

# Corso di Teoria Quantistica dei Campi: alcune Note

Mauro Riccardi

19 maggio 2021

## Sommario

Quelle che seguono sono alcune note sulla Teoria Quantistica dei Campi relative al corso tenuto al LSS Galileo Ferraris, Torino

## 1 Meccanica quantistica

In meccanica quantistica lo stato di un sistema fisico  $\mathcal{S}$  è rappresentato tramite vettori in un opportuno spazio vettoriale. Da un punto di vista matematico lo spazio vettoriale di cui abbiamo bisogno deve possedere un *prodotto scalare definito positivo*. Per fissare le notazioni e le idee definiamo ora l'arena matematica nella quale si svolge la MQ.

### 1.1 Tutorial sugli spazi di Hilbert

***Caveat emptor*** In tutto il documento l'enfasi è posta sulla semplicità della trattazione, per questo il formalismo verrà utilizzato come un linguaggio sintetico per veicolare i concetti, senza avere alcuna pretesa di rigore formale.

**Spazi di Hilbert:** Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale  $\mathcal{H}$  (eventualmente di dimensione non finita) su campo complesso  $\mathbb{C}$  dotato (oltre che delle usuali operazioni di composizione) anche di una forma bilineare (tecnicamente *sesquilineare*) detta **prodotto scalare**. Come nella tradizione della MQ - a partire da Dirac - un vettore di  $\mathcal{H}$  verrà indicato tramite la notazione dei *ket*:

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1)$$

All'interno dei delimitatori  $|\rangle$  viene inserita un'etichetta: può rappresentare sia il nome dello stato (in questo caso la singola lettera greca  $\Psi$ ), sia altre informazioni, quale il valore di una certa quantità fisica su quello stato (per esempio, la posizione di una particella). Per vedere come questa notazione viene impiegata scriviamo una sovrapposizione tra due vettori di  $\mathcal{H}$ :

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad , \quad |\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad |\psi\rangle + |\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad (2)$$

Oppure una combinazione lineare con coefficienti non banali:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad , \quad |\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad , \quad a, b \in \mathbb{C} \quad a|\psi\rangle + b|\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad (3)$$

Strumento 1: Vettori di  $\mathbb{C}^2$ 

La notazione di Dirac è un grande strumento, ma richiede una certa astrazione, o in alternativa una buona conoscenza perlomeno dell'algebra lineare. Per accompagnarci in questo percorso è bene avere un esempio concreto *minimale*. Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{C}^2$ : è lo spazio vettoriale costituito dalle coppie di numeri complessi  $\{(a, b) | a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\}$ ; ogni vettore di questo spazio corrisponderà ad un ket, e useremo (per motivi che saranno chiari tra poco) la notazione

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Le operazioni tra/su tali vettori sono definite nel modo solito

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \quad c \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix} \quad a, a', b, b', c \in \mathbb{C}$$

Tenendo a mente questo esempio “ristretto” di ket nel seguito sarà più semplice seguire la notazione più astratta che ci serve per fare MQ.

**Vettori duali:** La notazione potrebbe apparire bislacca (essendo i delimitatori asimmetrici), in realtà è funzionale agli scopi per cui viene utilizzata. Infatti ad ogni spazio vettoriale è possibile associare un'altro spazio vettoriale, ad esso isomorfo, detto il suo **spazio duale**, in genere indicato con la notazione  $\mathcal{H}^*$ . Nella notazione di Dirac un vettore dello spazio duale viene indicato con la notazione dei *bra*:

$$\langle \phi | \in \mathcal{H}^* \quad (4)$$

Analogamente al caso dei ket possiamo scrivere per una combinazione lineare di due bra:

$$\langle \psi | \in \mathcal{H}^* \quad , \quad \langle \phi | \in \mathcal{H}^* \quad , \quad a, b \in \mathbb{C} \quad a \langle \psi | + b \langle \phi | \in \mathcal{H}^* \quad (5)$$

Per ogni ket  $|\psi\rangle$  esiste un bra che indichiamo con l'analogia notazione  $\langle \psi | \in \mathcal{H}^*$ , che si chiama il **bra complesso coniugato (o immaginario coniugato)**<sup>1</sup> del ket  $|\psi\rangle$ . Questa corrispondenza è esattamente analoga alla coniugazione di un numero complesso:

$$\langle \psi | = (|\psi\rangle)^* \quad (6)$$

Per esempio se moltiplichiamo il ket  $|\psi\rangle$  per un numero complesso  $a \in \mathbb{C}$  otteniamo un nuovo ket  $a|\psi\rangle$ , e a questo nuovo ket corrisponderà il bra

$$(a|\psi\rangle)^* = a^* \langle \psi | \quad (7)$$

Strumento 2: Vettori di  $\mathbb{C}_2$  (bra version)

Consideriamo di nuovo lo spazio vettoriale  $\mathbb{C}^2 = \{(a, b) | a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\}$ : stavolta però ad ogni vettore corrisponderà un bra, e per mettere in evidenza tipograficamente la

<sup>1</sup>Terminologia originale di Dirac

differenza useremo la notazione

$$(a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Le operazioni tra/su tali vettori sono definite analogamente

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad c(a, b) = (ca, cb) \quad a, a', b, b', c \in \mathbb{C}$$

Per differenziare questo spazio vettoriale (di vettori riga, bra) da quello del caso precedente (vettori colonna, ket) conveniamo di chiamare questo spazio con la notazione non convenzionale  $\mathbb{C}_2$ .

La corrispondenza tra ket e bra (coniugazione) viene realizzata in questo modo sui nostri vettori bidimensionali di  $\mathbb{C}^2$  e di  $\mathbb{C}_2$ : ad ogni ket  $|\psi\rangle$  di  $\mathbb{C}^2$  associamo il bra  $\langle\psi|$  di  $\mathbb{C}_2$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| = (|\psi\rangle)^* = \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]^* = (a^*, b^*)$$

Cioè l'operazione di coniugazione che trasforma un ket in un bra consiste nel disporre per riga gli elementi della colonna (trasposizione), e poi prendere il complesso coniugato di ciascuno (coniugazione complessa). Quindi il duale dello spazio vettoriale  $\mathbb{C}^2$  è  $\mathbb{C}_2$ . Applicando di nuovo la definizione possiamo vedere che la stessa relazione vale anche all'inverso, per cui per ogni bra c'è un ket equivalente (quindi sia  $\mathbb{C}^2$  che  $\mathbb{C}_2$  sono il doppio duale di sé stessi).

Un vettore dello spazio duale (quindi, un bra) è un *funzionale lineare* sullo spazio  $\mathcal{H}$ , nella notazione di Dirac l'applicazione di un tale funzionale viene indicata semplicemente giustapponendo il simbolo del bra con quello del ket<sup>2</sup>

$$\langle\phi|(|\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle \in \mathbb{C} \quad (8)$$

**Prodotto scalare:** Il risultato dell'applicazione del funzionale rappresentato da  $\langle\phi|$  su un ket di  $\mathcal{H}$  è un numero complesso, e data la linearità del funzionale corrisponde semplicemente al **prodotto scalare** tra i due vettori; nella notazione più tradizionale della letteratura matematica verrebbe indicato con la seguente notazione:

$$(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle \quad (9)$$

Quindi il prodotto scalare tra due ket  $|\phi\rangle$  e  $|\psi\rangle$  si calcola prima trasformando il primo ket in un bra tramite coniugazione, e poi e poi applicando il bra così ottenuto al secondo ket.

Data la struttura dello spazio di Hilbert il complesso coniugato del prodotto scalare  $\langle\phi|\psi\rangle$  si ottiene semplicemente scambiando il ket e il bra:

$$(\langle\phi|\psi\rangle)^* = \langle\psi|\phi\rangle \quad (10)$$

Il prodotto scalare di un ket  $|\psi\rangle$  con sé stesso è quindi un numero reale:

$$(\langle\psi|\psi\rangle)^* = \langle\psi|\psi\rangle \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Inoltre viene richiesto al prodotto scalare di essere **definito positivo**, cioè

<sup>2</sup>Già, la bizzarria dei nomi per i due tipi di vettori è dovuta unicamente a questo gioco di parole: bra + ket = bra(c)ket, parentesi...

$$\forall |\psi\rangle \neq 0, |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \langle \psi | \psi \rangle > 0 \quad (12)$$

### Strumento 3: Accoppiamento $\mathbb{C}^2 \leftrightarrow \mathbb{C}_2$

Il prodotto tra un bra e un ket può essere visto nel nostro caso concreto di  $\mathbb{C}^2$  e  $\mathbb{C}_2$  usando la definizione standard di **prodotto hermitiano**, cioè:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \langle \phi | = (x^*, y^*)$$

$$\langle \phi | \psi \rangle \doteq (x^*, y^*) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \doteq x^* a + y^* b$$

Notiamo che qualunque funzionale lineare definito sui vettori di  $\mathbb{C}^2$  può essere scritto come il prodotto scalare con un opportuno bra.

Mostriamo adesso concretamente le proprietà viste nel testo:

$$(\langle \phi | \psi \rangle)^* = (x^* a + y^* b)^* = a^* x + b^* y = (a^*, b^*) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle \psi | \phi \rangle$$

$$(\langle \psi | \psi \rangle)^* = (a^* a + b^* b)^* = a^* a + b^* b = (a^*, b^*) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = a^* a + b^* b = |a|^2 + |b|^2 > 0$$

Grazie alla nostra definizione di *prodotto hermitiano* abbiamo anche la proprietà del prodotto di essere definito positivo: come vedremo è essenziale perché la teoria quantistica sia ben definita.

Quindi, riassumendo, i vettori ket vivono nello spazio  $\mathcal{H}$ , mentre i bra vivono nel suo duale  $\mathcal{H}^*$ , possiamo applicare un bra ad un ket ottenendo un numero complesso che corrisponde al prodotto scalare tra il ket e il complesso coniugato del bra. Lo spazio duale  $\mathcal{H}^*$  ha a sua volta un duale  $\mathcal{H}^{**}$ , che può essere naturalmente messo in corrispondenza (in maniera *canonica*) con lo spazio  $\mathcal{H}$ , per cui per queste note consideriamo coincidenti i due spazi  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}^{**}$ : cioè il complesso coniugato di un bra  $\langle \phi |$  sarà il ket  $|\phi\rangle$ . Dato un vettore  $|\psi\rangle$  nello spazio  $\mathcal{H}$  possiamo definirne la **norma** a partire dal prodotto scalare in maniera analoga a quanto si fa nello spazio euclideo per quanto riguarda il modulo di un vettore:

$$|| |\psi\rangle || = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (13)$$

e possiamo essere sicuri che questa norma sia ben definita perché il prodotto scalare è definito positivo (quindi possiamo calcolare la radice quadrata nella definizione di norma).

Da un punto di vista fisico vedremo che una grande informazione è nascosta all'interno dell'operazione del prodotto scalare (vedi **Regola di Born**).

Ogni<sup>3</sup> spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  ammette un sottinsieme (finito o numerabile) di ket  $\mathfrak{B} = \{|n\rangle | n \in \mathbb{N}\}$  con le seguenti proprietà

<sup>3</sup>In realtà questa proprietà non è del tutto generale, ma vale per gli spazi di Hilbert che ci interessano in questa breve trattazione.

1. Il prodotto scalare tra due diversi ket  $|n\rangle, |m\rangle \in \mathfrak{B}$  è nullo:

$$\langle n|m\rangle = 0 \quad n \neq m \quad (14)$$

2. Ogni ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  può essere scritto come combinazione lineare di vettori di  $\mathfrak{B}$

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad a_n \in \mathbb{C} \quad (15)$$

Un tale sottinsieme  $\mathfrak{B}$  viene detto **set ortogonale completo (SOC)** (o base ortogonale) per  $\mathcal{H}$ . In genere i vettori di un set ortogonale completo vengono normalizzati, in modo da ottenere un set di vettori ortogonali che abbiano per giunta norma pari a 1, ottenendo **set ortonormale completo (SONC)**. I coefficienti  $a_n$  dell'espressione (15) prendono il nome di **coefficienti di Fourier** oppure semplicemente **componenti** del ket  $|\psi\rangle$  rispetto al SONC  $\mathfrak{B}$ .

**Operatori:** Un **operatore** su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è una applicazione lineare su quello spazio, cioè una funzione  $\hat{A}^4$  che manda un ket  $|\psi\rangle$  in un altro ket rispettando le sovrapposizioni tra stati:

$$\hat{A} : |\psi\rangle \mapsto \hat{A}|\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad (16)$$

*Notare che nella convenzione grafica l'applicazione di un operatore su uno stato viene indicata giustapponendo il simbolo dell'operatore e quello del ket (senza l'utilizzo delle parentesi).*

La proprietà di linearità (principio di sovrapposizione) dell'operatore si scrive come segue:

$$|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad \hat{A}(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle) = a\hat{A}|\psi\rangle + b\hat{A}|\phi\rangle \quad (17)$$

L'esempio più semplice di operatore che agisce sui ket di uno spazio di Hilbert è la moltiplicazione per un numero:

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \quad a \in \mathbb{C} \quad (18)$$

Se il numero  $a = 1$  otteniamo l'**operatore identico (o identità)**, che manda un vettore in sé stesso.

Una famiglia di operatori piuttosto importanti è costituita dai **proiettori**: un proiettore è un operatore  $\hat{P}$  (lineare) autoaggiunto che ha la proprietà di coincidere col suo quadrato<sup>5</sup>

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \quad (19)$$

In generale un proiettore “proietta” un vettore in un sottospazio di  $\mathcal{H}$ . Se prendiamo un ket  $|\psi\rangle$  di norma  $\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1$  otteniamo un esempio fondamentale di proiettore, in questo caso un proiettore che proietti sul sottospazio composto da tutti i multipli del ket  $|\psi\rangle$ ; nella notazione di Dirac tale proiettore viene indicato come segue

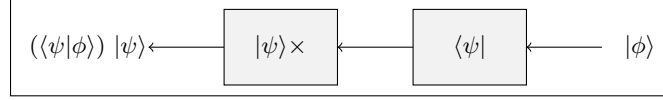
$$\hat{P}_\psi \doteq |\psi\rangle\langle\psi| \quad (20)$$

La notazione va letta da destra verso sinistra, in un certo senso: per applicare il proiettore ad un ket, prima si applica il bra  $\langle\psi|$  a quel ket

<sup>4</sup>Gli operatori in MQ vengono in genere contraddistinti tipograficamente tramite un cappuccio ^ sul simbolo - come in  $\hat{A}$ .

