El Modelo de la Telaraña

Ecuaciones en diferencia de primer orden

Mauro Loprete Fabricio Machado

Cálculo 3

9 de septiembre de 2019

Supuestos

- Competencia perfecta
- Un único bien
- Modelo dinámico
- Bien perecedero no almacenable
- $Q_t^s = S(P_{t-1})$ retrasada
- $Q_t^d = D(P_t)$ sin retraso
- $Q_t^s = Q_t^d$

Condición de equilibrio

$$\begin{cases} Q_t^s = -\gamma + \delta \cdot P_{t-1} \quad (\gamma, \delta > 0) \\ Q_t^d = \alpha - \beta \cdot P_t \quad (\alpha, \beta > 0) \\ Q_t^s = Q_t^d \end{cases}$$

$$-\gamma + \delta P_{t-1} = \alpha - \beta P_t$$

Condición de equilibrio

$$-\gamma+\delta P_{t-1}=\alpha-\beta P_t$$

$$\Longrightarrow \delta P_{t-1}+\beta+P_t=\alpha+\gamma$$

$$\Longrightarrow \delta P_t+\beta P_{t+1}=\alpha+\gamma \qquad \text{(con t=t+1)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta}{\beta}P_t+P_{t+1}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$

Entonces con c=$\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ a=$\frac{\delta}{\beta}$ tenemos

$$aP_t+P_{t+1}=c$$

Método General

aP_t+$P_{t+1} = c$

$\searrow$ P_{nh}:Reducida no homogénea (c$\neq$0) equilibrio intertemporal de p

$\searrow$ P_h: Reducida homogénea (c=0) desviaciones de las trayectorias de tiempo respecto al equilibrio

Solución general

P_t=SolP_h+una Sol de P_{nh}

Método General

SolP_h: aP_t+P_{t+1}=0

$\Longrightarrow$ aP_{t-1}+P_t=0   con (t=t-1)

$\Longrightarrow$$P_t$=-a$P_{t-1}$

Método General

SolP_h: aP_t+P_{t+1}=0
$\Longrightarrow$ aP_{t-1}+P_t=0 con (t=t-1)
$\Longrightarrow$$P_t$=-a$P_{t-1}$
$\searrow$(t=1) P_1=-aP_0
$\searrow$(t=2) P_2=-a$P_1$$\rightarrow$$P_2$=-a(-a$P_0$)
$\searrow$(t=3) P_3=-a$P_2$$\rightarrow$$P_3$=-a(-a.-a.$P_0$)

Método General

SolP_h: aP_t+P_{t+1}=0

$\Longrightarrow$ aP_{t-1}+P_t=0 con (t=t-1)

$\Longrightarrow$$P_t$=-a$P_{t-1}$

$\searrow$(t=1) P_1=-aP_0

$\searrow$(t=2) P_2=-a$P_1$$\rightarrow$$P_2$=-a(-a$P_0$)

$\searrow$(t=3) P_3=-a$P_2$$\rightarrow$$P_3$=-a(-a.-a.$P_0$)

$\Longrightarrow$$P_t$=-$a^t P_0$$\rightarrow$$P_t$=A$b^t$ con P_0=A ya que c=0 y b=-a (A$b^t$$\neq$0)

$\Longrightarrow$$P_t$=A$b^t$$\rightarrow$$P_{t+1}$=A$b^{t+1}$$\rightarrow$$P_h$:a(A$b^t$)+A$b^{t+1}$=0$\rightarrow$dividimos por A$b^t$ $\Longrightarrow$a+b=0$\rightarrow$b=-a

$$P_h = Ab^t = A(-a)^t$$

Método general

Sol P_{nh}: aP_t+P_{t+1}=c
Asumiendo intertemporalidad (ecuación en diferencia con término constante) P_t=P_{t+1}=k
$\Longrightarrow$a(k)+(k)=c$\rightarrow$k(a+1)=c$\rightarrow$k=$\frac{c}{1+a}$ a$\neq$-1 (α,γ>0 a=$\frac{\delta}{\beta}$)
Como $\frac{c}{1+a}$ es una constante, entonces tenemos un equilibrio estacionario

Método general

Sol general(P_t)=SolP_{nh}+SolP_h=A$(-a)^t+\frac{c}{1+a}$ a$\neq$-1
$\Longrightarrow$(t=0) P_0=A+$\frac{c}{1+a}\rightarrow$A=P_0-$\frac{c}{1+a}$
P_t=(P_0-$\frac{c}{1+a}$)$(-a)^t$+$\frac{c}{1+a}$

$$P_t = (P_0 - \frac{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}{1+\frac{\delta}{\beta}})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}{1+\frac{\delta}{\beta}}$$

Solución del modelo

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Solución particular de la ecuación en diferencia

$$P_t = (P_0 - \bar{P})((-\frac{\delta}{\beta})^t) + \bar{p}$$

$\bar{p}$=$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ precio de equilibrio estacionario.
Como $\alpha, \beta > 0 \quad y \quad b = -a = -\frac{\delta}{\beta} < 0$
La solución del modelo es oscilante

Tipos de Telarañas

$$Q_t^s = -\gamma + \delta P_{t-1} = \alpha - \beta P_t = Q_t^d$$

δ pendiente de Q_t^s y β pendiente de Q_t^d

$$\begin{cases} \delta > \beta \text{ la oscilación es explosiva} \\ \delta < \beta \text{ la oscilación es amortiguada} \\ \delta = \beta \text{ la oscilación es uniforme} \end{cases}$$

Desde la óptica del economista

Colocamos los precios en el eje de las ordenadas y las cantidades en el eje de las abscisas.
Se invierten las relaciones de las pendientes δ y β

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\delta} & \textit{Oscilación} \quad \textit{Amortiguada} \\ \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\beta} & \textit{Oscilación} \quad \textit{Explosiva} \\ \beta = \delta & \textit{Oscilación} \quad \textit{Uniforme} \end{cases}$$

Aplicación del modelo

Solución del modelo

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Aplicación del modelo

Solución del modelo

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

P_0=40
α=12
β=0,3
γ=5
δ=0,25

Aplicación del modelo

Solución del modelo

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

P_0=40
α=12
β=0,3
γ=5
δ=0,25

$$P_t = (40 - \frac{12 + 5}{0,3 + 0,23})(-\frac{0,25}{0,3})^t + \frac{12 + 5}{0,3 + 0,23}$$

Valores

Cuadro: Tabla de Valores

Periodo	Cantidad Demandada	Cantidad Ofrecida	Precio en t
0	0	0	40
1	5	5	23.3
2	0.8	0.8	37.2
3	4.3	4.3	25.6
4	1.4	1.4	35.3
5	3.8	3.8	27.3
6	1.8	1.8	34
7	3.5	3.5	28.4
8	2.1	2.1	33
9	3.3	3.3	29.1
10	2.3	2.3	32.4