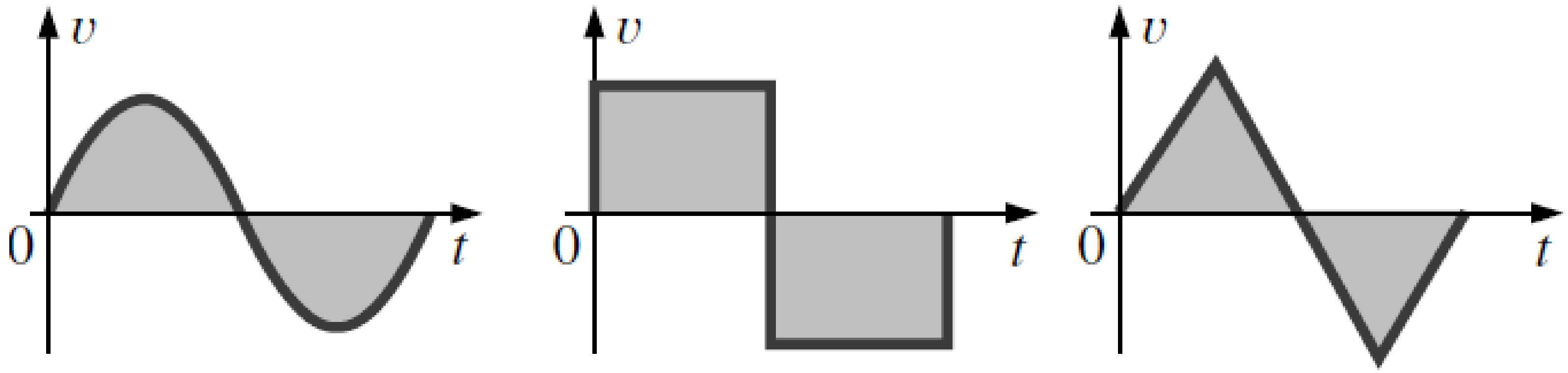
Análise em Regime Permanente Senoidal

Formas de Ondas Alternadas

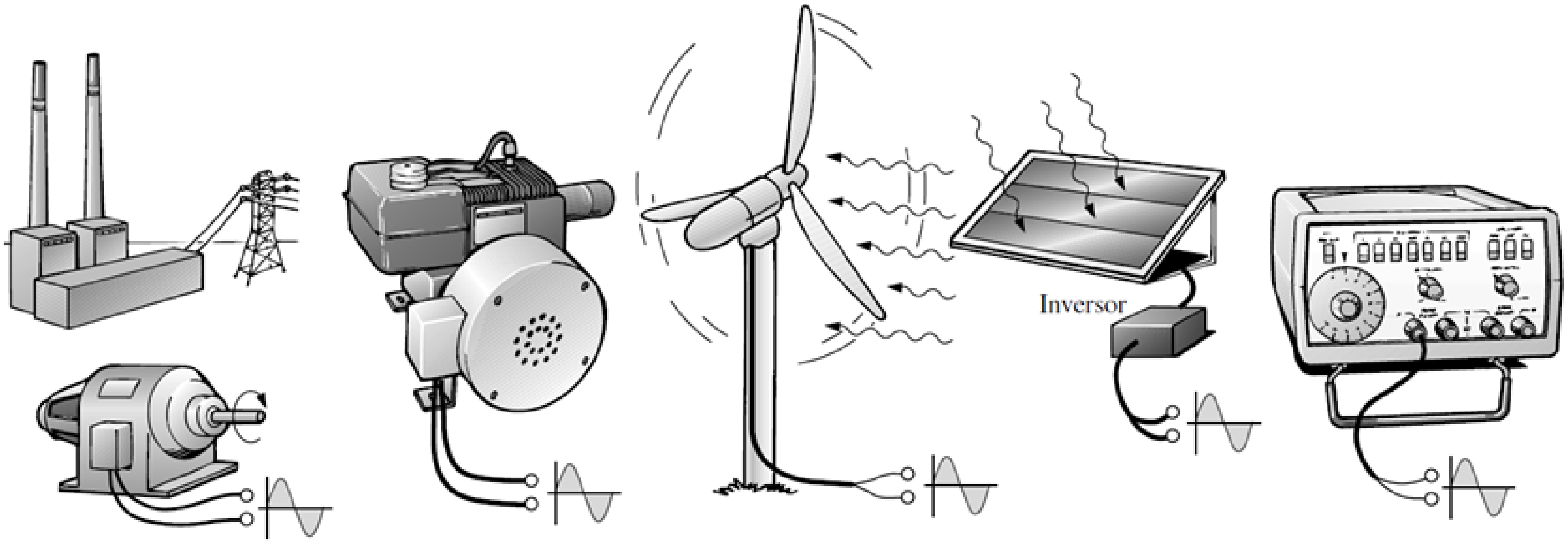


Senóide Onda quadrada Onda triangular

Um sinal particularmente importante é o da **tensão CA senoidal**.

Geração da Tensão Senoidal Alternada

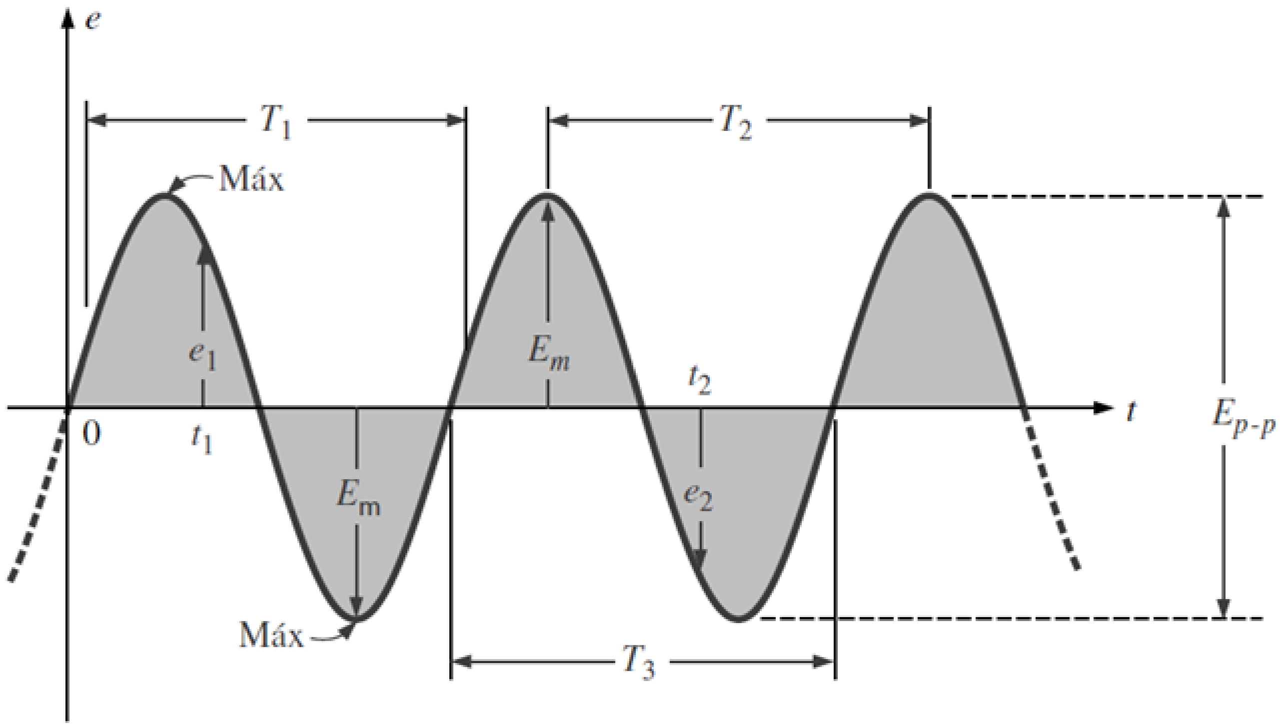
As tensões alternadas senoidais podem ser geradas por diversas fontes. A mais comum é aquela que obtemos nas tomadas residenciais, que fornece uma tensão alternada cuja a sua origem é uma usina geradora.



(a) (b) (c) (d) (e)

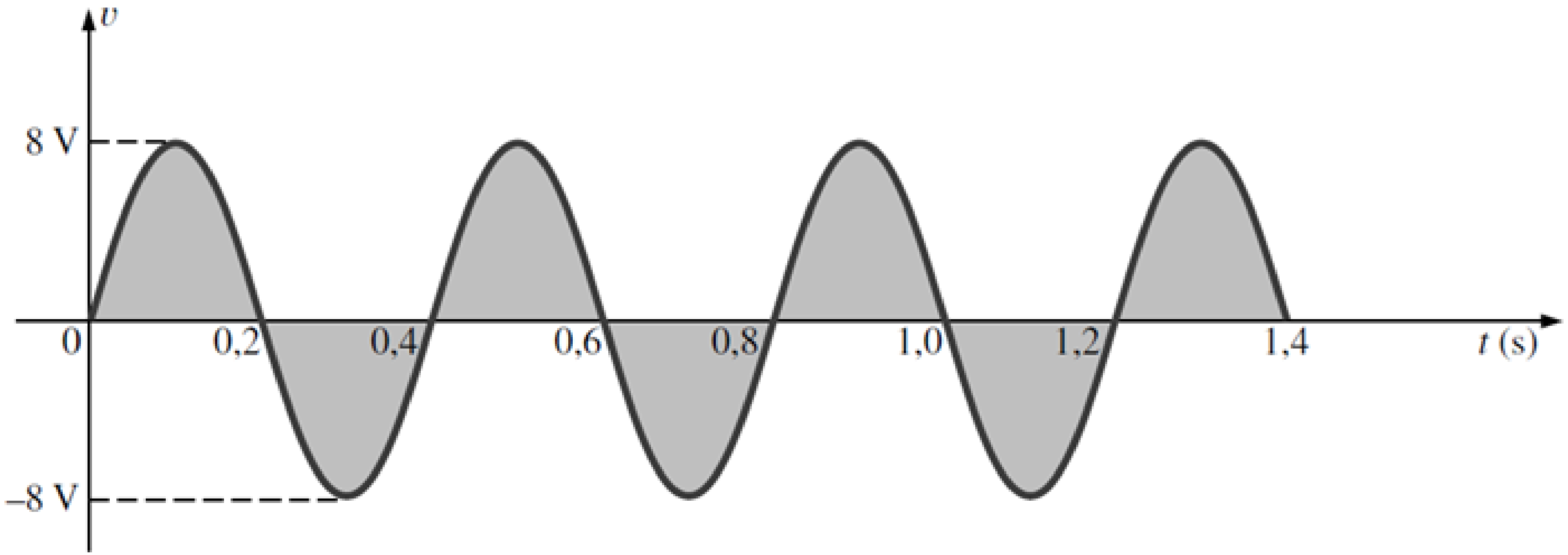
Parâmetros Importantes de uma Tensão Senoidal

- **Valor instantâneo**
- **Amplitude de pico**
- **Valor de pico**
- **Valor pico a pico**
- **Forma de onda periódica**
- **Período (*T*)**
- **Ciclo**
- **Frequência (*f*)**

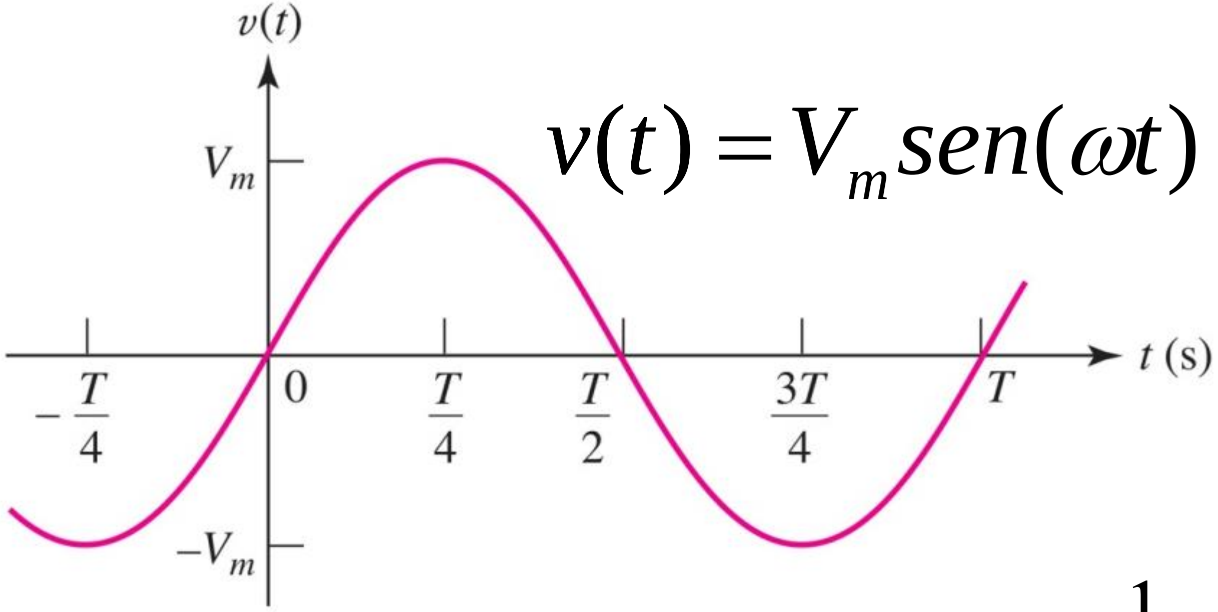


Exercício:

Para a forma de onda senoidal, determine: (a) o valor de pico; (b) o valor instantâneo em 0,3s e 0,6s; (c) o valor de pico a pico; (d) o período; (e) número de ciclos; (f) a frequência.



Período da Onda Senoidal



$$v(t) = V_m sen(\omega t)$$

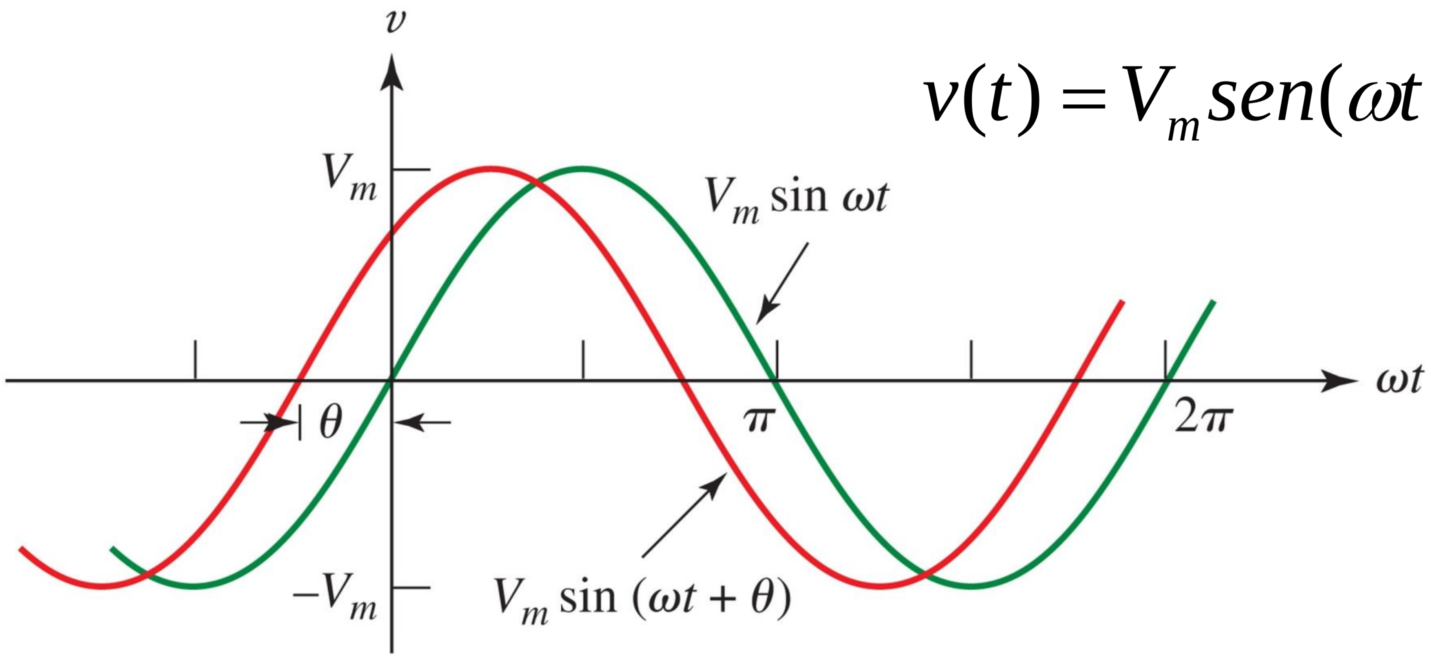
- O período da onda é T
- A frequência f é 1/T : (1/s = Hz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Fase da Onda Senoidal

Uma forma mais geral da onda senoidal inclui a fase θ



$$v(t) = V_m sen(\omega t + \theta)$$

- A nova onda (em vermelho) está adiantada em relação a onda original (em verde) por θ.
- A onda original *sin(ωt)* está atrasada em relação a nova onda por θ.
- θ pode ser dada em grau ou radiano, mas o argumento de sin() sempre é em radiano.

Duas ondas senoidais cujas fases são comparadas devem satisfazer às seguintes condições:

- Ambas devem ser escritas como funções seno, ou como funções cosseno.
- Ambas devem ser escritas com amplitudes positivas.
- Ambas devem estar na mesma frequência.