<sup>5</sup>Il quadrato di un operatore  $\hat{A}$  è chiaramente l'operatore che si ottiene applicando  $\hat{A}$  due volte di seguito  $\hat{A} \circ \hat{A} = \hat{A}^2$ .

(un bra in effetti è un funzionale sui ket, quindi accetta ket in ingresso e restituisce numeri complessi); il numero risultante da questa operazione viene moltiplicato per il ket  $|\psi\rangle$ , dando come risultato quindi un nuovo ket, multiplo di  $|\psi\rangle$ .



#### Esercizio 1: Proiettore unidimensionale

Dimostrare che l'operatore definito nel testo  $\hat{P}_\psi \doteq |\psi\rangle\langle\psi|$  è un proiettore, e che la sua immagine è il sottospazio di vettori proporzionali a  $|\psi\rangle$ .

#### Esercizio 2: Proiettore bidimensionale

Dimostrare che, dati due vettori ortonormali (cioè ortogonali e di norma 1)  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  l'operatore definito da  $\hat{P} \doteq |\psi\rangle\langle\psi| + |\phi\rangle\langle\phi|$  è un proiettore - sul sottospazio generato dai due ket  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  - e che una qualunque combinazione lineare dei due ket  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  resta invariata sotto l'applicazione di  $\hat{P}$ .

#### Strumento 4: Operatori su $\mathbb{C}^2$

Ritorniamo al nostro esempio concreto. Un operatore lineare  $\hat{A}$  sullo spazio dei ket  $\mathbb{C}^2$  è definito come la moltiplicazione per una matrice

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \hat{A}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

L'operatore moltiplicazione per un numero  $\hat{A} = a \cdot$  allora corrisponderà alla matrice

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \hat{I}$$

Per un ket  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  possiamo definire un proiettore sul sottospazio generato da  $|\psi\rangle$  (cioè di vettori proporzionali a  $|\psi\rangle$ ) in questo modo

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x^*, y^*) = \begin{pmatrix} xx^* & xy^* \\ yx^* & yy^* \end{pmatrix}$$

#### Esercizio 3: Proiettori su $\mathbb{C}^2$

Dati i ket base  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Determinare l'espressione esplicita (su  $\mathbb{C}^2$ ) dei proiettori  $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  e  $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ .
2. Determinare l'espressione esplicita (su  $\mathbb{C}^2$ ) del proiettore  $\hat{P} = |\psi\rangle\langle\psi| + |\phi\rangle\langle\phi|$ .
3. Dimostrare tramite calcolo esplicito che gli operatori determinati nei due punti precedenti siano effettivamente dei proiettori.

Consideriamo un'espressione come la seguente:

$$\langle \phi | (\hat{A} |\psi\rangle) \quad (21)$$

in cui abbiamo applicato l'operatore  $\hat{A}$  al ket  $|\psi\rangle$  e poi abbiamo applicato a sinistra un bra<sup>6</sup>  $\langle \phi |$  per calcolare il prodotto scalare, e le parentesi indicano l'ordine delle operazioni. La notazione *a la Dirac* mette in evidenza che richiediamo una sorta di associatività in questa operazione, quindi dobbiamo dare un significato anche al membro di destra della seguente

$$\langle \phi | (\hat{A} |\psi\rangle) = (\langle \phi | \hat{A}) |\psi\rangle \quad (22)$$

quindi dobbiamo dare significato all'applicazione dell'operatore  $\hat{A}$  al bra  $\langle \phi |$ . Ciò viene fatto introducendo un nuovo operatore  $\hat{A}^*$  detto l'**operatore aggiunto** di  $\hat{A}$ , tale che

$$\langle \phi | \hat{A} = (\hat{A}^* |\psi\rangle)^* \quad (23)$$

In questo modo siamo liberi di pensare un operatore  $\hat{A}$  nell'espressione  $\langle \phi | \hat{A} |\psi\rangle$  sia applicandolo a destra sul ket  $|\psi\rangle$  sia a sinistra sul bra  $\langle \phi |$ . Quindi la relazione di associatività definisce un nuovo operatore  $\hat{A}^*$  aggiunto di  $\hat{A}$ .

#### Strumento 5: Aggiunto su $\mathbb{C}^2$

La relazione di associatività

$$\langle \phi | (\hat{A} |\psi\rangle) = (\langle \phi | \hat{A}) |\psi\rangle$$

si può scrivere

$$(x_1^*, x_2^*) \cdot \left[ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] = \left[ (x_1^*, x_2^*) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Per applicare l'operatore al bra  $(x_1^*, x_2^*)$  è sufficiente eseguire la moltiplicazione del vettore riga (bra) per la matrice che rappresenta  $\hat{A}$ . Usando questa definizione è facile mostrare che che l'operatore aggiunto è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$$

cioè corrisponde alla matrice trasposta coniugata.

#### Esercizio 4: Operatore aggiunto su $\mathbb{C}_2$

Dimostrare che l'operatore aggiunto di  $\hat{A} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  è

$$\hat{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \quad (24)$$

## 1.2 Applicazione fisica del formalismo

Dato un sistema  $\mathcal{S}$ , si dice che il sistema è stato **preparato** in un certo stato se è stata applicata una procedura ripetibile in grado di ricostituire

<sup>6</sup>Nel gergo della MQ questa operazione viene anche detta “fare il panino” oppure “to sandwich”.

lo stato iniziale per poter replicare l'esperimento. In generale si può dire che il processo di preparazione di uno stato viene implementato tramite un processo di misura di una opportuna **osservabile** fisica. Dal punto di vista formale lo stato del sistema viene rappresentato da un vettore  $|\psi\rangle$  in un opportuno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . In realtà due ket diversi possono rappresentare lo stesso stato del sistema, quando sono uguali a meno di un fattore complesso

$$|\psi\rangle \equiv |\phi\rangle = a|\psi\rangle \quad a \in \mathbb{C} \quad (25)$$

Si dice in questo caso che lo stato del sistema è rappresentato da un *raggio nello spazio di Hilbert*  $\mathcal{H}$ , cioè dall'insieme di tutti i vettori uguali a meno di un fattore complesso. Spesso per descrivere gli stati di un sistema vengono usati dei ket **normalizzati** (cioè di norma pari a 1), che si ottengono dividendo un ket per la sua stessa norma:

$$|\psi\rangle_{norm} \doteq \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} \quad || |\psi\rangle_{norm} || = 1 \quad (26)$$

#### Esercizio 5: Di norma

Dimostrare che il vettore  $|\psi\rangle_{norm}$  definito tramite

$$|\psi\rangle_{norm} \doteq \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} \quad || |\psi\rangle_{norm} || = 1 \quad (27)$$

ha norma pari a 1. Utilizza la definizione della norma data nel testo

$$|| |\psi\rangle || = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (28)$$

Anche in questo modo però abbiamo una ulteriore libertà: partendo da un ket normalizzato  $|\psi\rangle$  (rappresentante uno stato del sistema) otteniamo un ket equivalente (quindi che rappresenta lo stesso stato del sistema) e che abbia la stessa norma di  $|\psi\rangle$  semplicemente moltiplicando il ket per un numero complesso  $c$  di modulo 1

$$|\psi'\rangle \doteq c|\psi\rangle \quad \langle\psi'|\psi'\rangle = (c|\psi\rangle)^* c|\psi\rangle = c^* c \langle\psi|\psi\rangle = |c|^2 \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \quad (29)$$

Quindi una volta che abbiamo fissato lo stato di un sistema individuando un raggio nello spazio  $\mathcal{H}$ , non abbiamo fissato univocamente il vettore rappresentativo del raggio, perché possiamo moltiplicare per un numero complesso di modulo unitario (una **fase**) il nostro ket normalizzato che rappresenta lo stato senza alterare la fisica del sistema. Questa libertà è la base della famosa **invarianza di gauge**.

### 1.3 Il principio di sovrapposizione

Se il sistema può essere preparato in due stati rappresentati dai due ket  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , allora è (in linea di principio, perlomeno) possibile preparare il sistema in uno stato rappresentato dalla sovrapposizione (pesata)

$$|new\rangle \doteq a|\psi\rangle + b|\phi\rangle \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (30)$$

Qual è il significato (fisico) di questa operazione? Un sistema in una sovrapposizione di stati realizza uno stato difficile da raccontare in termini comuni. Un esempio concettuale di una tale sovrapposizione è il famoso esperimento concettuale del *gatto di Schrödinger*; in termini più moderni



possiamo per esempio considerare come sistema un fotone di una data frequenza: questo fotone può per esempio essere preparato in due stati di polarizzazione circolare, destra o sinistra. Consideriamo  $|+\rangle$  il ket relativo ad uno stato di polarizzazione destra e  $|-\rangle$  uno stato di polarizzazione sinistra. Allora una sovrapposizione dei due stati viene rappresentata dalla combinazione lineare

$$|\psi\rangle = a_+|+\rangle + a_-|-\rangle \quad a_+, a_- \in \mathbb{C} \quad (31)$$

In quale stato si trova il fotone?

**Fisica classica:** La fisica classica ci abitua a pensare che il fotone debba trovarsi in uno stato ben definito, in cui la polarizzazione abbia un valore determinato, per cui la misura della polarizzazione debba dare un valore univoco, senza possibili ambiguità. Se il fotone **ha** un certo valore di polarizzazione ciò si deve riflettere nel suo stato, che avrà quindi una polarizzazione definita: non sarà essere possibile preparare uno stato in modo che una misura di polarizzazione dia un valore non definito, la misura della polarizzazione circolare deve risultare o nella polarizzazione destra oppure nella polarizzazione sinistra<sup>7</sup>.

**Fisica quantistica:** Che proprietà fisiche ha la sovrapposizione  $a_+|+\rangle + a_-|-\rangle$ ? Non c'è un valore classicamente definito della polarizzazione: se misuriamo la polarizzazione circolare otterremo uno dei due risultati possibili (destra o sinistra), ognuno con una probabilità calcolabile a partire dai coefficienti  $a_+$  e  $a_-$ . Non otterremo mai un risultato intermedio, ma non potremo prevedere quale dei due risultati otterremo. Nonostante questo aspetto probabilistico, la MQ resta comunque una teoria deterministica: lo stato del sistema si evolve tenendo conto delle sovrapposizioni, ogni componente si evolve nella maniera giusta, e la sovrapposizione viene mantenuta; sono possibili effetti di interferenza, analoghi degli effetti in ottica, che vengono puntualmente verificati sperimentalmente in laboratorio.

## 1.4 Osservabili

Una quantità fisica misurabile viene detta **osservabile fisica**, e viene implementata come un operatore sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  degli stati di  $\mathcal{S}$ . La misura di un'osservabile deve fornire risultati determinati, benché in maniera probabilistica. Supponiamo che un'osservabile rappresentata da un operatore  $\hat{M}$  abbia  $N$  valori possibili, indicati da  $\mu_i$  con  $i = 1, \dots, N$ . Perché il risultato della misura sia certamente compreso nell'insieme dei valori  $\{\mu_i\}$  è necessario che esistano dei ket normalizzati  $|\mu_i\rangle$  con  $i = 1, \dots, N$  sui quali  $\hat{M}$  assuma precisamente quei valori, cioè:

$$\hat{M}|\mu_i\rangle = \mu_i|\mu_i\rangle \quad \langle\mu_i|\mu_i\rangle = 1 \quad (32)$$

In algebra lineare il problema di determinare a partire dall'operatore  $\hat{M}$  sia i vettori  $|\mu_i\rangle$  che i valori  $\mu_i$  si chiama **problema degli autovettori e degli autovalori**, gli autovettori essendo i ket  $|\mu_i\rangle$  e gli autovalori i numeri  $\mu_i$ . La risoluzione del problema agli autovalori è parte essenziale dell'analisi di un sistema meccanico in MQ. In generale tale problema è insolubile in forma analitica chiusa, ma esistono numerosi metodi approssimati, primo fra tutti il metodo perturbativo, che forma un argomento a parte di qualunque buon corso di meccanica quantistica.

<sup>7</sup>Ricordiamo che stiamo parlando di uno stato di un singolo fotone, le quantità fisiche devono venire interamente attribuite a quel fotone.

## Strumento 6: Operatori autoaggiunti

Una osservabile fisica in genere ha una importante proprietà: l'operatore che la rappresenta è un operatore **autoaggiunto**. La definizione di operatore autoaggiunto ha delle sottigliezze, ma a noi interessano solo alcune proprietà; per un operatore  $\hat{M}$  autoaggiunto

1. L'aggiunto coincide con l'operatore  $\hat{M} = \hat{M}^*$
2. Gli autovalori sono reali  $\mu_i \in \mathbb{R}$
3. Gli autovettori formano un set ortonormale completo  $\langle \mu_i | \mu_j \rangle = \delta_{ij}$

## 1.4.1 Completezza

La proprietà di completezza degli autovettori viene in genere riscritta in un modo alternativo, utile per effettuare calcoli (come si vedrà nel seguito). Si definisce l'operatore

$$\hat{I} = \sum_i |\mu_i\rangle\langle\mu_i| \quad (33)$$

e si dimostra che

1.  $\hat{I}$  è un proiettore (autoaggiunto e rispetta  $\hat{I}^2 = \hat{I}$ )
2. L'operatore  $\hat{I}$  è l'operatore identico su  $\mathcal{H}$

## Esercizio 6: Relazione di completezza

Dimostrare le proprietà di  $\hat{I} = \sum_i |\mu_i\rangle\langle\mu_i|$  illustrate nel testo.

**Risoluzione dell'identità:** L'espressione  $\hat{I} = \sum_i |\mu_i\rangle\langle\mu_i|$  viene detta **risoluzione dell'identità**, perché permette di riscrivere l'operatore identico in una forma alternativa, utile per alcuni tipi di calcolo in MQ (e ovviamente in Matematica).

