CAPÍTULO 1

Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Muitas vezes na Ciência, na Administração e na Matemática, a informação é organizada em linhas e colunas, formando agrupamentos retangulares denominados "matrizes". Com frequência, essas matrizes aparecem como tabelas de dados numéricos que surgem em observações físicas, mas também ocorrem em vários contextos matemáticos. Por exemplo, veremos neste capítulo que toda a informação necessária para resolver um sistema de equações tal como

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

está encorpada na matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e que a solução do sistema pode ser obtida efetuando operações apropriadas nessa matriz. Isso é particularmente importante no desenvolvimento de programas de computador para resolver sistemas de equações lineares, porque os computadores são muito bons para manipular tabelas de informações numéricas. Contudo, as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistemas de equações; elas também podem ser vistas como objetos matemáticos de vida própria, existindo uma teoria rica e importante associada a elas, que tem uma grande variedade de aplicações práticas. É o estudo de matrizes e tópicos relacionados que constitui a área matemática denominada "Álgebra Linear". Neste capítulo, começamos nosso estudo de matrizes.

1.1 Introdução aos sistemas de equações lineares

Os sistemas de equações lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos estudados neste livro. Nesta primeira seção, introduzimos alguma terminologia básica e discutimos um método para resolver tais sistemas.

Equações lineares

Lembre que uma reta num sistema bidimensional de coordenadas retangulares xy pode ser representada por uma equação da forma

$$ax + by = c \quad (a \text{ e } b \text{ não ambos iguais a } 0)$$

e que um plano num sistema tridimensional de coordenadas retangulares xyz pode ser representado por uma equação da forma

$$ax + by + cz = d \quad (a, b \text{ e } c \text{ não todos iguais a } 0)$$

Esses são exemplos de "equações lineares", a primeira sendo uma equação linear nas variáveis x e y, e a segunda, uma equação linear nas variáveis x, y e z. Mais geralmente, definimos uma ***equação linear*** nas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes, sendo que nem todos os a são nulos. Nos casos especiais em que $n = 2$ ou $n = 3$, costumamos usar variáveis sem índices e escrevemos as equações lineares como

$$a_1x + a_2y = b \quad (a_1, a_2 \text{ não ambos iguais a } 0) \tag{2}$$

$$a_1x + a_2y + a_3z = b \quad (a_1, a_2, a_3 \text{ não todos iguais a } 0) \tag{3}$$

No caso especial em que $b = 0$, a Equação (1) tem a forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{4}$$

que é denominada ***equação linear homogênea*** nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

► **EXEMPLO 1 Equações lineares**

Observe que um sistema linear não envolve produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem, por exemplo, como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. As equações seguintes são lineares

$$x + 3y = 7 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x - y + 3z = -1 \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

As seguintes não são lineares.

$$x + 3y^2 = 4 \qquad 3x + 2y - xy = 5$$
$$\operatorname{sen} x + y = 0 \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$ ◄

Um conjunto finito de equações lineares é denominado um ***sistema de equações lineares*** ou, simplesmente, um ***sistema linear***. As variáveis são denominadas ***incógnitas***. Por exemplo, o sistema (5) a seguir tem incógnitas x e y, e o sistema (6) tem incógnitas x_1, x_2 e x_3.

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned} \tag{5-6}$$

Um sistema linear arbitrário de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_2 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_1 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{7}
$$

O índice duplo dos coeficientes a_{ij} das incógnitas dá sua posição no sistema. O primeiro índice indica a equação em que ocorre o coeficiente, e o segundo indica qual é a incógnita que está sendo multiplicada. Assim, a_{12} está na primeira equação e multiplica x_2.

Uma ***solução*** de um sistema nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ para os quais a substituição

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

faz de cada equação uma afirmação verdadeira. Por exemplo, o sistema em (5) tem a solução

$$x = 1, \quad y = -2$$

e o sistema em (6) tem a solução

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$$

Essas soluções podem ser escritas mais sucintamente como

$$(1, -2) \quad \text{e} \quad (1, 2, -1)$$

em que omitimos os nomes das variáveis. Essa notação nos permite interpretar essas soluções geometricamente como pontos nos espaços bi e tridimensionais. De modo mais geral, uma solução

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

de um sistema linear em n incógnitas pode ser escrita como

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

que é denominada uma ***ênupla ordenada***. Com essa notação, fica entendido que todas as variáveis aparecem na mesma ordem em cada equação. Se $n = 2$, então a ênupla é denominada ***par ordenado*** e, se $n = 3$, dizemos que a ênupla é um ***terno ordenado***.

Sistemas lineares em duas e três incógnitas

Os sistemas lineares em duas incógnitas aparecem relacionados com interseção de retas. Por exemplo, considere o sistema linear

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y &= c_1 \\
a_2x + b_2y &= c_2
\end{aligned}
$$

em que os gráficos das equações são retas no plano xy. Cada solução (x, y) desse sistema corresponde a um ponto de interseção das retas, de modo que há três possibilidades (Figura 1.1.1).

1. As retas podem ser paralelas e distintas, caso em que não há interseção e, consequentemente, não existe solução.
2. As retas podem intersectar em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
3. As retas podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de pontos de interseção (os pontos da reta comum) e, consequentemente, uma infinidade de soluções.

Em geral, dizemos que um sistema linear é ***consistente*** se possuir pelo menos uma solução e ***inconsistente*** se não tiver solução. Assim, um sistema linear *consistente* de duas equações em duas incógnitas tem uma solução ou uma infinidade de soluções, não

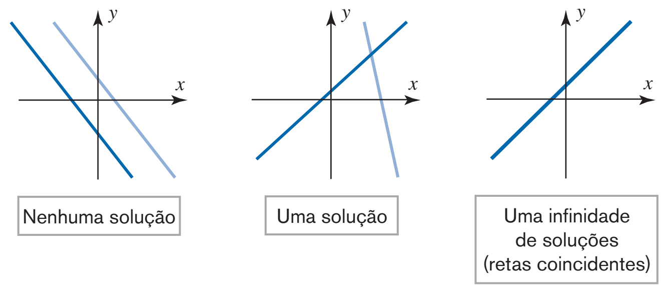


Figura 1.1.1

havendo outra possibilidade. O mesmo vale para um sistema linear de três equações em três incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

em que os gráficos das equações são planos. As soluções do sistema, se as houver, correspondem aos pontos em que os três planos se intersectam, de modo que, novamente, vemos que há somente três possibilidades: nenhuma solução, uma solução ou uma infinidade de soluções. (Figura 1.1.2).

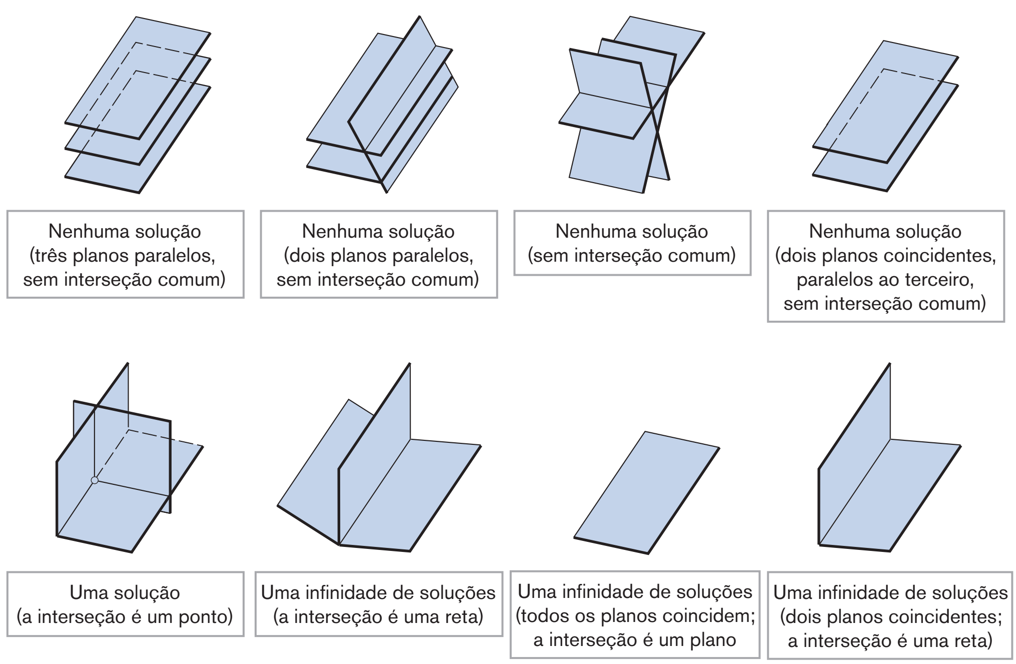


Figura 1.1.2

Mais adiante, provaremos que nossas observações sobre o número de soluções de sistemas de duas equações lineares em duas incógnitas e de sistemas de três equações lineares em três incógnitas são válidas em geral, como segue.

Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções. Não existem outras possibilidades.

► EXEMPLO 2 Um sistema linear com uma solução

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar x da segunda equação somando -2 vezes a primeira equação à segunda. Isso fornece o sistema simplificado

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3y &= 4 \end{aligned}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{4}{3}$ e substituir esse valor na primeira equação fornece $x = 1 + y = \frac{7}{3}$. Assim, o sistema tem a solução única

$$x = \tfrac{7}{3}, \quad y = \tfrac{4}{3}$$

Geometricamente, isso significa que as retas representadas pelas equações do sistema intersectam no único ponto $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Deixamos para o leitor conferir isso traçando os gráficos das retas.

► EXEMPLO 3 Um sistema linear sem soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar x da segunda equação somando -3 vezes a primeira equação à segunda. Isso fornece o sistema simplificado

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= -6 \end{aligned}$$

A segunda equação é contraditória, de modo que o sistema dado não tem solução. Geometricamente, isso significa que as retas correspondentes às equações do sistema original são paralelas e distintas. Deixamos para o leitor conferir isso traçando os gráficos das retas ou, então, mostrar que as retas têm a mesma inclinação, mas cortam o eixo y em pontos distintos.

► EXEMPLO 4 Um sistema linear com uma infinidade de soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar x da segunda equação somando -4 vezes a primeira equação à segunda. Isso fornece o sistema simplificado

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

A segunda equação não impõe quaisquer restrições a x e y e pode, portanto, ser omitida. Assim, as soluções do sistema são os valores de x e y que satisfazem a única equação

$$4x - 2y = 1 \tag{8}$$

Geometricamente, isso significa que as retas correspondentes às duas equações do sistema original são coincidentes. Uma maneira de descrever o conjunto de soluções é resolver

No Exemplo 4, também poderíamos ter obtido equações paramétricas das soluções resolvendo (8) para y em termos de x e tomando $x = t$ como o parâmetro. As equações paramétricas resultantes teriam parecido diferentes, mas elas definem o mesmo conjunto de soluções.

essa equação para x em termos de y, obtendo $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y$ e, então, associar a y um valor arbitrário t (denominado ***parâmetro***). Isso nos permite expressar a solução pelo par de equações (denominadas ***equações paramétricas***)

$$x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}t, \quad y = t$$

Podemos obter soluções numéricas específicas dessas equações substituindo o parâmetro por valores numéricos. Por exemplo, $t = 0$ dá a solução $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $t = 1$ dá a solução $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ e $t = -1$ dá a solução $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$. O leitor pode confirmar que essas são soluções, substituindo as coordenadas nas equações dadas.

► EXEMPLO 5 Um sistema linear com uma infinidade de soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

Solução Esse sistema pode ser resolvido mentalmente, pois a segunda e a terceira equações são múltiplos da primeira. Geometricamente, isso significa que os três planos coincidem e que aqueles valores de x, y e z que satisfazem a equação

$$x - y + 2z = 5 \tag{9}$$

automaticamente satisfazem as três equações. Assim, basta encontrar as soluções de (9). Isso pode ser feito resolvendo (9) para x em termos de y e z, depois atribuir valores arbitrários r e s (parâmetros) a essas duas variáveis e, então, expressar a solução por meio das três equações paramétricas

$$x = 5 + r - 2s, \quad y = r, \quad z = s$$

Soluções específicas podem ser obtidas escolhendo valores numéricos para os parâmetros r e s. Por exemplo, tomando $r = 1$ e $s = 0$, dá a solução (6, 1, 0). ◄

Matrizes aumentadas e operações elementares com linhas

À medida que cresce o número de equações e de incógnitas num sistema linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução. As contas que precisamos fazer podem ficar mais tratáveis simplificando a notação e padronizando os procedimentos. Por exemplo, mantendo na memória a localização das somas, das variáveis e das igualdades no sistema linear

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

podemos abreviar a escrita do sistema escrevendo apenas a tabela retangular de números

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Como já observamos na introdução, o termo "matriz" é utilizado na Matemática para denotar uma coleção retangular de números. Em outras seções, estudaremos essas matrizes detalhadamente, mas por enquanto só estaremos interessados em matrizes aumentadas de sistemas lineares.

denominada ***matriz aumentada*** do sistema. Por exemplo, a matriz aumentada do sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{é} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

O método básico de resolver um sistema de equações lineares é efetuar operações algébricas no sistema que não alterem seu conjunto de soluções e que produzam uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções. As operações típicas são as seguintes.

1. Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas equações entre si.
3. Somar uma constante vezes uma equação a uma outra equação.

Como as linhas (horizontais) de uma matriz aumentada correspondem às equações no sistema associado, essas três operações correspondem às seguintes operações nas linhas da matriz aumentada.

1. Multiplicar uma linha inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas linhas entre si.
3. Somar uma constante vezes uma linha a uma outra linha.

Essas operações são denominadas ***operações elementares com linhas*** de uma matriz.

No exemplo seguinte, ilustramos como usar as operações elementares com as linhas de uma matriz aumentada para resolver sistemas de equações lineares em três incógnitas. Como na próxima seção desenvolveremos um procedimento sistemático de resolução de sistemas, não é preciso ficar preocupado sobre o porquê dos passos tomados nesse exemplo. O objetivo aqui deveria ser simplesmente entender as contas.

▶ EXEMPLO 6 Usando operações elementares com linhas

Na coluna da esquerda, resolvemos um sistema de equações lineares operando nas equações do sistema e, na coluna da direita, resolvemos o mesmo sistema operando nas linhas da matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

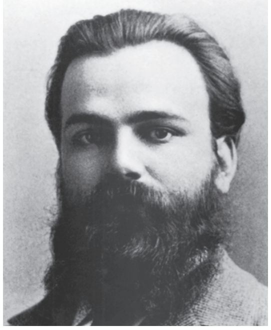
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos -2 vezes a primeira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Somamos -2 vezes a primeira linha à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$



Maxime Bôcher (1867–1918)

Nota histórica O primeiro uso conhecido de matrizes aumentadas apareceu entre 200 e 100 a.C. num manuscrito chinês intitulado *Nove Capítulos de Arte Matemática*. Os coeficientes foram arranjados em colunas e não em linhas, como hoje, mas impressionantemente o sistema foi resolvido efetuando uma sucessão de operações com colunas. O uso do termo *matriz aumentada* parece te sido introduzido pelo matemático norte-americano Maxime Bôcher em seu livro *Introdução à Álgebra Superior*, publicado em 1907. Além de ter sido um pesquisador matemático destacado e um conhecedor profundo de latim, Química, Filosofia, Zoologia, Geografia, Meteorologia, arte e música, ele foi um excelente expositor de Matemática, cujos textos elementares eram muito apreciados pelos estudantes e continuam sendo procurados até hoje.

[Imagem: cortesia da American Mathematical Society]

Somamos -3 vezes a primeira equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad 2z &= \quad 9 \\ 2y - \quad 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Somamos -3 vezes a primeira linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad 2z &= \quad 9 \\ y - \quad \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplicamos a segunda linha por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Somamos -3 vezes a segunda equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= \quad 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Somamos -3 vezes a segunda linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a terceira equação por -2 para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= \quad 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= \quad 3 \end{aligned}$$

Multiplicamos a terceira linha por -2 para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Somamos -1 vez a segunda equação à primeira para obter

$$\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{11}{2}z &= \quad \tfrac{35}{2} \\ y - \quad \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= \quad 3 \end{aligned}$$

Somamos -1 vez a segunda linha à primeira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Somamos $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira equação à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x \qquad\quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Somamos $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira linha à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ é, agora, evidente. ◀

Revisão de conceitos

- Equação linear
- Equação linear homogênea
- Sistema de equações lineares
- Solução de um sistema linear
- Ênupla ordenada
- Sistema linear consistente
- Sistema linear inconsistente
- Parâmetro
- Equações paramétricas
- Matriz aumentada
- Operações elementares com linhas

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma dada equação é linear.
- Determinar se uma dada ênupla é uma solução de um sistema linear.
- Encontrar a matriz aumentada de um sistema linear.
- Encontrar o sistema linear correspondente a uma dada matriz aumentada.
- Efetuar operações elementares com as linhas de um sistema linear e as correspondentes nas linhas da matriz aumentada.
- Determinar se um sistema linear é consistente ou inconsistente.
- Encontrar o conjunto das soluções de um sistema linear consistente.

Conjunto de exercícios 1.1

1. Em cada parte, determine se a equação é linear em x_1, x_2 e x_3.

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (b) $x_1 + 3x^2 + x_1x_3 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$ (d) $x_1^{-2} + x^2 + 8x_3 = 5$

(e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$

(f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 2 \\ 3x - \frac{2}{y} &= 0 \end{aligned}$$ (b) $$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

3. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x_1 + x_3) &= \sqrt{5} \\ e^{-2x_2-2x_4} &= \frac{1}{x_2} \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3x_4 &= 3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$ (d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

4. Para cada sistema do Exercício 2 que for linear, determine se é consistente.

5. Para cada sistema do Exercício 3 que for linear, determine se é consistente.

6. Escreva um sistema de equações lineares constituído de três equações em três incógnitas com

(a) nenhuma solução

(b) exatamente uma solução

(c) uma infinidade de soluções

7. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) $(3, 1, 1)$ (b) $(3, -1, 1)$ (c) $(13, 5, 2)$

(d) $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ (e) $(17, 7, 5)$

8. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(a) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$ (b) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$ (c) $(5, 8, 1)$

(d) $\left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (e) $\left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, 2\right)$

9. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $7x - 5y = 3$

(b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

10. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

11. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -6 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} -2x_1 &= 6 \\ 3x_1 &= 8 \\ 9x_1 &= -3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_2 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$

(d) $x_1 - x_5 = 7$

14. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

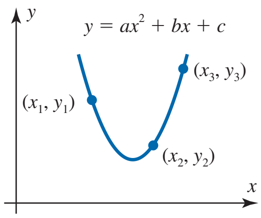
(a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$

15. A curva $y = ax^2 + bx + c$ mostrada na figura passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Mostre que os coeficientes a, b e c são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$



◄ **Figura Ex-15**

16. Explique por que cada uma das operações elementares com linhas não afeta o conjunto das soluções de um sistema linear.

17. Mostre que se as equações lineares

$$x_1 + kx_2 = c \quad \text{e} \quad x_1 + lx_2 = d$$

têm o mesmo conjunto de soluções, então as duas equações são idênticas (isto é, $k = l$ e $c = d$).

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um sistema linear cujas equações são todas homogêneas deve ser consistente.

(b) Multiplicar uma equação inteira por zero é uma operação elementar com as linhas aceitável.

(c) O sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

não pode ter uma única solução, independentemente do valor de k.

(d) Uma equação linear só, com duas ou mais incógnitas, sempre deve ter uma infinidade de soluções.

(e) Se o número de equações de um sistema linear exceder o número de incógnitas, então o sistema deve ser inconsistente.

(f) Se cada equação de um sistema linear consistente for multiplicada por uma constante c, então todas as soluções do novo sistema podem ser obtidas multiplicando as soluções do sistema original por c.

(g) As operações elementares com linhas permitem que uma equação de um sistema linear seja subtraída de uma outra.

(h) O sistema linear de matriz aumentada correspondente

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é consistente.

1.2 Eliminação gaussiana

Nesta seção, desenvolvemos um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares. O procedimento é baseado na ideia de efetuar certas operações nas linhas da matriz aumentada que a simplifiquem até uma forma em que a solução do sistema possa ser visualizada.

Considerações sobre a resolução de sistemas lineares

Quando consideramos métodos para resolver sistemas de equações lineares, é importante distinguir entre sistemas grandes, que precisam ser resolvidos por computador, e sistemas pequenos, que podem ser resolvidos a mão. Por exemplo, há muitas aplicações que levam a sistemas em milhares e até milhões de incógnitas. Esses sistemas grandes requerem técnicas especiais para tratar dos problemas de tamanho de memória, erros de arredondamento, tempo de solução e assim por diante. Tais técnicas são estudadas na área de ***Análise Numérica*** e serão apenas tocadas neste texto Contudo, quase todos os métodos que são utilizados com sistemas grandes têm por base as ideias desenvolvidas nesta seção.

Formas escalonadas

No Exemplo 6 da seção anterior, resolvemos um sistema linear nas incógnitas x, y e z reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a partir da qual ficou evidente a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Isso é um exemplo de uma matriz que está em ***forma escalonada reduzida por linhas***. Para ser dessa forma, um matriz deve ter as propriedades seguintes.

1. Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é um 1. Dizemos que esse número 1 é um ***pivô***.
2. Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.
4. Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que tem as três primeiras propriedades está em ***forma escalonada por linhas***, ou simplesmente, em ***forma escalonada***. (Assim, uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas necessariamente está em forma escalonada, mas não reciprocamente.)

▶ EXEMPLO 1 Formas escalonada e escalonada reduzida por linhas

As matrizes a seguir estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes a seguir estão em forma escalonada, mas não reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 2 Mais sobre formas escalonada e escalonada reduzida por linhas

Como ilustra o exemplo anterior, uma matriz em forma escalonada tem zeros abaixo de cada pivô, enquanto uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas tem zeros abaixo *e acima* de cada pivô. Assim, colocando qualquer número real no lugar dos asteriscos, todas as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Todas as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$ ◀

Se a matriz aumentada de um sistema de equações lineares for colocada em forma escalonada *reduzida* por linhas por meio de uma sequência de operações elementares nas linhas, então o conjunto de soluções está visível ou pode ser obtido convertendo certas equações lineares à forma paramétrica. Vejamos alguns exemplos.

▶ EXEMPLO 3 Solução única

Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 tenha sido reduzida por operações elementaresa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Essa matriz está em forma escalonada reduzida por linhas e corresponde às equações

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad\qquad &= -1 \\ x_3 \qquad &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

No Exemplo 3, podemos, também, expressar a solução mais sucintamente como a 4-upla $(3, -1, 0, 5)$.

Assim, o sistema tem uma única solução, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$.

▶ EXEMPLO 4 Sistemas lineares em três incógnitas

Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x, y e z tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução (*a*) A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$0x + 0y + 0z = 1$$

O sistema é inconsistente, porque essa equação não é satisfeita por valor algum de x, y e z.

