feedback

Questo tipo di sistema di controllo, oltre ad essere costituito da un modello di riferimento e da un controllo in feedback, lega anche un'azione di feedforward. Come si osserva in figura 34, queste due azioni di controllo si sommano per generare il segnale di ingresso al modello non lineare $u = u_{ff} + u_{fb} = [\delta_f \quad \delta_r]^T$.

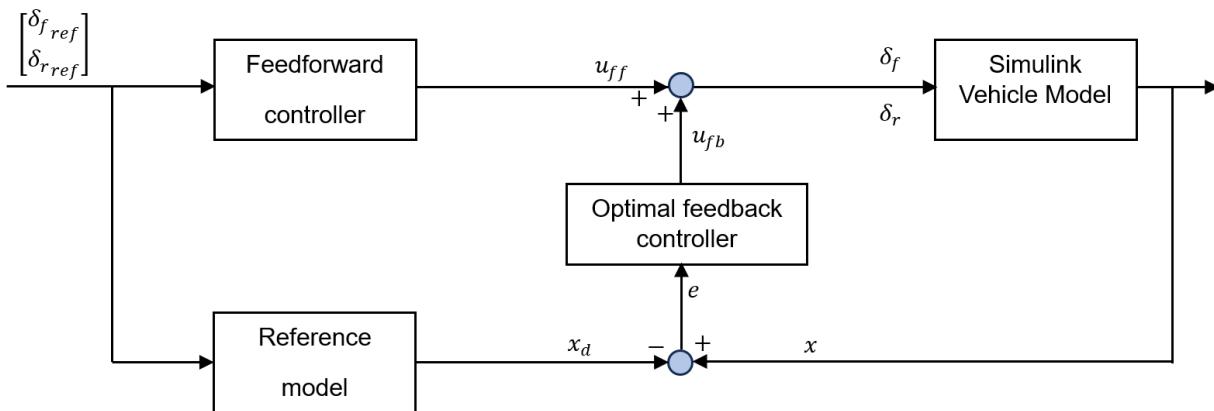


Figura 34 – Controllo 4WAS schematizzato

Come descritto da I. Amdouni [8], il modello di riferimento è costruito in modo tale da avere in uscita le variabili del modello desiderato, il quale si riferisce ad una risposta ideale di sterzata. Il modello desiderato è tale che abbia in uscita un angolo di slittamento laterale $\beta_{des} = 0$ nel centro di massa in condizioni stazionarie e, inoltre, uno yaw rate desiderato $r_{des} = \frac{v}{l} \delta_f$. Il modello di riferimento è un sistema del primo ordine con una matrice di trasferimento

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} \beta_{des} \\ r_{des} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{des}}{1 + sT_\beta} \\ \frac{r_{des}}{1 + sT_r} \end{bmatrix}$$

Dove T_β e T_r sono le costanti di tempo desiderate

In accordo con T. Zhu [7] e con B. Li [10], è possibile definire il vettore di stato e scrivere la dinamica del sistema utilizzando la rappresentazione in spazio di stato

$$\begin{aligned} x_d &= [\beta_{des} \quad r_{des}]^T \\ \dot{x}_d &= A_d x_d + E_d \delta_f_{ref} \end{aligned} \quad 3.2$$

Dove

$$A_d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \quad E_d = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{des}}{T_\beta} \\ \frac{r_{des}}{T_r} \end{bmatrix}$$

3.1.1 - Controllo in feedforward

Per calcolare il segnale u_{ff} di feedforward, oltre ai due angoli di sterzo delle ruote anteriori e posteriori, si utilizzeranno anche i parametri fissi del veicolo noti a priori e, infine, lo yaw rate di riferimento.

La matrice di trasferimento $P(s)$ del modello lineare può essere ottenuta dalla funzione di trasferimento nel dominio di Laplace 4.1, così come dimostrato da I. Amdouni [8] e da B. Li [10]. $P(s)$ è una matrice contenente le funzioni di trasferimento dall'angolo di sterzo anteriore e posteriore allo yaw rate e all'angolo di side slip, e può essere scritta come

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta_f(s)} & \frac{\beta(s)}{\delta_r(s)} \\ \frac{r(s)}{\delta_f(s)} & \frac{r(s)}{\delta_r(s)} \end{bmatrix}$$

Il progetto del guadagno $K_f(s)$ del controllo in feedforward si basa sul modello di riferimento e deve soddisfare le seguenti equazioni

$$\begin{cases} PK_f(s) = P[K_{ff}(s) \quad K_{fr}(s)]^T = G(s) \\ K_{ff}(s) \frac{\beta(s)}{\delta_f(s)} + K_{fr}(s) \frac{\beta(s)}{\delta_r(s)} = \frac{\beta_{des}}{1 + sT_\beta} \\ K_{ff}(s) \frac{r(s)}{\delta_f(s)} + K_{fr}(s) \frac{r(s)}{\delta_r(s)} = \frac{r_{des}}{1 + sT_r} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, è possibile calcolare $K_{ff}(s)$ e $K_{fr}(s)$ come segue

$$\begin{cases} K_{ff}(s) = \frac{I_{zz}vs + ml_r v^2 + l_f lc_f}{lc_f v} \frac{r_{des}}{1 + sT_r} \\ K_{fr}(s) = \frac{-I_{zz}vs + ml_f v^2 + l_r lc_r}{lc_r v} \frac{r_{des}}{1 + sT_r} \end{cases}$$

Dunque, il segnale di feedforward in ingresso sarà descritto come segue

$$u_{ff} = [\delta_{f_{ref}} K_{ff}(s) \quad \delta_{r_{ref}} K_{fr}(s)]^T$$

3.1.2 - Controllo in feedback

Il controllo in feedback si somma a quello in feedforward ed è pensato apposta per compensare i disturbi esterni e le incertezze della dinamica del sistema. Come affermato da B. Li [10], per poter formulare tale controllo, bisogna anzitutto descrivere la variabile dell'errore come segue

$$e = x - x_d = [\beta - \beta_d \quad r - r_d]^T$$

Si può, dunque, calcolare la dinamica dell'errore, derivando nel tempo gli stati x e x_d . Facendo riferimento alle equazioni 3.1 e 3.2 si ottiene

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d = Ae + Ax_d + Bu - A_d x_d - E_d \delta_{f_{ref}} = Ae + Bu + (A - A_d)x_d - E_d \delta_{f_{ref}}$$

Il terzo e il quarto elemento di tale equazione rappresentano il disturbo causato dall'angolo di sterzo delle ruote anteriori. Definendo

$$Bu_{fb} = Bu + (A - A_d)x_d - E_d \delta_{f_{ref}}$$

Allora, la dinamica dell'errore può essere riscritta come segue

$$\dot{e} = Ae + Bu_{fb}$$

Sfruttando la teoria del controllo ottimale e l'algoritmo LQR, è possibile definire il segnale di feedback in ingresso come

$$u_{fb} = -K_{fb}e = -\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - \beta_d \\ r - r_d \end{bmatrix}$$

Per calcolare la matrice dei guadagni K_{fb} , è necessario descrivere le performance del sistema tramite una funzione di costo J , definita come segue:

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q e + u_{fb}^T R u_{fb}) dt$$

Dove Q è la matrice dei pesi per le variabili dell'errore, mentre R è la matrice dei pesi per la variabile di controllo dell'azione di feedback in ingresso. Q e R sono due matrici simmetriche e, mentre la prima è semidefinita positiva, la seconda è definita positiva. Una volta determinate tali matrici, è possibile calcolare la matrice dei guadagni K_{fb} tramite l'equazione

$$K_{fb} = R^{-1} B^T P$$

Dove P si ottiene risolvendo l'equazione di Riccati

$$Q + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = 0$$

3.1.2.1 Matrici dei pesi Q e R

La composizione delle matrici dei pesi Q e R ha una grande influenza sulle prestazioni del sistema. Il numero di elementi in tali matrici dipende dal numero di variabili di stato (n) e dal numero di variabili di ingresso (m). Dunque, Q è una matrice di dimensione $[n \times n]$ mentre R è una matrice di dimensione $[m \times m]$. In genere le matrici dei pesi Q e R sono diagonali e, dunque, la funzione di costo J risulta essere un'integrale dei quadrati degli errori degli stati e degli ingressi. Scelto un valore unitario come, per esempio, il costo dell'errore sullo yaw rate, i restanti elementi delle matrici si trovano per iterazione, con il fine di ottimizzare la risposta del sistema. Alcuni studi dimostrano l'utilità di utilizzare la tecnica di ottimizzazione

di Lagrange al fine di selezionare algebricamente gli elementi delle matrici Q e R , evitando le numerose iterazioni manuali, così come spiegato da E. V. Kumar [11].

