Modelo lineal.

PRÁCTICA 0

Clase 1.

Vectores y matrices:

Simbolizaremos

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ como un vector columna

(x^T será un vector fila)

A, B matrices $\in \mathbb{R}^{n \times m}$

Propiedades:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^T = \sum_{i=1}^{k} A_i^T$
3. $(A \cdot B)^T = B^T A^T$
4. $\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right)^T = A_k^T A_{k-1}^T \dots A_1^T$

Se dice que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica si $A = A^T$

Traza $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Propiedades:

1. $Tr(A) = Tr(A^T)$
2. $Tr\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Tr(A_i)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$
4. $Tr(kA) = k\, Tr(A)$
5. $Tr(S^{-1} A S) = Tr(A)$
6. $x^T A x = x^T A^T x$
7. $x^T B x = Tr(x^T B x)$
8. $Tr(C x x^T) = x^T C x$

Muy ÚTIL!!

ÚTIL: si $k \in \mathbb{R} \rightarrow Tr(k) = k$

Probemos alguno fácil:

2) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.

Llamamos $(A)_{ij} = a_{ij}$

$\rightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $Tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = Tr(A) + Tr(B)$

5) $Tr(S^{-1} A S) \underset{\text{por } 3}{=} Tr(\underbrace{S S^{-1}}_{I} A) = Tr(A)$

Inversa A una matriz cuadrada de orden n

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ (A no singular).

Propiedades:

1. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. A simétrica $\rightarrow$ A^{-1} simétrica
5. A no singular $\leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Rango $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Propiedades:

1. $rg(A) \leq \min(n, p)$
2. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $rg(A) = n \rightarrow \exists A^{-1}$
3. $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$
4. $rg(A) = rg(A^T) = rg(A^T A) = rg(A A^T)$
5. Si P y Q son no singulares, $rg(PAQ) = rg(A)$

$rg(A) = rg_c(A) = rg_f(A)$

Cant. de filas o columnas L.I. de A

Probar estas propiedades es más difícil.

Algunas cosas que serán útil:

[Teorema de la dimensión: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
entonces $\dim Nu(A) + rg(A) = n$]

Probamos propiedades 3 y 4

Para probar el 3 necesitamos entender quien es A B. Sup $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{mp} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{n1} & \ddots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ b_{m1} & \ddots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

quien sería la columna j de A.B.

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{h=1}^{m} a_{ih} \cdot b_{hj}$$

$$Col_j(AB) = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{m} a_{1h}\, b_{hj} \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^{m} a_{nh} \cdot b_{hj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdot b_{1j} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} b_{2j} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} b_{mj}$$

→ las columnas de A.B son una combinación lineal de las columnas de A.

De la misma forma se puede probar que las filas de AB son una CL de las filas de B

¿De que me sirve esto? Bueno:

$$rg(AB) = rg_F(AB) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por ser CL} \\ \text{de las filas de B}}}{\leq} rg_F(B) = rg(B)$$

También

$$rg(AB) = rg_C(AB) \leq rg_C(A) = rg(A)$$

$$\rightarrow \quad rg(AB) \leq rg(B) \quad y \quad rg(AB) \leq rg(A)$$

$$\Rightarrow rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$$

Ahora probemos el 4.

Sabemos que $rg(A) = rg_C(A) = rg_F(A)$.

Entonces: $rg(A) = rg_C(A) = rg_F(A^T) = rg(A^T)$

(esa es la fácil, ahora la difícil)

$$rg(A^TA) \leq \min(rg(A^T), rg(A)) = \min(rg(A), rg(A)) = rg(A)$$

Pero necesito probar que son iguales. Uso el teorema de la dimensión.

$$rg(A) + \dim Nu(A) = m \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$rg(A^TA) + \dim Nu(A^TA) = m \qquad A^TA \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Si pruebo que la dim de los núcleos son iguales entonces los rangos son iguales.

Sup $x_0 \in Nu(A) \Rightarrow Ax_0 = 0 \Rightarrow A^TAx_0 = 0 \Rightarrow x_0 \in Nu(A^TA)$

$$\rightarrow Nu(A) \subseteq Nu(A^TA).$$

Sup $z_0 \in Nu(A^TA) \Rightarrow A^TAz_0 = 0$, ¿es cierto que $A\cdot z_0 = 0$?