Exercício:

1 – Determine o ângulo de atraso de $i(t)$ em relação a $v(t)$ se $\mathrm{v}(t) = 120cos(120\pi t - 40^0)$ e
(a) $i(t) = 2{,}5cos(120\pi t + 20^0)$,

(b) $i(t) = 1{,}4sen(120\pi t - 70^0)$ e

(c) $i(t) = -0{,}8cos(120\pi t - 110^0)$

Valor eficaz ou RMS

Outra característica importante da tensão (ou corrente) senoidal é seu valor eficaz ou RMS.

O valor eficaz de uma função periódica é definido como a raiz quadrada do valor médio da função ao quadrado. Daí, se $v(t) = V_m cos(\omega t + \phi)$, o valor eficaz de $v(t)$ é:

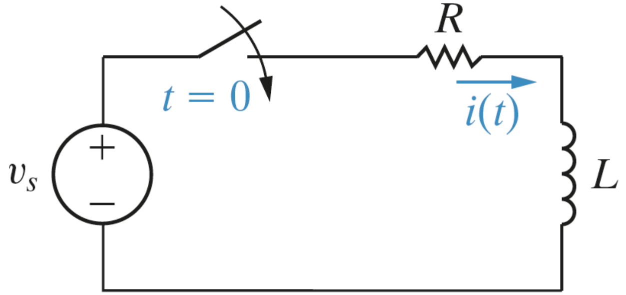
$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 cos^2(\omega t + \phi)}$$

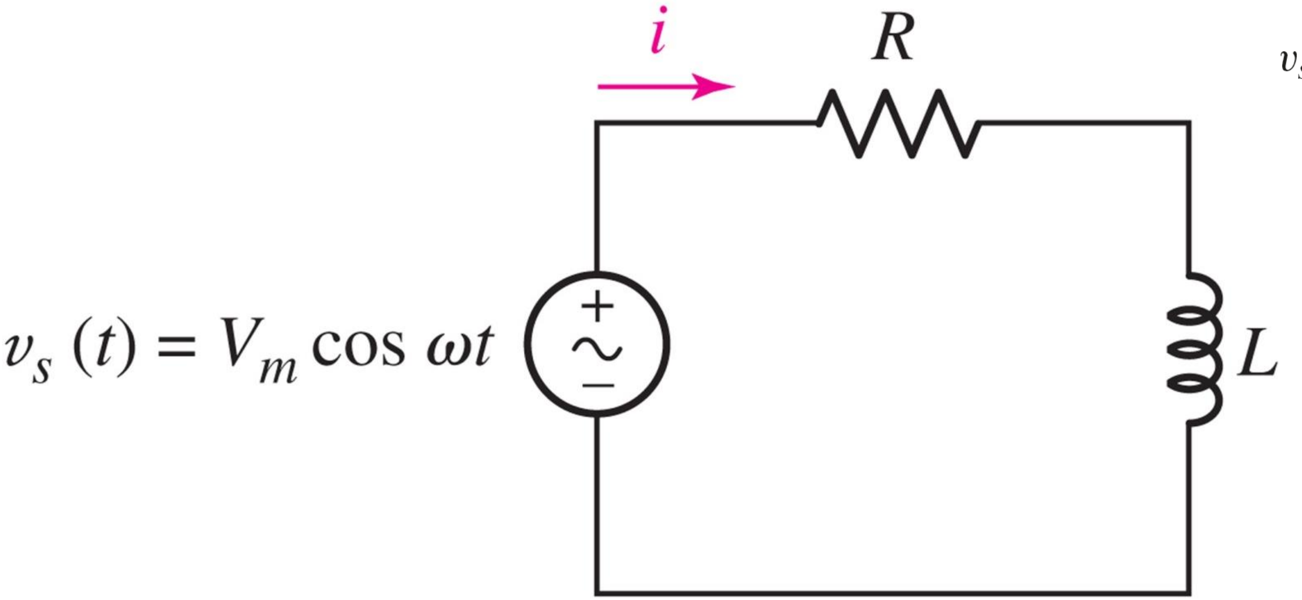
Valor eficaz (*rms*) de uma fonte de tensão senoidal:

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Resposta Forçada para Fontes Senoidais

- Quando uma fonte é senoidal, ignoramos a resposta natural (transitório) e consideremos somente a resposta forçada ou regime permanente.





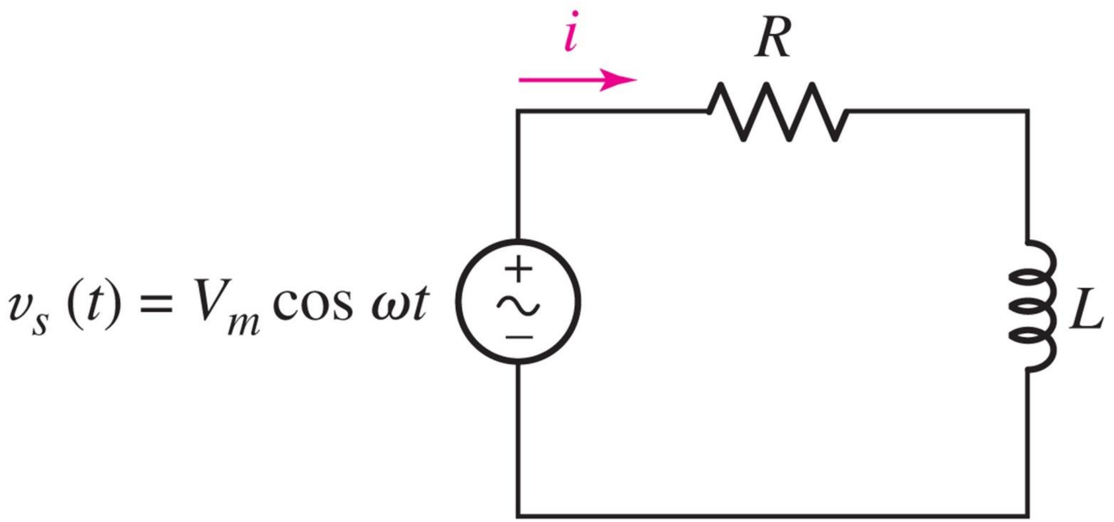
Assumimos que a fonte existe sempre: $-\infty < t < \infty$

Buscamos a reposta forçada (ou em “regime permanente”), a qual deve satisfazer à equação diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t)$$

Podemos esperar, portanto, que a resposta forçada tenha a forma:

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

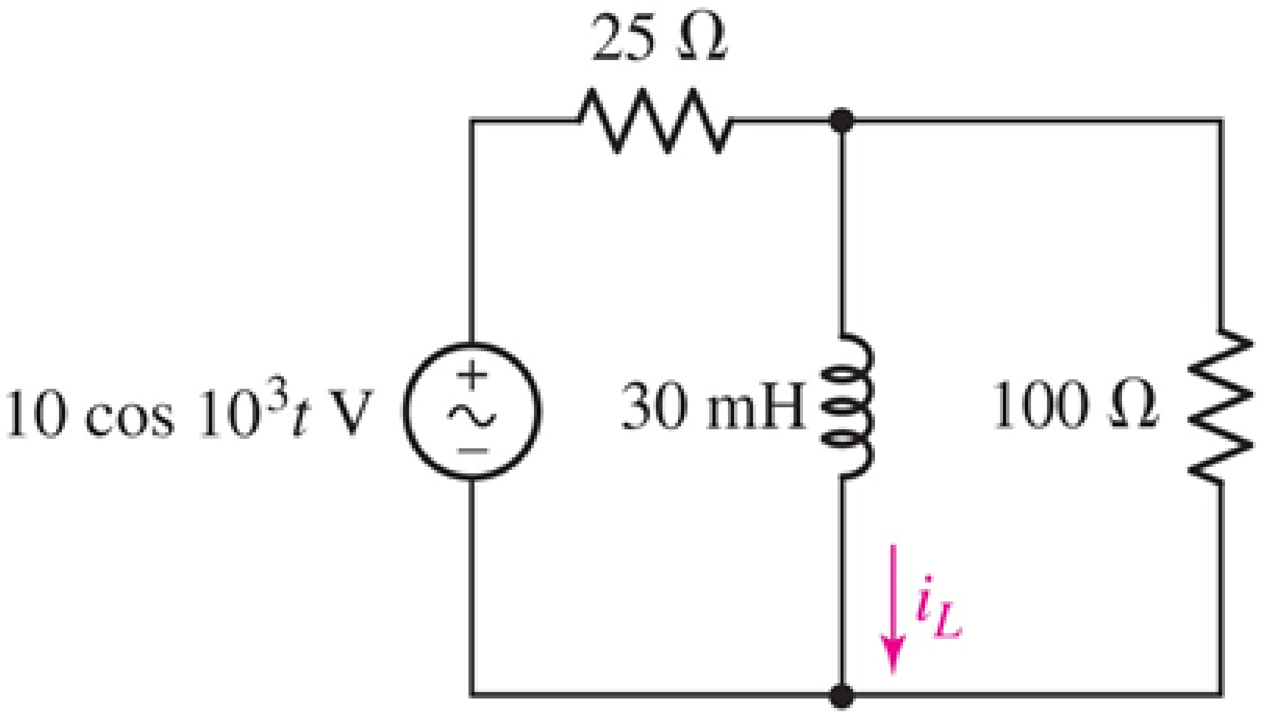


onde I_1 e I_2 são constantes reais cujos valores dependem de V_m, R, L, e ω.

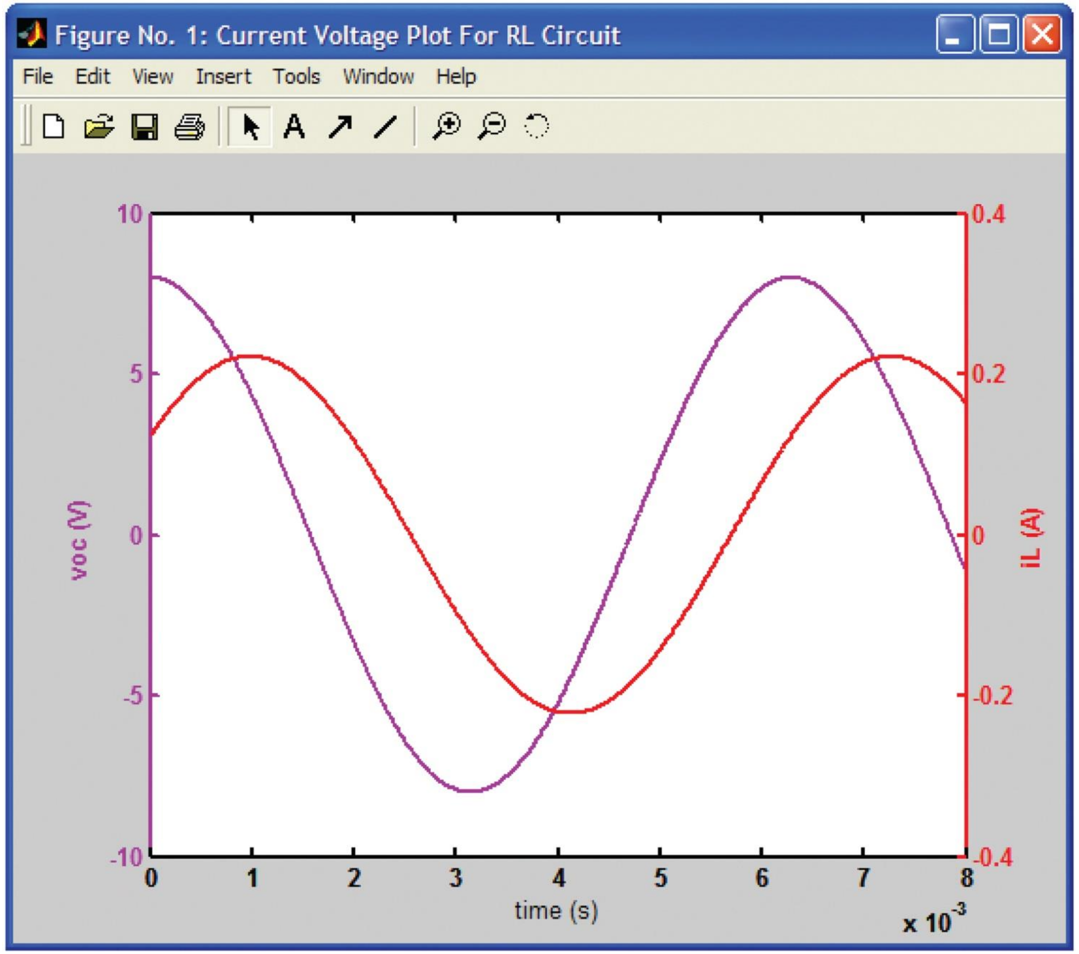
.......continuação no quadro

Exercício:

1 – Determine a corrente i_L no circuito abaixo, se os transitórios já desapareceram

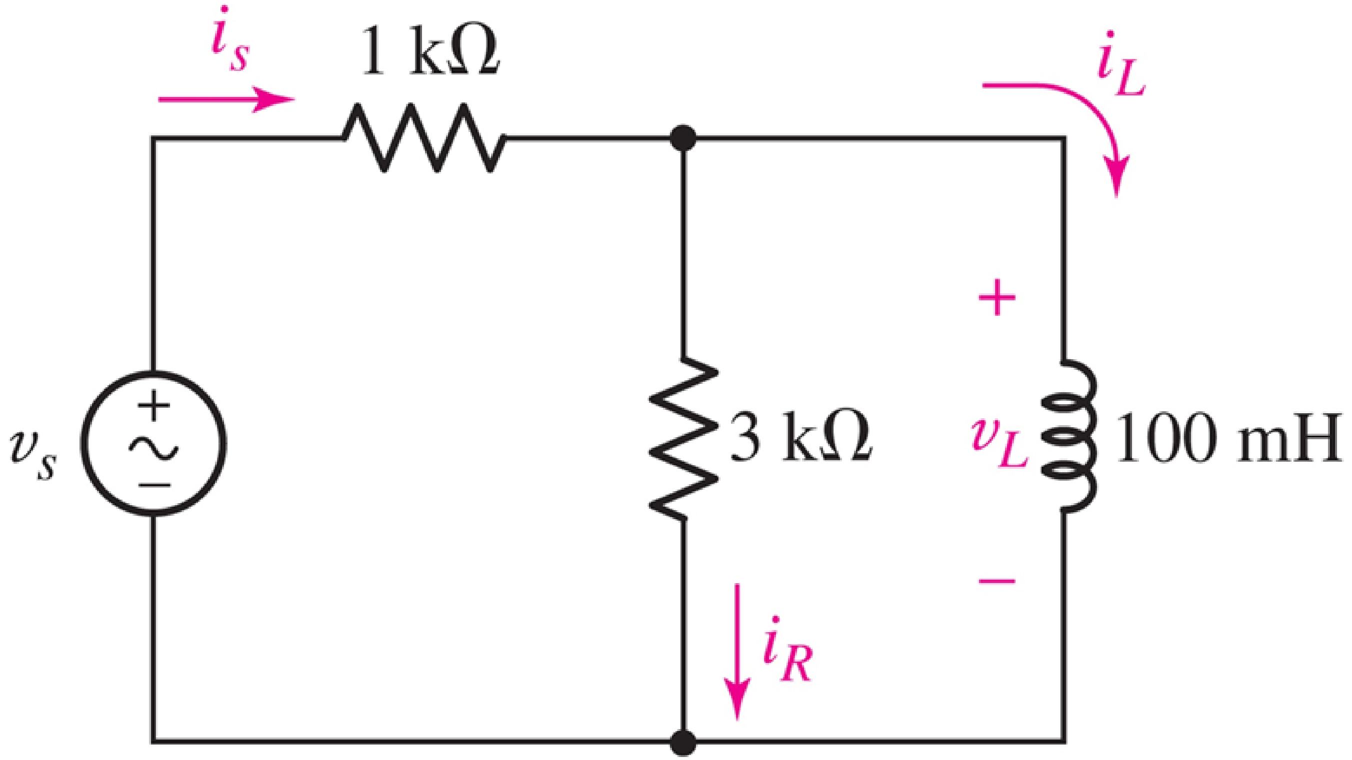


Resp.: 222 cos(10^3t -56,3°) mA



Exercício para casa:

1 – Se $v_s = 40cos8000t$ no circuito abaixo. Aplique o teorema de Thévenin onde ele for mais útil e determine, em t=0, os valores de (a) i_L (b) v_L (c) i_R (d) i_S .



Respostas: (a) i_L = 18,71 mA; (b) v_L = 15,97 V; (c) i_R = 5,32 mA (d) i_S =24,0 mA.

Comentários

O método que acabamos de empregar funciona – ***a resposta correta é obtida de uma maneira direta***. Porém, ele não é muito elegante, e após ter sido aplicado a alguns circuitos ele continua desajeitado e complicado quando se utiliza pela primeira vez. O **verdadeiro problema** não é a fonte variável no tempo – é o **indutor** (ou **capacitor**).

Acontece que se a resposta transitória não tem interesse para nós, há um método alternativo para a obtenção da resposta em regime permanente senoidal de qualquer circuito linear.

A vantagem desta alternativa é que nos permite relacionar a corrente e a tensão associados a qualquer elemento usando uma simples expressão algébrica.