## 1.4.2 Valore atteso

Supponiamo di aver preparato un sistema in uno stato rappresentato dal ket normalizzato  $|\psi\rangle$ , e supponiamo di voler effettuare una misura (ripetuta) di una certa osservabile rappresentata dall'operatore  $\hat{M}$ . I risultati possibili per ogni replica della misura sono gli autovalori di  $\hat{M}$ ,  $\mu_{i=1,\dots,N}$ , e con un numero sufficientemente alto di repliche potremo determinare un valore medio per la misura come un valore di aspettazione (valore atteso) nel senso statistico del termine:

$$\langle \hat{M} \rangle_\psi \doteq \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (34)$$

Se l'operatore  $\hat{M}$  è autoaggiunto possiamo riscrivere il valore atteso usando la risoluzione dell'identità relativa agli autovettori di  $\hat{M}$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{M} \rangle_\psi &\doteq \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{M} \sum_i |\mu_i\rangle\langle\mu_i| | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \sum_i \hat{M} |\mu_i\rangle\langle\mu_i| \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | \mu_i \rangle \langle \mu_i | \psi \rangle \\ &= \sum_i \mu_i \langle \psi | \mu_i \rangle \langle \mu_i | \psi \rangle = \sum_i \mu_i |\langle \mu_i | \psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

**Regola di Born:** Nell'espressione del valore atteso compaiono le quantità  $\langle \mu_i | \psi \rangle$ , note con il nome di **ampiezze**. La **Regola di Born** è una prescrizione che fornisce il modo di collegare la struttura matematico/formale della MQ e il significato fisico di ciascuna espressione. Se un sistema si trova in uno stato descritto dal ket normalizzato  $|\psi\rangle$  l'ampiezza  $\langle \mu_i | \psi \rangle$  contiene informazioni riguardo alla probabilità che il risultato di una misura dell'osservabile  $\hat{M}$  abbia come risultato il valore  $\mu_i$ , precisamente la probabilità  $Prob(\mu_i)$  di avere come risultato della misura il valore  $\mu_i$  è

$$Prob(\mu_i) = |\langle \mu_i | \psi \rangle|^2 \quad (35)$$

Perciò il valore atteso dell'osservabile  $\hat{M}$  definito in precedenza si può riscrivere come

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_i \mu_i Prob(\mu_i) \quad (36)$$

Se i vettori  $|\psi\rangle$  e/o  $|\mu_i\rangle$  non sono normalizzati la prescrizione della Regola di Born è

$$Prob(\mu_i) = \frac{|\langle \mu_i | \psi \rangle|^2}{\langle \mu_i | \mu_i \rangle \langle \psi | \psi \rangle} \quad (37)$$

#### Esercizio 7: Probabilità totale

Dimostrare il teorema della probabilità totale  $\sum_i Prob(\mu_i) = 1$  usando la regola di Born per il vettore  $|\psi\rangle$  e gli autovettori  $\{|\mu_i\rangle\}$  dell'osservabile  $\hat{M}$ .

#### Esercizio 8: Fotone

Nell'esempio del fotone visto sopra lo stato della particella è dato dal vettore

$$|\psi\rangle = a_+|+\rangle + a_-|-\rangle \quad \langle +|+\rangle = 1 = \langle -|-\rangle, \quad \langle +|-\rangle = 0 \quad (38)$$

Dimostrare, a partire dalla Regola di Born, che la probabilità che la misura della polarizzazione del fotone dia come risultato una polarizzazione destra è dato da

$$Prob(pol.dx) = \frac{|\langle + | \psi \rangle|^2}{\langle + | + \rangle \langle \psi | \psi \rangle} = \frac{|a_+|^2}{|a_+|^2 + |a_-|^2} \quad (39)$$

Quindi vediamo che una sovrapposizione lineare tra più ket di stato di un sistema rappresenta uno stato in cui certe osservabili non hanno un valore univocamente determinato, ma il risultato di una misura di queste osservabili è uno dei valori possibili (autovalori) ognuna con probabilità che è possibile calcolare tramite le regole della MQ. La struttura matematica usata in MQ ne costituisce anche la struttura logica come teoria fisica.

#### Strumento 7: Elementi di Matrice

Nel nostro esempio concreto abbiamo detto che l'azione di un operatore su un vettore di  $\mathbb{C}^2$  è data dalla moltiplicazione matriciale della matrice che rappresenta l'operatore per il ket di  $\mathbb{C}^2$ . Quella che sembra una regola *ad hoc* è in realtà un risultato generale per gli operatori sugli spazi di Hilbert: se da un lato rappresentiamo

un vettore tramite le sue componenti - i coefficienti  $a_i$  in (15) - dall'altro possiamo fare lo stesso lavoro per gli operatori, ottenendo i cosiddetti **elementi di matrice**. Partiamo da uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  con un SONC  $\{|n\rangle\}$ , un vettore  $|\psi\rangle$  può essere scritto in termini dei vettori  $|n\rangle$  usando la risoluzione dell'identità

$$|\psi\rangle = \left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)|\psi\rangle = \sum_n (\langle n|\psi\rangle)|n\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$$

ottenendo di nuovo la relazione (15). Lasciamo agire l'operatore  $\hat{M}$  sul ket  $|\psi\rangle$  ottenendo un nuovo vettore  $|\phi\rangle$

$$|\phi\rangle = \hat{M}|\psi\rangle = \sum_n \hat{M}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_n \hat{M}|n\rangle a_n$$

Possiamo scrivere anche  $|\phi\rangle$  in termini del SONC usando una tecnica standard: applichiamo ai membri dell'equazione il bra  $\langle m|$  (per ogni ket del SONC c'è ovviamente un bra duale)

$$\langle m|\phi\rangle = \langle m|\hat{M}|\psi\rangle = \sum_n \langle m|\hat{M}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_n \langle m|\hat{M}|n\rangle a_n$$

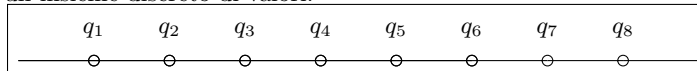
Le quantità  $\langle m|\hat{M}|n\rangle$  sono dette **elementi di matrice** dell'operatore  $\hat{M}$  relativi al SONC  $\{|n\rangle\}$ . L'espressione precedente è un prodotto matriciale, esattamente come visto nel nostro esempio concreto di  $\mathbb{C}^2$ . Nel caso generale il SONC è un insieme numerabile (quindi infinito) di vettori, per cui la matrice  $\langle m|\hat{M}|n\rangle$  ha un numero infinito di elementi.

## 2 Quantizzazione canonica

Dato un sistema meccanico la cui dinamica (classica) viene descritta tramite il formalismo hamiltoniano, esiste una procedura standard per definire una teoria quantistica che abbia come limite classico la teoria hamiltoniana. Questa procedura viene detta **Quantizzazione Canonica**. Iniziamo da un esempio unidimensionale, di un sistema di una particella vincolata a muoversi lungo una direzione. Dal punto di vista classico uno stato del sistema è descritto dai valori delle due variabili  $q$  e  $p$ , rispettivamente la coordinata (posizione) e la sua quantità di moto (anche nota come impulso coniugato). La coppia di variabili  $(q, p)$  viene detta coppia di variabili coniugate per il sistema hamiltoniano  $\mathcal{S}$ .

### 2.1 Dallo spettro discreto allo spettro continuo

Una difficoltà che incontriamo immediatamente è questa: fino a questo punto abbiamo usato operatori con **spettro discreto**, vale a dire che l'insieme degli autovettori è finito o al più numerabile, e di conseguenza anche i possibili autovalori costituiscono un insieme discreto. La posizione di una particella, invece, è in genere caratterizzata da un insieme continuo di valori. Ciò richiede una estensione del nostro formalismo. Per affrontare il problema in maniera semplice immaginiamo all'inizio di discretizzare il nostro spazio: cioè ci riduciamo al problema di una particella che possa occupare solo un insieme discreto (finito o numerabile) di posizioni. Analogamente anche gli autovalori della quantità di moto  $p$  saranno ristretti ad un insieme discreto di valori.



In questo modo lo spazio di Hilbert ammetterà un SONC  $\{|q_i\rangle\}$

$$\hat{q}|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle \quad \langle q_i|q_j\rangle = \delta_{ij} \quad (40)$$

Inoltre la relazione di completezza può essere scritta come

$$\hat{I} = \sum_i |q_i\rangle\langle q_i| \quad (41)$$

Analogamente per quanto riguarda gli autostati dell'impulso

$$\hat{p}|p_i\rangle = p_i|p_i\rangle \quad \langle p_i|p_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$\hat{I} = \sum_i |p_i\rangle\langle p_i|$$

Per ottenere una teoria realistica, però dobbiamo fare un passaggio al limite, che renda continuo il nostro spazio discretizzato. Ci sono molti tecnicismi dietro questo passaggio al limite, che però in questa sede ignoreremo per mantenere la semplicità espositiva.

In tale limite sostituiamo le somme con degli integrali

$$\sum_i |q_i\rangle\langle q_i| \longrightarrow \int_{q_A}^{q_B} dq |q\rangle\langle q| \quad (42)$$

in cui gli estremi di integrazione delimitano l'intervallo in cui è possibile trovare la particella. Il passaggio al continuo richiede una ulteriore modifica, dobbiamo cambiare le equazioni che stabiliscono l'ortogonalità degli autovettori  $|q\rangle$ , introducendo una “funzione” inventata dallo stesso Dirac proprio per questo scopo.

Per capire la necessità di questa complicazione immaginiamo di avere una particella, vincolata su una linea retta (poniamo l'asse delle ascisse di un certo riferimento cartesiano) di cui conosciamo esattamente la posizione ad un certo istante di tempo. Sia il suo stato descritto dal ket  $|q\rangle$ , laddove  $q$  è il valore della ascissa come risultato di una misura. Supponiamo di poter imporre che il ket  $|q\rangle$  sia normalizzato come fatto precedentemente

$$\langle q|q'\rangle = 0 \quad \text{per } q \neq q' \quad \langle q|q\rangle = 1 \quad (43)$$

Usando la risoluzione dell'identità in termini degli autoket di  $\hat{q}$

$$|q\rangle = \left( \int_{-\infty}^{\infty} dq' |q'\rangle\langle q'| \right) |q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq' (\langle q'|q\rangle) |q'\rangle \quad (44)$$

Adesso, se imponiamo la “vecchia” condizione di ortogonalità, (43), abbiamo un integrale di una funzione che si annulla dappertutto, eccetto che per un punto. Usando la definizione di integrale tramite *somme di Riemann*<sup>8</sup>:

$$|q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq' (\langle q'|q\rangle) |q'\rangle = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \sum_i \Delta q (\langle q_i|q\rangle) |q_i\rangle \quad (45)$$

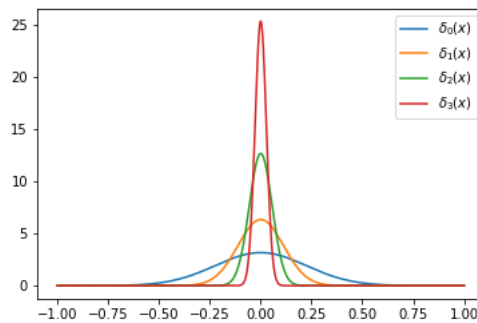
Tutti i termini della somma si annulleranno (e li escludiamo dalla somma) tranne un unico termine che sopravvive

$$\left( \Delta q (\langle q_i|q\rangle) |q_i\rangle \right) \Big|_{q_i=q} = \Delta q |q\rangle \rightarrow 0 \quad (46)$$

<sup>8</sup>I dettagli formali vengono lasciati al lettore volenteroso

Nel limite tale termine tende a zero. Questa contraddizione dimostra che non è possibile, per autovettori dello spettro continuo di qualche osservabile, assumere le condizioni adatte allo spettro discreto (43).

Dirac, resosi conto di questa difficoltà, postulò l'esistenza di una “funzione”, da lui chiamata  $\delta$  (ora nota come  $\delta$  di Dirac) con delle proprietà particolari, che approfondiamo nel riquadro. Per averne una rapida intuizione possiamo immaginare questa funzione come il limite di una successione  $\{\delta_n(x)\}$  di funzioni (pari) il cui valore si annulli ovunque eccetto che su un intervallo che forma un intorno del punto  $x = 0$ , e che per le funzioni della successione quest'intervallo diventi sempre più piccolo. L'area, però, sotto la curva del grafico di ciascuno  $\delta_n$  è pari ad 1 per ogni elemento della successione. E' abbastanza evidente che quindi il valore della funzione in quell'intervallo debba raggiungere un massimo sempre maggiore al restringersi dell'intervallo.



#### Strumento 8: La $\delta$ di Dirac

La cosiddetta “funzione” **delta di Dirac** in realtà, dopo Dirac, è stata riconosciuta come un oggetto matematico di natura diversa rispetto a quella di una semplice funzione, un oggetto che prende il nome di **distribuzione**, in pratica un funzionale lineare che opera su opportuni spazi di funzioni. Nonostante ciò nella tradizione della MQ la  $\delta$  di Dirac è stata utilizzata (come se fosse una ordinaria funzione) a partire dalle sue proprietà postulate dallo stesso Dirac. In pratica si riconosce che l'utilizzo della  $\delta$  ha senso quando si trova nel contesto di un integrale (o quando comunque l'espressione che la contiene viene intesa come funzione integranda).

Immaginiamo dunque che esista questa funzione  $\delta(x)$  di una variabile che rispetti le seguenti proprietà (vengono incluse solo le proprietà fondamentali):

1. Simmetria  $\delta(x) = \delta(-x)$
2.  $x\delta(x) = 0$
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$
4.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0)$  con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (continua in  $x = 0$ )
5. (deducibile dalla precedente)  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - a) f(x) = f(a)$
6.  $\int_b^c dx \delta(x - a) f(x) = 0$  se  $a$  non è compreso nell'intervallo di integrazione  $a \notin [b, c]$

In particolare le ultime due proprietà mettono in evidenza il carattere della  $\delta$  come una funzione localizzata in un punto, e forniscono la semplice tecnica per poter traslare tale punto in una posizione arbitraria. C'è una ulteriore proprietà, che verrà usata nel seguito: sia  $f(x)$  una funzione derivabile, allora la **derivata nel**

**sensu delle distribuzioni** della  $\delta$  di Dirac si definisce tramite un integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x-a) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) \delta(x-a) = -f'(a)$$

Possiamo immaginare di ricavare questa definizione tramite integrazione per parti, ricordandoci che la  $\delta$  di Dirac è supportata solo su un punto (vedi sopra).