Supongamos que no. Entonces $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Abs}}}{\|A\cdot z_0\|^2 > 0}$, pero

$\|A\cdot z_0\|^2 = z_0^T A^T A z_0 = z_0^T\cdot 0 = 0$, Abs $\rightarrow z_0 \in Nu(A)$

Scanned with CamScanner

Entonces $Nu(A^TA) \subseteq Nu(A) \rightarrow Nu(A^TA) = Nu(A)$

Sus dim serán iguales, por lo tanto

$$rg(A^TA) = rg(A)$$

Inversa generalizada

$A^- \,/\, AA^-A = A$

(existe siempre)

Si A es no singular $\rightarrow A^- = A^{-1}$

Si $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ $\quad rg(X) = p < n, \quad X^- = (X^TX)^{-1}X^T$

Producto interno

x e $y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = x^Ty = y^Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Propiedades:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
4. $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

x e y son $\perp$ si $\langle x, y \rangle = 0$

Sean $v_1, \dots v_k$ $\perp$ dos a dos en Ω

$$\rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2$$

Proyección ortogonal

Dado el vector y, se define el vector proyección y sobre x $(Proy(y|x))$ como $\hat{y}$

1. $\hat{y} = bx, \quad b \in \mathbb{R}$
2. $y - \hat{y}$ es $\perp$ a x, $\quad \langle \hat{y}, x \rangle = \langle y, x \rangle$

$$\hat{y} = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ \dfrac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} \cdot y & \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

Sean $v_1, .. v_k$ vectores que determinan una base ortogonal de V, $Proy(y|V) = \sum_{i=1}^{k} Proy(y|v_i)$

Matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A^T A = A A^T = I$$

1. A y B ortogonales $\rightarrow$ AB es ortogonal
2. $|\det(A)| = 1$
3. Las filas (col.) de A son ortonormales

Matriz idempotente: $P^2 = P$

Matriz de proyección: Idemp. y simétrica

Propiedades:

1. Todas las matrices idempotentes, salvo I, son sing.
2. Si P es idemp. $\rightarrow$ $(I - P)$ también
3. Si P es de proyección, $rg(P) = tr(P)$

Autovalores y autovectores

Sea A matriz cuadrada de orden n, $\lambda \in \mathbb{R}$

$v \in \mathbb{R}^n$, $Av = \lambda v \leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

λ autovalores, v autovectores asociados.

1. $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. λ autov. de A $\rightarrow$ λ^k autov. de A^k
3. A no singular y λ autov. de A $\rightarrow$ λ^{-1} autovalor de A^{-1}
4. λ autov. de A $\rightarrow$ $k\lambda$ autovalor de kA

NOTA

Matriz Simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. A tiene n autovalores reales (no neces. $\neq$)
2. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow v_1 \perp v_2$
3. $rg(A)$ = nº de autovalores no nulos de A

Descomposición espectral

$\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $U = (u_1, \ldots u_n)$ ortonormales

$\rightarrow AU = U\Lambda$, $U^T U = I$, $U^T A U = \Lambda$

$\rightarrow A = U \Lambda U^T$ y $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$

1. Si P es de proyección, $rg(P) = r \Leftrightarrow$ r autovalores $= 1$, $n-r$ autov. $= 0$
2. Si A es ortogonal y λ autovector, $1/\lambda$ tmb.

FORMAS cuadráticas

A simétrica de orden n y $x \in \mathbb{R}^n$

$\rightarrow x^T A x$ se llama forma cuadrática

A semidef. pos si $x^T A x \geq 0 \ \forall x$

A def pos. si $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0$

EJ. 11 de la práctica 0

1. Los λ de una matriz semidef. pos. son no negativos
2. " " " def. pos. son positivos $\rightarrow$ es No singular
3. A semidef. pos y $rg(A) = r \Leftrightarrow \exists R, rg(R) = r$ tq $A = RR'$
4. Si $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $rg(X) = p \rightarrow X^T X$ es def. pos.
5. Si A es def. pos., A^{-1} también, y $rg(CAC') = rg(A)$

Desarrollos útiles

- Si A es cuadrada de orden n, no singular y $x \in \mathbb{R}^n$

$$(A \pm x x^T)^{-1} = A^{-1} \mp \frac{A^{-1} x x^T A^{-1}}{1 \pm x^T A^{-1} x}$$

- $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times q}$ simétricas

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |D| \cdot |A - BD^{-1}C| & \text{si } \exists D^{-1} \\ |A| \cdot |D - CA^{-1}B| & \text{si } \exists A^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + FE^{-1}F^T & -FE^{-1} \\ -E^{-1}F^T & E^{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} E = D - B^T A^{-1} B \\ F = A^{-1} B \end{array}$$

Descomposición de Cholesky

Sea $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ simétrica, $\exists C$ triang. inf. tq $A = CC^T$

- (Para resolver el ej 10)

Sea G la inversa generalizada de X^TX

1. G^T es una inv. gralizada de X^TX
2. GX^T " " " X
3. XGX^T es invariante por G
4. XGX^T es simétrica.

si $X^TXP = X^TXQ \longrightarrow XP = XQ$

si $PX^TX = QX^TX \longrightarrow PX^T = QX^T$