3.1.3 - Implementazione su Simulink

Il sistema di controllo di tipo 4WAS analizzato all'interno di questo capitolo è stato implementato su Simulink per svolgere le simulazioni e, inoltre, per poter confrontare tale controllore con il controllore PI analizzato nel capitolo 2. Si riporta lo schema in figura 35, mentre lo script utilizzato su Matlab contenente i parametri del veicolo e altri dati utili al funzionamento corretto del controllore è riportato in Allegato C.1.

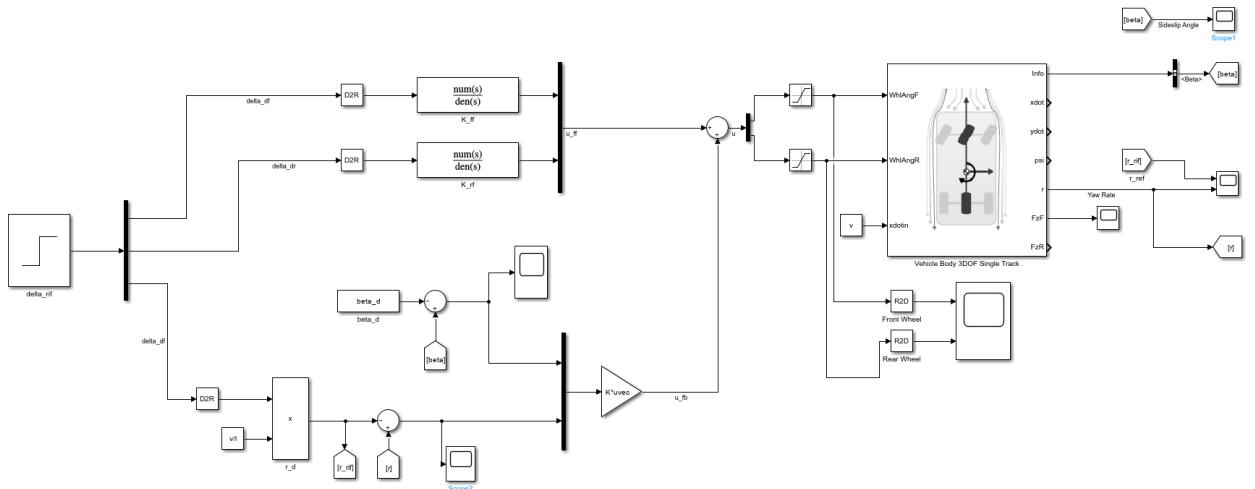


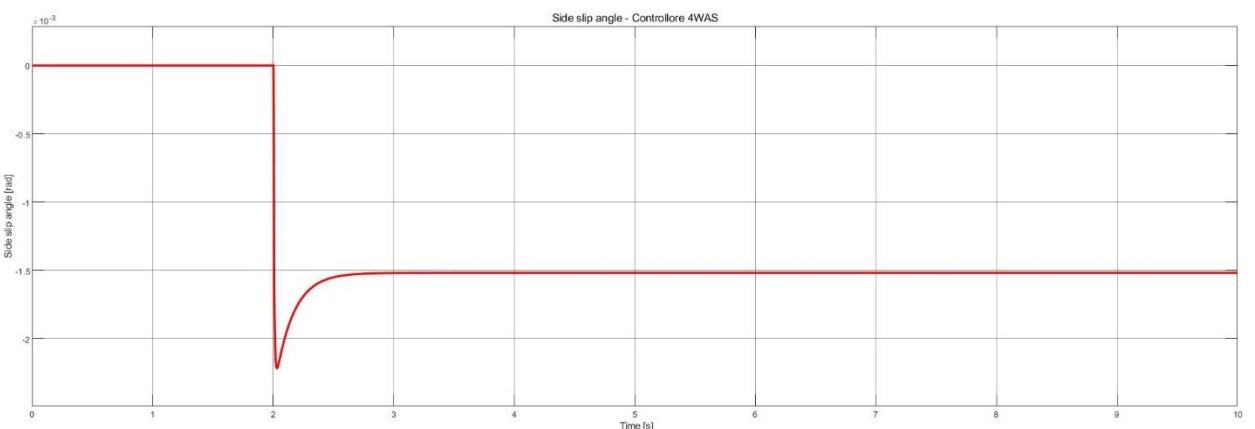
Figura 35 - Sistema in anello chiuso con controllo 4WAS

Il segnale di ingresso è stato generato da un gradino che dopo un tempo di due secondi produce un segnale pari all'angolo desiderato δ_f o δ_r . Gli elementi della matrice dei guadagni del controllo in feedforward sono stati implementati utilizzando il blocco "transfer fcn", mentre il segnale di feedback viene generato utilizzando il blocco "gain" con valore pari a $-K_{fb}$. Il segnale u in ingresso al modello non lineare è saturato in modo tale da restare nell'intervallo $[-30^\circ \div 30^\circ]$.

3.2 - Simulazioni e risultati

Una volta fissati i parametri del veicolo e il coefficiente di cornering stiffness $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$, scelto il valore dell'angolo di sterzo anteriore δ_f , sono state svolte varie simulazioni per trovare gli elementi ottimali delle matrici Q e R con un metodo iterativo. I parametri utilizzati sono i seguenti:

- $v = 1 \text{ m/s} ; \delta_f = 10^\circ ; Q = [10^{-3} \ 0 ; 0 \ 1] ; R = [10^{-5} \ 0 ; 0 \ 10^{-5}]$



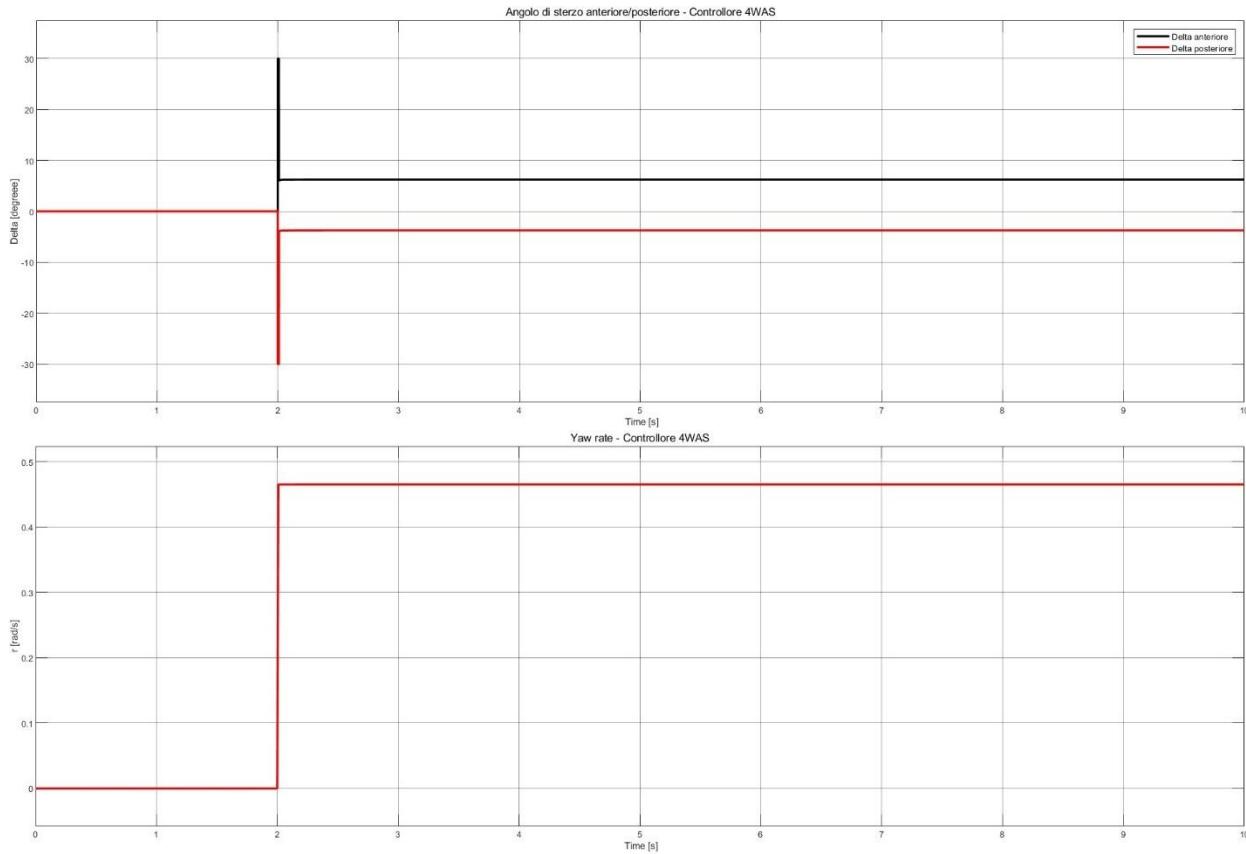
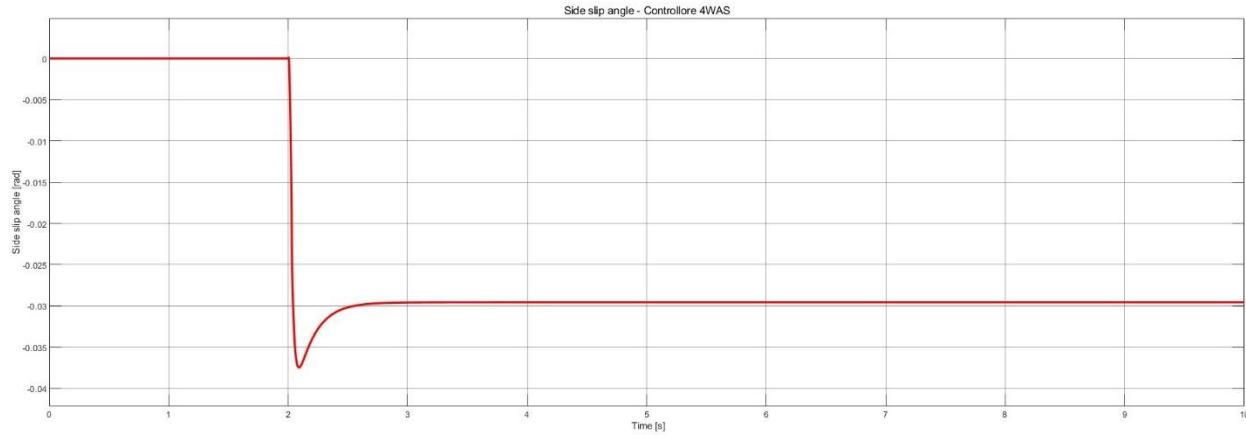


