LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE

1 Probabilidade

Exercício 1. Sejam A e B eventos de um espaço amostral S. Utilize o bem conhecido diagrama de Venn para representar em S os eventos $A \cup B$, $A \cap B$, A^c, $A - B$ e $(A-B) \cup (B-A)$.

Exercício 2. Considere o seguinte experimento: lançar duas moedas e observar a sequência de caras e coroas. Traduza os eventos escritos em palavras para a linguagem de conjuntos.

1. $A =$ Pelo menos uma cara ocorre.
2. $B =$ Duas coroas ocorrem.
3. $C =$ O complementar do evento A.

Exercício 3. Sejam A, B e C eventos de um espaço amostral S. Traduza os eventos escritos em palavras para a linguagem de conjuntos.

1. Somente A ocorre.
2. A e C ocorrem, mas B não.
3. Todos os eventos ocorrem.
4. Pelo menos um evento ocorre.
5. Exatamente um evento ocorre.
6. Nenhum evento ocorre.
7. Pelo menos dois eventos ocorrem.
8. Exatamente dois eventos ocorrem.
9. No máximo dois eventos ocorrem.

Exercício 4. Considere o seguinte experimento: lançar duas moedas não honestas (viciadas) e observar a sequência de caras e coroas. Apresente um modelo probabilístico para este experimento, considerando o espaço amostral como um produto cartesiano de dois conjuntos. Observação: uma moeda não honesta ou viciada é aquela onde a probabilidade de cara é diferente de $1/2$.

Exercício 5. Considere o seguinte experimento: lançar duas moedas não honestas (viciadas) e observar o número de caras. Apresente um modelo probabilístico para este experimento.

Exercício 6. Considere o seguinte experimento: lançar um dado honesto (não viciado) de 6 faces e observar o valor da face superior. Apresente um modelo probabilístico para este experimento. Observação: um dado honesto de 6 faces é aquele onde a probabilidade de cada face é $1/6$.

Exercício 7. Considere o seguinte experimento: lançar dois dados honestos (não viciados) de 6 faces e observar o par ordenado de valores das faces superiores. Apresente um modelo probabilístico para este experimento.

Exercício 8. Lança-se dois dados honestos de 6 faces. Calcule a probabilidade da soma dos valores das faces superiores ser menor que 5.

Exercício 9. Suponha que num lote com 20 peças existam 5 peças defeituosas. Escolhemos ao acaso e sem reposição 4 peças deste lote. Determine a probabilidade de escolher duas peças defeituosas.

Exercício 10. No jogo da mega-sena uma aposta simples consiste em escolher 6 números dentre os 60 números disponíveis $(01, 02, \dots, 60)$. Calcule a probabilidade de ganhar o prêmio com uma aposta simples.

Exercício 11. Considere um lote contendo 20 peças das quais 12 são defeituosas e 8 são perfeitas. Duas peças são extraídas ao acaso e sem reposição. Determine a probabilidade dos seguintes eventos:

1. $A =$ as duas peças são defeituosas.
2. $B =$ uma peça é perfeita e a outra é defeituosa.

Exercício 12. Em média, 5% dos produtos vendidos por uma loja são devolvidos. Determine a probabilidade de que das quatro próximas vendas de produtos, dois sejam devolvidos.

Exercício 13. Suponha que k objetos sejam escolhidos ao acaso e com reposição a partir de n objetos distintos $(n > k)$. Calcule a probabilidade de que nenhum objeto na amostra tenha sido escolhido mais de uma vez.

Exercício 14. Considere um grupo de k pessoas reunidas numa sala. Calcule a probabilidade de existir neste grupo pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia e mês.

Exercício 15. Sejam A, B e C eventos num espaço amostral. Obtenha uma fórmula para calcular $\Pr(A \cup B \cup C)$. Generalize o resultado para n eventos, digamos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Exercício 16. Num grupo de 200 estudantes de engenharia, 137 estão matriculados em cálculo, 50 em programação e 124 em física. Além disso, 33 estão matriculados simultaneamente em cálculo e programação, 92 em cálculo e física e 29 em programação e física. Finalmente, 18 estão matriculados em todas as três disciplinas. Determine a probabilidade de um estudante selecionado aleatoriamente deste grupo está matriculado em pelo menos uma disciplina.