Solução (*b*) A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$0x + 0y + 0z = 0$$

Essa equação pode ser omitida, porque não impõe restrições sobre x, y e z; logo, o sistema linear correspondente à matriz aumentada é

$$\begin{aligned} x + 3z &= -1 \\ y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Como x e y correspondem a pivôs na matriz aumentada, dizemos que essas são as ***variáveis líderes***. As demais variáveis (nesse caso, só z) são ditas ***variáveis livres***. Resolvendo para as variáveis líderes em termos das variáveis livres, obtemos

$$\begin{aligned} x &= -1 - 3z \\ y &= 2 + 4z \end{aligned}$$

Dessas equações podemos ver que a variável livre z pode ser tratada como um parâmetro ao qual podemos atribuir um valor arbitrário t, que, então, determina os valores de x e y. Assim, o conjunto de soluções pode ser representado pelas equações paramétricas

$$x = -1 - 3\mathrm{t}, \quad y = 2 + 4t, \quad z = t$$

Substituindo vários valores de t nessas equações, podemos obter as várias soluções do sistema. Por exemplo, tomando $t = 0$, obtemos a solução

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 0$$

e tomando $t = 1$, obtemos a solução

$$x = -4, \quad y = 6, \quad z = 1$$

Solução (*c*) Conforme explicamos na parte (b), podemos omitir as equações correspondentes às linhas nulas, com o que o sistema linear associado à matriz aumentada consiste na única equação

$$x - 5y + z = 4 \tag{1}$$

a partir da qual vemos que o conjunto de soluções é um plano no espaço tridimensional. Embora (1) seja uma forma válida do conjunto de soluções, existem muitas aplicações nas quais é preferível dar as soluções em forma paramétrica. Podemos converter (1) à forma paramétrica resolvendo para a variável líder x em termos das variáveis livres y e z para obter

$$x = 4 + 5y - \mathrm{z}$$

A partir dessa equação, vemos que podemos atribuir quaisquer valores às variáveis livres, digamos, $y = s$, $z = t$, que, então, determinam o valor de x. Assim, o conjunto de soluções pode ser dado parametricamente por

$$x = 4 + 5s - t, \quad y = s, \quad z = t \quad ◀ \tag{2}$$

Fórmulas como (2), que expressam o conjunto das soluções de um sistema linear de forma paramétrica, têm um nome especial.

Os parâmetros de uma solução geral costumam ser denotados pelas letras r, s, t, ..., mas também podemos usar quaisquer letras que não entrem em conflito com os nomes das variáveis. Em sistemas com mais do que três incógnitas, é conveniente usar índices para os parâmetros, como $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

DEFINIÇÃO 1 Se um sistema linear tem uma infinidade de soluções, então um conjunto de equações paramétricas é denominado uma ***solução geral*** do sistema se, a partir dessas equações, puderem ser obtidas todas as soluções pela substituição dos parâmetros por valores numéricos.

Métodos de eliminação

Acabamos de ver como é fácil resolver um sistema de equações lineares tão logo sua matriz aumentada estiver em forma escalonada reduzida por linhas. Agora daremos um ***procedimento de eliminação*** passo a passo, que pode ser usado para reduzir qualquer matriz à forma escalonada reduzida. À medida que enunciamos cada passo, ilustramos a ideia reduzindo a matriz seguinte à forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Passo 1. Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda

Passo 2. Permutamos a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não nula ao topo da coluna encontrada no Passo 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Foram permutadas a primeira e a segunda linhas da matriz precedente.

Passo 3. Se a entrada que agora está no topo da coluna encontrada no Passo 1 é a, multiplicamos a primeira linha inteira por $1/a$ para introduzir um pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Passo 4. Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

-2 vezes a primeira linha da matriz precedente foi somada à terceira linha.

Passo 5. Agora escondemos a primeira linha da matriz e recomeçamos aplicando o Passo 1 à submatriz resultante. Continuamos dessa maneira até que *toda* a matriz esteja em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda da submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da submatriz foi multiplicada por $-\frac{1}{2}$ para introduzir um pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

-5 vezes a primeira linha da submatriz foi somada à segunda linha da submatriz para introduzir um zero debaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

A linha superior da submatriz foi tratada e retornamos ao Passo 1.

Coluna não nula mais à esquerda da nova submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A primeira (e única) linha da nova submatriz foi multiplicada por 2 para introduzir um pivô.

Agora *toda* a matriz está em forma escalonada. Para obter a forma escalonada reduzida por linhas, precisamos de mais um passo.

Passo 6. Começando com a última linha não nula e trabalhando para cima, somamos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\frac{7}{2}$ vezes a terceira linha da matriz precedente foi somada à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-6 vezes a terceira linha foi somada à primeira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5 vezes a segunda linha foi somada à primeira linha.

A última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas.

O procedimento (ou algoritmo) que acabamos de descrever, que reduz uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas, é denominado ***eliminação de Gauss-Jordan***. Esse algoritmo consiste em duas partes: uma ***fase para a frente***, ou ***direta***, na qual os zeros são introduzidos abaixo dos pivôs; e uma ***fase para trás***, ou ***inversa***, em que os zeros são

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Wilhelm Jordan (1842–1899)

Nota histórica Embora versões do método da eliminação gaussiana fossem conhecidas muito antes, o poder desse método só foi reconhecido quando o grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss o utilizou para calcular a órbita do asteroide Ceres a partir de dados muito limitados. O que aconteceu foi isso: em 1° de janeiro de 1801, o astrônomo siciliano Giuseppe Piazzi (1746–1826) observou um pequeno objeto celeste que ele acreditou que pudesse ser um "planeta que faltava". Ele designou o objeto por Ceres e fez um número limitado de medições sobre sua posição antes de perdê-lo de vista, dada sua proximidade ao Sol. Gauss tomou a si a tarefa de calcular a órbita a partir dos dados muito limitados com o procedimento que agora denominamos eliminação gaussiana. O trabalho de Gauss causou uma sensação quando Ceres reapareceu, um ano depois, na constelação Virgem, praticamente na posição exata predita por Gauss! O método foi subsequentemente popularizado pelo engenheiro alemão Wilhelm Jordan em seu livro de geodesia (a ciência de medir as formas terrestres), intitulado *Handbuch der Vermessungskunde*, publicado em 1888.

[Imagens: Coleção Granger (Gauss) e wikipedia (Jordan)]

introduzidos acima dos pivôs. Se usarmos somente a fase direta, então o procedimento, denominado ***eliminação gaussiana***, produz uma forma escalonada por linhas. Por exemplo, nos cálculos precedentes, obtivemos uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas no final do Passo 5.

▶ EXEMPLO 5 Eliminação de Gauss-Jordan

Resolva por eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \phantom{{}-2x_4} + 2x_5 \phantom{{}-3x_6} &= 0\\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1\\
5x_3 + 10x_4 \phantom{{}+4x_5} + 15x_6 &= 5\\
2x_1 + 6x_2 \phantom{{}-5x_3} + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}$$

Solução A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5\\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Somando -2 vezes a primeira linha à segunda e à quarta linhas, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5\\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por -1 e depois somando -5 vezes a nova segunda linha à terceira linha e -4 vezes a nova segunda linha à quarta linha, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Permutando as terceira e quarta linhas e então multiplicando a terceira linha da matriz resultante por $\frac{1}{6}$, dá a forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isso completa a fase direta, pois não há zeros abaixo dos pivôs.

Somando -3 vezes a terceira linha à segunda linha e depois somando 2 vezes a segunda linha da matriz resultante à primeira linha, obtemos a forma escalonada reduzida por linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isso completa a fase inversa, pois não há zeros acima dos pivôs.

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

> Observe que, na construção do sistema linear em (3), ignoramos a linha toda constituída de zeros na matriz aumentada correspondente. Por que podemos fazer isso?

Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, expressamos a solução geral do sistema parametricamente associando os valores arbitrários r, s e t às variáveis livres x_2, x_4 e x_5, respectivamente. Isso fornece

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3} \quad ◀$$

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema de equações lineares é dito ***homogêneo*** se os termos constantes são todos zero; ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Cada sistema de equações lineares homogêneo é consistente, pois todos esses sistemas têm $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ como uma solução. Essa solução é denominada ***solução trivial*** ou ***solução nula***; quaisquer outras solução, se as houver, são ditas ***não triviais***.

Como um sistema linear homogêneo sempre tem a solução trivial, só há duas possibilidades para suas soluções.

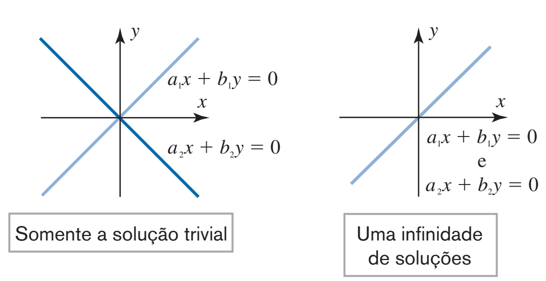
- O sistema tem somente a solução trivial.
- O sistema tem uma infinidade de soluções além da solução trivial.

No caso especial de um sistema linear homogêneo de duas equações em duas incógnitas, digamos

$$a_1x + b_1y = 0 \quad (\boldsymbol{a_1, b_1} \textbf{ não ambas nulas})$$

$$a_2x + b_2y = 0 \quad (\boldsymbol{a_2, b_2} \textbf{ não ambas nulas})$$

os gráficos das equações são retas pela origem, e a solução trivial corresponde ao ponto de corte na origem (Figura 1.2.1).



▶ **Figura 1.2.1**

Há um caso em que pode ser garantido que um sistema homogêneo tenha soluções não triviais, a saber, sempre que o sistema envolva mais incógnitas que equações. Para ver o motivo disso, considere o exemplo seguinte de quatro equações em seis incógnitas.

EXEMPLO 6 Um sistema homogêneo

Resolva o seguinte sistema homogêneo com eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0\\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0\\
5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 0\\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Solução Inicialmente, observe que os coeficientes das incógnitas desse sistema são iguais àqueles do Exemplo 5, ou seja, os dois sistemas diferem apenas pelas constantes do lado direito. A matriz aumentada do sistema homogêneo dado é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0\\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

que é igual à matriz aumentada do sistema do Exemplo 5, exceto pelos zeros na última coluna. Assim, a forma escalonada reduzida dessa matriz é igual à da matriz aumentada do Exemplo 5, exceto pela última coluna. Contudo, pensando um pouco, podemos concluir que uma coluna de zeros não é alterada por qualquer operação elementar com as linhas, de modo que a forma escalonada reduzida de (5) é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \qquad &= 0\\
x_3 + 2x_4 \qquad\qquad &= 0\\
x_6 &= 0
\end{aligned}$$

Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned}
x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5\\
x_3 &= -2x_4\\
x_6 &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Associando, agora, os valores arbitrários r, s e t às variáveis livres x_2, x_4 e x_5, respectivamente, podemos expressar o conjunto de soluções parametricamente por

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, x_6 = 0$$

Note que a solução trivial é obtida com $r = s = t = 0$. ◀

Variáveis livres em sistemas lineares homogêneos

O Exemplo 6 ilustra dois aspectos importantes sobre a resolução de sistemas lineares homogêneos.

1. Nenhuma operação elementar com as linhas altera uma coluna de zeros de uma matriz, de modo que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada de um sistema homogêneo tem uma coluna final de zeros. Isso implica que o sistema linear correspondente à forma escalonada reduzida é homogêneo, exatamente como o sistema original.
2. Quando construímos o sistema linear homogêneo correspondente à matriz aumentada (6), ignoramos a linha de zeros, porque a equação correspondente

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

não impõe condição alguma sobre as incógnitas. Assim, dependendo da forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada de um sistema linear homogêneo ter ou não alguma linha de zeros, o número de equações no sistema correspondente à forma escalonada reduzida é menor do que, ou igual a, o número de equações do sistema original.

Agora considere um sistema linear homogêneo em n incógnitas e suponha que a forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema tenha r linhas não nulas. Como cada linha não nula tem um pivô, e como a cada pivô corresponde uma variável líder, o sistema homogêneo correspondente à forma escalonada reduzida da matriz aumentada deve ter r variáveis líderes e $n - r$ variáveis livres. Assim, o sistema é da forma

$$\begin{array}{llll} x_{k_1} & & & + \sum(\ ) = 0 \\ & x_{k_2} & & + \sum(\ ) = 0 \\ & & \ddots & \quad \vdots \\ & & & x_{k_r} + \sum(\ ) = 0 \end{array} \tag{8}$$

em que, em cada equação, $\Sigma(\ )$ denota uma soma que envolve as variáveis livres, se houver [ver, por exemplo, (7)]. Resumindo, temos o resultado a seguir.

TEOREMA 1.2.1 Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos

Se um sistema linear homogêneo tiver n incógnitas e se a forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada tiver r linhas não nulas, então o sistema tem $n - r$ variáveis livres.

O Teorema 1.2.1 tem uma consequência importante para sistemas lineares homogêneos com mais incógnitas do que equações. Mais precisamente, se um sistema linear homogêneo tiver m equações em n incógnitas, e se $m < n$, então também é verdade que $r < n$ (por quê?). Nesse caso, o teorema implica que há pelo menos uma variável livre, e isso implica que o sistema tem uma infinidade de soluções. Assim, temos o resultado seguinte.

Note que o Teorema 1.2.2 é aplicável somente a sistemas homogêneos. Um sistema que *não é homogêneo* com mais incógnitas que equações não precisa ser consistente. No entanto, provaremos adiante que se um sistema não homogêneo com mais incógnitas do que equações for consistente, então o sistema terá uma infinidade de soluções.

TEOREMA 1.2.2 *Um sistema linear homogêneo com mais incógnitas que equações tem uma infinidade de soluções.*

Em retrospecto, poderíamos ter antecipado que o sistema homogêneo do Exemplo 6 tem uma infinidade de soluções, por ter quatro equações e seis incógnitas.

Eliminação gaussiana e retrossubstituição

A eliminação de Gauss-Jordan (redução à forma escalonada reduzida por linhas) é um procedimento útil com sistemas lineares pequenos que são resolvidos a mão (como a maioria dos sistemas deste texto). Contudo, com sistemas lineares grandes, que exigem utilização de computadores, em geral é mais eficiente usar a eliminação gaussiana (redução à forma escalonada por linhas), seguida por uma técnica conhecida por substituição inversa, ou ***retrossubstituição***, para completar o processo de resolução do sistema. O próximo exemplo ilustra essa ideia.

▶ EXEMPLO 7 O Exemplo 5 resolvido por retrossubstituição

Pelas contas do Exemplo 5, uma forma escalonada da matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema de equações correspondente

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad\quad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

procedemos como segue.

Passo 1. Resolva as equações para as variáveis líderes.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Passo 2. Começando com a equação de baixo e trabalhando para cima, substitua sucessivamente cada equação em todas as equações acima dela.

Substituindo $x_6 = \frac{1}{3}$ na segunda equação, dá

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Substituindo $x_3 = -2x_4$ na primeira equação, dá

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Passo 3. Atribua valores arbitrários às variáveis livres, se houver.

Atribuindo os valores arbitrários r, s e t a x_2, x_4 e x_5, respectivamente, a solução geral é dada pelas fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

Isso confere com a solução obtida no Exemplo 5.

► EXEMPLO 8

Suponha que as matrizes dadas sejam matrizes aumentadas de sistemas lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4. Todas essas matrizes estão em forma escalonada por linhas, mas não reduzida. Discuta a existência e unicidade de soluções dos sistemas lineares correspondentes.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução (a) A última linha corresponde à equação

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

a partir da qual é evidente que o sistema é inconsistente.

Solução (b) A última linha corresponde à equação

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

que não afeta o conjunto de soluções. Nas três equações restantes, as variáveis x_1, x_2 e x_3 correspondem a pivôs e, portanto, são variáveis líderes. A variável x_4 é uma variável livre. Com alguma álgebra, podemos expressar as variáveis líderes em termos da variável livre e, à variável livre, podemos associar qualquer valor. Assim, o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

Solução (c) A última linha corresponde à equação

$$x_4 = 0$$

que nos dá um valor numérico para x_4. Substituindo esse valor na terceira equação, a saber,

$$x_3 + 6x_4 = 9$$

obtemos $x_3 = 9$. Agora, é possível ver que podemos continuar esse processo e substituir os valores conhecidos de x_3 e x_4 na equação correspondente à segunda linha, obtendo um valor numérico único para x_2 e, finalmente, substituir os valores conhecidos de x_4 x_3 e x_2 na equação correspondente à primeira linha para obter um valor numérico único para x_1. Assim, o sistema tem uma solução única. ◀

Alguns fatos sobre as formas escalonadas

É importante conhecer três fatos sobre as formas escalonadas e escalonadas reduzidas, como segue, mas que não serão demonstrados.

1. Toda matriz tem uma única forma escalonada reduzida por linhas; ou seja, independentemente de utilizar eliminação de Gauss-Jordan ou uma outra sequência qualquer de operações elementares, no final sempre chegamos à mesma forma escalonada reduzida por linhas.[1]
2. As formas escalonadas por linhas não são únicas, ou seja, diferentes sequências de operações com linhas podem resultar em formas escalonadas diferentes.
3. Embora as formas escalonadas por linhas não sejam únicas, todas as formas escalonadas por linhas de uma matriz A têm o mesmo número de linhas nulas, e os pivôs sempre ocorrem na mesma posição das formas escalonadas por linhas de A. Essas posições são denominadas ***posições de pivô*** de A. Dizemos que uma coluna que contenha uma posição de pivô é uma ***coluna de pivô*** de A.

▶ EXEMPLO 9 Posição e coluna de pivô

Anteriormente, nesta seção (imediatamente depois da Definição 1), obtivemos uma forma escalonada de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

a saber,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os pivôs ocorrem nas posições (linha 1, coluna 1), (linha 2, coluna 3) e (linha 3, coluna 5). Essas são as posições de pivô. As colunas de pivô são as colunas 1, 3 e 5. ◀

Erro de arredondamento e instabilidade

Muitas vezes, há uma lacuna entre a teoria matemática e sua implementação prática, e as eliminações gaussiana e de Gauss-Jordan são bons exemplos disso. O problema é que os

[1] Uma prova desse resultado pode ser encontrada no artigo "The Reduced Row Echeleon Form of a Matrix Is Unique: A Simple Proof", de Thomas Yuster, em *Mathematics Magazine*, Vol. 57, No. 2, 1984, páginas 93-94.

computadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de ***arredondamento***; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções. Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos ***instáveis***. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondamento e a instabilidade. Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana. Alguns desses tópicos serão considerados no Capítulo 9.

Revisão de conceitos

- Forma escalonada reduzida por linhas
- Forma escalonada por linhas
- Pivô
- Variável líder
- Variável livre
- Solução geral de um sistema linear
- Eliminação gaussiana
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Fase direta, para frente
- Fase inversa, para trás
- Sistema linear homogêneo
- Solução trivial
- Solução não trivial
- Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos
- Retrossubstituição

Aptidões desenvolvidas

- Reconhecer se uma dada matriz está em forma escalonada, forma escalonada reduzida ou nenhuma dessas.
- Construir soluções de sistemas lineares cuja matriz aumentada correspondente está em forma escalonada ou escalonada reduzida.
- Usar a eliminação gaussiana para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Usar a eliminação de Gauss-Jordan para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Analisar sistemas lineares homogêneos usando o teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos.

Conjunto de exercícios 1.2

1. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–8**, resolva o sistema linear por eliminação de Gauss-Jordan. ◀

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \phantom{{}+y-2z} - 3w &= -3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **9–12**, resolva o sistema linear por eliminação gaussiana. ◀

9. Exercício 5

10. Exercício 6

11. Exercício 7

12. Exercício 8

▶ Nos Exercícios **13–16**, sem utilizar papel e lápis, determine se o sistema homogêneo tem soluções não triviais. ◀

13. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **17–24**, resolva o sistema linear dado por qualquer método. ◀

17. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w \phantom{{}+3x} - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+2x_3} + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \phantom{{}-I_2} - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \phantom{{}-3Z_4} - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 \phantom{{}-3Z_4} + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **25–28**, determine os valores de a com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução ou tem uma infinidade de soluções. ◀

25. $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y - (a^2 - 3)z &= a \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + (a^2 - 5)y &= a - 1 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$

► Nos Exercícios 29–30, resolva o sistema dado, em que a, b e c são constantes. ◄

29. $$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

31. Encontre duas formas escalonadas por linha diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esse exercício mostra que uma matriz pode ter formas escalonadas distintas.

32. Reduza

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida sem introduzir frações em estágios intermediários.

33. Mostre que o sistema não linear a seguir tem 18 soluções se $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta + 3 \tan \gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha + 5 \cos \beta + 3 \tan \gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha - 5 \cos \beta + 5 \tan \gamma &= 0 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $x = \operatorname{sen} \alpha$, $y = \cos \beta$, e $z = \tan \gamma$.]

34. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares nos ângulos incógnitos α, β e γ, com $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma &= 3 \\ 4 \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma &= 2 \\ 6 \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \beta + \tan \gamma &= 9 \end{aligned}$$

35. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares para x, y e z.

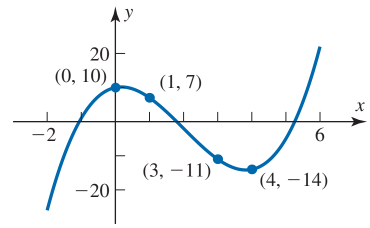
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$.]

36. Resolva o sistema a seguir para x, y e z.

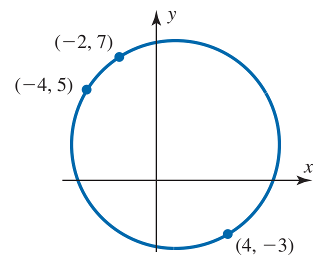
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

37. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja o gráfico da equação $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



◄ **Figura Ex-37**

38. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja dada pela equação $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.



◄ **Figura Ex-38**

39. Se o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 0 \end{aligned}$$

tiver somente a solução trivial, o que pode ser dito sobre as soluções do sistema a seguir?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 3 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 7 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 11 \end{aligned}$$

40. (a) Se A for uma matriz com três linhas e cinco colunas, qual é o número máximo possível de pivôs em sua forma escalonada reduzida?

(b) Se B for uma matriz com três linhas e seis colunas, cuja última coluna só tem zeros, qual é o número máximo possível de parâmetros da solução geral do sistema linear cuja matriz aumentada é B?

(c) Se C for uma matriz com cinco linhas e três colunas, qual é o número mínimo possível de linhas inteiras de zeros em qualquer forma escalonada de C?

41. (a) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução.

42. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Discuta as posições relativas das retas $ax + by = 0$ e $cx + dy = 0$ e $ex + fy = 0$ se (a) o sistema tiver apenas a solução trivial e (b) o sistema tiver soluções não triviais.

43. Descreva todas as formas escalonadas reduzidas possíveis de

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se uma matriz estiver em forma escalonada reduzida por linhas, então também estará em forma escalonada por linhas.

(b) Se efetuarmos uma operação elementar com as linhas de uma matriz em forma escalonada, a matriz resultante ainda estará em forma escalonada.

(c) Cada matriz tem uma única forma escalonada por linhas.

(d) Um sistema linear homogêneo em n incógnitas cuja matriz aumentada correspondente tem uma forma escalonada reduzida com r pivôs tem $n - r$ variáveis livres.

(e) Todos os pivôs de uma matriz em forma escalonada por linhas devem ocorrer em colunas distintas.

(f) Se cada coluna de uma matriz em forma escalonada por linhas tiver um pivô, então cada entrada que não for um pivô será nula.

(g) Se um sistema linear homogêneo de n equações em n incógnitas tiver uma matriz aumentada correspondente com uma forma escalonada reduzida com n pivôs, então o sistema linear só tem a solução trivial.

(h) Se a forma escalonada reduzida de uma matriz aumentada de um sistema linear tiver uma linha de zeros, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

(i) Se um sistema linear tem mais incógnitas do que equações, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

1.3 Matrizes e operações matriciais

Coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, não só como a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Nesta seção, começamos a estudar matrizes como objetos independentes, definindo sobre elas as operações de adição, subtração e multiplicação.

Notação e terminologia matricial

Na Seção 1.2, usamos coleções retangulares de números, denominadas *matrizes aumentadas*, para abreviar a escrita de sistemas de equações lineares. Contudo, essas coleções retangulares de números ocorrem também em outros contextos. Por exemplo, a seguinte coleção retangular de três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um estudante gastou estudando três matérias numa certa semana.

	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sáb.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Suprimindo os títulos, ficamos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e sete colunas, denominada "matriz".

