

El Modelo de la Telaraña

Ecuaciones en diferencia de primer orden

Mauro Loprete Fabricio Machado

Cálculo 3

9 de septiembre de 2019

Supuestos

- Competencia perfecta
- Un único bien
- Modelo dinámico
- Bien perecedero no almacenable
- $Q_t^s = S(P_{t-1})$ retrasada
- $Q_t^d = D(P_t)$ sin retraso
- $Q_t^s = Q_t^d$

Condición de equilibrio

$$\begin{cases} Q_t^s = -\gamma + \delta \cdot P_{t-1} & (\gamma, \delta > 0) \\ Q_t^d = \alpha - \beta \cdot P_t & (\alpha, \beta > 0) \\ Q_t^s = Q_t^d \end{cases}$$

$$-\gamma + \delta P_{t-1} = \alpha - \beta P_t$$

Condición de equilibrio

$$-\gamma + \delta P_{t-1} = \alpha - \beta P_t$$

$$\implies \delta P_{t-1} + \beta P_t = \alpha + \gamma$$

$$\implies \delta P_t + \beta P_{t+1} = \alpha + \gamma \quad (\text{con } t=t+1)$$

$$\implies \frac{\delta}{\beta} P_t + P_{t+1} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

Entonces con $c = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$ $a = \frac{\delta}{\beta}$ tenemos

$$aP_t + P_{t+1} = c$$

Método General

$$aP_t + P_{t+1} = c$$

- ↘ P_{nh} : Reducida no homogénea ($c \neq 0$) equilibrio intertemporal de p
- ↘ P_h : Reducida homogénea ($c = 0$) desviaciones de las trayectorias de tiempo respecto al equilibrio

Solución general

$$P_t = \text{Sol } P_h + \text{una Sol de } P_{nh}$$

Método General

$$\text{Sol } P_h: aP_t + P_{t+1} = 0$$

$$\Rightarrow aP_{t-1} + P_t = 0 \quad \text{con } (t=t-1)$$

$$\Rightarrow P_t = -aP_{t-1}$$

$$\searrow (t=1) \quad P_1 = -aP_0$$

$$\searrow (t=2) \quad P_2 = -aP_1 \rightarrow P_2 = -a(-aP_0)$$

$$\searrow (t=3) \quad P_3 = -aP_2 \rightarrow P_3 = -a(-a \cdot a \cdot P_0)$$

$$\Rightarrow P_t = -a^t P_0 \rightarrow P_t = Ab^t \quad \text{con } P_0 = A \text{ ya que } c=0 \text{ y } b=-a$$
$$(Ab^t \neq 0)$$

$$\Rightarrow P_t = Ab^t \rightarrow P_{t+1} = Ab^{t+1} \rightarrow P_h: a(Ab^t) + Ab^{t+1} = 0 \rightarrow \text{dividimos por } Ab^t \Rightarrow a+b=0 \rightarrow b=-a$$

$$P_h = Ab^t = A(-a)^t$$

Método general

Sol P_{nh} : $aP_t + P_{t+1} = c$

Asumiendo intertemporalidad (ecuación en diferencia con término constante) $P_t = P_{t+1} = k$

$$\Rightarrow a(k) + (k) = c \rightarrow k(a+1) = c \rightarrow k = \frac{c}{1+a} \quad a \neq -1 \quad (\alpha, \gamma > 0 \quad a = \frac{\delta}{\beta})$$

Como $\frac{c}{1+a}$ es una constante, entonces tenemos un equilibrio estacionario

Método general

$$\text{Sol general}(P_t) = \text{Sol}P_{nh} + \text{Sol}P_h = A(-a)^t + \frac{c}{1+a} \quad a \neq -1$$

$$\Rightarrow (t=0) \quad P_0 = A + \frac{c}{1+a} \rightarrow A = P_0 - \frac{c}{1+a}$$

$$P_t = (P_0 - \frac{c}{1+a})(-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

$$P_t = (P_0 - \frac{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}{1 + \frac{\delta}{\beta}})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}{1 + \frac{\delta}{\beta}}$$

Solución del modelo

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Solución particular de la ecuación en diferencia

$$P_t = (P_0 - \bar{P})\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \bar{P}$$

$\bar{p} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ precio de equilibrio estacionario.

Como $\alpha, \beta > 0$ y $b = -a = -\frac{\delta}{\beta} < 0$

La solución del modelo es oscilante

Tipos de Telarañas

$$Q_t^s = -\gamma + \delta P_{t-1} = \alpha - \beta P_t = Q_t^d$$

δ pendiente de Q_t^s y β pendiente de Q_t^d

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta > \beta \text{ la oscilación es explosiva} \\ \delta < \beta \text{ la oscilación es amortiguada} \\ \delta = \beta \text{ la oscilación es uniforme} \end{array} \right.$$

Desde la óptica del economista

Colocamos los precios en el eje de las ordenadas y las cantidades en el eje de las abscisas.

Se invierten las relaciones de las pendientes δ y β

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\delta} & \text{Oscilación Amortiguada} \\ \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\beta} & \text{Oscilación Explosiva} \\ \beta = \delta & \text{Oscilación Uniforme} \end{array} \right.$$

Aplicación del modelo

Solución del modelo

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

$$P_0=40$$

$$\alpha=12$$

$$\beta=0,3$$

$$\gamma=5$$

$$\delta=0,25$$

$$P_t = (40 - \frac{12 + 5}{0,3 + 0,23})(-\frac{0,25}{0,3})^t + \frac{12 + 5}{0,3 + 0,23}$$

Valores

Cuadro: Tabla de Valores

Periodo	Cantidad Demandada	Cantidad Ofrecida	Precio en t
0	0	0	40
1	5	5	23.3
2	0.8	0.8	37.2
3	4.3	4.3	25.6
4	1.4	1.4	35.3
5	3.8	3.8	27.3
6	1.8	1.8	34
7	3.5	3.5	28.4
8	2.1	2.1	33
9	3.3	3.3	29.1
10	2.3	2.3	32.4