Exercício 17. Suponha que os dígitos $1, 2, \ldots, n$ sejam escritos numa ordem aleatória. Calcule a probabilidade de que ao menos um dígito ocupe seu próprio lugar. O que acontece com a probabilidade encontrada quando $n \to +\infty$?

Exercício 18. Utilize um diagrama de árvore e resolva o seguinte problema: uma empresa produz lâmpadas em três fábricas, denotadas por F_1, F_2 e F_3. A fábrica F_1 produz 40% da produção total, enquanto que as fábricas F_2 e F_3 produzem cada uma 30% da produção total. As probabilidades de que uma lâmpada produzida por estas fábricas seja defeituosa são de 1%, 4% e 3% respectivamente. (i) Dertermine a probabilidade de uma lâmpada escolhida ao acaso da produção total ser defeituosa; (ii) Dado que a lâmpada escolhida ao acaso da produção total é defeituosa, determine a probabilidade desta lâmpada ter sido produzida por F_1.

Exercício 19. Uma urna contém duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso e sem reposição. Utilize um diagrama de árvore e apresente um modelo probabilístico para este experimento.

Exercício 20. Uma urna contém duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso e com reposição. Utilize um diagrama de árvore juntamente com o conceito de independência e apresente um modelo probabilístico para este experimento. Porque neste exercício é possível usar o conceito de independência?

Exercício 21. Sejam A e B eventos independentes. Mostre que A e B^c também são. Mostre que resultados análogos também valem para A^c e B e para A^c e B^c.

Exercício 22. Sejam A e B eventos independentes cujas probabilidades são p e q respectivamente. Determine a probabilidade: (i) de que nenhum destes eventos ocorra, (ii) de que pelo menos um destes eventos ocorra.

Exercício 23. Uma companhia de seguros vendeu apólices para um grupo de cinco pessoas, todas da mesma idade e com boa saúde. De acordo com as tábuas atuariais, a probabilidade de que uma pessoa daquela idade e estado de saúde esteja viva daqui a 30 anos é de $2/3$. Calcular a probabilidade de que daqui a 30 anos: (i) exatamente duas pessoas do grupo estejam vivas; (ii) todas as pessoas do grupo estejam vivas; (iii) pelo menos três pessoas do grupo estejam vivas. Indique as suposições necessárias para a resolução do problema.

Exercício 24. Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte de encanamento de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $1/2$. Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de $3/4$. Caso contrário, esta probabilidade é de $1/3$. Qual a probabilidade de ele: (i) ganhar os dois orçamentos? (ii) ganhar apenas um? (iii) não ganhar nada?

Exercício 25. Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total, respectivamente. Da produção de cada máquina 5%, 4% e 2%, respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que este é defeituoso. Qual a probabilidade de que o parafuso escolhido venha da máquina A. Obtenha os mesmos resultados para B e C.

Exercício 26. Considere um sistema constituído por 4 componentes conectados conforme a Figura do Problema 22 em [3, p. 115]. Supondo que todos os componentes do sistema tenham a mesma confiabilidade p e funcionam independetemente, obtenha a confiabilidade do sistema.

Exercício 27. Considere um sistema constituído por 5 componentes conectados conforme a Figura do Problema 48 em [3, p. 125]. Supondo que todos os componentes do sistema tenham a mesma confiabilidade p e funcionam independentemente, obtenha a confiabilidade do sistema.

Exercício 28. Num mercado, três corretoras A, B e C são responsáveis por 20%, 50% e 30%, respectivamente, do volume total de contratos negociados. Do volume de cada corretora, 20%, 5% e 2%, respectivamente, são contratos futuros em dólares. Um contrato é escolhido ao acaso e este é futuro em dólares. Qual é a probabilidade de ter sido negociado pela corretora A? E pela corretora C?

Exercício 29. (Probabilidade quando $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito). Considere um experimento aleatório cujos possíveis resultados são: -1, 0 e 3. A função de probabilidade para estes resultados é dada por: $p(-1) = 1/7$, $p(0) = 4/7$ e $p(3) = 2/7$. A função $s \mapsto p(s)$ é de fato uma função de probabilidade? Determine a probabilidade de um evento qualquer em S, digamos o evento $A \subset S$. Se $A = \{-1, 3\}$, calcule a probabilidade de A.