Figura 36 – Risultati controllore 4WAS (bassa velocità e angolo di sterzo)

- $v = 4 \text{ m/s}$; $\delta_f = 10^\circ$; $Q = [10^{-3} \ 0; \ 0 \ 1]$; $R = [10^{-5} \ 0; \ 0 \ 10^{-5}]$



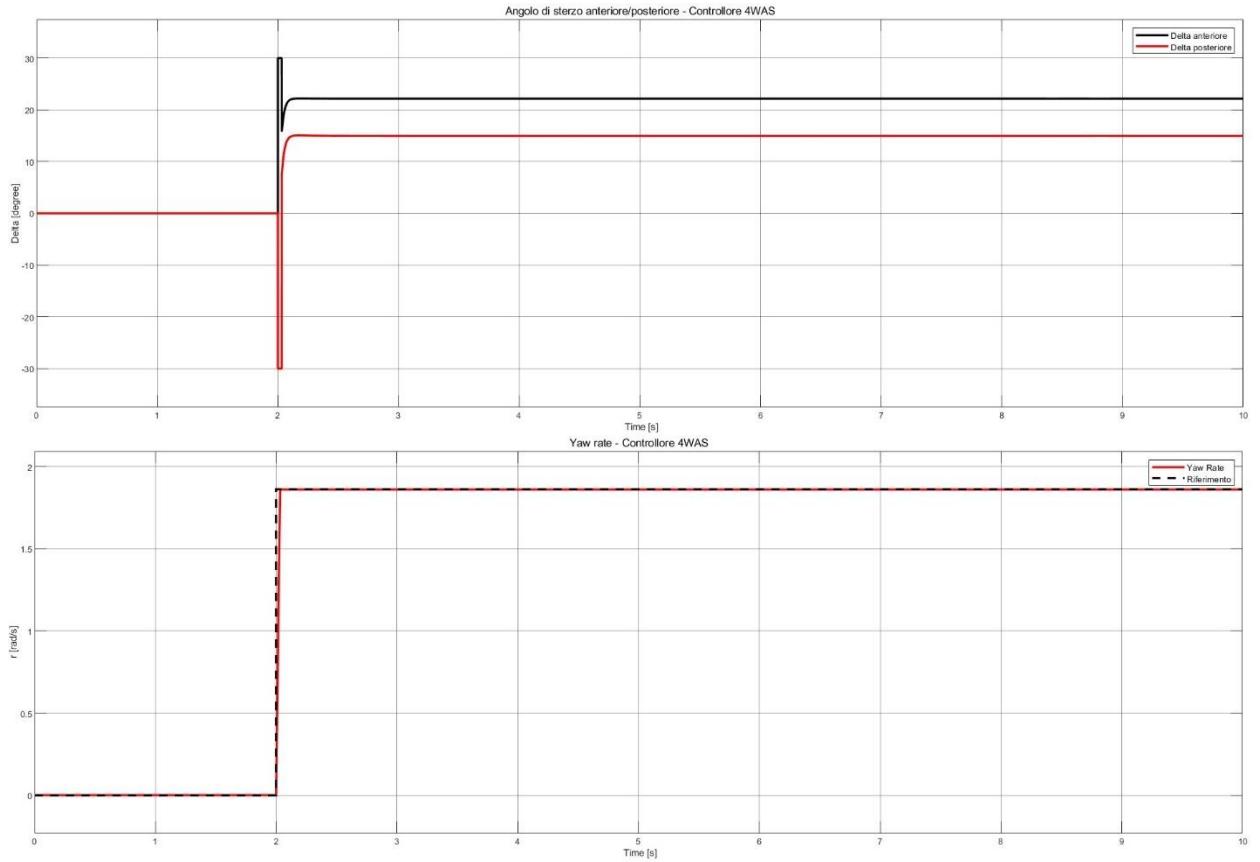
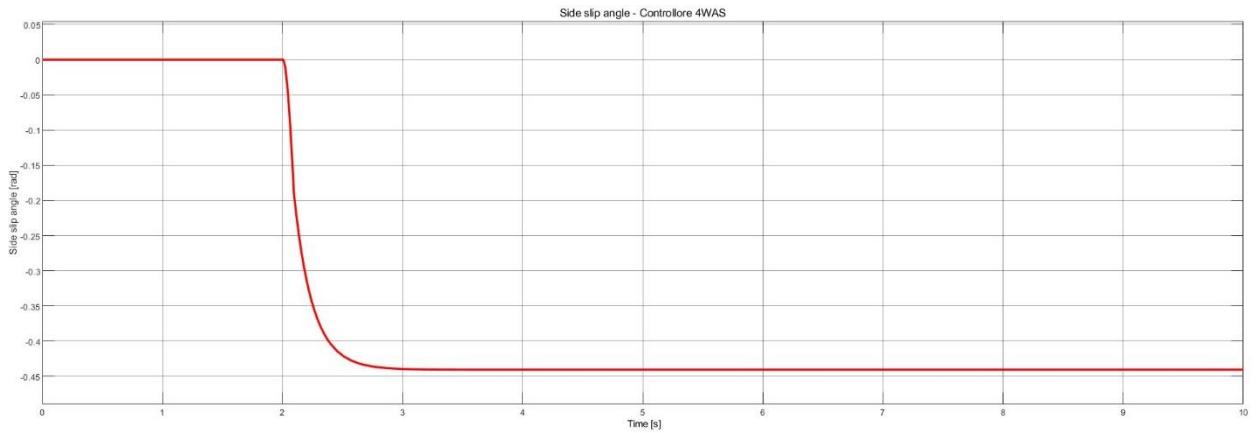


Figura 37 – Risultati controllore 4WAS (elevata velocità, angolo di sterzo ridotto)

- $v = 4 \text{ m/s}$; $\delta_f = 25^\circ$; $Q = [10^{-3} \ 0 \ ; \ 0 \ 1]$; $R = [10^{-5} \ 0 \ ; \ 0 \ 10^{-5}]$