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1 Uma ***matriz*** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as ***entradas*** da matriz.

Uma matriz com somente uma coluna é denominada ***matriz coluna***, ou ***vetor coluna***, e uma matriz com somente uma linha é denominada ***matriz linha***, ou ***vetor linha***. No Exemplo 1, a matriz 2×1 é um vetor coluna, a matriz 1×4 é um vetor linha e a matriz 1×1 é um vetor coluna e também um vetor linha.

▶ EXEMPLO 1 Exemplos de matrizes

Alguns exemplos de matrizes são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$ ◀

O ***tamanho*** de uma matriz é descrito em termos do número de linhas (fileiras horizontais) e de colunas (fileiras verticais) que ela contém. Por exemplo, a primeira matriz do Exemplo 1 tem três linhas e duas colunas, portanto, seu tamanho é 3 por 2 (e escrevemos 3×2). Numa descrição de tamanho, o primeiro número sempre denota o número de linhas e o segundo, o de colunas. As outras matrizes do Exemplo 1 têm tamanhos 1×4, 3×3, 2×1 e 1×1, respectivamente.

Utilizamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas; assim, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Quando discutimos matrizes, é costume dizer que as quantidades numéricas são ***escalares***. Salvo menção explícita em contrário, *escalares são números reais*; escalares complexos serão considerados mais adiante no texto.

É prática comum omitir os colchetes de matrizes 1×1, tornando impossível saber, por exemplo, se o símbolo 4 denota o número "quatro" ou a matriz [4]. Isso raramente causa problemas, pois geralmente é possível ver a qual dos dois nos estamos referindo a partir do contexto.

A entrada que ocorre na linha i e coluna j de uma matriz A é denotada por 3×4. Assim, uma matriz arbitrária 3×4 pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

e uma matriz arbitrária $m \times n$ como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}]$$

sendo utilizada a primeira notação quando for importante, na argumentação, saber o tamanho da matriz, e a segunda quando o tamanho não necessitar ênfase. Em geral, combinamos a letra denotando a matriz com a letra denotando suas entradas; assim, para uma matriz B, costumamos usar b_{ij} para a entrada na linha i e na coluna j e para uma matriz C, usamos a notação c_{ij}.

A entrada na linha i e na coluna j de uma matriz A também é comumente denotada pelo símbolo $(A)_{ij}$. Assim, para a matriz (1) acima, temos

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

e, para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

temos $(A)_{11} = 2$, $(A)_{12} = -3$, $(A)_{21} = 7$ e $(A)_{22} = 0$.

Vetores linha e coluna são de importância especial, e é prática comum denotá-los por letras minúsculas em negrito em vez de letras maiúsculas. Para tais matrizes, é desnecessário usar índices duplos para as entradas. Assim, um vetor linha $1 \times n$ arbitrário $\mathbf{a}$ e um vetor coluna $m \times 1$ arbitrário $\mathbf{b}$ podem ser escritos como

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dizemos que uma matriz A com n linhas e n colunas é uma ***matriz quadrada de ordem n*** e que as entradas destacadas $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ em (2) constituem a ***diagonal principal*** de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Operações com matrizes

Até aqui, usamos matrizes para abreviar o trabalho de resolver sistemas de equações lineares. Para outras aplicações, contudo, é desejável desenvolver uma "aritmética de matrizes" na qual as matrizes podes ser somadas, subtraídas e multiplicadas de alguma maneira útil. O restante desta seção será dedicado a desenvolver essa aritmética.

DEFINIÇÃO 2 Duas matrizes são definidas como sendo ***iguais*** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes forem iguais.

▶ EXEMPLO 2 Igualdade de matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $x = 5$, então $A = B$, mas para todos os outros valores de x, as matrizes A e B não são iguais, pois nem todas as suas entradas coincidem. Não existe valor de x com o qual $A = C$, pois A e C têm tamanhos diferentes. ◀

A igualdade de duas matrizes

$$A = [a_{ij}] \quad \text{e} \quad B = [b_{ij}]$$

de mesmo tamanho pode ser expressa escrevendo

$$(A)_{ij} = (B)_{ij}$$

ou, então,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

entendendo-se que as igualdades são válidas com quaisquer valores de i e j.

DEFINIÇÃO 3 Se A e B são matrizes de mesmo tamanho, então a ***soma*** $A + B$ é a matriz obtida somando as entradas de B às entradas correspondentes de A, e a ***diferença*** $A - B$ é a matriz obtida subtraindo as entradas de B das entradas correspondentes de A. Matrizes de tamanhos distintos não podem ser somadas ou subtraídas.

Em notação matricial, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ têm o mesmo tamanho, então

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{e} \quad (A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

EXEMPLO 3 Adição e subtração

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

As expressões $A + C$, $B + C$, $A - C$ e $B - C$ não estão definidas. ◀

DEFINIÇÃO 4 Se A for uma matriz e c um escalar, então o ***produto*** cA é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A por c. Dizemos que a matriz cA é um ***múltiplo escalar*** de A.

Em notação matricial, se $A = [a_{ij}]$, então

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

EXEMPLO 4 Múltiplos escalares

Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

temos

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

É usual denotar $(-1)B$ por $-B$. ◀

Até aqui, definimos a multiplicação de uma matriz por um escalar, mas não a multiplicação de duas matrizes. Como as matrizes são somadas somando as entradas correspondentes e subtraídas subtraindo as entradas correspondentes, pareceria natural definir a multiplicação de matrizes multiplicando as entradas correspondentes. Contudo, ocorre que tal definição não seria muito útil na maioria dos problemas. A experiência levou os matemáticos à seguinte definição, muito mais útil, de multiplicação de matrizes.

DEFINIÇÃO 5 Se A for uma matriz $m \times r$ e B uma matriz $r \times n$, então o *produto* AB é a matriz $m \times n$ cujas entradas são determinadas como segue. Para obter a entrada na linha i e coluna j de AB, destacamos a linha i de A e a coluna j de B. Multiplicamos as entradas correspondentes da linha e da coluna e então somamos os produtos resultantes.

EXEMPLO 5 Multiplicando matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Como A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×4, o produto AB é uma matriz 2×4. Para determinar, por exemplo, a entrada na linha 2 e coluna 3 de AB, destacamos a linha 2 de A e a coluna 3 de B. Então, como ilustrado, multiplicamos as entradas correspondentes e somamos esses produtos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{26} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

A entrada na linha 1 e coluna 4 de AB é calculada como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{13} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

As contas para as demais entradas são

$$\begin{aligned} (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) &= 12 \\ (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) &= 27 \\ (1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) &= 30 \\ (2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) &= 8 \\ (2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) &= -4 \\ (2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) &= 12 \end{aligned} \qquad AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

A definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas do primeiro fator A seja igual ao número de linhas do segundo fator B para que seja possível formar o produto AB. Se essa condição não for satisfeita, o produto não estará definido. Uma maneira conveniente de determinar se o produto de duas matrizes está ou não definido é escrever o tamanho do primeiro fator e, à direita, escrever o tamanho do segundo fator. Se, como em (3), os números internos coincidirem, então o produto estará definido.

$$\begin{array}{ccc} A & B & AB \\ m \times r & r \times n = & m \times n \end{array} \tag{3}$$

Internos

Externos

Gotthold Eisenstein (1823–1852)

Nota histórica O conceito de multiplicação matricial é devido ao matemático alemão Gotthold Eisenstein, que introduziu a ideia em torno de 1844, para simplificar o processo de efetuar substituições em sistemas lineares. A ideia, então, foi expandida e formalizada por Cayley em sua obra *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicada em 1858. Eisenstein foi um aluno de Gauss, que o qualificou como sendo do nível de Isaac Newton e Arquimedes. Contudo, o potencial de Eisenstein nunca foi realizado, porque viveu doente toda sua vida e faleceu aos 30 anos.

[Imagem: Wikipedia]

▶ EXEMPLO 6 Determinando se um produto está definido

Suponha que A, B e C sejam matrizes de tamanhos

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3 \times 4 & 4 \times 7 & 7 \times 3 \end{array}$$

Então, por (3), o produto AB está definido e é uma matriz 3×7; BC está definido e é uma matriz 4×3, e CA está definido e é uma matriz 7×4. Os produtos AC, CB e BA não estão definidos. ◀

Em geral, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times r$ e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $r \times n$, então, conforme destacado em (4),

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

a entrada $(AB)_{ij}$ na linha i e coluna j de AB é dada por

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \tag{5}$$

Matrizes em blocos

Uma matriz pode ser **particionada**, ou **subdividida**, em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas. Por exemplo, as seguintes são três partições possíveis de uma matriz 3×4 arbitrária A: a primeira é uma partição de A em quatro ***submatrizes*** A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22}; a segunda é uma partição de A em seus vetores linha $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, e $\mathbf{r}_3$; a terceira é uma partição de A em seus vetores coluna $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ e $\mathbf{c}_4$.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

Multiplicação matricial por colunas e linhas

A partição de matrizes em blocos tem muitas utilidades, uma das quais sendo encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial AB sem calcular todo o produto. Mais especificamente, as fórmulas seguintes, cujas provas são deixadas como exercício, mostram como vetores coluna individuais de AB podem ser obtidos particionando B em vetores colunas e como vetores linha individuais de AB podem ser obtidos particionando A em vetores linha.

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n] = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_n] \tag{6}$$

(*AB* calculado coluna a coluna)

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix} \tag{7}$$

(*AB* calculado linha a linha)

Em palavras, essas fórmula afirmam que

$$j\text{-ésimo vetor coluna de } AB = A\,[j\text{-ésimo vetor coluna de } B] \tag{8}$$

$$i\text{-ésimo vetor linha de } AB = [i\text{-ésimo vetor linha de } A]B \tag{9}$$

▶ EXEMPLO 7 De novo o Exemplo 5

Se A e B são as matrizes do Exemplo 5, então, por (8), o segundo vetor coluna de AB pode ser obtido calculando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\text{Segunda coluna de } B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\text{Segunda coluna de } AB}$$

e, por (9), o primeiro vetor linha de AB pode ser obtido calculando

$$\underbrace{[1 \quad 2 \quad 4]}_{\text{Primeira linha de } B} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{[12 \quad 27 \quad 30 \quad 13]}_{\text{Primeira linha de } AB} \quad ◀$$

Produtos matriciais como combinações lineares

Discutimos três métodos para calcular um produto matricial AB, a saber, entrada por entrada, coluna por coluna e linha por linha. A definição seguinte fornece mais uma maneira de ver o produto matricial.

DEFINIÇÃO 6 Se $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são matrizes de mesmo tamanho e se $c_1, c_2, \ldots, c_r$ são escalares, então uma expressão da forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$

é denominada ***combinação linear*** de $A_1, A_2, \ldots, A_r$ com ***coeficientes*** $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Para ver como o produto de matrizes pode ser visto como uma combinação linear, sejam A uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{x}$ um vetor coluna $n \times 1$, digamos,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{11}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Isso prova o teorema seguinte.

TEOREMA 1.3.1 *Sejam A uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{x}$ um vetor coluna $n \times 1$. Então o produto $A\mathbf{x}$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes são as entradas de $\mathbf{x}$.*

▶ EXEMPLO 8 Produto matricial como combinação linear

A matriz produto

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

pode ser escrita como a combinação linear dos vetores coluna

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 9 Colunas de um produto matricial como combinações lineares

Mostramos no Exemplo 5 que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Segue da fórmula (6) e do Teorema 1.3.1 que o j-ésimo vetor coluna de AB pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes da combinação linear são as entradas da j-ésima coluna de B. As contas são as seguintes.

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

Forma matricial de um sistema linear

A multiplicação matricial tem uma importante aplicação a sistemas de equações lineares. Considere um sistema de m equações lineares em n incógnitas

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{matrix}$$

Como duas matrizes são iguais se, e somente se, suas entradas correspondentes são iguais, podemos substituir as m equações desse sistema por uma única equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz $m \times 1$ à esquerda dessa equação pode ser escrita como um produto, resultando

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Denotando essas matrizes por A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente, o sistema original de m equações em n incógnitas pode ser substituído pela única equação matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A matriz A nesta equação é denominada ***matriz de coeficientes*** do sistema. A ***matriz aumentada*** do sistema é obtida pela adjunção de $\mathbf{b}$ a A como a última coluna; assim, a matriz aumentada é

A barra vertical em $[A \mid \mathbf{b}]$ é só uma maneira conveniente de visualmente separar A de $\mathbf{b}$, não tendo significado matemático.

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Transposta de uma matriz

Concluímos esta seção definindo duas operações matriciais que não têm análogos na aritmética de números reais.

DEFINIÇÃO 7 Se A for uma matriz $m \times n$ qualquer, então a ***transposta de A***, denotada por A^T, é definida como a matriz $n \times m$ que resulta da troca das linhas com as colunas de A; ou seja, a primeira coluna de A^T é a primeira linha de A, a segunda coluna de A^T é a segunda linha de A, e assim por diante.

▶ EXEMPLO 10 Algumas transpostas

Alguns exemplos de matrizes e suas transpostas são os seguintes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3 \quad 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{31} \\ a_{14} & a_{24} & a_{31} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4] \quad ◀$$

Observe que não só as colunas de A^T são as linhas de A, mas também as linhas de A^T são as colunas de A. Assim, a entrada na linha i e coluna j de A^T é a entrada na linha j e coluna i de A; ou seja,

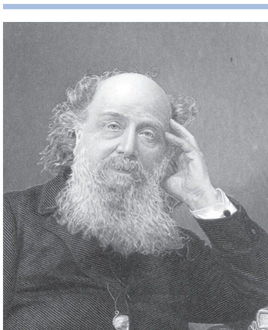
$$\boxed{(A^T)_{ij} = (A)_{ji}} \tag{11}$$

Observe a reversão de índices.

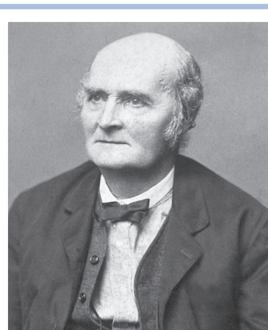
No caso especial em que a matriz A é uma matriz quadrada, a transposta de A pode ser obtida pela troca das entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal. Em (12), podemos ver que A^T também pode ser obtida "refletindo" A em torno de sua diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Permutamos entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal.



James Sylvester (1814–1897)



Arthur Cayley (1821–1895)

Nota histórica O termo *matriz* foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês James Sylvester, que definiu o termo em 1850 como "um arranjo oblongo de números". Sylvester comunicou seu trabalho com matrizes ao colega matemático e advogado inglês chamado Arthur Cayley, que então introduziu algumas das operações matriciais básicas num livro intitulado *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicado em 1858. Como curiosidade, Sylvester nunca se formou, porque, sendo judeu, recusou-se a assinar o exigido juramento à igreja Anglicana. Ele foi nomeado para uma cátedra na University of Virginia, nos Estados Unidos, mas renunciou depois de espancar com sua bengala um aluno que estava lendo um jornal em aula. Sylvester, pensando que havia matado o aluno, fugiu de volta para a Inglaterra no primeiro navio disponível. Felizmente, o aluno não morreu, só estava em choque!

[Imagem: Coleção Granger, Nova York]

DEFINIÇÃO 8 Se A for uma matriz quadrada, então o ***traço de A***, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada.

▶ EXEMPLO 11 Traço de uma matriz

Alguns exemplos de matrizes e seus traços são os seguintes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \mathrm{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$ ◀

Nos exercícios, desenvolvemos alguma prática com as operações de transposição e traço.

Revisão de conceitos

- Matriz
- Entradas
- Vetor coluna (ou matriz coluna)
- Vetor linha (ou matriz linha)
- Matriz quadrada
- Diagonal principal
- Matrizes iguais
- Operações matriciais: soma, diferença, multiplicação por escalar
- Combinação linear de matrizes
- Produto de matrizes (multiplicação matricial)
- Matriz em blocos
- Submatrizes
- Método linha-coluna
- Método das colunas
- Método das linhas
- Matriz de coeficientes de um sistema linear
- Transposta
- Traço

Aptidões desenvolvidas

- Determinar o tamanho de uma dada matriz.
- Identificar os vetores linha e coluna de uma dada matriz.
- Efetuar as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação por escalar e produto de matrizes.
- Determinar se está definido o produto de duas matrizes.
- Calcular um produto matricial usando os métodos linha-coluna, das colunas e das linhas.
- Expressar o produto de uma matriz com um vetor coluna como uma combinação linear das colunas da matriz.
- Expressar um sistema linear como uma equação matricial e identificar a matriz de coeficientes.
- Calcular a transposta de uma matriz.
- Calcular o traço de uma matriz quadrada.

Conjunto de exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$

(d) $AB + B$ (e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$

(g) E^TA (h) $(A^T + E)D$

2. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(3×1)	(3×6)	(6×2)	(2×6)	(1×3)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) EA (b) AB^T (c) $B^T(A + E^T)$
(d) $2A + C$ (e) $(C^T + D)B^T$ (f) $CD + B^T E^T$
(g) $(BD^T)C^T$ (h) $DC + EA$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$
(d) $-7C$ (e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$
(g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$ (i) $\operatorname{tr}(D)$
(j) $\operatorname{tr}(D - 3E)$ (k) $4 \operatorname{tr}(7B)$ (l) $\operatorname{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $2A^T + C$ (b) $D^T - E^T$ (c) $(D - E)^T$
(d) $B^T + 5C^T$ (e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ (f) $B - B^T$
(g) $2E^T - 3D^T$ (h) $(2E^T - 3D^T)^T$ (i) $(CD)E$
(j) $C(BA)$ (k) $\operatorname{tr}(DE^T)$ (l) $\operatorname{tr}(BC)$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) AB (b) BA (c) $(3E)D$
(d) $(AB)C$ (e) $A(BC)$ (f) CCT
(g) $(DA)^T$ (h) $(C^TB)A^T$ (i) $\operatorname{tr}(DDT)$
(j) $\operatorname{tr}(4E^T - D)$ (k) $\operatorname{tr}(C^TA^T + 2E^T)$ (l) $\operatorname{tr}((EC^T)^TA)$

6. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $(2D^T - E)A$ (b) $(4B)C + 2B$
(c) $(-AC)^T + 5D^T$ (d) $(BA^T - 2C)T$
(e) $B^T(CC^T - A^TA)$ (f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira linha de AB. (b) a terceira linha de AB.
(c) a segunda coluna de AB. (d) a primeira coluna de BA.
(e) a terceira linha de AA. (f) a terceira coluna de AA.

8. Usando as matrizes do Exercício 7, use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira coluna de AB.
(b) a terceira coluna de BB.
(c) a segunda linha de BB.
(d) a primeira coluna de AA.
(e) a terceira linha de AB.
(f) a primeira linha de BA.

9. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AA como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BB como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

10. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AB como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BA como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

11. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \qquad - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

12. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ -3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a)
$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **15–16**, encontre todos os valores de k, se houver, que satisfazem a equação. ◀

15. $\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix} = 0$

▶ Nos Exercícios **17–18**, resolva a equação matricial em termos de a, b, c e d. ◀

17. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

19. Sejam A uma matriz $m \times n$ e 0 a matriz $m \times n$ com todas as entradas nulas. Mostre que se $kA = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. (a) Mostre que se os produtos AB e BA estiverem ambos definidos, então AB e BA são matrizes quadradas.

(b) Mostre que se A for uma matriz $m \times n$ e $A(BA)$ estiver definida, então B é uma matriz $n \times m$.

21. Prove que se A e B são matrizes $n \times n$, então

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

22. (a) Mostre que se A tem uma linha de zeros e B é uma matriz qualquer para a qual o produto AB está definido, então AB também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado análogo para uma coluna de zeros.

23. Em cada parte, encontre uma matriz $[a_{ij}]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras em vez de números para entradas não nulas específicas.

(a) $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ se $i > j$

(c) $a_{ij} = 0$ se $i < j$

(d) $a_{ij} = 0$ se $|i - j| > 1$

24. Em cada parte, encontre a matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem a condição dada.

(a) $a_{ij} = i + j$ (b) $a_{ij} = i^{j-1}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |i-j| > 1 \\ -1 & \text{se} \quad |i-j| \leq 1 \end{cases}$

25. Considere a função $y = f(x)$ definida com matrizes x de tamanho 2×1 por $y = Ax$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esboce $f(x)$ juntamente com x em cada caso dado. Como você descreveria a ação de f?

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

26. Seja I a matriz $n \times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é

$$\begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $AI = IA = A$, com qualquer matriz $n \times n$ A.

27. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

28. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

29. Dizemos que uma matriz B é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz A se $BB = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

(c) Você acha que qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.

30. Seja 0 a matriz 2×2 com todas as entradas nulas.

(a) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = 0$? Justifique sua resposta.

(b) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = A$? Justifique sua resposta.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(o), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não tem diagonal principal.

(b) Uma matriz $m \times n$ tem m vetores coluna e n vetores linha.

(c) Se A e B forem matrizes 2×2, então $AB = BA$.

(d) O i-ésimo vetor linha de um produto matricial AB pode ser calculado multiplicando A pelo i-ésimo vetor linha de B.

(e) Dada qualquer matriz A, vale $(A^T)^T = A$.

(f) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

(g) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $(AB)^T = A^TB^T$.

(h) Dada qualquer matriz quadrada A, vale $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.

(i) Se A for uma matriz 6×4 e B uma matriz $m \times n$ tal que B^TA^T é uma matriz 2×6, então $m = 4$ e $n = 2$.

(j) Se A for uma matriz $n \times n$ e c um escalar, então $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr}(A)$.

(k) Se A, B e C forem matrizes de mesmo tamanho tais que $A - C = B - C$, então $A = B$.

(l) Se A, B e C forem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$, então $A = B$.

(m) Se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas de mesmo tamanho.

(n) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, AB também tem.

(o) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, BA também tem.

1.4 Inversas; propriedades algébricas das matrizes

Nesta seção, discutimos algumas das propriedades algébricas das operações matriciais. Veremos que muitas das regras básicas da aritmética de números reais também valem para matrizes, mas também que algumas não valem.

Propriedades das adição matricial e multiplicação por escalar

O teorema seguinte lista as propriedades algébricas básicas das operações matriciais.

TEOREMA 1.4.1 Propriedades da aritmética matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(*a*) $A + B = B + A$ **[Lei da comutatividade da adição]**

(*b*) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **[Lei da associatividade da adição]**

(*c*) $A(BC) = (AB)C$ **[Lei da associatividade da multiplicação]**

(*d*) $A(B + C) = AB + AC$ **[Lei da distributividade à esquerda]**

(*e*) $(A + B)C = AC + BC$ **[Lei da distributividade à direita]**

(*f*) $A(B - C) = AB - AC$

(*g*) $(B - C)A = BA - CA$

(*h*) $a(B + C) = aB + aC$

(*i*) $a(B - C) = aB - aC$

(*j*) $(a + b)C = aC + bC$

(*k*) $(a - b)C = aC - bC$

(*l*) $a(bC) = (ab)C$

(*m*) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Para provar qualquer uma das igualdades nesse teorema, devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a matriz do lado direito e que as entradas correspondentes dos dois lados são iguais. A maioria das provas segue o mesmo padrão geral, portanto, provamos a parte (d) como amostra. A prova da lei da associatividade da multiplicação é mais complicada do que o resto e será delineada nos exercícios.

Prova (d) Devemos mostrar que $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho e que as entradas correspondentes são iguais. Para formar $A(B + C)$, as matrizes B e C devem ter o mesmo tamanho, digamos, $m \times n$, e então a matriz A deve ter m colunas, de modo que seu tamanho é da forma $r \times m$. Isso faz de $A(B + C)$ uma matriz $r \times n$. Segue que $AB + AC$ também é uma matriz $r \times n$ e, consequentemente, $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho.