In termini della funzione  $\delta$  le condizioni di normalizzazione degli autostati di  $\hat{q}$  diventano:

$$\langle q|q' \rangle = \delta(q-q') \quad (47)$$

La normalizzazione di un autostato dello spettro continuo coinvolge quantità non finite come la  $\delta$  di Dirac. La regola di Born nel caso continuo implica l'utilizzo non più di probabilità ma di densità di probabilità. Ad esempio non ha più senso parlare di probabilità che una particella si trovi in una certa posizione, possiamo solo parlare di densità di probabilità (oppure equivalentemente di probabilità che la particella si trovi in un dato intorno di una certa posizione, per unità di area/volume).

**Relazioni di commutazione canoniche** Quando si passa da una teoria hamiltoniana classica ad una teoria quantistica le variabili coniugate  $(q, p)$  diventano degli operatori su un opportuno spazio di Hilbert

$$q, p \longrightarrow \hat{q}, \hat{p} \quad (48)$$

Per ogni coppia di operatori canonicamente coniugati la procedura di quantizzazione prescrive di imporre le **relazioni di commutazione canoniche**

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (49)$$

laddove  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  è la *costante di Planck ridotta*, e abbiamo usato l'abbreviazione del **commutatore**

$$[\hat{A}, \hat{B}] \doteq \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (50)$$

Quando il sistema ha molti gradi di libertà, gli operatori posizione e impulso relativi a differenti gradi di libertà commutano tra di loro

$$[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = 0 \quad a \neq b$$

**Funzione d'onda** Dato uno sistema di una particella, che si trovi in uno stato descritto dal ket  $|\psi\rangle$ , assume un significato particolare l'ampiezza  $\langle q|\psi\rangle$ , che viene detta **funzione d'onda** dello stato  $|\psi\rangle$ ; questa è una vera funzione, che ad ogni valore  $q$  (autovalore dell'operatore posizione) associa un numero complesso  $\psi(q)$ :

$$\psi(q) = \langle q|\psi\rangle \quad \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, q \mapsto \psi(q) \quad (51)$$

La funzione d'onda di una particella, dalla regola di Born, ha una diretta interpretazione probabilistica: la probabilità di trovare la particella in un intervallo  $[a, b]$  dell'asse delle ascisse è

$$Prob(a \leq q \leq b) = \int_a^b dq \langle \psi | q \rangle \langle q | \psi \rangle = \int_a^b dq |\psi(q)|^2 \quad (52)$$

Quindi  $|\psi(q)|^2$  rappresenta la densità di probabilità (PDF) per la variabile posizione della particella. Avendo a disposizione la funzione d'onda  $\psi(q)$  abbiamo a disposizione (per una particella puntiforme) tutta l'informazione che è contenuta nel vettore di stato  $|\psi\rangle$ . Tutte le quantità osservabili possono essere calcolate tramite la funzione d'onda, e possiamo determinare l'azione degli operatori sulla funzione d'onda relativa ad uno stato. La tecnica è detta il calcolo degli **elementi di matrice**.

**Elementi di Matrice (caso continuo)** Consideriamo l'operatore  $\hat{M}$  sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Applichiamo l'operatore ad un ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , ottenendo  $|\phi\rangle = \hat{M}|\psi\rangle$  e poi usiamo la risoluzione dell'identità usando gli autostati della posizione  $|q\rangle$ :

$$|\phi\rangle = \hat{M}|\psi\rangle = \hat{M} \left( \int_a^b dq' |q'\rangle \langle q' | \right) |\psi\rangle = \int_a^b dq' \hat{M} |q'\rangle \langle q' | \psi \rangle \quad (53)$$

Possiamo determinare la funzione d'onda dello stato  $|\phi\rangle$

$$\phi(q) = \langle q | \phi \rangle = \int_a^b dq' \langle q | \hat{M} | q' \rangle \psi(q') \quad (54)$$

Vediamo che la funzione d'onda risultante si ottiene tramite una generalizzazione del prodotto matriciale (che usa l'integrale invece della somma), l'operatore  $\hat{M}$  ha una sua rappresentazione nell'espressione  $\langle q | \hat{M} | q' \rangle$  che è una funzione di due variabili  $q$  e  $q'$ ; i valori di questa funzione sono **elementi di matrice** dell'operatore  $\hat{M}$  relativi alla base  $\{|q\rangle\}$ , nel caso dello spettro continuo.

In Matematica l'espressione (54) è analoga all'azione di una *funzione di Green* sullo spazio di funzioni d'onda.

## 2.2 Quantizzazione canonica di un sistema hamiltoniano con un grado di libertà

Riassumendo: un sistema hamiltoniano  $cS$  con un grado di libertà viene quantizzato tramite uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  i cui ket descrivono gli stati del sistema, le variabili dinamiche  $q$  e  $p$  diventano gli operatori  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  autoaggiunti su  $\mathcal{H}$ . Abbiamo le seguenti condizioni:

1. Commutatore canonico

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

2. Ortogonalità

$$\langle q' | q \rangle = \delta(q - q')$$

3. Completezza (Risoluzione dell'identità)

$$\hat{I} = \int dq |q\rangle \langle q|$$

4. Funzione d'onda

$$\psi(q) = \langle q | \psi \rangle \quad \text{se lo stato è descritto dal ket } |\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = \int dq |q\rangle \langle q | \psi \rangle$$



Un operatore  $\hat{A}$  su  $\mathcal{H}$  viene rappresentato relativamente alla base  $\{|q\rangle\}$  dagli elementi di matrice

$$\begin{aligned} A(q, q') &= \langle q | \hat{A} | q' \rangle \\ \langle q | \phi &= \int dq' \langle q | \hat{A} | q' \rangle \langle q' | \psi \\ \phi(q) &= \int dq' A(q, q') \psi(q') \end{aligned}$$

**Funzioni della posizione** Quando in meccanica hamiltoniana abbiamo una funzione  $f(q)$  della posizione, dopo la quantizzazione questa funzione diventa un operatore sullo spazio  $\mathcal{H}$

$$f(q) \rightsquigarrow f(\hat{q}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Per esempio la funzione  $f(q) = \frac{1}{2}q^2$  diventa<sup>9</sup> l'operatore  $f(\hat{q}) = \frac{1}{2}\hat{q}^2$ . Il valore di un operatore della posizione può essere calcolato facilmente sugli autostati della posizione:

$$f(\hat{q})|q\rangle = f(q)|q\rangle$$

pertanto possiamo determinare anche il risultato dell'applicazione dell'operatore  $f(\hat{q})$  su uno stato generico usando la risoluzione dell'identità

$$|\phi\rangle = f(\hat{q})|\psi\rangle = \int dq' f(q')|q'\rangle\langle q'|\psi\rangle \quad (55)$$

ovvero, in termini di funzioni d'onda tramite gli elementi di matrice:

$$\phi(q) = \langle q | f(\hat{q}) | \psi \rangle = \int dq' \langle q | f(\hat{q}) | q' \rangle \psi(q') \quad (56)$$

Determiniamo gli elementi di matrice di  $f(\hat{q})$

$$\langle q | f(\hat{q}) | q' \rangle = \langle q | f(q') | q' \rangle = f(q') \langle q | q' \rangle = f(q') \delta(q - q') \quad (57)$$

Quindi all'interno dell'integrale (56) abbiamo:

$$\phi(q) = \langle q | f(\hat{q}) | \psi \rangle = \int dq' f(q') \delta(q - q') \psi(q') = f(q) \psi(q)$$

Vediamo quindi la semplice regola: una funzione della posizione agisce sulle funzioni d'onda tramite *moltiplicazione puntuale* (cioè punto per punto).

**Funzioni dell'impulso** A questo punto dobbiamo determinare in che modo rappresentiamo, sulle funzioni d'onda, l'operatore quantità di moto  $\hat{p}$ : è quella che è nota come **rappresentazione nello spazio delle coordinate**. Ritorniamo alle regole di commutazione canonica (1): a partire da questa relazione, e dalla richiesta di auto-aggiunzione degli operatori posizione e impulso, potremmo determinare tale rappresentazione, ed in effetti esiste un teorema a riguardo. Vogliamo però fare il ragionamento più semplice (e induttivo!) possibile, per tenere fede all'impegno preso all'inizio.

Partiamo dalle relazioni di commutazione canoniche (1), e applichiamo "in sandwich" il bra  $\langle q |$  a sinistra e il ket  $|q'\rangle$  a destra:

$$\langle q | [\hat{q}, \hat{p}] | q' \rangle = \langle q | i\hbar | q' \rangle = i\hbar \delta(q - q')$$

<sup>9</sup>Stiamo parlando chiaramente del potenziale armonico, a meno di una costante moltiplicativa.

Il membro di sinistra può venire semplificato:

$$\langle q|\hat{q}\hat{p}|q'\rangle - \langle q|\hat{p}\hat{q}|q'\rangle = q\langle q|\hat{p}|q'\rangle - q'\langle q|\hat{p}|q'\rangle = (q - q')\langle q|\hat{p}|q'\rangle$$

Otteniamo una relazione che riguarda gli elementi di matrice di  $\hat{p}$  relativamente alla base  $\{|q\rangle\}$ :

$$(q - q')\langle q|\hat{p}|q'\rangle = i\hbar\delta(q - q') \quad (58)$$

Di fronte a questa equazione non possiamo isolare gli elementi di matrice  $\langle q|\hat{p}|q'\rangle$ , perché è una equazione che riguarda la distribuzione  $\delta$  di Dirac, che è supportata solo per  $q = q'$ ; equazioni in cui compaiono distribuzioni non possono essere affrontate in maniera algebrica usuale: per lavorare su una equazione come (58) (come abbiamo già accennato in precedenza) dobbiamo immaginare che l'equazione compaia all'interno di un integrale, e poi cercare di trarre delle conseguenze che ci permettano di determinare gli elementi di matrice cercati - infatti anche questi saranno espressi tramite una distribuzione. Pertanto scriviamo la seguente equazione integrale (laddove  $f(q)$  è una funzione continua qualunque - una funzione test):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq (q - q')\langle q|\hat{p}|q'\rangle f(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dq i\hbar\delta(q - q')f(q)$$

Ragionando in maniera induttiva, proviamo a scrivere il membro di destra tramite una integrazione per parti: nonostante questa sembri una strategia particolarmente fantasiosa, c'è una intera branca della matematica moderna (originata in ultima analisi dall'invenzione della  $\delta$  di Dirac) che giustifica questo tipo di approccio:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dq i\hbar\delta(q - q')f(q) &= ((q - q')\delta(q - q')f(q)) \Big|_{q=-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dq i\hbar(q - q') [\delta'(q - q')f(q) + \delta(q - q')f'(q)] \end{aligned}$$

Tenendo perciò conto del fatto che la "funzione"  $\delta$  si annulla nel limite in cui la variabile tende a  $\pm\infty$ :

$$((q - q')\delta(q - q')f(q)) \Big|_{q=-\infty}^{\infty} = 0$$

e usando le proprietà della  $\delta$  (in particolare il fatto che  $x \cdot \delta(x) = 0$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq i\hbar(q - q')\delta(q - q')f'(q) = 0$$

In ultima analisi il calcolo porge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq (q - q')\langle q|\hat{p}|q'\rangle f(q) = - \int_{-\infty}^{\infty} dq i\hbar(q - q')\delta'(q - q')f(q)$$

Perciò, poiché la funzione test è arbitraria, allora possiamo scrivere, nel senso delle distribuzioni, che

$$(q - q')\langle q|\hat{p}|q'\rangle = -i\hbar(q - q')\delta'(q - q') \quad (59)$$

Questa equazione ammette tra le sue soluzioni

$$\langle q|\hat{p}|q'\rangle = -i\hbar\delta'(q - q') \quad (60)$$

## Esercizio 9: Tante soluzioni

Dimostrare (in maniera il più possibile *naïf*) che se si cercano soluzioni tra le distribuzioni, allora oltre alla soluzione (60) data qui sopra una qualunque espressione del tipo

$$\langle q|\hat{p}|q'\rangle = -i\hbar\delta'(q-q') + \delta(q-q')g(q)$$

laddove  $g(q)$  può essere una generica funzione (continua) della variabile  $q$ , risolve il problema (59).

Si può osservare anche che non è necessario che la funzione  $g(q)$  dipenda anche da  $q'$ : perché?

Quindi abbiamo determinato gli elementi di matrice di  $\hat{p}$  in rappresentazione delle coordinate. Essendo questi elementi espressi in termini di funzione  $\delta$  a questo punto possiamo usarli per esprimere l'effetto dell'applicazione dell'operatore  $\hat{p}$  alle funzioni d'onda, usando le definizioni date:

$$\phi(q) = \langle q|\hat{p}|\phi\rangle = \int dq' \langle q|\hat{p}|q'\rangle \psi(q') \quad (61)$$

$$= \int dq' (-i\hbar)\delta'(q-q')\psi(q') \text{ per parti} \quad (62)$$

$$= -i\hbar \int dq' \delta(q-q')\psi'(q') = -i\hbar\psi'(q) \quad (63)$$

Cioè l'operatore quantità di moto  $\hat{p}$  agisce sulle funzioni d'onda come l'operatore  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ , proporzionale alla derivata parziale rispetto a  $q$ !

