UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Redes Neuronales (525461)

Tarea 1

(Fecha de entrega: 26 de abril de 2019 hasta las 17:00 Hrs.)

P1 De las siguientes preguntas teóricas sobre aprendizaje de funciones Booleanas responda **exactamente dos** de ellas.

1. Sea $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$ una función Booleana. Determine en cada caso si f puede ser aprendida por un Perceptrón. En caso negativo, proponga una red multicapas que la aprenda.
   (a) $f(w, x, y, z) = 1 \Leftrightarrow w - x - y + z = 0$.
   (b) $f(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow (x = -1) \wedge (y = z)$.
   (c) $f(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 1)$.

2. Sean $f, g : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ funciones Booleanas umbrales. Determine en cada caso si la función $h : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ es o no umbral.
   (a) $h(x) = f(x) \vee g(x)$.
   (b) $h(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
   (c) $h(x) = f(x) \wedge \neg f(x)$
   (donde $\neg f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$) .

3. Una función Booleana $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ se dice monótona si verifica:
   $$\forall x, y \in \{0, 1\}^n,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y),$$
   donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \leq y = (y_1, \ldots, y_n)$ si y sólo si $\forall i = 1, \ldots, n,\ x_i \leq y_i$.
   (a) Pruebe que toda función Booleana que puede ser aprendida por un Perceptrón, donde los pesos de las interacciones son todos no negativos, es monótona.
   (b) Muestre que la función $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4)$ es monótona, pero que no puede ser aprendida por un Perceptrón.

4. Sea $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ y $f' : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$ funciones Booleanas verificando: $\forall x \in \{0, 1\}^n$, $\forall x' \in \{-1, 1\}^n$, tales que $\forall i = 1, \ldots, n,\ x_i = 0 \Leftrightarrow x'_i = -1$, se tiene que $f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x') = -1$.
   Muestre que f puede ser aprendida por un Perceptrón con función de activacción escalón $H(\cdot)$ si y sólo si f' puede ser aprendida por un Perceptrón con función de activación $sign(\cdot)$.

P2 De las siguientes preguntas teóricas y aplicadas sobre redes responda **exactamente dos** de ellas.

1. Dado $\{x^j\}_{j=1}^m$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$, se define su envoltura convexa como:

$$C_o(\{x^j\}) = \Big\{ \sum_j \alpha_j \, x^j \in \mathbb{R}^n : \forall j = 1, \ldots, m, \, \alpha_j \geq 0, \wedge \sum_j \alpha_j = 1 \Big\}.$$

Dos conjuntos $\{x^j\}_{j=1}^m$ y $\{y^j\}_{j=1}^m$ de puntos en $\mathbb{R}^n$ se dicen linealmente separables si existe un vector $w \in \mathbb{R}^n$ y $w_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall j = 1, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^n w_i x_i^j + w_0 > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n w_i y_i^j + w_0 < 0.$$

(a) Pruebe que $\{x^j\}_{j=1}^m$ y $\{y^j\}_{j=1}^m$ son linealmente separables si y sólo si :

$$C_o(\{x^j\}) \cap C_o(\{y^j\}) = \emptyset.$$

(b) Explique cómo podría ser usado un Perceptrón para determinar si $C_o(\{x^j\}) \cap C_o(\{y^j\}) = \emptyset$.

2. Dada una función $h : \mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}$, se definen los siguientes conjuntos:

$$T(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, h(x, y) = 1\} \ \wedge \ F(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, h(x, y) = 0\}.$$

Construya en cada caso un ejemplo de red Multicapas Feedforward tal que si h corresponde a la función asociada a la red, entonces los conjuntos $T(h)$ y $F(h)$ verifican:

(a) $T(h)$ está formado por dos zonas acotadas disjuntas.

(b) $F(h)$ es una zona no convexa.

(c) $T(h)$ y $F(h)$ son dos zonas convexas no acotadas.

3. Sea N un Perceptrón Multicapas con $m \geq 2$ dos capas de neuronas.

(a) Explique por qué si todas las funciones de activación de las neuronas de N son de tipo lineal, entonces el número de capas escondidas no determina la capacidad de la red.

(b) Suponga que N tiene $m = 2$ capas de neuronas con función de activación de tipo $\tanh(\cdot)$ en las neuronas de la capa escondida y de tipo lineal en las de salida. Muestre que si los pesos y los valores umbrales cambian todos de signo, entonces la salida de la red no se altera.

4. Determine la expresión explícita de actualización de los pesos, según la regla Backpropagation, de un Perceptrón Multicapas con 3 capas de neuronas y con función de activación para cada neurona igual a $g(a) = (1 + e^{-a})^{-1}$. El error considerado aquí es la entropía cruzada dado por:

$$E = \sum_j E^j = -\sum_j [y^j \ln(y(x^j)) + (1 - y^j) \ln(1 - y(x^j))].$$

P3 Resuelva el siguiente problema de aplicación:

Redes Neuronales en Meteorología. El archivo Sydney.csv (que puede ser descargado desde INFODA) contiene información meteorológica diaria de la ciudad de Sydney. En cada caso construya una red neuronal en Python, que use la regla de aprendizaje Delta generalizada, para resolver el problema planteado, especificando la entrada definida de la red (con eventuales pre-procesamientos), la función de activación de la neurona y el error conseguido. Entregue los códigos respectivos y las instrucciones para sus usos.

1. A partir de los datos de cada día, predecir la temperatura máxima diaria (MaxTemp).
2. Usando los datos de la velocidad del viento (WindGustSpeed) del día $t-2$, $t-1$ y t, predecir la velocidad del viento del día $t+1$.
3. A partir de los datos de cada día (a excepción de la humedad (Humidity9am)), predecir si la humedad (Humidity9am) será mayor al 60%.