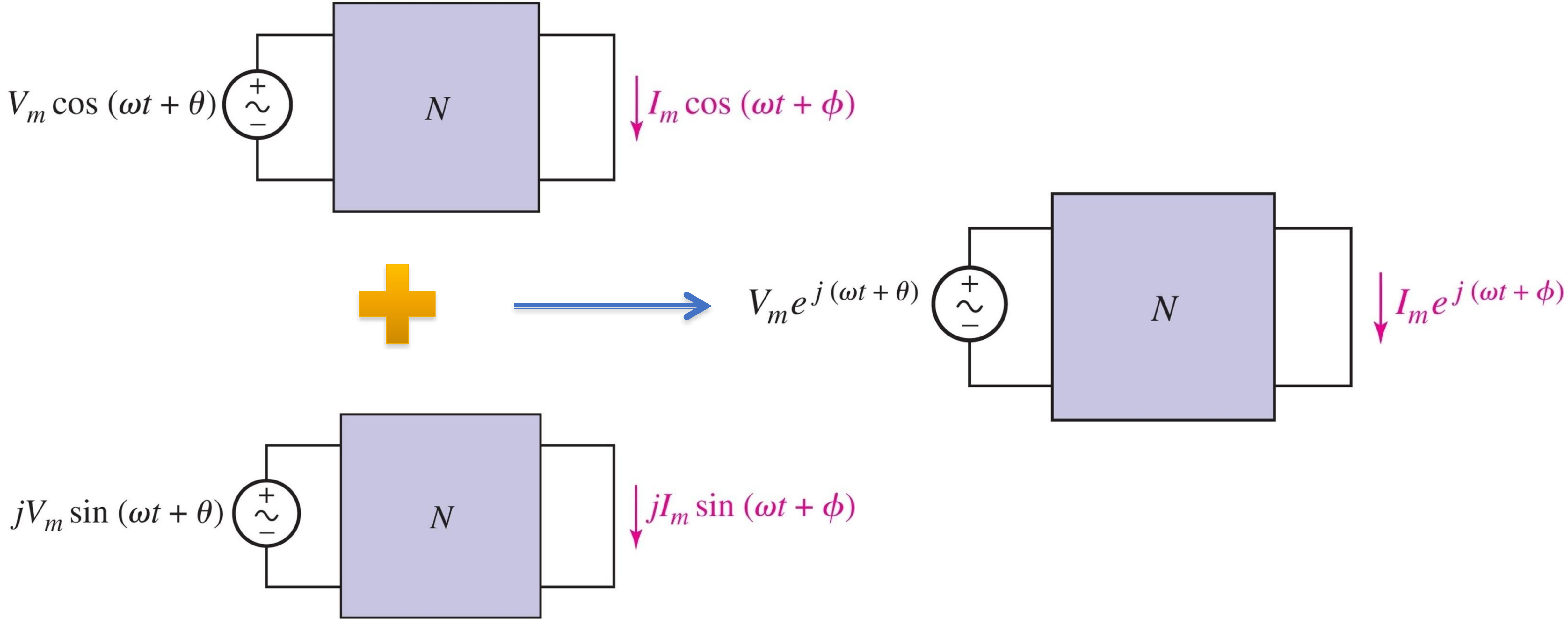
Função de Excitação (Forçante) Complexa

A idéia básica é que senóides e exponenciais são relacionadas por meio de números complexos. A identidade de Euler, por exemplo, nos diz que

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

- A derivada de uma exponencial é simplesmente uma versão proporcional da mesma exponencial.
- Adicionando fontes imaginárias em nossos circuitos leva a fontes complexas, que (surpreendentemente) simplifica o processo de análise.
- A superposição exige que qualquer fonte imaginária que acrescentarmos provocará respostas somente imaginárias, e fontes reais só pode levar a respostas reais. Assim, a qualquer momento, devemos ser capazes de separar as duas simplesmente tomando a parte real de qualquer tensão ou corrente complexa.

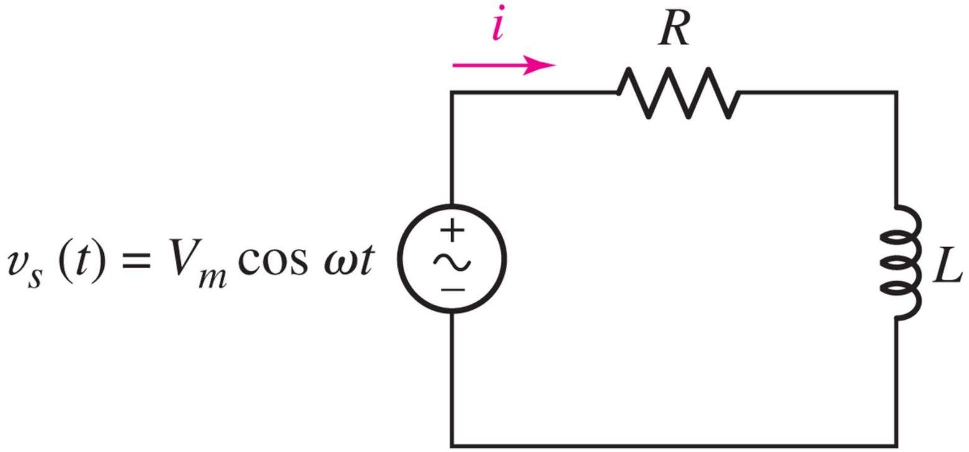
Aplicando uma função excitação (forçante) complexa



Resposta no Regime Permanente via Função Forçante Complexa

1. Aplica-se a LKC, assume que $v_s = V_m e^{j\omega t}$.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_s$$



2. Encontra-se a resposta complexa

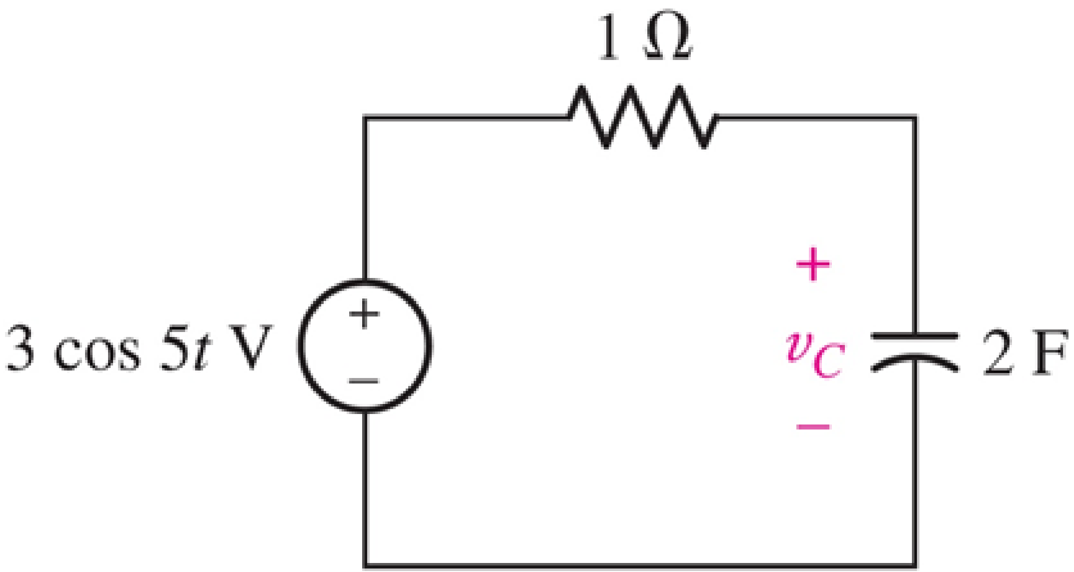
$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

3. Encontra-se I_m and ϕ, *(descartando a parte imaginária)*

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

Exercício:

1 – Para o circuito RC simples abaixo, substitua por uma fonte complexa apropriada e use –a para determinar a tensão no capacitor em regime permanente.



Resp: $v_c(t) = 298{,}5 \cos(5t - 84{,}3°)$ V

Observações:

- A inclusão de uma fonte senoidal imaginária levou a equações algébricas que descrevem a resposta em regime permanente senoidal de um circuito.
- O "cancelamento" do termo complexo exponencial – uma vez que sua derivada foi obtida, aparentemente não havia mais utilidade para ela, até o ponto em que se desejou obter a verdadeira forma da resposta.
- Cada tensão e corrente em nosso circuito contêm o mesmo fator $e^{j\omega t}$, e a frequência, embora relevante para a nossa análise, não se altera à medida que percorremos o circuito. Assim, não é preciso perder tempo representando este parâmetro.

Fasor

O termo $e^{j\omega t}$ é comum para tensão e para a corrente, logo pode ser ignorado em todos os passos intermediário, levando ao termo **fasor**:

$$\mathbf{I} = I_{\mathrm{m}} e^{j\phi} = I_{\mathrm{m}} \angle \phi$$

A representação fasorial de uma corrente(ou tensão) está no domínio da frequência.

> Um **fasor** é um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma **cossenoide**.

O processo de transformação de *i(t)* para ***I*** é chamado de transformação fasorial do domínio do tempo para o domínio da frequência.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\downarrow$$

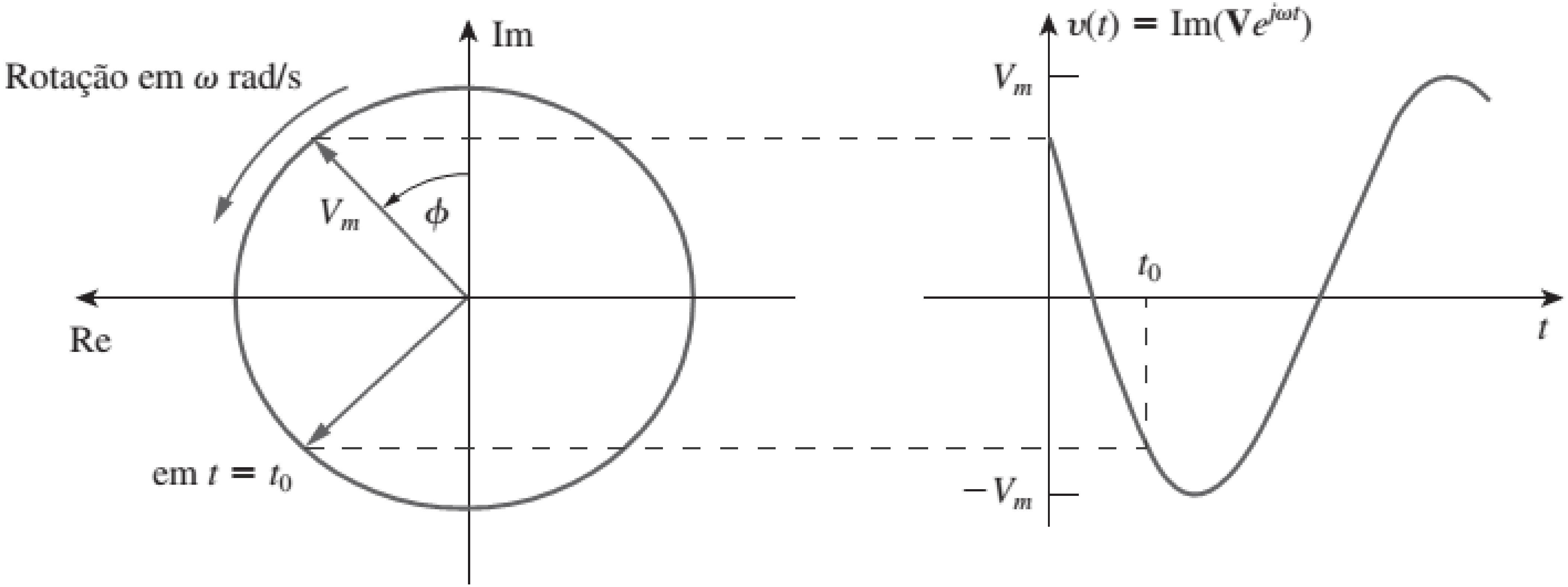
$$i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi$$



O real poder da análise fasorial está no fato de ser possível definir relações algébricas entre a tensão e a corrente em indutores e capacitores, do mesmo modo que sempre fizemos no caso dos resistores.

Exercício para casa:

1 - Assuma que ω=2000 rad/s e t=1ms. Determine o valor instantâneo de cada uma das correntes dadas na forma fasorial.

a) j10A;

b) 20+j10A

c) 20+j($10\angle 20°$)

2 - Transforme em fasores as seguintes funções do tempo:

(a) –5 sen(580t – 110°);

(b) 3 cos600t – 5 sen(600t + 110°);

(c) 8 cos(4t – 30°) + 4 sen (4t – 100°).

Dica: Primeiro converta cada uma delas em uma única função cosseno com amplitude positiva.

Respostas:

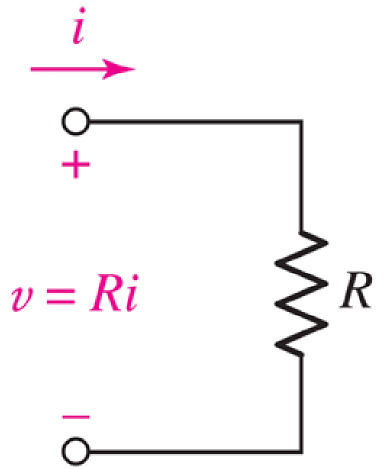
1 - (a) –9,09 A; (b) –17,42 A; (c) –15,44 A.

2 – (a) $5\angle -20°$; (b) $2{,}41\angle -134{,}8°$; (c) $4{,}46\angle -47{,}9°$.

Relações fasoriais para os elementos dos circuitos

- Resistor;
- Indutor;
- Capacitor;

Resistor



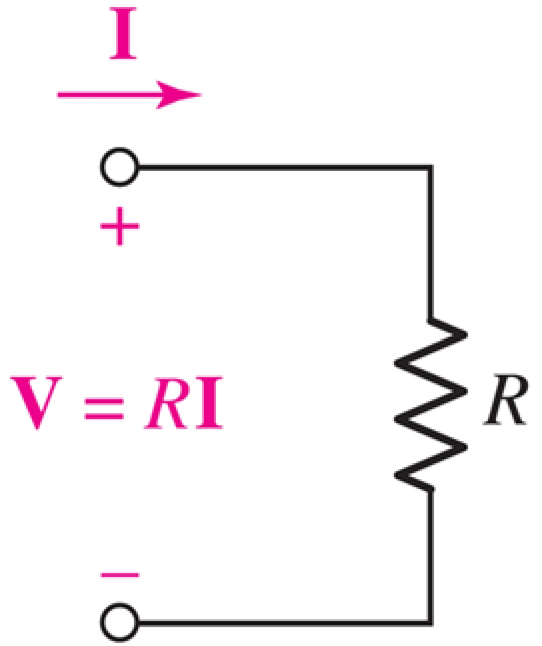
$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

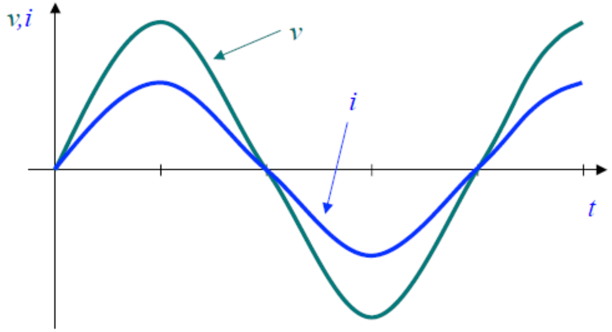
$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Tensão e Corrente Complexas:

$$v = V_m e^{j(\omega t+\theta)}$$

$$i = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$





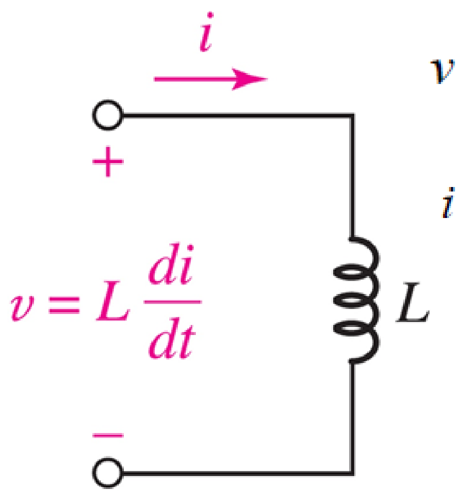
Substituindo na lei de Ohm e eliminando o fator $e^{j\omega t}$

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = R.\, I_m e^{j(\omega t+\phi)} \Longrightarrow V_m e^{j\theta} = R.\, I_m e^{j\phi} \Longrightarrow \boldsymbol{V} = R.\, \boldsymbol{I}$$

No domínio da frequência, a Lei de Ohm assume a mesma forma

A tensão e a corrente senoidais para um **resistor** possuem o mesmo ângulo de fase, isto é, estão em **fase**.

Indutor



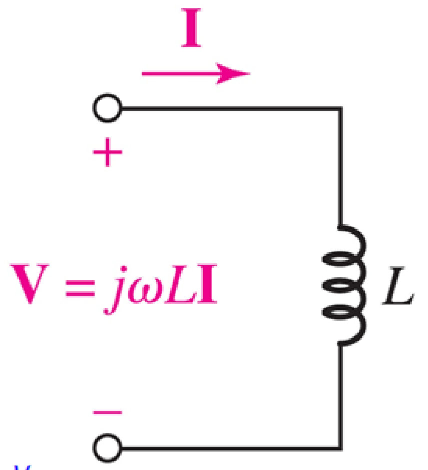
$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Tensão e Corrente Complexas:

$$v = V_m e^{j(\omega t+\theta)}$$

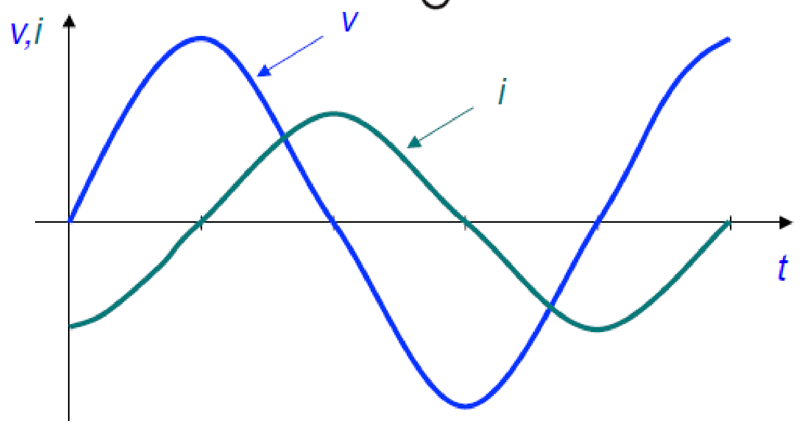
$$i = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$



Substituindo na equação do indutor

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt}\left[I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right]$$

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$



A equação diferencial no domínio do tempo torna-se uma equação algébrica no domínio da frequência, isto é, a derivada no tempo torna-se multiplicação em forma fasorial.