Possiamo verificare che questo operatore non commuta con l'operatore  $\hat{q}$ , che sulle funzioni d'onda consiste nella moltiplicazione per la variabile  $q$ , infatti applicando prima l'operatore  $\hat{q}$  e poi  $\hat{p}$ :

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}(q\psi(q)) = \frac{\partial q}{\partial q}\psi(q) + q\frac{\partial\psi(q)}{\partial q}$$

Quindi il commutatore tra i due operatori vale

$$-i\hbar q\frac{\partial}{\partial q}\psi(q) + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}(q\psi(q)) = i\hbar\frac{\partial q}{\partial q}\psi(q) = i\hbar\psi(q)$$

in questo modo otteniamo un operatore il cui commutatore con l'operatore posizione  $\hat{q}$  è esattamente il commutatore canonico:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \left[ q, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q} \right] = i\hbar$$

Esercizio 10:  $\hat{p}$  è autoaggiunto

Dimostrare, usando le definizioni e in analogia con l'esempio "concreto" dato dall'Esercizio 4 e dallo Strumento 5, che l'operatore impulso agente sulle funzioni d'onda  $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$  definito sopra è autoaggiunto.

**Autostati dell'impulso** Adesso determineremo quale sia la funzione d'onda di un autoket  $|p\rangle$  relativo ad uno stato di impulso definito, cioè un ket che rispetta

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

Quando agisce sulle funzioni d'onda l'operatore  $\hat{p}$  agisce come la derivata  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ , quindi possiamo riscrivere la condizione precedente nella forma seguente:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q|p \rangle = p \langle q|p \rangle \quad (64)$$

In questa forma si chiama **equazione per le autofunzioni** dell'impulso.

Esercizio 11: Impulso in rappresentazione delle  $q$

Dimostrare che l'equazione per gli autostati di  $\hat{p}$  può essere riscritta nell'equazione (64) per le autofunzioni di  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$

L'equazione differenziale (64) ammette come soluzione generale:

$$\psi_p(q) = \langle q|p \rangle = Ae^{i\frac{pq}{\hbar}}$$

laddove  $A$  è una costante arbitraria (di normalizzazione).

Esercizio 12: Autofunzioni di  $\hat{p}$

Dimostrare che  $\langle q|p \rangle = A \exp i\frac{pq}{\hbar}$  soddisfa l'equazione per le autofunzioni (64).

Strumento 9: Una importante identità

Prendiamo la condizione di ortonormalità degli autostati della posizione e usiamo la relazione di completezza degli autostati dell'impulso (risoluzione dell'identità):

$$\begin{aligned} \delta(q - q') &= \langle q|q' \rangle = \langle q| \left( \int dp |p\rangle \langle p| \right) |q' \rangle = \\ &= \int dp \langle q|p \rangle \langle p|q' \rangle = \int dp A e^{i\frac{pq}{\hbar}} \cdot A^* e^{-i\frac{pq'}{\hbar}} \\ &= |A|^2 \int dp e^{i\frac{p}{\hbar}(q - q')} \end{aligned}$$

La costante di normalizzazione  $A$  delle autofunzioni dell'impulso va presa in modo tale che il prodotto scalare tra due stati dell'impulso sia

$$\langle p|p' \rangle = \delta(p - p')$$

Si può dimostrare che le autofunzioni normalizzate sono:

$$\langle q|p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{pq}{\hbar}}$$

Con questa scelta per la costante di normalizzazione otteniamo una rappresentazione della funzione  $\delta$  di Dirac sotto forma di integrale:

$$\delta(q - q') = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{i\frac{p}{\hbar}(q - q')}$$

Quindi nel seguito useremo le autofunzioni dell'impulso nella seguente forma:

$$\langle q|p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{pq}{\hbar}} \quad (65)$$

oltre alla identità integrale per la  $\delta$  di Dirac:

$$\delta(q - q') = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{i\frac{p}{\hbar}(q - q')} \quad (66)$$

Questa relazione viene usata molto spesso per calcolare trasformate di Fourier, e costituisce un trucco standard in Fisica Quantistica.

#### Strumento 10: Hamiltoniana e lagrangiana in Meccanica Classica

Riassumiamo in maniera **estremamente sintetica** la relazione tra formulazione lagrangiana e formulazione hamiltoniana della meccanica classica. Partendo da un sistema con un grado di libertà, la formulazione lagrangiana ne descrive il moto tramite una funzione  $q(t)$ , detta coordinata lagrangiana, insieme con la velocità lagrangiana cioè la sua derivata temporale  $\dot{q}(t)$ . Inoltre si postula l'esistenza di una funzione **lagrangiana**  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  che dipenda da coordinate e velocità lagrangiane<sup>a</sup> definita come la differenza tra energia cinetica  $T(q, \dot{q})$  e energia potenziale  $V(q, \dot{q})$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q})$$

grazie alla quale si ricavano le **equazioni di Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Queste equazioni vengono da un principio variazionale, il **principio di minima azione**, che dice che l'**integrale d'azione**

$$S = \int_{t_A}^{t_B} dt \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

è minimo quando  $q(t)$  è la traiettoria del moto del sistema. Da un punto di vista filosofico, in passato, tale principio aveva uno strano sapore finalistico: la dinamica di un sistema in un certo senso si prefiggeva lo scopo che le soluzioni delle equazioni del moto realizzassero il minimo dell'azione. Vedremo che la MQ ci offre una diversa interpretazione.

Un principio analogo può essere enunciato partendo dalla descrizione del moto in termini della coordinata posizione  $q(t)$  e della quantità di moto  $p(t)$ . La dinamica è incapsulata nella funzione hamiltoniana  $H(q, p)$ . Questa funzione, che rappresenta l'energia meccanica, e la quantità di moto canonicamente coniugata, possono venire determinate a partire dalla formulazione lagrangiana. Infatti data la formulazione lagrangiana fornita da

$$q(t), \dot{q}(t), \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

possiamo ottenere le variabili della formulazione hamiltoniana come segue:

$$q(t), p(t) \doteq \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

e in particolare la funzione hamiltoniana è definita tramite la **trasformata di Legendre**

$$H(q, p) = [p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q})]_{p=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}}$$

che viene calcolata imponendo la condizione accessoria che definisce l'impulso  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ , quindi equivalente a porre il sistema

$$\begin{cases} H(q, p) &= p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \\ p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \end{cases}$$

e da questo eliminare le velocità lagrangiane  $\dot{q}$  invertendo la seconda equazione. Ad esempio nel caso dell'oscillatore armonico

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{k}{2} q^2$$

otteniamo l'impulso coniugato

$$p = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{m}{2} 2\dot{q} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

e la trasformata di Legendre di  $\mathfrak{L}$

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q} - \mathfrak{L}(q, \dot{q}) = p\dot{q} - \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{k}{2} q^2 \right) \\ &= p \frac{p}{m} - \frac{m}{2} \frac{p^2}{m^2} + \frac{k}{2} q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \end{aligned}$$

<sup>a</sup>Per semplicità non consideriamo i casi in cui  $\mathfrak{L}$  dipenda esplicitamente dal tempo

## 2.3 Evoluzione temporale

Una teoria fisica ha bisogno di un modo per prevedere, in base ai dati di partenza, quali siano gli stati futuri del sistema per ogni dato istante, cioè di determinare la **evoluzione temporale** dello stato. In meccanica quantistica l'evoluzione temporale è data da una famiglia di operatori sullo spazio degli stati, cioè un operatore dipendente da un parametro continuo (cioè il tempo); questa famiglia di operatori deve rispettare alcune condizioni, in particolare deve formare un **gruppo ad un parametro di operatori unitari** (vedi box)

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_1) \circ \hat{U}(t_2) &= \hat{U}(t_1 + t_2) \\ \hat{U}(t)^{-1} &= \hat{U}(-t) = \hat{U}(t)^* \\ \hat{U}(0) &= \hat{I} \end{aligned} \tag{67}$$

### Strumento 11: Operatori unitari

Un operatore unitario è un operatore  $\hat{U}$  che ammette l'operatore inverso  $\hat{U}^{-1}$ , e per il quale l'inverso coincide con l'aggiunto

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^*$$

Pertanto per un operatore unitario si ha l'identità

$$\hat{U} \circ \hat{U}^* = \hat{I} = \hat{U}^* \circ \hat{U}$$

In MQ gli operatori unitari hanno un ruolo speciale, poiché hanno la proprietà di **conservare il prodotto scalare**. Vuol dire che il prodotto scalare tra i due ket  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  coincide con il prodotto tra i loro trasformati  $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$  e  $|\phi'\rangle = \hat{U}|\phi\rangle$

$$\langle \phi' | \psi' \rangle = \left( \hat{U}|\phi\rangle \right)^* \left( \hat{U}|\psi\rangle \right) = \langle \phi | \hat{U}^* \hat{U} | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$$

Poiché in MQ i prodotti scalari servono per calcolare le ampiezze, che a loro volta permettono di determinare le probabilità, dovrebbe essere chiaro che gli operatori unitari permettono di implementare le simmetrie di una teoria fisica. In termini della procedura di quantizzazione gli operatori unitari corrispondono alle trasformazioni canoniche delle teorie hamiltoniane.

In MQ se l'operatore unitario  $\hat{U}$  implementa una simmetria del sistema allora sia gli stati che gli operatori possono venire trasformati sotto quella simmetria. Ad esempio sia  $\hat{U}$  un operatore uni-

tario che implementa una simmetria; lo stato  $|\psi\rangle$  tramite la simmetria viene trasformato nello stato  $|\phi\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ , e una osservabile  $\hat{A}$  trasforma come segue

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \hat{U}|\psi\rangle \\ \hat{A}' &= \hat{U}\hat{A}\hat{U}^* \end{aligned}$$

Un operatore unitario  $\hat{U}$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  può essere scritto in **forma esponenziale** usando un operatore autoaggiunto  $\hat{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$\hat{U} = e^{i\hat{T}} \quad \hat{T} = \hat{T}^*$$

Quindi l'evoluzione temporale è implementata da una famiglia di operatori unitari dipendente da un parametro (chiaramente il parametro è il tempo). Molte simmetrie in fisica dipendono da uno o più parametri, come per esempio le traslazioni - nel qual caso i parametri sono le componenti del vettore di traslazione - e in questo caso la rappresentazione esponenziale permette di riscrivere in maniera più trasparente le simmetrie.

Le condizioni (67) che abbiamo imposto all'operatore di evoluzione temporale, unite alla rappresentazione esponenziale, permettono di determinare una diversa rappresentazione di questo operatore. Infatti possiamo scrivere un operatore  $\hat{U}(t)$  della famiglia nella seguente forma<sup>10</sup>:

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

L'operatore autoaggiunto  $\hat{H}$  è in realtà l'hamiltoniano del sistema, i cui autostati  $|E\rangle$  corrispondono all'energia meccanica:

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle \quad E \in \mathbb{R}$$

Questo è il motivo per cui abbiamo incluso la costante di Planck ridotta  $\hbar$  nell'argomento dell'esponenziale  $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ : infatti l'operatore  $\hat{H}$  ha le dimensioni di un'energia, mentre il parametro  $t$  ha le dimensioni di un tempo, quindi l'argomento dell'esponenziale  $\frac{i}{\hbar}\hat{H}t$  risulta essere adimensionale, come deve.

Essendo l'hamiltoniano un operatore autoaggiunto abbiamo anche la relazione di completezza relativa agli autostati  $\{|E\rangle\}$ . Nel caso in cui tali autostati formino un insieme discreto  $\{|E\rangle_n\}$  scriviamo

$$\hat{I} = \sum_n |E_n\rangle\langle E_n|$$

Se invece gli autostati  $\{|E\rangle\}$  dell'hamiltoniana formano un insieme non discreto (siano cioè autostati di  $\hat{H}$  dello spettro continuo) scriveremo

$$\hat{I} = \int dE |E\rangle\langle E|$$

Consideriamo il sistema ad un istante iniziale  $t_0$ , lo stato descritto da un vettore  $|\psi\rangle$ ; possiamo determinare lo stato del sistema al generico tempo  $t > t_0$  in questo modo:

$$|\psi'\rangle = \hat{U}(t - t_0)|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi\rangle$$

Finora non avevamo discusso la dipendenza temporale di un sistema fisico. Nel momento in cui si considera l'evoluzione temporale di uno stato, è possibile operare una scelta, tra due diverse rappresentazioni.

<sup>10</sup>Il segno meno nell'esponenziale è più o meno fissato dalla convenzione.

**Rappresentazione di Schrödinger** Nella rappresentazione di Schrödinger (*Schrödinger's picture*) le osservabili sono degli operatori costanti, quindi durante l'evoluzione temporale la dipendenza dal tempo appartiene ai ket:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle \quad (68)$$

#### Esercizio 13: Autostati dell'energia

Determinare la dipendenza dal tempo di un autostato dell'energia  $|E(t)\rangle$  in rappresentazione di Schrödinger

$$|E(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0)|E(t_0)\rangle$$

usando la rappresentazione esponenziale per l'operatore di evoluzione temporale  $\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)$  e la risoluzione dell'identità in termini degli autostati dell'hamiltoniana  $\hat{I} = \sum_n |E_n\rangle\langle E_n|$ .

Possiamo ricavare un'equazione differenziale che descriva l'andamento dello stato  $|\psi(t)\rangle$  in funzione del tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \quad (69)$$

Questa equazione è l'**equazione di Schrödinger** per lo stato  $|\psi(t)\rangle$  relativa all'hamiltoniana  $\hat{H}$ .

Ora possiamo determinare la dipendenza temporale di un elemento di matrice di un operatore  $\hat{A}$  tra gli stati (diciamo)  $|\psi\rangle(t)$  e  $|\phi\rangle(t)$

$$\langle\phi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\phi(t_0)|\hat{U}(t - t_0)^* \hat{A} \hat{U}(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

#### Esempio 1: Elementi di matrice tra autostati dell'energia

Se gli stati  $|\phi\rangle$  e  $|\psi\rangle$  sono autostati dell'energia  $|\psi\rangle = |E\rangle$ ,  $|\phi\rangle = |E'\rangle$  otteniamo

$$\begin{aligned} \langle E'(t)|\hat{A}|E(t)\rangle &= \langle E(t_0)|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\hat{A}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|E(t_0)\rangle \\ &= \langle E(t_0)|e^{\frac{i}{\hbar}E'(t-t_0)}\hat{A}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}|E(t_0)\rangle \\ &= \langle E'(t_0)|\hat{A}|E(t_0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E')(t-t_0)} \end{aligned}$$

Dalla precedente espressione osserviamo che la rappresentazione di Schrödinger non è l'unica possibile: se attribuiamo la dipendenza temporale agli operatori, rappresentando invece gli stati tramite i vettori costanti al tempo iniziale  $t_0$ , otteniamo uno schema in cui i ket sono costanti, mentre gli operatori dipendono dal tempo, la cosiddetta *Heisenberg's picture*.