Suponha que $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$. Queremos mostrar que as entradas correspondentes de $A(B + C)$ e de $AB + AC$ são iguais, ou seja, que

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

para todos valores de i e j. Pela definição de soma e produto matriciais, temos

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj}) \\ &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj}) \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Existem três maneiras básicas de provar que duas matrizes do mesmo tamanho são iguais. Ou provamos que as entradas correspondentes são iguais, ou provamos que os vetores coluna são iguais, ou provamos que os vetores linha são iguais.

Observação Embora as operações de adição matricial e de multiplicação matricial tenham sido definidas para pares de matrizes, as leis da associatividade (b) e (c) nos permitem escrever somas e produtos de três matrizes, como $A + B + C$ e ABC sem a inserção de parênteses. Isso se justifica pelo seguinte fato: onde quer que os parênteses sejam inseridos, as leis da associatividade garantem que sempre será alcançado o mesmo resultado final. Em geral, *dados qualquer soma ou qualquer produto de matrizes, podemos omitir ou inserir pares de parênteses em qualquer lugar da expressão sem afetar o resultado final.*

▶ EXEMPLO 1 Associatividade da multiplicação matricial

Como uma ilustração da lei da associatividade da multiplicação matricial, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

de modo que $(AB)C = A(BC)$, conforme garante o Teorema 1.4.1(c). ◀

Propriedades da multiplicação matricial

Não deixe o Teorema 1.4.1 iludi-lo a acreditar que *todas* as leis da aritmética real sejam válidas na aritmética matricial. Por exemplo, sabemos que na aritmética real sempre vale que $ab = ba$, que é a *lei da comutatividade da multiplicação*. Na aritmética matricial, contudo, a igualdade de AB e BA pode não ser válida por três razões possíveis.

1. AB pode estar definida e BA não (por exemplo, se A é uma matriz 2×3 e B é 3×4).
2. AB e BA podem ambas estar definidas, mas têm tamanhos diferentes (por exemplo, se A é uma matriz 2×3 e B é 3×2).
3. AB e BA podem ambas estar definidas e ter o mesmo tamanho, mas as matrizes podem ser diferentes (conforme ilustrado no exemplo seguinte).

Não veja mais do que está escrito no Exemplo 2. O exemplo não proíbe a possibilidade de AB e BA serem iguais em *certos* casos, somente que não são iguais em *todos* os casos. Se ocorrer que $AB = BA$, dizemos que as matrizes A e B ***comutam***.

▶ EXEMPLO 2 A ordem é importante na multiplicação matricial

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $AB \neq BA$. ◀

Matrizes zero

Uma matriz cujas entradas são todas nulas, é denominada ***matriz zero*** ou ***matriz nula***. Alguns exemplos são

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

Denotamos uma matriz nula por 0, a menos que seja importante enfatizar seu tamanho, caso em que a matriz $m \times n$ é denotada por $0_{m \times n}$.

Deveria ser evidente que se A e 0 forem matrizes de mesmo tamanho, então

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Assim, nessa equação matricial, a matriz 0 desempenha o mesmo papel que o número 0 na equação numérica $a + 0 = 0 + a = a$.

O teorema seguinte lista as propriedades básicas das matrizes nulas. Como as afirmações devem ser evidentes, omitimos as provas formais.

TEOREMA 1.4.2 Propriedades de matrizes zero

Se c for um escalar e se os tamanhos das matrizes forem tais que as operações possam ser efetuadas, então

(*a*) $A + 0 = 0 + A = A$

(*b*) $A - 0 = A$

(*c*) $A - A = A + (-A) = 0$

(*d*) $0A = 0$

(*e*) *Se* $cA = 0$, *então* $c = 0$ *ou* $A = 0$.

Como já sabemos que a lei da comutatividade da aritmética dos números reais não vale na aritmética matricial, não deveria ser surpreendente que há outras regras que também falham. Por exemplo, considere as duas leis da aritmética dos números reais seguintes.

- Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$. **[A lei de cancelamento]**
- Se $ab = 0$, então pelo menos um dos fatores à esquerda é 0.

Os dois exemplos a seguir mostram que essas leis não são universalmente verdadeiras na aritmética matricial.

▶ EXEMPLO 3 A lei de cancelamento não vale

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor confirmar que

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Embora $A \neq 0$, o cancelamento de A de ambos lados da equação $AB = AC$ levaria à conclusão incorreta que $B = C$. Assim, a lei de cancelamento não é válida, em geral, na multiplicação matricial.

▶ EXEMPLO 4 Um produto nulo com fatores não nulos

Aqui temos duas matrizes tais que $AB = 0$, mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Matrizes identidade

Uma matriz quadrada com entradas 1 na diagonal principal e demais entradas nulas é denominada ***matriz identidade***. Alguns exemplos são

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz identidade é denotada pela letra I. Se for importante enfatizar seu tamanho, escrevemos I_n para a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

Para explicar o papel das matrizes identidade na aritmética matricial, consideremos o efeito de multiplicar uma matriz A de tamanho 2×3 nos dois lados por uma matriz identidade. Multiplicando à direita pela matriz identidade 3×3, obtemos

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

e multiplicando pela esquerda pela matriz identidade 2×2, obtemos

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

O mesmo resultado vale em geral, ou seja, se A for uma matriz $m \times n$, então,

$$AI_n = A \quad \text{e} \quad I_mA = A$$

Assim, as matrizes identidade desempenham nas equações matriciais o mesmo papel que o número 1 desempenha na equação numérica $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Como mostra o teorema seguinte, as matrizes identidade surgem naturalmente no estudo da forma escalonada reduzida por linhas de matrizes *quadradas*.

TEOREMA 1.4.3 *Se R é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz A de tamanho $n \times n$, então ou R tem uma linha de zeros ou R é a matriz identidade I_n.*

Prova Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A seja

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

De duas uma: ou a última linha dessa matriz é constituída inteiramente de zeros ou não. Se não, a matriz não contém linhas nulas e, consequentemente, cada uma de suas n linhas tem um pivô. Como esses pivôs ocorrem progressivamente para a direita à medida que descemos pelas linhas, cada um deve ocorrer na diagonal principal. Como as demais entradas na mesma coluna são zeros, R deve ser I_n. Assim, ou R tem uma linha de zeros ou $R = I_n$. ◀

Inversa de uma matriz

Na aritmética real, cada número não nulo a tem um recíproco $a^{-1}(= 1/a)$ com a propriedade

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

O número a^{-1} também é denominado *inverso multiplicativo* de a. Nosso próximo objetivo é desenvolver para a aritmética matricial um análogo desse resultado. Com esse objetivo, apresentamos a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz quadrada e se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é ***invertível*** (*ou* ***não singular***) e que B é uma ***inversa*** de A. Se não puder ser encontrada uma tal matriz B, diremos que A é ***não invertível*** ou ***singular***.

Observação A relação $AB = BA = I$ permanece inalterada pela troca de A por B, de modo que se A for invertível e B uma inversa, então também vale que B é invertível e que A é uma inversa de B. Assim, se

$$AB = BA = I$$

dizemos que A e B são *inversas uma da outra*.

▶ EXEMPLO 5 Uma matriz invertível

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Assim, A e B são invertíveis e uma é inversa da outra. ◀

▶ EXEMPLO 6 Uma classe de matrizes singulares

Em geral, uma matriz quadrada com uma linha ou coluna de zeros é singular. Para ajudar a entender por que isso ocorre, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Para provar que A é singular, devemos mostrar que não existe matriz B de tamanho 3×3 tal que $AB = BA = I$. Para isso, sejam $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ e $\mathbf{0}$ os vetores coluna de A. Assim, dada qualquer matriz B de tamanho 3×3, podemos escrever o produto BA como

$$BA = B[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{0}] = [B\mathbf{c}_1 \quad B\mathbf{c}_2 \quad \mathbf{0}] \quad \textbf{[Fórmula (6) da Seção 1.3]}$$

A coluna de zeros mostra que $BA \neq 1$ e, portanto, que A é singular. ◀

Propriedades das inversas

É razoável perguntar se uma matriz invertível pode ter mais de uma inversa. O próximo teorema mostra que a resposta é não – *uma matriz invertível tem exatamente uma inversa*.

TEOREMA 1.4.4 *Se B e C são ambas inversas da matriz A, então $B = C$.*

Prova Como B é uma inversa de A, temos $BA = I$. Multiplicando ambos lados à direita por C, dá $(BA)C = IC = C$. Mas também vale que $(BA)C = B(AC) = BI = B$, de modo que $C = B$. ◀

Como uma consequência desse importante resultado, podemos agora falar "da" inversa de uma matriz invertível. Se A for invertível, então sua inversa será denotada pelo símbolo A^{-1}. Assim,

$$AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad A^{-1}A = I \tag{1}$$

A inversa de A desempenha na aritmética matricial praticamente o mesmo papel que o recíproco a^{-1} desempenha nas relações numéricas $aa^{-1} = 1$ e $a^{-1}a = 1$.

Na próxima seção, desenvolveremos um método para encontrar a inversa de matrizes invertíveis de qualquer tamanho. Por enquanto, temos o teorema seguinte, que especifica condições sob as quais uma matriz 2×2 é invertível e fornece uma fórmula simples para a inversa.

TEOREMA 1.4.5 *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$, caso em que a inversa é dada pela fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

A quantidade $ad - bc$ no Teorema 1.4.5 é denominada ***determinante*** da matriz A de tamanho 2×2 e é denotada por

$$\det(A) = ad - bc$$

ou, alternativamente, por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Omitimos a prova, porque estudaremos uma versão mais geral desse teorema adiante. Por enquanto, o leitor deveria pelo menos confirmar a validade da Fórmula (2), mostrando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Nota histórica A fórmula para A^{-1} dada no Teorema 1.4.5 apareceu pela primeira vez (numa forma mais geral) em 1858, no *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), de Cayley. O resultado mais geral descoberto por Cayley será estudado adiante.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Figura 1.4.1

Observação A Figura 1.4.1 ilustra que o determinante de uma matriz A de tamanho 2×2 é o produto das entradas da diagonal principal menos o produto das entradas *fora* da diagonal principal. Em palavras, o Teorema 1.4.5 afirma que uma matriz A de tamanho 2×2 é invertível se, e só se, seu determinante é não nulo e, se for invertível, sua inversa pode ser obtida trocando as entradas da diagonal, trocando o sinal das entradas fora da diagonal e multiplicando todas as entradas pelo recíproco do determinante de A.

▶ EXEMPLO 7 Calculando a inversa de uma matriz 2 × 2

Em cada parte, determine se a matriz é invertível. Se for, calcule sua inversa.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Solução (a) O determinante de A é $\det(A) = (6)(2) - (1)(5) = 7$, que é não nulo. Assim, A é invertível e sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor confirmar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Solução (b) A matriz não é invertível porque $\det(A) = (-1)(-6) - (2)(3) = 0$.

▶ EXEMPLO 8 Solução de um sistema linear por inversão matricial

Um problema que surge em muitas aplicações envolve resolver um par de equações da forma

$$\begin{aligned} u &= ax + by \\ v &= cx + dy \end{aligned}$$

para x e y em, termos de u e v. Uma abordagem é tratar isso como um sistema linear de duas equações nas incógnitas x e y e usar eliminação de Gauss-Jordan para resolver para x e y. Contudo, como os coeficientes das incógnitas são *literais* em vez de *numéricos*, esse procedimento é um pouco confuso. Como uma abordagem alternativa, substituímos as duas equações pela equação matricial única

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

que podemos reescrever como

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Supondo que a matriz 2×2 seja invertível (isto é, que $ad - bc \neq 0$), então podemos multiplicar à esquerda ambos lados pela inversa e reescrever a equação como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que simplifica para

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema 1.4.5, podemos reescrever essa equação como

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

da qual obtemos

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}, \quad y = \frac{av - cu}{ad - bc} \blacktriangleleft$$

O próximo teorema considera a inversa do produto matricial.

TEOREMA 1.4.6 *Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Prova Podemos mostrar a invertibilidade e obter a fórmula enunciada ao mesmo tempo mostrando que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

No entanto,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e, analogamente, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. ◀

Embora não o provemos, esse resultado pode ser estendido três ou mais fatores.

O produto de um número qualquer de matrizes invertíveis é invertível, e a inversa do produto é o produto das inversas em ordem inversa.

▶ EXEMPLO 9 A inversa de um produto

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

e, também, que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, como garante o Teorema 1.4.6. ◀

Se um produto de matrizes for singular, então pelo menos um dos fatores deve ser singular. Por quê?

Potências de uma matriz

Se A for uma matriz *quadrada*, definimos as potências inteiras não negativas de A por

$$A^0 = I \quad \text{e} \quad A^n = AA \cdots A \quad [\boldsymbol{n}\ \textbf{fatores}]$$

e, se A for invertível, então definimos as potências inteiras negativas de A por

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} \quad [\boldsymbol{n}\ \textbf{fatores}]$$

Como essas definições acompanham as de números reais, valem as leis usuais de potenciação; por exemplo,

$$A^rA^s = A^{r+s} \quad \text{e} \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

Além dessas, temos as propriedades seguintes de potências de expoentes negativos.

TEOREMA 1.4.7 *Se A for uma matriz invertível e n um inteiro não negativo, então*

(*a*) A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.

(*b*) A^n *é invertível e* $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$.

(*c*) kA *é invertível com qualquer escalar não nulo* k *e* $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Demonstramos a parte (*c*), deixando as provas das partes (*a*) e (*b*) como exercícios.

Prova (c) A propriedade I e (*m*) do Teorema 1.4.1 implicam

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = k^{-1}(kA)A^{-1} = (k^{-1}k)AA^{-1} = (1)I = I$$

e, analogamente, $(k^{-1}A^{-1})(kA) = I$. Assim, kA é invertível e $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$. ◀

▶ EXEMPLO 10 Propriedades de potências

Sejam A e A^{-1} as matrizes do Exemplo 9, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Também,

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

portanto, confirmando o Teorema 1.4.7(*b*),

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{(11)(41) - (30)(15)}\begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = (A^{-1})^3$$

▶ EXEMPLO 11 O quadrado de uma soma matricial

Na aritmética real, em que temos a comutatividade da multiplicação, podemos escrever

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Contudo, na aritmética matricial, em que não temos a comutatividade da multiplicação, o melhor que podemos escrever é

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Somente no caso especial em que A e B comutam (ou seja, $AB = BA$) é que podemos ir um passo adiante e escrever

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad ◀$$

Polinômios matriciais

Se A for uma matriz quadrada, digamos $n \times n$, e se

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_m x^m$$

é um polinômio qualquer, então definimos a matriz $p(A)$ de tamanho $n \times n$ por

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m \tag{3}$$

em que I é a matriz identidade $n \times n$. Ou seja, $p(A)$ é a matriz obtida substituindo x por A e o termo constante a_0 pela matriz $a_0 I$. Uma expressão como (3) é denominada ***polinômio matricial em A***.

▶ EXEMPLO 12 Um polinômio matricial

Encontre $p(A)$ com

$$p(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 2A - 3I \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou, mais sucintamente, $p(A) = 0$. ◀

Observação Segue do fato de que $A^r A^s = A^{r+s} = A^{s+r} = A^s A^r$ que as potências de uma matriz quadrada comutam e, como um polinômio matricial em A é constituído de potências de A, quaisquer dois polinômios matriciais em A também comutam, ou seja, dados polinômios p_1 e p_2, temos

$$p_1(A)p_2(A) = p_2(A)p_1(A) \tag{4}$$

Propriedades da transposta

O próximo teorema lista as principais propriedades da transposta.

TEOREMA 1.4.8 *Se os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, então*

(*a*) $(A^T)^T = A$

(*b*) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(*c*) $(A - B)^T = A^T - B^T$

(*d*) $(kA)^T = kA^T$

(*e*) $(AB)^T = B^T A^T$

Lembrando que a transposição de uma matriz troca entre si suas linhas e colunas, o leitor não deveria encontrar dificuldade alguma para visualizar os resultados das partes (*a*) até (*d*). Por exemplo, a parte (*a*) afirma o fato óbvio que trocar duas vezes entre si as linhas e as colunas de uma matriz deixa a matriz inalterada; a parte (*b*) assegura que somar duas matrizes e depois trocar entre si as linhas e colunas dá o mesmo resultado que trocar entre si as linhas e colunas antes de somar. Omitimos as provas formais. A parte (*e*) não é tão óbvia, mas tampouco apresentamos sua prova. O resultado dessa parte pode ser estendido para incluir três ou mais fatores, o que pode ser enunciado como segue.

A transposta de um produto de um número qualquer de matrizes é igual ao produto de suas transpostas em ordem inversa.

O teorema a seguir estabelece uma relação entre a inversa de uma matriz invertível e a inversa de sua transposta.

TEOREMA 1.4.9 *Se A for uma matriz invertível, então A^T também é invertível e*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})T$$

Prova Podemos estabelecer a invertibilidade e obter a fórmula ao mesmo tempo mostrando que

$$A^T(A^{-1})T = (A^{-1})^T A^T = I$$

No entanto, pela parte (*e*) do Teorema 1.4.8 e o fato de que $I^{\mathrm{T}} = I$, temos

$$\begin{aligned} A^T(A^{-1})T &= (A^{-1}A)^T = I^T = I \\ (A^{-1})^T A^T &= (AA^{-1})T = I^T = I \end{aligned}$$

o que completa a prova. ◀

▶ EXEMPLO 13 A inversa de uma transposta

Considere uma matriz 2×2 invertível qualquer e sua transposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Como A é invertível, seu determinante $ad - bc$ é não nulo. Mas o determinante de A^T também é $ad - bc$ (verifique), de modo que A^T é invertível. Segue do Teorema 1.4.5 que

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{c}{ad-bc} \\ -\dfrac{b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

que é a mesma matriz que resulta se A^{-1} for transposta (verifique). Assim,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})T$$

conforme garante o Teorema 1.4.9. ◀

Revisão de conceitos

- Lei da comutatividade da adição matricial
- Lei da associatividade da adição matricial
- Lei da associatividade da multiplicação matricial
- Leis da distributividade à direita e à esquerda
- Matriz zero
- Matriz identidade
- Inversa de uma matriz
- Matriz invertível
- Matriz não singular
- Matriz singular
- Determinante
- Potência de uma matriz
- Polinômio matricial

Aptidões desenvolvidas

- Conhecer as propriedades aritméticas das operações matriciais.
- Ser capaz de provar propriedades aritméticas de matrizes.
- Conhecer as propriedades das matrizes nulas.
- Conhecer as propriedades das matrizes identidade.
- Ser capaz de reconhecer quando duas matrizes quadradas são uma a inversa da outra.
- Ser capaz de determinar se uma matriz 2×2 é invertível.
- Ser capaz de resolver um sistema linear de duas equações em duas incógnitas cuja matriz de coeficientes é invertível.
- Ser capaz de provar as propriedades básicas envolvendo matrizes invertíveis.
- Conhecer as propriedades da matriz transposta e sua relação com matrizes invertíveis.

Conjunto de exercícios 1. 4

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $(AB)C = A(BC)$ (c) $(a + b)C = aC + bC$

(d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

(b) $A(B - C) = AB - AC$ (c) $(B + C)A = BA + CA$

(d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $(A^T)^T = A$ (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(aC)^T = aC^T$ (d) $(AB)^T = B^T A^T$

▶ Nos Exercícios **4–7**, use o Teorema 1.4.5 para calcular a inversa da matriz dada. ◀

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

9. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

10. Use a matriz A do Exercício 4 para verificar que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

11. Use a matriz B do Exercício 5 para verificar que $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

12. Use as matrizes A e B dos Exercícios 4 e 5 para verificar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. Use as matrizes A, B e C dos Exercícios 4 a 6 para verificar que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

▶ Nos Exercícios **14–17**, use a informação dada para encontrar A. ◀

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **15.** $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

16. $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **17.** $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

18. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a quantidade dada.

(a) A^3 (b) A^{-3} (c) $A^2 - 2A + I$

(d) $p(A)$, onde $p(x) = x - 2$

(e) $p(A)$, onde $p(x) = 2x^2 + x + 1$

(f) $p(A)$, onde $p(x) = x^3 - 2x + 4$

19. Repita o Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

▶ Nos Exercícios **22–24**, sejam $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ e $p_3(x) = x - 3$. Mostre que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$, com a matriz dada. ◀

22. A matriz A do Exercício 18.

23. A matriz A do Exercício 21.

24. Uma matriz quadrada A arbitrária.

25. Mostre que se $p(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

26. Mostre que se $p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ae + be - cd)x - a(be - cd)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

27. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

em que $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$. Mostre que A é invertível e encontre sua inversa.

28. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfizer $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

29. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.

(b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

30. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$ABC^TDBA^TC = AB^T$$

31. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$C^TB^{-1}A^2BAC^{-1}DA^{-2}B^TC^{-2} = C^T$$

32. Se A for uma matriz quadrada e n um inteiro positivo, será verdade que $(A^n)^T = (A^T)^n$? Justifique sua resposta.

33. Simplifique

$$(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$$

34. Simplifique

$$(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$$

▶ Nos Exercícios **35–37**, determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa. [*Sugestão*: resolva $AX = I$ para X igualando entradas correspondentes de ambos lados.] ◀

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **37.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

38. Prove o Teorema 1.4.2.

▶ Nos Exercícios **39–42**, use o método do Exemplo 8 para encontrar a única solução do sistema linear dado. ◀

39. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$ **40.** $\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$ **42.** $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$

43. Prove a parte (a) do Teorema 1.4.1.

44. Prove a parte (c) do Teorema 1.4.1.

45. Prove a parte (f) do Teorema 1.4.1.

46. Prove a parte (b) do Teorema 1.4.2.

47. Prove a parte (c) do Teorema 1.4.2.

48. Verifique a Fórmula (4) do texto calculando diretamente.

49. Prove a parte (d) do Teorema 1.4.8.

50. Prove a parte (e) do Teorema 1.4.8.

51. (a) Mostre que se A for invertível e $AB = AC$, então $B = C$.

(b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.

52. Mostre que se A for invertível e k um escalar não nulo qualquer, então $(kA)^n = k^nA^n$, com qualquer valor inteiro de n.

53. (a) Mostre que se A, B e $A + B$ forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então

$$A(A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1} = I$$

(b) O que o resultado da parte (a) nos diz sobre a matriz $A^{-1} + B^{-1}$?

54. Dizemos que uma matriz A é ***idempotente*** se $A^2 = A$.

(a) Mostre que se A for idempotente, então $I - A$ também é.

(b) Mostre que se A for idempotente, então $2A - I$ é invertível e sua própria inversa.

55. Mostre que se A for uma matriz quadrada tal que $A^k = 0$, com algum inteiro positivo k, então a matriz $I - A$ é invertível e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Duas matrizes A e B de tamanho $n \times n$ são inversas uma da outra se, e só se, $AB = BA = 0$.

(b) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(c) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(d) Se A e B forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e vale $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(e) Se A e B forem matrizes tais que o produto AB está definido, então vale $(AB)^T = A^TB^T$.

(f) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$

(g) Se A e B forem matrizes de mesmo tamanho e k uma constante, então $(kA + B)^T = kA^T + B^T$.

(h) Se A for uma matriz invertível, então A^T também é invertível.

(i) Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ e I for uma matriz identidade, então $p(I) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

(j) Uma matriz quadrada com uma linha ou coluna de zeros não pode se invertível.

(k) A soma de duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho sempre é invertível.

1.5 Matrizes elementares e um método para encontrar A^{-1}

Nesta seção, desenvolvemos um algoritmo para encontrar a inversa de uma matriz e discutiremos algumas das propriedades básicas de matrizes invertíveis.

Na Seção 1.1, definimos três operações elementares com as linhas de uma matriz A.