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} = j\omega L(I_m\angle\phi)$$

$$= \omega L(I_m\angle\phi + 90^\circ)$$

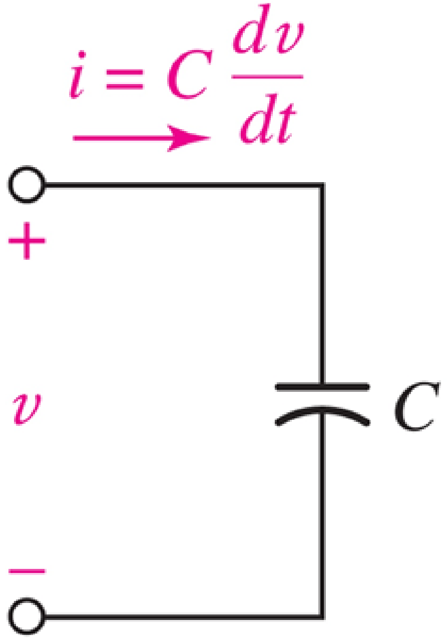
O ângulo do fator *jωL* é exatamente +*90º* e que **I** deve portanto estar *90º* atrasada da tensão **V** no indutor.

Exercício:

1 – Aplique a tensão $8\underline{|-50°}$ na frequência ω=100 rad/s no indutor de 4H e determine a corrente fasorial e a corrente no domínio do tempo.

Resposta: $i = 20 \cos(100t - 140°)$ mA.

Capacitor



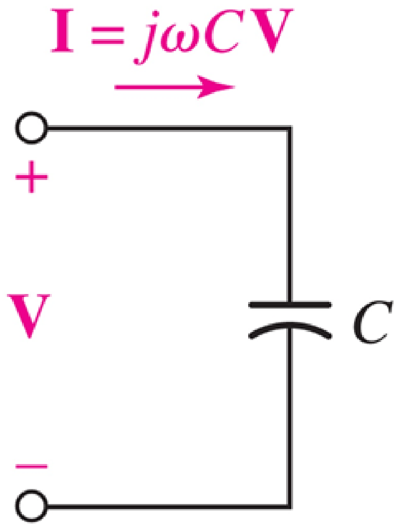
$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Tensão e Corrente Complexas:

$$v = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

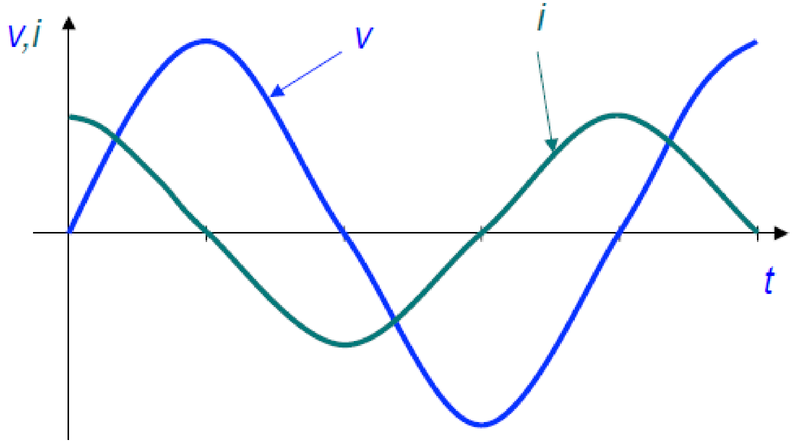
$$i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$



Substituindo na equação do capacitor

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} = C\frac{d}{dt}\left[V_m e^{j(\omega t + \theta)}\right]$$

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega C V_m e^{j(\omega t + \theta)}$$



A derivada no tempo torna-se multiplicação em forma fasorial.

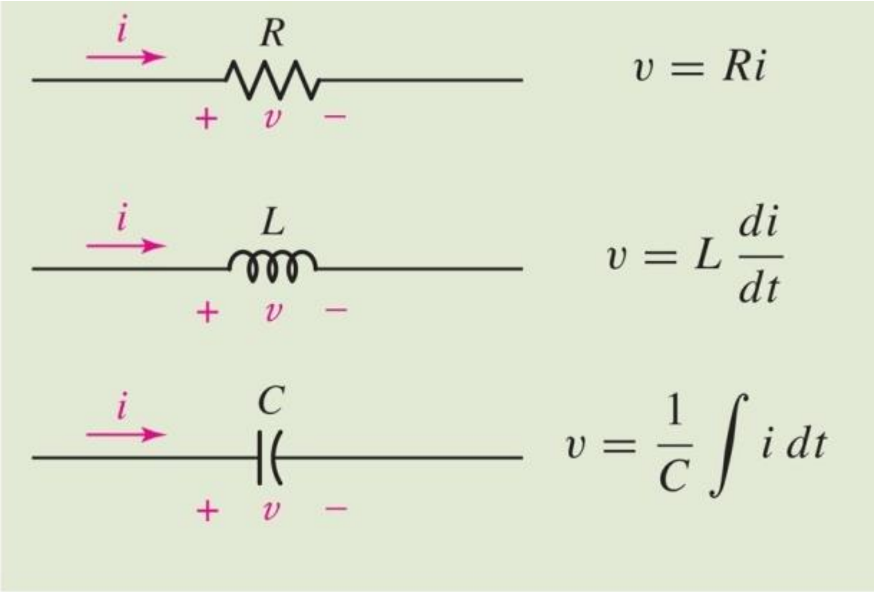
I está *90º* adiantada de **V** em um capacitor

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} = j\omega C\left(V_m \angle \theta\right)$$

$$= \omega C V_m \angle\left(\theta + 90^\circ\right)$$

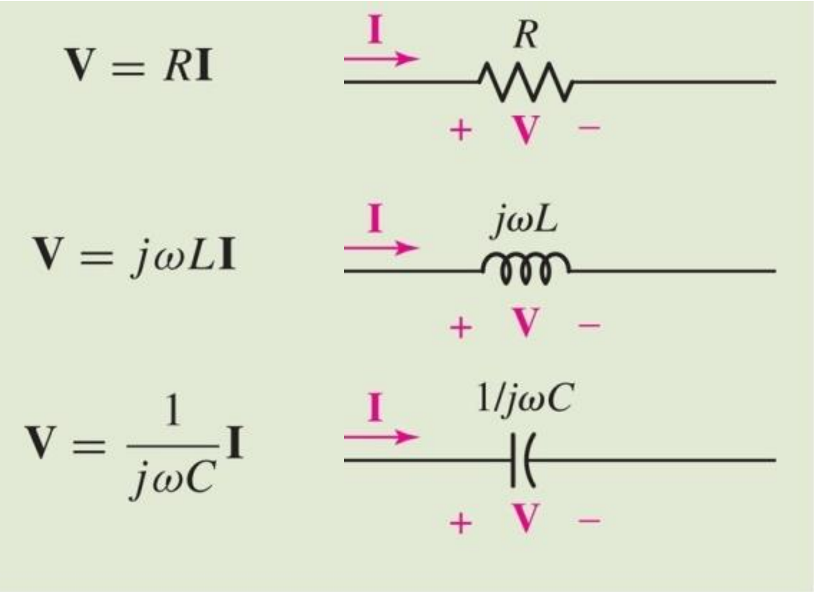
Relações de **V** - **I** para os três elementos passivos

- Domínio no tempo



- Cálculo (difícil mas real)

- Domínio na Frequência



- Álgebra (fácil mas complexa)

Leis de Kirchhoff no domínio da frequência

Lei das tensões de Kirchhoff no domínio da frequência

- LTK no domínio da frequência:

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = 0$$

Lei das correntes de Kirchhoff no domínio da frequência

- LCK no domínio da frequência:

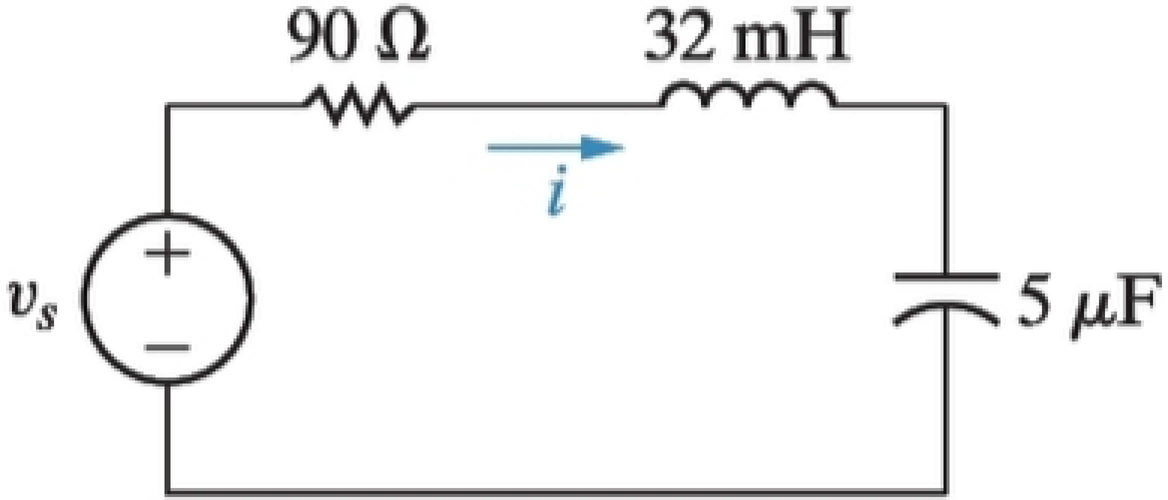
$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_n = 0$$

Exercício:

Um resistor de 90 Ω, um indutor de 32 mH e um capacitor de 5μF estão ligados em série aos terminais de uma fonte senoidal, como mostra a figura. A expressão de regime permanente para a tensão da fonte é $v_s(t) = 750 \cos(5000t+30°)$ V.

a) Construa o circuito equivalente no domínio da frequência.

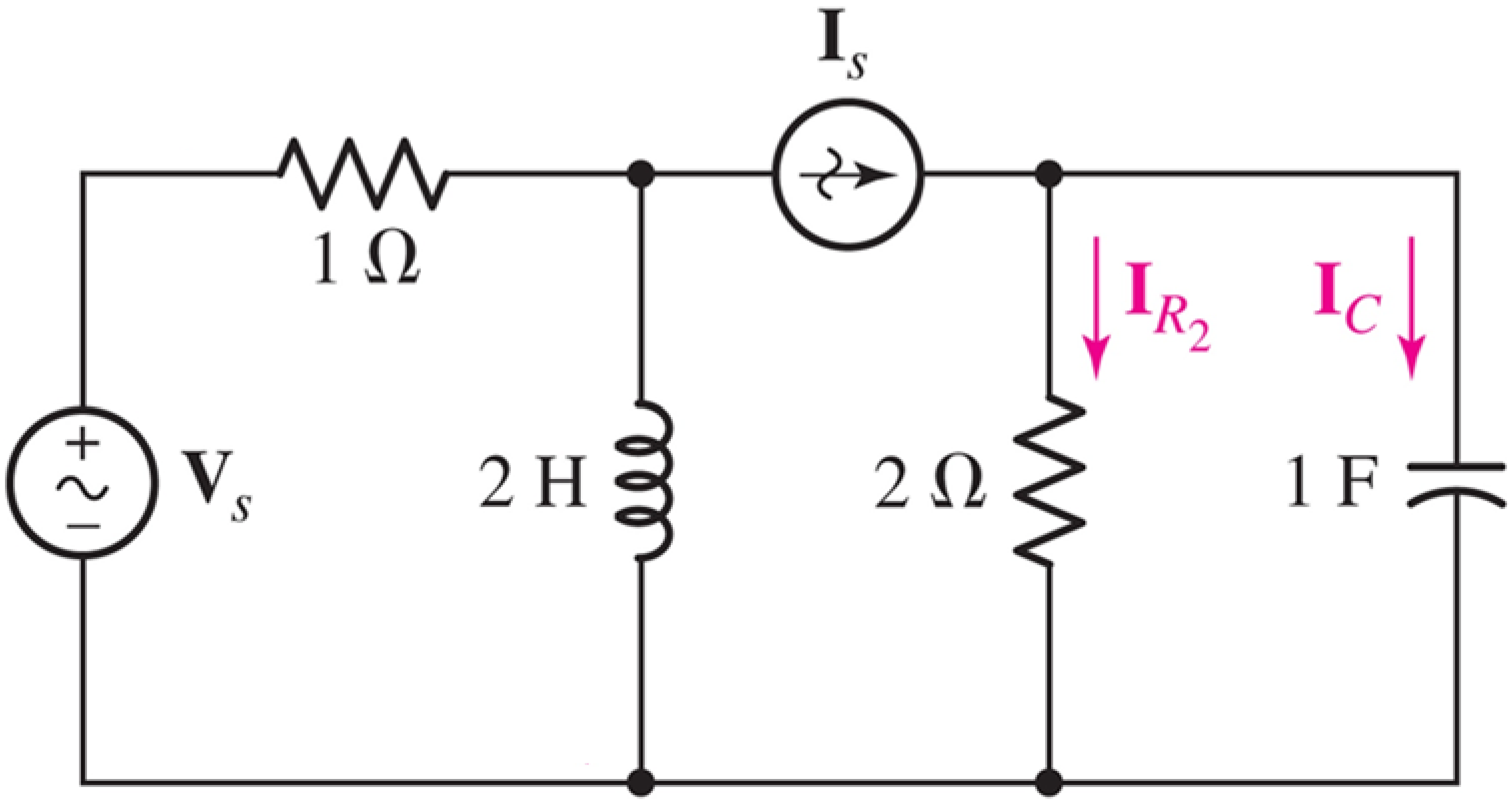
b) Calcule a corrente de regime permanente *i(t)* pelo método fasorial.



Resposta: i = 5 cos (5000t-23,13°) A.

Exercício:

Para o circuito abaixo, determine I_s e $i_s(t)$, se as fontes operam em $\omega = 2rad/s$ e $I_c = 2\underline{|28°}A$



Resposta: i_s= 2,06 cos (2t +14°) A.

Impedância

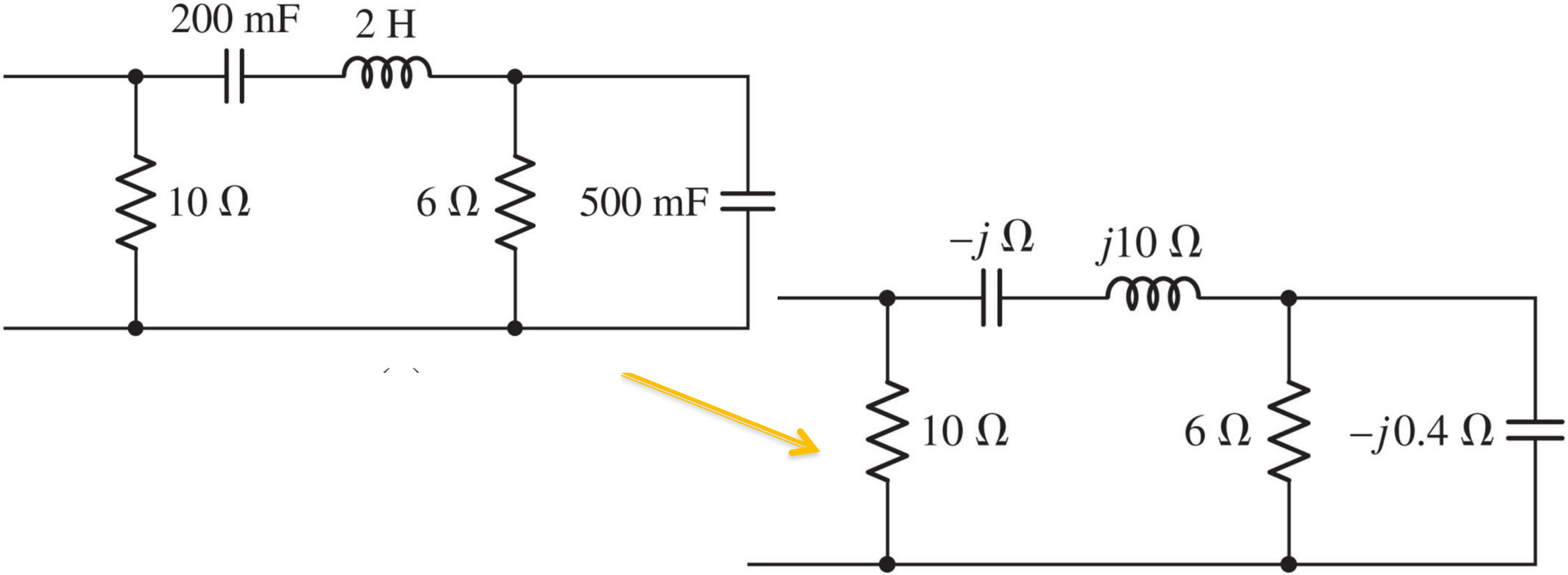
- Impedância de um circuito é a razão entre o fasor tensão **V** e o fasor corrente **I**, medida em ohms (Ω) $\rightarrow$ Z= **V/I**

$$Z_R=R \qquad Z_L=j\omega L \qquad Z_C=1/j\omega C$$

- A impedância representa a oposição exibida pelo circuito ao fluxo de corrente senoidal. Embora a impedância seja a razão de dois fasores, ela **não é um fasor**, pois não corresponde a uma quantidade com variação senoidal.
- A impedância é o equivalente à resistência no domínio da frequência.
- A impedância é um número complexo Z = R + jX
- As impedâncias em série ou em paralelo podem ser combinadas usando “regras de resistência”.

