Curso de Engenharia de Cmputação - UEMG Ituiutaba
Disciplina de Matemática Discreta
2ª Lista de Exercícios
Entrega manuscrita: 10/06

1. Seja $A = \{1, 3, 5\}, B = \{u, v\}$ *e* $C = \{m, n\}$. Liste os elementos do conjunto $A \times (B \times C)$.
2. Prove por meio de diagrama de Venn que para todos os conjuntos A e B, $B - A = B \cap A^c$
3. Sejam A e B dois conjuntos no universo U. Prove os teoremas de **De Morgan**:

   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad\qquad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

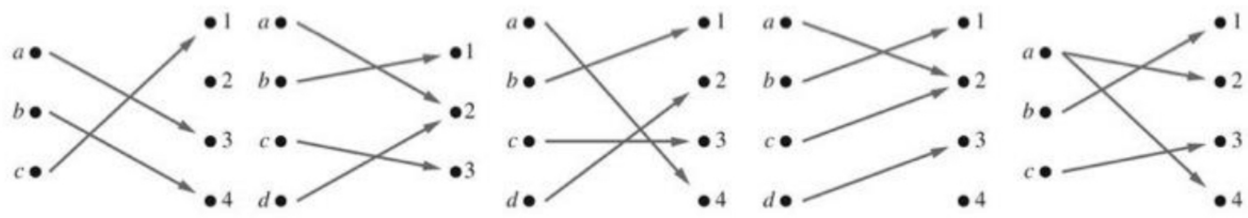
4. Dados dois conjuntos A e B, define-se a **diferença simétrica** de A e B, representada por $A \triangle B$, como $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que $A \triangle B = B \triangle A$
5. Sejam os conjuntos $A = \{1\}$ e $B = \{u, v\}$. Determine o conjunto potência de $A \times B$, i.é., $\mathcal{P}(A \times B)$.
6. Seja $A = \{x, y\}$. Determine:

   (a) $A \cap \mathcal{P}(A)$ $\qquad$ (b) $(\mathcal{P}(A) - A) \cap A$ $\qquad$ (c) $\mathcal{P}(\{\mathcal{P}(A) - \{\{x\}\}\} - \varnothing)$

7. Faça uma lista de todos os **pares ordenados** de elementos de $\{1, 2, 3\}$. Faça uma lista de todos os **pares não-ordenados** de elementos de $\{1, 2, 3\}$.
8. Seja A um conjunto com 20 elementos. Quantos **pares ordenados** de elementos de A existem? Quantos **pares não-ordenados**?
9. É verdade que $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, 5\}$ é uma partição de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
10. Faça uma lista de todas as **bipartições** de $\{2, 3, 5\}$. Faça uma lista de todas as **partições** de $\{2, 3, 5\}$.

    <u>**OBS**</u>: Uma bipartição de um conjunto X é qualquer partição de X em duas partes, ou seja, um par $\{A, B\}$ de subconjuntos de X tal que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \varnothing$.

11. Dados os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 2$, determine a o domínio, contradomínio e a imagem de f.
12. Para cada um dos diagramas abaixo, classifique os tipos de relações (**injetora**, **sobrejetora**, **bijetora**, **não é função**):



13. Uma professora resolve distribuir uma pesquisa, colocando no quadro três paisagens: **praia**, **fazenda** e **floresta**. Em seguida, pediu para que cada um dos **30 alunos** escolhesse sua paisagem preferida. Sejam A o conjunto formado pelos alunos e B o conjunto formado pelas três paisagens, determine, em cada situação abaixo, se a relação $f\colon A \to B$ é uma função e, caso seja, classifique-a em **injetora**, **sobrejetora** ou **bijetora**.

    (a) a) todos os alunos escolheram praia.

    (b) dez alunos escolheram praia, dez alunos escolheram fazenda e dez alunos escolheram floresta.

    (c) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse não gostar de nenhuma.

    (d) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse gostar das três de maneira igual.

14. Em uma biblioteca, todos os livros são catalogados pelo título, além de outros identificadores, e há títulos com mais de um exemplar. A função f cujo domínio é o conjunto de todos os livros catalogados e o contradomínio é o conjunto dos títulos dos livros catalogados dessa biblioteca é injetora?

15. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{x, y, z\}$.

    (a) Apresente um exemplo de função de A em B que não seja nem sobrejetora nem injetora.

    (b) Apresente um exemplo de função de A em B que seja sobrejetora, mas não seja injetora.

    (c) É possível encontrar uma função de A em B que seja injetora ?

16. Usando a notação $f(x) = 2x - 1$ para descrever a associação da função, escreva um conjunto de **pares ordenados** para os casos do contradomínio ser $\mathbb{R}$ e

    (a) o domínio ser $A = \{0, 1, 2\}$

    (b) o domínio ser $A = \{1, 2, 4, 5\}$

    (c) o domínio ser $A = \{\sqrt{7}, 1, 5\}$

17. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 5, 7\}$.

    (a) Encontre o número de funções de A em B.

    (b) Encontre o número de funções sobrejetoras de A em B.

18. Seja f a função que associa a cada número natural o resto de sua divisão por 7. Sobre essa função, classifique em **verdadeiro** ou **falso** cada uma das afirmações abaixo:

    (a) $f(82) = f(163)$

    (b) $f(27) = f(62)$

    (c) o domínio é $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

    (d) o contradomínio é o conjunto $\mathbb{N}$

    (e) a imagem é $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

    (f) o maior valor da função é 7

19. Sejam $A = \{1, 2, 3, ...\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$. Considere a função $f\colon A \to B$, dada por $f(x) = y$, em que y é o resto da divisão de x por 3. Classifique cada um das afirmações abaixo em **verdadeiro** ou **falso**:

    (a) f é uma função sobrejetora

    (b) $f(73) = 1$

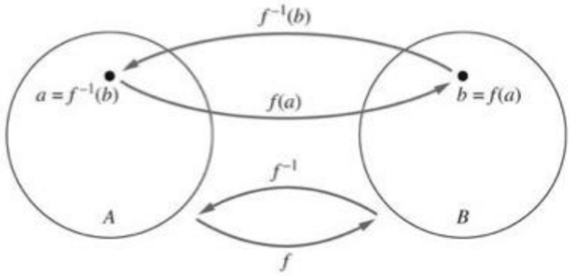
    (c) f é uma função injetora

    (d) $f(1) = 1$

    (e) $f(102) = 0$

Função Inversa

Seja f uma função bijetora do conjunto A para o conjunto B. A *função inversa* de f é a função que leva a um elemento b pertencente a B o único elemento a em A, tal que $f(a) = b$. A função inversa de f é indicada por f^{-1}. Assim, $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a) = b$.

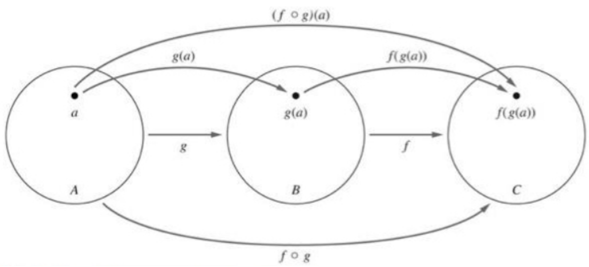


20. Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes. Determine:
    (a) para quais valores de a a função f é inversível;
    (b) a inversa da função f;
    (c) o tipo da função.
21. Seja a função $f\colon \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.
    (a) Mostre que a função f é injetora.
    (b) Determine o domínio da função f e da função f^{-1}.
22. A função $f(x) = x^2$ é definida para todo $x \in \mathbb{R}$, i.é., a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Como a função f **não é inversível**, redefina a mesma função f para que ela seja **inversível**.

Função Composta

Considere g como uma função do conjunto A para o conjunto B e considere f como uma função do conjunto B para o conjunto C. A *composição* das funções f e g, indicada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$



23. Seja f e g funções reais tais que $f(2x+1) = 2x+4$ e $g(x+1) = 2x-1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine a função composta $f \circ g(x)$.
24. Seja f a função real tal que $f(2x-9) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para qual valor de c se verifica a igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$?