1. Multiplicar uma linha por uma constante não nula c.
2. Trocar duas linhas entre si.
3. Somar uma constante c vezes uma linha a uma outra linha.

Deveria ser evidente que, se denotarmos por B a matriz que resulta de A efetuando uma das operações dessa lista, então a matriz A poder ser recuperada de B efetuando a operação correspondente da lista seguinte.

1. Multiplicar uma linha por $1/c$.
2. Trocar as mesmas duas linhas entre si.
3. Se B resultou da soma de c vezes a linha r_1 de A com a linha r_2, então somamos $-c$ vezes r_1 à linha r_2.

Segue que, se B for obtida de A efetuando uma sequência de operações elementares com linhas, então existe uma segunda sequência de operações elementares com linhas que, sendo aplicada a B, recupera A (Exercício 43). Em virtude disso, colocamos a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que as matrizes A e B são ***equivalentes por linhas*** se uma delas (portanto, ambas) pode ser obtida a partir da outra por uma sequência de operações elementares com linhas.

Nosso próximo objetivo é mostrar como a multiplicação matricial pode se usada para efetuar uma operação elementar com as linhas.

DEFINIÇÃO 2 Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ efetuando uma *única* operação elementar sobre linhas é denominada ***matriz elementar***.

▶ EXEMPLO 1 Matrizes elementares e operações com linhas

Abaixo listamos quatro matrizes elementares e as operações com linhas que as produzem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda linha de I_2 por -3.	Permutamos a segunda linha de I_4 com a quarta.	Somamos 3 vezes a terceira linha de I_3 à primeira.	Multiplicamos a primeira linha de I_3 por 1. ◀

O teorema seguinte, cuja prova é deixada como exercício, mostra que quando uma matriz A é multiplicada *à esquerda* por uma matriz elementar E, o efeito é o de efetuar uma operação elementar com as linhas de A.

TEOREMA 1.5.1 Operações com linhas por multiplicação matricial

Se a matriz elementar E é o resultado de efetuar uma certa operação com as linhas de I_m e se A é uma matriz $m \times n$, então o produto EA é a matriz que resulta quando essa mesma operação com linhas é efetuada em A.

▶ EXEMPLO 2 Usando matrizes elementares

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e considere a matriz elementar

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta de somar 3 vezes a primeira linha de I_3 à terceira linha. O produto EA é

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que é, precisamente, a mesma matriz que resulta somando 3 vezes a primeira linha de A à terceira linha. ◀

O Teorema 1.5.1 é uma ferramenta útil para desenvolver novos resultados sobre matrizes, mas em termos de contas, em geral é preferível efetuar operações com linhas diretamente.

Sabemos, da discussão no início desta seção, que se E é uma matriz elementar que resulta de efetuar uma operação elementar com linhas aplicada a uma matriz identidade I, então existe uma segunda operação elementar com linhas que, aplicada a E, produz de volta a matriz I. A Tabela 1 lista essas operações. As operações do lado direito da tabela são denominadas ***operações inversas*** das correspondentes operações do lado esquerdo.

Tabela 1

Operações com as linhas de I que produzem E	Operações com as linhas de E que produzem I
Multiplicar a linha i por $c \neq 0$	Multiplicar a linha i por $1/c$
Trocar entre si as linhas i e j	Trocar entre si as linhas i e j
Somar c vezes a linha i à linha j	Somar $-c$ vezes a linha i à linha j

▶ EXEMPLO 3 Operações e operações inversas com linhas

Em cada um dos exemplos a seguir, foi efetuada uma operação elementar na matriz identidade 2×2 para obter uma matriz elementar E e, em seguida, E foi restaurada à matriz identidade aplicando a operação com linhas inversa.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Multiplicamos a}\\ \text{segunda linha por 7.}}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Multiplicamos a}\\ \text{segunda linha por } \frac{1}{7}.}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Permutamos a}\\ \text{primeira linha}\\ \text{com a segunda.}}]{} \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Permutamos a}\\ \text{primeira linha}\\ \text{com a segunda.}}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Somamos 5}\\ \text{vezes a segunda}\\ \text{linha à primeira.}}]{} \begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Somamos } -5\\ \text{vezes a segunda}\\ \text{linha à primeira.}}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

O próximo teorema é um resultado crucial sobre a invertibilidade de matrizes elementares. Ele será a pedra fundamental de muitos dos resultados que seguem.

TEOREMA 1.5.2 *Qualquer matriz elementar é invertível, e a inversa também é uma matriz elementar.*

Prova Se E é uma matriz elementar, então E é o resultado de alguma operação elementar com as linhas de I. Seja E_0 a matriz que resulta quando é efetuada a operação inversa em I. Aplicando o Teorema 1.5.1 e lembrando que operações e suas inversas se cancelam mutuamente, segue que

$$E_0E = I \quad \text{e} \quad EE_0 = I$$

Assim, a matriz elementar E_0 é a inversa de E.

Teorema da equivalência

À medida que progredimos neste texto, um dos nossos objetivos é mostrar como se relacionam várias ideias da Álgebra Linear que não parecem estar relacionadas. O próximo teorema, que relaciona resultados que obtivemos sobre invertibilidade de matrizes, sistemas lineares homogêneos, formas escalonadas reduzidas por linhas e matrizes elementares, é o nosso primeiro passo naquela direção. Mais afirmações serão acrescentadas a essa lista ao longo do nosso estudo.

TEOREMA 1.5.3 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja, são todas verdadeiras ou todas falsas.

(*a*) *A é invertível.*

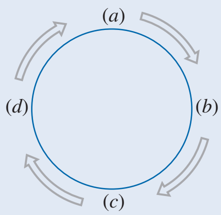
(*b*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

A lógica da nossa prova do Teorema 1.5.3 pode ficar mais aparente se escrevermos as implicações

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$$



Isso torna visualmente aparente que a validade de qualquer uma das afirmações implica a validade de todas as demais e que, portanto, a falsidade de qualquer uma implica a falsidade das demais.

Prova Provamos a equivalência dessas afirmações estabelecendo a cadeia de implicações $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

(a) ⇒ (b) Suponha que A seja invertível e que $\mathbf{x}_0$ seja uma solução qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando ambos lados dessa equação pela matriz A^{-1}, dá $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\mathbf{0}$, ou $(A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou $I\mathbf{x}_0 = 0$, ou seja, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Assim, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(b) ⇒ (c) Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a forma matricial do sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

e suponha que o sistema só admita a solução trivial. Resolvendo por eliminação de Gauss-Jordan, o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada será

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & 0 \\ & x_2 & & & = & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_n & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

Assim, a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

de (1) pode ser reduzida à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de (2) por uma sequência de operações elementares com linhas. Desconsiderando a última coluna (de zeros) em cada uma dessas matrizes, poderemos concluir que a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

(c) ⇒ (d) Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A seja I_n, de modo que A pode ser reduzida a I_n por uma sequência finita de operações elementares com linhas. Pelo Teorema 1.5.1, cada uma dessas operações pode ser efetuada por uma matriz elementar apropriada. Assim, podemos encontrar matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Pelo Teorema 1.5.2, as matrizes $E_1, E_2, \ldots, E_k$ são invertíveis. Multiplicando ambos lados da Equação (3) pela esquerda sucessivamente por $E_k^{-1}, \ldots E_2^{-1}, E_1^{-1}$, obtemos

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}I_n = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{4}$$

Pelo Teorema 1.5.2, essa equação expressa A como um produto de matrizes elementares.

(d)* ⇒ *(a) Se A for um produto de matrizes elementares, então, pelos Teoremas 1.4.7 e 1.5.2, segue que a matriz A é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, é invertível. ◀

Um método para inverter matrizes

Como uma primeira aplicação do Teorema 1.5.3, desenvolvemos um procedimento (algoritmo) que pode ser usado para determinar se uma dada matriz é invertível e, se for, calcular sua inversa. Para deduzir esse algoritmo, suponha, provisoriamente, que A seja uma matriz $n \times n$ invertível. Na Equação (3), as matrizes elementares efetuam uma sequência de operações sobre linhas que reduzem A a I. Multiplicando ambos lados dessa equação à direita por A^{-1} e simplificando, obtemos

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2\, E_1\, I_n$$

Essa equação nos informa que *a mesma sequência de operações elementares com linhas que reduz A a I_n também reduz I_n a A^{-1}*. Assim, estabelecemos o seguinte resultado.

Algoritmo da inversão Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, encontre uma sequência de operações elementares com linhas que reduza A à identidade e depois efetue essa mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}.

Um método simples para executar esse procedimento é dado no próximo exemplo.

▶ EXEMPLO 4 Usando operações com colunas para encontrar A^{-1}

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução Queremos reduzir A à matriz identidade por operações com linhas e, simultaneamente, aplicar essas operações a I para produzir A^{-1}. Para conseguir isso, juntamos a matriz identidade à direita de A, com o que produzimos uma matriz da forma

$$[A \mid I]$$

Em seguida, efetuamos operações com as linhas dessa matriz até que o lado esquerdo esteja reduzido a I; essas operações converterão o lado direito a A^{-1}, de modo que a matriz final terá a forma

$$[I \mid A^{-1}]$$

As contas são as seguintes.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Somamos -2 vezes a primeira linha à segunda e -1 vez a primeira linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Somamos 2 vezes a segunda linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Multiplicamos a terceira linha por -1.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Somamos 3 vezes a terceira linha à segunda e -3 vezes a terceira linha à primeira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Somamos -2 vezes a segunda linha à primeira.

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Muitas vezes, não se sabe de antemão se uma dada matriz A é ou não invertível. No entanto, se A não for invertível, então, pelas partes (a) e (c) do Teorema 1.5.3, será impossível reduzir A a I_n por operações elementares com linhas. Isso se tornará visível em algum ponto do algoritmo de inversão com o aparecimento de uma linha de zeros *no lado esquerdo* das matrizes juntadas. Se isso ocorrer, podemos interromper as contas e concluir que A não é invertível.

► EXEMPLO 5 Mostrando que uma matriz não é invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando o procedimento do Exemplo 4, obtemos

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Somamos -2 vezes a primeira linha à segunda e somamos a primeira linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Somamos a segunda linha à terceira.

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo, A não é invertível.

▶ EXEMPLO 6 Analisando sistemas homogêneos

Use o Teorema 1.5.3 para determinar se o sistema homogêneo dado tem soluções não triviais.

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solução Pelas partes (a) e (b) do Teorema 1.5.3, um sistema linear homogêneo tem somente a solução trivial se, e só se, sua matriz de coeficientes for invertível. Pelos Exemplos 4 e 5, a matriz de coeficientes do sistema (a) é invertível e a do sistema (b) não é. Assim, o sistema (a) tem apenas a solução trivial, ao passo que o sistema (b) tem soluções não triviais. ◀

Revisão de conceitos

- Matrizes equivalentes por linhas
- Matriz elementar
- Operações inversas
- Algoritmo de inversão

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma dada matriz quadrada é elementar.
- Determinar se duas matrizes quadradas são equivalentes por linhas.
- Efetuar a inversa de uma dada operação elementar com as linhas.
- Aplicar operações elementares para reduzir uma dada matriz quadrada à matriz identidade.
- Entender as relações entre afirmações equivalentes à invertibilidade de uma matriz quadrada (Teorema 1.5.3).
- Usar o algoritmo da inversão para encontrar a inversa de uma matriz invertível.
- Expressar uma matriz invertível como um produto de matrizes elementares.

Conjunto de exercícios 1.5

1. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, o resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **7–8**, use as matrizes a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ ◀

7. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EA = B$ (b) $EB = A$

(c) $EA = C$ (d) $EC = A$

8. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EB = D$ (b) $ED = B$

(c) $EB = F$ (d) $EF = B$

▶ Nos Exercícios **9–24**, use o algoritmo de inversão para encontrar a inversa da matriz dada, se essa inversa existir. ◀

9. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **25–26**, em cada parte, encontre a inversa da matriz 4×4 dada, em que k_1, k_2, k_3, k_4 e k são todos não nulos. ◀

25. (a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–28**, encontre todos os valores de c, se houver, com os quais a matriz dada é invertível. ◀

27. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **29–32**, escreva a matriz dada como um produto de matrizes elementares. ◀

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **33–36**, escreva a *inversa* da matriz dada como um produto de matrizes elementares. ◀

33. A matriz do Exercício 29.

34. A matriz do Exercício 30.

35. A matriz do Exercício 31.

36. A matriz do Exercício 32.

▶ Nos Exercícios **37–38**, mostre que as matrizes A e B dadas são equivalentes por linhas, e encontre uma sequência de operações elementares com linhas que produza B a partir de A. ◀

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

39. Mostre que, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

for uma matriz elementar, então pelo menos uma das entradas da terceira linha deve ser nula.

40. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível, com qualquer valor das entradas.

41. Prove que se A e B forem matrizes $m \times n$, então A e B são equivalentes por linhas se, e só se, A e B têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.

42. Prove que se A for uma matriz invertível e B for equivalente por linhas a A, então B também é invertível.

43. Mostre que se B for obtida de A por meio de uma sequência de operações elementares com linhas, então existe uma segunda sequência de operações elementares com linhas que, aplicada a B, produz A.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O produto de duas matrizes elementares de mesmo tamanho é uma matriz elementar.

(b) Toda matriz elementar é invertível.

(c) Se A e B são equivalentes por linhas e B e C são equivalentes por linhas, então A e C são equivalentes por linhas.

(d) Se A for uma matriz não invertível $n \times n$, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem uma infinidade de soluções.

(e) Se A for uma matriz não invertível $n \times n$, então a matriz obtida pela troca de duas linhas de A não pode ser invertível.

(f) Se A for uma matriz invertível, e um múltiplo da primeira linha de A for somado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.

(g) É única a expressão de uma matriz invertível A como um produto de matrizes elementares.

1.6 Mais sobre sistemas lineares e matrizes invertíveis

Nesta seção, mostramos como a inversa de uma matriz pode ser usada para resolver um sistema linear e desenvolvemos mais resultados sobre matrizes invertíveis.

Número de soluções de um sistema linear

Na Seção 1.1, afirmamos (tomando por base as Figuras 1.1.1 e 1.1.2) que todo sistema linear tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma solução, ou uma infinidade de soluções. Agora estamos em condições de provar esse resultado fundamental.

TEOREMA 1.6.1 *Um sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.*

Prova Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é um sistema de equações lineares, vale exatamente uma das afirmações: (a) o sistema não tem solução, (b) o sistema tem exatamente uma solução ou (c) o sistema tem mais de uma solução. A prova estará completa se conseguirmos mostrar que o sistema tem uma infinidade de soluções no caso (c).

Suponha que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenha mais de uma solução e seja $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, onde $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são duas soluções distintas quaisquer. Como $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são distintas, a matriz $\mathbf{x}_0$ é não nula; além disso,

$$A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Se k for um escalar qualquer, então

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0) &= A\mathbf{x}_1 + A(k\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + k(A\mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{b} + k\mathbf{0} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

No entanto, isso significa que $\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Como $\mathbf{x}_0$ é não nula e existe uma infinidade de escolhas para k, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma infinidade de soluções. ◀

Resolvendo sistemas lineares por inversão matricial

Até aqui, estudamos dois *procedimentos* para resolver sistemas lineares, a saber, a eliminação de Gauss-Jordan e a eliminação gaussiana. O teorema seguinte fornece, efetivamente, uma *fórmula* para a solução de um sistema linear de n equações em n incógnitas no caso em que a matriz de coeficientes for invertível.

TEOREMA 1.6.2 *Se A for uma matriz invertível $n \times 1$, então para cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução, a saber, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.*

Prova Como $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, segue que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para mostrar que essa é a única solução, vamos supor que $\mathbf{x}_0$ seja uma solução arbitrária e mostrar que, necessariamente, $\mathbf{x}_0$ é a solução $A^{-1}\mathbf{b}$.

Se $\mathbf{x}_0$ for uma solução qualquer, então $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Multiplicando ambos lados dessa equação por A^{-1}, obtemos $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b}$. ◀

▶ EXEMPLO 1 Solução de um sistema linear usando A^{-1}

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

No formato matricial, esse sistema pode ser escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

No Exemplo 4 da seção precedente, mostramos que A é invertível e que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 1.6.2, a solução do sistema é

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$. ◀

Não esqueça que o método do Exemplo 1 só pode ser aplicado quando o sistema tiver o mesmo número de equações e incógnitas, e a matriz de coeficientes for invertível.

Sistemas lineares com uma matriz de coeficientes em comum

Com frequência, nos deparamos com a resolução de uma sequência de sistemas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \ldots, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$$

cada um dos quais tem a mesma matriz de coeficientes A. Se A for invertível, então as soluções

$$\mathbf{x}_1 = A^{-1}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{x}_2 = A^{-1}\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{x}_3 = A^{-1}\mathbf{b}_3, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = A^{-1}\mathbf{b}_k$$

podem ser obtidas com uma inversão matricial e k multiplicações de matrizes. Uma maneira eficiente de fazer isso é formar a matriz em blocos

$$[A \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k] \tag{1}$$

em que a matriz de coeficientes A foi "aumentada" por todas as k matrizes $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, e, em seguida, reduzir (1) à forma escalonada reduzida por linhas com eliminação de Gauss-Jordan. Dessa forma, podemos resolver todos os k sistemas de uma só vez. Esse método tem a vantagem adicional de poder ser aplicado mesmo se A não for invertível.

▶ EXEMPLO 2 Resolvendo dois sistemas lineares de uma só vez

Resolva os sistemas

(a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solução Os dois sistemas têm a mesma matriz de coeficientes. Aumentando essa matriz de coeficientes com as colunas das constantes à direita desses sistemas, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

Reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas, obtemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Segue das duas últimas colunas que a solução do sistema (a) é $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ e a do sistema (b) é $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$. ◀

Propriedades de matrizes invertíveis

Até aqui, para mostrar que uma matriz A de tamanho $n \times n$ é invertível, tem sido necessário encontrar uma matriz B de tamanho $n \times n$ tal que

$$AB = I \quad \text{e} \quad BA = I$$

O próximo teorema mostra que, se obtivermos uma matriz B de tamanho $n \times n$ satisfazendo *qualquer uma* dessas condições, então a outra condição é automaticamente válida.

TEOREMA 1.6.3 *Seja A uma matriz quadrada.*

(*a*) *Se B for uma matriz quadrada satisfazendo* $BA = I$, *então* $B = A^{-1}$.

(*b*) *Se B for uma matriz quadrada satisfazendo* $AB = I$, *então* $B = A^{-1}$.

Provamos a parte (*a*) e deixamos a parte (*b*) como exercício.

Prova (a) Suponha que $BA = I$. Se conseguirmos mostrar que A é invertível, a prova poderá ser completada multiplicando $BA = I$ de ambos lados por A^{-1} para obter

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \quad \text{ou} \quad BI = IA^{-1} \quad \text{ou} \quad B = A^{-1}$$

Para mostrar que A é invertível, é suficiente mostrar que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem só a solução trivial (ver Teorema 1.5.3). Seja $\mathbf{x}_0$ uma solução qualquer desse sistema. Multiplicando ambos lados de $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ à esquerda por B, obteremos $BA\mathbf{x}_0 = B\mathbf{0}$, $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Assim, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial. ◀

Teorema da equivalência

Agora estamos em condições de acrescentar mais duas afirmações equivalentes às quatro dadas no Teorema 1.5.3.

TEOREMA 1.6.4 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é* I_n.

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

Prova Como no Teorema 1.5.3 já provamos que (*a*), (*b*), (*c*) e (*d*) são equivalentes, é suficiente provar que $(a) \Rightarrow (f) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$.

(*a*) ⇒ (*f*) Isso já foi provado no Teorema 1.6.2.

(*f*) ⇒ (e) Isso é quase evidente, pois, se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiver exatamente uma solução, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, então $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ será consistente, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.

(e) ⇒ (*a*) Se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for consistente, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, então, em particular, são consistentes os sistemas

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluções desses sistemas, respectivamente, e formemos uma matriz C de tamanho $n \times n$ tendo essas soluções como colunas. Assim, C tem a forma

$$C = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n]$$

Como já discutimos na Seção 1.3, as sucessivas colunas do produto AC são

$$A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n$$

[ver Fórmula (8) da Seção 1.3.]. Assim,

$$AC = [A\mathbf{x}_1 \mid A\mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Pela parte (*b*) do Teorema 1.6.3, segue que $C = A^{-1}$. Assim, A é invertível. ◀

Segue da equivalência das partes (*e*) e (*f*) que, se conseguirmos mostrar que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem *pelo menos uma* solução, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, então podemos concluir que há *exatamente uma* solução, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.

Sabemos de trabalho anterior que fatores matriciais invertíveis produzem um produto invertível. Reciprocamente, o teorema a seguir mostra que se o produto de matrizes quadradas for invertível, então os próprios fatores devem ser invertíveis.

TEOREMA 1.6.5 *Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho. Se AB for invertível, então A e B também serão invertíveis.*

O problema fundamental a seguir ocorrerá com frequência em vários contextos no nosso trabalho.

> **Um problema fundamental** Seja A uma matriz $m \times n$ fixada. Encontre todas as matrizes $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$ tais que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja consistente.

Se A for uma matriz invertível, o Teorema 1.6.2 resolve esse problema completamente afirmando que, com *qualquer* matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem a única solução $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se A não for quadrada, ou se A for quadrada, mas não invertível, então o Teorema 1.6.2 não pode ser aplicado. Nesses casos, geralmente a matriz $\mathbf{b}$ deve satisfazer certas condições para garantir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja consistente. O próximo exemplo ilustra como os métodos da Seção 1.2 podem ser usados para determinar tais condições.

► EXEMPLO 3 Determinando consistência por eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2, e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

seja consistente?

Solução A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

que pode ser reduzida à forma escalonada, como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \quad \longleftarrow \text{ -1 vez a primeira linha foi somada à segunda e -2 vezes a primeira linha foi somada à terceira.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \quad \longleftarrow \text{ A segunda linha foi multiplicada por -1.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} \quad \longleftarrow \text{ A segunda linha foi somada à terceira.}$$

Agora é evidente, pela terceira linha da matriz, que o sistema tem uma solução se, e só se, b_1, b_2 e b_3 satisfazem a condição

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Para expressar essa condição de uma outra maneira, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ é uma matriz da forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

em que b_1 e b_2 são arbitrários.

▶ **EXEMPLO 4 Determinando consistência por eliminação**

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 \qquad\;\; + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

seja consistente?

Solução A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas, obtemos (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Nesse caso, não há restrições sobre b_1, b_2 e b_3, de modo que o sistema tem a única solução

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{3}$$

com quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3. ◀

O que o resultado do Exemplo 4 nos diz sobre a matriz de coeficientes do sistema?

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um sistema de equações lineares não tem solução, tem exatamente uma solução ou uma infinidade de soluções.
- Resolver sistemas lineares invertendo a matriz de coeficientes.
- Resolver simultaneamente sistemas lineares múltiplos com a mesma matriz de coeficientes.
- Conhecer as condições adicionais de invertibilidade enunciadas no Teorema de Equivalência.

Conjunto de exercícios 1.6

▶ Nos Exercícios **1–8**, resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2. ◀

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} - x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **9–12**, resolva simultaneamente os sistemas lineares reduzindo a matriz aumentada apropriada. ◀

9. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 1, \quad b_2 = 4$ (ii) $b_1 = -2, \quad b_2 = 5$

10. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0$
(ii) $b_1 = -3, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = -5$

11. $\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1$ (ii) $b_1 = -4, \quad b_2 = 6$
(iii) $b_1 = -1, \quad b_2 = 3$ (iv) $b_1 = -5, \quad b_2 = 1$

12.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

(i) $b_1 = 1,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = -1$
(ii) $b_1 = 0,\quad b_2 = 1,\quad b_3 = 1$
(iii) $b_1 = -1,\quad b_2 = -1,\quad b_3 = 0$

▶ Nos Exercícios **13–17**, determine, se houver, as condições que as constantes b devem satisfazer para garantir a consistência do sistema linear dado. ◀

13.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

18. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pode ser reescrita como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use esse resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$.