Exercício:

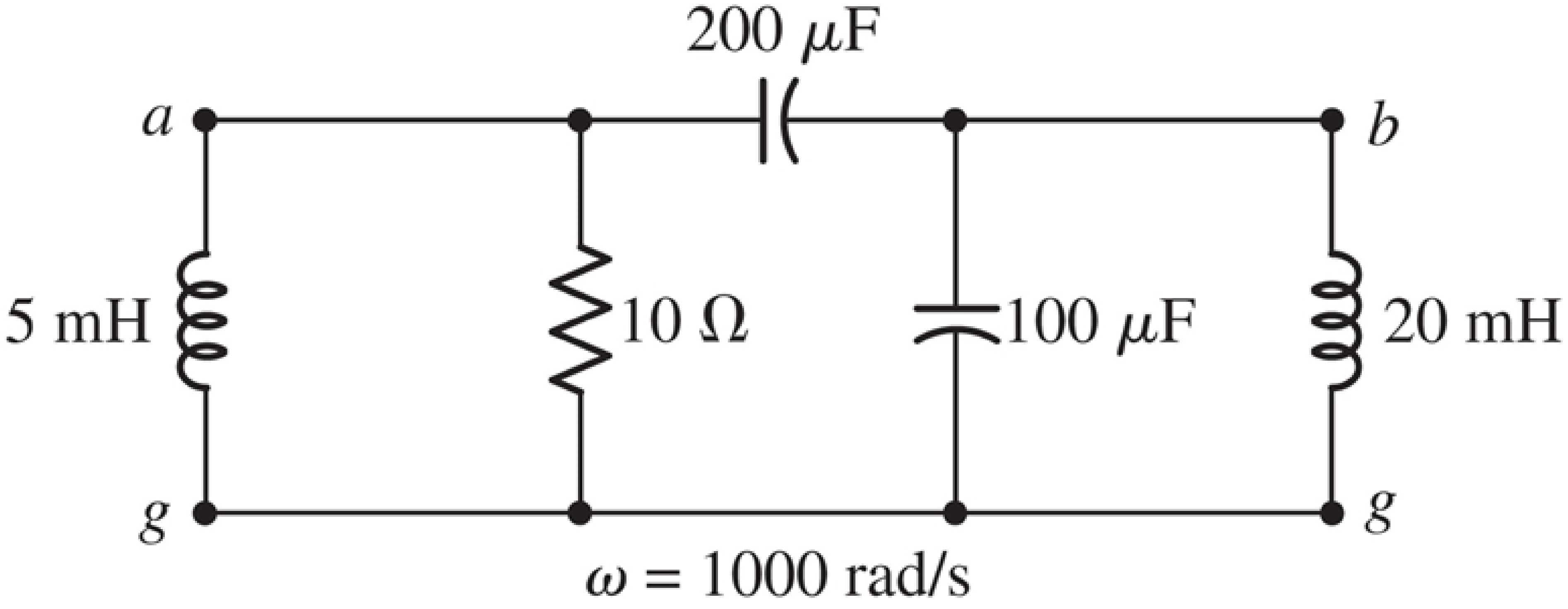
Determine a impedância equivalente da rede mostrada na figura abaixo que opera na frequência de 5rad/s.



Resp: 4.255 + j4.929 Ω

Exercício para casa:

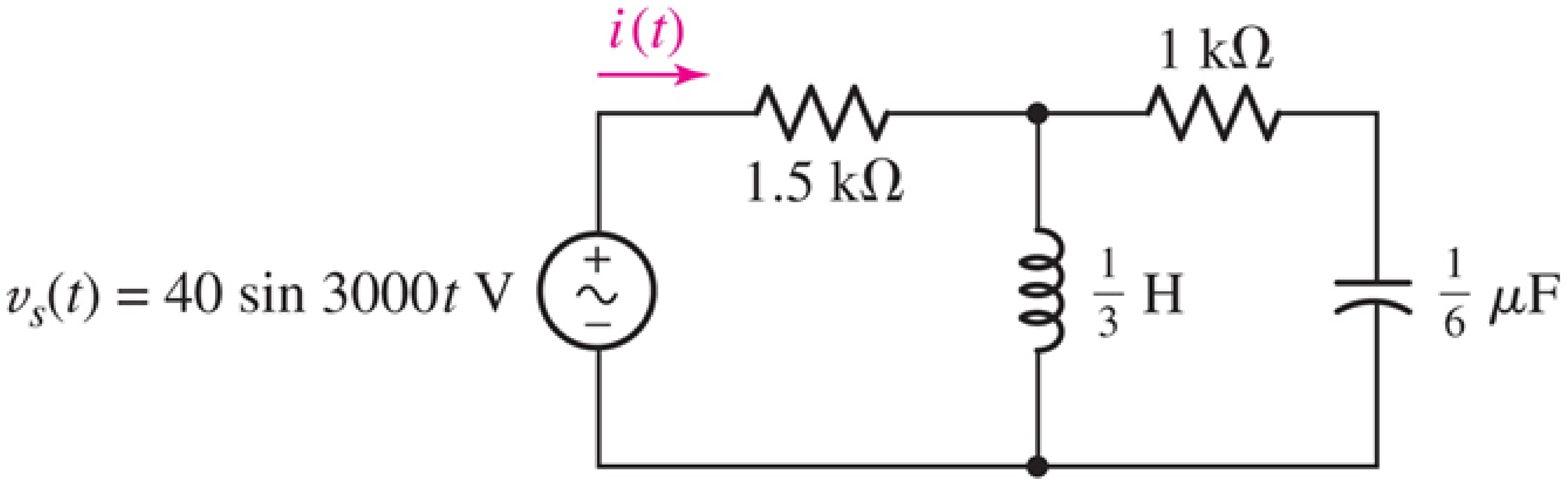
Use a figura abaixo como referencia para determinar a impedância Z_{ent} que seria medida entre os terminais: (a) a e g; (b) b e g; (c) a e b



Resposta: 2,81 + j4,49 Ω; 1,798 – j1,124 Ω; 0,1124 – j3,82 Ω.

Exercício:

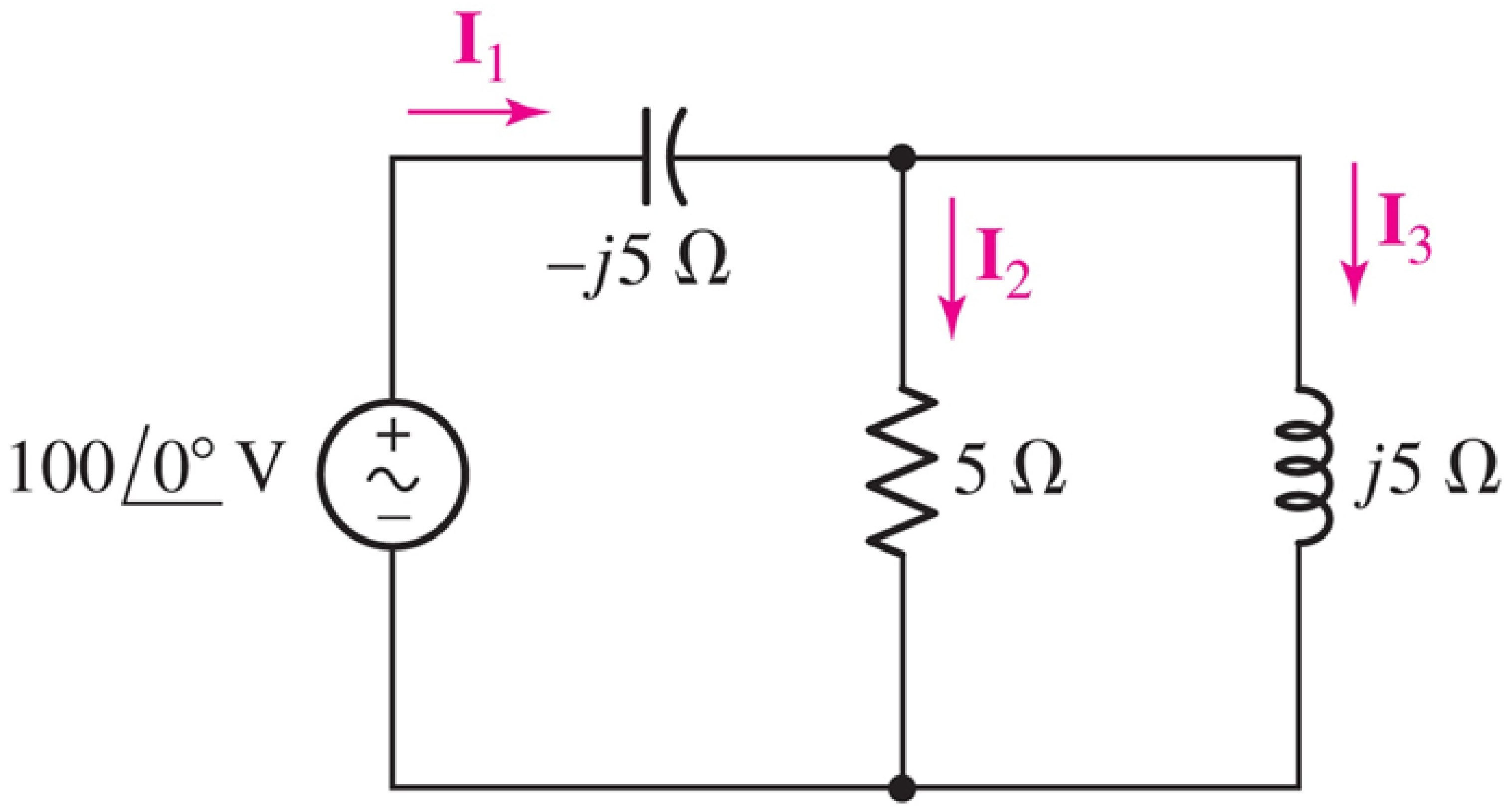
Determine a corrente i(t) no circuito mostrado na figura abaixo:



Resposta: i = 16 cos (3000t – 126,9°) mA.

Exercício para casa:

No circuito no domínio da frequência, determine (a) I_1, (b) I_2 , (c) I_3.



Admitância

- A admitância é simplesmente a razão entre a corrente e a tensão.

$$Y = I/V = 1/Z$$

$$Y_R = 1/R \qquad Y_L = 1/j\omega L \qquad Y_C = j\omega C$$

- Se $Z=R+jX$; R é a resistência, X *é a* reatância (unidade: ohm (Ω))

- Se Y=G+jB; G é a condutância, B é a suceptância (unidade: siemens S)

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX}$$

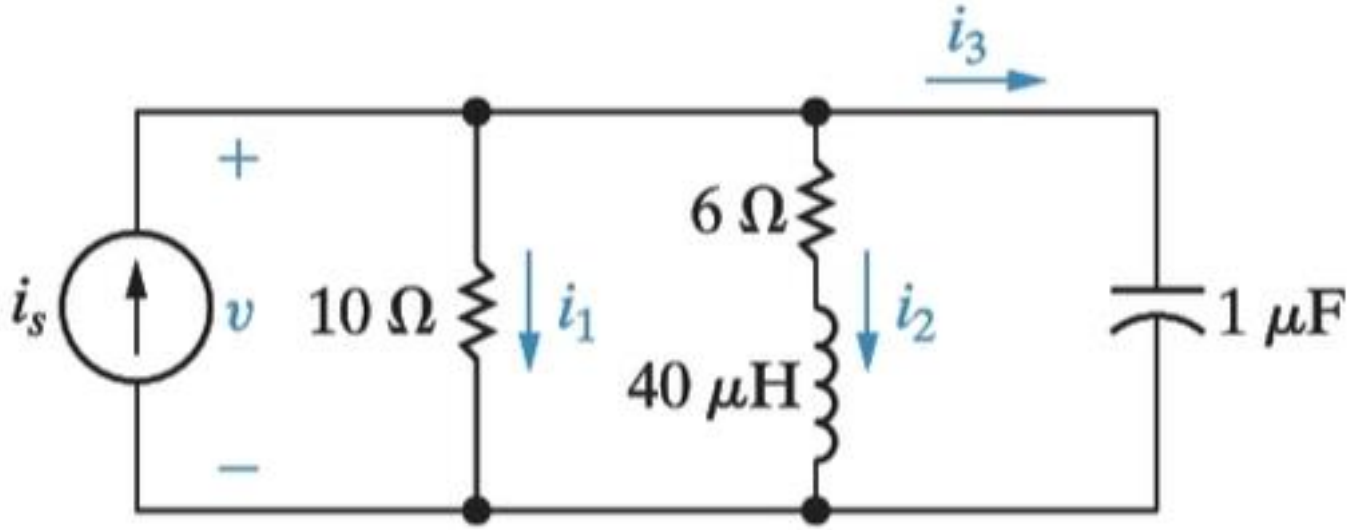
Exercício:

A fonte de corrente senoidal no circuito mostrado na figura fornece uma corrente de

$$i_s(t) = 8cos(200.000t)A$$

a) Determine o circuito equivalente no domínio da frequência

b) Calcule as expressões de regime permanente para v, i_1, i_2 e i_3.



Resp: v = 40 cos(200.000t - 36.7°) V,

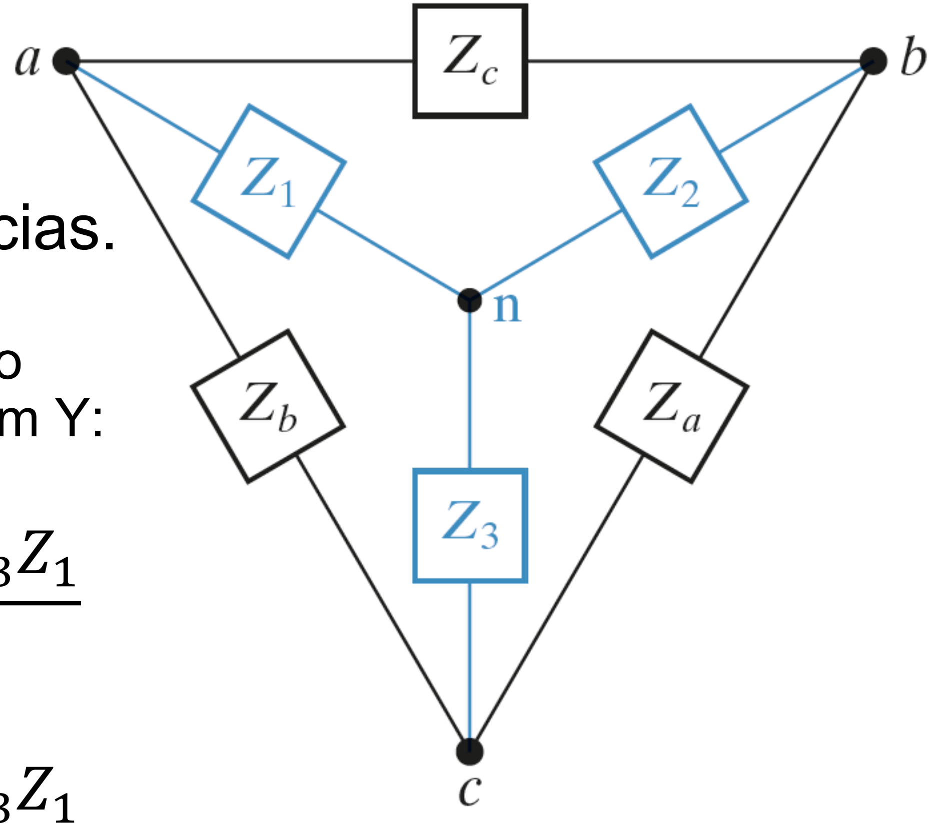
i_1 =4 cos(200.000t - 36.7°) A,

i_2 = 4 cos(200.000t - 90°) A,

e i_3 = 8 cos(200.000t +53,13°),

Transformações Δ - Y

- A transformação Δ - Y também se aplica a impedâncias.