**Rappresentazione di Heisenberg** Nella rappresentazione di Heisenberg (*Heisenberg's picture*) abbiamo quindi degli stati costanti (per esempio prendiamo per rappresentare lo stato del sistema la condizione iniziale della rappresentazione di Schrödinger) e degli operatori dipendenti dal tempo secondo la seguente definizione (mettiamo in evidenza con dei pedici le due rappresentazioni):



$$|\psi\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_S$$

$$\hat{A}(t)_H = \hat{U}(t-t_0)^* \hat{A}_S \hat{U}(t-t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} \hat{A}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} \quad (70)$$

#### Esercizio 14: Equazione di Heisenberg

Dimostrare, per una osservabile  $\hat{A}(t)$  in rappresentazione di Heisenberg, la cosiddetta **Equazione di Heisenberg**, cioè l'equazione differenziale per la derivata  $\frac{d\hat{A}(t)}{dt}$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}(t) = [\hat{A}(t), \hat{H}]$$

tramite accorta<sup>a</sup> derivazione diretta a partire dalla definizione degli operatori in rappresentazione di Heisenberg (70).

<sup>a</sup>Attenzione: gli operatori in MQ in generale **non commutano**.

Quindi l'**equazione di Heisenberg** descrive l'evoluzione in funzione del tempo delle osservabili in rappresentazione di Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}(t) = [\hat{A}(t), \hat{H}] \quad \hat{A}(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (71)$$

e da questa possiamo calcolare gli elementi di matrice, ottenendo (ovviamente) lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

### 3 Path integral

Usando quanto detto sulla quantizzazione canonica di un sistema meccanico hamiltoniano adesso passiamo a definire la rappresentazione tramite path integral dell'evoluzione temporale. Il punto di partenza è la descrizione, in rappresentazione di Heisenberg, di uno stato generico del sistema tramite un ket costante (*Heisenberg's picture*). Supponiamo di sapere che nello stato iniziale una misura di posizione dia come risultato  $q$ , cioè supponiamo di essere in un autostato della posizione all'istante iniziale. Poiché siamo in rappresentazione di Heisenberg, lo stato sarà costante, mentre l'operatore posizione dipenderà dal tempo, tale condizione si scrive:

$$\hat{q}(t_0)|q\rangle_{t_0} = q|q\rangle_{t_0}$$

Quindi lo stato  $|q\rangle_{t_0}$  è definito dalla condizione di essere un autostato dell'operatore posizione calcolato all'istante iniziale  $\hat{q}(t_0)$ : il pedice  $t_0$  serve ad esplicitare che il SONC (vedi definizione) è composto di autostati dell'operatore posizione calcolato al tempo  $t_0$  con gli autovalori indicati nella notazione del ket: gli stati  $|q\rangle_{t_0}$  non si evolvono col tempo.

#### 3.1 Propagatore

In generale ci interessa calcolare l'ampiezza

$$\mathcal{A}(q', t_B | q, t_A) = {}_{t_B} \langle q' | q \rangle_{t_A} \quad (72)$$

dalla quale possiamo determinare la probabilità che uno stato localizzato in  $q$  al tempo  $t_A$  si propaghi (tramite evoluzione temporale) nella posizione  $q'$  al tempo  $t_B$ , quindi la probabilità di spostarsi da un punto all'altro. Questa ampiezza prende anche il nome di **propagatore**.

Iniziamo dal calcolo preliminare in cui  $t_A$  e  $t_B$  differiscono per un intervallo di tempo molto piccolo (infinitesimo)  $\delta t$ :

$$\mathcal{A}(q', t_A + \delta t | q, t_A) = {}_{t_A + \delta t} \langle q' | q \rangle_{t_A}$$

Per la definizione di operatore in rappresentazione di Heisenberg, la relazione tra  $\hat{q}$  ai due tempi  $t_A$  e  $t_A + \delta t$  è data da

$$\hat{q}(t_A + \delta t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} \hat{q}(t_A) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t}$$

Da qui possiamo dedurre quale relazione intercorre tra gli autostati dei due operatori  $\hat{q}(t_A + \delta t)$  e  $\hat{q}(t_A)$  a tempi diversi, partendo dalla definizione

$$\hat{q}(t_A + \delta t) |q\rangle_{t_A + \delta t} = q |q\rangle_{t_A + \delta t} \quad \hat{q}(t_A) |q\rangle_{t_A} = q |q\rangle_{t_A}$$

ricaviamo la relazione

$$|q\rangle_{t_A + \delta t} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} |q\rangle_{t_A} \quad (73)$$

Notiamo che questa relazione **non** coincide con l'evoluzione degli stati in rappresentazione di Schrödinger vista in (68), sia perché i ket in rappresentazione di Heisenberg non dipendono dal tempo, sia perché l'operatore evoluzione temporale nei due casi esibisce una differenza di segno nell'argomento dell'esponenziale.

#### Strumento 12: Autostati in rappresentazione di Heisenberg

Ricaviamo la relazione (73) tra gli autostati di  $\hat{q}(t_A)$  al tempo  $t_A$  e gli autostati di  $\hat{q}(t_A + \delta t)$  al tempo  $t_A + \delta t$ :

$$\hat{q}(t_A + \delta t) |q\rangle_{t_A + \delta t} = q |q\rangle_{t_A + \delta t} \quad \hat{q}(t_A) |q\rangle_{t_A} = q |q\rangle_{t_A}$$

Per sostituzione da (70) otteniamo

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} \hat{q}(t_A) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} |q\rangle_{t_A + \delta t} = q |q\rangle_{t_A + \delta t}$$

Applicando  $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t}$  ad entrambi i membri

$$\hat{q}(t_A) \left( e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} |q\rangle_{t_A + \delta t} \right) = q \left( e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} |q\rangle_{t_A + \delta t} \right)$$

Cioè  $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} |q\rangle_{t_A + \delta t}$  è autostato di  $\hat{q}(t_A)$  relativo all'autovalore  $q$ , perciò

$$|q\rangle_{t_A} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} |q\rangle_{t_A + \delta t} \quad |q\rangle_{t_A + \delta t} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} |q\rangle_{t_A}$$

Quindi possiamo riscrivere l'ampiezza usando (73) tenendo conto delle proprietà dell'operatore esponenziale ( $\hat{U}(t)^* = \hat{U}(-t)$ ):

$$\mathcal{A}(q', t_A + \delta t | q, t_A) = {}_{t_A + \delta t} \langle q' | q \rangle_{t_A} = {}_{t_A} \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} | q \rangle_{t_A}$$

**Ordinamento:** Quando si quantizza una teoria c'è una difficoltà di principio che inevitabilmente si manifesta: un operatore come l'hamiltoniana, definito in termini di altri operatori (in questo caso  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$ ) che non commutano ha bisogno di una ulteriore specificazione per poter essere ben definito! Vediamola con un esempio: se l'hamiltoniana classica contiene un termine come  $qp^2$ , l'hamiltoniana della teoria quantistica corrispondente potrà contenere uno di questi termini

$$\hat{q}\hat{p}^2 \quad \hat{p}\hat{q}\hat{p} \quad \hat{p}^2\hat{q}$$

Quale scegliere<sup>11</sup>? La scelta va effettuata in maniera consistente, nel senso che c'è bisogno di imporre una regola che permetta di decidere in generale quale di questi termini scegliere: questa è una **regola di ordinamento** del prodotto. Per i nostri scopi scegliamo per gli operatori che sono un prodotto di potenze di  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  la prescrizione di avere tutti i fattori  $\hat{q}$  a sinistra dei fattori  $\hat{p}$ . Possiamo immaginare tale prescrizione anche nel caso multidimensionale a molti gradi di libertà (tenendo conto che operatori posizione e impulso relativi a gradi di libertà diversi commutano tra loro). L'operatore evoluzione temporale è definito però tramite esponenziale, quindi non si riduce ad un semplice prodotto. Possiamo sfruttare però il fatto che per il momento ci limitiamo a considerare l'evoluzione per tempi separati da un intervallo di tempo infinitesimo. Infatti in questo limite abbiamo:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\delta t} \simeq 1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\delta t + \dots$$

al primo ordine in  $\delta t$ . Allora possiamo applicare la prescrizione all'**operatore di evoluzione al primo ordine**  $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\delta t}$ . Nel seguito implicitamente faremo uso di questa circostanza.

### 3.1.1 Path integral nello spazio delle fasi

Pertanto in una espressione come  ${}_A\langle q' | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\delta t \right] | q \rangle_{t_A}$  essendo gli operatori posizione nell'operatore evoluzione al primo ordine tutti disposti a sinistra questi opereranno direttamente solo sul bra  ${}_A\langle q' |$ , quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q', t_A + \delta t | q, t_A) &= {}_A\langle q' | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\delta t \right] | q \rangle_{t_A} \\ &= {}_A\langle q' | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q',\hat{p})\delta t \right] | q \rangle_{t_A} \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo eliminato l'operatore  $\hat{q}$  dall'espressione per l'ampiezza: a questo punto non resta altro da fare che eliminare anche l'operatore  $\hat{p}$ ; ciò può essere realizzato inserendo la risoluzione dell'identità in termini degli autostati dell'impulso

$$\hat{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle_{t_A} {}_A\langle p|$$

tenendo conto che dobbiamo usare per gli stati la rappresentazione di Heisenberg, e della funzione d'onda per autostati dell'impulso, otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q', t_A + \delta t | q, t_A) &= {}_A\langle q' | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q',\hat{p})\delta t \right] \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle_{t_A} {}_A\langle p| | q \rangle_{t_A} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp {}_A\langle q' | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}H(q',p)\delta t \right] | p \rangle_{t_A} {}_A\langle p | q \rangle_{t_A} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp {}_A\langle q' | p \rangle_{t_A} {}_A\langle p | q \rangle_{t_A} e^{-\frac{i}{\hbar}H(q',p)\delta t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar}pq'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{\hbar}pq} e^{-\frac{i}{\hbar}H(q',p)\delta t} \end{aligned}$$

Otteniamo una importante riscrittura dell'ampiezza:

<sup>11</sup>A rigore è possibile usare prescrizioni più complicate, per esempio far corrispondere ad ogni termine classico come  $qp^2$  un termine quantistico  $\frac{1}{3}(\hat{q}\hat{p}^2 + \hat{p}\hat{q}\hat{p} + \hat{p}^2\hat{q})$  ottenuto mediando i tre termini: in questo caso avremmo un ordinamento simmetrico.

$$\mathcal{A}(q', t_A + \delta t | q, t_A) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar} [p(q' - q) - H(q', p)\delta t]} \quad (74)$$

Questa espressione forma la base per il **path integral nello spazio delle fasi**. In generale per calcolare l'ampiezza (72) per tempi  $t_A$  e  $t_B$  non separati da un intervallo infinitesimo sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q', t_B | q, t_A) &= {}_{t_B} \langle q' | q \rangle_{t_A} \\ &= {}_{t_1} \langle q' | \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-1} | q_{N-1} \rangle_{t_{N-1}} \langle q_{N-1} | \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-2} | q_{N-2} \rangle_{t_{N-2}} \cdot \\ &\quad {}_{t_{N-2}} \langle q_{N-2} | \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 | q_1 \rangle_{t_1} \langle q_1 | q \rangle_{t_A} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-2} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 {}_{t_1} \langle q' | q_{N-1} \rangle_{t_{N-1}} \\ &\quad \langle q_{N-1} | q_{N-2} \rangle_{t_{N-2}} \langle q_{N-2} | q_{N-3} \rangle_{t_{N-3}} \cdots {}_{t_2} \langle q_2 | q_1 \rangle_{t_1} \langle q_1 | q \rangle_{t_A} \end{aligned} \quad (75)$$

laddove

$$t_0 = t_A, \quad t_1 = t_0 + \delta t, \quad t_2 = t_1 + \delta t \quad \dots \quad t_{N-1} = t_{N-2} + \delta t, \quad t_N = t_B$$

è una discretizzazione dell'intervallo temporale  $[t_A, t_B]$ . La (75) contiene  $N + 1$  fattori nell'integrando, ognuno dei quali (per  $N$  molto grande) è una ampiezza per tempi  $\delta t$  infinitesimi come (74), quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q', t_B | q, t_A) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-2} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \\ &\quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_{N-1}}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{N-1}(q_{N-1} - q_{N-2}) - H(q_{N-1}, p_{N-1})\delta t]} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar} [p_0(q_1 - q_0) - H(q_1, p_0)\delta t]} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dp_i}{2\pi} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \right) \exp \sum_{i=0}^{N-1} [p_i(q_{i+1} - q_i) - H(q_{i+1}, p_i)\delta t] \end{aligned} \quad (76)$$

L'argomento dell'esponenziale può essere riscritto

$$\sum_{i=0}^{N-1} [p_i(q_{i+1} - q_i) - H(q_{i+1}, p_i)\delta t] = \sum_{i=0}^{N-1} \left[ p_i \frac{q_{i+1} - q_i}{\delta t} - H(q_{i+1}, p_i) \right] \delta t$$

nel limite  $N \rightarrow \infty$  tende all'integrale

$$\int_{t_A}^{t_B} dt (p\dot{q} - H(q, p))$$

Otteniamo quindi nel limite<sup>12</sup> l'ampiezza sotto forma di **path integral nello spazio delle fasi**

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q', t_B | q, t_A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{t=t_A}^{t_B} \frac{dp(t)dq(t)}{2\pi} \right) \times \\ &\quad \times \exp \int_{t_A}^{t_B} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(q, p)]_{q(t_A)=q, q(t_B)=q'} \end{aligned} \quad (77)$$

Gli integrali coinvolti sono vincolati dalle condizioni

$$q(t_A) = q \quad q(t_B) = q'$$

<sup>12</sup>Pertanto mal definito in generale

A causa delle difficoltà matematiche nella definizione di un tale passaggio al limite, conviene tenere in mente lo schema di discretizzazione grazie al quale abbiamo definito l'integrale (76).