(b) Resolva $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

▶ Nos Exercícios **19–20**, resolva a equação matricial dada para X. ◀

19.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20.
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

21. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas cuja única solução é a trivial. Mostre que se k for um inteiro positivo qualquer, então o sistema $A^k\mathbf{x} = 0$ também só tem a solução trivial.

22. Sejam $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas e Q uma matriz invertível $n \times n$. Mostre que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial se, e só se, $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

23. Sejam $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de equações lineares consistente arbitrário e $\mathbf{x}_1$ uma solução fixada. Mostre que qualquer solução do sistema pode ser escrita na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, em que $\mathbf{x}_0$ é a solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Mostre, também, que qualquer matriz dessa forma é uma solução.

24. Use a parte (a) do Teorema 1.6.3 para provar a parte (b).

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) É impossível que um sistema de equações lineares tenha exatamente duas soluções.

(b) Se A é uma matriz quadrada, e se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ também tem uma única solução.

(c) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

(d) Se A e B são matrizes equivalentes por linhas, então os sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ têm o mesmo conjunto de soluções.

(e) Sejam A uma matriz $n \times n$ e S uma matriz $n \times n$ invertível. Se $\mathbf{x}$ for uma solução do sistema linear $(S^{-1}AS)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então $S\mathbf{x}$ será uma solução do sistema linear $A\mathbf{y} = S\mathbf{b}$.

(f) Seja A uma matriz $n \times n$. O sistema linear $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ tem uma solução única se, e só se, $A - 4I$ for uma matriz invertível.

(g) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se A ou B (ou ambas) não for invertível, então tampouco AB será invertível.

1.7 Matrizes diagonais, triangulares e simétricas

Nesta seção, discutimos matrizes que têm vários formatos especiais. Essas matrizes surgem numa grande variedade de aplicações e desempenham um papel importante no nosso trabalho subsequente.

Matrizes diagonais

Uma matriz quadrada em que todas as entradas fora da diagonal principal são zero é denominada ***matriz diagonal***. Aqui temos alguns exemplos.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonal arbitrária D de tamanho $n \times n$ pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Uma matriz diagonal é invertível se, e só se, todas as suas entradas na diagonal são não nulas; nesse caso, a inversa de (1) é

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

Confirme a Fórmula (2) mostrando que

$$DD^{-1} = D^{-1}D = I$$

As potências de matrizes diagonais são fáceis de calcular; deixamos para o leitor verificar que se D for a matriz diagonal (1) e k um inteiro positivo, então

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

► EXEMPLO 1 Inversas e potências de matrizes diagonais

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \quad A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$ ◄

Os produtos de matrizes que envolvem fatores diagonais são especialmente fáceis de calcular. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} & d_1a_{14} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} & d_2a_{24} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} & d_3a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & d_3a_{13} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & d_3a_{23} \\ d_1a_{31} & d_2a_{32} & d_3a_{33} \\ d_1a_{41} & d_2a_{42} & d_3a_{43} \end{bmatrix}$$

Em palavras, *para multiplicar uma matriz A à esquerda por uma matriz diagonal D, podemos multiplicar as linhas sucessivas de A pelas entradas sucessivas na diagonal de D e, para multiplicar A à direita por D, podemos multiplicar as colunas sucessivas de A pelas entradas sucessivas na diagonal de D.*

Matrizes triangulares

Uma matriz quadrada com todas as entradas acima da diagonal principal nulas é denominada ***triangular inferior***, e uma matriz quadrada com todas as entradas abaixo da diagonal principal nulas é denominada ***triangular superior***. Dizemos que uma matriz triangular inferior ou triangular superior é ***triangular***.

▶ EXEMPLO 2 Matrizes triangulares superiores e inferiores

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular superior 4×4 arbitrária.

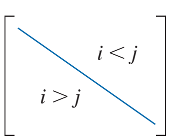
Uma matriz triangular inferior 4×4 arbitrária. ◀

Observação Observe que matrizes diagonais são triangulares inferiores e superiores, pois têm zeros acima e abaixo da diagonal principal. Observe também que uma matriz *quadrada* em forma escalonada é triangular superior, pois tem zeros abaixo da diagonal principal.

Propriedades de matrizes triangulares

O Exemplo 2 ilustra os quatro fatos seguintes sobre matrizes triangulares que enunciamos sem demonstrações formais.

- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se, e só se, todas as entradas à esquerda da diagonal principal são nulas, ou seja, $a_{ij} = 0$ com $i > j$ (Figura 1.7.1).
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se, e só se, todas as entradas à direita da diagonal principal são nulas, ou seja, $a_{ij} = 0$ com $i < j$ (Figura 1.7.1).
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se, e só se, para cada i, a i–ésima linha começa com, pelo menos, $i - 1$ zeros.
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se, e só se, para cada j, a j–ésima coluna começa com, pelo menos, $j - 1$ zeros.



▲ **Figura 1.7.1**

O teorema a seguir lista algumas das propriedades de matrizes triangulares.

TEOREMA 1.7.1

(*a*) *A transposta de uma matriz triangular inferior é triangular superior, e a transposta de uma matriz triangular superior é triangular inferior.*

(*b*) *O produto de matrizes triangulares inferiores é triangular inferior, e o produto de matrizes triangulares superiores é triangular superior.*

(*c*) *Uma matriz triangular é invertível se, e só se, suas entradas diagonais são todas não nulas.*

(*d*) *A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é triangular inferior, e a inversa de uma matriz triangular superior invertível é triangular superior.*

A parte (*a*) é evidente, pois transpor uma matriz quadrada corresponde a refletir suas entradas em torno da diagonal principal; omitimos a prova formal. Provamos (*b*), mas vamos adiar as provas de (*c*) e (*d*) para o próximo capítulo, onde teremos as ferramentas necessárias para provar esses resultados de maneira mais eficiente.

Prova (b) Provamos o resultado para matrizes triangulares inferiores; a prova para matrizes triangulares superiores é análoga. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes $n \times n$ triangulares inferiores e seja $C = [c_{ij}]$ o produto $C = AB$. Podemos provar que C é triangular inferior mostrando que $c_{ij} = 0$, com $i < j$. Mas, pela definição de multiplicação matricial,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Supondo que $i < j$, os termos dessa expressão podem ser agrupados como segue.

$$c_{ij} = \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i(j-1)}b_{(j-1)j}}_{\substack{\textbf{Termos com o número de} \\ \textbf{linha de } b \textbf{ menor do que} \\ \textbf{o número de coluna de } b}} + \underbrace{a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}}_{\substack{\textbf{Termos com o número de} \\ \textbf{linha de } a \textbf{ menor do que} \\ \textbf{o número de coluna de } a}}$$

No primeiro agrupamento, todos os fatores de b são nulos, pois B é triangular inferior e, no segundo agrupamento, todos os fatores de a são nulos, pois A é triangular inferior. Assim, $c_{ij} = 0$, que é o que queríamos mostrar. ◀

▶ EXEMPLO 3 Contas com matrizes triangulares

Considere as matrizes triangulares superiores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue da parte (c) do Teorema 1.7.1 que a matriz A é invertível, mas a matriz B não é. Além disso, o teorema também nos diz que A^{-1}, AB e BA são triangulares superiores. Deixamos para o leitor a confirmação dessas três afirmações, mostrando que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Matrizes simétricas

DEFINIÇÃO 1 Uma matriz quadrada A é dita ***simétrica*** se $A = A^T$.

▶ EXEMPLO 4 Matrizes simétricas

As seguintes matrizes são simétricas, já que cada uma delas é igual à sua transposta (verifique).

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Observação Segue da Fórmula (11) da Seção 1.3 que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se, e só se,

$$(A)_{ij} = (A)_{ji} \tag{4}$$

com quaisquer valores de i e j.

O teorema seguinte lista as principais propriedades algébricas das matrizes simétricas. As provas são consequências diretas do Teorema 1.4.8 e são omitidas.

É fácil reconhecer visualmente a simetria de uma matriz: as entradas na diagonal principal não têm restrições, mas as entradas que estão posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal devem ser iguais. Segue uma figura usando a segunda matriz do Exemplo 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Todas as matrizes diagonais, como a terceira matriz do Exemplo 4, têm essa propriedade.

TEOREMA 1.7.2 *Sendo A e B matrizes simétricas de mesmo tamanho e k um escalar qualquer, então*

(*a*) A^T *é simétrica.*

(*b*) $A + B$ *e* $A - B$ *são simétricas.*

(*c*) kA *é simétrica.*

Não é verdade, em geral, que o produto de matrizes simétricas seja uma matriz simétrica. Para ver por que isso ocorre, sejam A e B matrizes simétricas de mesmo tamanho. Pela parte (*e*) do Teorema 1.4.8 e a simetria de A e B, temos

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

Assim, $(AB)^T = AB$ se, e só se, $AB = BA$, isto é, se, e só se, A e B comutam. Em resumo, obtivemos o resultado seguinte.

TEOREMA 1.7.3 *O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e só se, as matrizes comutam.*

▶ EXEMPLO 5 Produtos de matrizes simétricas

A primeira das equações a seguir mostra um produto de matrizes simétricas que *não* é uma matriz simétrica, e a segunda mostra um produto de matrizes simétricas que *é* uma matriz simétrica. Concluímos que os fatores da primeira equação não comutam, mas que os da segunda comutam. Deixamos para o leitor verificar que isso ocorre.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Invertibilidade de matrizes simétricas

Em geral, uma matriz simétrica não precisa ser invertível; por exemplo, uma matriz quadrada com um zero na diagonal principal é simétrica, mas não é invertível. Contudo, o próximo teorema mostra que se ocorrer que uma matriz simétrica é invertível, então sua inversa também é simétrica.

TEOREMA 1.7.4 *Se A for uma matriz simétrica invertível, então* A^{-1} *é simétrica.*

Prova Suponha que A seja simétrica e invertível. Pelo Teorema 1.4.9 e pelo fato de que $A = A^T$, decorre

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

provando que A^{-1} é simétrica. ◀

Produtos AA^T *e* A^TA

Numa variedade de aplicações, surgem produtos matriciais da forma AA^T e A^TA. Se A for uma matriz $m \times n$, então A^T é uma matriz $n \times m$, de modo que ambos produtos AA^T e A^TA são matrizes quadradas, a matriz AA^T de tamanho $m \times m$ e a matriz A^TA de tamanho $n \times n$. Esses produtos são sempre simétricos, pois

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T \quad \text{e} \quad (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

▶ **EXEMPLO 6 O produto de uma matriz e sua transposta é uma matriz simétrica**

Seja A a matriz 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe que A^TA e AA^T são simétricas, como se esperava. ◀

Adiante, neste texto, obteremos condições gerais sobre A sob as quais AA^T e A^TA são invertíveis. Contudo, no caso especial em que A é *quadrada*, temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.7.5 *Se A for uma matriz invertível, então AA^T e A^TA também serão invertíveis.*

Prova Como A é invertível, também A^T é invertível, pelo Teorema 1.4.9. Assim, AA^T e A^TA são invertíveis, por serem produtos de matrizes invertíveis. ◀

Revisão de conceitos

- Matriz diagonal
- Matriz triangular inferior
- Matriz triangular superior
- Matriz triangular
- Matriz simétrica

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz diagonal é invertível sem fazer contas.
- Calcular mentalmente produtos matriciais envolvendo matrizes diagonais.
- Determinar se uma matriz é triangular.
- Entender como a transposição afeta matrizes diagonais e triangulares.
- Entender como a inversão afeta matrizes diagonais e triangulares.
- Determinar se uma matriz é simétrica.

Conjunto de exercícios 1.7

▶ Nos Exercícios **1–4**, determine se a matriz dada é invertível. ◀

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–8**, determine o produto por inspeção. ◀

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 9–12, encontre por inspeção A^2, A^{-2} e A^{-k} (sendo k um inteiro qualquer). ◀

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 13–19, decida se a matriz é simétrica. ◀

13. $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 20–22, decida por inspeção se a matriz é invertível. ◀

20. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 23–24, encontre todos os valores das constantes desconhecidas que tornam a matriz A simétrica. ◀

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 25–26, encontre todos os valores de x que tornam a matriz A invertível. ◀

25. $A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x & x-\frac{1}{3} & 0 \\ x^2 & x^3 & x+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 27–28, encontre uma matriz diagonal A que satisfaz a condição dada. ◀

27. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

28. $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. Verifique o Teorema 1.7.1(b) para o produto AB, com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

30. Verifique o Teorema 1.7.1(d) para as matrizes A e B do Exercício 29.

31. Em cada parte, verifique o Teorema 1.7.4 para a matriz dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

32. Seja A uma matriz simétrica $n \times n$.

(a) Mostre que A^2 é simétrica.

(b) Mostre que $2A^2 - 3A + I$ é simétrica.

33. Prove que se $A^TA = A$, então A é simétrica e $A = A^2$.

34. Encontre todas as matrizes diagonais A de tamanho 3×3 que satisfazem $A^2 - 3A - 4I = 0$.

35. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Em cada caso, determine se A é simétrica.

(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

(c) $a_{ij} = 2i + 2j$ (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

36. Usando sua experiência com o Exercício 35, projete um teste geral que possa ser aplicado a uma fórmula para a_{ij} para determinar se $A = [a_{ij}]$ é simétrica.

37. Dizemos que uma matriz quadrada A é ***antissimétrica*** se $A^T = -A$. Prove cada afirmação dada.

(a) Se A for uma matriz antissimétrica invertível, então A^{-1} é antissimétrica.

(b) Se A e B são antissimétricas, então também o são A^T, $A + B$, $A - B$ e kA, com qualquer escalar k.

(c) Toda matriz quadrada A pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. [*Sugestão*: observe a identidade $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.]

▶ Nos Exercícios **38–39**, preencha as entradas marcadas com um $\times$ para produzir uma matriz antissimétrica. ◀

38. $A = \begin{bmatrix} \times & \times & 4 \\ 0 & \times & \times \\ \times & -1 & \times \end{bmatrix}$ **39.** $A = \begin{bmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & -4 \\ 8 & \times & \times \end{bmatrix}$

40. Encontre todos os valores de a, b, c e d com os quais A é antissimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2a - 3b + c & 3a - 5b + 5c \\ -2 & 0 & 5a - 8b + 6c \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$$

41. Mostramos no Teorema 1.7.3 que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e só se, as matrizes comutam. Será o produto de matrizes antissimétricas que comutam uma matriz antissimétrica? Explique. [*Observação*: ver Exercício 37 para a definição de antissimétrica.]

42. Se a matriz A de tamanho $n \times n$ pode ser expressa como $A = LU$, em que L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e pode ser, portanto, resolvido em dois passos, como segue.

Passo 1. Seja $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, de modo que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrito como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolva esse sistema.

Passo 2. Resolva o sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ em $\mathbf{x}$.

Em cada parte, use esse método de dois passos para resolver o sistema dado.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

43. Encontre uma matriz triangular superior que satisfaça

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(m), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A transposta de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

(b) A transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular superior.

(c) A soma de uma matriz triangular superior e uma triangular inferior é uma matriz diagonal.

(d) Todas as entradas de uma matriz simétrica são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(e) Todas as entradas de uma matriz triangular superior são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(f) A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é uma matriz triangular superior.

(g) Uma matriz diagonal é invertível se, e só se, todas as entradas diagonais são positivas.

(h) A soma de uma matriz diagonal e uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular inferior.

(i) Uma matriz simétrica e triangular superior é diagonal.

(j) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é simétrica, então A e B são simétricas.

(k) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é triangular superior, então A e B são triangulares superiores.

(l) Se A^2 for simétrica, então A será uma matriz simétrica.

(m) Se kA for uma matriz simétrica com algum $k \neq 0$, então A será uma matriz simétrica.

1.8 Aplicações de sistemas lineares

Nesta seção, discutiremos resumidamente algumas aplicações de sistemas lineares. Essa é apenas uma pequena amostragem da ampla variedade de problemas do mundo real aos quais é aplicável nosso estudo de sistemas lineares.

Análise de redes

O conceito de *rede* aparece numa variedade de aplicações. Em termos gerais, uma ***rede*** é um conjunto de ***ramos*** através dos quais "flui" algum meio. Os ramos, por exemplo, podem ser fios elétricos através dos quais flui corrente elétrica, canos através dos quais flui água ou petróleo, ruas de uma cidade pelas quais fluem veículos, ou conexões financeiras pelas quais flui dinheiro, para citar apenas alguns.

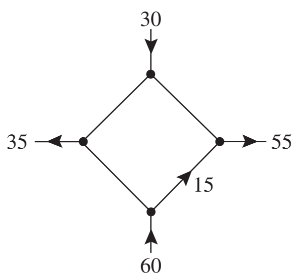
Os ramos da maioria das redes se encontram em pontos denominados ***nós*** ou ***vértices***, nos quais o fluxo divide. Por exemplo, numa rede elétrica, os nós ocorrem onde três ou mais fios se juntam; na rede do trânsito, eles ocorrem em cruzamentos de ruas; e numa rede financeira, eles ocorrem em centros bancários, nos quais o dinheiro é distribuído a indivíduos ou outras instituições.

No estudo de redes, existe, em geral, alguma medida numérica da taxa segundo a qual o meio flui ao longo do ramo. Por exemplo, o fluxo de uma corrente elétrica, em geral, é medido em ampères; a taxa de fluxo da água ou petróleo, em litros por minuto; a do fluxo do trânsito, em veículos por hora; e a taxa do fluxo de moeda europeia, em milhões de euros por dia. Vamos restringir nossa atenção às redes em que há ***conservação do fluxo*** em cada nó, com o que queremos dizer que *a taxa de fluxo para dentro de qualquer nó é igual à taxa de fluxo para fora desse nó*. Isso garante que o meio não se acumula nos nós e não impede o movimento livre do meio ao longo da rede.

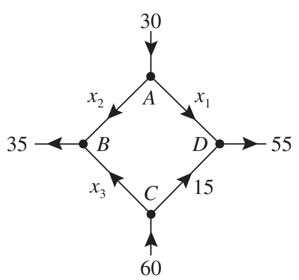
Um problema comum na análise de redes é usar taxas de fluxo conhecidas em certos ramos para encontrar a taxa de fluxo em todos os demais ramos da rede. Aqui temos um exemplo.

▶ EXEMPLO 1 Análise de redes usando sistemas lineares

A Figura 1.8.1 mostra uma rede de quatro nós com indicação de algumas taxas de fluxo e sentido do fluxo ao longo de ramos. Encontre as taxas de fluxo e o sentido do fluxo nos demais ramos.



▲ Figura 1.8.1



▲ Figura 1.8.2

Solução Como ilustra a Figura 1.8.2, associamos sentidos arbitrários para as taxas de fluxos x_1, x_2 e x_3. Não precisamos nos preocupar com a veracidade desses sentidos, pois um sentido incorreto acabará recebendo um valor negativo para a taxa de fluxo quando tivermos resolvido para as incógnitas.

Segue da conservação do fluxo no nó A que

$$x_1 + x_2 = 30$$

Analogamente, nos demais nós, obtemos

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 35 \quad \text{(nó B)} \\ x_3 + 15 &= 60 \quad \text{(nó C)} \\ x_1 + 15 &= 55 \quad \text{(nó D)} \end{aligned}$$

Essas quatro condições produzem o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 30 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 35 \\ & & & & x_3 & = & 45 \\ x_1 & & & & & = & 40 \end{array}$$

que podemos, agora, tentar resolver para as taxas de fluxo desconhecidas. Nesse caso particular, o sistema é suficientemente simples para resolvê-lo sem fazer contas (de baixo para cima). Deixamos para o leitor confirmar que a solução é

$$x_1 = 40, \quad x_2 = -10, \quad x_3 = 45$$

Como x_2 é negativo, vemos que o sentido do fluxo naquele ramo da Figura 1.8.2 está incorreto, pois o fluxo naquele ramo é *para dentro* do nó A.

▶ EXEMPLO 2 Projetando padrões de tráfego

A rede da Figura 1.8.3 mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

(a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

(b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?

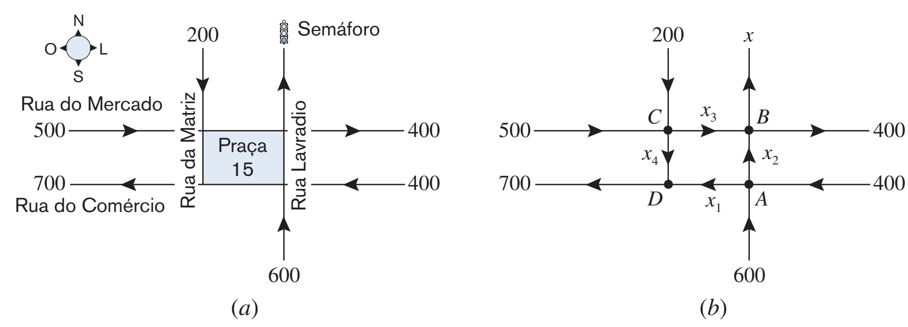


Figura 1.8.3

Solução (a) Se x for o número de veículos por hora que o semáforo deve deixar passar, conforme Figura 1.8.3(b), então o número total de veículos por hora que entra e sai do complexo da praça será

Para dentro: $500 + 400 + 600 + 200 = 1.700$
Para fora: $x + 700 + 400$

Igualando os fluxos para fora e para dentro, vemos que o semáforo deveria deixar passar 600 veículos por hora.

Solução (b) Para evitar congestionamentos de trânsito, o fluxo para dentro de cada cruzamento deve igualar o fluxo para fora do cruzamento. Para isso acontecer, as condições seguintes devem estar satisfeitas.

Cruzamento	Fluxo para dentro		Fluxo para fora
A	$400 + 600$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$=$	$400 + x$
C	$500 + 200$	$=$	$x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	$=$	700

Assim, com $x = 600$, como calculamos na parte (a), obtemos o sistema linear seguinte.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1.000 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1.000 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & = & 700 \\
x_1 & & & & & + & x_4 & = & 700
\end{array}
$$

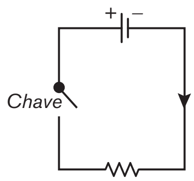
Deixamos para o leitor mostrar que esse sistema tem uma infinidade de soluções e que estas são dadas pelas equações paramétricas

$$x_1 = 700 - t, \quad x_2 = 300 + t, \quad x_3 = 700 - t, \quad x_4 = t \tag{1}$$

Contudo, nesse exemplo, o parâmetro t não é completamente arbitrário, pois há restrições físicas a considerar. Por exemplo, as taxas de fluxo médias devem ser não negativas, pois estamos supondo ruas de mão única, e uma taxa de fluxo negativa indicaria um fluxo na contramão. Portanto, vemos de (1) que t pode ser qualquer número real que satisfaça $0 \leq t \leq 700$, o que implica que a taxa de fluxo média ao longo das ruas ficará dentro das cotas

$$0 \leq x_1 \leq 700, \quad 300 \leq x_2 \leq 1.000, \quad 0 \leq x_3 \leq 700, \quad 0 \leq x_4 \leq 700$$ ◀

Circuitos elétricos

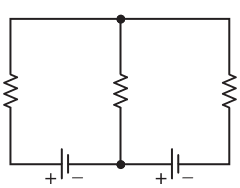


▲ **Figura 1.8.4**

Em seguida, mostramos como a análise de redes pode ser usada para analisar circuitos elétricos constituídos de capacitores e resistores. Um ***capacitor*** é uma fonte de energia elétrica, como uma bateria, e um ***resistor*** é um elemento que dissipa energia elétrica, como uma lâmpada. A Figura 1.8.4 mostra o diagrama esquemático de um circuito com um capacitor (representado pelo símbolo ⊣⊢), um resistor (representado pelo símbolo –∧∧∧–) e uma chave. O capacitor tem um ***polo positivo*** (+) e um ***polo negativo*** (−). Quando a chave está fechada, consideramos a corrente elétrica fluindo a partir do polo positivo do capacitor, através do resistor, e de volta ao polo negativo do capacitor (indicado pela seta na figura).