- As impedâncias em Y, como funções das impedâncias em Δ:

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

- As impedâncias em Δ, como funções das impedâncias em Y:

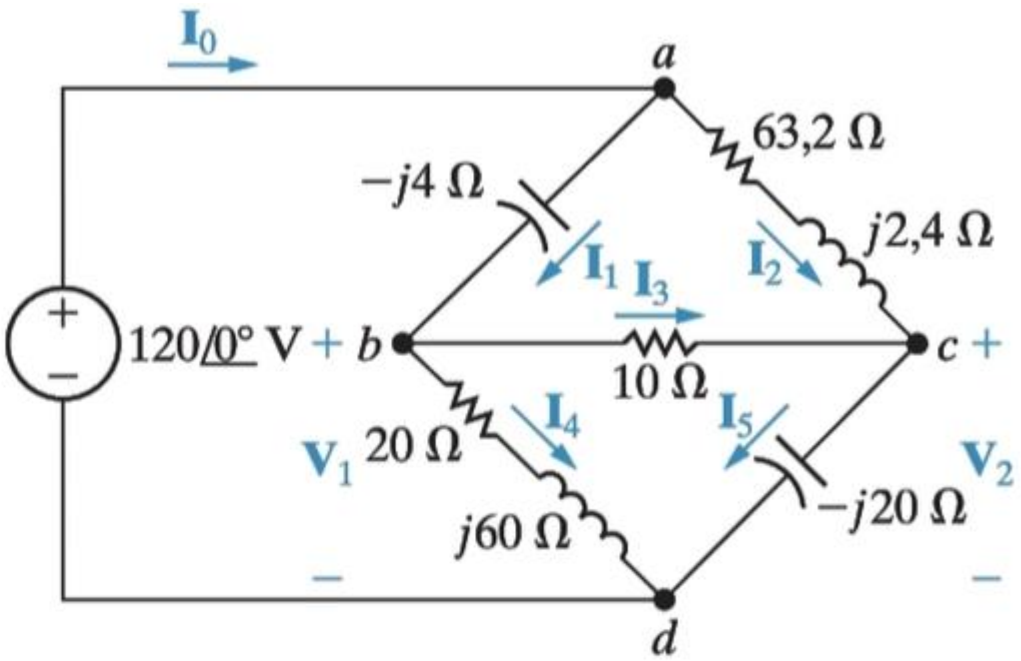
$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

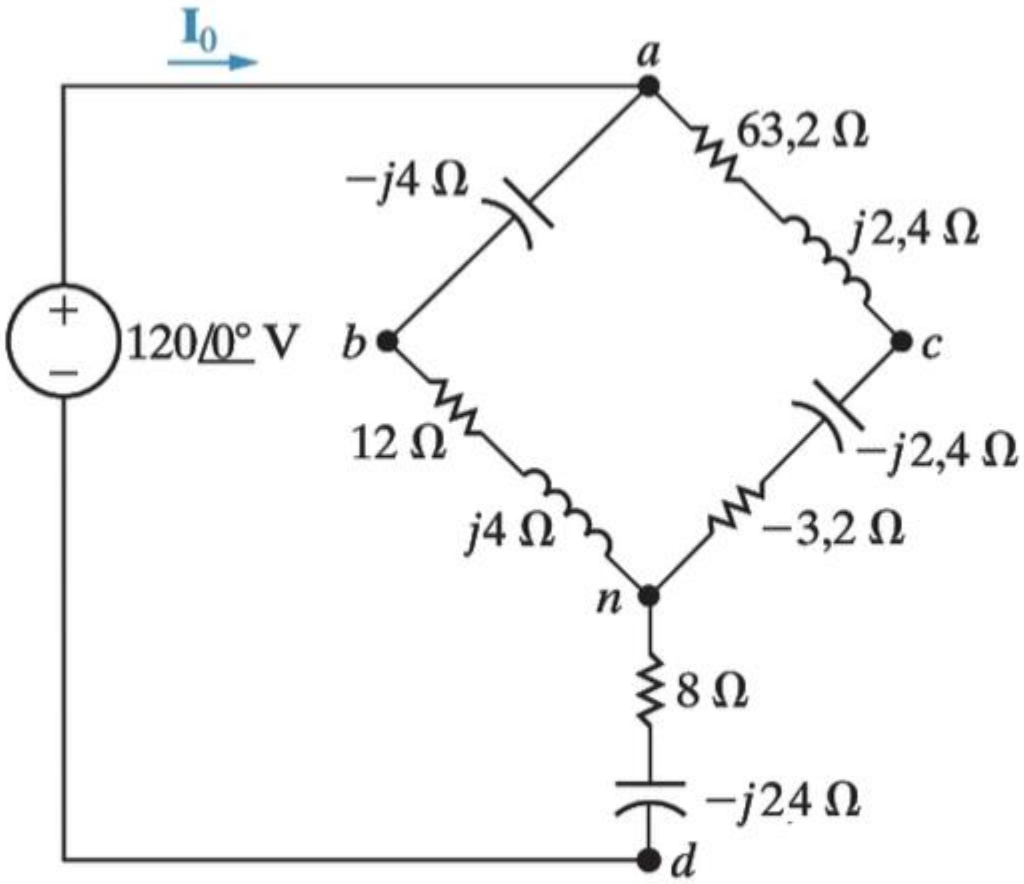
$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

Exercício:

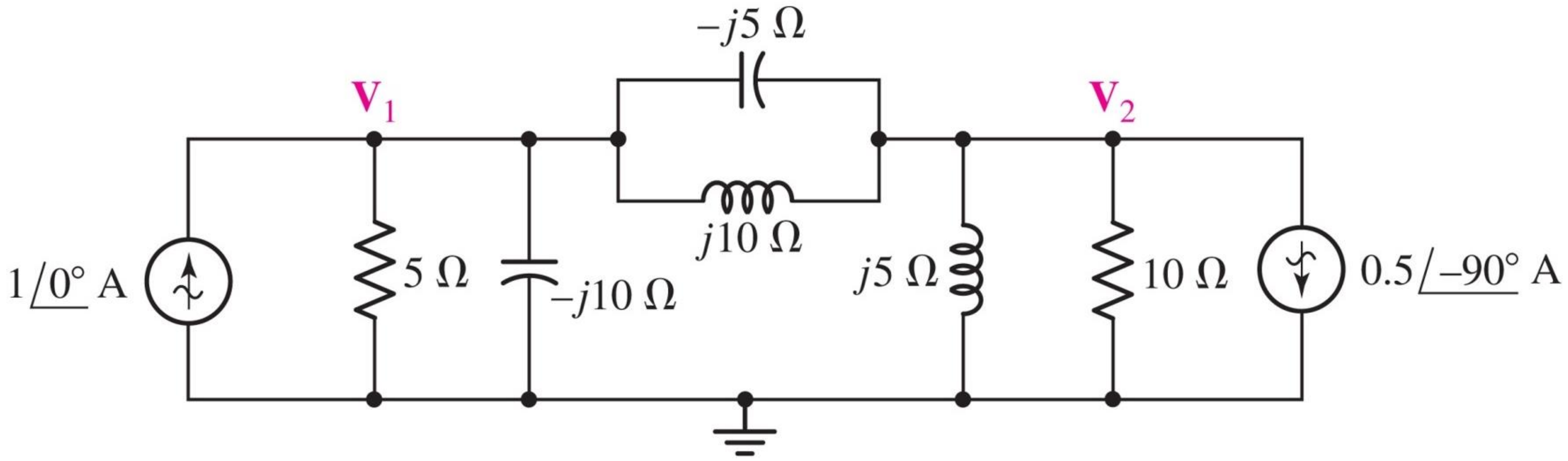
Use a transformação Δ -Y de impedâncias para determinar I_0, I_1, $I_{2\,,}I_3$. I_4, I_5, e V_1 e V_2 no circuito da figura.





Exercício: Análise Nodal

Determine as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$ no domínio do tempo para o circuito mostrado na figura



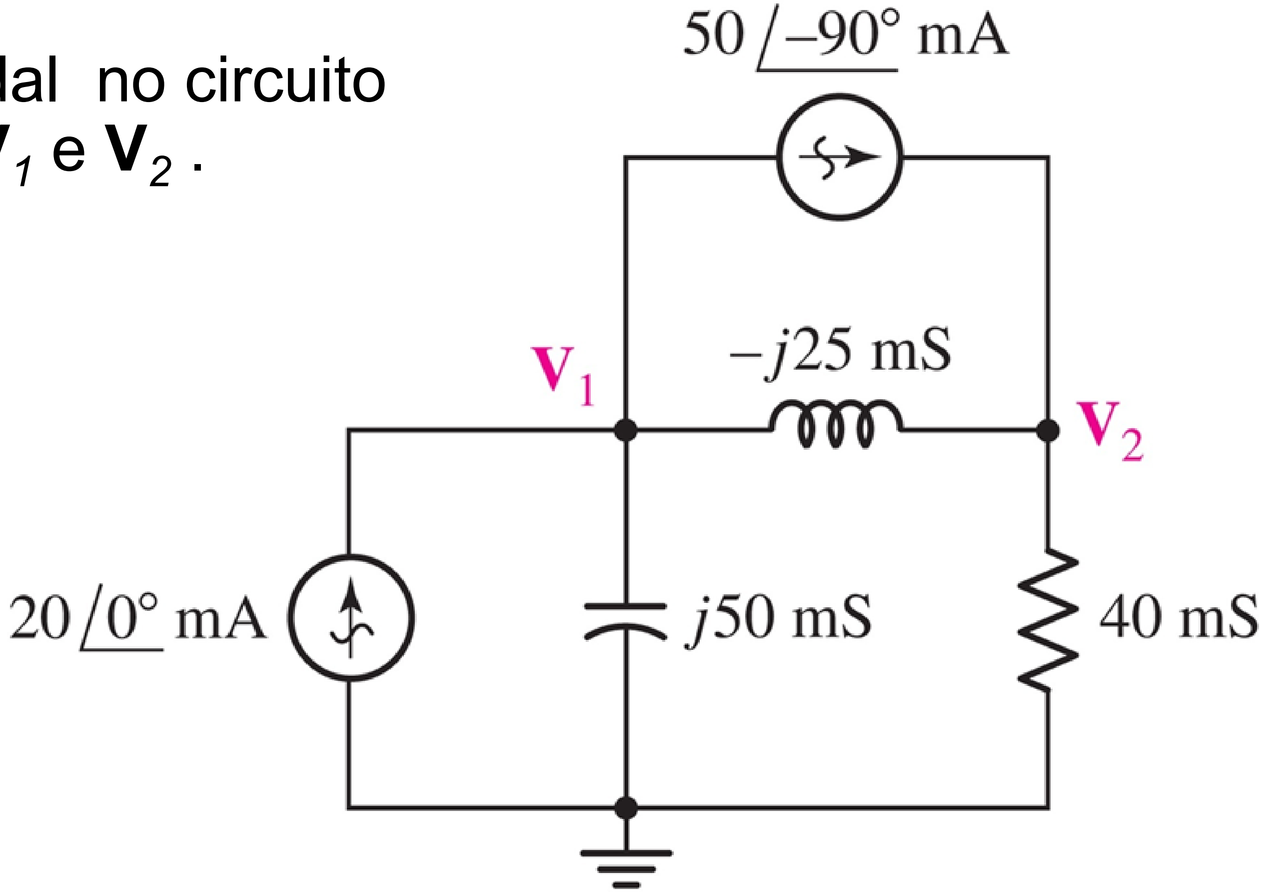
Resp: $\mathbf{V}_1 = 1 - j2$ V e $\mathbf{V}_2 = -2 + j4$ V

$v_1(t) = 2{,}24 \cos(\omega t - 63{,}4^\circ)$ V

$v_2(t) = 4{,}47 \cos(\omega t - 116{,}6^\circ)$ V

Exercício para casa:

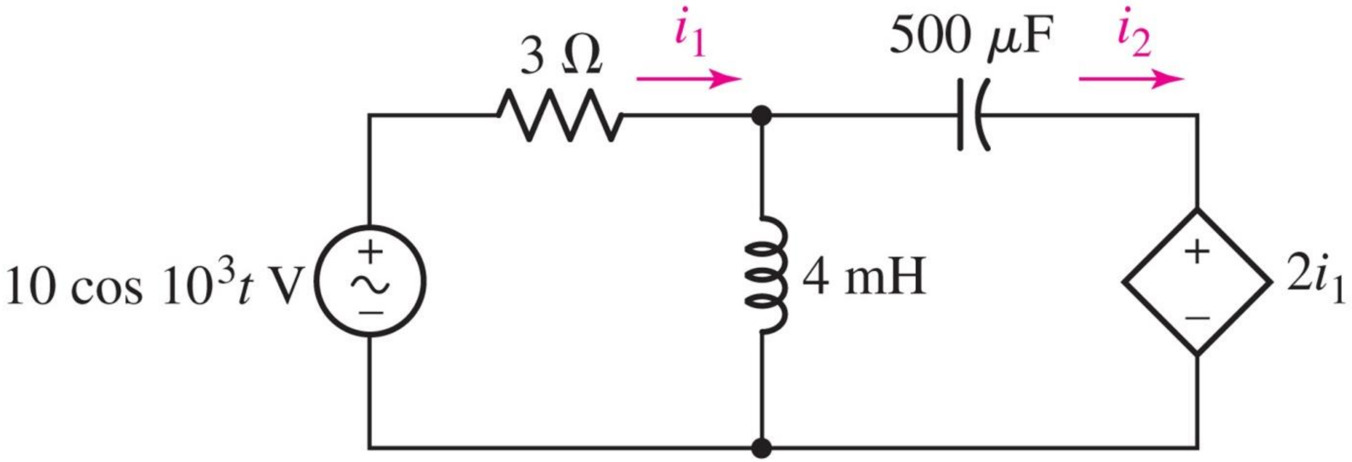
Use a analise nodal no circuito para determinar $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$.



Resp: $\mathbf{V}_1 = 1{,}062\underline{|23{,}3}°$ V e $\mathbf{V}_2 = 1{,}593\underline{|-50{,}0}°$ V

Exercício: Análise de Malha

Determine as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ no domínio do tempo para o circuito mostrado na figura

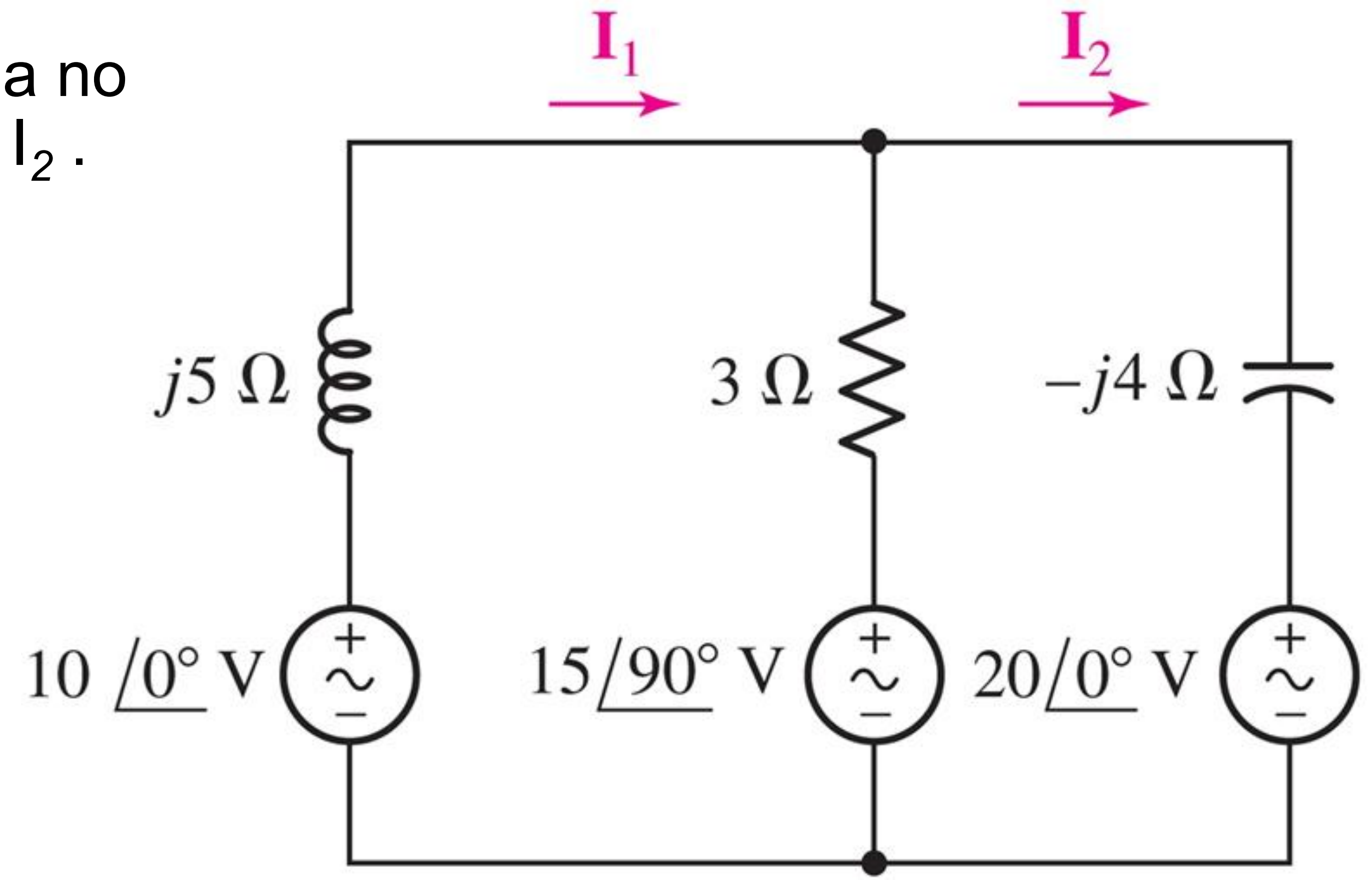


Resp: $i_1(t) = 1.24\cos(10^3t + 29.7^\circ)$ A

$i_2(t) = 2.77\cos(10^3t + 56.3^\circ)$ A

Exercício para casa:

Use a analise de malha no circuito para obter I_1 e I_2 .