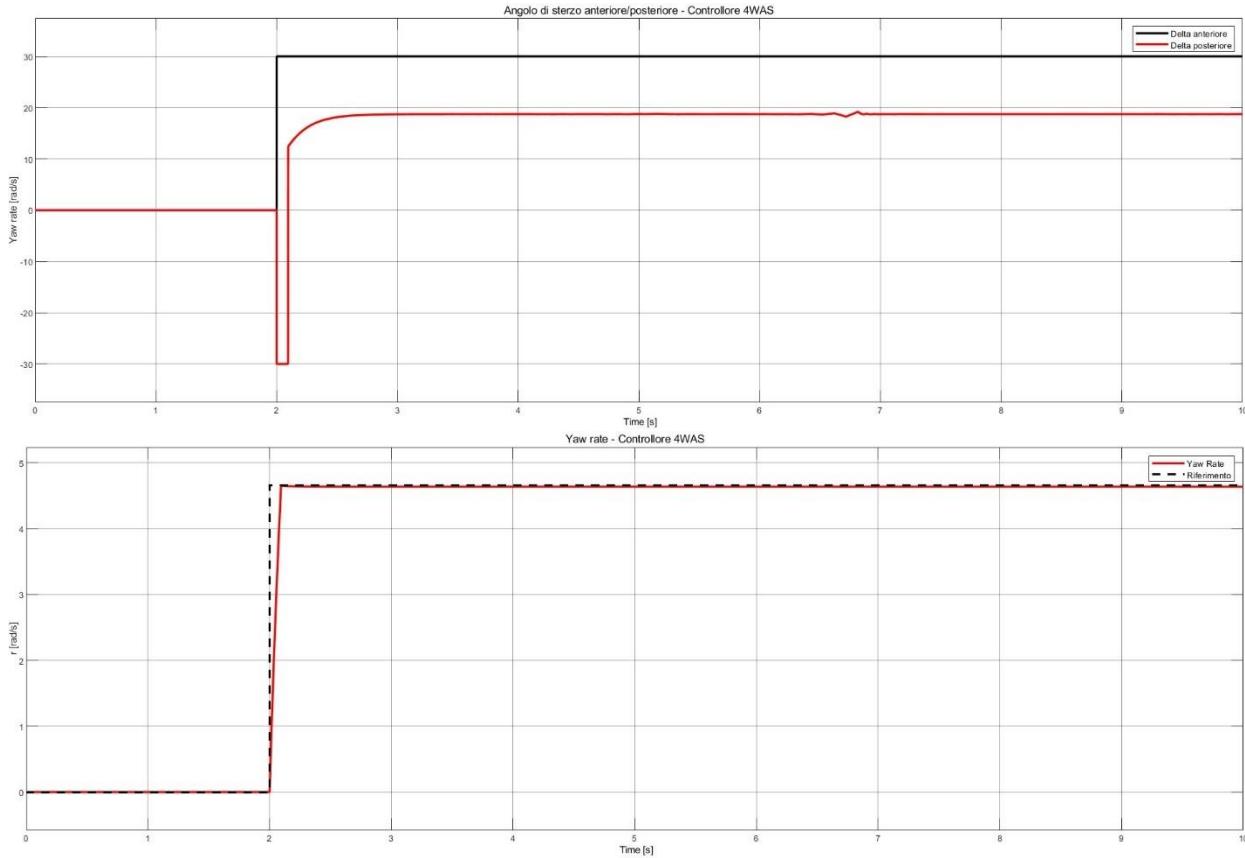


Figura 38 – Risultati controllore 4WAS (elevata velocità e angolo di sterzo)

Dai risultati ottenuti nelle figure 36, 37 e 38 si osserva che questo tipo di controllore è ottimale per ottenere una risposta di yaw rate stabile e quasi istantanea e che raggiunge il valore desiderato a regime. La risposta in uscita dell'angolo di side slip, che si ottiene in anello chiuso utilizzando il controllore 4WAS, è circa quella desiderata poiché in tutte le figure si vede che $\beta \approx 0$. Una volta scelti i valori degli elementi delle matrici Q e R , questi sono stati utilizzati per tutte le simulazioni. Nonostante ciò, gli angoli di sterzo anteriore e posteriore in ingresso al modello non lineare, prima di raggiungere il loro valore di regime stabile, hanno degli overshoot in saturazione. Questo si nota bene nelle figure da 36 e 37, mentre in figura 38, affinché lo yaw rate in uscita sia pari a quello desiderato, l'angolo di sterzo delle ruote anteriori δ_f lavora costantemente in saturazione. I due angoli di sterzo, infine, risultano essere in controfase a regime per bassi valori di velocità ($v = 1 \text{ m/s}$), mentre lavorano in fase per elevati valori di velocità ($v = 4 \text{ m/s}$).

3.3 - Estensione dello spazio di stato

Per cercare di risolvere i problemi dell'overshooting e della saturazione degli angoli di sterzo che si osservano nelle simulazioni viste nella sezione precedente, è stata presa in considerazione l'idea di estendere lo spazio di stato, utilizzando come terza variabile di stato l'integrale dello yaw rate ($\dot{\phi} = r$). Tale scelta non è presente negli articoli citati in bibliografia, ed è stata ponderata considerando il suo ampio utilizzo negli studi dedicati ai sistemi di controllo.

Il nuovo vettore di stato è definito come $x' = \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ \varphi \end{bmatrix}$. Il segnale di ingresso rimane $u = \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_f k \end{bmatrix}$. Il modello nella rappresentazione in spazio di stato può essere scritto come segue

$$\dot{x}' = A'x' + B'u$$

Con

$$A' = \begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{mv} & -1 - \frac{l_f c_f - l_r c_r}{mv^2} & 0 \\ l_r c_r - l_f c_f & -\frac{l_f^2 c_f + l_r^2 c_r}{I_{zz} v} & 0 \\ \frac{I_{zz}}{0} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv} & \frac{c_r}{mv} \\ \frac{l_f c_f}{I_{zz}} & -\frac{l_r c_r}{I_{zz}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il nuovo controllore possiede la stessa azione di controllo in feedforward, mentre per il feedback si deve definire un nuovo segnale di errore

$$e' = x' - x'_d = \left[\beta - \beta_d \quad r - r_d \quad \int (r - r_d) dt \right]^T$$

Bisogna definire le nuove matrici dei pesi Q' e R' che avranno dimensioni $[3x3]$ e $[2x2]$ rispettivamente. Dunque, solo la matrice dei pesi Q' ha aumentato la sua dimensione poiché essa dipende dal numero di variabili dell'errore di stato (n).

Procedendo come nel capitolo 3.1.2, e tenendo conto che il metodo LQR genererà una nuova matrice K'_{fb} di dimensione $[2x3]$, sarà possibile calcolare il nuovo segnale di feedback u'_{fb}

$$u'_{fb} = -K'_{fb} e' = - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta - \beta_d \\ r - r_d \\ \int (r - r_d) dt \end{bmatrix}$$

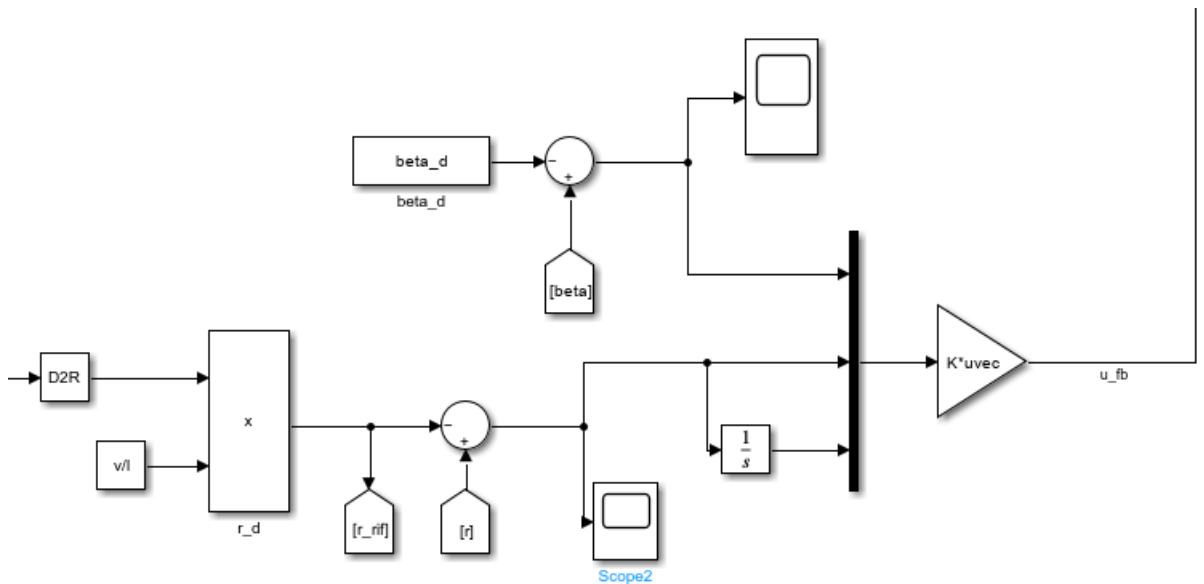


Figura 39 – Implementazione di x' su Simulink

Come si può osservare in figura 39, il blocco “mux” è stato esteso nella configurazione a tre porte, inserendo nell’ultima l’integrale dell’errore dello yaw rate. Il blocco “gain” ha segno negativo e moltiplica vettorialmente la nuova matrice dei guadagni di feedback K'_{fb} per il nuovo segnale di errore e' .

