1.- Modelo de la Telaraña

a) Breve reseña histórica:

- *Presentar el modelo estático de oferta y demanda (Véase cualquier libro de microeconomía)*
- Se introduce para explicar las fluctuaciones que se producen en los precios de los mercados agrícolas (en general para artículos cuya producción no es instantánea ni continua, sino que exige un período de duración en su producción)
- Es extremadamente simplista, de aquí las variaciones en las hipótesis que se pueden introducir.

b) Hipótesis:

- La decisión de producir debe ser adoptada en el período anterior al de la venta y se confía en el que el precio actual se va a mantener en el próximo período.
- Demanda y oferta son funciones lineales del precio del producto
- El mercado está en situación de equilibrio:

c) Formulación matemática:

$D_t = a - bP_t$

$S_t = - c + d\ P_{t-1}$ $\qquad$ a,b,c y d > 0

$D_t = S_t$

Antes de resolver el modelo, encontrar el significado económico a los coeficientes reales que se introducen en el modelo.

d) Resolución y análisis del modelo:

$$\mathbf{b\ P_t + d\ P_{t-1} = a + c}$$

d_1) d = - b

```
<< DiscreteMath`RSolve`
RSolve[b P[t] + d P[t - 1] == a + c, P[t], t] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t] \to \frac{\text{If}[t \geq -1, a + c + a\,t + c\,t + b\,C[1], 0]}{b}\right\}\right\}$$

$$\text{Collect}\left[\frac{a + c + a\,t + c\,t + b\,C[1]}{b}, t, \text{Factor}\right]$$

$$\frac{(a + c)\,t}{b} + \frac{a + c + b\,C[1]}{b}$$

Si imponemos una condición inicial:

```
d = -b
```

$-b$

```
RSolve[{b P[t] + d P[t - 1] == a + c, P[0] == P0}, P[t], t] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t] \to P0 + \frac{(a + c)\,t}{b}\right\}\right\}$$

d_2) $d \neq -b$

```
RSolve[b P[t] + d P[t - 1] == a + c, P[t], t] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t] \to \mathrm{If}\left[t \geq -1, \frac{1}{b+d} \left(b^{-1-t} \left(b^{1+t} c + a \left(b^{1+t} + (-1)^t d^{1+t}\right) - (-1)^t b\, d^{1+t} C[1] + (-1)^t d^{1+t} (c - d\, C[1])\right)\right), 0\right]\right\}\right\}$$

$$\mathbf{Collect}\left[\frac{b^{-1-t} \left(b^{1+t} c + a \left(b^{1+t} + (-1)^t d^{1+t}\right) - (-1)^t b\, d^{1+t} C[1] + (-1)^t d^{1+t} (c - d\, C[1])\right)}{b+d}, (d)^t, \mathbf{Factor}\right]$$

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{(-1)^t b^{-1-t} d^{1+t} (-a - c + b\, C[1] + d\, C[1])}{b+d}$$

Simplificando y agrupando la solución queda: $P_t = K\,(-d/b)^t + ((a+c)/(b+d))$

Si imponemos una condición inicial:

```
RSolve[{b P[t] + d P[t - 1] == a + c, P[0] == Po}, P[t], t] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t] \to \frac{b^{-t} \left(b^t (a+c) - (-1)^t d^t (a + c - (b+d) Po)\right)}{b+d}\right\}\right\}$$

$$\mathbf{Collect}\left[\frac{b^{-t} \left(b^t (a+c) - (-1)^t d^t (a + c - (b+d) Po)\right)}{b+d}, (d)^t, \mathbf{Factor}\right]$$

$$\frac{a+c}{b+d} + \frac{(-1)^t b^{-t} d^t (-a - c + b\, Po + d\, Po)}{b+d}$$

Estabilidad y convergencia del modelo.

e) Conclusiones posibles económicas

f) Variantes del modelo:

- La hipótesis que se establece sobre el precio (permanece constante con respecto al período anterior) parece poco aceptable en general (por eso se introduce en el modelo un $\hat{p}_t$ significando con ello **el precio esperado** para la función oferta) y, en consecuencia, sobre este precio esperado (la teoría de formación de expectativas) se introducen múltiples variantes. Luego el modelo de la telaraña, lo podemos expresar en general de la siguiente forma con esta observación sobre el precio esperado[1]

$$D_t = a - bp_t$$
$$S_t = -c + d\,\hat{p}_t \qquad a,b,c \text{ y } d > 0$$
$$D_t = S_t$$

- Podríamos modificar también el modelo presentado, si consideramos que D_t y/u S_t no tienen que ser funciones lineales respecto al precio, por ejemplo:

$$S_t = p_{t-1}^2$$
$$D_t = 1/p_t$$

- Una tercera posible alternativa para introducir variantes en el modelo puede hacer referencia a la situación de equilibrio entre oferta y demanda. Por ejemplo, podríamos

[1] Nerlove (1958)

pensar que la $D_{t-1} = S_t$. Plantéese matemáticamente en cualquiera de los casos vistos anteriormente. *¿Se obtienen en todos los casos un auténtico modelo dinámico?*

- Evidentemente si mezclamos más de una alternativa reseñada anteriormente, nacen nuevos modelos.

Debemos resaltar, que esto que parece un juego, no es tal, pues las posibles modificaciones que introduzcamos, deben tener al menos una justificación teórica con significado económico. Incluso, en algunos casos, puede resultar un "aparente" modelo dinámico.

Presentamos a continuación, algunos modelos ya clásicos en la literatura económica, **variantes del modelo de la telaraña:**

0.- Si $\hat{p}_t = p_{t-1}$, estamos en el modelo inicial dinámico

1.- Definamos p_n ("precio normal") como aquél que los productores creen que más tarde o más temprano, ese producto tendrá en el mercado. Y por tanto, el precio en el mercado "se ajustará" mediante este precio normal.

Una forma de expresar, matemáticamente, esta hipótesis es:

$$\hat{p}_t = p_{t-1} + k\,(p_n - p_{t-1}) \quad \text{con} \quad 0 < k < 1$$ [2]

Luego, tras las operaciones y sustituciones pertinentes, nos resulta la siguiente ecuación en diferencias:

$$\mathbf{b\, p_t + d(1-k)\, p_{t-1} = a + c - d\, k\, p_n}$$

y si consideramos $p_n = p^*$

$$\mathbf{b\, p_t + (b(1 - k) - kd)\, p_{t-1} = [(a+c)\,(b + d\,(1 - k))] / (b + d)}$$

Con el Mathematica 4.2 obtenemos su solución:

```
RSolve[{b P[t] + (b (1 - k) - k d) P[t - 1] == (a + c) (b + d (1 - k)) / (b + d),
   P[0] == Po}, P[t], t] // FullSimplify
{{P[t] → (b^-t (-b^t (a + c) (b + d - d k) + (b (-1 + k) + d k)^t ((a + c) (b + d - d k) +
        (b + d) (b (-2 + k) + d k) Po))) / ((b + d) (b (-2 + k) + d k))}}
Collect[
 (b^-t
   (-b^t (a + c) (b + d - d k) +
     (b (-1 + k) + d k)^t ((a + c) (b + d - d k) + (b + d) (b (-2 + k) + d k) Po))) /
  ((b + d) (b (-2 + k) + d k)), (b (-1 + k) + d k)^t, Factor]
```

[2] Es interesante analizar los casos k = 0 y k = 1, pues nos explicarán el significado de esta constante. Nos podíamos también preguntar sobre el tiempo estimado para que $\hat{p}_t = p_n$ (el inverso de K). Y, ya que estamos en preguntas, qué relación existe entre p_n y el precio de equilibrio del modelo dinámico si es que existe. Y una última observación, por simplicidad podemos considerar p_n como el precio de equilibrio en el modelo estático (que coincide con P*).