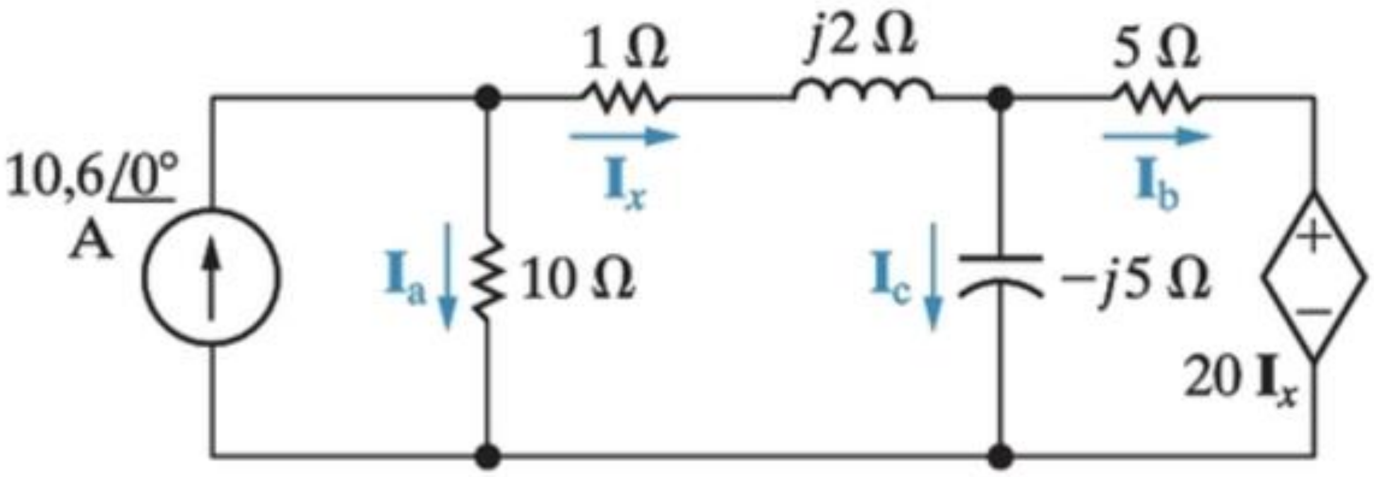


Resp: $I_1 = 4{,}87\underline{|-164{,}6^\circ}$ A

$I_2 = 7{,}17\underline{|-144{,}9^\circ}$ A

Exercício: Análise Nodal e de Malha

Use o método das tensões de nó para determinar as correntes do ramo I_a , I_b e I_c no circuito da figura abaixo.

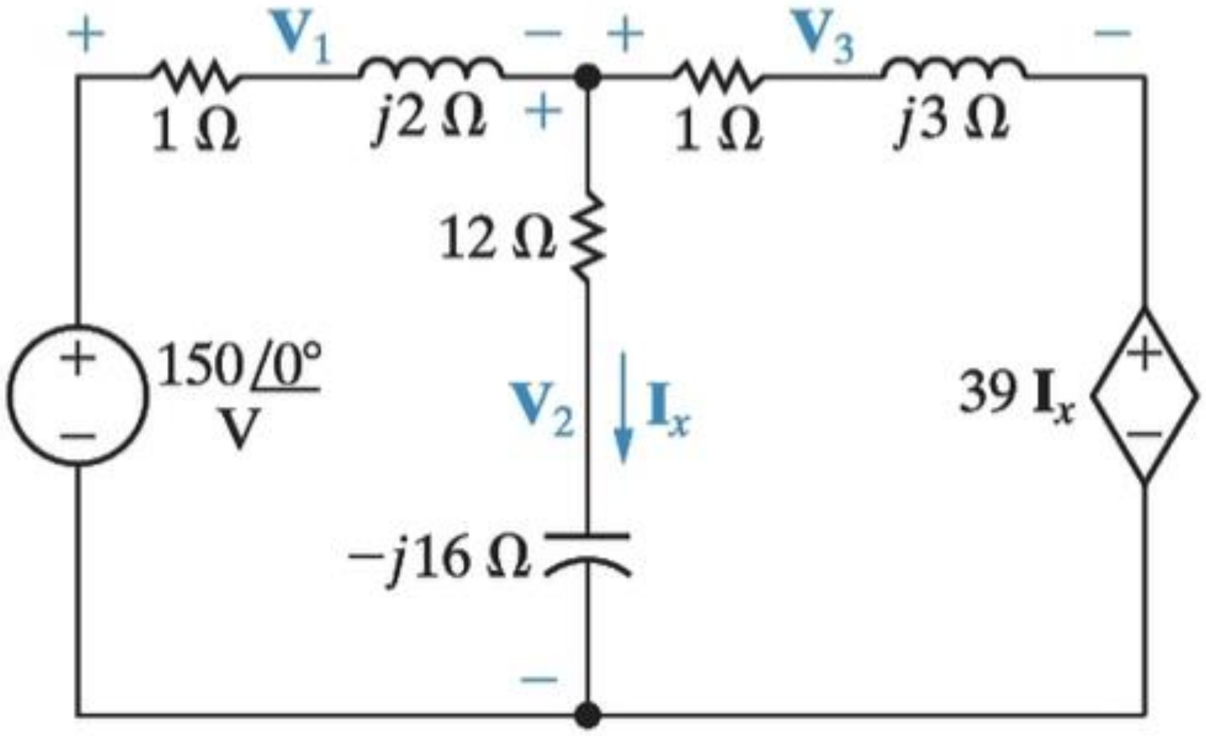


Resp: $I_a = 6{,}84 - j1{,}68$ A

$I_b = -1{,}44 - j11{,}92$ A; $I_c = 5{,}2 + j13{,}6$ A

Exercício: Análise Nodal e de Malha

Use o método das corrente em malha para determinar as tensões V_1 , V_2 e V_3 no circuito da figura abaixo.

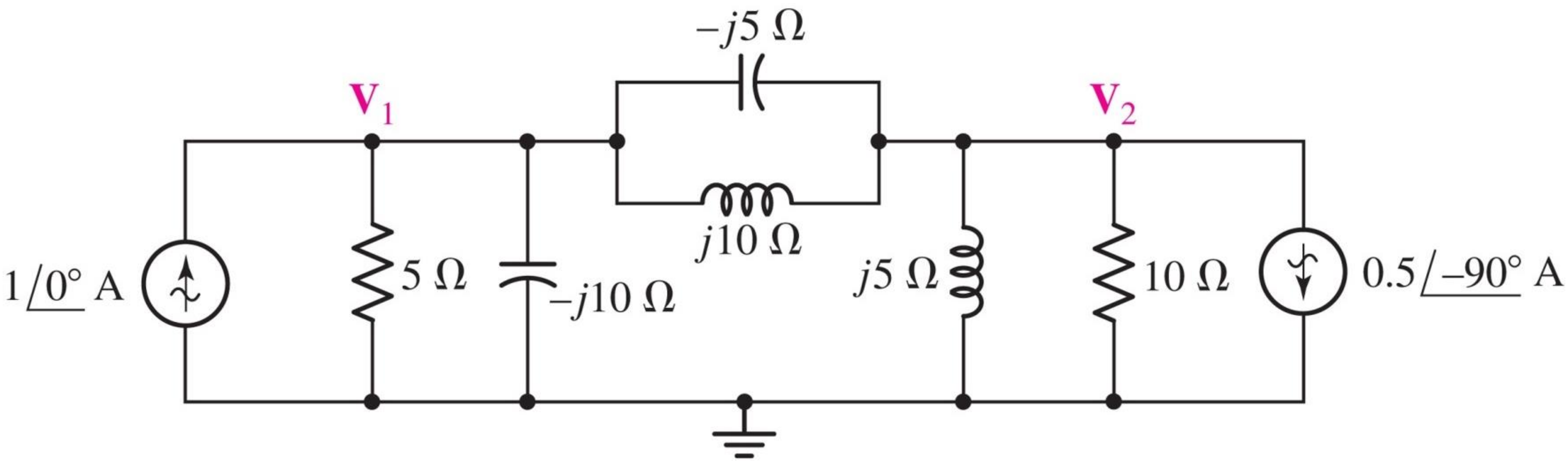


Resp: $V_1 = 78 - j104$ V

$V_2 = 72 + j104$ V; $V_3 = 150 - j130$ V

Exercício: Teorema da Superposição

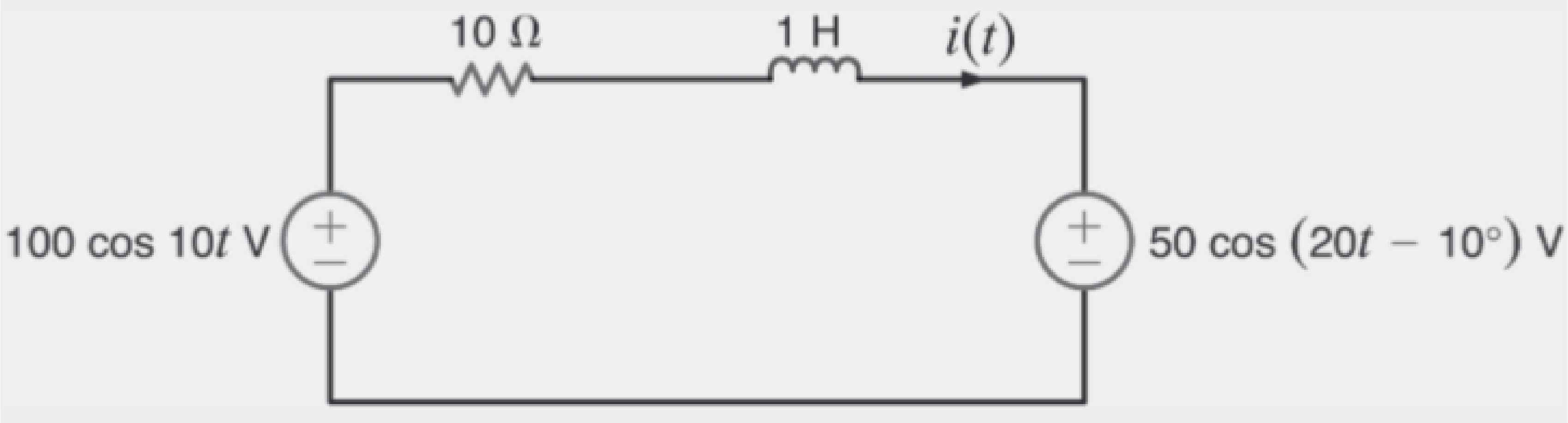
Aplicando o princípio da superposição, determine V_1.



Resp: $\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{V_{1L}} + \boldsymbol{V_{1R}} = (2-j2)+(-1) = 1-j2$ V

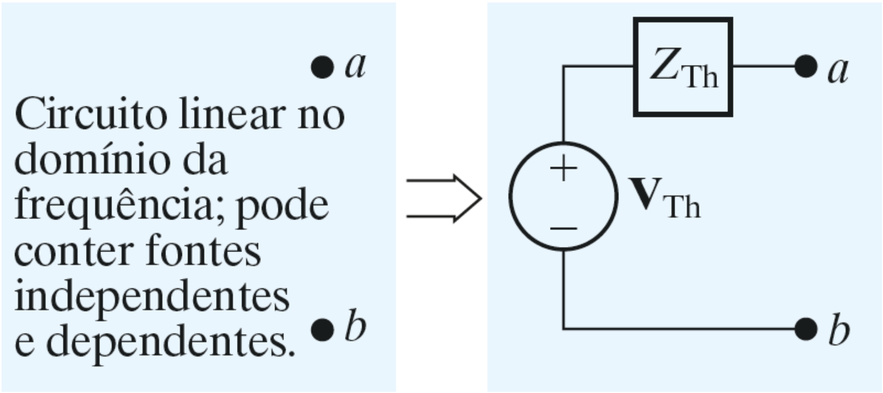
Exercício: Teorema da Superposição

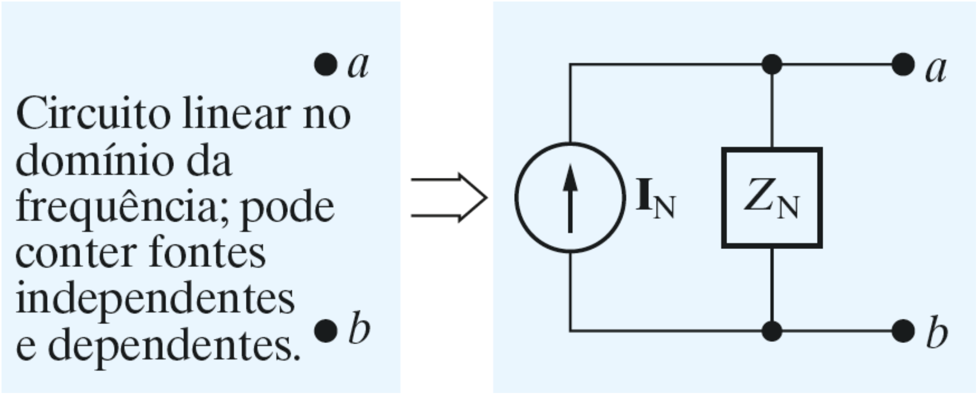
Aplicando o princípio da superposição, determine i(t).



Circuitos Equivalentes de Thévenin e Norton

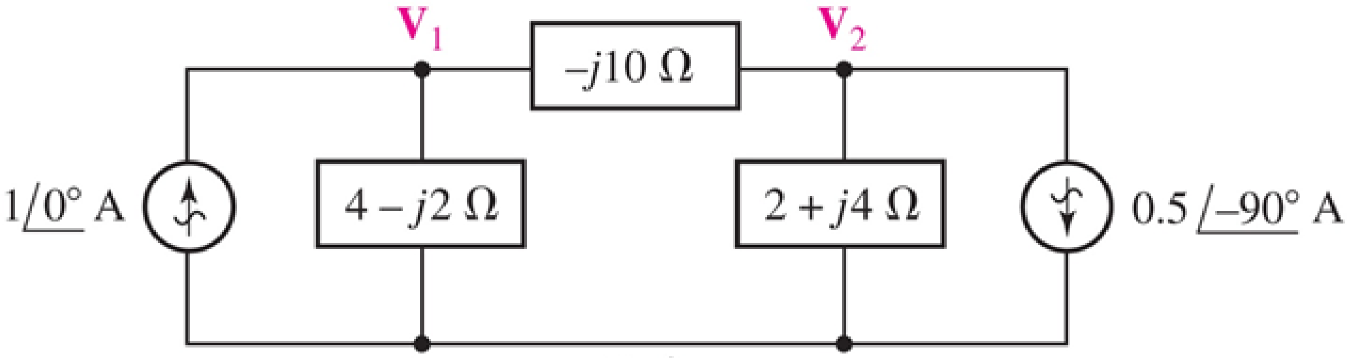
As técnicas para determinar a tensão e a impedância equivalente de Thévenin são idênticas às usadas para circuitos resistivos, com exceção de que no domínio da frequência envolve manipulação de quantidades complexas. O mesmo se aplica á determinação da corrente e impedância equivalente de Norton

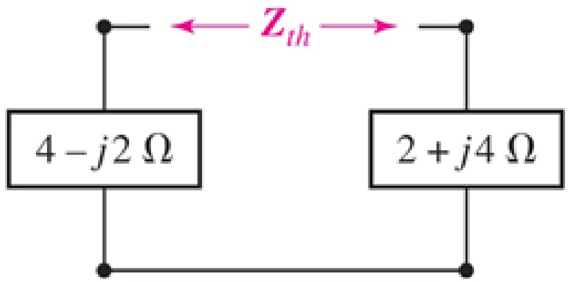


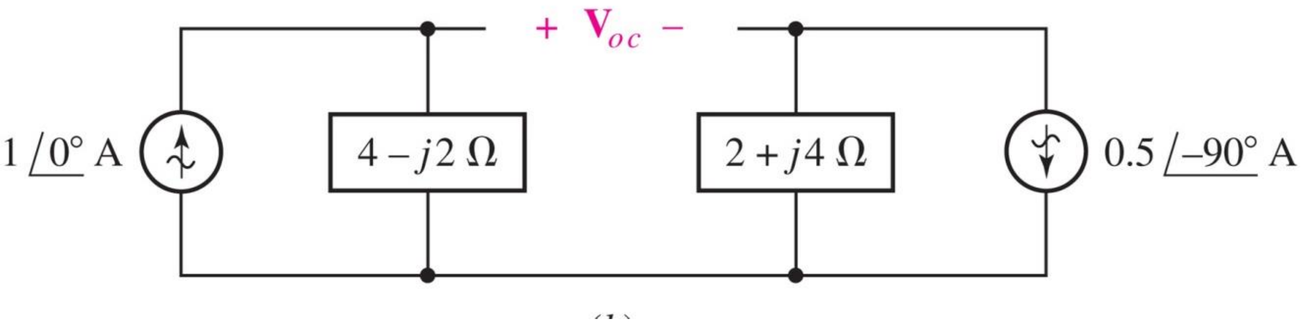


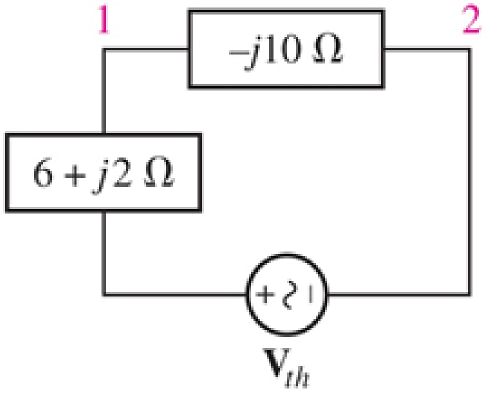
Exercício: Equivalente de Thévenin

Determine o equivalente de Thevenin visto pela impedância de *–j10Ω* do circuito abaixo e use-o para calcular V_1.