3.3.1 - Simulazioni e confronto fra stato x e x'

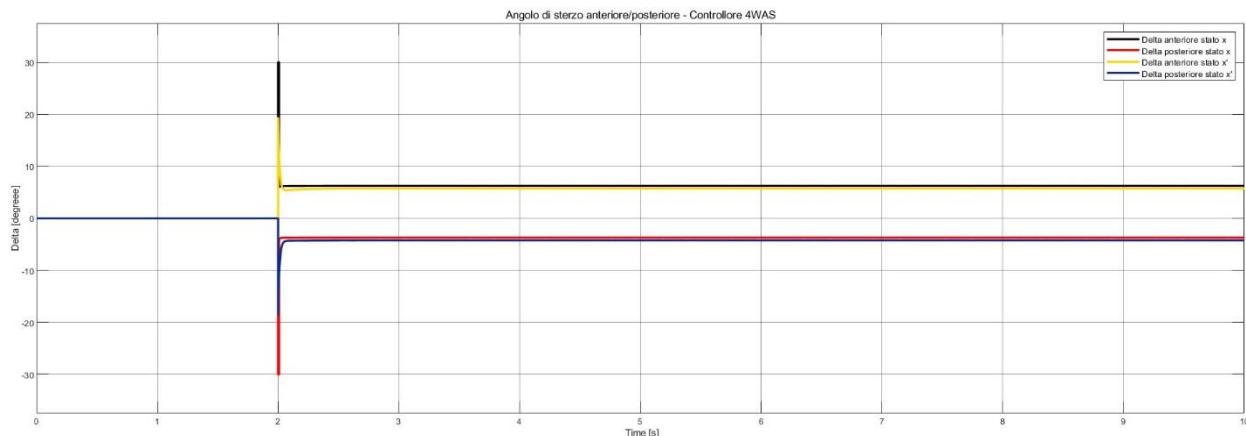
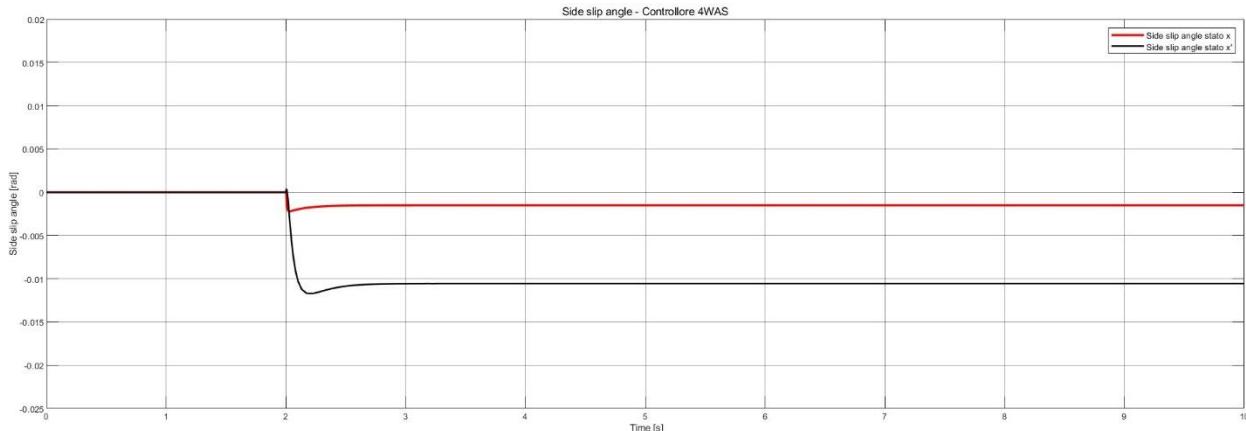
Per poter svolgere le simulazioni, è stato necessario trovare tramite iterazione i nuovi parametri delle matrici dei pesi Q' , R' e Q'' , R'' . Nel caso a stato esteso il tipo di controllo diventerà adattivo, ovvero che i parametri delle matrici dei pesi saranno ottimizzati in base alla velocità e all'angolo di sterzo delle ruote.

- $Q' = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $Q'' = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad R'' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

I coefficienti di cornering stiffness sono stati scelti pari a 40 N/rad mentre i parametri di velocità v e di angolo di sterzo della ruota anteriore δ_f e posteriore δ_r sono differenti per le varie simulazioni.

Nelle figure 40 e 41 sono mostrati i risultati del controllore 4WAS con spazio di stato esteso messi a confronto con i risultati ottenuti nel capitolo 3.2.

- $v = 1 \text{ m/s} ; \delta_f = 10^\circ ; Q' ; R'$



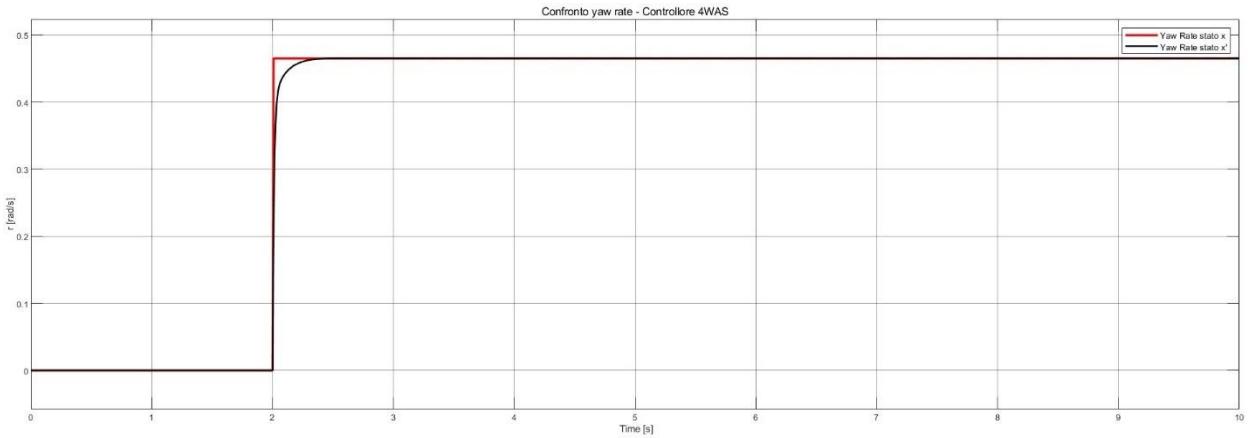
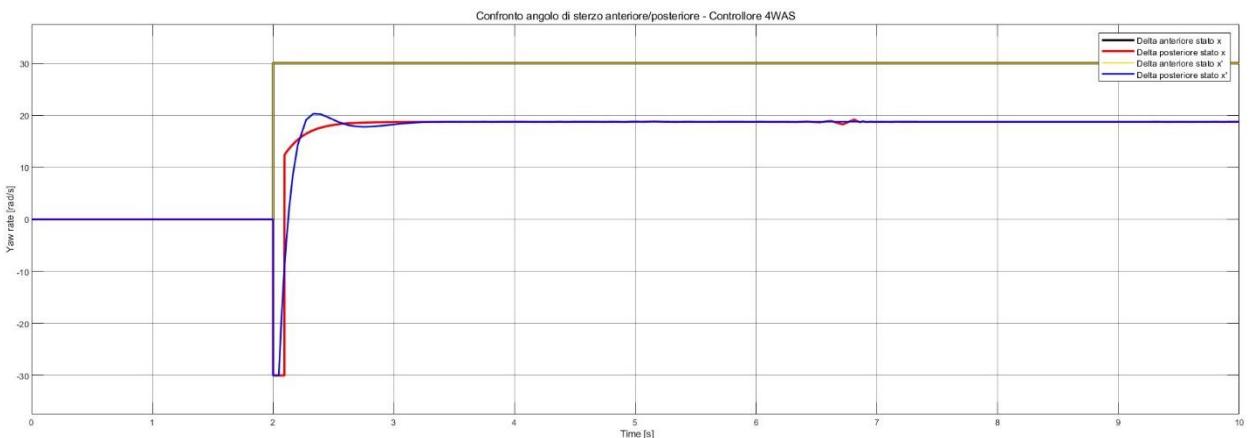
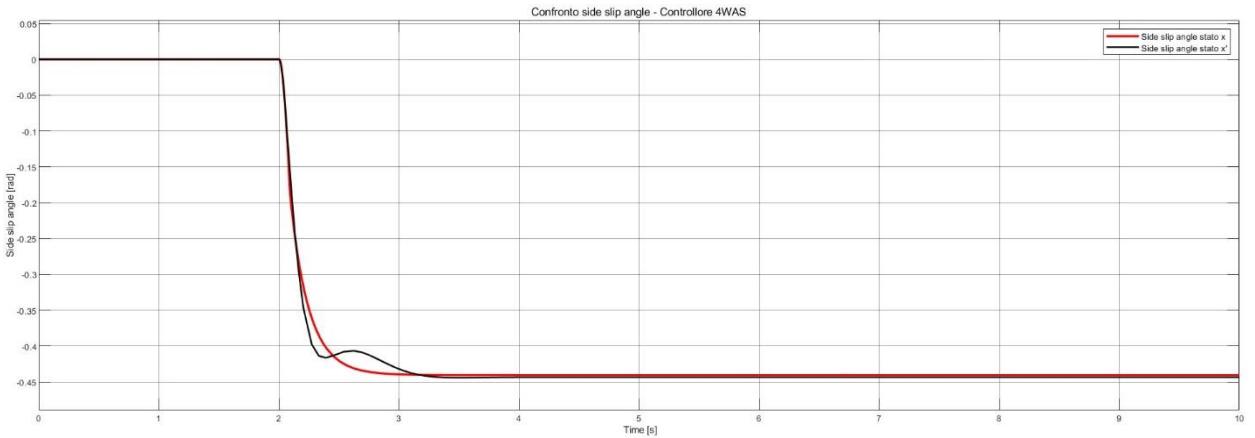