Exercício 30. (Probabilidade quando $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito). Considere um experimento aleatório cujos possíveis resultados são: -1, 0 e 3. A função de probabilidade para estes resultados é dada por: $p(-1) = 1/3$, $p(0) = 1/3$ e $p(3) = 1/3$. A função $s \mapsto p(s)$ é de fato uma função de probabilidade? Determine a probabilidade de um evento qualquer em S, digamos o evento $A \subset S$. Se $A = \{-1, 3\}$, calcule a probabilidade de A.

Exercício 31. (Probabilidade quando $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto enumerável). Considere um experimento aleatório cujos possíveis resultados são: $1, 2, 3, \ldots$. A função de probabilidade para estes resultados é dada por: $p(i) = kp(1-p)^{i-1}$, onde $i = 1, 2, 3, \ldots$, $0 < p < 1$ e k é uma constante de normalização. Encontre o valor de k para que a função $s \mapsto p(s)$ seja de fato uma função de probabilidade. Determine a probabilidade de um evento qualquer em S, digamos o evento $A \subset S$. Se $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, calcule a probabilidade de A.

Exercício 32. (Probabilidade quando $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-enumerável). Considere um experimento aleatório cujos possíveis resultados são todos os números reais no intervalo $[0, 2]$. A função densidade de probabilidade para estes resultados é dada por: $f(s) = ks$ se $s \in [0, 2]$ e $f(s) = 0$ caso contrário, onde k é uma constante de normalização. Encontre o valor de k para que a função $s \mapsto f(s)$ seja de fato uma função densidade de probabilidade. Determine a probabilidade de um evento qualquer em S, digamos o evento $A \subset S$. Se $A = (1, 3/2]$, calcule a probabilidade de A.

Exercício 33. Considere o quadrado com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$. Suponha que a probabilidade de uma região A (evento A) qualquer seja a área desta região. Represente graficamente os eventos $A = \{s = (x,y) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ e $B = \{s = (x,y) | x \geq b \text{ ou } y \geq b\}$, onde b é um número tal que $0 < b < 1$. Calcule $\Pr(A)$, $\Pr(B)$ e $\Pr(B^c)$

2 Variáveis aleatórias

Exercício 34. Seja X uma va.a. discreta com função de probabilidade dada por:

X	1	2	3
p_X	$1/7$	$4/7$	$2/7$

1. Calcule $\Pr(-1/2 < X \leq 5/2)$.
2. Calcule $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$.
3. Deduza a função p_X a partir da função F_X.
4. Calcule $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{DP}(X)$.

Exercício 35. Na fabricação de um certo produto é sabido que um entre dez dos artigos é fabricado com defeito. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

1. nenhum defeituoso?
2. exatamente um defeituoso?
3. exatamente dois defeituosos?
4. não mais do que dois defeituosos?

Exercício 36. O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson com $\lambda = 2$. As atuais instalações podem atender no máximo a três petroleiros por dia. Se mais de três aportarem num dia, o excesso é enviado para outro porto.

1. Num dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?
2. De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?
3. Qual o número médio de petroleiros que chegam por dia?

Exercício 37. Uma fábrica produz válvulas das quais 20% são produzidas com defeito. As válvulas são vendidas em caixas com dez válvulas em cada caixa. Se uma caixa não tiver nenhuma defeituosa, seu preço de venda é $10,00$ unidades monetárias (u.m.); tendo uma, o preço é $8,00$ u.m.; duas ou três, o preço é $6,00$ u.m.; mais do que três defeituosas, o preço é $2,00$ u.m. Qual o preço médio de uma caixa?

Exercício 38. (Problema 43 em [3, p. 160]). Mostre que

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

quando $n \to \infty$, $p \to 0$, mas $np = \lambda$.

Exercício 39. Considere um sistema com 10 componentes ligados em série, onde cada componente tem probabilidade p de funcionar. Supondo independência de funcionamento entre os componentes, qual a probabilidade de:

1. o sistema funcionar?
2. o sistema não funcionar?
3. exatamente dois componentes funcionarem?
4. pelo menos cinco componentes funcionarem?

Exercício 40. O custo de realização de um experimento é $1.000,00$ unidades monetárias (u.m.). Se o experimento falha, um custo adicional de $300,00$ u.m. tem de ser imposto. Se a probabilidade de sucesso em cada experimento é 0.2, se os experimentos são independentes e continuados até a ocorrência do primeiro sucesso, qual o custo esperado do experimento?