Osserviamo ancora l'argomento dell'esponenziale visto sopra: questo integrale ricorda molto da vicino l'integrale del principio variazionale di Hamilton (vedi box **Strumento 10**), ma con una sostanziale differenza: nel caso della corrispondenza tra hamiltoniana  $H(q, p)$  e lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  la funzione  $p(t)$  era fissata dalla condizione della trasformata di Legendre a

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})$$

cioè  $p(t)$  era l'impulso coniugato a  $q(t)$ , per ogni valore di  $t$ , il che porta ad avere soluzioni delle equazioni del moto di Hamilton; invece nel caso quantistico **non c'è alcuna relazione** tra  $q(t)$  e  $p(t)$ , in quanto si tratta di mute variabili di integrazione. Una possibile interpretazione è che il path integral nello spazio delle fasi viene ottenuto sommando i contributi di tutte le possibili storie della particella, anche quelle in cui le equazioni del moto non sono rispettate. Ognuna di queste storie contribuirà all'ampiezza tramite una fase, le storie più lontane dalle equazioni del moto conterranno meno, le storie più vicine alle soluzioni delle equazioni classiche conterranno di più. Ma l'ampiezza totale conterrà comunque tutte le interferenze tra tutte le possibili storie, anche quelle che non rispondono alle equazioni classiche.

Da notare comunque questa circostanza: nel principio variazionale in forma hamiltoniana, quello cioè che usa come azione la azione  $\int_{t_A}^{t_B} dt (p\dot{q} - H(q, p))dt$ , le variazioni rispetto alle quali l'azione è stazionaria **non** richiedono la relazione  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  che definisce l'impulso coniugato a partire dalla lagrangiana: questa relazione infatti viene determinata **come conseguenza della stazionarietà**, infatti solo in questo modo l'azione nella forma hamiltoniana è minimizzata dalle stesse traiettorie che minimizzano l'azione in forma lagrangiana. Nell'approccio del path-integral questo viene tradotto nella teoria quantistica, e il principio di minimo lascia il posto all'interferenza distruttiva tra traiettorie che si allontanano di più dal punto stazionario dell'azione.

#### Strumento 13: Confronto con l'ottica geometrica e ondulatoria

Prendiamo in considerazione l'ottica geometrica: la propagazione della luce rispetta il principio di Fermat, cioè per andare da un punto  $A$  a un punto  $B$  la luce percorre la traiettoria di minimo tempo. Considerando che la velocità locale della luce, in un mezzo, può dipendere sia dal punto considerato sia dalla direzione, otteniamo le normali leggi della rifrazione al variare degli indici di rifrazione. In particolare la velocità della luce in un dato punto all'interno di un mezzo, in funzione della direzione può essere indicata tramite un vettore (vedi figura 1).

La propagazione di un raggio può essere ricostruita tramite la velocità locale punto per punto. Il tempo impiegato nella propagazione dal punto  $\mathbf{q}_A$  al punto  $\mathbf{q}_B$  lungo una data traiettoria (specificata da una funzione  $\mathbf{q}(t)$ ) da un funzionale  $S(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B)$  (analogo a quello dell'azione)



Figura 1: L'indicatrice

$$S(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B) = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_A^B n \frac{ds}{c}$$

laddove  $n$  è l'indice di rifrazione e il parametro  $s$  è la lunghezza della traiettoria della luce. Si può riscrivere l'integrale nella forma

$$S(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B) = \int_A^B \sum_k p_k dq_k$$

calcolato sulla traiettoria, per una opportuna definizione dell'impulso coniugato  $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$ <sup>a</sup>. Il principio di Fermat allora può essere riscritto come un principio di minimo (o meglio, di stazionarietà) di  $S(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B)$

$$\delta S(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B) = 0$$

Quindi l'ottica geometrica è analoga alla meccanica classica. D'altra parte la luce è una manifestazione ondulatoria, e possiamo descriverne la propagazione tramite la propagazione dei **fronti d'onda**. Un fronte d'onda al tempo  $t$  originato da una sorgente è una superficie, il luogo dei punti che possono essere raggiunti a partire dalla sorgente in tempo  $t$ . Il vettore  $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$  in termini geometrici rappresenta la direzione normale al fronte d'onda. Tutti gli effetti previsti dall'ottica sono il risultato dell'interferenza delle onde che costituiscono la luce. Quindi l'ottica ondulatoria è analoga alla meccanica quantistica.

<sup>a</sup>L'impulso coniugato  $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$  ha il nome, datogli da Hamilton, di *lentezza normale del fronte d'onda*, perché maggiore è il valore di questa derivata, maggiore è il tempo richiesto per la propagazione in direzione normale.

### 3.1.2 Molti gradi di libertà

Nel caso in cui il sistema abbia molti gradi di libertà  $\{(q_a, p_a) | a = 1, \dots, n\}$  possiamo estendere l'integrale sopra scritto (77) al caso in cui l'integrazione vada effettuata su molti gradi di libertà:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\{q'_a\}, t_B | \{q_a\}, t_A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{a=1}^n \prod_{t=t_A}^{t_B} \frac{dp_a(t) dq_a(t)}{2\pi} \right) \times \\ &\times \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ \sum_a p_a(t) \dot{q}_a(t) - H(\{q_a\}, \{p_a\}) \right] \begin{matrix} q_a(t_A) &= & q_a \\ q_a(t_B) &= & q'_a \end{matrix} \end{aligned} \quad (78)$$

laddove la scrittura  $H(\{q_a\}, \{p_a\})$  indica che l'hamiltoniana dipende da tutti i gradi di libertà.

#### Strumento 14: Valori medi

Oltre a calcolare le ampiezze il path integral (77) - o (78) - serve anche a determinare valori medi e elementi di matrice tra gli stati  $|q'\rangle_{t'}$  e  $|q\rangle_t$ , di operatori. In generale determiniamo l'elemento di matrice dell'operatore prodotto

$${}_{t_B} \langle q' | \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \cdots | q \rangle_{t_A}$$

laddove gli operatori  $\hat{A}_k(t)$  sono funzioni degli operatori posizione e impulso

$$\hat{A}_k(t) = A(\hat{p}(t), \hat{q}(t))$$

La dipendenza dal tempo degli operatori  $\hat{A}_k(t) = A(\hat{p}(t), \hat{q}(t))$  è dovuta alla dipendenza dal tempo degli operatori posizione e impulso.

**Ordinamento** Contrariamente a quanto fatto per l'operatore hamiltoniano, per gli altri operatori è conveniente da un punto di vista formale adottare l'ordinamento con tutti gli impulsi  $\hat{p}$  a sinistra delle posizioni  $\hat{q}$ .

$$\begin{aligned} {}_{t_B} \langle q' | \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \cdots | q \rangle_{t_A} &= \\ &= {}_{t_B} \langle q' | A_1(\hat{p}(\tau_1), \hat{q}(\tau_1)) A_2(\hat{p}(\tau_2), \hat{q}(\tau_2)) \cdots | q \rangle_{t_A} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{a=1}^n \prod_{t=t_A}^{t_B} dq_a(t) \right) {}_{t_B} \langle q' | \cdots | q_{m+1} \rangle_{t_{m+1}} \\ &\quad \times {}_{t_{m+1}} \langle q_{m+1} | A_1(\hat{p}(\tau_1), \hat{q}(\tau_1)) | q_m \rangle_{t_m} \langle q_m | \cdots | q_{n+1} \rangle_{t_{n+1}} \\ &\quad \times {}_{t_{n+1}} \langle q_{n+1} | A_2(\hat{p}(\tau_2), \hat{q}(\tau_2)) | q_n \rangle_{t_n} \langle q_n | \cdots | q_1 \rangle_{t_1} \langle q_1 | q \rangle_{t_A} \end{aligned}$$

In questa espressione i tempi  $\tau_1, \tau_2$  etc. devono essere ordinati in maniera decrescente  $\tau_1 > \tau_2 > \dots$ , e inoltre

$$\begin{aligned} t_B > t_{N-1} > \cdots > t_{m+1} > \tau_1 = t_m > \cdots \\ &> t_{n+1} > \tau_2 = t_n > \cdots > t_1 > t_A \end{aligned}$$

cioè i tempi  $\tau_i$  devono essere intercalati nella nostra discretizzazione  $\{t_i\}$ . Prendiamo adesso in considerazione i termini in cui sono presenti gli operatori  $\hat{A}_i$ , e inseriamo la risoluzione dell'identità in termini degli autoket  $|p\rangle$ , analogamente a quanto fatto per ricavare il path integral nello spazio delle fasi (77)

$$\begin{aligned} {}_{t_{m+1}} \langle q_{m+1} | A_1(\hat{p}(t_m), \hat{q}(t_m)) | q_m \rangle_{t_m} &= \\ &= {}_{t_m} \langle q_{m+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} A_1(\hat{p}(t_m), \hat{q}(t_m)) | q_m \rangle_{t_m} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_m {}_{t_m} \langle q_{m+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \delta t} | p_m \rangle_{t_m} \times \\ &\quad \times {}_{t_m} \langle p_m | A_1(\hat{p}(t_m), \hat{q}(t_m)) | q_m \rangle_{t_m} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} p_m q_{m+1}} e^{-\frac{i}{\hbar} H(p_m, q_{m+1}) \delta t} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{\hbar} p_m q_m} A_1(p_m, q_m) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_m}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar} [p_m(q_{m+1} - q_m) - H(p_m, q_{m+1}) \delta t]} A_1(p_m, q_m) \end{aligned}$$

Di conseguenza otteniamo una espressione analoga a quella per il propagatore

$$\begin{aligned} {}_{t_B} \langle q' | \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \cdots | q \rangle_{t_A} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{a=1}^n \prod_{t=t_A}^{t_B} \frac{dp_a(t) dq_a(t)}{2\pi} \right) A_1(p_1, q_1) A_2(p_2, q_2) \cdots \times \\ &\quad \times \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ \sum_a p_a(t) \dot{q}_a(t) - H(\{q_a\}, \{p_a\}) \right] \\ &\quad q_a(t_A) = q_a \\ &\quad q_a(t_B) = q'_a \end{aligned}$$

**T-prodotto** Da sottolineare la richiesta che abbiamo fatto sui tempi  $\tau_m$ , cioè che fossero ordinati per tempi decrescenti

$$\tau_1 > \tau_2 > \dots$$

Infatti all'interno del path integral non è possibile dare un diverso tipo di ordinamento: gli operatori  $\hat{A}_k$  vengono sostituiti dalle funzioni  $A_k$ , che essendo funzioni ordinarie commutano tra di loro. Il risultato dell'integrale deve perciò essere il valore atteso per il prodotto degli operatori  $\hat{A}_k$  ordinati temporalmente, cioè il cosiddetto **prodotto T-ordinato**  $T \left\{ \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \dots \right\}$ :

$$\begin{aligned} {}_{t_B} \langle q' | T \left\{ \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \dots \right\} | q \rangle_{t_A} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{a=1}^n \prod_{t=t_A}^{t_B} \frac{dp_a(t) dq_a(t)}{2\pi} \right) A_1(p_1, q_1) A_2(p_2, q_2) \dots \times \\ &\quad \times \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ \sum_a p_a(t) \dot{q}_a(t) - H(\{q_a\}, \{p_a\}) \right] \\ &\quad \begin{aligned} q_a(t_A) &= q_a \\ q_a(t_B) &= q'_a \end{aligned} \end{aligned}$$

#### Esercizio 15: Propagatore particella libera

Scrivere, usando il path integral nello spazio delle fasi, l'ampiezza di transizione  $\mathcal{A}(q', t' | q, t)$  per una particella libera unidimensionale

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$$

In particolare scrivere e determinare l'espressione del path integral usando una discretizzazione temporale  $t_A = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_B$ , con  $t_{k+1} - t_k = \delta t = \frac{t_B - t_A}{N}$ . Per esempio usare  $N = 4$ .

Il calcolo esplicito richiede alcune tecniche che, nonostante siano parecchio usate in teoria dei campi, hanno una definizione matematica alquanto rocambolesca. Pertanto richiederebbe un discorso a parte che esula dallo scopo di queste note.

### 3.1.3 Equivalenza con il path integral lagrangiano

In generale sarebbe necessario usare l'integrale nello spazio delle fasi, effettuando l'integrazione sia sugli impulsi che sulle posizioni. Come abbiamo chiarito sopra, in questo contesto le  $q_a(t)$  e le  $p_a(t)$  **non** sono coordinate canoniche coniugate, le integrazioni vanno effettuate in modo indipendente e non vincolato. In teoria dei campi in realtà spesso si parte dalla formulazione lagrangiana, per cui si preferisce avere la possibilità di avere una formulazione lagrangiana del path integral senza dover passare dall'hamiltoniana. Ad esempio la teoria lagrangiana dei campi permette di costruire teorie di campo relativisticamente invarianti a vista, e tramite i teoremi di Nöther si possono collegare simmetrie e leggi di conservazione direttamente nella teoria lagrangiana.

Sotto opportune condizioni però l'integrale nello spazio delle fasi può venire trasformato direttamente in un integrale sulle sole  $q_a(t)$ , ma in cui invece compare nell'argomento dell'esponentiale l'azione lagrangiana. In teorie in cui l'hamiltoniana è una funzione quadratica degli impulsi  $p_a(t)$  è possibile effettuare direttamente l'integrazione sulle  $p_a(t)$  in (78), la quale



operazione, in questa classe di teorie di campo, è equivalente ad effettuare la sostituzione canonica

$$p_a(t) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_a(t)}$$

eliminando quindi gli impulsi  $p_a(t)$  in favore delle velocità  $\dot{q}_a(t)$ . Otteniamo quindi<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q', t_B | q, t_A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{a=1}^n \prod_{t=t_A}^{t_B} dq_a(t) \right) \times \\ &\times \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \mathfrak{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \Bigg|_{\substack{q_a(t_A) = q_a \\ q_a(t_B) = q'_a}} \end{aligned} \quad (79)$$

**Abbreviazione** Usualmente per semplicità notazionale si definiscono i path-integral come (79) con una notazione più snella, usando un solo simbolo di integrale e introducendo la misura

$$\mathcal{D}q \doteq \prod_{a=1}^n \prod_{t=t_A}^{t_B} dq_a(t)$$

da cui

$$\mathcal{A}(q', t_B | q, t_A) = \int \mathcal{D}q \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \mathfrak{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \Bigg|_{\substack{q_a(t_A) = q_a \\ q_a(t_B) = q'_a}}$$

In questo modo possiamo dare una definizione della misura di integrazione per esempio da un punto di vista pratico, tramite discretizzazione temporale, con la quale abbiamo definito il path-integral come un integrale multiplo (su molte variabili). Questo permette di effettuare i calcoli al computer, per esempio (maggiormente in teoria di campo, laddove la definizione su reticolo mette in condizioni di lavorare tramite opportuni programmi alla determinazione di quantità fisiche importanti).