Figura 40 – Confronto controllore 4WAS con stato x e x'

- $v = 4 \text{ m/s}$; $\delta_f = 25^\circ$; Q'' ; R''



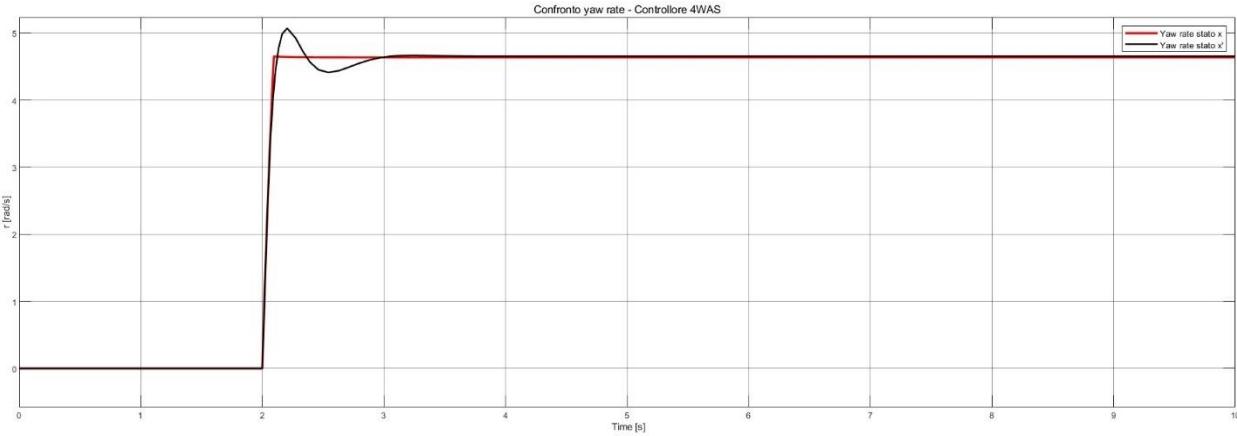


Figura 41 – Confronto controllore 4WAS con stato x e x'

Con l'estensione dello stato si risolve il problema della saturazione dell'angolo di sterzo per quanto riguarda i casi a basse velocità e piccoli angoli di sterzo delle ruote anteriori e posteriori, come si può notare in figura 40 osservando le curve di colore giallo e blu. Lo yaw rate, seppure perdendo la sua risposta istantanea, continua comunque ad avere ottime prestazioni in uscita.

Nei casi estremi come in figura 40 si continua a riscontrare il solito problema, con addirittura ulteriori perdite di prestazioni per lo yaw rate. Questo perché è proprio l'azione di feedforward che fornisce un segnale già ampiamente saturato, come mostrato in figura 42. Dunque, si potrebbe pensare che, con tale tipo di controllore, velocità e angolo di sterzo delle ruote sono inversamente proporzionali se si vuole evitare che gli attuatori vadano in saturazione.

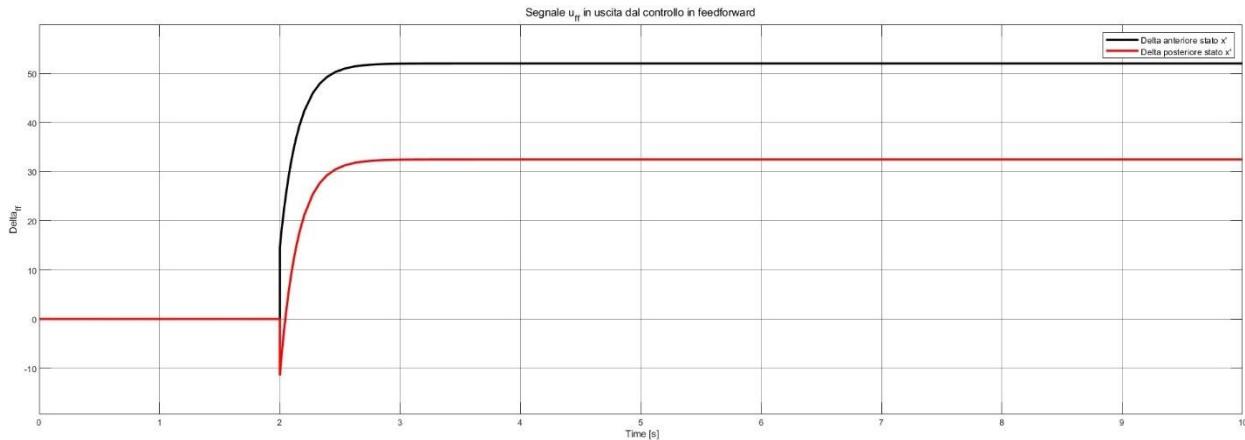


Figura 42 – Segnale u_{ff} per $v = 4 \text{ m/s}$ e $\delta_f = 25^\circ$

3.4 - Confronto tra 4WAS e AFS

Per concludere il capitolo, è interessante confrontare le risposte dello yaw rate di un modello non lineare di veicolo ottenute utilizzando il controllore AFS di tipo PI e il controllore 4WAS. Si utilizza lo stesso valore per i coefficienti di cornering stiffness $c_f = c_r = 40 \text{ N/rad}$ e si conducono plurime simulazioni al variare della velocità v e dell'angolo di sterzo delle ruote anteriori δ_f (e di quelle posteriori δ_r , solo per il controllore 4WAS). I parametri utilizzati e i risultati ottenuti sono i seguenti:

- $v = 1 \text{ m/s} ; \delta_f = 10^\circ$

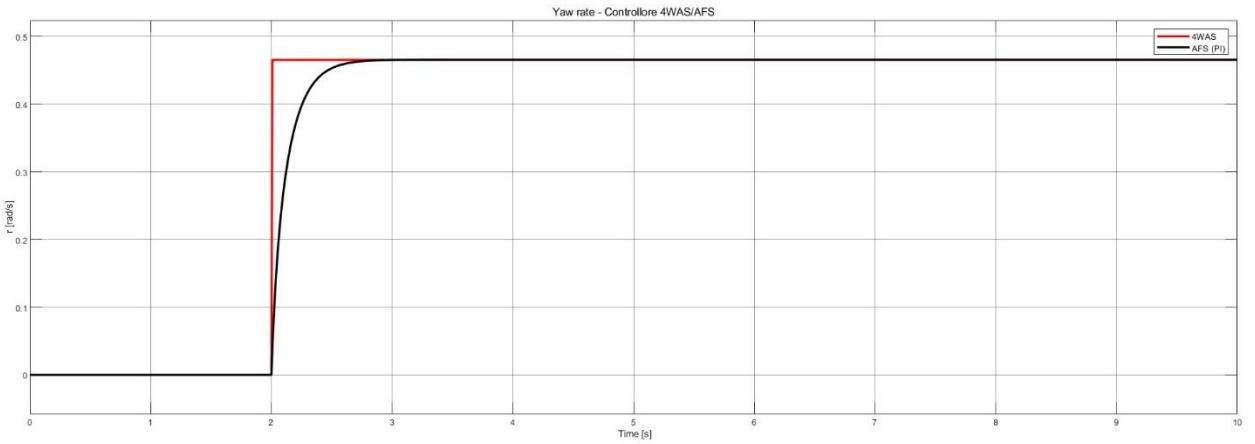


Figura 43 – Confronto fra controllore 4WAS e AFS

- $v = 4 \text{ m/s} ; \delta_f = 10^\circ$

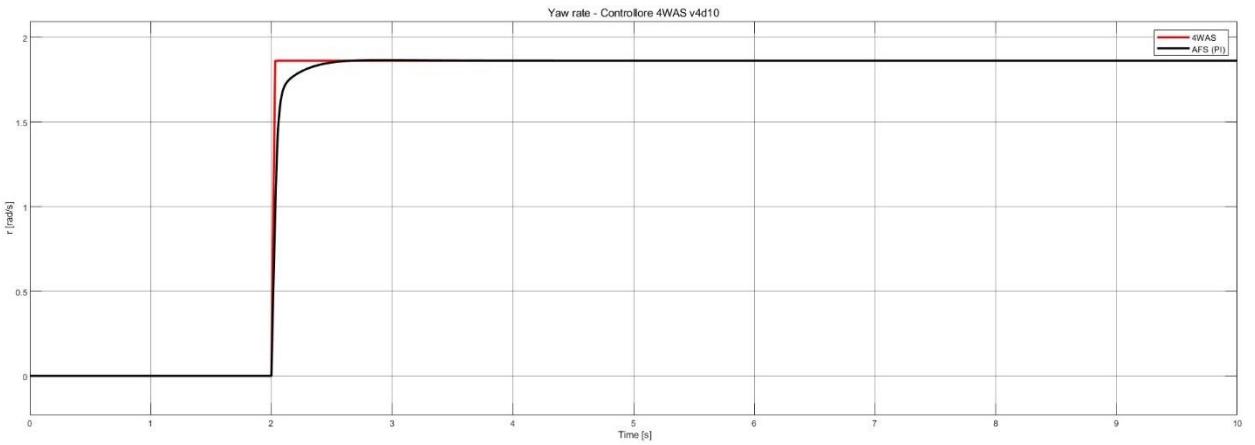


Figura 44 – Confronto fra controllore 4WAS e AFS

- $v = 4 \text{ m/s} ; \delta_f = 25^\circ$

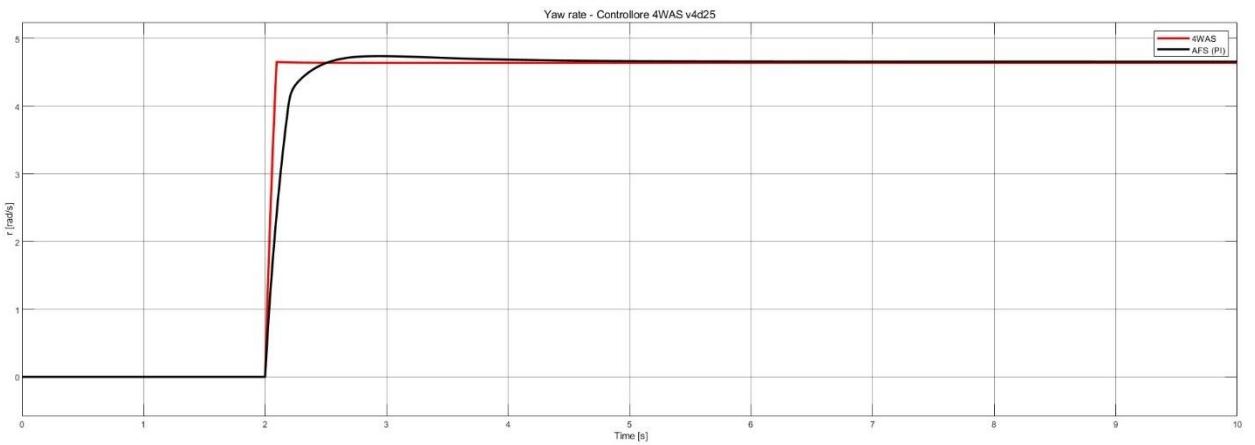


Figura 45 – Confronto fra controllore 4WAS e AFS

Nelle figure 43, 44 e 45 si osservano le differenze di prestazione di inseguimento dello yaw rate desiderato dei due sistemi di controllo analizzati. Il controllore di tipo 4WAS genera una risposta in uscita quasi istantanea e riesce a raggiungere il valore di regime in tempi quasi nulli rispetto al controllo AFS di tipo PI. Il controllore PI utilizzato per le simulazioni consta anche della funzionalità di anti-windup che, come risulta nelle figure citate, riesce a generare una risposta in uscita con transitori brevi e overshoot circa nulli.

Conclusioni

L'obiettivo dell'elaborato era lo studio e il confronto di differenti tipologie di controllo attivo dell'imbardata con il fine di migliorare la stabilità della vettura. In primo luogo, è stato svolto un lavoro di modellazione del veicolo, partendo dal modello lineare semplificato, per poi passare al modello non lineare.

Successivamente sono stati analizzati ed implementati alcuni sistemi di controllo attivo per il veicolo in esame, in particolare:

- Controllo AFS di primo ordine
- Controllo AFS con controllore PI/PID
- Controllo 4WAS

Una volta analizzate le differenze tra i sistemi ad anello aperto tramite simulazioni su Simulink, sono stati implementati i diversi sistemi di controllo attivo, la cui validità è stata dimostrata attraverso le simulazioni riportate. Per ottimizzare il controllo AFS, sono stati svolti dei confronti al variare del parametro k_1 per il controllore di primo ordine, mentre è stata valutata l'efficacia dell'azione di anti-windup e dell'azione derivativa per il controllore di tipo PI/PID. Il controllore PI risulta essere molto efficace a basse velocità e per qualunque angolo di sterzo. Aumentando la velocità, invece, per poter ottenere uno yaw rate desiderato elevato (ottenuto da un angolo di sterzo elevato), risulta molto utile la funzionalità di anti-windup, mentre un po' meno utile l'azione derivativa. In tutte le simulazioni è stato utilizzato un coefficiente di rigidità di curva degli pneumatici molto basso, poiché quando il veicolo viaggia su un fondo migliore e/o ha migliori pneumatici, la stabilità è garantita per valori maggiori di velocità anche in assenza di un sistema di controllo.

Il 4WAS è un tipo di controllo più costoso ed elaborato, che necessita anche di modifiche del modello, affinché le ruote posteriori permettano un angolo di sterzo con la stessa limitazione posseduta dagli attuatori anteriori. Questo tipo di controllo porta dei miglioramenti alla risposta dello yaw rate, rendendola quasi istantanea ma presenta delle problematiche per quanto riguarda il valore dell'angolo di sterzo in ingresso al modello, necessario per poter raggiungere il valore di yaw rate desiderato. Tali problematiche sono state in parte risolte grazie all'estensione dello spazio di stato, inserendo come terza variabile l'integrale dello yaw rate. Infine, a causa del controllo in feedforward, tale sistema di controllo risulta efficace solo se lavora all'interno di determinati range di intervallo; poiché, all'aumentare della velocità v , diminuisce il valore massimo di angolo di sterzo in ingresso di riferimento, ovvero il valore di yaw rate desiderato affinché la stabilità sia garantita, poiché il segnale in uscita dal controllo in feedforward risulta in saturazione.