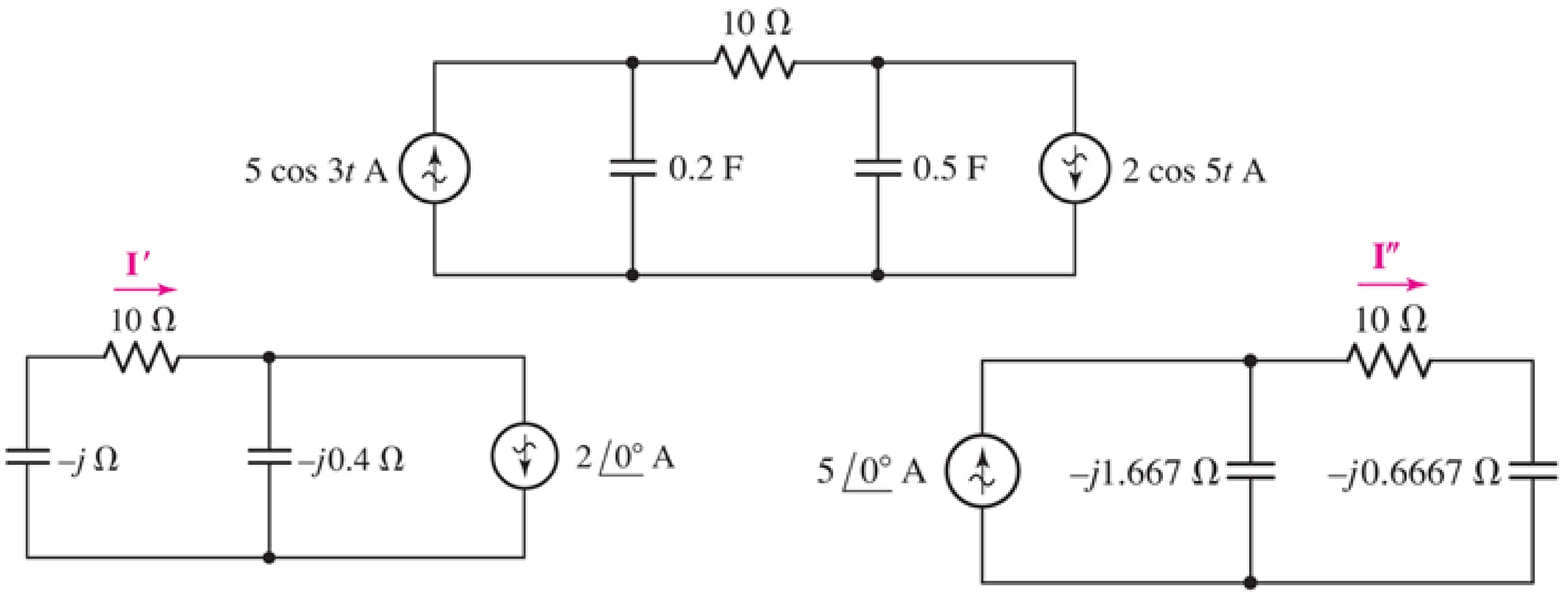






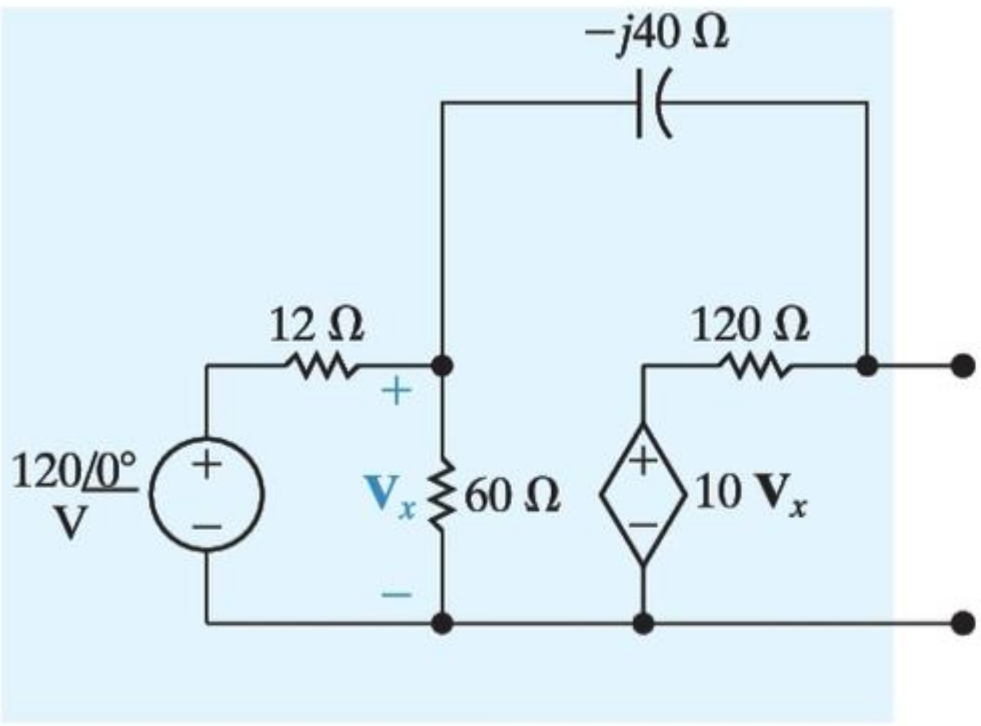
Exercício:

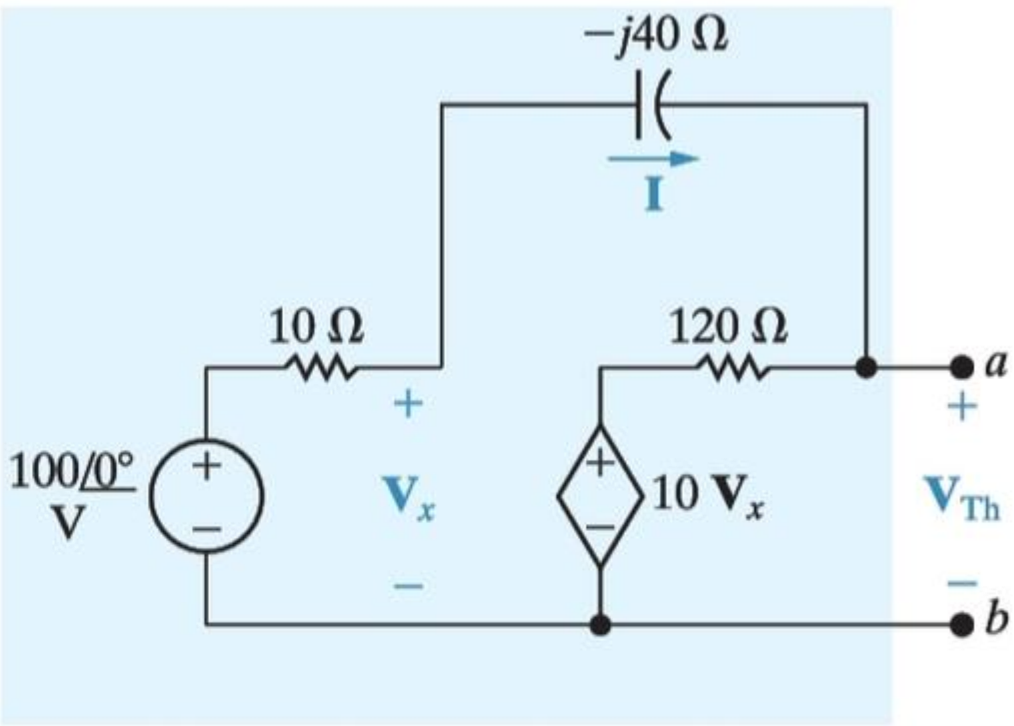
Determine a potência dissipada pelo resistor de 10 Ω no circuito abaixo:



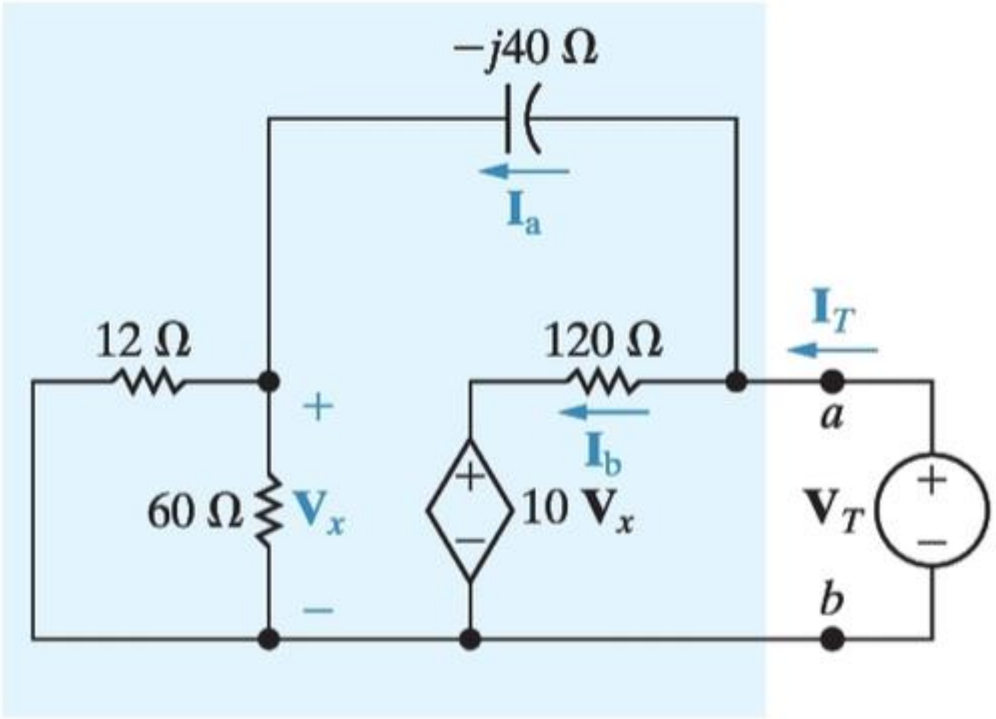
Exercício:

Determine o circuito equivalente de Thévenin em relação aos terminais a, b, para o circuito mostrado abaixo;

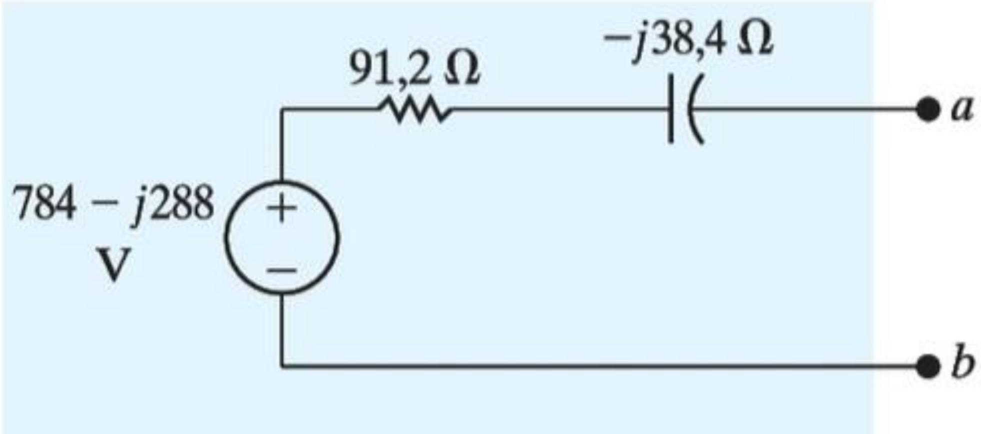




Exercício (continuação):



Circuito para calcular a impedância equivalente de Thévenin



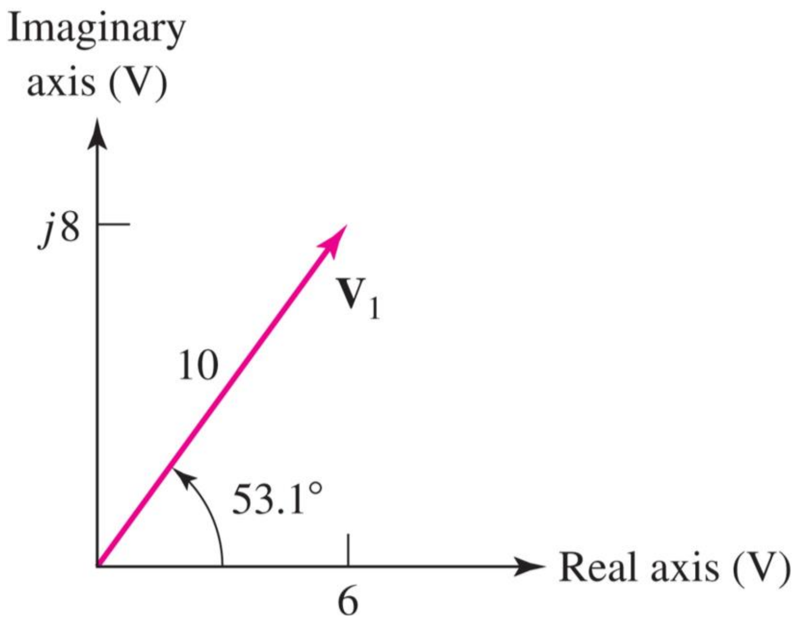
Equivalente de Thévenin

Diagramas Fasoriais

- Um **diagrama fasorial** mostra a magnitude e o angulo de fase de cada grandeza fasorial no plano dos números complexos.
- Os **ângulos de fase** são medidos em sentido anti-horário em relação ao eixo real positivo e os módulos são medidos a partir da origem do sistema de coordenadas.
- Localizar fasores no **plano dos números complexos** pode ser útil para verificar cálculos feitos em calculadoras de bolso.

Diagrama Fasorial

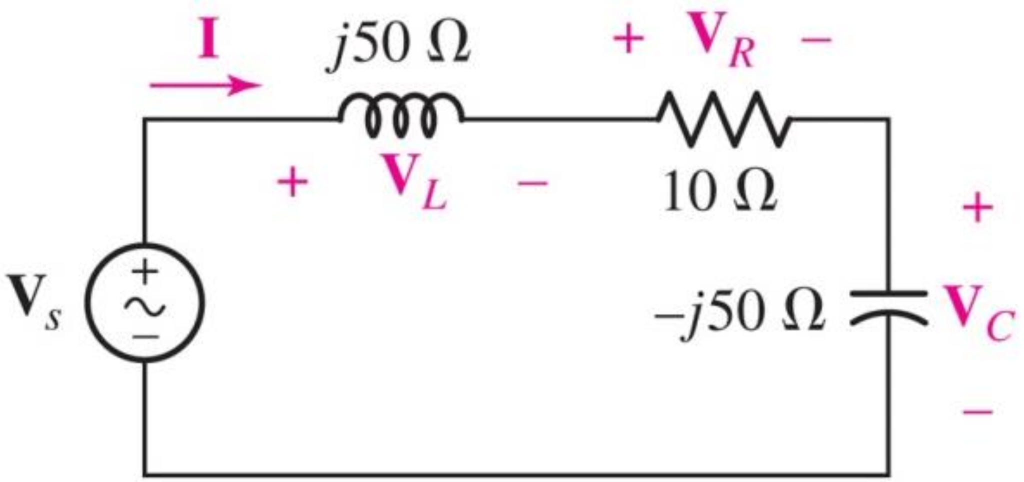
- O fasor no domínio da frequência aparece no diagrama fasorial, e a sua transformação para o domínio do tempo é feita ao permitir-se que o fasor gire no sentido anti-horário com uma velocidade de ω rad/s e ao visualizar-se a sua projeção no eixo real.



- A seta que representa o fasor V no diagrama fasorial é como uma fotografia, tirada em $\omega t = 0$, de uma seta giratória cuja projeção no eixo real é a tensão instantânea v(t).

Exercício: Diagrama Fasorial

Se assumirmos que **I**=1$\underline{|0^\circ}$ A



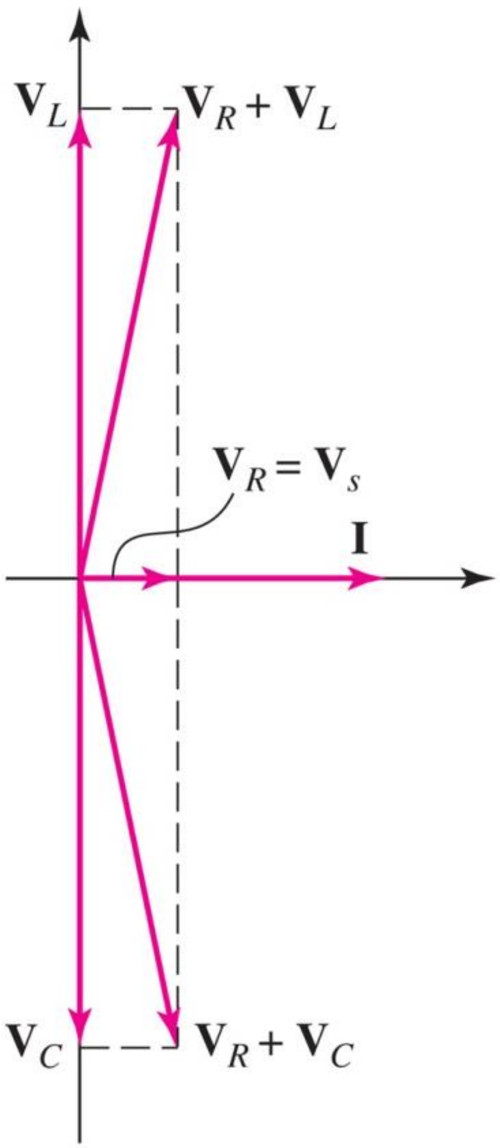


Diagrama Fasorial em Circuito RLC paralelo

Construa um diagrama fasorial mostrando I_R, I_L e I_C no circuito da Figura. Combinando estas correntes, determine o ângulo de avanço entre I_s e os fasores I_R, I_C e I_x.

Assumimos que $\boldsymbol{V} = 1\,\underline{/0^\circ}\ V$, por questão de simplicidade