Exercício 41. Seja X uma va.a. discreta com função de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Calcule $\Pr(X > 1/2)$.
2. Calcule $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$.
3. Deduza a função f_X a partir da função F_X.
4. Calcule $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{DP}(X)$.

Exercício 42. Seja X uma va.a. com distribuição uniforme com parâmetros α e β. Calcule:

1. $\mathrm{E}(X)$.

2. $\mathrm{Var}(X)$.

3. $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$.

Exercício 43. Seja X uma va.a. com distribuição normal com parâmetros μ e σ^2. Calcule $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Exercício 44. O peso bruto de latas de conserva é uma va.a. normal com média 1.000 g e desvio padrão 20 g.

1. Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de 980 g?

2. Qual a probabilidade de uma lata pesar mais de 1.010 g?

Exercício 45. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1.000 cm^3 e o desvio padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a variável volume seja normal.

1. Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?

2. Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões?

3. O que acontecerá com a porcentagem do item 2 (item anterior) se a máquina for regulada de forma que a média seja 1.200 cm^3 e o desvio padrão 20 cm^3?

Exercício 46. Determine as médias das va.a's X, Y e Z quando:

1. X é uma uniforme no intervalo $(1,3)$, $Y = 3X + 4$ e $Z = e^X$.

2. X é uma exponencial parâmetro $\beta = 1$, $Y = X^2$ e $Z = 3/(X+1)^2$.

Exercício 47. Seja X uma va.a. com distribuição exponencial com parâmetro β. Calcule $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Exercício 48. Dizemos que X é uma va.a. com distribuição de Pareto com parâmetros $a, b > 0$ se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} (a/b)(b/x)^{a+1} & \text{se } x \geq b \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta distribuição é frequentemente usada em Economia em conexão com problemas de distribuição de renda. O parâmetro b pode representar algum nível mínimo de renda, x é o nível de renda e $f_X(x)dx$ dá a proporção de indivíduos com renda entre x e $x + dx$. Calcule $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Exercício 49. Dizemos que X é uma va.a. com distribuição lognormal com parâmetros μ e σ^2, se $\ln(X)$ possui distribuição normal com média μ e variância σ^2. A função densidade de probabilidade de X tem a forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right] & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Exercício 50. Seja X uma va.a. com distribuição exponencial com parâmetro β. Mostre que:

$$\Pr(X > t + x | X > t) = \Pr(X > x).$$

para todo $t, x \geq 0$. Este resultado é geralmente referido como "a propriedade de falta de memória da distribuição exponencial".

3 Variáveis aleatórias bidimensionais

Exercício 51. Mmmm.

Exercício 52. Mmmm.

Exercício 53. Mmmm.

Exercício 54. Mmmm.

Exercício 55. Mmmm.

Exercício 56. Mmmm.

Exercício 57. Mmmm.

Exercício 58. Mmmm.

Exercício 59. Mmmm.

Exercício 60. Mmmm.

4 Funções geradoras de momentos

Exercício 61. Mmmm.

Exercício 62. Mmmm.

Exercício 63. Mmmm.

Exercício 64. Mmmm.

Exercício 65. Mmmm.

5 Teoremas limites: a LGN's e o TCL

Exercício 66. Mmmm.

Exercício 67. Mmmm.

Exercício 68. Mmmm.

Exercício 69. Mmmm.

Exercício 70. Mmmm.

6 Notação e fórmulas úteis

- Experimento aleatório: ε.
- Espaço amostral: S.
- Eventos em um espaço amostral S: $A, B, C, \ldots$.
- Probabilidade de um evento A em S: $\Pr(A)$.
- $0 \leq \Pr(A) \leq 1$ para todo evento A em S.