$$-\frac{(a+c)\,(b+d-d\,k)}{(b+d)\,(-2\,b+b\,k+d\,k)}+$$

$$\left(b^{-t}\,(b\,(-1+k)+d\,k)^{t}\,(a\,b+b\,c+a\,d+c\,d-a\,d\,k-c\,d\,k-2\,b^{2}\,Po-2\,b\,d\,Po+b^{2}\,k\,Po+2\,b\,d\,k\,Po+d^{2}\,k\,Po)\right)\Big/\left((b+d)\,(-2\,b+b\,k+d\,k)\right)$$

$$\{\{P[t]\to(b^{-t}\,(-b^{t}\,(a+c)\,(b+d-d\,k)+(b\,(-1+k)+kd)^{t}\,((a+c)\,(b+d-d\,k)+(b+d)\,(b\,(-2+k)+kd)\,Po)))\,/\,((b+d)\,(b\,(-2+k)+kd))\}\}$$

2.- Cagan (1956) sugiere un modelo con expectativas adaptativas, pues p_n no es constante, sino que las expectativas son revisadas en cada período por parte del productor, ajustando el precio previamente esperado y el valor observado. Dicho matemáticamente:

$$\hat{p}_t - \hat{p}_{t-1} = k\,(p_{t-1} - \hat{p}_{t-1}) \quad \text{con } 0 < k < 1$$

Y tras las operaciones y sustituciones pertinentes, nos resulta la siguiente ecuación en diferencias:

$$\mathbf{b\, p_t + (b(1-k) - kd)\, p_{t-1} = k\,(a+c)}$$

Siendo su solución:

```
RSolve[{ b P[t] + (b (1 - k) - k d) P[t - 1] == k (a + c), P[0] == P0}, P[t], t] //
  FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t]\to\frac{b^{-t}\,(-b^{t}\,(a+c)\,k+(b\,(-1+k)+d\,k)^{t}\,(-2\,b\,P0+k\,(a+c+(b+d)\,P0)))}{b\,(-2+k)+d\,k}\right\}\right\}$$

$$\text{Collect}\left[\frac{b^{-t}\,(-b^{t}\,(a+c)\,k+(b\,(-1+k)+d\,k)^{t}\,(-2\,b\,P0+k\,(a+c+(b+d)\,P0)))}{b\,(-2+k)+d\,k},\ (b\,(-1+k)+d\,k)^{t},\ \text{Factor}\right]$$

$$-\frac{(a+c)\,k}{-2\,b+b\,k+d\,k}+\frac{b^{-t}\,(b\,(-1+k)+d\,k)^{t}\,(a\,k+c\,k-2\,b\,P0+b\,k\,P0+d\,k\,P0)}{-2\,b+b\,k+d\,k}$$

3.- Una nueva variante debida a Goodwin, establece que las expectativas sobre los precios de la oferta, se forman mediante la siguiente expresión:

$$\hat{p}_t = p_{t-1} + k\,(p_{t-1} - p_{t-2}) \qquad k \in R$$

k (coeficiente de expectativas) determina pues, la tendencia hacia el precio esperado. Es interesante analizar algunos valores concretos e interpretar su significado económico (p.e.: k = 0, k = 1, k = -1, ...).

Luego sustituyendo en

$D_t = a - bp_t$

$S_t = -c + d\ \hat{p}_t$ a,b,c y d > 0

$D_t = S_t$

obtenemos la ecuación en diferencias finitas

$$\mathbf{b\, p_t + d\,(1+k)\, p_{t-1} - d\,k\, p_{t-2} = a + c}$$

El Mathematica 4.2 nos da:

```
RSolve[{b P[t] + d (1 + k) P[t - 1] - d k P[t - 2] == a + c, P[0] == po, P[1] == p1},
  P[t], t] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t]\to \frac{1}{2\,(b+d)}\left(2\,c+\frac{1}{\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}\left(2^{-t}\left(\left(\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t(2\,b\,c+c\,d+c\,d\,k+a\,(2\,b+d+d\,k)-2\,b^2\,p1-2\,b\,d\,p1-d\,(b+d)\,(1+k)\,po)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\left(-a\left(-2^{1+t}+\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t+\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t\right)+\left(\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t+\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t\right)(-c+(b+d)\,po)\right)+\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t(-a\,(2\,b+d+d\,k)+2\,b^2\,p1+d\,(1+k)\,(-c+d\,po)+b\,(-2\,c+d\,(2\,p1+po+k\,po)))\right)\right)\right)\right\}\right\}$$