A corrente elétrica, que é um fluxo de elétrons por fios, tem um comportamento muito parecido com o do fluxo de água por canos. Um capacitor funciona como uma bomba que cria "pressão elétrica" para aumentar a taxa de fluxo dos elétrons, e um resistor age como uma restrição num cano que reduz a taxa de fluxo dos elétrons. O termo técnico para a pressão elétrica é ***tensão elétrica***, que usualmente é medida em ***volts*** (V). A ***resistência*** é o quanto o resistor reduz a tensão elétrica, e costuma ser medida em ***ohms*** (Ω). A taxa de fluxo dos elétrons num fio é denominada a intensidade de ***corrente***, e é usualmente medida em ***ampères*** (A). O efeito preciso de um resistor é dado pela seguinte lei.

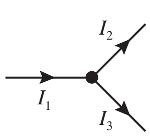
> **Lei de Ohm** Se uma corrente de I ampères passa por um resistor com uma resistência de R ohms, então o resultado é uma queda da tensão elétrica de E volts, que é o produto da corrente pela resistência, ou seja,
>
> $$E = IR$$



▲ **Figura 1.8.5**

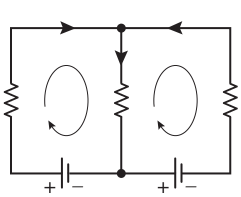
Uma rede elétrica típica possui vários capacitores e resistores ligados por alguma configuração de fios. Um ponto no qual três ou mais fios da rede se encontram é um ***nó*** da rede. Um ***ramo*** é um fio ligando dois nós, e um ***laço fechado*** é uma sucessão de ramos conectados que começa e termina no mesmo nó. Por exemplo, o circuito elétrico da Figura 1.8.5 tem dois nós e três laços fechados, dois internos e um externo. À medida que a corrente flui pelo circuito elétrico, ela passa por aumentos e diminuições de tensão elétrica, que são as ***elevações*** e as ***quedas*** de voltagem, respectivamente. O comportamento da corrente nos nós e em torno de laços fechados é governado por duas leis fundamentais.

> **Lei das correntes de Kirchhoff** A soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.



▲ **Figura 1.8.6**

> **Lei das tensões de Kirchhoff** Em uma volta em torno de qualquer laço fechado, a soma das elevações de voltagem é igual à soma das quedas de voltagem.



Convenção de laço fechado horário com sentidos arbitrários atribuídos às correntes nos ramos

▲ **Figura 1.8.7**

A lei das correntes de Kirchhoff é uma versão para circuitos elétricos do princípio da conservação do fluxo num nó, que enunciamos para redes gerais. Assim, por exemplo, as correntes no nó superior da Figura 1.8.6 satisfazem a equação $I_1 = I_2 + I_3$.

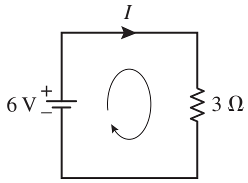
Em geral, não é possível saber de antemão os sentidos nos quais estão fluindo as correntes em circuitos com vários laços e capacitores; por isso, na análise de circuitos, é costume atribuir sentidos *arbitrários* aos fluxos das correntes nos vários ramos e deixar os cálculos matemáticos determinarem se os sentidos atribuídos estão corretos. Além de atribuir sentidos aos fluxos de corrente, a lei das tensões de Kirchhoff requer um sentido de percurso para cada laço fechado. A escolha é sempre arbitrária, mas para obter alguma consistência, sempre tomaremos esse sentido como sendo o *horário* (Figura 1.8.7). Também introduzimos as seguintes convenções.

- Se o sentido associado à corrente através do resistor for o mesmo que o sentido associado ao laço, então ocorre uma queda de voltagem no resistor e, se o sentido associado à corrente através do resistor for o oposto do sentido associado ao laço, então ocorre uma elevação de voltagem no resistor.
- Se o sentido associado à corrente através do laço for de $-$ para $+$ num capacitor, então ocorre uma elevação de voltagem no capacitor e, se o sentido associado à corrente através do laço for de $+$ para $-$ num capacitor, então ocorre uma queda de voltagem no capacitor.

Seguindo essas convenções ao calcular intensidades de correntes, as correntes cujos sentidos de fluxo foram atribuídos corretamente serão positivas, e aquelas cujos sentidos de fluxo foram atribuídos incorretamente serão negativas.

▶ EXEMPLO 3 Um circuito com um laço fechado

Determine a corrente I do circuito mostrado na Figura 1.8.8.



▲ **Figura 1.8.8**

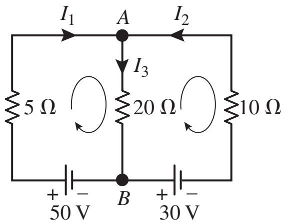
Solução Como o sentido atribuído à corrente pelo resistor é igual ao sentido do laço, temos uma queda de voltagem no resistor. Pela lei de Ohm, essa voltagem é $E = IR = 3I$. Além disso, como o sentido do laço é de $-$ para $+$ no capacitor, temos um aumento de voltagem de 6 volts no capacitor. Assim, pela lei das tensões de Kirchhoff, segue que

$$3I = 6$$

e concluímos que a corrente é $I = 2$A. Como I é positivo, está correto o sentido atribuído ao fluxo da corrente.

▶ EXEMPLO 4 Um circuito com três laços fechados

Determine as correntes I_1, I_2 e I_3 do circuito mostrado na Figura 1.8.9.



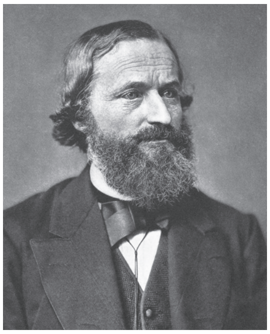
▲ **Figura 1.8.9**

Solução Usando os sentidos atribuídos às correntes, a lei das correntes de Kirchhoff fornece uma equação para cada nó:

Nó	Corrente para dentro		Corrente para fora
A	$I_1 + I_2$	$=$	I_3
B	I_3	$=$	$I_1 + I_2$

Contudo, essas equações realmente são iguais, pois ambas podem ser escritas como

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (2)$$



Gustav Kirchhoff (1824–1887)

Nota histórica O físico alemão Gustav Kirchhoff foi um aluno de Gauss. Seu trabalho sobre as leis que levam seu nome, anunciado em 1854, foi um avanço considerável no cálculo de correntes, voltagem e resistência de circuitos elétricos. Kirchhoff era severamente incapacitado, tendo passado a maior parte de sua vida de muletas ou em cadeira de rodas.

[Imagem: ©SSPL/The Image Works]

Para encontrar valores únicos para as correntes, vamos precisar de mais duas equações, que obtemos com a lei das tensões de Kirchhoff. Podemos ver, pelo diagrama do circuito, que há três laços fechados: um laço interno à esquerda com um capacitor de 50 V, um laço interno à direita com um capacitor de 30 V e o laço externo que contém ambos capacitores. Assim, a lei das tensões de Kirchhoff de fato fornece três equações. Num percurso horário dos laços, as quedas e as elevações de voltagem nesses três laços são como segue.

	Elevação de voltagem	**Queda de voltagem**
Laço interno à esquerda	50	$5I_1 + 20I_3$
Laço interno à direita	$30 + 10I_2 + 20I_3$	0
Laço externo	$30 + 50 + 10I_2$	$5I_1$

Essas condições podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} 5I_1 \qquad\quad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \\ 5I_1 - 10I_2 \qquad\quad &= 80 \end{aligned} \tag{3}$$

Contudo, por ser a diferença das duas primeiras, a última equação é supérflua. Assim, combinando (2) e as duas primeiras equações de (3), obtemos o sistema linear de três equações em três incógnitas que segue.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 5I_1 \qquad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor resolver esse sistema e mostrar que $I_1 = 6\text{A}$, $I_2 = -5$ A e $I_3 = 1A$. Como I_2 é negativo, vemos que o sentido da corrente é o oposto do indicado na Figura 1.8.9. ◀

Equilibrando equações químicas

Os componentes químicos são representados por ***fórmulas químicas*** que descrevem a composição atômica de suas moléculas. Por exemplo, a fórmula química da água é H_2O, pois é composta de dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio, e a fórmula química do oxigênio estável é O_2, pois é composto de dois átomos de oxigênio.

Quando combinamos compostos químicos sob condições corretas, os átomos de suas moléculas se rearranjam e formam novos componentes. Por exemplo, na queima de metano, o metano (CH_4) e o oxigênio estável (O_2) reagem para formar dióxido de carbono (CO_2), ou gás carbônico, e água (H_2O). Isso é indicado pela ***equação química***

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O \tag{4}$$

As moléculas à esquerda da seta são denominadas ***reagentes***, e as à direita são os ***produtos***. Nessa equação, o sinal de mais serve somente para separar as moléculas e não tem conotação de operação algébrica. Contudo, essa equação não conta toda a história, pois deixa de mencionar as proporções de moléculas necessárias para uma ***reação completa*** (sem sobra de reagentes). Por exemplo, podemos ver, no lado direito de (4), que, para produzir uma molécula de dióxido de carbono e uma molécula de água, precisamos de *três* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. Contudo, vemos, no lado esquerdo de (4), que uma molécula de metano e uma molécula de oxigênio estável têm somente *dois* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. Assim, para ter uma reação completa, a razão de metano para oxigênio estável do lado dos reagentes não pode ser de um para um.

Dizemos que uma reação química está ***equilibrada*** se aparecer o mesmo número de átomos em cada lado da seta para cada tipo de átomo na reação. Por exemplo, a versão equilibrada da Equação (4) é

$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O \tag{5}$$

com a qual queremos indicar que combinamos uma molécula de metano com duas de oxigênio estável para produzir uma molécula de gás carbônico e duas moléculas de água. Poderíamos perfeitamente multiplicar toda a equação por qualquer inteiro positivo. Por exemplo, multiplicando todos os termos por 2, obtemos a equação química equilibrada

$$2CH_4 + 4O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 4H_2O$$

Contudo, é convenção padrão utilizar os menores inteiros positivos que equilibram a equação.

A Equação (4) é suficientemente simples para ser equilibrada por tentativa e erro, mas equações químicas mais complicadas requerem um método mais sistemático. Existem vários métodos que podem ser usados, mas veremos um que usa sistemas de equações lineares. Para ilustrar o método, vamos reexaminar a Equação (4). Para equilibrar essa equação, precisamos encontrar inteiros x_1, x_2, x_3 e x_4 tais que

$$x_1\,(CH_4) + x_2\,(O_2) \longrightarrow x_3\,(CO_2) + x_4\,(H_2O) \tag{6}$$

Para cada um dos átomos da equação, o número de átomos à esquerda deve ser igual ao número de átomos à direita. Expresso em formato tabular, temos

	Lado esquerdo		**Lado direito**
Carbono	x_1	$=$	x_3
Hidrogênio	$4x_1$	$=$	$2x_4$
Oxigênio	$2x_2$	$=$	$2x_3 + x_4$

de onde obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 \phantom{{}-2x_4} &= 0 \\ 4x_1 \phantom{{}+2x_2-x_3} - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$$x_1 = t/2, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t/2, \quad x_4 = t$$

em que t é arbitrário. Os menores valores inteiros positivos para as incógnitas ocorrem quando tomamos $t = 2$, de modo que podemos equilibrar a equação tomando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Isso confere com nossa conclusão anterior, pois substituindo esses valores em (6), obtemos (5).

▶ EXEMPLO 5 Equilibrando equações químicas usando sistemas lineares

Equilibre a equação química

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{HCl} & + & \mathrm{Na_3PO_4} & \longrightarrow & \mathrm{H_3PO_4} & + & \mathrm{NaCl} \\ \textbf{[ácido clorídrico]} & + & \textbf{[fosfato de sódio]} & \longrightarrow & \textbf{[ácido fosfórico]} & + & \textbf{[cloreto de sódio]} \end{array}$$

Solução Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 inteiros positivos que equilibram a equação

$$x_1\,(\mathrm{HCl}) + x_2\,(\mathrm{Na_3PO_4}) \longrightarrow x_3\,(\mathrm{H_3PO_4}) + x_4\,(\mathrm{NaCl}) \tag{7}$$

Igualando o número de átomos de cada tipo de ambos lados, resulta

$$\begin{array}{rl} 1x_1 = 3x_3 & \textbf{Hidrogênio (H)} \\ 1x_1 = 1x_4 & \textbf{Cloro (Cl)} \\ 3x_2 = 1x_4 & \textbf{Sódio (Na)} \\ 1x_2 = 1x_3 & \textbf{Fósforo (P)} \\ 4x_2 = 4x_3 & \textbf{Oxigênio (O)} \end{array}$$

do que obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -\,3x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & -\,x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & & -\,x_4 & = 0 \\ & x_2\,- & x_3 & & = 0 \\ & 4x_2\,- & 4x_3 & & = 0 \end{array}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$$x_1 = t, \quad x_2 = t/3, \quad x_3 = t/3, \quad x_4 = t$$

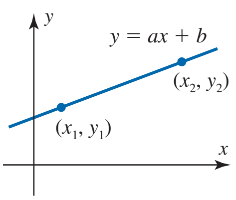
onde t é arbitrário. Para obter os menores valores inteiros positivos que equilibram a equação, tomamos $t = 3$, e resulta $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 3$. Substituindo esses valores em (7), obtemos a equação equilibrada

$$3\mathrm{HCl} + \mathrm{Na_3PO_4} \longrightarrow \mathrm{H_3PO_4} + 3\mathrm{NaCl} \quad ◀$$

Interpolação polinomial

Um problema importante em várias aplicações é encontrar um polinômio cujo gráfico passe por uma coleção de pontos especificados no plano; tal polinômio é dito ***polinômio interpolador*** dos pontos. O exemplo mais simples de um problema desses é encontrar um polinômio linear

$$p(x) = ax + b \tag{8}$$



▲ **Figura 1.8.10**

cujo gráfico passe por dois pontos distintos conhecidos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano xy (Figura 1.8.10). O leitor provavelmente aprendeu vários métodos da Geometria Analítica para encontrar a equação de uma reta por dois pontos, mas aqui daremos um método com base em sistemas lineares que pode ser adaptado à interpolação polinomial geral.

O gráfico de (8) é a reta $y = ax + b$ e, para essa reta passar pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), devemos ter

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{e} \quad y_2 = ax_2 + b$$

Portanto, os coeficientes incógnitos a e b podem ser obtidos resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned}$$

Não precisamos de métodos geniais para resolver esse sistema; o valor de a pode ser obtido subtraindo as equações para eliminar b e, então, o valor de a pode ser substituído em qualquer uma das duas equações para encontrar b. Deixamos para o leitor encontrar a e b e mostrar que podem ser expressos na forma

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

desde que tenhamos $x_1 \neq x_2$. Assim, por exemplo, a reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos

$$(2, 1) \quad \text{e} \quad (5, 4)$$

podem ser obtida tomando $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e $(x_2, y_2) = (5, 4)$, caso em que (9) fornece

$$a = \frac{4-1}{5-2} = 1 \quad \text{e} \quad b = \frac{(1)(5) - (4)(2)}{5-2} = -1$$

Portanto, a equação da reta é

$$y = x - 1$$

(Figura 1.8.11).

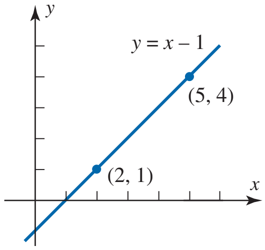


Figura 1.8.11

Consideremos, agora, o problema mais geral de encontrar um polinômio cujo gráfico passe pelos n pontos de coordenadas x distintas

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \ldots, \quad (x_n, y_n) \tag{10}$$

Como temos n condições a satisfazer, a intuição sugere que comecemos procurando por polinômios da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \tag{11}$$

já que um polinômio dessa forma tem n coeficientes que estão à nossa disposição para satisfazer as n condições. Contudo, queremos permitir os casos em que alguns pontos estejam alinhados ou então satisfaçam alguma outra configuração, o que tornaria possível utilizar algum polinômio de grau menor do que $n - 1$; assim, vamos permitir que a_{n-1} e outros coeficientes em (11) sejam nulos.

O próximo teorema, que será provado mais adiante, é o resultado fundamental da interpolação polinomial.

TEOREMA 1.8.1 Interpolação polinomial

Dados quaisquer n pontos no plano xy que têm coordenadas x distintas, existe um único polinômio de grau $n - 1$ ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

Vejamos, agora, como poderíamos encontrar o polinômio interpolador (11) cujo gráfico passa pelos pontos de (10). Como o gráfico desse polinômio é o gráfico da equação

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \tag{12}$$

segue que as coordenadas dos pontos satisfazem

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n \end{aligned} \tag{13}$$

Estamos supondo que os valores dos x e y sejam conhecidos nessas equações, de modo que podemos ver esse sistema como um sistema linear nas incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Desse ponto de vista, a matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & y_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

e, portanto, podemos encontrar o polinômio interpolador reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas (eliminação de Gauss-Jordan).

▶ EXEMPLO 6 Interpolação polinomial por eliminação de Gauss-Jordan

Encontre um polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos

$$(1, 3), \quad (2, -2), \quad (3, -5), \quad (4, 0)$$

Solução Como há quatro pontos, utilizamos um polinômio interpolador de grau $n = 3$. Denote esse polinômio interpolador por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

e denote as coordenadas x e y dos pontos dados por

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4 \quad \text{e} \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = -5, \quad y_4 = 0$$

Assim, segue de (14) que a matriz aumentada do sistema linear nas incógnitas a_0, a_1, a_2 e a_3 é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

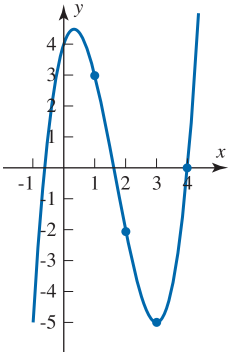
Deixamos para o leitor confirmar que a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da qual segue que $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$. Assim, o polinômio interpolador é

$$p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$$

O gráfico desse polinômio e os pontos dados aparecem na Figura 1.8.12. ◀



▲ **Figura 1.8.12**

Observação Adiante veremos um método mais eficaz para encontrar polinômios interpoladores, que é mais recomendado nos problemas em que é grande o número de pontos dados.

▶ EXEMPLO 7 Integração aproximada

REQUER CÁLCULO E CALCULADORA

Não há como calcular a integral

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

diretamente, pois não existe maneira de expressar a antiderivada do integrando em termos de funções elementares. Essa integral poderia ser aproximada pela regra de Simpson ou algum método comparável, mas uma abordagem alternativa é aproximar o integrando por um polinômio intepolador e integrar o polinômio aproximante. Por exemplo, considere os cinco pontos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0{,}25, \quad x_2 = 0{,}5, \quad x_3 = 0{,}75, \quad x_4 = 1$$

que dividem o intervalo [0, 1] em quatro subintervalos de mesmo tamanho. Os valores de

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

nesses pontos são, aproximadamente,

$$f(0) = 0, \quad f(0{,}25) = 0{,}098017, \quad f(0{,}5) = 0{,}382683,$$
$$f(0{,}75) = 0{,}77301, \quad f(1) = 1$$

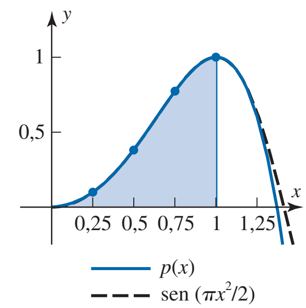
O polinômio interpolador é (verifique)

$$p(x) = 0{,}098796x + 0{,}762356x^2 + 2{,}14429x^3 - 2{,}00544x^4 \tag{15}$$

e

$$\int_0^1 p(x)\,dx \approx 0{,}438501 \tag{16}$$

Como mostra a Figura 1.8.13, os gráficos de f e de p se ajustam muito bem no intervalo [0, 1], de modo que a aproximação é bastante boa. ◀



▲ **Figura 1.8.13**

Revisão de conceitos

- Rede
- Ramo
- Nó
- Conservação do fluxo
- Circuitos elétricos: capacitor, resistor, polo (positivo e negativo), tensão elétrica, lei de Ohm, lei das correntes de Kirchhoff, lei das tensões de Kirchhoff
- Equações químicas: reagentes, produtos, equações equilibradas
- Interpolação polinomial

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar as taxas de fluxo e os sentido do fluxo nos ramos de uma rede.
- Encontrar a quantidade de corrente fluindo através das partes de um circuito elétrico.
- Escrever uma equação química equilibrada para uma dada reação química.
- Encontrar um polinômio interpolador para um gráfico passando por uma dada coleção de pontos.

Conjunto de exercícios 1.8

1. A figura dada mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.

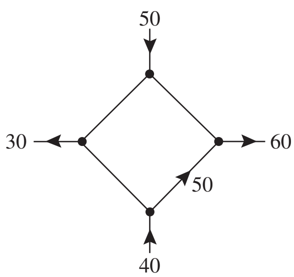


Figura Ex-1

2. A figura dada mostra algumas taxas de fluxo de hidrocarbonetos para dentro e para fora de uma rede de canos de uma refinaria de petróleo.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo se $x_4 = 50$ e $x_6 = 0$.

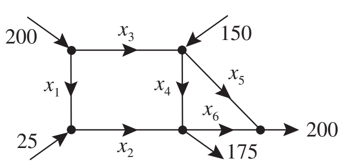


Figura Ex-2

3. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Se o fluxo ao longo da rua de A para B precisar ser reduzido em virtude de uma obra, qual será o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as ruas?

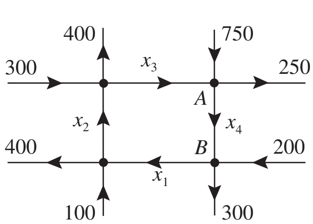


Figura Ex-3

4. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) É possível fechar a rua de A para B em virtude de uma obra e manter o tráfego fluindo em todas as outras ruas? Explique.

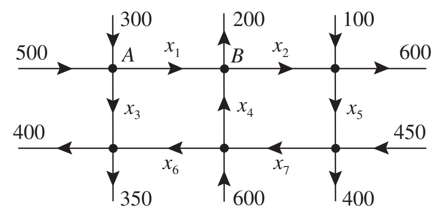
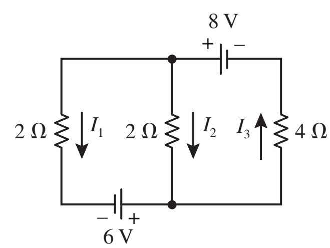


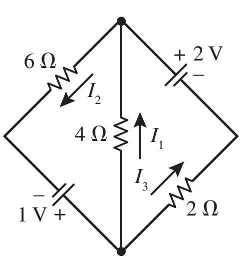
Figura Ex-4

Nos Exercícios **5–8**, analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas.

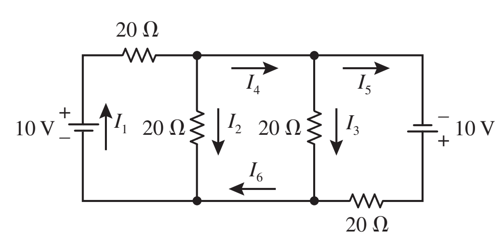
5.