- $\Pr(S) = 1$ e $\Pr(\emptyset) = 0$.
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ se A e B são eventos mutuamente exclusivos.
- $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$.
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$.
- $\Pr(A \cup B \cup C) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$.
- Probabilidade condicional:
$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \qquad \Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)}.$$
- $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A) = \Pr(B)\Pr(A|B)$.
- Teorema da multiplicação: $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A)\Pr(B|A)\Pr(C|A \cap B)$.
- A e B são eventos independentes se $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ e $\Pr(B|A) = \Pr(B)$.
- A e B são eventos independentes se, e somente se, $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$.
- Teorema da probabilidade total: $(B_i)_i$ é uma partição em S
$$\Pr(A) = \sum_i \Pr(A \cap B_i) = \sum_i \Pr(B_i)\Pr(A|B_i).$$
- Teorema de Bayes: $(B_i)_i$ é uma partição em S
$$\Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A|B_i)}{\sum_i \Pr(B_i)\Pr(A|B_i)} \qquad \text{para todo } i.$$
- Variável aleatória unidimensional: X.
- Pré-imagem de um evento B em $\mathbb{R}$: $[X \in B] = \{s \in S | X(s) \in B\}$.
- Pré-imagem do intervalo $(-\infty, x]$ em $\mathbb{R}$: $[X \leq x] = [X \in (-\infty, x]] = \{s \in S | X(s) \leq x\}$.
- Distribuição de uma va.a. X: $P_X(B) = \Pr(X \in B)$ para todo evento B em $\mathbb{R}$.

- Função de distribuição acumulada de uma va.a. X: $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$ para todo evento x real.
- Propriedades da função F_X:
  - Mmmm.
  - Mmmm.
  - Mmmm.
- Variável aleatória discreta: $X \in \{x_1, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ ou $X \in \{x_1, x_1, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.
- Variável aleatória contínua: $X \in I \subset \mathbb{R}$, onde I é um subconjunto não-enumerável de $\mathbb{R}$.
- X é uma va.a. discreta com função de probabilidade p_X: $X \sim p_X$.
- X é uma va.a. contínua com função densidade de probabilidade f_X: $X \sim f_X$.
- Função de distribuição acumulada de uma va.a. X: $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$ para todo x real.

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{y \leq x} p_X(y) \qquad F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy.$$

- X é uma va.a. com função de distribuição F_X: $X \sim F_X$.
- Distribuição de uma va.a. X:

$$P_X(B) = \Pr(X \in B) = \sum_{x \in B} p_X(x) \qquad P_X(B) = \Pr(X \in B) = \int_{x \in B} f_X(x)dx.$$

- Média de uma va.a. X: $\mathrm{E}(X)$.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x x p_X(x) \qquad \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx.$$

- Segundo momento de uma va.a. X: $\mathrm{E}(X)$.

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_x x^2 p_X(x) \qquad \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx.$$

- Média de $h(X)$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $\mathrm{E}(h(X))$.

$$\mathrm{E}(h(X)) = \sum_x h(x)p_X(x) \qquad\qquad \mathrm{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f_X(x)dx.$$

- Variância de uma va.a. X: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$.
- Desvio padrão de uma va.a. X: $\mathrm{DP}(X) = +\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.
- Função geradora de momentos de uma va.a. X: $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$ definida para todo t em algum intervalo aberto em torno de zero.
- k-ésimo momento de uma va.a. X:

$$\mathrm{E}(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$$

- Variável aleatória bidimensional: (X,Y).
- Distribuição conjunta: $(X,Y) \sim f_{X,Y}(x,y)$.
- Distribuições marginais: $X \sim f_X(x)$ e $Y \sim f_Y(y)$.
- Distribuições condicionais: $X|Y=y \sim f_{X|Y}(x|y)$ e $Y|X=x \sim f_{Y|X}(y|x)$.
- X e Y são va.a.'s independentes se, e somente se, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
- Covariância entre X e Y: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))] = E(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.
- Note que: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X)$.
- Propriedades de E:
  - $\mathrm{E}(cX) = c\mathrm{E}(X)$.
  - $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.
  - Se X e Y são va.a.'s independentes, então $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.
- Propriedades de Var:
  - $\mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X)$.

- $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- Se X e Y são va.a.'s independentes, então $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

- Média condicional: $\mathrm{E}(X|Y=y) = \int x P_{X|Y}(dx|y)$.
- Variância condicional: $\mathrm{Var}(X|Y=y) = \mathrm{E}(X^2|Y=y) - [\mathrm{E}(X|Y=y)]^2$.
- $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y))$.
- $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(X|Y)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(X|Y))$.
- FGM1.
- FGM2.
- FGM3.
- FGM4.
- Lei dos grandes números: Mmmm.
- Teorema central do limite: Mmmm.

Referências

[1] P Meyer. Introductory Probability and Statistical Applications, 2nd ed. Addison-Wesley, 1970.

[2] P Meyer. Probabilidade: Aplicações à Estatística, 2a ed. LTC, 1983.

[3] W Bussab & P Morettin. Estatística Básica, 5a ed., Saraiva, 2002.