L'ultimo passo dell'elaborato consta del confronto della risposta dello yaw rate in uscita fra il controllore PI e il controllore 4WAS, ponendo, sì, alla luce la reattività del controllore 4WAS, ma anche la buona efficacia del controllore PI, molto più economico. Comunque, i risultati ottenuti vanno considerati sulla base dello studio di un singolo modello di veicolo preso in esame.

Allegato A

A.1 Script modello lineare

```
%% Input
delta_deg = 15; % angolo di sterzo [gradi]
u1 = delta_deg*pi/180; % angolo di sterzo (ingresso) [rad]

v = 1; % velocità longitudinale (costante) [m/s]

%% Stato iniziale del sistema
x1_0 = 0; % beta a t = 0 [rad]
x2_0 = 0; % r a t = 0 [rad/s]

%% Parametri del veicolo
Cf = 40; % cornering stiffness ruota anteriore [N/rad]
Cr = 40; % cornering stiffness ruota posteriore [N/rad]
m = 8; % massa veicolo [kg]
Iz = 0.28125; % momento di inerzia [kg m^2]
l = 0.375; % lunghezza longitudinale [m]
lr = l/2; % distanza da asse posteriore a CG [m]
lf = l/2; % distanza da asse anteriore a CG [m]

%% Elementi delle matrici dello Spazio di Stato
Ybeta = Cf + Cr;
Yr = (lf*Cf - lr*Cr)/v;
Ydelta = Cf;
Nbetta = lr*Cr - lf*Cf;
Nr = (lf^2*Cf + lr^2*Cr)/v;
Ndelta = lf*Cf;

%% condizione di regime
beta_reg = ((1/2)-(m*v)/(-2*l*Cf))*u1; % beta a regime [rad]
r_reg = (v/l)*u1; % r a regime [rad/s]

%% Matrici dello Spazio di Stato Lineare
A = [-Ybeta/(m*v), -1-(Yr/(m*v))
      Nbetta/Iz, -Nr/Iz];

B = [Ydelta/(m*v)
      Ndeltal/Iz];

C = [v, 0
      0, 1
      Ybeta/m, Yr/m];

D = [0
      0
      Ydelta/m];
```

Allegato B

B.1 Script controllore AFS

```
%> Controllo AFS

clear

%> dati veicolo
v = 2;                      %[m/s]
l = 0.375;                   %[m]
lf = 1/2;                     %[m]
lr = 1/2;                     %[m]
m = 8;                       %[kg]
Fzf = 20;                     %rilevata con scope
Fznorm = Fzf;

%> cornering stiffness
cf = 40;                     %[N/rad]
cr = 40;                     %[N/rad]

%> Dati simulazione
delta_rif = 25;              %[degree]
beta_regime = ((1/2)-(m*v)/(2*l*cf))*delta_rif;
k1 = 2;
k2 = 0;
d = ((k1-1)*m*lr*v)/(k1*cf*l);
a = -k2/k1;
```

B.2 AFS_Control Function

```
function [delta,dx]= AFS_Control(u,x,a,d)

dx = -(a*x)+u;
delta = x+d*u;

end
```

Allegato C

C.1 Script controllore 4WAS

```

clear
    %% dati veicolo
v = 4;          %[m/s]
l = 0.375;      %[m]
lf = 1/2;        %[m]
lr = 1/2;        %[m]
m = 8;          %[kg]
cf = 40;         %[N/rad]
cr = 40;         %[N/rad]
I = 0.28125;    %[kg*m^2]
Fzf = 20;        %rilevata con lo scope
Fznorm = Fzf;

    %% delta, r, beta di riferimento
delta_df = 20;           %[degree]
r_dr = (v/l)*delta_df*(pi/180);    %[rad/s]
beta_d = 0;               %[rad]
num = -lr+((m*lf)/(cr*(lf+lr)))*v^2;
den = +lf+((m*lr)/(cf*(lf+lr)))*v^2;
delta_dr = ((num)/(den))*delta_df;   %[degree]

    %% Feedback di stato x
A = [-(cf+cr)/(m*v) -1-(lf*cf-lr*cr)/(m*v*v)
     -(lf*cf-lr*cr)/I -(lf*lf*cf+lr*lr*cr)/I*v];
B = [cf/(m*v), cr/m*v;
     (lf*cf)/I, -(lr*cr)/I];
r = 2;
Q = [0.1 0; 0 1]; % Matrice pesata
R = [r 0; 0 2*r]; % Matrice pesata
K_fb = lqr(A,B,Q,R);

    %% Feedback di stato x'
A_1 = [-(cf+cr)/(m*v) -1-(lf*cf-lr*cr)/(m*v*v) 0;
       -(lf*cf-lr*cr)/I -(lf*lf*cf+lr*lr*cr)/I*v 0;
       0 -1 0];
B_1 = [cf/(m*v), cr/m*v;
       (lf*cf)/I, -(lr*cr)/I;
       (v/l), 0];
r_1 = 2;
Q_1 = [0.1 0 0; 0 1 0; 0 0 10]; % Matrice pesata
R_1 = [r_1 0; 0 2*r_1]; % Matrice pesata

K_fb_1 = lqr(A_1,B_1,Q_1,R_1);

    %% Feedforward
Tr = 0.15;

```

Bibliografia

- [1] M. Galvani, "History and future of driver assistance," *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, vol. 22, no. 1, pp. 11–16, Feb. 2019, doi: <https://doi.org/10.1109/MIM.2019.8633345>.
- [2] C. Rengaraj, "Integration of Active Chassis Control Systems for Improved Vehicle Handling Performance," *sure.sunderland.ac.uk*, Jul. 01, 2012. <https://sure.sunderland.ac.uk/id/eprint/4017/>
- [3] M. K. Aripin, Y. Md Sam, K. A. Danapalasingam, K. Peng, N. Hamzah, and M. F. Ismail, "A Review of Active Yaw Control System for Vehicle Handling and Stability Enhancement," *International Journal of Vehicular Technology*, vol. 2014, pp. 1–16, Jun. 2014, doi: <https://doi.org/10.1155/2014/437515>.
- [4] B. Zheng and S. Anwar, "Yaw stability control of a steer-by-wire equipped vehicle via active front wheel steering," *Mechatronics*, vol. 19, no. 6, pp. 799–804, Sep. 2009, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2009.04.005>.
- [5] "Pacejka '94 parameters explained – a comprehensive guide," *Edy's Projects*, Dec. 24, 2011. <https://www.edy.es/dev/docs/pacejka-94-parameters-explained-a-comprehensive-guide/>
- [6] "3DOF rigid vehicle body to calculate longitudinal, lateral, and yaw motion - Simulink - MathWorks Italia," *it.mathworks.com*. <https://it.mathworks.com/help/vdynblk/ref/vehiclebody3dof.html>
- [7] T. Zhu, X. Jin, G. Yin, J. Liang, Z. Ren, and Y. Shi, "Coordinated Control for Active 4WS Vehicle Based on Linear Quadratic Differential Game," Jun. 2019, doi: <https://doi.org/10.1109/ccdc.2019.8832620>.
- [8] Imen Amdouni, Nafaa Jeddi, and Lilia El Amraoui, "Optimal control approach developed to Four-Wheel Active Steering Vehicles," International Conference on Modeling, Simulation, and Applied Optimization, Apr. 2013, doi: <https://doi.org/10.1109/icmsao.2013.6552547>.
- [9] M. H. M. Ariff, H. Zamzuri, M. A. M. Nordin, W. J. Yahya, S. A. Mazlan, and M. A. A. Rahman, "OPTIMAL CONTROL STRATEGY FOR LOW SPEED AND HIGH SPEED FOUR-WHEEL-ACTIVE STEERING VEHICLE," *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, vol. 8, pp. 1516–1528, Jun. 2015, doi: <https://doi.org/10.15282/jmes.8.2015.26.0148>.
- [10] B. Li and F. Yu, "Optimal model following control of four-wheel active steering vehicle," Jun. 2009, doi: <https://doi.org/10.1109/icinfa.2009.5205043>.
- [11] E. V. Kumar, J. Jerome, and K. Srikanth, "Algebraic approach for selecting the weighting matrices of linear quadratic regulator," *IEEE Xplore*, Mar. 01, 2014. <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=6922382>