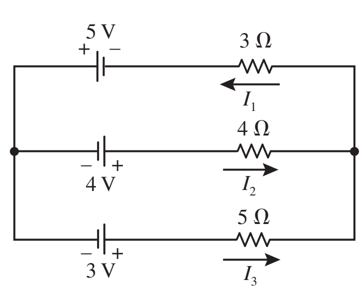
6.



7.



8.



Nos Exercícios **9–12**, escreva uma equação equilibrada para a reação química dada.

9. $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ (queima de propano)

10. $C_6H_{12}O_6 \rightarrow CO_2 + C_2H_5OH$ (fermentação do açúcar)

11. $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

12. $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (fotossíntese)

13. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (1, 1), (2, 2) e (3, 5).

14. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (0, 0), (−1, 1) e (1, 1).

15. Encontre o polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos (−1, −1), (0, 1), (1, 3), (4, −1).

16. A figura dada mostra o gráfico de um polinômio cúbico. Encontre o polinômio.

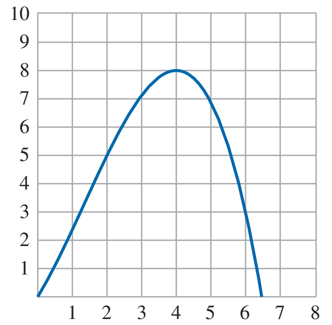


Figura Ex-16

17. (a) Encontre uma equação que represente a família de todos os polinômios de grau dois que passam pelos pontos (0, 1) e (1, 2). [*Sugestão*: a equação deve incluir um parâmetro arbitrário que produza os membros da família quando variar.]

(b) Esboce quatro curvas da família obtida a mão ou com a ajuda de uma ferramenta gráfica.

18. Nesta seção, selecionamos apenas algumas poucas aplicações de sistemas lineares. Usando uma ferramenta de busca na Internet, tente encontrar mais algumas aplicações desses sistemas ao mundo real. Selecione alguma de seu interesse e redija um parágrafo a respeito.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Numa rede qualquer, a soma dos fluxo para fora de algum nó deve ser igual à soma dos fluxos para dentro do nó.

(b) Quando uma corrente passa por um resistor, ocorre um aumento da tensão elétrica no circuito.

(c) A lei das correntes de Kirchhoff afirma que a soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.

(d) Uma equação química está equilibrada se o número total de átomos em cada lado da equação for o mesmo.

(e) Dados n pontos do plano xy, existe um único polinômio de grau $n - 1$ ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

1.9 Modelos econômicos de Leontief

Em 1973, o economista Wassily Leontief foi agraciado com o Prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, no qual utilizou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes setores de uma economia. Nesta seção, discutiremos algumas das ideias desenvolvidas por Leontief.

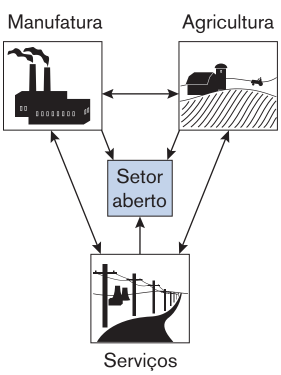
Insumo e produto numa economia

Uma maneira de analisar uma economia é dividi-la em ***setores*** e estudar como os setores interagem entre si. Por exemplo, uma economia simples pode estar dividida em três setores: manufatura, agricultura e serviços. Tipicamente, um setor produz certos ***produtos***, mas requer ***insumos*** dos outros setores e de si mesmo. Por exemplo, o setor agrícola pode produzir trigo como produto, mas requer insumo de máquinas agrícolas do setor manufatureiro, energia elétrica do setor de serviços e alimento de seu próprio setor para alimentar seus trabalhadores. Assim, podemos imaginar uma economia como uma rede na qual fluem os insumos e os produtos entre os setores; o estudo desses fluxos é denominado ***análise de insumo-produto***. Os insumos e os produtos em geral são medidos em unidades monetárias (dólares, ou milhões de dólares, por exemplo, que denotamos simplesmente pelo cifrão $), mas também são possíveis outras medidas.

Os fluxos entre os setores de uma economia real não são sempre óbvios. Por exemplo, na Segunda Guerra Mundial, os Estados Unidos da América tiveram uma demanda por 50.000 novos aviões, que exigiu a construção de muitas novas fábricas de alumínio. Isso produziu uma demanda inesperadamente grande por certos componentes elétricos à base de cobre que, por sua vez, produziu uma escassez de cobre. O problema acabou sendo resolvido utilizando prata como substituto de cobre, sendo a prata tomada emprestada das reservas governamentais depositadas em Fort Knox. É bastante provável que uma análise de insumo-produto moderna teria antecipado aquela escassez de cobre.

A maioria dos setores de uma economia produzirá produtos, mas podem existir setores que consomem produtos sem produzir nenhum produto (por exemplo, o setor dos consumidores). Aqueles setores que não produzem produtos são denominados ***setores abertos***. Economias sem setores abertos são denominadas ***economias fechadas***, e economias com um ou mais setores abertos são denominadas ***economias abertas*** (Figura 1.9.1). Nesta seção, vamos nos ocupar com economias de um setor aberto, e nosso objetivo principal será determinar os níveis de produção necessários para o setor produtivo sustentar a si mesmo e satisfazer a demanda do setor aberto.

O modelo de Leontief de uma economia aberta



▲ **Figura 1.9.1**

Consideremos uma economia aberta simples com um setor aberto e três setores produtivos: manufatura, agricultura e serviços. Suponhamos que insumos e produtos sejam medidos em unidades monetárias ($) e que os insumos requeridos pelos setores produtivos para produzir uma unidade monetária de valor de produto estão de acordo com a Tabela 1 a seguir.

Tabela 1

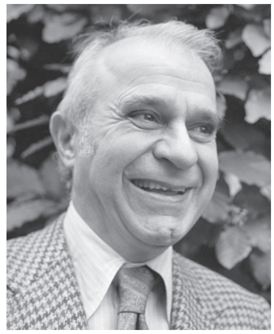
		Insumo requerido para produzir $1		
		Manufatura	**Agricultura**	**Serviços**
	Manufatura	$ 0,50	$ 0,10	$ 0,10
Fornecedor	**Agricultura**	$ 0,20	$ 0,50	$ 0,30
	Serviços	$ 0,10	$ 0,30	$ 0,40

Geralmente suprimimos as legendas da tabela e expressamos essa matriz como

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Essa é denominada a ***matriz de consumo*** da economia (ou, às vezes, a ***matriz tecnológica***). Os vetores-coluna

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$



Wassily Leontief (1906–1999)

Nota histórica Não deixa de ser um pouco irônico que tenha sido Wassily Leontief, nascido na Rússia, quem recebeu o Prêmio Nobel de Economia de 1973, por seu trabalho que lançou os modernos métodos para analisar economias de mercado abertas. Leontief foi um estudante precoce que entrou na Universidade de Leningrado aos 15 anos. Incomodado pelas restrições intelectuais do regime soviético, acabou na cadeia por atividades anticomunistas e, depois, foi para a Universidade de Berlim, onde obteve seu doutorado em 1928. Foi para os Estados Unidos da América em 1931, ocupando uma cátedra na Universidade de Harvard e, depois, na Universidade de Nova York.

[Imagem: ©Bettmann/©Corbis]

de C listam os insumos necessários para os setores de manufatura, agricultura e serviços, respectivamente, produzirem \$1,00 de produto. Esses vetores são denominados ***vetores de consumo*** dos setores. Por exemplo, $\mathbf{c}_1$ nos diz que para produzir \$1,00 de valor de produto, o setor manufatureiro requer produtos no valor de \$0,50 do setor manufatureiro, no valor de \$0,20 do setor agrícola e no valor de \$0,10 do setor de serviços.

Qual é o significado econômico das somas das entradas de uma linha da matriz de consumo?

Continuando com o exemplo acima, vamos supor que o setor aberto necessita que a economia forneça bens manufaturados, produtos agrícolas e serviços com os valores em unidades monetárias seguintes.

d_1 unidades monetárias de bens manufaturados

d_2 unidades monetárias de produtos agrícolas

d_3 unidades monetárias de serviços

O vetor coluna **d** que tem esses números como componentes sucessivos é denominado ***vetor demanda externa***. Como os setores produtivos consomem alguns de seus próprios produtos, o valor em unidades monetárias de seus produtos precisa cobrir suas próprias necessidades mais a demanda externa. Suponhamos que os valores necessários para conseguir isso sejam

x_1 unidades monetárias de bens manufaturados

x_2 unidades monetárias de produtos agrícolas

x_3 unidades monetárias de serviços

O vetor coluna **x** que tem esses números como componentes sucessivos é denominado ***vetor de produção*** da economia. Para a economia com matriz de consumo (1), a porção do vetor de produção **x** que será consumido pelos três setores produtivos é

$$\underbrace{x_1\begin{bmatrix}0,5\\0,2\\0,1\end{bmatrix}}_{\text{As frações consumidas pela manufatura}} + \underbrace{x_2\begin{bmatrix}0,1\\0,5\\0,3\end{bmatrix}}_{\text{As frações consumidas pela agricultura}} + \underbrace{x_3\begin{bmatrix}0,1\\0,3\\0,4\end{bmatrix}}_{\text{As frações consumidas pelos serviços}} = \begin{bmatrix}0,5 & 0,1 & 0,1\\0,2 & 0,5 & 0,3\\0,1 & 0,3 & 0,4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = C\mathbf{x}$$

O vetor $C\mathbf{x}$ é denominado ***vetor demanda intermediária*** da economia. Uma vez atendida a demanda intermediária, a porção da produção que resta para satisfazer as necessidades da demanda externa é $\mathbf{x} - C\mathbf{x}$. Assim, se o vetor demanda externa for **d**, então **x** deve satisfazer a equação

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Quantidade produzida}} - \underbrace{C\mathbf{x}}_{\text{Demanda intermediária}} = \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Demanda externa}}$$

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2}$$

A matriz $I - C$ é denominada ***matriz de Leontief*** e (2) é denominada ***equação de Leontief***.

▶ EXEMPLO 1 Satisfazendo a demanda externa

Considere a economia descrita na Tabela 1. Suponhamos que o setor aberto tenha uma demanda no valor de \$7.900 de produtos manufaturados, \$3.950 de produtos agrícolas e \$1.975 de serviços.

(a) A economia conseguirá atender essa demanda?

(b) Se conseguir, encontre um vetor de produção **x** que atenda exatamente essa demanda.

Solução A matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor demanda externa são

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Para atender essa demanda, o vetor **x** deve satisfazer a equação de Leontief (2), portanto, o problema se reduz a resolver o sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}}_{I-C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \tag{4}$$

(se for consistente). Deixamos para o leitor verificar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada desse sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27.500 \\ 0 & 1 & 0 & 33.750 \\ 0 & 0 & 1 & 24.750 \end{array}\right]$$

Isso nos diz que (4) é consistente e que a economia consegue atender exatamente a demanda do setor aberto, produzindo um valor total de \$27.500 de produtos manufaturados, \$33.750 de produtos agrícolas e \$24.750 de serviços. ◀

Economias abertas produtivas

Na discussão precedente, consideramos uma economia aberta com três setores produtivos; as mesmas ideias se aplicam a economias com n setores produtivos. Nesse caso, a matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor demanda externa têm a forma

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

em que todas as entradas são não negativas e

c_{ij} = ao valor monetário do produto do i-ésimo setor que é necessário para o j-ésimo setor produzir um produto no valor de uma unidade monetária

x_i = ao valor monetário do produto do i-ésimo setor

d_i = ao valor monetário do produto do i-ésimo setor que é necessário para atender a demanda do setor aberto

Observação Observe que o j-ésimo vetor coluna de C contém os valores monetários que o j-ésimo setor necessita dos outros setores para produzir um produto no valor de uma unidade monetária, e que o i-ésimo vetor linha de C contém os valores monetários exigidos do i-ésimo setor pelos outros setores para que cada um deles possa produzir um produto no valor de uma unidade monetária.

Conforme discutido no exemplo precedente, um vetor de produção **x** que atenda a demanda **d** do setor externo deve satisfazer a equação de Leontief

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Se a matriz $I - C$ for invertível, então essa equação tem a solução única

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} \tag{5}$$

para cada vetor demanda **d**. Contudo, para **x** ser um vetor de produção válido, ele deve ter entradas não negativas, de modo que o problema de importância na Economia é determinar condições sob as quais a equação de Leontief tem uma solução com entradas não negativas.

No caso em que $I - C$ for invertível, é evidente, pelo formato de (5), que se $(I - C)^{-1}$ tem entradas não negativas, então, para cada vetor demanda **d**, o vetor **x** correspondente tem entradas não negativas e, portanto, é um vetor de produção válido para a economia. As economias nas quais $(I - C)^{-1}$ tem entradas não negativas são ditas ***produtivas***. Tais economias são particularmente desejáveis, pois a demanda pode ser sempre atendida por algum nível de produção apropriado. O próximo teorema, cuja prova pode ser encontrada em muitos livros de Economia, dá condições sob as quais são produtivas as economias abertas.

TEOREMA 1.9.1 *Se C for a matriz de consumo de uma economia aberta e se todas as somas das entradas de colunas forem menores do que 1, então a matriz $I - C$ é invertível, as entradas de $(I - C)^{-1}$ são não negativas e a economia é produtiva.*

Observação A soma das entradas da j-ésima coluna de C representa o valor total de insumo em unidades monetárias que é necessário para o j-ésimo setor produzir \$1 de produto, de modo que se a soma das entradas da j-ésima coluna for menor do que 1, então o j-ésimo setor precisará de menos de \$1 de insumo para produzir \$1 de produto; nesse caso dizemos que o j-ésimo setor é ***rentável***. Assim, o Teorema 1.9.1 afirma que se todos os setores produtivos de uma economia aberta forem rentáveis, então a economia é produtiva. Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que uma economia é produtiva se todas as somas das entradas de linhas de C forem menores do que 1 (Exercício 11). Assim, uma economia aberta será rentável se *ou* a soma das entradas de todas as colunas de C for menor do que 1 *ou* a soma das entradas de todas as linhas de C for menor do que 1.

▶ EXEMPLO 2 Uma economia aberta com todos os setores rentáveis

As somas das entradas de colunas da matriz de consumo C em (1) são menores do que 1, de modo que $(I - C)^{-1}$ existe e tem entradas não negativas. Use uma ferramenta computacional para confirmar isso e use essa inversa para resolver a Equação (4) no Exemplo 1.

Solução Deixamos para o leitor mostrar que

$$(I - C)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 2{,}65823 & 1{,}13924 & 1{,}01266 \\ 1{,}89873 & 3{,}67089 & 2{,}15190 \\ 1{,}39241 & 2{,}02532 & 2{,}91139 \end{bmatrix}$$

Essa matriz tem entradas não negativas e

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} \approx \begin{bmatrix} 2{,}65823 & 1{,}13924 & 1{,}01266 \\ 1{,}89873 & 3{,}67089 & 2{,}15190 \\ 1{,}39241 & 2{,}02532 & 2{,}91139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 27.500 \\ 33.750 \\ 24.750 \end{bmatrix}$$

que é consistente com a solução do Exemplo 1. ◀

Revisão de conceitos

- Setores
- Insumos
- Produtos
- Análise de insumo-produto
- Setor aberto
- Economias: aberta, fechada
- Matriz de consumo (tecnológica)
- Vetor de consumo
- Vetor demanda externa
- Vetor de produção
- Vetor demanda intermediária
- Matriz de Leontief
- Equação de Leontief

Aptidões desenvolvidas

- Construir uma matriz de consumo para uma economia.
- Entender as relações entre os vetores de um setor de uma economia: consumo, demanda externa, de produção, demanda intermediária.

Conjunto de exercícios 1.9

1. Duas oficinas de conserto de veículos, uma que trata da parte mecânica (M) e outra de lataria (L), utilizam uma os serviços da outra. Para cada \$1,00 de negócios que M faz, M utiliza \$0,50 de seus próprios serviços e \$0,25 dos serviços de L e, para cada \$1,00 de negócios que L faz, L utiliza \$0,10 de seus próprios serviços e \$0,25 dos serviços de M.

(a) Construa uma matriz de consumo para essa economia.

(b) Quais valores de M e L devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de \$7.000,00 de serviços mecânicos e \$14.000,00 de serviços de lataria?

2. Uma economia simples produz alimento (A) e moradia (M). A produção de \$1,00 de alimento requer \$0,30 de alimento e \$0,10 de moradia, e a produção de \$1,00 de moradia requer \$0,20 de alimento e \$0,60 de moradia.

(a) Construa uma matriz de consumo para essa economia.

(b) Quais valores de alimento e moradia devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de \$130.000,00 de alimento e \$130.000,00 de moradia?

3. Considere a economia aberta descrita pela tabela dada, onde o insumo é em unidades monetárias (\$) necessárias para \$1,00 de produto.

(a) Encontre a matriz de consumo para essa economia.

(b) Suponha que o setor aberto tenha uma demanda no valor de \$1.930 de moradia, \$3.860 de alimento e \$5.790 de serviços. Use redução por linhas para encontrar um vetor de produção que atenda essa demanda exatamente.

Tabela Ex-3

		Insumo requerido para produzir \$1		
		Moradia	Alimentação	Serviços
Fornecedor	Moradia	\$ 0,10	\$ 0,60	\$ 0,40
	Alimentação	\$ 0,30	\$ 0,20	\$ 0,30
	Serviços	\$ 0,40	\$ 0,10	\$ 0,20

4. Uma companhia produz projetos de *web*, desenvolve *software* e presta serviços de rede. Considere a companhia como uma economia aberta descrita pela tabela dada, onde o insumo é em unidades monetárias (\$) necessárias para \$1,00 de produto.

(a) Encontre a matriz de consumo para essa economia.

(b) Suponha que os consumidores (o setor aberto) tenham uma demanda no valor de \$5.400 de projetos de web, \$2.700 de *software* e \$900 de serviços de rede. Use redução por linhas para encontrar um vetor de produção que atenda exatamente essa demanda.

Tabela Ex-4

		Insumo requerido para produzir \$1		
		Projeto de web	*Software*	Rede
Fornecedor	Projeto de Web	\$ 0,40	\$ 0,20	\$ 0,45
	Software	\$ 0,30	\$ 0,35	\$ 0,30
	Rede	\$ 0,15	\$ 0,10	\$ 0,20

▶ Nos Exercícios **5–6**, use inversão matricial para encontrar o vetor de produção **x** que satisfaz a demanda **d** para a matriz de consumo C. ◀

5. $C = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$; $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix}$

7. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a economia pode atender uma demanda de $d_1 = 2$ unidades do primeiro setor e $d_2 = 0$ unidades do segundo setor, mas não consegue atender uma demanda de $d_1 = 2$ unidades do primeiro setor e $d_2 = 1$ unidades do segundo setor.

(b) Dê uma explicação matemática e uma explicação econômica para o resultado da parte (a).

8. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Se o setor aberto demanda o mesmo valor em unidades monetárias de cada setor produtivo, qual desses setores deve produzir o maior valor monetário para atender a demanda da economia?

9. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que a equação de Leontief $\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ tem uma solução única com cada vetor demanda $\mathbf{d}$ se $c_{21}c_{12} < 1 - c_{11}$.

10. (a) Considere uma economia aberta com matriz de consumo C cujas somas das entradas de coluna são menores do que 1 e seja $\mathbf{x}$ o vetor de produção que satisfaz a demanda externa $\mathbf{d}$, ou seja, $(I - C)^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{x}$. Seja $\mathbf{d}_j$ o vetor demanda que é obtido aumentando a j-ésima entrada de $\mathbf{d}$ por 1 unidade e deixando as outras entradas fixas. Prove que o vetor de produção $\mathbf{x}_j$ que atende essa demanda é

$$\mathbf{x}_j + j\text{-ésimo vetor coluna de } (I - C)^{-1}$$

(b) Em palavras, qual é o significado econômico do j-ésimo vetor coluna de $(I - C)^{-1}$? [*Sugestão*: observe o vetor $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}$.]

11. Prove que se C for uma matriz $n \times n$ cujas entradas são não negativas e cujas somas das entradas de linhas são menores do que 1, então $I - C$ é invertível e tem entradas não negativas. [*Sugestão*: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ para uma matriz invertível qualquer A.]

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Os setores produtores da economia são denominados setores abertos.

(b) Uma economia fechada é uma que não tem setores abertos.

(c) As linhas de uma matriz de consumo representam os produtos de um setor da economia.

(d) Se a soma das entradas das colunas da matriz de consumo são menores do que 1, então a matriz de Leontief é invertível.

(e) A equação de Leontief relaciona o vetor de produção de uma economia com o vetor demanda externa.

Capítulo 1 Exercícios suplementares

▶ Nos Exercícios **1–4**, a matriz dada representa uma matriz aumentada de um sistema linear. Escreva o conjunto de equações lineares correspondentes do sistema e use eliminação gaussiana para resolver o sistema linear. Introduza parâmetros livres se necessário. ◀

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & 2 \\ 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y' \\ y &= \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y' \end{aligned}$$

6. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

7. Encontre inteiros positivos que satisfaçam

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 5y + 10z &= 44 \end{aligned}$$

8. Uma caixa contendo moedas de 1, 5 e 10 centavos tem 13 moedas totalizando 83 centavos. Quantas moedas de cada tipo há na caixa?

9. Seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

a matriz aumentada de um sistema linear. Encontre os valores de a e b com os quais o sistema tem

(a) uma única solução.

(b) uma solução a um parâmetro.

(c) uma solução a dois parâmetros.

(d) nenhuma solução.

10. Para qual(is) valor(es) de a o sistema a seguir tem zero, uma ou uma infinidade de soluções?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ (a^2 - 4)x_3 &= a - 2 \end{aligned}$$

11. Encontre uma matriz K tal que $AKB = C$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

12. Como deveriam ser escolhidos os coeficientes a, b e c para que o sistema

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

tenha a solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$?

13. Em cada parte, resolva a equação matricial para X.

(a) $X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

14. Seja A uma matriz quadrada.

(a) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ se $A^4 = 0$.

(b) Mostre que

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$$

se $A^{n+1} = 0$.

15. Encontre valores de a, b, e c tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.

16. (***Requer Cálculo***) Encontre valores de a, b, e c tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(-1, 0)$ e tem uma tangente horizontal em $(2, -9)$.

17. Seja J_n a matriz $n \times n$ com todas as entradas iguais a 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$$

18. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfaz a equação

$$A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$$

então A^T também satisfaz essa equação.

19. Prove: se B for invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se, e só se, $AB = BA$.

20. Prove: se A for invertível, então $A + B$ e $I + BA^{-1}$ são ambas invertíveis ou ambas não invertíveis.

21. Prove: se A for uma matriz $m \times n$ e B, a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a $1/n$, então

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

em que $\bar{r}_i$ é a média das entradas na i-ésima linha de A.

22. (***Requer Cálculo***) Se as entradas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

são funções deriváveis de x, então definimos

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Mostre que, se as entradas de A e B forem funções deriváveis de x e os tamanhos das matrizes forem tais que as operações estão definidas, então

(a) $\dfrac{d}{dx}(kA) = k\dfrac{dA}{dx}$

(b) $\dfrac{d}{dx}(A + B) = \dfrac{dA}{dx} + \dfrac{dB}{dx}$

(c) $\dfrac{d}{dx}(AB) = \dfrac{dA}{dx}B + A\dfrac{dB}{dx}$

23. (***Requer Cálculo***) Use a parte (c) do Exercício 22 para mostrar que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

Enuncie todas as hipóteses necessárias para obter essa fórmula.

24. Supondo que as inversas envolvidas existam, prove as igualdades a seguir.

(a) $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$

(b) $(I + CD)^{-1}C = C(I + DC)^{-1}$

(c) $(C + DD^T)^{-1}D = C^{-1}D(I + D^TC^{-1}D)-^1$