$$\mathbf{Collect}\Bigg[\frac{1}{2\,(b+d)}\left(2\,c+\frac{1}{\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}\left(2^{-t}\left(\left(\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t(2\,b\,c+c\,d+c\,d\,k+a\,(2\,b+d+d\,k)-2\,b^2\,p1-2\,b\,d\,p1-d\,(b+d)\,(1+k)\,po)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\left(-a\left(-2^{1+t}+\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t+\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t\right)+\left(\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t+\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t\right)(-c+(b+d)\,po)\right)+\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t(-a\,(2\,b+d+d\,k)+2\,b^2\,p1+d\,(1+k)\,(-c+d\,po)+b\,(-2\,c+d\,(2\,p1+po+k\,po)))\right)\right)\right),$$

$$\left\{\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t,\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^t\right\},\ \mathbf{Factor}\Bigg]$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{a+c}{b+d}-\Bigg(2^{-1-t}\left(-\frac{d+d\,k+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^{t}\\
&\quad\Big(-2\,a\,b-2\,b\,c-a\,d-c\,d-a\,d\,k-c\,d\,k+a\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}+\\
&\quad c\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}+2\,b^2\,p1+2\,b\,d\,p1+b\,d\,po+d^2\,po+b\,d\,k\,po+\\
&\quad d^2\,k\,po-b\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\;po-d\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\;po\Big)\Bigg)\Big/\\
&\left((b+d)\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\right)+\Bigg(2^{-1-t}\left(\frac{-d\,(1+k)+\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}}{b}\right)^{t}\\
&\quad\Big(-2\,a\,b-2\,b\,c-a\,d-c\,d-a\,d\,k-c\,d\,k-a\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}-c\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}+\\
&\quad 2\,b^2\,p1+2\,b\,d\,p1+b\,d\,po+d^2\,po+b\,d\,k\,po+d^2\,k\,po+b\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\;po+\\
&\quad d\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\;po\Big)\Bigg)\Big/\left((b+d)\sqrt{4\,b\,d\,k+(d+d\,k)^2}\right)
\end{aligned}
$$

4.- Chiang (1987), introduce una nueva variante al considerar que no existe equilibrio en el mercado ($D_t \neq S_t$) y en consecuencia los productores mantienen un inventario de mercancías (de aquí el nombre de modelo de mercado con inventario). Por tanto la nueva hipótesis que incorpora, establece que los precios se establecen en función del estado de sus existencias. Si ha aumentado su nivel de existencias, bajarán los precios; y si ha disminuido, pues incrementarán el precio en el mercado. Establece también que Demanda y oferta son funciones lineales con respecto al precio no desfasado.
Traducido en terminología matemática:

$$
\begin{aligned}
D_t &= a - b\,p_t \\
S_t &= -c + d\,p_t \qquad a,b,c \text{ y } d > 0 \\
p_{t+1} &= p_t - k\,(S_t - D_t)
\end{aligned}
$$

siendo $k > 0$ e indica el coeficiente de ajuste del precio inducido por el nivel de existencias.
Y sustituyendo en la tercera ecuación, el valor de D_t y S_t, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathbf{P_{t+1} - [1 - k(d + b)]\,P_t = k\,(a + c)}$$

Con el Mathematica 4.2 nos queda:

```
RSolve[{P[t+1] - (1-k (d+b)) P[t] == k (a+c), P[0] == po}, P[t], t] //
 FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t]\to\frac{a+c-(1-(b+d)\,k)^{t}\,(a+c-(b+d)\,po)}{b+d}\right\}\right\}$$

5.- Como última variante, y a modo de simple ejercicio y presentación, consideremos el caso señalado de no linealidad de las funciones oferta y demanda, en situación de equilibrio por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
S_t &= p_{t-1}^{2} \\
D_t &= 1/p_t \\
S_t &= D_t
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la tercera ecuación, obtendríamos:

$$\mathbf{p_t\;p_{t-1}^{2} = 1}$$

ecuación no lineal de primer orden.

El Mathematica 4.2 no la puede resolver. Sin embargo el Mathematica 5.0 si y nos da:

```
RSolve[P[t]  P[t-1]^2==1,P[t],t]//FullSimplify
```

$\{\{P[t] \to e^{(-2)^t C[1]}\}\}$

6.- Hasta ahora y por la naturaleza original del problema (mercado agrícola de productos temporales) hemos considerado el tiempo como discreto (y en consecuencia obteníamos ecuaciones en diferencias finitas). Una posible (y válida) extensión es considerar un producto "no perecedero" (y por tanto consideramos el tiempo continuo). Luego la producción del bien que analizamos es continua.

Presentamos en este caso un ejemplo sencillo que a su vez y posteriormente, podríamos introducir al mismo nuevas variantes.

Supongamos que nos situamos ene. modelo de la telaraña en situación de equilibrio y con expectativas de precios. Matemáticamente se refleja como:

$$D(t) = a - b\,p(t)$$
$$S(t) = -c + d\,\hat{p}(t) \qquad a,b,c \text{ y } d > 0$$
$$D(t) = S(t)$$

Y expresamos la expectativa del precio dependiendo de la variación que experimenta el mismo a lo largo del tiempo, esto es:

$$\hat{p}(t) = p(t) + k\,p'(t) \quad \text{con } k > 0$$

obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria en la variable precio:

$$\mathbf{a - b\,p(t) = -c + d\,[\,p(t) + k\,p'(t)\,]}$$

que, reordenándola, se puede expresar mediante :

$$\mathbf{k\,d\,p' + (b + d)\,p = a + c}$$

que es una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden.
Resolviéndola se obtiene la expresión analítica del precio

```
DSolve[{k d P'[t] + (b + d) P[t] == (a + c), P[0] == po}, P[t], t] //
 FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t] \to \frac{a + c + e^{-\frac{(b+d)\,t}{d\,k}}\,(-a - c + (b + d)\,po)}{b + d}\right\}\right\}$$

Variantes que existen en este modelo sencillo continuo, son considerar que $D(t) \neq S(t)$, e incorporar la hipótesis Walrasiana[3] explicitando la expresión matemática que define el exceso de demanda en cada uno de los casos en estudio, como por ejemplo:

6.1.- El exceso de demanda es una función lineal: $f[D(p) - S(p)] = D(p) - S(p)$.

Que al sustituir en la hipótesis walrasiana, se expresaría mediante la ecuación diferencial lineal siguiente:

$$\mathbf{p' + (b + d)\,p = a + c}$$

---

[3] El precio tiende a aumentar (*disminuir*) si el exceso de demanda es positivo (*negativo*): $p' = f[D(p) - S(p)]$

La solución con el Mathematica 4.2 es:

```
DSolve[{P'[t] + (b + d) P[t] == (a + c), P[0] == P0}, P[t], t] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{P[t] \to \frac{e^{-(b+d)\,t}\left(-a - c + (a + c)\, e^{(b+d)\,t} + (b + d)\, P0\right)}{b + d}\right\}\right\}$$

$$\mathbf{Collect}\left[\frac{e^{-(b+d)\,t}\left(-a - c + (a + c)\, e^{(b+d)\,t} + (b + d)\, P0\right)}{b + d},\ e^{(b+d)\,t},\ \mathbf{Factor}\right]$$

$$\frac{a + c}{b + d} + \frac{e^{(-b-d)\,t}\left(-a - c + b\,P0 + d\,P0\right)}{b + d}$$

7.- Planteen ustedes una nueva variante, y que tenga una posible justificación económica, para obtener un nuevo modelo dinámico (bien discreto bien continuo).

g) <u>Bibliografía:</u>

- Fernández, F y García, M.D.: Métodos Matemáticos en Economía Dinámica (Volumen I y II), Colección Textos Universitarios, Consejería de Educación Cultura y Deportes del Gobierno Canario, Tenerife 2001.
- Gandolfo, G.: Métodos y Modelos matemáticos de la dinámica económica, ed. Tecnos, Madrid 1976.
- González,C. y Barrios, J.A.: Análisis Discreto en Economía y Empresa, ed. AC Madrid 2000
- Mickens, R.E.: Difference equations. Theory and application, Van Nostrand Reinhold, 1990
- Quirck, J.P.: Microeconomía, ed. Bosch, Barcelona 1986.