#### Strumento 15: Valori medi, formalismo lagrangiano

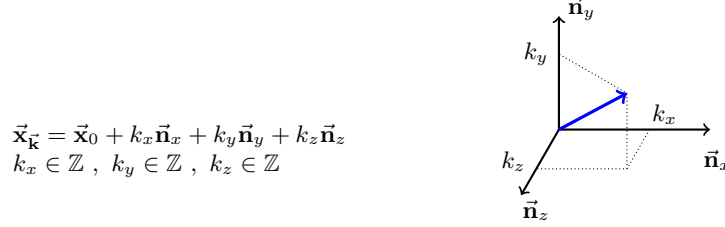
Estendiamo anche ai valori medi considerati in precedenza l'equivalenza con la formulazione lagrangiana, considerando il prodotto T-ordinato di operatori  $T \left\{ \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \cdots \right\}$ ; l'unica considerazione da fare è che nella formulazione lagrangiana non avremo operatori dipendenti anche dagli impulsi  $\hat{p}_a$ : questa non è una limitazione importante perché tipicamente possiamo riscrivere l'operatore nella forma lagrangiana, partendo da espressioni con le sole coordinate  $\hat{q}_a$ .

$$\begin{aligned} t_B \langle q' | T \left\{ \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \cdots \right\} | q \rangle_{t_A} &= \int \mathcal{D}q A_1(q_1) A_2(q_2) \cdots \times \\ &\times \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \mathfrak{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \Bigg|_{\substack{q_a(t_A) = q_a \\ q_a(t_B) = q'_a}} \end{aligned}$$

<sup>13</sup>In questo risultato abbiamo soppresso un fattore di normalizzazione che in buona parte dei casi è costante (indipendente dalle variabili dinamiche). In alcuni casi invece questo fattore contribuisce a modificare la lagrangiana, ma non ci preoccuperemo di queste problematiche di carattere più avanzato.

### 3.2 Le teorie di campo

In una teoria di campo l'ente la cui dinamica viene studiata è un campo, cioè una funzione  $\Phi(x, t)$  definita (nei casi di nostro interesse) in ogni punto dello spazio-tempo. Per generalizzare il nostro trattamento, che parte da un insieme discreto di coordinate  $q_k(t)$ , dobbiamo immaginare che lo spazio venga discretizzato, cioè invece di considerare punti qualunque del continuo spaziale consideriamo solo i nodi di un reticolo



$$\vec{x}_{\vec{k}} = \vec{x}_0 + k_x \vec{n}_x + k_y \vec{n}_y + k_z \vec{n}_z$$

$$k_x \in \mathbb{Z}, k_y \in \mathbb{Z}, k_z \in \mathbb{Z}$$

Figura 2: Riferimento per il reticolo

Le coordinate canoniche che descrivono lo stato del sistema sono

$$q_{\vec{k}}(t) = \Phi(\vec{x}_{\vec{k}}, t)$$

e gli impulsi coniugati

$$p_{\vec{k}}(t) = \Pi(\vec{x}_{\vec{k}}, t)$$

e di conseguenza il propagatore per i campi (path integral nello spazio delle fasi):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\{\Phi'(\vec{x})\}, t_B | \{\Phi(\vec{x})\}, t_A) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{\vec{k}} \prod_{t=t_A}^{t_B} \frac{d\Pi(\vec{x}_{\vec{k}}, t) d\Phi(\vec{x}_{\vec{k}}, t)}{2\pi} \right) \times \\ &\times \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ \sum_{\vec{k}} \Pi(\vec{x}_{\vec{k}}, t) \dot{\Phi}(\vec{x}_{\vec{k}}, t) - H(\Phi, \Pi) \right] \\ &\quad \begin{cases} \Phi(\vec{x}_{\vec{k}}, t_A) = \Phi(\vec{x}_{\vec{k}}) \\ \Phi(\vec{x}_{\vec{k}}, t_B) = \Phi'(\vec{x}_{\vec{k}}) \end{cases} \quad (80) \end{aligned}$$

Allo stesso modo visto precedentemente possiamo dare la formulazione del propagatore tramite path integral lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\{\Phi'(\vec{x})\}, t_B | \{\Phi(\vec{x})\}, t_A) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{\vec{k}} \prod_{t=t_A}^{t_B} d\Phi(\vec{x}_{\vec{k}}, t) \right) \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ \sum_{\vec{k}} \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ \sum_{\vec{k}} \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) \right] \\ &\quad \begin{cases} \Phi(\vec{x}, t_A) = \Phi(\vec{x}) \\ \Phi(\vec{x}, t_B) = \Phi'(\vec{x}) \end{cases} \quad (81) \end{aligned}$$

e per gli elementi di matrice:

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(\vec{x}), t_B | T \left\{ A_1(\hat{\Phi}(\vec{x}_1, \tau_1)) A_2(\hat{\Phi}(\vec{x}_2, \tau_2)) \cdots \right\} | \Phi(\vec{x}), t_A \rangle &= \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ \sum_{\vec{k}} \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) \right] A_1(\Phi(\vec{x}_1, \tau_1)) A_2(\Phi(\vec{x}_2, \tau_2)) \cdots \\ &\quad \begin{cases} \Phi(\vec{x}, t_A) = \Phi(\vec{x}) \\ \Phi(\vec{x}, t_B) = \Phi'(\vec{x}) \end{cases} \quad (82) \end{aligned}$$

In particolare saranno importanti da calcolare quantità come

$$\langle \Phi'(\vec{x}), t_B | T \left\{ \hat{\Phi}(\vec{x}_1, \tau_1) \hat{\Phi}(\vec{x}_2, \tau_2) \cdots \right\} | \Phi(\vec{x}), t_A \rangle$$

che saranno le nostre **funzioni di correlazione** elementari.

Dobbiamo fare una precisazione. Nella teoria di campo la variabile  $\Phi(\vec{x}, t)$  dipende, oltre che dal tempo  $t$ , anche dal punto  $\vec{x}$  nello spazio in cui il campo viene calcolato. Come abbiamo detto quest'ultima variabile rappresenta una specie di “generalizzazione nel continuo” dell'indice che distingueva ciascuna coordinata relativa ad ogni grado di libertà  $q_k(t)$ . Così come normalmente la lagrangiana di una teoria meccanica contiene una somma di termini relativi ad ogni grado di libertà (quindi una somma  $\sum_k$ ), anche la lagrangiana in teoria di campo conterrà l'equivalente, vale a dire un integrale (multiplo) su  $\vec{x}$ , in tre dimensioni spaziali per esempio  $\int_V d^3\vec{x}$ , in un certo dominio  $V$

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \int_V d^3\vec{x} \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, \dot{\Phi})$$

Abbiamo scritto esplicitamente che la **densità di lagrangiana**  $\mathcal{L}$  dovrà dipendere anche dal gradiente del campo  $\Phi$ : non c'è dubbio che termini dipendenti dal gradiente dei campi debbano esistere, infatti questi sono necessari perché la nostra teoria di campo esibisca comportamento da meccanica ondulatoria di un mezzo continuo; il gradiente del campo ha un equivalente discreto: infatti spesso in un sistema meccanico a molti corpi compare un termine di interazione a due corpi dipendente dalla differenza tra le posizioni dei due corpi  $\vec{q}_k - \vec{q}_j$ ; immaginiamo per esempio una catena di particelle, ognuna identificata dalla sua posizione  $\vec{q}_i$ , legate a due a due da un qualche potenziale (magari armonico, ma non è necessario), allora il potenziale dipende da termini della forma

$$\vec{q}_{k+1} - \vec{q}_k$$

Tale termine ha come limite continuo proprio il gradiente:

$$\vec{q}_{k+1} - \vec{q}_k \rightsquigarrow a \nabla \Phi$$

In effetti dobbiamo includere in  $\mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, \dot{\Phi})$  il termine di gradiente perché non abbiamo alcun buon motivo per escluderlo!

In una teoria relativistica è naturale conglomerare le derivate spaziali e temporali nel gradiente spaziotemporale  $\partial_\mu \Phi$ , e lo stesso per l'integrale:

$$\mathcal{S}[\Phi] = \int_{t_A}^{t_B} dt \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \int_{t_A}^{t_B} dt \int_V d^3\vec{x} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \int_{V^4} d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

laddove l'ultimo integrale è esteso alla regione dello spazio-tempo  $V^4$  che ci interessa.

### 3.3 I termini di $\mathcal{L}$

Quali termini possiamo (o dobbiamo) ammettere in  $\mathcal{L}$ ? In realtà in un certo senso ci tocca inserire nella lagrangiana i termini che non possiamo escludere a priori. In questa introduzione ci limiteremo a termini fondamentali, tanto per cominciare inizieremo a scrivere la lagrangiana per dei campi liberi (cioè senza interazioni). Subito però vedremo che sarà un importante principio a indurci a scrivere il primo termine di interazione. Cominciamo con il campo scalare neutro (cioè non carico<sup>14</sup>).

<sup>14</sup>Informalmente anche *campo scalare scarico*.

E' una pervasiva abitudine della teoria di campo quella di usare le cosiddette **unità naturali (o assolute)**, in cui cioè si ha

$$\hbar = 1 \quad c = 1$$

Va da sé che in queste unità di misura anche le dimensioni delle grandezze vanno adattate al caso. Infatti per esempio porre  $c = 1$  implica che nel nostro sistema di unità gli intervalli di tempo e le lunghezze **hanno le stesse dimensioni**. Ciò semplifica i ragionamenti relativistici, perché possiamo fare a meno di ricordarci del fatto che le coordinate spaziotemporali del quadrivettore posizione di un evento debbano includere la velocità della luce:

$$x^\mu = (t, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Ovviamente le velocità saranno adimensionali. Un'altra conseguenza è un po' meno ovvia, e cioè che poiché anche  $\hbar = 1$  abbiamo che la massa ha le stesse dimensioni dell'inverso di una lunghezza! Infatti

$$1 \sim [\hbar] \sim [px] \sim [mvx] \sim [mx]$$

Inoltre, poiché l'energia di un fotone è  $E = \hbar\omega$ , allora anche l'energia ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza (ovvero di un tempo), quindi energia e massa hanno le stesse dimensioni, cosa che si evince anche dalla relazione di Einstein  $E = mc^2$  considerato che  $c = 1$ . La quantità di moto (impulso lineare) ha anch'essa le dimensioni di una massa. Il conteggio dell'esponente della massa nelle dimensioni di un termine di interazione ha delle conseguenze molto importanti nell'analisi delle teorie di campo, ma in questa breve introduzione non potremo addentrarci in questi aspetti.

### 3.3.1 Campo scalare

Usiamo la lettera  $\phi$  per indicare il campo scalare. Ricordiamo che  $\phi$  è una funzione sia del punto che del tempo, quindi  $\phi = \phi(\vec{x}, t)$ . Per semplicità indichiamo con  $x$  senza alcun altro segno il quadrivettore  $(t, \vec{x}) = (x^0, x^i)$ , quindi  $\phi = \phi(x)$ . Sotto una trasformazione di Lorentz  $\Lambda^\mu_\nu$  il campo scalare si trasforma secondo la più semplice delle regole:

$$\phi(x^\mu) \mapsto \phi'((\Lambda x)^\mu) = \phi(x^\mu)$$

La più semplice (densità di) lagrangiana che descrive l'evoluzione temporale di un campo che rappresenta una particella puntiforme, neutra, priva di altri gradi di libertà a parte quelli relativi al suo centro di massa è

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

laddove  $m$  è la massa di tale particella. Il termine che contiene le derivate  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  ha il nome di termine cinetico, ed è l'unico termine relativisticamente invariante che possiamo scrivere che contiene due derivate del campo. Il termine di massa  $-\frac{1}{2} m^2 \phi^2$  invece non contiene derivate.

Perché le equazioni del moto dei campi bosonici (come quello elettromagnetico o quello scalare) possano dare la propagazione per onde nella lagrangiana dobbiamo avere un termine cinetico come quello scritto sopra, per esempio per il campo scalare:

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$$

Questo termine deve avere dimensioni tali che l'integrale d'azione sia adimensionale (come abbiamo visto sopra), quindi la lagrangiana (e perciò ogni suo termine) dovrà avere dimensione pari a  $L^{-4}$ <sup>a</sup>

$$1 = \left[ \int d^4x \mathcal{L} \right] = [d^4x] \cdot [\mathcal{L}] = L^4 \cdot [\mathcal{L}] \Rightarrow [\mathcal{L}] = L^{-4} = M^4$$

Questa richiesta, applicata al termine cinetico del campo scalare, impone che quest'ultima abbia dimensioni di una massa (o dell'inverso di una lunghezza):

$$L^{-4} = [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] = [\partial_\mu]^2 [\phi]^2 = L^{-2} [\phi]^2 \Rightarrow [\phi] = \frac{1}{L} = M$$

<sup>a</sup> $L$  indica le dimensioni di una lunghezza,  $M$  le dimensioni di una massa.

Le equazioni di Euler-Lagrange che possiamo ricavare da tale densità di lagrangiana sono

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0 \quad \partial_\mu (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi = 0$$

Cioè otteniamo l'equazione d'onda per il campo scalare massivo:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Questa equazione rappresenta il campo di una particella libera, la mancanza di interazioni si deduce dalla linearità dell'equazione.

To Be Continued...